

**T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**



**r -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN
İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

ADİYAMAN, 2021

**T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**r -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN INTEGRAL
EŞİTSİZLİKLER**

ECEM KANIŞİRİN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİYAMAN, 2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

r -KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Ecem KANIŞİRİN

Adıyaman Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ
Yıl : 2021, Sayfa sayısı: VI+48

Jüri : Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR
Doç. Dr. Bilal Eftal ACET

r -konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler üzerine hazırlanan bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümü olarak düzenlenmiştir ve bu bölümde konvekslik ve eşitsizlik tarihi üzerine bilgiler sunulmuştur.

İkinci bölüm sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılmasını sağlayacak bazı temel bilgileri ve r -konveks fonksiyonlar için önceden elde edilmiş bazı eşitsizlikleri içermektedir.

Üçüncü bölüm r -konveks fonksiyonlar sınıfı için integral eşitsizlikler elde edilirken kullanılacak olan iki temel lemmayı içermektedir.

Dördüncü bölüm birinci ve ikinci mertebeden diferensiyellenebilir r -konveks fonksiyonlar sınıfı için elde edilen integral eşitsizliklerden oluşmaktadır.

Son bölüm olan beşinci bölüm ise sonuç ve öneriler bölümüdür.

Anahtar Kelimeler: Konveks Fonksiyon; r -Konveks Fonksiyon; Hölder Eşitsizliği; Hermite-Hadamard Eşitsizliği; Ostrowski Eşitsizliği.

ABSTRACT

MSc Thesis

INTEGRAL INEQUALITIES FOR r -CONVEX FUNCTIONS

Ecem KANIŞİRİN

Adıyaman University
Graduate Education Institute
Department of Mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Merve AVCI ARDIÇ
Year : 2021, Number of pages: VI+48
Jury : Prof. Ahmet Ocak AKDEMİR
Assoc. Prof. Dr. Bilal Eftal ACET

This thesis study, which is prepared on inequalities for r -convex functions, consists of five chapters. The first chapter is organized as an introduction and in this chapter, information on the history of the convexity and inequality is presented.

The second section contains some basic information and some previously obtained inequalities for r -convex functions that will provide a better understanding of the next chapters.

The third chapter contains two basic lemmas to be used when deriving integral inequalities for the class of r -convex functions.

The fourth chapter consists of the integral inequalities obtained for the first and second order differentiable r -convex functions.

The last section, the fifth section, is the conclusion and recommendations section.

Key Words: Convex Function; r -Convex Function; Hölder Inequality; Hermite-Hadamard Inequality; Ostrowski Inequality.

BEYAN

“ r -Konveks Fonksiyonlar için İntegral Eşitsizlikler” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.



Ecem KANIŞİRİN

TEŞEKKÜR

Tez çalışma ve hazırlama sürecinde yol göstericiliğimi üstlenen akademik bilgi, birikim ve tecrübeleri ile bana destek olan, manevi desteği ile yardımlarını bir an olsun esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Sayın Doç. Dr. Merve AVCI ARDIÇ'a teşekkürlerimi bir borç bilirim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca akademik gelişimimde emeği olan Adıyaman Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ndeki bütün hocalarıma ve beni her koşulda destekleyen sevgili aileme sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	I
ABSTRACT	II
BEYAN	III
TEŞEKKÜR	IV
İÇİNDEKİLER	V
SİMGELER VE KISALTMALAR	VI
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR	3
3. MATERYAL ve YÖNTEM	16
4. BULGULAR ve TARTIŞMA	18
4.1. Birinci mertebeden türevlerