



**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

r-İNJEKTİF MODÜLLER

Yüksek Lisans Tezi

Derya DUMAN YAZICI

Danışman
Prof. Dr. Celil NEBİYEV

SAMSUN
2023

**T.C.
ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI**



r-İNJEKTİF MODÜLLER

Yüksek Lisans Tezi

Derya DUMAN YAZICI

Danışman
Prof. Dr. Celil NEBİYEV

SAMSUN
2023

TEZ KABUL VE ONAYI

Derya DUMAN YAZICI tarafından, **Prof. Dr. Celil NEBİYEY** danışmanlığında hazırlanan “**r-İNJEKTİF MODÜLLER**” başlıklı bu çalışma, jürimiz tarafından 24.8.2023 tarihinde yapılan sınav sonucunda oy birliği ile başarılı bulunarak Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Unvanı Adı Soyadı Üniversitesi Ana Bilim/Ana Sanat Dalı	Sonuç
Başkan	Prof. Dr. Celil NEBİYEY Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Figen ERYILMAZ Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Ana Bilim Dalı	☒ Kabul ☐ Ret
Üye	Doç. Dr. Berna KOŞAR Üsküdar Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Yazılım Mühendisliği Bölümü	☒ Kabul ☐ Ret

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen ve yukarıda adları yazılı jüri üyeleri tarafından uygun görülmüştür.

Prof. Dr. Ahmet TABAK
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Hazırladığım Yüksek Lisans tezinin bütün aşamalarında bilimsel etiğe ve akademik kurallara riayet ettiğimi, çalışmada doğrudan veya dolaylı olarak kullandığım her alıntıya kaynak gösterdiğimi ve yararlandığım eserlerin Kaynaklar'da gösterilenlerden oluştuğunu, her unsurun enstitü yazım kılavuzuna uygun yazıldığını ve TÜBİTAK Araştırma ve Yayın Etiği Kurulu Yönetmeliği'nin 3. bölüm 9. maddesinde belirtilen durumlara aykırı davranılmadığını taahhüt ve beyan ederim.

Etik Kurul Gerekli mi ?

Evet ☐ (Gerekli ise ekler kısmına ekleyiniz)

Hayır ☒

24/08/2023

Derya DUMAN YAZICI

TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI

Tez Başlığı : r-İNJEKTİF MODÜLLER

Yukarıda başlığı belirtilen tez çalışması için şahsım tarafından 09/06/2023 tarihinde intihal tespit programından alınmış olan özgünlük raporu sonucunda;

Benzerlik oranı : % 8

Tek kaynak oranı : % 1 çıkmıştır.

24/08/2023

Prof. Dr. Celil NEBİYEYEV

ÖZET

r-İNJEKTİF MODÜLLER

Derya DUMAN YAZICI

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Yüksek Lisans, Ağustos/2023

Danışman: Prof. Dr. Celil NEBİYEYEV

M ve N iki R -modül olsun. Eğer $\text{Rad}N \leq g(K)$ olan her $g: K \rightarrow N$ R -modül monomorfizması ve her $f: K \rightarrow M$ R -modül homomorfizması için $hog=f$ olacak şekilde en az bir $h: N \rightarrow M$ R -modül homomorfizması varsa M modülüne bir radikal N -injektif (kısaca r - N -injektif) modül denir. Eğer M modülü her T R -modülü için radikal T -injektif ise M modülüne bir radikal injektif (kısaca r -injektif) modül denir. Bu tez çalışmasında r -injektif modül kavramı ele alındı ve bu kavramla ilgili birtakım özellikler incelendi. Bu çalışmada tüm modüller birimli halka üzerinde olup üniter modüllerdir. Açıkta ki N bir R -modül olmak üzere her N -injektif modül r - N -injektiftir. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir. M ve N iki R -modül ve N modülünün her K alt modülü $K + \text{Rad}N$ modülünün bir direkt toplam terimi olsun. Bu durumda M modülünün r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul M modülünün N -injektif olmasıdır. M ve N iki R -modül olsun. Bu durumda M modülünün r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul $\text{Rad}N \leq K$ olan her $K \leq N$ ve her $f: K \rightarrow M$ R -modül homomorfizması için $i: K \rightarrow N$ içerme dönüşümü olmak üzere $hoi=f$ olacak şekilde bir $h: N \rightarrow M$ R -modül homomorfizmasının bulunabilmesidir. N bir R -modül, $K \leq N$ ve $\text{Rad}N \leq K$ olsun. Eğer K modülü r - N -injektif ise K modülü N 'nin bir direkt toplam terimi olur. Bu tez çalışmasında N bir R -modül olmak üzere r - N -injektif modüllerin çarpımının ve direkt toplamının da r - N -injektif olduğu gösterildi. Ayrıca r - N -injektif bir modülün her direkt toplam teriminin de r - N -injektif olduğu gösterildi. N bir R -modül olsun. Bu durumda her R -modülün r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul N modülünün $\text{Rad}N$ 'yi kapsayan her alt modülünün N 'nin bir direkt toplam terimi olmasıdır. R bir halka olsun. Bu durumda her R -modülün r -injektif olması için gerek ve yeter koşul her R -modülün injektif olmasıdır. Tezin sonunda konu ile ilgili dört tane örnek verilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Küçük alt modül, Radikal, Tam dizi, İnjektif modül.

ABSTRACT

r-INJECTIVE MODULES

Derya DUMAN YAZICI

Ondokuz Mayıs University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

M.A., August/2023

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Celil NEBİYEYEV

Let M and N be two R -modules. If for each $g: K \rightarrow N$ R -module monomorphism satisfying $\text{Rad}N \leq g(K)$ and every $f: K \rightarrow M$ R -module homomorphism, there exists at least one $h: N \rightarrow M$ R -module homomorphism such that $h \circ g = f$, then M is called a radical N -injective (briefly, r - N -injective) module. If the module M is radical T -injective for every R -module T , then M is called a radical injective (briefly, r -injective) module. In this thesis, the concept of r -injective module is considered and some properties related to this concept are investigated. All modules are unitary modules over the ring with unity, in this study. It is clear that for an R -module N , every N -injective module is r - N -injective. But the converse is not true in general. Let M and N be two R -modules, and let every submodule K of N be a direct summand of $K + \text{Rad}N$. In this case, M is r - N -injective if and only if M is N -injective. Let M and N be two R -modules. In this case, M is r - N -injective if and only if for every $K \leq N$ with $\text{Rad}N \leq K$ and every $f: K \rightarrow M$ R -module homomorphism, there exists an R -module homomorphism $h: N \rightarrow M$ such that $h \circ i = f$ with an inclusion map $i: K \rightarrow N$. Let N be an R -module, $K \leq N$ and $\text{Rad}N \leq K$. If K is r - N -injective, then K is a direct summand of N . In this thesis, it is shown that the product and the direct sum of r - N -injective modules are also r - N -injective, given that N is an R -module. Furthermore, it is shown that every direct summand of an r - N -injective module is also r - N -injective. Let N be an R -module. In this case, every R -module is r - N -injective if and only if every submodule of N containing $\text{Rad}N$ is a direct summand of N . Let R be a ring. In this case, every R -module is r -injective if and only if every R -module is injective. Four examples related to the topic are provided at the end of the thesis.

Keywords: Small submodule, Radical, Exact sequence, Injective module.

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimde tez danışmanlığımı üstlenerek beni onurlandıran, tez çalışması sırasında çok kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve her zaman destek olan çok değerli danışman hocam Sayın Prof. Dr. Celil NEBİYEV'e teşekkürü borç bilirim. Bu süreçte maddi ve manevi desteğini sağlayan ve beni cesaretlendirip , başarabileceğime inandıran çok kıymetli eşim Mustafa YAZICI'ya ve manevi ve teknik destekleriyle hep yanımda olan çok değerli kardeşim Beytullah DUMAN'a, manevi kardeşim Elif YAZICI'ya, hayatım boyunca destekleri ile hep yanımda olan,tavsiyeleri ile yol gösteren, bugün geldiğim noktada en büyük paya sahip olan çok sevgili annem Emine DUMAN'a , yanlışı doğruyu kendisinden görerek öğrendiğim her zaman yanımda olduğunu hissettiğim sevgili babam Ahmet DUMAN'a, beni evlatlarından ayırmayan çok değerli kayınvalidem Mine YAZICI'ya ve çok sevgili kayınpederim Erol YAZICI'ya sonsuz sevgi, saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Ağustos,2023

Derya DUMAN YAZICI

İÇİNDEKİLER

TEZ KABUL VE ONAYI	i
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI	ii
TEZ ÇALIŞMASI ÖZGÜNLÜK RAPORU BEYANI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	2
2.1. Literatür Özeti	2
2.2. Modüller	2
3. MATERYAL VE YÖNTEM	25
3.1. İnjektif Modüller	25
3.2. Küçük Alt Modüller	36
3.3. Bir Modülün Radikali	38
3.4. Oyuk ve Lokal Modüller.....	41
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	45
4.1.1. r-İnjektif Modüller.....	45
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	61
KAYNAKÇA	62
ÖZGEÇMİŞ.....	63

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar halkası
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel Sayılar cismi
$\subset$	: Alt Küme
$\leq$	: Alt modül
$\ll$	: Küçük alt modül
$\trianglelefteq$	: Büyük alt modül
1_R	: R halkasının birim elamanı (çarpımsal birim)
0_R	: R halkasının sıfır elamanı (toplamsal birim)
R -Modül	: R halkası üzerinde tanımlanan modül
${}_R M$	: Sol R -modül
$\langle X \rangle$	: X kümesi tarafından üretilen alt modül
Rm	: m elemanı tarafından üretilen devirli alt modül
M / N	: M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$Görf$	: f modül homomorfizmasının görüntüsü
$Çekf$	: f modül homomorfizmasının çekirdeği
I_M veya 1_M	: M modülünün birim homomorfizması
$End(M)$	: M modülünün bütün endomorfizmalar kümesi
$\sum_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modül ailesinin toplamı
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ alt modül ailesinin dış direkt toplamı
$\bigoplus_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ modül ailesinin iç direkt toplamı
$\prod_{i \in I} M_i$	: $\{M_i\}_{i \in I}$ modül ailesinin direkt çarpımı
$M \oplus N$	: M ve N modüllerinin direkt toplamı
$\cong$	: İzomorfizma
$RadM$	: M modülünün radikali

1. GİRİŞ

Bu tez 5 bölümden oluşmaktadır. Kaynak özetinde daha önceden yapılmış çalışmalardan bahsedilmiştir. Genel bilgiler bölümünde modül, alt modül, bölüm modülü, homomorfizma, modüllerin çarpımı, direkt toplam, tam dizi, kısa tam dizi tanımları verilmiştir. Ayrıca bu kavramlarla ilgili çalışmamıza yön veren bazı temel özelliklere yer verilmiştir.

Materyal ve Yöntem bölümünde injektif modüller, küçük alt modüller, bir modülün radikali, oyuk ve lokal (veya yerel) modül kavramlarına yer verilmiştir. Bu kavramlar ile ilgili tezde kullanılacak önemli teoremlere, ispatlarına ve bu teoremlerden çıkan sonuçlara değinilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünde r -injektif modül tanımı verilmiştir. Bu modül ile ilgili bazı teoremlere ve ispatlarına değinilmiştir. Bunlarla ilgili örnekler verilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde tez konum ile ilgili bir literatür özeti yapıldıktan sonra bu çalışmamda temel oluşturan modül tanımı ve bu tanımın çalışmam ile bağlantılı olduğu özellikler incelenmiştir.

2.1. Literatür Özeti

G. Arzumaya, F. Mbuntum ve K. Varadarajan 1975 tarihinde yayınlamış oldukları “On M -projective and M -injective modules” isimli makalelerinde injektif modüllerle ilgili bazı özellikleri incelemişlerdir. G. F. Birkenmeier 1976 tarihinde yayınlamış olduğu “On the cancellation of quasi-injective modules” ve “Self-injective rings and the minimal direct summand containing the nilpotents” isimli makalelerinde ve 1978 yılında yayınlamış olduğu “Modules which are subisomorphic to injective modules” isimli makalesinde injektif modüller üzerine çalışmıştır. K.R. Goodearl 1976 tarihinde yayınlamış olduğu “Direct sum properties of quasi-injective modules” isimli makalesinde injektif modüllerin direkt toplamaları üzerine çalışmıştır. D. Hill 1982 tarihinde yayınlamış olduğu “Rings whose indecomposable injective modules are uniserial” isimli makalesinde injektif modüller üzerine çalışma yapmıştır. A. Pancar ve B. Nişancı Türkmen 2014 tarihinde yayınlamış oldukları ‘İnjektif modüllere giriş’ isimli kitaplarında injektif modüllerle ilgili detaylı bilgiler vermişlerdir.

2.2. Modüller

Tanım 2.2.1. R bir halka ve K bir değişmeli grup olduğunu varsayalım. $f: R \times K \rightarrow K$ bir fonksiyon olmak üzere $f(r, k) \in K$ ’yi rk ile gösterelim. $\forall r, r_1, r_2 \in R$ ve $\forall k, k_1, k_2 \in K$ için,

$$(i) \quad r(k_1 + k_2) = rk_1 + rk_2$$

$$(ii) \quad (r_1 + r_2)k = r_1k + r_2k$$

$$(iii) \quad (r_1r_2)k = r_1(r_2k)$$

oluyorsa, K ’ya bir sol R -modül veya kısaca R -modül denir ve ${}_R K$ veya yalnızca K ile gösterilir.

(iv) Eğer R bir birimli halka ve $\forall k \in K$ için $1_R k = k$ oluyorsa, K ’ya bir üniter sol R -modül ya da kısaca üniter R -modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Bu çalışmada bütün modüller üniter modül olarak ele alınacaktır. Ayrıca K bir R -modül ise $(K, +)$ 'nin birim elemanı çoğunlukla 0 ile gösterilecektir.

Teorem 2.2.2. K bir R -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

- (i) Her $r \in R$ için $r0 = 0$ olur.
- (ii) Her $k \in K$ için $0_R k = 0$ olur.
- (iii) Her $r \in R$ ve her $k \in K$ için $(-r)k = r(-k) = -(rk)$ olur.
- (iv) Her $r \in R$, her $k \in K$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $(nr)k = r(nk) = n(rk)$ olur (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.3. K bir R -modül ve $\emptyset \neq L \subset K$ için L , K 'daki işlemlere göre kendi başına bir R -modül ise L 'ye K 'nın bir alt modülü denir ve çoğunlukla $L \leq K$ ile ifade edilir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.4. K bir R -modül ve $\emptyset \neq L \subset K$ olmak üzere L 'nin bir alt modül olması için gerek ve yeter şart her $l_1, l_2 \in L$ ve her $r \in R$ için $l_1 - l_2 \in L$ ve $rl_1 \in L$ olmasıdır (Hungerford, 1974).

Bu koşula göre $\{0\}$ ve K 'nin kendisi K 'nın birer alt modülüdür. Bu alt modüllere K 'nın aşikar alt modülleri denir. K 'nın eğer varsa kendisinden farklı alt modüllerine de K 'nin öz alt modülleri denir ve L , K 'nin bir öz alt modülü ise bu çoğunlukla $L < K$ ile ifade edilir. Ayrıca $L \leq K$ ise K modülüne L modülünün bir genişlemesi adı verilir. Burada her modül kendisinin bir genişlemesidir.

Teorem 2.2.5. K modülünün keyfi sayıdaki alt modüllerinin arakesiti de K 'nin bir alt modülüdür (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.6. K modülünde H kümesini kapsayan K 'nin bütün alt modüllerinin arakesitine H tarafından üretilen alt modül denir ve bu alt modül çoğunlukla $\langle H \rangle$ ile gösterilir. Diyelim ki H sonlu elemanlı olsun. O zaman H 'nin ürettiği alt modüle bir sonlu üretilmiş alt modül ve $H = \{a\}$ şeklinde tek elemanlı ise $\langle H \rangle = \langle a \rangle$ modülüne bir devirli alt modül adı verilir.

Diyelim ki $K = \langle H \rangle$ ve H sonlu elemanlı olsun. O zaman K 'ya bir sonlu üretilmiş R -modül, $K = \langle a \rangle$ olacak biçimde $\exists a \in K$ varsa K 'ya a elemanı tarafından üretilmiş bir devirli R -modül denir (Hungerford, 1974).

Not: Boş kümenin ürettiği alt modül sıfırdır.

Tanım 2.2.7. K bir R -modül ve H , K 'nın bir alt kümesi olduğunu kabul edelim. Bu durumda H 'nin elemanlarına $\langle H \rangle$ alt modülünün üreteçleri denir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.8. K bir R -modül ve $\emptyset \neq H \subset K$ olmak üzere

$$\langle H \rangle = \{r_1 h_1 + r_2 h_2 + \dots + r_n h_n \mid r_1, r_2, \dots, r_n \in R, h_1, h_2, \dots, h_n \in H, n \in \mathbb{Z}^+\}$$

şeklindedir (Hungerford, 1974).

Sonuç 2.2.9. K bir R -modül ve $H \subset K$ olmak üzere $H = \{a\}$ ise $\langle a \rangle = Ra$ olur (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.10. K bir R -modül ve L de K 'nin bir alt modülü olduğunu kabul edelim. Böylece K/L bölüm grubu

$$\cdot : R \times (K/L) \rightarrow K/L, (r, k+L) \rightarrow r(k+L) = rk+L$$

ile ifade edilen dış işleme göre bir R -modül yapısına sahiptir. Bu module K 'nın L 'ye göre bölüm modülü denir. (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.11. K bir R -modül ve $L \leq K$ olduğunu kabul edelim. $P \rightarrow P/L$ ile tanımlı K 'nın L 'yi kapsayan alt modülleri ile K/L 'nin alt modülleri bire bir eşleştirilebilir. Böylece K/L nin her alt modülü P , K 'nın L 'yi kapsayan bir alt modülü olmak üzere P/L şeklindedir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.12. L, F, P bir R -modülün alt modülleri, $P \leq L$ ve $P \leq F$ olsun. Bu durumda $L/P = F/P$ olması için gerek ve yeter şart $L = F$ olmalıdır (Koşar, 2008).

İspat:($\Rightarrow$) $L/P = F/P$ olduğunu kabul edelim. Herhangi bir $l \in L$ aldığımızda $l \in L$ olduğu için $l+P \in L/P = F/P$ olup $l+P = f+P$ olacak biçimde $\exists f \in F$ vardır. $l+P = f+P$ olduğu için $l-f \in P$ olup $l-f = p$ olacak biçimde $\exists p \in P$ vardır. $l-f = p$ olduğu için $l = f+p$ olur. Burada $p \in P$ ve $P \leq F$ olduğundan $p \in F$

olur, ayrıca $f \in F$ olduğu için $l = f + p \in F$ olur. O zaman $L \subset F$ olur. Benzer biçimde buradaki L yerine F , F yerine L yazılırsa $F \subset L$ olduğu da görülebilir. O halde $L=F$ olur ve istenen elde edilir.

($\Leftarrow$) Aşıkardır.

Tanım 2.2.13. K ve L iki R -modül olsun. Eğer $f: K \rightarrow L$ fonksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlarsa f 'ye bir R -modül homomorfizması veya yalnızca homomorfizma denir.

(i) Her $k_1, k_2 \in K$ için $f(k_1 + k_2) = f(k_1) + f(k_2)$

(ii) Her $k \in K$ ve her $r \in R$ için $f(rk) = rf(k)$

Eğer f homomorfizması birebir ise f 'ye bir monomorfizma (R -modül monomorfizması), örten ise bir epimorfizma (R -modül epimorfizması), birebir ve örten ise bir izomorfizma (R -modül izomorfizması) denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.14. Her $k \in K$ için $f(k) = 0_L$ şeklinde tanımlı $f: K \rightarrow L$ fonksiyonu bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya sıfır homomorfizma denir ve çoğunlukla 0 ile gösterilir. Her $k \in K$ için $g(k) = k$ şeklinde tanımlı $g: K \rightarrow K$ fonksiyonu da bir homomorfizmadır. Bu homomorfizmaya ise birim homomorfizma denir ve çoğunlukla I_K veya 1_K ile gösterilir. Kabul edelim ki K bir R -modül ve $L \leq K$ olsun. Her $l \in L$ için $i(l) = l$ şeklinde tanımlı $i: L \rightarrow K$ fonksiyonu bir monomorfizmadır, bu monomorfizmaya içirme monomorfizması (içerme dönüşümü) denir (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.15. K ve L iki R -modül olmak üzere, K 'dan L 'ye tanımlanan bütün homomorfizmaların kümesi $Hom_R(K, L)$ veya $Hom(K, L)$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.16. Eğer $f: K \rightarrow L$ ve $g: L \rightarrow P$ R -modül homomorfizmaları iseler $gf = g \circ f: K \rightarrow P$ dönüşümü de bir R -modül homomorfizması olur (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.17. $f: K \rightarrow L$ bir R -modül homomorfizması olduğunu kabul edelim. $\{k \in K \mid f(k) = 0\}$ kümesine f 'nin çekirdeği denir ve $\text{Çek}f$ ile ifade edilir.

$\{f(k) \mid k \in K\}$ kümesine ise f 'nin görüntü kümesi denir ve $Görf$ ile ifade edilir (Hungerford, 1974).

Buna göre, $Çekf = \{k \in K \mid f(k) = 0\}$ ve $Görf = \{f(k) \mid k \in K\}$ 'dır.

Teorem 2.2.18. $f : K \rightarrow L$ bir R -modül homomorfizması olsun. f 'nin birebir olması için gerek ve yeter şart $Çekf = \{k \in K \mid f(k) = 0\} = 0$ olmasıdır (Hungerford, 1974).

İspat: $(\Rightarrow)$ f 'nin birebir olduğunu kabul edelim. Herhangi $x \in Çekf$ için $f(x) = 0_L = f(0_K)$ 'dir. Birebirlik tanımı gereği $x = 0_K$ olur ve böylelikle $Çekf = 0$ elde edilir.

$(\Leftarrow)$ $Çekf = 0$ olduğunu kabul edelim. $f(k_1) = f(k_2)$ koşulunu sağlayan herhangi $k_1, k_2 \in K$ için $f(k_1 - k_2) = f(k_1) - f(k_2) = 0_L$ olduğu için $k_1 - k_2 \in Çekf$ olur. $Çekf = 0$ olduğu için $k_1 - k_2 = 0$ ve böylelikle $k_1 = k_2$ olur ve buradan da f 'nin birebirlik sonucu elde edilir.

Teorem 2.2.19. K bir R -modül ve $L \leq K$ olsun. Bu durumda $p : K \rightarrow K/L, k \rightarrow p(k) = k + L$ dönüşümü bir epimorfizmadır ve $Çekp = L$ 'dır. Bu epimorfizmaya doğal homomorfizma veya kanonik epimorfizma denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.20. $f : K \rightarrow L$ bir R -modül homomorfizması olduğunu kabul edelim.

(i) Eğer P, K 'nın bir alt modülü ise $f(P)$ de L 'nin bir alt modülü olur ve dolayısıyla $Görf$ de L 'nin bir alt modülü olur.

(ii) Eğer T, L 'nin bir alt modülü ise $f^{-1}(T)$ de K 'nın $Çekf$ 'yi kapsayan bir alt modülü olur. Buna göre, $Çekf, K$ 'nın bir alt modülü olur.

(iii) $K / Çekf \cong Görf$ 'tir (1. İzomorfizma Teoremi) (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.21. K bir R -modül, $P \leq K$ ve $T \leq K$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

(i) $(P+T)/T$ de K/T 'nin bir alt modülü olup $(P+T)/T \cong P/(P \cap T)$ olur (2. İzomorfizma Teoremi).

(ii) Eğer $T \leq P$ ise P/T , K/T 'nın bir alt modülü olup $(K/T)/(P/T) \cong K/P$ olur (3. İzomorfizma Teoremi) (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.22. K bir R -modül ve $L_1, L_2, \dots, L_n$, K 'nin alt modülleri olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

$$(a) \quad p: K \rightarrow \prod_{i=1}^n K/L_i, \quad k \rightarrow p(k) = (k + L_i)_{i \in I} = (k + L_1, k + L_2, \dots, k + L_n)$$

dönüşümü örtendir $(I = \{1, 2, \dots, n\})$.

$$(b) \quad \text{Her } j = 1, 2, \dots, n \text{ için } L_j + \bigcap_{i \neq j} L_i = K \text{ olur (Wisbauer, 1991).}$$

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$

$$p: K \rightarrow \prod_{i=1}^n K/L_i, \quad k \rightarrow p(k) = (k + L_i)_{i \in I} = (k + L_1, k + L_2, \dots, k + L_n)$$

dönüşümünün örten olduğunu kabul edelim. Herhangi $j = 1, 2, \dots, n$ ve herhangi

$$x \in K \text{ alalım. } \prod_{i=1}^n K/L_i \text{ kümesinin } \left(\delta_{ij}(x + L_j) \right)_{i \in I} \left(\delta_{ij} = \begin{cases} 1_R, i = j \text{ ise} \\ 0_R, i \neq j \text{ ise} \end{cases} \right) \text{ elemanını}$$

alacak olursak p örten olduğu için $p(k) = \left(\delta_{ij}(x + L_j) \right)_{i \in I}$ olacak biçimde $\exists k \in K$

vardır. $(k + L_i)_{i \in I} = p(k) = \left(\delta_{ij}(x + L_j) \right)_{i \in I}$ olduğu için $k + L_j = x + L_j$ ve $i \neq j$ için

$k + L_i = L_i$ olup $i \neq j$ için $k \in L_i$ ve buradan da $k \in \bigcap_{i \neq j} L_i$ elde edilir. $k + L_j = x + L_j$

olduğu için $x - k \in L_j$ olup $x = x - k + k \in L_j + \bigcap_{i \neq j} L_i$ olur. Bu durumda

$K \subset L_j + \bigcap_{i \neq j} L_i$ olup ayrıca $L_j + \bigcap_{i \neq j} L_i \subset K$ olduğu için $L_j + \bigcap_{i \neq j} L_i = K$ olur.

$(b) \Rightarrow (a)$ Her $j = 1, 2, \dots, n$ için $L_j + \bigcap_{i \neq j} L_i = K$ olsun. Herhangi

$(k_1 + L_1, k_2 + L_2, \dots, k_n + L_n) \in \prod_{i=1}^n K/L_i$ ($k_i \in K$) alalım. $j = 1, 2, \dots, n$ için

$L_j + \bigcap_{i \neq j} L_i = K$ olduğundan $k_j = l_j + t_j$ olacak biçimde $\exists l_j \in L_j$ ve $\exists t_j \in \bigcap_{i \neq j} L_i$ vardır.

$k = t_1 + t_2 + \dots + t_n$ diyelim. Burada $j = 1, 2, \dots, n$ için $k - t_j \in L_j$ olup $k + L_j = t_j + L_j$ olur. Diğer taraftan $j = 1, 2, \dots, n$ için $k_j = l_j + t_j$ olduğu için $k_j - t_j = l_j \in L_j$ olup $k_j + L_j = t_j + L_j$ olur. O halde $j = 1, 2, \dots, n$ için $k + L_j = k_j + L_j$ olup $p(k) = (k + L_1, k + L_2, \dots, k + L_n) = (k_1 + L_1, k_2 + L_2, \dots, k_n + L_n)$ olur. Sonuç olarak p örten olup istenen elde edilir.

Teorem 2.2.23. K bir R -modül ve $L_1, L_2, \dots, L_n$, K 'nın alt modülleri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(a) $p: K \rightarrow \prod_{i=1}^n K/L_i, k \rightarrow p(k) = (k + L_i)_{i \in I} = (k + L_1, k + L_2, \dots, k + L_n)$ dönüşümü birebirdir ($I = \{1, 2, \dots, n\}$).

(b) $\bigcap_{i=1}^n L_i = 0$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b)

$p: K \rightarrow \prod_{i=1}^n K/L_i, k \rightarrow p(k) = (k + L_i)_{i \in I} = (k + L_1, k + L_2, \dots, k + L_n)$ dönüşümünün

birebir olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\zeta_{ekp} = 0$ olduğu aşikârdır. Herhangi

$x \in \bigcap_{i=1}^n L_i$ alacak olursak $x \in \bigcap_{i=1}^n L_i$ olduğundan her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x \in L_i$ olup

$x + L_i = L_i$ olur. Buna göre $p(x) = (x + L_1, x + L_2, \dots, x + L_n) = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ olup

$x \in \zeta_{ekp} = 0$ olur. O halde $x = 0$ olup $\bigcap_{i=1}^n L_i = 0$ olduğu görülür.

(b) $\Rightarrow$ (a) $\bigcap_{i=1}^n L_i = 0$ olsun. Herhangi $x \in \zeta_{ekp}$ alacak olursak $x \in \zeta_{ekp}$ olduğu için

$p(x) = (x + L_1, x + L_2, \dots, x + L_n) = (L_1, L_2, \dots, L_n)$ olup her $i = 1, 2, \dots, n$ için

$x + L_i = L_i$ olur. O halde her $i = 1, 2, \dots, n$ için $x \in L_i$ olup $x \in \bigcap_{i=1}^n L_i = 0$ olur. Buna

göre $x=0$ olup $\zeta_{ekp} = 0$ olduğu görülür. Böylelikle p birebir olup istenen elde edilmiş olur.

Tanım 2.2.24. K bir R -modül ve $\{L_i\}_{i \in I}$ da K 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. $Y = \bigcup_{i \in I} L_i$ olmak üzere Y tarafından üretilen alt modüle $\{L_i\}_{i \in I}$ ailesinin toplamı denir ve $\sum_{i \in I} L_i = \langle Y \rangle$ şeklinde ifade edilir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.25. K bir R -modül ve $\{L_i\}_{i \in I}$, K 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda

$$\sum_{i \in I} L_i = \left\{ l_{i_1} + l_{i_2} + \dots + l_{i_k} \mid k \in \mathbb{Z}^+, i_1, i_2, \dots, i_k \in I, l_{i_1} \in L_{i_1}, l_{i_2} \in L_{i_2}, \dots, l_{i_k} \in L_{i_k} \right\} \quad \text{şeklindedir.}$$

Şayet I sonlu ise bu toplam $L_1 + L_2 + \dots + L_k = \{l_1 + l_2 + \dots + l_k \mid l_1 \in L_1, l_2 \in L_2, \dots, l_k \in L_k\}$ şeklindedir (Hungerford, 1974).

Teorem 2.2.26. (Modüler Kural) K bir R -modül, L, P ve T de K 'nin alt modülleri ve $T \subset P$ olmak üzere $(T+L) \cap P = T + (L \cap P)$ 'dir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: Herhangi $p \in (T+L) \cap P$ alalım. Bu durumda $p \in T+L$ ve $p \in P$ olur. $p \in T+L$ olduğundan $p = t + l$ olacak biçimde $\exists t \in T$ ve $\exists l \in L$ vardır. Burada $T \subset P$ olduğu için $t \in P$ olur. Bu durumda $l = p - t$, $p \in P$ ve $t \in P$ olduğu için $l \in P$ olup $l \in L \cap P$ elde edilmiş olur. $t \in T$ ve $l \in L \cap P$ olduğundan $p = t + l \in T + (L \cap P)$ elde edilir. Bu durumda $(T+L) \cap P \subset T + (L \cap P)$ olur. Ayrıca $T + (L \cap P) \subset T + L$ ve $T + (L \cap P) \subset P$ olduğu için $T + (L \cap P) \subset (T+L) \cap P$ olur. Böylelikle $(T+L) \cap P = T + (L \cap P)$ 'dir.

Tanım 2.2.27. R bir halka ve I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{K_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olsun.

$\left\{ \alpha \mid \alpha : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} K_i, \text{ her } i \in I \text{ için } \alpha(i) \in K_i \right\}$ dönüşümler kümesine $\{K_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin çarpımı denir ve bu küme $\prod_{i \in I} K_i$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) = \alpha_i$ olmak üzere α elemanı çoğunlukla $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}$ veya (α_i) ile gösterilir. Burada her $i \in I$ için α_i

'ye α 'nın i . bileşeni denir. Eğer I indis kümesi sayılabilirse, $\alpha = (\alpha_i)_{i \in I} = (\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \dots, \alpha_{i_n}, \dots)$ şeklinde de ifade edilir.

$$\alpha = (\alpha_i)_{i \in I}, \beta = (\beta_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} K_i \text{ olmak üzere}$$

$$(i) \alpha = \beta \Leftrightarrow \text{her } i \in I \text{ için } \alpha_i = \beta_i,$$

$$(ii) \alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i \in I},$$

$$(iii) r \in R \text{ için } r\alpha = (r\alpha_i)_{i \in I}$$

şeklinde ifade edilir. Bu cebirsel işlemlere göre $\prod_{i \in I} K_i$ bir sol R -modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{K_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin direkt çarpımı denir.

Bir $\alpha \in \prod_{i \in I} K_i$ elemanının sonlu tane bileşeni sıfırdan farklı ve diğer tüm bileşenleri sıfır ise α 'ya sonlu desteklidir denir. $\prod_{i \in I} K_i$ modülünde sıfır eleman sonlu destekli kabul edilerek bütün sonlu destekli elemanların kümesi $\bigoplus_{i \in I} K_i$ veya $\bigoplus_{i \in I} K_i$ ile gösterilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Önerme 2.2.28. $\forall i \in I$ için K_i bir R -modül olmak üzere $\prod_{i \in I} K_i$ direkt çarpımının sonlu destekli elemanları kümesi $\bigoplus_{i \in I} K_i$, $\prod_{i \in I} K_i$ modülünün bir alt modülüdür (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(k_i), (s_i) \in \bigoplus_{i \in I} K_i$ ve $r \in R$ için tanımdan dolayı $A = \{i \in I \mid k_i \neq 0\}$ ve $B = \{i \in I \mid s_i \neq 0\}$ kümeleri sonludur (ya da boştur). Bu durumda $\{i \in I \mid k_i - s_i \neq 0\} \subset A \cup B$ ve $\{i \in I \mid rk_i \neq 0\} \subset A$ olduğu için bu kümelerin de sonlu (ya da boş) olduğu açıktır. O halde $(k_i) - (s_i), r(s_i) \in \bigoplus_{i \in I} K_i$ olur ve sonuç olarak Teorem 2.2.4. gereği $\bigoplus_{i \in I} K_i$, $\prod_{i \in I} K_i$ modülünün bir alt modülü olduğu söylenebilir.

Tanım 2.2.29. $\prod_{i \in I} K_i$ modülünün $\bigoplus_{i \in I} K_i$ alt modülü $\{K_i\}_{i \in I}$ modüller ailesinin dış direkt toplamı olarak adlandırılır. Eğer I indis kümesi sonlu ise $\prod_{i \in I} K_i = \bigoplus_{i \in I} K_i$ olur.

Eğer $\forall i \in I$ için $K_i = K$ ise $\bigoplus_{i \in I} K_i = K^{(I)}$ olarak ifade edilir ve bu modüle K modülünün kopyalarının toplamı adı verilir (Alizade ve Pancar,1999).

Tanım 2.2.30. $\{K_i | i \in I\}$ sol R -modüllerin bir ailesi olmak üzere $j \in I$ için $\pi_j : \prod_{i \in I} K_i \rightarrow K_j$, $\forall (k_i) \in \prod_{i \in I} K_i$ için $\pi_j((k_i)) = k_j$ ile tanımlanan fonksiyona

kanonik projeksiyon ve $\varepsilon_j : K_j \rightarrow \prod_{i \in I} K_i$, $\forall k_j \in K_j$ için $\varepsilon_j(k_j) = (k_i) = \begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ k_j, i = j \end{pmatrix}$ ile tanımlanan fonksiyona da kanonik injeksiyon adı verilir (Alizade ve Pancar,1999).

Teorem 2.2.31. Yukarıda tanımlanan kanonik projeksiyon bir R -modül epimorfizmasıdır ve kanonik injeksiyon da bir R -modül monomorfizmasıdır (Alizade ve Pancar,1999).

İspat: $\{K_i | i \in I\}$ sol R -modüllerin bir ailesi olmak üzere; $\pi_j : \prod_{i \in I} K_i \rightarrow K_j$, $(k_i) \rightarrow \pi_j((k_i)) = k_j$ ile tanımlanan π_j kanonik projeksiyon fonksiyonunu ele alalım.

π_j fonksiyonunun bir R -modül homomorfizması olduğunu gösterelim.

$(k_i), (k'_i) \in \prod_{i \in I} K_i$ ve $r \in R$ alalım. Burada π_j fonksiyonunun tanımından

$$\pi_j((k_i) + (k'_i)) = \pi_j((k_i + k'_i)) = k_j + k'_j = \pi_j((k_i)) + \pi_j((k'_i))$$

ve $\pi_j(r(k_i)) = \pi_j((rk_i)) = rk_j = r\pi_j((k_i))$ olup π_j fonksiyonu bir R -modül homomorfizmasıdır. İlaveten $\forall k_j \in K_j$ için $\pi_j((k_i)) = k_j$ olacak biçimde

$\exists (k_i) \in \prod_{i \in I} K_i$ bulunabildiği açıkça gösterilebilir. Buna göre π_j fonksiyonu örten olur.

Bundan dolayı tanımlanan kanonik projeksiyon bir R -modül epimorfizmasıdır.

Şimdi de, aynı $\{K_i | i \in I\}$ sol R -modül ailesinde; $\varepsilon_j : K_j \rightarrow \prod_{i \in I} K_i$

$k_j \rightarrow \varepsilon_j(k_j) = (k_i) = \begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ k_j, i = j \end{pmatrix}$ ile tanımlanan ε_j kanonik injeksiyon fonksiyonunu

ele alalım. ε_j fonksiyonunun bir R -modül homomorfizması olduğunu inceleyelim.

$k_j, k'_j \in K_j$ ve $r \in R$ alalım. Burada ε_j fonksiyonunun tanımı dolayısıyla,

$$\varepsilon_j(k_j + k'_j) = \begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ k_j + k'_j, i = j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ k_j, i = j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ k'_j, i = j \end{pmatrix} = \varepsilon_j(k_j) + \varepsilon_j(k'_j)$$

$$\text{ve } \varepsilon_j(rk_j) = \begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ rk_j, i = j \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ k_j, i = j \end{pmatrix} = r\varepsilon_j(k_j) \text{ olup } \varepsilon_j \text{ fonksiyonu bir } R\text{-modül}$$

homomorfizmasıdır. $k_j, k'_j \in K_j$ için $\varepsilon_j(k_j) = \varepsilon_j(k'_j)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ k_j, i = j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, i \neq j \\ k'_j, i = j \end{pmatrix} \text{ olup } k_j = k'_j \text{ olur. Böylece } \varepsilon_j \text{ fonksiyonu birebir olmuş olur.}$$

Dolayısıyla tanımlanan kanonik injeksiyon bir R -modül monomorfizması olur.

Tanım 2.2.32. K bir R -modül ve $\{K_m \mid m \in M\}$ K 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Her $k \in K$ elemanı tek türlü olacak şekilde K_m alt modüllerinin elemanlarının toplamı biçiminde, yani tek türlü olarak $k = k_{m_1} + k_{m_2} + \dots + k_{m_n}$, $k_{m_i} \in K_{m_i}$ biçiminde yazılabilirse, K 'ya K_m alt modüllerinin bir iç direkt toplamı adı verilir. Bu durum genellikle $K = \bigoplus'_{m \in M} K_m$ veya $K = \bigoplus_{m \in M} K_m$ ile ifade edilir.

$K = \bigoplus'_{m \in M} K_m$ yazılışına K 'nin bir direkt parçalanışı ya da yalnızca parçalanışı denir. Şayet K sıfırdan ve kendisinden farklı alt modüllerin bir direkt toplamı olarak yazılamıyorsa K 'ya parçalanamayandır denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.33. $K = \bigoplus'_{m \in M} K_m$ olması için gerek ve yeter şart $K = \sum_{m \in M} K_m$ ve her

$$i \in M \text{ için } K_i \cap \left(\sum_{m \neq i} K_m \right) = 0 \text{ olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).}$$

İspat: ($\Rightarrow$) $K = \bigoplus'_{m \in M} K_m$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $k \in K$,

$$k = k_{m_1} + k_{m_2} + \dots + k_{m_n} \text{ şeklinde yazılabileceği için, } k \in K_{m_1} + K_{m_2} + \dots + K_{m_n} \subset \sum_{m \in M} K_m$$

olur. O halde $K = \sum_{m \in M} K_m$ sağlanır. Ayrıca, $x \in K_i \cap \left(\sum_{m \neq i} K_m \right)$ ise

$x = k_i = k_{m_1} + k_{m_2} + \dots + k_{m_n}$ ve $m_j \neq i$ olacak biçimde

$\exists k_i \in K_i, \exists k_{m_1} \in K_{m_1}, \exists k_{m_2} \in K_{m_2}, \dots, \exists k_{m_n} \in K_{m_n}$ vardır. Yazılışın tek türlü

olmasından dolayı $k_i = k_{m_1} = k_{m_2} = \dots = k_{m_n} = 0$ elde edilir. Bundan dolayı her $i \in M$ için

$$K_i \cap \left(\sum_{m \neq i} K_m \right) = 0 \text{ olur.}$$

($\Leftarrow$) $K = \sum_{m \in M} K_m$ olduğu için her $k \in K = \sum_{m \in M} K_m$ elemanı,

$$k = k_{m_1} + k_{m_2} + \dots + k_{m_n} \left(k_{m_1} \in K_{m_1}, k_{m_2} \in K_{m_2}, \dots, k_{m_n} \in K_{m_n} \right)$$

şeklinde yazılabilir. Yazılışın tek türlü olduğunu göstermek için bir k elemanının

$$k = k_{m_1} + k_{m_2} + \dots + k_{m_n} = k'_{m'_1} + k'_{m'_2} + \dots + k'_{m'_t},$$

$$(k_{m_i} \in K_{m_i}, i = 1, 2, \dots, n, k'_{m'_j} \in K'_{m'_j}, j = 1, 2, \dots, t)$$

şeklinde iki gösteriminin bulunduğunu kabul edelim. Gerekirse toplam terimlerinin yerlerini değiştirerek ve sıfır toplam terimlerini ekleyerek, $t = n$ ve her $i = 1, 2, \dots, n$

için $m_i = m'_i$ olduğunu kabul edebiliriz. O zaman yukarıdaki eşitlikten her

$$i = 1, 2, \dots, n \text{ için } k_{m_i} - k'_{m_i} = \sum_{j \neq i} (k'_{m_j} - k_{m_j}) \in K_{m_i} \cap \left(\sum_{j \neq i} K_{m_j} \right) = 0 \text{ ve buradan da}$$

$k_{m_i} = k'_{m_i}$ elde edilir. Böylelikle bu yazılış tek türlü olmuş olur.

Önerme 2.2.34. K bir R -modül ve $\{K_i\}_{i \in I}$, K 'nin alt modüllerinin bir ailesi olsun.

$K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ ise $K \cong \bigoplus_{i \in I} K_i$ 'dir. Tersine $\{K_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olmak üzere

$$K = \bigoplus_{i \in I} K_i \text{ ise } K'_i = \left\{ (k_j)_{j \in I} \mid \forall j \neq i \text{ için } k_j = 0, k_i \in K_i \right\} \cong K_i \text{ ve } K = \bigoplus_{i \in I} K'_i$$

gerçeklenir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $f((k_i)_{i \in I}) = \sum_{i \in I} k_i$ ile tanımlı $f: \bigoplus_{i \in I} K_i \rightarrow K$ fonksiyonunun bir epimorfizma olduğu çok rahat gösterilebilir. $\forall k \in \bigoplus_{i \in I} K_i$ için $f(k) = \sum_{i \in I} k_i$ tek türlü olacak biçimde $k_i \in K_i$ var olduğu için f bir izomorfizmadır.

Tersine olarak, $\{K_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olmak üzere $K = \bigoplus_{i \in I} K_i$ olduğunu kabul edelim. $m = i$ için $x_m = k_i$ ve $m \neq i$ için $x_m = 0$ alalım. $f_i(k_i) = (x_m)_{m \in I}$ ile tanımlı $f_i: K_i \rightarrow K_i'$ fonksiyonu bir izomorfizmadır. $k_{i_j} \in K_{i_j}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) elemanları sıfırdan farklı olmak üzere $k = (k_i)_{i \in I} \in K$ elemanı $k = (\dots, 0, k_{i_1}, 0, \dots) + \dots + (\dots, 0, k_{i_n}, 0, \dots) \in \sum_{i \in I} K_i'$ ile gösterilebilir. Burada her $i \in I$ için $K_i' \cap \left(\sum_{j \neq i} K_j' \right) = 0$ olduğu da gösterilebilir. Bu durumda Teorem 2.2.33.'ten $K = \bigoplus_{i \in I} K_i'$ elde edilir.

Not: Bu önerme sayesinde $\bigoplus_{i \in I} K_i \cong \bigoplus_{i \in I} K_i'$ olduğu görülür. Bundan sonra $\bigoplus'$ yerine de $\bigoplus$ kullanacağız.

Önerme 2.2.35. P bir R -modül ve $Y = \{y_k | k \in K\}$ P 'nin bir alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki iki koşul birbirine denktir.

(i) Her $a \in P$ elemanı, sadece sonlu sayıda r_k katsayıları sıfırdan farklı (ya da hepsi sıfır) olmak üzere, tek türlü olarak $a = \sum_{k \in K} r_k y_k$ şeklinde ifade edilebilir.

(ii) Her $k \in K$ için $f_k(r) = r y_k$ şeklinde gösterilen $f_k: R \rightarrow R y_k$ fonksiyonu bir izomorfizmadır ve $P = \bigoplus_{k \in K} R y_k$ olur (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ f_k fonksiyonunun bir epimorfizma olduğu aşîkârdır. $r, s \in R$ keyfî olmak üzere, $f_k(r) = f_k(s)$ olsun. Buradan $r y_k = s y_k$ eşitliği bulunur. Yazılışın tek türlü olduğundan dolayı $r = s$ olup f_k fonksiyonu bir monomorfizma olur. Bu sebepten f_k bir izomorfizma olup $R \cong R y_k$ olur. Her $a \in P$ elemanı tek türlü

olarak Ry_k modüllerinin $r_k y_k$ elemanlarının sonlu toplamı şeklinde yazılabildiği için $P = \bigoplus_{k \in K} Ry_k$ olup istenen elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (i) $P = \bigoplus_{k \in K} Ry_k$ olduğu için her $a \in P$, $a = \sum_{k \in K} r_k y_k$ sonlu toplamı şeklinde yazılabilir ve $a = \sum_{k \in K} r_k y_k = \sum_{k \in K} r'_k y_k$ ise her $k \in K$ için $r_k y_k = r'_k y_k$ olur. Buradan da $f_k(r_k) = f_k(r'_k)$ bulunur. $f_k : R \rightarrow Ry_k$ bir monomorfizma olduğundan $r_k = r'_k$ olur. O zaman $a \in P$ elemanı $a = \sum_{k \in K} r_k y_k$ biçiminde tek türlü olarak yazılabilir.

Tanım 2.2.36. P bir R -modül olsun. Önerme 2.2.35.'teki denk koşullardan birini gerçekleyen P modülüne bir serbest modül, $Y = \{y_k | k \in K\}$ kümesine de P 'nin bir serbest üretenler kümesi ya da tabanı denir (Alizade ve Pancar, 1999).

R halkasının birimi 1_R olmak üzere bu halka tabanı $Y = \{1_R\}$ olan bir serbest R -modüldür.

Teorem 2.2.37. Her Λ indis kümesi için ${}_R R$ R -modülünün kopyalarının toplamı olan $R^{(\Lambda)}$ bir serbest modüldür (Wisbauer, 1991).

İspat: $\forall \eta \in \Lambda$ için

$$r_\lambda = \begin{cases} 1_R, \lambda = \eta \text{ ise} \\ 0_R, \lambda \neq \eta \text{ ise} \end{cases}$$

olmak üzere $n_\eta = (r_\lambda)_\Lambda \in R^{(\Lambda)}$ ve $Y = \{n_\eta | \eta \in \Lambda\}$ olsun. Herhangi $\alpha \in R^{(\Lambda)}$ alalım.

$\forall \lambda \in \Lambda$ için $a_\lambda \in R$ olmak üzere $\alpha = (a_\lambda)_\Lambda$ olsun. Burada $(a_\lambda)_\Lambda = \alpha \in R^{(\Lambda)}$ olduğundan

a_λ elemanlarının sonlu tanesi hariç diğerleri sıfırdır. $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \Lambda$ olmak üzere

kabul edelim ki $\forall \lambda \in \Lambda - \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ için $a_\lambda = 0$ olsun. Bu durumda

$\alpha = (a_\lambda)_\Lambda = a_{\lambda_1} n_{\lambda_1} + a_{\lambda_2} n_{\lambda_2} + \dots + a_{\lambda_m} n_{\lambda_m}$ olur. Ayrıca bu yazılışın tek türlü olduğu da

açıkça gösterilebilir. Buna göre $Y = \{n_\eta | \eta \in \Lambda\}$ kümesi $R^{(\Lambda)}$ 'nin bir tabanı olup

$R^{(\Lambda)}$ bir serbest modül olur.

Teorem 2.2.38. $\forall i \in I$ için $f_i : K_i \rightarrow L_i$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda $\forall k = (k_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} K_i$ için $f(k) = (f_i(k_i))_{i \in I}$ ile tanımlı $f : \bigoplus_{i \in I} K_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} L_i$ dönüşümü bir R -modül homomorfizması olup $\zeta ekf = \bigoplus_{i \in I} \zeta ekf_i$ ve $Görf = \bigoplus_{i \in I} Görf_i$ olur (Hungerford, 1974).

İspat: f 'nin bir R -modül homomorfizması olduğunu gösterelim. $\forall k = (k_i)_{i \in I}$, $k' = (k'_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} K_i$ için

$$\begin{aligned} f(k + k') &= f\left(\left(k_i + k'_i\right)_{i \in I}\right) = \left(f_i\left(k_i + k'_i\right)\right)_{i \in I} = \\ &= \left(f_i(k_i) + f_i(k'_i)\right)_{i \in I} = \left(f_i(k_i)\right)_{i \in I} + \left(f_i(k'_i)\right)_{i \in I} = f(k) + f(k') \end{aligned}$$

ve $\forall r \in R$ için

$$f(rk) = f\left(\left(rk_i\right)_{i \in I}\right) = \left(f_i\left(rk_i\right)\right)_{i \in I} = \left(rf_i(k_i)\right)_{i \in I} = r\left(f_i(k_i)\right)_{i \in I} = rf(k) \quad \text{olur.}$$

Dolayısıyla f bir R -modül homomorfizması olur. Şimdi $\zeta ekf = \bigoplus_{i \in I} \zeta ekf_i$ olduğunu gösterelim. $k = (k_i)_{i \in I} \in \zeta ekf$ keyfi bir eleman olsun. Bu durumda $f(k) = 0 = (f_i(k_i))_{i \in I}$ olup $\forall i \in I$ için $f_i(k_i) = 0$ olur. O halde $k_i \in \zeta ekf_i$ 'dir. Böylece $k = (k_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} \zeta ekf_i$ olur. Öte yandan herhangi $k = (k_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} \zeta ekf_i$ elemanını alalım. Bu durumda $\forall i \in I$ için $k_i \in \zeta ekf_i$ olup $f_i(k_i) = 0$ olur. O halde $f(k) = (f_i(k_i))_{i \in I} = 0$ olup $k \in \zeta ekf$ bulunur. Buradan $\zeta ekf = \bigoplus_{i \in I} \zeta ekf_i$ elde edilir.

Şimdi de $Görf = \bigoplus_{i \in I} Görf_i$ olduğunu gösterelim. $l \in Görf$ keyfi bir elemanını alalım. Bu takdirde $\exists k = (k_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} K_i$ için $f(k) = l$ 'dir. Yani $f\left(\left(k_i\right)_{i \in I}\right) = \left(f_i(k_i)\right)_{i \in I} = l$ olur. $\forall i \in I$ için $f_i(k_i) \in Görf_i$ olduğundan $l = (f_i(k_i))_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} Görf_i$ bulunur. $l \in \bigoplus_{i \in I} Görf_i$ olsun. Bu durumda $(f_i(k_i))_{i \in I} = l$ olacak şekilde $\exists k_m \in K_m$ ($m \in I$) vardır. $k = (k_i)_{i \in I}$ alırsak $f(k) = (f_i(k_i))_{i \in I} = l$ olup $l \in Görf$ elde ederiz. Buradan da $Görf = \bigoplus_{i \in I} Görf_i$ elde edilir.

Tanım 2.2.39. K bir R -modül olmak üzere K 'nın kendi üzerine bir homomorfizmasına K 'nın bir endomorfizması denir. K 'nın bütün endomorfizmalarının kümesi $End_R(K)$ veya $End(K)$ ile gösterilir (Hungerford, 1974).

Tanım 2.2.40. $f : K \rightarrow L$ bir R -modül epimorfizması olsun. Eğer $fg = f\phi g = I_L$ olacak şekilde bir $g : L \rightarrow K$ homomorfizması var ise f epimorfizması parçalanabilir denir (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.41. $g : K \rightarrow L$ bir R -modül monomorfizması olsun. Eğer $hg = hog = I_K$ olacak biçimde bir $h : L \rightarrow K$ homomorfizması var ise g monomorfizması parçalanabilir denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.42. $f : K \rightarrow L$ ve $g : L \rightarrow K$ R -modül homomorfizmaları ve $gf = I_K$ olsun. Bu durumda $L = Görf \oplus Çekg$ 'dir (Kasch, 1982).

İspat: $\forall l \in L$ için $l = f(g(l)) + l - f(g(l))$ olur. Burada $f(g(l)) \in Görf$ olur.

İlaveten $gf = I_K$ olduğu için

$$g(l - f(g(l))) = g(l) - g(f(g(l))) = g(l) - g(l) = 0$$

olup $l - f(g(l)) \in Çekg$ olur. Bu durumda $L = Görf + Çekg$ 'dir. Şimdi de $l \in Görf \cap Çekg$ alacak olursak $g(l) = 0$ ve $l = f(k)$ olacak biçimde $\exists k \in K$ vardır. $gf = I_K$ olduğu için $0 = g(l) = g(f(k)) = k$ olup $l = f(k) = f(0) = 0$ elde edilir. Yani $Görf \cap Çekg = 0$ olup $L = Görf \oplus Çekg$ olur.

Tanım 2.2.43. K, L ve P R -modüller olsun. $K \xrightarrow{f} L \xrightarrow{g} P$ R -modül homomorfizmaları dizisi için $Görf = Çekg$ ise bu dizi L 'de tamdır denir. Benzer biçimde, $K_0 \xrightarrow{f_0} K_1 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{n-2}} K_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} K_n$ R -modül homomorfizmalarının sonlu dizisinde $\forall i = 0, 1, 2, \dots, n-2$ için $Görf_i = Çekf_{i+1}$ sağlanması durumunda bu diziye bir tam dizi denir. $\dots \rightarrow K_{i-1} \xrightarrow{f_i} K_i \xrightarrow{f_{i+1}} K_{i+1} \xrightarrow{f_{i+2}} \dots$ R -modül homomorfizmalarının sonsuz dizisinde $\forall i \in \mathbb{Z}$ için $Görf_i = Çekf_{i+1}$ ise bu diziye bir tam dizi denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.44. $0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ şeklindeki bir tam diziye bir kısa tam dizi denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.45. Eğer $0 \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{e} 0$ dizisi tam ise g bir monomorfizma ve h bir epimorfizmadır. İlaveten, $Görg \cong X$ ve $Z \cong Y / Görg$ olur. Böylelikle izomorf grupları kopyalandırarak $Z = Y / X$ olduğunu diyebiliriz (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $0 \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{h} Z \xrightarrow{e} 0$ dizisi tam olduğu için $Görf = Çekg$ olur. $f : 0 \rightarrow X$ olduğu için $Görf = \{f(x) | x \in 0\} = 0$ olur. $Çekg = Görf = 0$ olduğu için g bir monomorfizmadır. Yukarıda tanımlanan dizi tam olduğu için $Görh = Çeke$ olur. $e : Z \rightarrow 0$ olduğu için $Çeke = \{z \in Z | e(z) = 0\} = Z$ olur. $Görh = Çeke = Z$ olduğu için h örtendir, yani bir epimorfizmadır. 1. İzomorfizma Teoremi gereği $X / Çekg \cong Görg$ olup $Çekg = 0$ olduğu için $X \cong X / 0 \cong Görg$ olur. Yine 1. İzomorfizma Teoremi gereği $Y / Çekh \cong Görh = Z$ olup $Z \cong Y / Görg$ olur.

Teorem 2.2.46. $0 \rightarrow X \xrightleftharpoons[h]{f} Y \xrightleftharpoons[k]{g} Z \rightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar birbirine denktir:

- (a) $h \circ f = 1_X$ olacak biçimde bir $h : Y \rightarrow X$ homomorfizması bulunabilir.
- (b) $Görf$ alt modülü Y 'nin bir direkt toplam terimidir.
- (c) $g \circ k = 1_Z$ olacak biçimde bir $k : Z \rightarrow Y$ homomorfizması bulunabilir. Bu durumda $Y \cong X \oplus Z$ olur (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) $h \circ f = 1_X$ olacak biçimde bir $h : Y \rightarrow X$ homomorfizması bulunabilir olsun. Bu durumda Teorem 2.2.42.'den $Y = Görf \oplus Çekh$ olup $Görf$, Y 'nin bir direkt toplam terimi olur.

(b) $\Rightarrow$ (c) $Görf$, Y 'nin bir direkt toplam terimi olduğu için $Y = Görf \oplus P$ olacak biçimde $\exists P \leq Y$ vardır. $t = g|_P : P \rightarrow Z$, $p \rightarrow t(p) = g(p)$ homomorfizmasını alalım. $Y = Görf \oplus P$ ve $Görf = Çekg$ olduğu için $Y = Çekg \oplus P$ olup $Çekg \cap P = 0$ olur. Herhangi $p \in Çekt$ alalım. $p \in Çekt$ olduğu için $g(p) = t(p) = 0$ olup $p \in Çekg$ olur. $p \in Çekg$ ve $p \in P$ olduğu için $p \in Çekg \cap P = 0$ olup

$p = 0$ olur. O zaman $\zeta ekt = 0$ olup t birebirdir. Herhangi $b \in Z$ alalım. $b \in Z$ ve g örten olduğu için $g(y) = b$ olacak biçimde $\exists y \in Y$ vardır. $y \in Y = \zeta ekg \oplus P$ olduğu için $y = a + p$ olacak biçimde teklikle belirli $a \in \zeta ekg$ ve $p \in P$ vardır. Burada

$$b = g(y) = g(a + p) = g(a) + g(p) = 0 + g(p) = g(p) = t(p)$$

olup t örtendir. $t : P \rightarrow Z$ birebir ve örten bir homomorfizma olduğu için t bir izomorfizma olup $t^{-1} : Z \rightarrow P$ homomorfizması mevcuttur. $k = t^{-1}$ diyelim. Herhangi $z \in Z$ alalım. $k(z) = t^{-1}(z) = p$ diyelim. Burada $g(p) = t(p) = z$ olup $(gok)(z) = g(k(z)) = g(p) = z = 1_z(z)$ ve böylelikle $gok = 1_z$ olur. f bir monomorfizma olduğu için $Görf \cong X$ olur. $t : P \rightarrow Z$ bir izomorfizma olduğu için $P \cong Z$ olur. Bu durumda $Y = Görf \oplus P \cong X \oplus Z$ olup istenen elde edilmiş olur.

(c) $\Rightarrow$ (a) $g \circ k = 1_z$ olacak biçimde bir $k : Z \rightarrow Y$ R -modül homomorfizması bulunabilsin. Bu takdirde Teorem 2.2.42.'den $Y = Görk \oplus \zeta ekg$ olup $\zeta ekg = Görf$ olduğu için $Y = Görk \oplus Görf$ olur. $h : Y \rightarrow X$, $c = k(a) + f(b) \rightarrow h(c) = b$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin kapalı olduğu aşikârdır. $a_1, a_2 \in Z$ ve $b_1, b_2 \in X$ olmak üzere $c = k(a_1) + f(b_1) = k(a_2) + f(b_2)$ olsun. Burada

$$f(b_1 - b_2) = f(b_1) - f(b_2) = k(a_2) - k(a_1) = k(a_2 - a_1) \in Görk$$

olup $f(b_1 - b_2) \in Görf$ olduğu için $f(b_1 - b_2) \in Görk \cap Görf = 0$ olur. O halde $f(b_1 - b_2) = 0$ olup f birebir olduğu için $b_1 - b_2 = 0$ ve buradan da $b_1 = b_2$ elde edilir. Bu durumda h iyi tanımlıdır. h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Ayrıca h 'nin tanımından $\forall b \in X$ için $(h \circ f)(b) = h(f(b)) = h(k(0) + f(b)) = b = 1_X(b)$ olup $h \circ f = 1_X$ olur.

Tanım 2.2.47. Teorem 2.2.46.'daki koşullardan biri gerçekleştiğinde

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

kısa tam dizisine bir parçalanana (veya parçalanabilir) kısa tam dizi adı verilir (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.48. K ve L iki R -modül olsun. Şayet boştan farklı en az bir $\wedge$ indis kümesi için bir $f: K^{(\wedge)} \rightarrow L$ epimorfizması varsa L 'ye K tarafından üretilmiştir veya K -üretilmiştir denir (Clark vd, 2006).

Tanım 2.2.49. K ve L iki R -modül olsun. Şayet boştan farklı en az bir sonlu elemanlı $\wedge$ indis kümesi için bir $f: K^{(\wedge)} \rightarrow L$ epimorfizması varsa L 'ye K tarafından sonlu üretilmiştir veya sonlu K -üretilmiştir denir (Clark vd, 2006).

Teorem 2.2.50. Her K R -modülü R -üretilmiştir (Kasch, 1982).

İspat: R bir halka ve K keyfi bir R -modül olsun. K 'yı elemanlarıyla birlikte indis kümesi olarak alalım. Her $(r_k)_{k \in K} \in R^{(K)}$ için $f((r_k)_{k \in K}) = \sum_{k \in K} r_k k$ ile tanımlı $f: R^{(K)} \rightarrow K$ dönüşümü bir epimorfizma olur. Neticede K R -modülü R -üretilmiştir.

Tanım 2.2.51. K bir R -modül ve $S = \{K_i\}_{i \in I}$, K 'nın boştan farklı alt modüllerinin bir ailesi olsun. Eğer S artan zincir kuralını sağlıyorsa diğer bir deyişle $K_{i_1} \subset K_{i_2} \subset \dots \subset K_{i_m} \subset K_{i_{m+1}} \subset \dots$ için $K_{i_m} = K_{i_{m+1}} = \dots$ olacak biçimde $\exists m \in \mathbb{Z}^+$ var ise bu S ailesine noetheriandır denir.

Eğer K 'nın bütün alt modüller kümesi noetherian ise K 'ya noetheriandır denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.52. K bir R -modül olsun. K 'nın noetherian olması için gerek ve yeter şart her alt modülünün sonlu üretilmiş olmasıdır (Wisbauer, 1991).

Tanım 2.2.53. K ve L iki R -modül olsun. Eğer L , K -üretilmiş bir modülün bir alt modülüne izomorf ise L , K tarafından alt üretilmiştir denir. K tarafından bütün alt üretilmiş modüllerin kümesi genellikle $\sigma[K]$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Teorem 2.2.54. (Zorn Lemması) X boştan farklı bir sıralı küme ve her tam sıralı alt kümesinin yani, zincirinin X 'te bir üst sınırı var ise X 'in bir maksimal elemanı vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

Tanım 2.2.55. K sıfırdan farklı bir R -modül olsun. Eğer K modülünün 0 ve K 'nın dışında hiçbir alt modülü yoksa K 'ya bir basit modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Bu çalışmamızda 0 modülünü de basit olarak alacağız.

Teorem 2.2.56. K bir R -modül ve $\forall i \in I$ için K_i , K 'nin bir basit alt modülü olmak üzere $K = \sum_{i \in I} K_i$ olsun. Bu durumda

(a) K 'nin her T öz alt modülü için $K = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} K_i \right)$ olacak biçimde I 'nin en az bir J alt kümesi vardır.

(b) $K = \bigoplus_{i \in F} K_i$ olacak biçimde I 'nin en az bir F alt kümesi vardır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: (a) $K = \sum_{i \in I} K_i$ ve T , K 'nin bir öz alt modülü olduğu için $\exists i_0 \in I$ için $K_{i_0} \not\subset T$

olur. O halde $T \cap K_{i_0} \neq K_{i_0}$ olup K_{i_0} basit olduğu için $T \cap K_{i_0} = 0$ olur.

$\Psi = \left\{ P \subset I \mid T + \sum_{i \in P} K_i = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in P} K_i \right) \right\}$ kümesini tanımlayalım. $T \cap K_{i_0} = 0$ olduğu için

$T + K_{i_0} = T \oplus K_{i_0}$ olup $\{i_0\} \in \Psi$ olur. Bu durumda $\Psi \neq \emptyset$ olur. Ψ 'nin herhangi Ω

zincirini alalım. $P = \bigcup_{F \in \Omega} F$ diyelim. Herhangi $x \in T + \sum_{i \in P} K_i$ alalım. $x \in T + \sum_{i \in P} K_i$ olduğu

için $x = t + k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_n}$ olacak biçimde $\exists i_1, i_2, \dots, i_n \in P$, $\exists t \in T$, $\exists k_{i_1} \in K_{i_1}$,

$\exists k_{i_2} \in K_{i_2}$, ..., $\exists k_{i_n} \in K_{i_n}$ vardır. Ayrıca $i_1, i_2, \dots, i_n \in P = \bigcup_{F \in \Omega} F$ olduğu için $i_1 \in F_1$,

$i_2 \in F_2$, ..., $i_n \in F_n$ olacak biçimde $\exists F_1, F_2, \dots, F_n \in \Omega$ vardır. Ω bir zincir olduğu için

bir $F_0 \in \Omega$ için $F_s \subset F_0$ ($s=1, 2, \dots, n$) olur. Burada $i_1, i_2, \dots, i_n \in F_0$ olup $F_0 \in \Omega \subset \Psi$

olduğundan $x = t + k_{i_1} + k_{i_2} + \dots + k_{i_n} \in T \oplus \left(\bigoplus_{i \in F_0} K_i \right)$ olur. O halde x bu şekilde tek

türlü yazılabilir. Bundan dolayı Tanım 2.2.32.'den $T + \sum_{i \in P} K_i = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in P} K_i \right)$ olup

$P \in \Psi$ olur. Böylelikle Ψ 'nin kapsama bağıntısına göre her zincirin bir üst sınırı

vardır. Dolayısıyla Zorn Lemması'ndan Ψ bir maksimal J elemanı içerir. $J \in \Psi$

olduğu için $T + \sum_{i \in J} K_i = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} K_i \right)$ olur. Şayet $K \neq T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} K_i \right)$ olsa $\exists j \in I$ için

$K_j \not\subset T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} K_i \right)$ olup K_j basit olduğu için

$$T + \sum_{i \in J \cup \{j\}} K_i = T + \left(\sum_{i \in J} K_i \right) + K_j = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} K_i \right) \oplus K_j = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J \cup \{j\}} K_i \right)$$

olur. O halde $J \cup \{j\} \in \Psi$ olup $J \neq J \cup \{j\}$ olduğu için bu durum J 'nin maksimal olmasıyla çelişir. Buna göre $K = T \oplus \left(\bigoplus_{i \in J} K_i \right)$ olup istenen elde edilir.

(b) $T = 0$ olarak alınırsa (a) şikkından istenen kolayca elde edilir.

Tanım 2.2.57. K bir R -modül, $L \leq K$ ve $L \neq K$ olsun. K 'nın L 'yi kapsayan K ve L 'den farklı hiçbir alt modülü yoksa L 'ye K 'nın bir maksimal alt modülü denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.58. K sonlu üretilmiş bir R -modül olsun. Bu durumda K 'nın her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanır (Sharpe ve Vamos, 1972).

İspat: L , K 'nın herhangi bir öz alt modülü olsun. K 'nın L 'yi kapsayan öz alt modüllerinin kümesini S ile göserelim. $L \in S$ olduğu için $S \neq \emptyset$ olur. S kümelerdeki kapsama bağıntısına göre bir kısmi sıralı kümedir. T , S kümesinin boştan farklı bir zinciri olsun. T 'nin bütün elemanlarının birleşimini N ile gösterelim. T tam sıralı olduğu için T kümesinin elemanları kümelerdeki kapsama bağıntısına göre karşılaştırılabilir olup N , K 'nın bir alt modülüdür. K sonlu üretilmiş olduğu için $K = Rk_1 + Rk_2 + \dots + Rk_n$ olacak biçimde $\exists k_1, k_2, \dots, k_n \in K$ elemanları vardır. Eğer $N = K$ ise $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $k_i \in N = \bigcup_{L' \in T} L'$ yazılır. Bu durumda $L' \in T$ vardır öyle

ki $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $k_i \in L'$ olup $K = L'$ bulunur. Bu ise $L' \in T$ olması ile çelişir. O halde $N \neq K$ 'dır. Yani, N , K modülünün bir öz alt modülüdür. Bu takdirde N , T kümesinin S 'de bir üst sınırı olup Zorn Lemması gereği S kümesi bir maksimal elemana sahiptir. Bu durumda bu maksimal eleman K 'nın L öz alt modülünü kapsayan bir maksimal alt modülüdür.

Teorem 2.2.59. K bir R -modül, $L \leq K$ ve $L \neq K$ olsun. Bu durumda L 'nin bir maksimal alt modül olması için gerek ve yeter şart K/L bölüm modülünün bir basit modül olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: Teorem 2.2.11. ve Teorem 2.2.12.'nin bir sonucudur.

Teorem 2.2.60. K bir R -modül, $L \leq K$ ve $L \neq K$ olsun. Bu durumda L 'nin bir maksimal alt modül olması için gerek ve yeter şart her $k \in K - L$ için $L + Rk = K$ olmasıdır (Kasch, 1982).

İspat: $(\Rightarrow)$ Her $k \in K - L$ için $L \leq L + Rk$, $L \neq L + Rk$ ve L bir maksimal alt modül olduğu için maksimal alt modül tanımı gereği $L + Rk = K$ olur.

$(\Leftarrow)$ $L \leq T$ ve $L \neq T$ olan herhangi bir T alt modülünü ele alalım. Eğer $T = K$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $L \neq T$ olduğu için $\exists k \in T - L$ vardır. Bu durumda $k \in K - L$ olup hipotez gereği $K = L + Rk$ olur. Beraberinde $k \in T$ olduğu için $Rk \leq T$ olup $K = L + Rk \leq T$ olur. Dolayısıyla $T = K$ 'dir.

Tanım 2.2.61. Basit modüllerin toplamı olarak yazılabilen bir modüle bir yarı basit modül denir (Alizade ve Pancar, 1999).

Teorem 2.2.62. K bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

(i) K 'nin her alt modülü basit alt modüllerin bir toplamıdır.

(ii) K yarı basittir.

(iii) K basit alt modüllerin bir direkt toplamıdır.

(iv) K 'nin her alt modülü bir direkt toplam terimidir (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ $K \leq K$ olduğu için Tanım 2.2.61.'den açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Teorem 2.2.56. (b) 'den açıktır.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ açıktır.

$(ii) \Rightarrow (iv)$ Teorem 2.2.56. (a) 'dan açıktır.

$(iv) \Rightarrow (ii)$ K 'nin basit alt modüllerinin toplamına T diyelim. Hipotez gereği T , K 'nin bir direkt toplam terimi olup $K = T \oplus P$ olacak biçimde $\exists P \leq K$ vardır. Burada $P = 0$ olduğunu gösterirsek $K = T$ olup istenen elde edilir. Aksini kabul edelim. Yani, $P \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\exists 0 \neq p \in P$ vardır. $S = Rp$ diyelim. $S \leq P$

ve $T \cap P = 0$ olduğu için $T \cap S = 0$ olur. $S \neq 0$ ve S sonlu üretilmiş olduğundan Teorem 2.2.58. gereği S 'nin 0 öz alt modülü S 'nin bir L maksimal alt modülünde kapsanır. $L \leq S$ ve $S \leq K$ olduğu için $L \leq K$ olup hipotezden $K = L \oplus L'$ olacak biçimde $\exists L' \leq K$ vardır. Burada Modüler Kural'dan $S = L \oplus (S \cap L')$ olur. L , S 'nin bir maksimal alt modülü olduğu için $L \neq S$ olup $S \cap L' \neq 0$ olur. Diğer taraftan yine L , S 'nin bir maksimal alt modülü olduğu için Teorem 2.2.59.'dan S/L basit olup

$$S/L = (L + (S \cap L'))/L \cong (S \cap L')/(S \cap L' \cap L) = (S \cap L')/0 \cong S \cap L'$$

olduğundan $S \cap L'$ de basit olur. Bu takdirde $S \cap L' \subset T$ olur ve $S \cap L' \subset S$ olduğu için $S \cap L' \subset T \cap S = 0$ olur. Bu ise $S \cap L' \neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabülümüz yanlış olup $P = 0$ olur.

(iv) $\Rightarrow$ (i) K 'nin herhangi T alt modülünü ve T 'nin de herhangi P alt modülünü alalım. Burada $P \leq K$ olup hipotezden $K = P \oplus P'$ olacak biçimde $\exists P' \leq K$ vardır. $K = P \oplus P'$ ve $P \leq T$ olduğu için Modüler Kural'dan $T = T \cap K = T \cap (P \oplus P') = P \oplus (T \cap P')$ olup P , T 'nin bir direkt toplam terimi olur. Yani T 'nin her alt modülü T 'nin bir direkt toplam terimi olup bu teoremin (iv) $\Rightarrow$ (ii) geçişini T 'ye uygularsak T yarı basit olur. Yani K 'nin her alt modülü basit alt modüllerin bir toplamı olup istenen elde edilir.

Teorem 2.2.63. K bir R -modül ve $\{L_i\}_{i \in I}$, K 'nin $L \subset K$ alt modülünü kapsayan alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigcap_{i \in I} (L_i/L) = \left(\bigcap_{i \in I} L_i \right) / L$ 'dir (Hungerford, 1974).

İspat: $k + L \in \bigcap_{i \in I} (L_i/L)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $i \in I$ için $k + L \in L_i/L$ olup $k \in L_i$ 'dir. O zaman her $i \in I$ için $k \in L_i$ ve buradan $k \in \bigcap_{i \in I} L_i$ olur ki buradan da $k + L \in \left(\bigcap_{i \in I} L_i \right) / L$ elde edilir.

Tersine olarak, benzer işlemler yapılarak eşitlik gösterilebilir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde r -injektif modüllere temel oluşturan injektif modül ve radikal kavramları açıklanarak bu kavramlarla ilgili bazı özellikler incelenmiştir.

3.1.İnjektif Modüller

Tanım 3.1.1. K ve L R -modüller olsun. Eğer satır tam dizi olan R -modül homomorfizmalarının her

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\quad g \quad} & K \\ & & \downarrow f & \searrow h & \\ & & L & & \end{array}$$

diyagramı için $h \circ g = f$ olacak biçimde en az bir $h: K \rightarrow L$ R -modül homomorfizması varsa L 'ye K -injektiftir denir.

Eğer diyagramdaki her modül $\sigma[P]$ 'nin elemanı olmak şartıyla aynı ifade doğru ise L 'ye $\sigma[P]$ içinde K -injektiftir denir.

Eğer L her $S \in \sigma[P]$ için $\sigma[P]$ içinde S -injektif ise L 'ye $\sigma[P]$ 'de injektiftir denir.

Eğer L her K R -modülü için K -injektif ise L 'ye bir injektif modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.1.2. K ve L iki R -modül olsun. L 'nin K -injektif olması için gerek ve yeter koşul her $T \leq K$ ve her $f: T \rightarrow L$ homomorfizması için

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\quad i \quad} & K \\ & & \downarrow f & \searrow h & \\ & & L & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde $\exists h : K \rightarrow L$ homomorfizmasının bulunmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ Açıktır.

$(\Leftarrow)$ Satır tam dizi olan

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & P & \xrightarrow{g} & K \\ & & \downarrow f & & \\ & & L & & \end{array}$$

diyagramını alalım. $g : P \rightarrow K$ birebir bir R -modül homomorfizması olduğundan $g : P \rightarrow g(P)$ bir R -modül izomorfizması olarak alınabilir. $T = g(P)$ diyelim. Hipotezden

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T = g(P) & \xrightarrow{i} & K \\ & & \downarrow f \circ g^{-1} & & \\ & & L & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli yapan $\exists h : K \rightarrow L$ R -modül homomorfizması bulunabilir. Burada $\forall p \in P$ için

$$\begin{aligned} (h \circ g)(p) &= h(g(p)) = h(i(g(p))) = (h \circ i)(g(p)) = (f \circ g^{-1})(g(p)) = \\ &= f(g^{-1}(g(p))) = f(p) \end{aligned}$$

olup $h \circ g = f$ olur. Bu durumda tanımdan L , K -injektif olup istenen elde edilir.

Teorem 3.1.3. K bir R -modül ve $\{U_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olsun. O halde

$\prod_{i \in I} U_i$ direkt çarpımının K -injektif olması için gerek ve yeter koşul her $\eta \in I$ için U_η

modülünün K -injektif olmasıdır (Alizade ve Pancar, 1999).

İspat: $(\Rightarrow)$ $\prod_{i \in I} U_i$, K -injektif olsun. $f: T \rightarrow K$ bir R -modül monomorfizması ve $\gamma: T \rightarrow U_\eta$ bir R -modül homomorfizması olsun.

$$\begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & K \\
 & & \downarrow \gamma & & \searrow \delta \\
 & & U_\eta & & \\
 & & \uparrow \varepsilon_\eta & \nearrow \pi_\eta & \\
 & & \prod_{i \in I} U_i & &
 \end{array}$$

diyagramını göz önüne alalım. $\varepsilon_\eta: U_\eta \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$ kanonik injeksiyon olmak üzere, $\varepsilon_\eta \gamma: T \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$ homomorfizması için $\varepsilon_\eta \gamma = \delta f$ olacak biçimde bir $\delta: K \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$ R -modül homomorfizması vardır. Bu takdirde $\pi_\eta: \prod_{i \in I} U_i \rightarrow U_\eta$ η . kanonik projeksiyon olmak üzere $\delta' = \pi_\eta \delta$ eşitliği ile tanımlanan $\delta': K \rightarrow U_\eta$ homomorfizması için $\delta' f = \pi_\eta \delta f = \pi_\eta \varepsilon_\eta \gamma = 1_{U_\eta} \gamma = \gamma$ elde edilir. Diğer bir deyişle $\delta' f = \gamma$ elde etmiş olduk. Dolayısıyla her $\eta \in I$ için U_η , K -injektiftir.

$(\Leftarrow)$ Her $\eta \in I$ için U_η K -injektif olsun. $\eta \in I$, $f: T \rightarrow K$ bir R -modül monomorfizması ve $g: T \rightarrow \prod_{i \in I} U_i$ bir R -modül homomorfizması olmak üzere aşağıdaki diyagramı göz önüne alalım.

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & K \\
& & \downarrow g & \searrow h & \downarrow h_\eta \\
& & \prod_{i \in I} U_i & & \\
& & \downarrow \pi_\eta & \searrow & \\
& & U_\eta & &
\end{array}$$

U_η K -injektif olduğu için $\pi_\eta g: T \rightarrow U_\eta$ homomorfizması için $\pi_\eta g = h_\eta f$ olacak biçimde bir $h_\eta: K \rightarrow U_\eta$ homomorfizması vardır. $h: K \rightarrow \prod_{i \in I} U_i, k \rightarrow h(k) = (h_i(k))_{i \in I}$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin bir R -modül homomorfizması ve $\forall i \in I$ için $\pi_i h = h_i$ olduğu gösterilebilir. Bu durumda her $\forall i \in I$ için $\pi_i(hf) = h_i f = \pi_i g$ olup $hf = g$ olur. Böylece $\prod_{i \in I} U_i$ çarpımı K -injektiftir.

Teorem 3.1.4. U , K -injektif bir R -modül olsun. Bu durumda K 'nın her H alt modülü için U hem H -injektif, hem de K/H -injektiftir (Koşar, 2008).

İspat: Önce U 'nun H -injektif olduğunu gösterelim. Satır tam dizi olmak üzere,

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & H \\
& & \downarrow g & & \\
& & U & &
\end{array}$$

diyagramını düşünelim. H , K 'nın bir alt modülü olduğundan $i: H \rightarrow K$ içermeye dönüşümünü ele alırsak $if: T \rightarrow K$ bir R -modül monomorfizmasıdır. U , K -injektif olduğu için

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & K \\ & & \downarrow g & \searrow h & \\ & & U & & \end{array}$$

diyagramında öyle bir $h: K \rightarrow U$ homomorfizması vardır ki $h(if) = g$ 'dir. Buradan $(hi)f = g$ yazılır. Burada $h' = hi$ diyecek olursak aşağıdaki diyagram değişmeli olacak biçimde

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & H \\ & & \downarrow g & \searrow h' & \\ & & U & & \end{array}$$

$\exists h': H \rightarrow U$ R -modül homomorfizması bulunur. Dolayısıyla U , H -injektiftir.

Şimdi U 'nun K/H -injektif olduğunu ispatlayalım. $H \leq T \leq K$ olan herhangi bir $T \leq K$ alalım. Her

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T/H & \xrightarrow{i_{T/H}} & K/H \\ & & \downarrow g & \searrow h & \\ & & U & & \end{array} \quad (3.1.)$$

diyagramı için $hi_{T/H} = g$ olacak biçimde $\exists h: K/H \rightarrow U$ R -modül homomorfizmasının varlığını gösterirsek istenen elde edilmiş olur. $p: K \rightarrow K/H, k \rightarrow p(k) = k + H$, $p_1: T \rightarrow T/H, t \rightarrow p_1(t) = t + H$ ile tanımlı dönüşümlerin birer R -modül homomorfizması olduğu bilinmektedir. U , K -injektif olduğu için

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i_T} & K \\
& & \downarrow g \circ p_1 & \searrow h_1 & \\
& & U & &
\end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde en az bir $h_1 : K \rightarrow U$ R -modül homomorfizması vardır. Bu durumda $h_1 i_T = g p_1$ olur. $h : K/H \rightarrow U$, $k + H \rightarrow h(k + H) = h_1(k)$ dönüşümünü tanımlayalım. $k + H = k_1 + H$ olan herhangi $k, k_1 \in K$ alalım. Bu durumda $k - k_1 \in H$ olup ayrıca $H \leq T$ olduğu için $h_1(k - k_1) = h_1(i_T(k - k_1)) = g(p_1(k - k_1)) = g(0_{T/H}) = 0$ olur. Bu takdirde $h_1(k) - h_1(k_1) = 0$ olup $h_1(k) = h_1(k_1)$ olur. Yani h iyi tanımlıdır. h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. $t \in T$ olmak üzere her $t + H \in T/H$ için

$$h_{i_{T/H}}(t + H) = h(t + H) = h_1(t) = (g p_1)(t) = g(p_1(t)) = g(t + H)$$

olup $h_{i_{T/H}} = g$ olur. Yani (3.1.) diyagramını değişmeli kılan $\exists h : K/H \rightarrow U$ R -modül homomorfizması vardır. Dolayısıyla U , K/H -injektif olur.

Sonuç 3.1.5. K' , K'' ve K birer R -modül, $0 \longrightarrow K' \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} K'' \rightarrow 0$ bir tam dizi ve U, K -injektif ise U hem K' -injektif, hem de K'' -injektiftir (Wisbauer, 1991).

İspat: Dizi tam olduğu için $\text{Görf} = \text{Çekg}$, g örten ve f birebirdir. 1. İzomorfizma Teoremiyle $K/\text{Çekg} \cong K''$ gerçekleşir. O halde $K/\text{Görf} \cong K''$ ve $K' \cong \text{Görf} \leq K$ olduğundan K' , K 'nin bir alt modülü ve $K'' = K/K'$ olarak düşünülebilir. Bu durumda Teorem 3.1.4. ile U, K' ve $K/K' = K''$ -injektiftir.

Sonuç 3.1.6. U ve K iki R -modül olsun. Bu durumda U 'nun K -injektif olması için gerek ve yeter şart K 'nin her L alt modülü için U 'nun L -injektif olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ U K -injektif ve L, K 'nın bir alt modülü ise Teorem 3.1.4.'e göre U, L -injektiftir.

$(\Leftarrow)$ Her modül kendisinin bir alt modülü olduğu için L 'yi K olarak seçebiliriz. Bu takdirde kabul gereği U, K -injektiftir.

Teorem 3.1.7. $\{K_i\}_{i \in I}$ R -modüllerin bir ailesi olsun. Eğer U R -modülü $\forall i \in I$ için K_i -injektif ise bu durumda $U, \bigoplus_{i \in I} K_i$ -injektiftir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.1.8. U ve K R -modülleri için aşağıdakiler birbirlerine denktir.

- (a) U, K -injektiftir.
- (b) K 'nın her L alt modülü için U, L -injektiftir.
- (c) K 'nın her sonlu üretilmiş L alt modülü için U, L -injektiftir.
- (d) K 'nın her devirli L alt modülü için U, L -injektiftir (Wisbauer, 1991).

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$ L, K 'nın bir alt modülü olsun. Teorem 3.1.4.'e göre U, L -injektiftir.

$(b) \Rightarrow (c)$ L, K 'nın bir sonlu üretilmiş alt modülü olsun. L, K 'nın bir alt modülü olduğu için hipotez gereği U, L -injektiftir.

$(c) \Rightarrow (d)$ L, K 'nın bir devirli alt modülü olsun. L sonlu üretilmiş olduğu için hipotez gereği U, L -injektiftir.

$(d) \Rightarrow (a)$ $V = \{k_i | i \in I\}$, K 'nın bir üreteçler kümesi olsun. $\forall i \in I$, $K_i = Rk_i$ modülü K 'nın bir devirli alt modülüdür. Kabulden $\forall i \in I$ için U, K_i -injektiftir. Teorem 3.1.7. ile $U, \bigoplus_{i \in I} K_i$ -injektiftir.

$$\varphi: \bigoplus_{i \in I} K_i \rightarrow K, (l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_n}, 0, 0, \dots) \rightarrow \varphi(l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_n}, 0, 0, \dots) = l_{i_1} + l_{i_2} + \dots + l_{i_n}$$

dönüşümünü tanımlayalım. φ 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. φ 'nin örten olduğunu gösterelim. Herhangi $k \in K$ alalım. V, K 'nın bir üreteçler kümesi olduğu için $K = \langle V \rangle$ ve $k = r_1 k_{i_1} + \dots + r_n k_{i_n}$, $r_i \in R$, $i_1, i_2, \dots, i_n \in I$

yazılabilir. Bu durumda $\alpha = (r_1 k_{i_1}, \dots, r_n k_{i_n}, 0, 0, \dots) \in \bigoplus_{i \in I} K_i$ elemanını alırsak $\varphi(\alpha) = r_1 k_{i_1} + \dots + r_n k_{i_n} = k$ olup φ örtendir. 1. İzomorfizma Teoremi ile $\bigoplus_{i \in I} K_i / \text{Çek}\varphi \cong K$ olur. $U, \bigoplus_{i \in I} K_i$ -injektif ve $\text{Çek}\varphi, \bigoplus_{i \in I} K_i$ 'nin bir alt modülü olduğundan Teorem 3.1.4.'ten U, K -injektiftir.

Teorem 3.1.9. U ve K R -modülleri için aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

(a) U, K -injektiftir.

(b) Her boştan farklı Λ indis kümesi için $U, K^{(\Lambda)}$ -injektiftir.

(c) Her $L \in \sigma[K]$ için U, L -injektiftir.

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) Teorem 3.1.7.'den açıktır.

(b) $\Rightarrow$ (c) Herhangi $L \in \sigma[K]$ alalım. $L \in \sigma[K]$ olduğu için $L \leq P$ olacak biçimde K -üretilmiş en az bir P R -modülü vardır. P, K -üretilmiş olduğu için Λ indis kümesi vardır öyle ki, en az bir $f: K^{(\Lambda)} \rightarrow P$, R -modül epimorfizması vardır. Hipotezden $U, K^{(\Lambda)}$ -injektiftir. O halde Teorem 3.1.4. gereği $U, K^{(\Lambda)} / \text{Çek}f$ -injektif olup $K^{(\Lambda)} / \text{Çek}f \cong P$ olduğundan U, P -injektif olur. U, P -injektif ve $L \leq P$ olduğundan Teorem 3.1.4. gereği U, L -injektif olup istenen elde edilir.

(c) $\Rightarrow$ (a) $K \in \sigma[K]$ olduğu için istenen kolaylıkla elde edilir.

Teorem 3.1.10. (Baer Kriteri) Bir U R -modülü için aşağıdaki ifadeler birbirlerine denktir.

(a) U injektiftir.

(b) U, R -injektiftir.

(c) R 'nin her sol I ideali ve her $h: I \rightarrow U$ R -modül homomorfizması için öyle $u \in U$ vardır ki $\forall a \in I$ için $h(a) = au$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat: (a) $\Rightarrow$ (b) açıktır.

$(b) \Rightarrow (a)$ U , R -injektif olsun. Herhangi K R -modülünü alalım. K bir R -modül olduğundan Teorem 2.2.50.'den R -üretilmiş olup $K \in \sigma[R]$ olur. U , R -injektif olduğundan Teorem 3.1.9. gereği U , K -injektif olur. Bu durumda U injektif olur.

$(b) \Rightarrow (c)$ U , R -injektif olsun. R 'nin herhangi I sol idealini ve herhangi $h: I \rightarrow U$ R -modül homomorfizmasını alalım. U , R -injektif olduğundan

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R \\ & & \downarrow h & & \\ & & U & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h': R \rightarrow U$ R -modül homomorfizması vardır. $u = h'(1_R)$ diyelim. Burada $u \in U$ olur. Ayrıca $\forall a \in I$ için

$$h(a) = (h' \circ i)(a) = h'(i(a)) = h'(a) = h'(a1_R) = ah'(1_R) = au \text{ olup istenen elde edilir.}$$

$(c) \Rightarrow (b)$ I , R 'nin bir sol ideali olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{i} & R \\ & & \downarrow h & & \\ & & U & & \end{array}$$

diyagramını ele alalım. Hipotezden öyle $u \in U$ vardır ki $\forall a \in I$ için $h(a) = au$ olur. $h': R \rightarrow U, r \rightarrow h'(r) = ru$ dönüşümünün bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Burada $\forall a \in I$ için $(h' \circ i)(a) = h'(a) = au = h(a)$ olup $h' \circ i = h$ olur. O halde U , R -injektif olup istenen elde edilir.

Tanım 3.1.11. K bir R -modül olsun. Eğer R 'nin her sıfır bölen olmayan r elemanı ve $\forall k \in K$ için $rl = k$ olacak biçimde $\exists l \in K$ varsa K 'ya bir bölünebilir R -modül denir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.1.12. Her R -injektif modül bölünebilirdir (Wisbauer, 1991).

İspat: K bir R -modül olsun. Sıfır bölen olmayan herhangi $s \in R$ ve herhangi $k \in K$ alalım. $sl=k$ olacak şekilde $\exists l \in K$ elemanının varlığını gösterirsek istenen elde edilir. $s \in R$ olduğu için Rs , R 'nin bir sol idealidir. $f: Rs \rightarrow K, rs \rightarrow f(rs) = rk$ dönüşümünü tanımlayalım. f 'nin kapalı olduğu aşıkardır. $r_1, r_2 \in R$ olmak üzere $r_1s = r_2s$ ise $(r_1 - r_2)s = 0$ olup s elemanı sıfır bölen olmadığından $r_1 = r_2$ olur. Bu durumda $r_1k = r_2k$ olup f iyi tanımlıdır. Yani f bir fonksiyon olur. Burada f 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. K, R -injektif olduğu için

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Rs \xrightarrow{i} R \\ & & \downarrow f \quad \swarrow h \\ & & K \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: R \rightarrow K$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $k = 1_R k = f(1_R s) = f(s) = (h \circ i)(s) = h(s) = h(s1_R) = sh(1_R)$ olup $l = h(1_R)$ dersek $sl = k$ olur.

Teorem 3.1.13. Bölünebilir bir modülün her bölüm modülü de bölünebilirdir (Wisbauer, 1991).

İspat: K bir bölünebilir modül ve $T \leq K$ olsun. K/T 'nin bölünebilir olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. Sıfır bölen olmayan herhangi $r \in R$ ve herhangi $k + T \in K/T$ alalım. K bölünebilir olduğu için $rl = k$ olacak biçimde $\exists l \in K$ vardır. Burada $r(l + T) = rl + T = k + T$ olup K/T bölünebilirdir.

Teorem 3.1.14. R 'nin her sol ideali devirli ve R halkası sıfır bölensiz (sıfırdan farklı her elemanı sıfır bölen olmayan) ise bir K R -modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart bölünebilir olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: $(\Rightarrow)$ Teorem 3.1.12.'den açıktır.

$(\Leftarrow)$ K bölünebilir olsun. I, R 'nin bir sol ideali olmak üzere $h: I \rightarrow K$ bir R -modül homomorfizması olsun. Eğer $I = 0$ ise $\forall a \in I$ için $a = 0_R$ olup $h(a) = h(0_R) = 0_K = 0_R 0_K = a 0_K$ olur. $I \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde R 'nin her sol ideali devirli olduğundan $I = Rs$ olacak şekilde $\exists 0_R \neq s \in R$ vardır. Burada R

halkası sıfır bölensiz olduğu için s elemanı sıfır bölen değildir. $h(s) = k$ diyelim. K bölünebilir olduğu için $sl = k$ olacak biçimde $\exists l \in K$ vardır. Herhangi $a \in I$ alalım. $a \in I = Rs$ olduğu için $a = rs$ olacak biçimde $\exists r \in R$ vardır. Burada $h(a) = h(rs) = rh(s) = rk = rsl = al$ olup Baer Kriteri'nden K injektif olur.

Tanım 3.1.15. K ve U iki R -modül olsun. T bir sonlu üretilmiş R -modül ve satır tam dizi olmak üzere her

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & K^{(\mathbb{N})} \\ & & \downarrow g & \searrow h & \\ & & U & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde $\exists h : K^{(\mathbb{N})} \rightarrow U$ R -modül homomorfizması varsa U ya bir zayıf K -injektif modül denir. Yani, $g = hf$ olacak biçimde $\exists h : K^{(\mathbb{N})} \rightarrow U$ R -modül homomorfizmasının mevcut olması gereklidir. $K = R$ ise zayıf R -injektif modüller FP -injektif olarak isimlendirilir (FP : finitely presented (sonlu gösterimli)) (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.1.16. K bir R -modül ve $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\forall \lambda \in \Lambda$ için U_λ zayıf K -injektif R -modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ da zayıf K -injektiftir (Wisbauer, 1991).

İspat: T sonlu üretilmiş olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{i} & K^{(\mathbb{N})} \\ & & \downarrow f & \searrow & \\ & & \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda & & \end{array}$$

diyagramı verilsin. T sonlu üretilmiş olduğu için $f(T) \subset \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ olacak biçimde Λ kümesinin sonlu elemanlı bir A alt kümesi vardır. O halde $f : T \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in A} U_\lambda$ bir R -modül homomorfizması olarak düşünülebilir. $\forall \gamma \in A$ için

$$\pi_\gamma : \bigoplus_A U_\lambda \rightarrow U_\gamma, \sum_A x_\lambda \rightarrow \pi_\gamma \left(\sum_A x_\lambda \right) = x_\gamma \quad (x_\lambda \in U_\lambda)$$

dönüşümünü tanımlayalım. $\forall \gamma \in A$ için $\pi_\gamma : \bigoplus_A U_\lambda \rightarrow U_\gamma$ dönüşümünün bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. $\forall \gamma \in A$ için U_γ zayıf K -injektif olduğu için tanım gereği $h_\gamma \circ i = \pi_\gamma \circ f$ olacak biçimde $\exists h_\gamma : K^{(\mathbb{N})} \rightarrow U_\gamma$ R -modül homomorfizması vardır.

$$g : K^{(\mathbb{N})} \rightarrow \bigoplus_A U_\gamma, x \rightarrow g(x) = \sum_A h_\gamma(x)$$

dönüşümünü düşünelim. A sonlu elemanlı olduğu için $g : K^{(\mathbb{N})} \rightarrow \bigoplus_A U_\gamma$ bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Burada $\forall x \in T$ için

$$\begin{aligned} (g \circ i)(x) &= g(i(x)) = \sum_A h_\gamma(i(x)) = \sum_A (h_\gamma \circ i)(x) = \sum_A (\pi_\gamma \circ f)(x) = \\ &= \sum_A \pi_\gamma(f(x)) = f(x) \end{aligned}$$

olup buradan da $g \circ i = f$ olur. Bu durumda $\bigoplus_A U_\lambda$ zayıf K -injektiftir.

Teorem 3.1.17. Eğer $U_1 \subset U_2 \subset \dots$, L modülünün zayıf K -injektif alt modüllerinin artan zinciri ise $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} U_i$ zayıf K -injektiftir (Wisbauer, 1991).

İspat: T sonlu üretilmiş bir R -modül ve satır tam dizi olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{f} & K^{(\mathbb{N})} \\ & & \downarrow f & \searrow h & \\ & & \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} U_i & & \end{array}$$

diagramı verilsin. T sonlu üretilmiş olduğu için $f(T)$ de sonlu üretilmiş olur.

$V = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s\}$ T 'nin bir üreteçler kümesi olsun. Her $j = 1, 2, \dots, s$ için $f(\alpha_j) \in \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} U_i$ olduğu için $f(\alpha_j) \in U_{i_j}$ olacak biçimde $\exists i_j \in \mathbb{Z}^+$ vardır.

$i_0 = \max_{j=1,2,\dots,s} \{i_j\}$ dersek $j = 1, 2, \dots, s$ için $f(\alpha_j) \in U_{i_0}$ olur. Bu durumda

$$f(T) = f(\langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \rangle) = \langle f(\alpha_1), f(\alpha_2), \dots, f(\alpha_s) \rangle \subset U_{i_0} \text{ olur. Buradan da } t \rightarrow f(t)$$

ile verilen $\bar{f} : T \rightarrow U_{i_0}$ dönüşümü bir R -modül homomorfizması olduğu görülür. U_{i_0} zayıf K -injektif olduğu için

$$\begin{array}{ccccc}
0 & \longrightarrow & T & \xrightarrow{\varepsilon} & K^{(\mathbb{N})} \\
& & \downarrow \bar{f} & \searrow \bar{h} & \\
& & U_{i_0} & &
\end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak biçimde $\exists \bar{h} : K^{(\mathbb{N})} \rightarrow U_{i_0}$ R -modül homomorfizması vardır. Diğer bir deyişle $\bar{h} \circ g = \bar{f}$ olacak biçimde $\exists \bar{h} : K^{(\mathbb{N})} \rightarrow U_{i_0}$ R -modül homomorfizması vardır. $h : K^{(\mathbb{N})} \rightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} U_i$, $\alpha \rightarrow \bar{h}(\alpha)$ olarak tanımlayalım. Burada h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu aşıkardır ve $\forall t \in T$ için $(h \circ g)(t) = h(g(t)) = \bar{h}(g(t)) = \bar{f}(t) = f(t)$ olur. Sonuç olarak $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}^+} U_i$ zayıf K -injektiftir.

3.2. Küçük Alt Modüller

Tanım.3.2.1. M bir R -modül ve K, M modülünün bir öz alt modülü olsun. Eğer $K+L=M$ koşulunu sağlayan M modülünün hiçbir L öz alt modülü yoksa K alt modülüne M 'de küçüktür denir ve $K \ll M$ ile gösterilir.

Buna göre $K \ll M$ ve $K+L=M$ ise $L=M$ 'dir. Bu durumda $0 \ll M$ 'dir (Wisbauer,1991).

Küçük alt modüller ile ilgili kullanılacak bazı özellikler aşağıdaki teorem altında toplanabilir.

Teorem.3.2.2. K, N ve M birer R -modül olsun.

- (i) $K \subset N \subset M$ ve $N \ll M$ ise $K \ll M$ 'dir.
- (ii) $K \subset N \subset M$ ve $K \ll N$ ise K, M 'nin N 'yi kapsayan her alt modülünde de küçüktür.
- (iii) $f : M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Eğer $K \ll M$ ise $f(K) \ll N$ 'dir.

(iv) Eğer K alt modülü M modülünde hem direkt toplam terimi, hem de küçük ise bu durumda $K=0$ 'dır.

(v) $K \subset N \subset M$ ve N, M 'nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde $K \ll N$ olması için gerek ve yeter şart $K \ll M$ olmasıdır (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $K+L=M$ olacak biçimde herhangi bir L alt modülünü ele alalım. Bu durumda $K \leq N$ olduğu için $N+L=M$ olup $N \ll M$ olduğu için $L=M$ bulunur. Dolayısıyla $K \ll M$ 'dir

(ii) L, M 'nin N 'yi kapsayan bir alt modülü olsun. $K+T=L$ olacak biçimde herhangi bir $T \leq L$ alt modülünü ele alalım. $K+T=L$ eşitliğinin her iki tarafının N ile kesişimini alırsak $(K+T) \cap N = L \cap N$ olup $N \leq L$ ve Modüler Kuraldan $K+(T \cap N) = N$ bulunur. $K \ll N$ olduğu için $T \cap N = N$ olur. Dolayısıyla $N \subset T$ 'dir. $K+T=L$ ve $K \leq N \leq T$ 'den $T=L$ elde edilir. Buradan $K \ll L$ bulunur.

(iii) $f(K)+L=f(M)$ olacak biçimde herhangi bir $L \leq f(M)$ alt modülünü alalım. Burada $f^{-1}(f(K)+L)=M$ yazılabilir. Buradan da $K+f^{-1}(L)=M$ 'dir. $K \ll M$ olduğu için $f^{-1}(L)=M$ olup $L=f(M)$ olduğu görülür. O halde $f(K) \ll f(M)$ 'dir ve (ii)'den $f(K) \ll N$ elde edilir.

(iv) K bir direkt toplam terimi olduğu için $M=K \oplus N$ olacak biçimde bir N alt modülü vardır. $K \ll M$ olduğu için $N=M$ olur. Ayrıca $K \cap N=0$ olduğu için $K=K \cap M=K \cap N=0$ bulunur.

(v) $(\Rightarrow) K \ll N$ ise (ii)'den $K \ll M$ 'dir.

$(\Leftarrow)$ $K \ll M$ olsun. $K+L=N$ olacak biçimde herhangi bir $L \leq N$ alt modülünü ele alalım. N, M 'nin bir direkt toplam terimi olduğu için $M=N \oplus U$ olacak biçimde bir $U \leq M$ vardır. O halde $K+L+U=M$ olur. $K \ll M$ olduğu için $L+U=M$ olup eşitliğin her iki tarafının N ile kesişimi alınır ve Modüler Kural uygulanırsa $N=L+(U \cap N)=L+0=L$ olur. Sonuç olarak $K \ll N$ elde edilir.

Teorem 3.2.2.'nin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.3. M bir R -modül, $K_1, K_2, \dots, K_n, M_1, M_2, \dots, M_n$ M 'nin alt modülleri ve her $i = 1, 2, \dots, n$ için $K_i \ll M_i$ olsun. Bu takdirde $K_1 + K_2 + \dots + K_n \ll M_1 + M_2 + \dots + M_n$ 'dir (Kasch, 1982).

İspat: $n = 2$ için yapalım. $K_1 + K_2 + L = M_1 + M_2$ olacak biçimde herhangi bir L alt modülünü alalım. $K_1 \ll M_1$ olduğu için Teorem 3.2.2.(ii)'den $K_1 \ll M_1 + M_2$ olup $K_2 + L = M_1 + M_2$ olur. Benzer biçimde $K_2 \ll M_2$ olduğu için yine Teorem 3.2.2.(ii)'den $K_2 \ll M_1 + M_2$ olup $L = M_1 + M_2$ elde edilir. Buradan $K_1 + K_2 \ll M_1 + M_2$ bulunur. Benzer biçimde sonlu sayıdakiler için de gösterilebilir.

3.3. Bir Modülün Radikali

Tanım 3.3.1. M bir R -modül olsun. M 'nin bütün maksimal alt modüllerinin arakesitine M 'nin radikali denir ve $RadM$ ile gösterilir (Wisbauer, 1991).

Buna göre $RadM = \cap \{K \leq M \mid K, M \text{ de maksimal}\}$ 'dir.

Tanım 3.3.2. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin hiçbir maksimal alt modülü yoksa $RadM = M$ olarak tanımlanır ve M modülüne bir radikal modül denir (Wisbauer, 1991).

Basit modüllerin tek maksimal alt modülü 0 olduğu için basit modüllerin radikali sıfırdır.

Teorem 3.3.3. M bir R -modül olsun. Bu durumda $RadM = \sum_{L \ll M} L$ 'dir (Wisbauer, 1991).

İspat: Herhangi bir $L \ll M$ alt modülünü ele alalım. Eğer M 'nin bir K maksimal alt modülü L 'yi içermez ise $K + L = M$ olup $K = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla L , M 'nin bütün maksimal alt modülleri tarafından içerilir. Böylece $L \leq RadM$ olur. Buradan da $\sum_{L \ll M} L \leq RadM$ bulunur. Şimdi de ters kapsamayı gösterelim. $\forall m \in RadM$ için $Rm \ll M$ olduğunu gösterecek olursak istenen elde edilir. $m \in RadM$ keyfi bir eleman olsun. Kabul edelim ki Rm , M 'de küçük olmasın. Bu durumda $Rm + L = M$ olacak biçimde $\exists L \neq M$ alt modülü vardır. Böylece $S = \{L \leq M \mid m \notin L, Rm + L = M\}$ kümesi boştan farklıdır. Bu kümede kapsama

bağıntısına göre her zincirin bir üst sınıra sahip olduğunu gösterelim. K , S 'nin bir zinciri ve $C = \bigcup_{B \in K} B$ olsun. Bu takdirde C , M 'nin bir alt modülüdür. Eğer $m \in C = \bigcup_{B \in K} B$ olursa $m \in B$ olacak biçimde $\exists B \in K \subset S$ mevcuttur. Bu ise S 'nin seçimi ile çelişir. Dolayısıyla $m \notin C$ 'dir. İlâveten $Rm + C = M$ olduğu aşıkardır. O halde C modülü K 'nın S 'de bir üst sınırı olur. Dolayısıyla Zorn Lemması gereği S bir P gibi maksimal eleman içerir. Burada P 'nin M 'de maksimal alt modül olduğu gösterilebilir. Burada da $m \notin P$ olduğu için $m \notin \text{Rad}M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $Rm \ll M$ bulunur.

Önerme 3.3.4. M bir R -modül olsun. $M / \text{Rad}M$ bölüm modülünün tek küçük alt modülü $\{0_{M/\text{Rad}M}\}$ şeklindedir. Yani $\text{Rad}(M / \text{Rad}M) = 0$ 'dır (Wisbauer, 1991).

İspat: M 'nin tüm maksimal alt modüllerinin ailesi $\{M_i\}_{i \in I}$ olsun. Bu durumda $M / \text{Rad}M$ bölüm modülünün tüm maksimal alt modülleri $i \in I$ için $M_i / \text{Rad}M$ formundadır. Böylece

$$\text{Rad}(M / \text{Rad}M) = \bigcap_{i \in I} (M_i / \text{Rad}M) = \left(\bigcap_{i \in I} M_i \right) / \text{Rad}M = \text{Rad}M / \text{Rad}M = 0$$

olur.

Önerme 3.3.5. M bir R -modül ve $K \leq L \leq M$ alt modüller olsun. Bu takdirde $\text{Rad}K \leq \text{Rad}L$ 'dir (Kasch, 1982).

İspat: $m \in \text{Rad}K$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde $Rm \ll K$ ve $K \leq L$ olduğu için $Rm \ll L$ olup $m \in \text{Rad}L$ 'dir. Böylece $\text{Rad}K \leq \text{Rad}L$ olup istenen elde edilir.

Teorem 3.3.6. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her öz alt modülü bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyor ise $\text{Rad}M \ll M$ 'dir (Wisbauer, 1991).

İspat: $\text{Rad}M + L = M$ olacak biçimde herhangi bir L alt modülü için eğer $L \neq M$ olsa hipotez gereği L bir K maksimal alt modülü tarafından kapsanır. Burada $M = \text{Rad}M + L \subset K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $L = M$ olup $\text{Rad}M \ll M$ 'dir.

Sonuç 3.3.7. M bir sonlu üretilmiş R -modül ise $\text{Rad}M \ll M$ 'dir (Wisbauer, 1991).

Teorem 3.3.8. M ve N iki R -modül ve $f:M \rightarrow N$ bir R -modül homomorfizması olsun. Bu durumda $f(RadM) \subset RadN$ 'dir. Ayrıca $\check{C}ekf \subset RadM$ ise $f(RadM) = Radf(M)$ 'dir (Anderson ve Fuller, 1974).

İspat: $f(RadM) \subset Radf(M)$ olduğu Teorem 3.2.2.(iii) ve Teorem 3.3.3.'ten görülür. Dolayısıyla $Radf(M) \subset RadN$ olduğu için $f(RadM) \subset RadN$ elde edilir. Kabul edelim ki $\check{C}ekf \subset RadM$ olsun. $m \in Radf(M)$ alalım. Bu durumda $\exists n \in M$ için $m = f(n)$ şeklinde yazılabilir. Kabul edelim ki $n \in M$ elemanı M 'nin bütün maksimal alt modülleri tarafından kapsanmasın. Bu durumda M 'nin en az bir K maksimal alt modülü için $K + Rn = M$ 'dir. Buradan $f(K) + f(Rn) = f(M)$ elde edilir. $f(Rn) = Rf(n) = Rm \ll f(M)$ olduğu için $f(K) = f(M)$ bulunur. Son eşitliğin her iki tarafının f ile ters görüntüsü alınırsa $M = K + \check{C}ekf$ bulunur. $\check{C}ekf \subset RadM$ olduğu için $K = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $n \in RadM$ olup $m \in f(RadM)$ olduğu görülür. Sonuç olarak $f(RadM) = Radf(M)$ 'dir.

Teorem 3.3.9. M bir R -modül ve $N \leq M$ olmak üzere $N \leq RadM$ olsun. Bu durumda $Rad(M/N) = (RadM)/N$ olur (Anderson ve Fuller, 1974).

İspat: $N \leq RadM$ olduğu için $N \leq \cap \{K \mid K, M \text{ de maksimal}\} = RadM$ olup $Rad(M/N) = (RadM)/N$ 'dir.

Teorem 3.3.10. M bir R -modül ve $\forall i \in I$ için $M_i \leq M$ olmak üzere $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olsun. Bu durumda $RadM = \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ ve $M / RadM \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i / RadM_i)$ olur (Wisbauer, 1991).

İspat: Önce $RadM = \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ olduğunu gösterelim. Herhangi $x \in RadM$ alalım. $x \in RadM$ olduğu için $Rx \ll M$ olur. $x \in M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ olduğu için $x = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n}$ olacak biçimde $\exists i_1, i_2, \dots, i_n \in I$, $\exists x_{i_1} \in M_{i_1}, \exists x_{i_2} \in M_{i_2}, \dots, \exists x_{i_n} \in M_{i_n}$ vardır. Burada $1 \leq t \leq n$ için $\pi_{i_t} : M = \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow M_{i_t}$ kanonik projeksiyonunu göz önüne alırsak $Rx \ll M$ olduğu için Teorem 3.2.2.(iii) gereği $Rx_{i_t} = \pi(Rx) \ll M_{i_t}$ olup $x_{i_t} \in RadM_{i_t}$

olur. O halde $x = x_{i_1} + x_{i_2} + \dots + x_{i_n} \in \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ olup $RadM \subset \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ olur. Diğer taraftan $\forall i \in I$ için $M_i \leq M$ olduğu için $RadM_i \leq RadM$ olup $\bigoplus_{i \in I} RadM_i \subset RadM$ olur. O halde $RadM = \bigoplus_{i \in I} RadM_i$ olur.

Şimdi $M / RadM \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i / RadM_i)$ olduğunu gösterelim.

$$f : M = \bigoplus_{i \in I} M_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} (M_i / RadM_i), x = (x_i)_{i \in I} \rightarrow f(x) = (x_i + RadM_i)_{i \in I}$$

dönüşümünü tanımlayalım. f 'nin bir R -modül epimorfizması olduğu gösterilebilir.

Diğer taraftan $x = (x_i)_{i \in I} \in M$ olmak üzere

$$x \in Çekf \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow (x_i + RadM_i)_{i \in I} \Leftrightarrow (RadM_i)_{i \in I} \Leftrightarrow \forall_i \in I \text{ için } x_i \in RadM_i$$

$$\Leftrightarrow x = (x_i)_{i \in I} \in \bigoplus_{i \in I} RadM_i \text{ denkliklerinden } Çekf = \bigoplus_{i \in I} RadM_i = RadM \text{ olduğu anlaşılır.}$$

O halde Homomorfizma Teoreminden $M / RadM \cong f(M) = \bigoplus_{i \in I} (M_i / RadM_i)$ olur.

3.4. Oyuk ve Lokal Modüller

Tanım 3.4.1. M bir R -modül olsun. Eğer M 'nin her öz alt modülü M 'de küçük ise M 'ye bir oyuk modül denir (Clark ve ark., 2006).

Tanım 3.4.2. M bir R -modül olsun. Eğer M kendinden farklı bütün alt modüllerini kapsayan bir öz alt modüle sahip ise ya da M 'nin tüm öz alt modüllerinin toplamı M 'nin bir öz alt modülü ise M 'ye bir lokal (veya yerel) modül denir. R halkası sol R -modül olarak lokal ise R halkasına bir lokal halka denir (Wisbauer, 1991).

Her cisim kendi üzerinde bir lokal modül yapısına sahiptir. Ayrıca p bir asal sayı ve $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\mathbb{Z}_{p^k}$ bir lokal halkadır.

Teorem 3.4.3. M bir lokal modül olsun. Bu durumda M 'nin tek maksimal alt modülü $RadM$ 'dir ve $RadM \ll M$ 'dir (Wisbauer, 1991).

İspat: M lokal olduğundan M 'nin bütün öz alt modüllerini kapsayan bir N öz alt modülü vardır. Burada N 'nin maksimal olduğu açıktır. N, M 'nin bir maksimal alt modülü olduğundan $RadM \leq N$ olur. $N + L = M$ olan herhangi $L \leq M$ alalım. Eğer burada $L \neq M$ olsa $L \leq N$ olup $M = N + L \leq N$ çelişkisi elde edilir. O halde $L = M$ olup

$N \ll M$ olur. Bu durumda $N \leq \text{Rad}M$ olup ayrıca $\text{Rad}M \leq N$ olduğundan $\text{Rad}M = N \ll M$ olur. Eğer K, M 'nin bir maksimal alt modülü ise $N = \text{Rad}M \leq K$ olup N maksimal olduğundan $K = N$ olur. O halde $\text{Rad}M = N$, M 'nin tek maksimal alt modülü olur.

Teorem 3.4.4. M sıfırdan farklı bir R -modül olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) M oyuktur ve $\text{Rad}M \neq M$ 'dir.
- (ii) M oyuktur ve devirlidir (veya sonlu üretilmiştir).
- (iii) M lokaldir (Wisbauer, 1991).

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\text{Rad}M \neq M$ olduğu için M 'nin en az bir K maksimal alt modülü vardır. O halde her $m \in M - K$ için $Rm + K = M$ 'dir. Ayrıca M oyuk olduğu için $K \ll M$ olup $Rm = M$ bulunur. Dolayısıyla M devirlidir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Her devirli modül sonlu üretilmiş olduğu için ispatı M 'nin sonlu üretilmiş olması durumu üzerine yapmamız yeterlidir. Sonuç 3.3.7. gereği $\text{Rad}M \ll M$ 'dir. Burada M kendi içinde küçük olmadığı için $\text{Rad}M \neq M$ 'dir. Buradan M 'nin en az bir N maksimal alt modülü olduğu anlaşılır. Kabul edelim ki K, M 'nin herhangi bir öz alt modülü olsun ve N tarafından kapsansın. O halde N maksimal olduğu için $K + N = M$ olup $K \ll M$ olduğu için $N = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $K \leq N$ olmak zorundadır. Yani N, M 'nin bütün öz alt modüllerini kapsar. Ayrıca N bir öz alt modül olduğu için M lokaldir.

(iii) $\Rightarrow$ (i) M lokal olsun. O halde M 'nin bütün öz alt modüllerini kapsayan bir N öz alt modülü vardır. Kabul edelim ki $N + L = M$ koşulunu sağlayan L alt modülü için $L \neq M$ olsun. Buradan $L \leq N$ olup $N = M$ çelişkisi elde edilir. O halde $N + L = M$ şartını sağlayan her L alt modülü için $L = M$ olup $N \ll M$ bulunur. M 'nin herhangi bir K öz alt modülünü alalım. $K \leq N$ ve $N \ll M$ olduğundan $K \ll M$ bulunur. Dolayısıyla M oyuktur. Ayrıca Teorem 3.4.3. gereğince $\text{Rad}M = N \neq M$ 'dir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde r -injektif modül kavramı tanımlandı ve bu kavramla ilgili birtakım özellikler incelendi.

4.1. r -İnjektif Modüller

Tanım 4.1.1. M ve N iki R -modül olsun. Eğer $RadN \leq g(K)$ ve satır tam dizi olmak üzere her

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow f & \searrow h & \\ & & M & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: N \rightarrow M$ R -modül homomorfizması varsa, yani $h \circ g = f$ olacak şekilde $\exists h: N \rightarrow M$ R -modül homomorfizması varsa M modülüne bir radikal N -injektif (kısaca r - N -injektif) modül denir. Eğer M modülü her T R -modülü için radikal T -injektif ise M modülüne bir radikal injektif (kısaca r -injektif) modül denir.

Açıktır ki her N -injektif modül r - N -injektiftir. Ancak bunun tersi her zaman doğru olmayabilir. (bk.Örnek 4.1.26., Örnek 4.1.27., Örnek 4.1.28. ve Örnek 4.1.29.)

Teorem 4.1.2. M ve N iki R -modül olmak üzere M 'nin r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul $RadN \leq K$ olan her K alt modülü ve $i: K \rightarrow N$ içerme dönüşümü olmak üzere her

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & \searrow h & \\ & & M & & \end{array}$$

diyagramı için $h \circ i = f$ olacak şekilde $\exists h: N \rightarrow M$ R -modül homomorfizmasının bulunmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) Açıktır.

($\Leftarrow$) Satır tam ve $Rad(N) \leq g(K)$ olan herhangi

diagramını

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{g} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & M & & \end{array}$$

diyagramını alalım. Satır tam olduğundan $g : K \rightarrow N$ bir R -modül monomorfizması olup $\varphi : K \rightarrow g(K)$, $x \rightarrow \varphi(x) = g(x)$ dönüşümü bir R -modül izomorfizması olur. Burada $Rad N \leq g(K)$ olduğundan hipotezden $i : g(K) \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere

diagramını

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & g(K) & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f \circ \varphi^{-1} & & \\ & & M & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h : N \rightarrow M$ R -modül homomorfizması bulunabilir. Bu durumda $h \circ i = f \circ \varphi^{-1}$ olup $h \circ i \circ \varphi = f$ olur. Burada $i \circ \varphi = g$ olduğundan $h \circ g = f$ olur. Böylece M r - N -injektif olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.3. M ve N iki R -modül ve $Rad N = 0$ olsun. Bu durumda M 'nin r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul M 'nin N -injektif olmasıdır.

İspat: N 'nin her K alt modülü için $Rad N = 0 \leq K$ olduğundan tanımlardan açıktır.

Teorem 4.1.4. M ve N iki R -modül ve N 'nin her K alt modülü $K + Rad N$ modülünün bir direkt toplam terimi olsun. Bu durumda M 'nin r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul M 'nin N -injektif olmasıdır.

İspat: ($\Rightarrow$) M r - N -injektif olsun. $K \leq N$ ve $i : K \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere herhangi

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K \xrightarrow{i} N \\ & & \downarrow f \\ & & M \end{array}$$

diyagramını alalım. K , $K + RadN$ 'nin bir direkt toplam terimi olduğundan $K + RadN = K \oplus T$ olacak şekilde $\exists T \leq K + RadN$ vardır. M r - N -injektif olduğundan $i_1 : K + RadN \rightarrow N$ içerme dönüşümü ve $\pi : K + RadN = K \oplus T \rightarrow K$ kanonik projeksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K + RadN \xrightarrow{i} N \\ & & \downarrow f \circ \pi \\ & & M \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h : N \rightarrow M$ R -modül homomorfizması bulunabilir. Burada $h \circ i_1 = f \circ \pi$ olup $i_2 : K \rightarrow K + RadN$ içerme dönüşümü olmak üzere $h \circ i_1 \circ i_2 = f \circ \pi \circ i_2$ olur. Burada ayrıca $i_1 \circ i_2 = i$ ve $\pi \circ i_2 = 1_K$ olup $h \circ i = h \circ i_1 \circ i_2 = f \circ \pi \circ i_2 = f \circ 1_K = f$ olur. O halde M modülü N -injektif olup istenen elde edilir.

($\Leftarrow$) Açıktır.

Sonuç 4.1.5. M ve N iki R -modül ve N 'nin her K alt modülü için $i : K \rightarrow K + RadN$ içerme dönüşümü olmak üzere $g \circ i = 1_K$ olacak şekilde $\exists g : K + RadN \rightarrow K$ R -modül homomorfizması bulunabilsin. Bu durumda M 'nin r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul M 'nin N -injektif olmasıdır.

İspat: N 'nin herhangi K alt modülünü alalım. Hipotezden $i : K \rightarrow K + RadN$ içerme dönüşümü olmak üzere $g \circ i = 1_K$ olacak şekilde $\exists g : K + RadN \rightarrow K$ R -modül homomorfizması vardır. Bu durumda Teorem 2.2.42.'den $K + RadN = i(K) \oplus Çekg = K \oplus Çekg$ olup K modülü $K + RadN$ 'nin bir

direkt toplam terimi olur. O halde Teorem 4.1.4.'ten M 'nin $r-N$ -injektif olması için gerek ve yeter koşul M 'nin N -injektif olmasıdır.

Teorem 4.1.6. N bir R -modül, $K \leq N$ ve $RadN \leq K$ olsun. Eğer K modülü $r-N$ -injektif ise K modülü N 'nin bir direkt toplam terimi olur.

İspat: K modülü $r-N$ -injektif olsun. Bu durumda $RadN \leq K$ olduğundan $i: K \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow 1_K & & \\ & & K & & \end{array}$$

diyagramını değişmeli kılan $\exists h: N \rightarrow K$ R -modül homomorfizması vardır. Burada $h \circ i = 1_K$ olup Teorem 2.2.42. gereği $N = i(K) \oplus \text{Çekh} = K \oplus \text{Çekh}$ olur. O halde K , N 'nin bir direkt toplam terimi olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.7. N bir R -modül olsun. Eğer $RadN$ modülü $r-N$ -injektif ise $RadN$, N 'nin bir direkt toplam terimi olur.

İspat: Teorem 4.1.6.'dan açıktır.

Teorem 4.1.8. N bir R -modül ve $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ R -modüllerin bir ailesi olsun. Bu durumda $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ direkt çarpım modülünün $r-N$ -injektif olması için gerek ve yeter şart

$\forall \lambda \in \Lambda$ için M_λ modülünün $r-N$ -injektif olmasıdır.

İspat: $(\Rightarrow)$ $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ direkt çarpım modülü $r-N$ -injektif olsun. $\lambda \in \Lambda$, $RadN \leq K$ ve $i: K \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere herhangi

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & M_\lambda & & \end{array}$$

diyagramını alalım. $\prod_{\mu \in \Lambda} M_\mu$ direkt çarpım modülü r - N -injektif olduğundan

$\varepsilon_\lambda : M_\lambda \rightarrow \prod_{\mu \in \Lambda} M_\mu$ kanonik injeksiyon olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow \varepsilon_\lambda \circ f & & \\ & & \prod_{\mu \in \Lambda} M_\mu & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\exists h_1 : N \rightarrow \prod_{\mu \in \Lambda} M_\mu$ R -modül homomorfizması

vardır. Bu durumda $\pi_\lambda : \prod_{\mu \in \Lambda} M_\mu \rightarrow M_\lambda$ kanonik projeksiyon olmak üzere $h = \pi_\lambda \circ h_1$

dersek $h_1 \circ i = \varepsilon_\lambda \circ f$ ve $\pi_\lambda \circ \varepsilon_\lambda = 1_{M_\lambda}$ olduğundan

$h \circ i = \pi_\lambda \circ h_1 \circ i = \pi_\lambda \circ \varepsilon_\lambda \circ f = 1_{M_\lambda} \circ f = f$ olur. Yani

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & M_\lambda & & \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde en az bir $h : N \rightarrow M_\lambda$ R -modül homomorfizması vardır. O halde Teorem 4.1.2.'den M_λ r - N -injektif olup istenen elde edilir.

$(\Leftrightarrow) \forall \lambda \in \Lambda$ için M_λ r - N -injektif olsun. $\text{Rad} N \leq K$ ve $i : K \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere herhangi

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & N \\ & & \downarrow f & & \\ & & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda & & \end{array}$$

diyagramını alalım. $\forall \mu \in \Lambda$ için M_μ r- N -injektif olduğundan $\pi_\mu: \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \rightarrow M_\mu$

kanonik projeksiyon olmak üzere $h_\mu \circ i = \pi_\mu \circ f$ şartını sağlayan $\exists h_\mu: N \rightarrow M_\mu$ R -modül homomorfizması vardır.

$$h: N \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda, x \rightarrow h(x) = (h_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda}$$

dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir.

Burada $\forall x \in K$ için

$$(h \circ i)(x) = h(i(x)) = (h_\lambda(i(x)))_{\lambda \in \Lambda} = ((\pi_\lambda \circ f)(x))_{\lambda \in \Lambda} = (\pi_\lambda(f(x)))_{\lambda \in \Lambda} = f(x)$$

olup $h \circ i = f$ olur. Yani

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K \xrightarrow{i} N \\ & & \downarrow f \\ & & \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\exists h: N \rightarrow \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ R -modül homomorfizması vardır.

O halde Teorem 4.1.2. gereği $\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$ r- N -injektif olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.9. M ve N iki R -modül olmak üzere M r- N -injektif olsun. Bu durumda

M modülünün her direkt toplam terimi de r- N -injektif olur.

İspat: Teorem 4.1.8.'den açıktır.

Teorem 4.1.10. N bir R -modül olmak üzere r- N -injektif modüllerin herhangi

direkt toplamı da r- N -injektiftir.

İspat: Teorem 4.1.8.'e benzer şekilde yapılabilir.

Teorem 4.1.11. M bir r- N -injektif modül, $L \leq N$ ve $RadL = RadN$ olsun. Bu

durumda M modülü r- L -injektiftir.

İspat: $K \leq N$, $RadN = RadL \leq K$ ve $i: K \rightarrow L$ içermeye dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & K \xrightarrow{i} L \\
 & & \downarrow f \\
 & & M
 \end{array}$$

diyagramını alalım. Burada $i_1: L \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere $i_1 \circ i: K \rightarrow N$ içirme dönüşümü olup $RadN = RadL \leq K$ ve M modülü $r-N$ -injektif olduğundan $h_1 \circ i_1 \circ i = f$ olacak şekilde $\exists h_1: N \rightarrow M$ R -modül homomorfizması vardır. Bu durumda $h = h_1 \circ i_1$ dersek $h: L \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması ve $h \circ i = h_1 \circ i_1 \circ i = f$ olur. O halde M -modülü $r-L$ -injektif olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.12. M bir $r-N$ -injektif modül, $g: K \rightarrow N$ bir R -modül monomorfizması ve $Radg(K) = RadN$ olsun. Bu durumda M modülü $r-K$ -injektiftir.

İspat: Teorem 4.1.11. gereği M modülü $r-g(K)$ -injektif olur. $g: K \rightarrow N$ bir R -modül monomorfizması olduğundan $K \cong g(K)$ olup M modülü $r-g(K)$ -injektif olduğundan M modülü $r-K$ -injektif olur.

Teorem 4.1.13. M bir $r-N$ -injektif modül ve T bir R -modül olmak üzere $g: N \rightarrow T$ bir R -modül epimorfizması olsun. Bu durumda M modülü $r-T$ -injektif olur.

İspat: $RadT \leq K \leq T$ ve $i: K \rightarrow T$ içirme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccc}
 0 & \longrightarrow & K \xrightarrow{i} T \\
 & & \downarrow f \\
 & & M
 \end{array}$$

diyagramını alalım. Teorem 3.3.8.'den $g(RadN) \leq RadT \leq K$ olup $RadN \leq g^{-1}(K)$ olur.

Burada $g|_{g^{-1}(K)} : g^{-1}(K) \rightarrow K$ bir R -modül homomorfizması olarak düşünülebilir. M modülü r - N -injektif olduğundan $i_1 : g^{-1}(K) \rightarrow N$ içerme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & g^{-1}(K) \xrightarrow{i_1} N \\ & & \downarrow f \circ (g|_{g^{-1}(K)}) \\ & & M \end{array}$$

diyagramı değişmeli olacak şekilde $\exists h_1 : N \rightarrow M$ R -modül homomorfizması vardır.

Burada $h_1 \circ i_1 = f \circ (g|_{g^{-1}(K)})$ olur. $h : g(N) = T \rightarrow M$,

$t = g(x) \rightarrow h(t) = h_1(x)$ dönüşümünü tanımlayalım. h 'nin kapalı olduğu açıktır.

$g(x_1) = g(x_2)$ olan herhangi $x_1, x_2 \in N$ alalım. $g(x_1) = g(x_2)$ olduğundan $g(x_1 - x_2) = g(x_1) - g(x_2) = 0 \in K$ olup $x_1 - x_2 \in g^{-1}(K)$ olur. Bu durumda

$$h_1(x_1 - x_2) = h_1(i_1(x_1 - x_2)) = f(g|_{g^{-1}(K)}(x_1 - x_2)) = f(g(x_1 - x_2)) = f(0) = 0 \text{ olup}$$

$h_1(x_1) - h_1(x_2) = h_1(x_1 - x_2) = 0$ ve buradan da $h_1(x_1) = h_1(x_2)$ elde edilir. O halde h

iyi tanımlıdır. h 'nin bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Herhangi

$t \in K$ alalım. g örten olduğundan $g(x) = t$ olacak şekilde $\exists x \in N$ vardır. Burada

h 'nin tanımından $(h \circ i)(t) = h(t) = h_1(x)$ olur. Ayrıca $g(x) = t \in K$ olduğundan

$x \in g^{-1}(K)$ olup

$$(h \circ i)(t) = h_1(x) = (h_1 \circ i_1)(x) = (f \circ (g|_{g^{-1}(K)}))(x) = f(g|_{g^{-1}(K)}(x)) = f(g(x)) = f(t) \text{ olur.}$$

Yani $\forall t \in K$ için $(h \circ i)(t) = f(t)$ olup $h \circ i = f$ olur. O halde M modülü r - T -injektif olup istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.14. M bir r - N -injektif R -modül ve $K \leq N$ olsun. Bu durumda M modülü r - N/K -injektiftir.

İspat: $p: N \rightarrow N/K$, $x \rightarrow p(x) = x + K$ kanonik epimorfizmasını alırsak Teorem 4.1.13.'ten istenen elde edilir.

Sonuç 4.1.15. M bir r - N -injektif modül, $K \leq N$ ve $RadK = RadN$ olsun. Bu durumda M modülü hem r - K -injektif, hem de r - M/K -injektiftir.

İspat: Teorem 4.1.11. ve Sonuç 4.1.14.'ten açıktır.

Sonuç 4.1.16. M bir R -modül ve $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N_2 \longrightarrow 0$ bir kısa tam dizi olsun. Eğer M modülü r - N -injektif ise M modülü r - N_2 -injektiftir.

İspat: $g: N \rightarrow N_2$ bir R -modül epimorfizması olduğundan Teorem 4.1.13.'ten M modülü r - N_2 -injektif olur.

Sonuç 4.1.17. M bir R -modül, $0 \longrightarrow N_1 \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N_2 \longrightarrow 0$ bir kısa tam dizi ve $Radf(N_1) = RadN$ olsun. Eğer M modülü r - N -injektif ise M modülü hem r - N_1 -injektif, hem r - N_2 -injektiftir.

İspat: Sonuç 4.1.12. ve Teorem 4.1.13.'ten açıktır.

Teorem 4.1.18. N bir R -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) Her R -modül r - N -injektiftir.
- (ii) N 'nin her alt modülü r - N -injektiftir.
- (iii) N 'nin $RadN$ 'yi kapsayan her alt modülü r - N -injektiftir.
- (iv) N 'nin $RadN$ 'yi kapsayan her alt modülü N 'nin bir direkt toplam terimidir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) N modülünün $RadN$ 'yi kapsayan herhangi K alt modülünü alalım. Hipotezden K modülü r - N -injektif olup $i: K \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{c}
 0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} N \\
 \downarrow 1_K \\
 K
 \end{array}$$

diyagramı için $h \circ i = 1_K$ olacak şekilde $\exists h: N \rightarrow K$ R -modül homomorfizması vardır. $h \circ i = 1_K$ olduğundan Teorem 2.2.42. gereği $N = i(K) \oplus \text{Çekh} = K \oplus \text{Çekh}$ olup K , N 'nin bir direkt toplam terimi olur.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Herhangi M R -modülünü ve $\text{Rad}N \leq K \leq N$ ve $i: K \rightarrow N$ içirme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{c}
 0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} N \\
 \downarrow f \\
 M
 \end{array}$$

diyagramını alalım. Hipotezden K , N 'nin bir direkt toplam terimi olup $N = K \oplus T$ olacak şekilde $\exists T \leq N$ vardır. $\pi: N = K \oplus T \rightarrow K$ kanonik projeksiyonunu alalım. Burada $h = f \circ \pi$ dersek $h: N \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması olur. Ayrıca $\pi \circ i = 1_K$ olduğu gösterilebilir. O halde $h \circ i = f \circ \pi \circ i = f \circ 1_K = f$ olup M modülü r - N -injektif olur.

Sonuç 4.1.19. N bir R -modül olsun. Eğer her R -modül r - N -injektif ise $N / \text{Rad}N$ yarı basit olur.

İspat: Her R -modül r - N -injektif olsun. $N / \text{Rad}N$ 'nin herhangi $K / \text{Rad}N$ alt modülünü alalım. Burada $\text{Rad}N \leq K \leq N$ olup Teorem 4.1.18. gereği K , N 'nin bir direkt toplam terimi olur. Bu durumda $N = K \oplus T$ olacak şekilde $\exists T \leq N$ vardır. $N = K \oplus T$ olduğundan $N / \text{Rad}N = K / \text{Rad}N + (T + \text{Rad}N) / \text{Rad}N$ olur. Ayrıca $K \cap T = 0$ olduğundan

$$(K / \text{Rad}N) \cap [(T + \text{Rad}N) / \text{Rad}N] = [((K \cap T) + \text{Rad}N)] / \text{Rad}N = (0 + \text{Rad}N) / \text{Rad}N = 0$$

olup $N / RadN = (K / RadN) \oplus [(T + RadN) / RadN]$ olur. Yani $N / RadN$ 'nin her alt modülü bir direkt toplam terimi olup Teorem 2.2.62. gereği $N / RadN$ yarı basit olur.

Aşağıdaki teoremin son iki şıkkının denkliği (Wisbauer, 1991) kaynağında vardır. Ayrıca bu denklikte $RadN \ll N$ olmasına gerek yoktur.

Teorem 4.1.20. N bir R -modül ve $RadN \ll N$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) Her R -modül r - N -injektiftir.
- (ii) N modülünün $RadN$ 'yi kapsayan her alt modülü bir direkt toplam terimidir.
- (iii) N yarı basittir.
- (iv) Her R -modül N -injektiftir.

İspat: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Teorem 4.1.18.'den açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) N modülünün $RadN$ 'yi kapsayan her alt modülü bir direkt toplam terimi olsun. Bu durumda $RadN$, N 'nin bir direkt toplam terimi olup ayrıca $RadN \ll N$ olduğundan Teorem 3.2.2.(iv) gereği $RadN = 0$ olur. N 'nin herhangi K alt modülünü alalım. Bu durumda $RadN = 0 \leq K$ olup hipotezden K , N 'nin bir direkt toplam terimi olur. O halde Teorem 2.2.62. gereği N yarı basit olup istenen elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) N yarı basit olsun. Herhangi M R -modülünü alalım. $K \leq N$ ve $i : K \rightarrow N$ içermeye dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K \xrightarrow{i} N \\ & & \downarrow f \\ & & M \end{array}$$

diyagramı verilsin. $K \leq N$ ve N yarı basit olduğundan Teorem 2.2.62. gereği K , N 'nin bir direkt toplam terimi olup $N = K \oplus X$ olacak şekilde bir $X \leq N$ vardır. $\pi : N = K \oplus X \rightarrow K$ kanonik projeksiyonunu alalım. $h = f \circ \pi$ diyelim. Bu durumda

$h: N \rightarrow M$ bir R -modül homomorfizması olur. Burada $\pi \circ i = 1_K$ olduğu gösterilebilir. O halde $h \circ i = f \circ \pi \circ i = f \circ 1_K = f$ olup M modülü N -injektif olur.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Açıktır.

Sonuç 4.1.21. N bir sonlu üretilmiş R -modül olmak üzere aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

(i) Her R -modül r - N -injektiftir.

(ii) N modülünün $RadN$ 'yi kapsayan her alt modülü bir direkt toplam terimidir.

(iii) N yarı basittir.

(iv) Her R -modül N -injektiftir.

İspat: Sonuç 3.3.7. ve Teorem 4.1.20.'den açıktır.

Teorem 4.1.22. M bir R -modül ve $\forall \lambda \in \Lambda$ için N_λ bir R -modül olmak üzere M modülü r - N_λ -injektif olsun. O halde M modülü r - $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ -injektif olur.

İspat: $N = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ olsun. $RadN \leq K \leq N$ olmak üzere herhangi $f: K \rightarrow M$ R -modül homomorfizmasını alalım.

$$\Gamma = \left\{ g: T \rightarrow M \text{ } R\text{-modül homomorfizması} \mid K \leq T \leq N \text{ ve } g|_K = f \right\}$$

kümesini tanımlayalım. $\Gamma \neq \emptyset$ ve Γ kümesinde

$$[g_1: T_1 \rightarrow M] \leq [g_2: T_2 \rightarrow M] \Leftrightarrow T_1 \subset T_2 \text{ ve } g_2|_{T_1} = g_1$$

ile tanımlı $\leq$ bağıntısının bir sıralama bağıntısı olduğu gösterilebilir. Ayrıca Γ kümesinde her zincirin bu bağıntıya göre en az bir üst sınırının varlığı da gösterilebilir.

Bu durumda Zorn Lemması gereği Γ kümesi bir maksimal $g_0: T_0 \rightarrow M$ elemanı içerir. Şimdi $N = T_0$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. Bunun için $\forall \lambda \in \Lambda$ için

$N_\lambda \leq T_0$ olduğunu göstermemiz yeterlidir. Herhangi $\lambda \in \Lambda$ alalım. $K \leq T_0 \leq N$ ve

$RadN \leq K$ olduğundan $RadN_\lambda \leq RadN \leq T_0$ olup $RadN_\lambda \leq T_0 \cap N_\lambda$ olur. M modülü

r - N_λ -injektif olduğundan $i_1: T_0 \cap N_\lambda \rightarrow N_\lambda$ ve $i_2: T_0 \cap N_\lambda \rightarrow T_0$ içermeye dönüşümleri

olmak üzere $g_\lambda \circ i_1 = g_0 \circ i_2$ olacak şekilde $\exists g_\lambda : N_\lambda \rightarrow M$ R -modül homomorfizması vardır.

$$g : T_0 + N_\lambda \rightarrow M, t + n \ (t \in T_0, n \in N_\lambda) \rightarrow g(t + n) = g_0(t) + g_\lambda(n)$$

dönüşümünü tanımlayalım. g 'nin kapalı olduğu açıktır. $t_1 + n_1 = t_2 + n_2$ olan herhangi $t_1, t_2 \in T_0$ ve $n_1, n_2 \in N_\lambda$ alalım. $t_1 + n_1 = t_2 + n_2$ olduğundan $t_1 - t_2 = n_2 - n_1 \in N_\lambda$ olup ayrıca $t_1 - t_2 \in T_0$ olduğundan $t_1 - t_2 = n_2 - n_1 \in T_0 \cap N_\lambda$ olur. Bu durumda $g_\lambda \circ i_1 = g_0 \circ i_2$ olduğundan

$$\begin{aligned} g_0(t_1) - g_0(t_2) &= g_0(t_1 - t_2) = (g_0 \circ i_2)(t_1 - t_2) = (g_\lambda \circ i_1)(t_1 - t_2) = (g_\lambda \circ i_1)(n_2 - n_1) = \\ &= g_\lambda(n_2 - n_1) = g_\lambda(n_2) - g_\lambda(n_1) \end{aligned}$$

olup $g_0(t_1) + g_\lambda(n_1) = g_0(t_2) + g_\lambda(n_2)$ olur. O halde g iyi tanımlıdır. g 'nin bir R -modül homomorfizması ve $[g_0 : T_0 \rightarrow M] \leq [g : T_0 + N_\lambda \rightarrow M]$ olduğu gösterilebilir. Burada $g_0 : T_0 \rightarrow M$ elemanının maksimalliği gereği $T_0 + N_\lambda = T_0$ olup $N_\lambda \leq T_0$ olur.

Teorem 4.1.23. M ve N iki R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (a) M modülü r - N -injektiftir.
- (b) Her $\Lambda \neq \emptyset$ indis kümesi için M modülü r - $N^{(\Lambda)}$ -injektiftir.
- (c) Her N -üretilmiş L modülü için M modülü r - L -injektiftir.

İspat: $(a) \Rightarrow (b)$ Teorem 4.1.22. gereği açıktır.

$(b) \Rightarrow (c)$ L bir N -üretilmiş R -modül olsun. L , N -üretilmiş olduğu için boştan farklı en az bir Λ indis kümesi ve en az bir $f : N^{(\Lambda)} \rightarrow L$ R -modül epimorfizması vardır. Hipotez gereği M modülü r - $N^{(\Lambda)}$ -injektiftir. Bu takdirde Teorem 4.1.13. gereği M modülü r - L -injektif olur.

$(c) \Rightarrow (a)$ Açıktır.

Teorem 4.1.24. M bir R -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) M modülü radikal injektiftir.

(ii) M modülü r - R -injektiftir.

(iii) R halkasının $RadR \leq K$ koşulunu sağlayan her K ideali ve her $f: K \rightarrow M$ R -modül homomorfizması için öyle $m \in M$ vardır ki $\forall k \in K$ için $f(k) = km$ olur.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) M modülü r - R -injektif olsun. Herhangi T R -modülünü alalım. T bir R -modül olduğundan Teorem 2.2.50. gereği R -üretilmiş olup M modülü r - R -injektif olduğundan Teorem 4.1.23.'ten M modülü r - T -injektif olur. Böylece M modülü radikal injektif olup istenen elde edilir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) M modülü r - R -injektif olsun. R halkasının $RadR \leq K$ olan herhangi K sol idealini ve herhangi $f: K \rightarrow M$ R -modül homomorfizmasını alalım. M modülü r - R -injektif ve $RadR \leq K$ olduğundan $i: K \rightarrow R$ içerme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{i} & R \\ & & \downarrow f & & \\ & & M & & \end{array}$$

diyagramı için $h' \circ i = f$ olacak şekilde $\exists h': R \rightarrow M$ R -modül homomorfizması vardır. $m = h'(1_R)$ diyelim. Bu durumda $m \in M$ olur. Ayrıca $\forall k \in K$ için

$$f(k) = (h' \circ i)(k) = h'(i(k)) = h'(k) = h'(k1_R) = kh'(1_R) = km$$

olup istenen elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) K , R halkasının bir sol ideali, $RadR \leq K$ ve $i: K \rightarrow R$ içerme dönüşümü olmak üzere

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & K \xrightarrow{i} R \\ & & \downarrow f \\ & & M \end{array}$$

diyagramını alalım. Hipotez gereği öyle $m \in M$ vardır ki, $\forall k \in K$ için $f(k) = km$ olur. $h: R \rightarrow M, r \rightarrow h(r) = rm$ dönüşümünün bir R -modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Burada $\forall k \in K$ için $(h \circ i)(k) = h(k) = km = f(k)$ olup $h \circ i = f$ olur. O halde M modülü r - R -injektif olup istenen elde edilir.

Teorem 4.1.25. R bir halka olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- (i) Her R -modül r -injektiftir.
- (ii) Her R -modül r - R -injektiftir.
- (iii) R halkasının $Rad R$ 'yi kapsayan her sol ideali R 'nin bir direkt toplam terimidir.
- (iv) R sol R -modülü yarı basittir.
- (v) Her R -modül R -injektiftir.
- (vi) Her R -modül injektiftir.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Her R -modül r - R -injektif olsun. Bu durumda Teorem 4.1.18. gereği R halkasının $Rad R$ 'yi kapsayan her sol ideali R 'nin bir direkt toplam terimi olur.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) R sol R -modülü sonlu üretilmiş olduğundan Sonuç 4.1.21.'den açıktır.

(iv) $\Rightarrow$ (v) Teorem 4.1.20.'den açıktır.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Teorem 3.1.10.'dan açıktır.

(vi) $\Rightarrow$ (i) Açıktır.

Örnek 4.1.26. N yarı basit olmayan bir R -modül ve $RadN = N$ olsun. N yarı basit olmadığından N -injektif olmayan en az bir M R -modülü vardır. Burada N 'nin $RadN$ 'yi kapsayan alt modülü sadece kendisi olduğundan N 'nin bir direkt toplam terimi olup Teorem 4.1.18. gereği her R -modül dolayısıyla da M modülü r - N -injektif olur.

Örnek 4.1.27. N yarı basit olmayan bir R -modül, $RadN = N$, T bir yarı basit R -modül ve $T \neq 0$ olsun. $S = N \oplus T$ diyelim. Bu durumda Teorem 3.3.10. gereği $RadS = Rad(N \oplus T) = RadN \oplus 0 = RadN \neq S$ olur. N yarı basit olmadığından S de yarı basit değildir. O halde S -injektif olmayan en az bir M R -modülü vardır. Burada S 'nin $RadS$ 'yi kapsayan her alt modülünün S 'nin bir direkt toplam terimi olduğu gösterilebilir. O halde Teorem 4.1.18. gereği her R -modül dolayısıyla da M modülü r - S -injektif olur.

Örnek 4.1.28. ${}_Z\mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$ -modülünü göz önüne alalım. $Rad_{{}_Z\mathbb{Q}} = {}_Z\mathbb{Q}$ olduğundan (bk. (Wisbauer, 1991) 21.7(5)) ve ${}_Z\mathbb{Q}$ yarı basit olmadığından Örnek 4.1.26. gereği r - ${}_Z\mathbb{Q}$ -injektif olan ve ${}_Z\mathbb{Q}$ -injektif olmayan en az bir M $\mathbb{Z}$ -modülü vardır. Burada ${}_Z\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -modülü r - ${}_Z\mathbb{Q}$ -injektiftir, ancak bu modül ${}_Z\mathbb{Q}$ -injektif değildir.

Örnek 4.1.29. ${}_Z\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$ -modüllerini göz önüne alalım. $S = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_6$ diyelim. Burada $Rad_{{}_Z\mathbb{Q}} = {}_Z\mathbb{Q}$ olduğunu ve ${}_Z\mathbb{Q}$ modülünün yarı basit olmadığını biliyoruz. Ayrıca $\mathbb{Z}_6$ $\mathbb{Z}$ -modülü yarı basit ve $RadS = {}_Z\mathbb{Q} \neq S$ olur. Örnek 4.1.27. gereği r - S -injektif olan ve S -injektif olmayan en az bir M $\mathbb{Z}$ -modülü vardır. Burada ${}_Z\mathbb{Z}$ $\mathbb{Z}$ -modülü r - S -injektiftir, ancak bu modül S -injektif değildir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında injektif modül kavramından hareket ederek radikal injektif (kısaca r -injektif) modül kavramı tanımlandı ve bu kavramla ilgili birtakım özellikler incelendi. N bir R -modül olmak üzere her R -modülün r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul N modülünün radikalini kapsayan her alt modülünün N 'nin bir direkt toplam terimi olduğu gösterildi. Ayrıca N modülünün radikalinin N 'de küçük olması durumunda her R -modülün r - N -injektif olması için gerek ve yeter koşul her R -modülün N -injektif olduğu gösterildi. Tez çalışmasının sonunda dört tane ayırt edici örnekler verilmiştir.

Üzerindeki r -injektif modülleri injektif olan halkalar üzerinde çalışılabilir. Kendi kendine r -injektif olan modüllerin yapısı incelenebilir.

KAYNAKLAR

- Alizade, R., Pancar, A. (1999). *Homoloji cebire giriş*, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Samsun.
- Anderson, F.W., Fuller, K. R. (1992). *Rings and categories of modules*, 2nd. ed., New York, Springer-Verlag.
- Azumaya, G., Mbuntum, F. and Varadarajan, K. (1975). On M-projective and M-injective modules, *Pacific Journal of Mathematics*, 59, 9-16.
- Birkenmeier, G.F. (1976a). On the cancellation of quasi-injective modules, *Comm. Algebra* 4, 101-109.
- Birkenmeier, G.F. (1976b). Self-injective rings and the minimal direct summand containing the nilpotents, *Comm. Algebra*, 4, 705-721.
- Birkenmeier, G. F. (1978). Modules which are subisomorphic to injective modules, *J. Pure Appl. Algebra*, 13, 169-177.
- Clark, J., Lomp, C., Vanaja, N., Wisbauer, R. (2006). *Lifting modules*, 1st. ed., Birkhauser Verlag Basel, Boston-Berlin.
- Hill, D. A. (1982). Rings whose indecomposable injective modules are uniserial, *Canad. J. Math.* 34, 797-805.
- Hungerford, T. W. (1974). *Algebra*, 1st. ed., Springer-Verlag, New York.
- Goodearl, K. R. (1976). Direct sum properties of quasi-injective modules, *Amer. Math. Soc. Bull.*, 82, 108-110.
- Kasch, F. (1982). *Modules and rings*, 1st. ed., London Mathematical Society by Academic Press.
- Koşar, B. (2008). *Mükemmel modüller ve halkalar*. Yüksek Lisans Tezi. Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, 66, Samsun.
- Pancar, A., Nişancı Türkmen, B. (2014). *İnjektif modüllere giriş*, Pegem Akademi.
- Sharpe, D. W., Vamos, P. (1972). *Injective modules*, 1st. ed., Lectures in Pure Mathematics University of Sheffield, The Great Britain.
- Wisbauer, R. (1991). *Foundations of module and ring theory*, 606, Gordon and Breach, Philadelphia.

ÖZ GEÇMİŞ

Derya DUMAN YAZICI 2011 yılında Ünye Mustafa Rakım Anadolu (Ünye Lisesi) Lisesi'nden mezun olduktan sonra 2011 yılında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi'ne başladı ve buradan da 2015 yılında mezun oldu. 2014-2015 yılları arasında Zonguldak Karaelmas Üniversitesi'nde Pedagojik Formasyon eğitimi aldı. 2020 yılında Ondokuz Mayıs Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Eğitimine başladı. Orta derecede İngilizce ve iyi derecede Türkçe bilmektedir.

İletişim Bilgileri

ORCID ID: 0000-0001-5315-2882

Yayınlar:

1. Duman Yazıcı, D., Nebiyev, C. (2023, February). “r-Injective Modules”, *3rd International Antalya Scientific Research And Innovative Studies Congress*, Antalya-Türkiye.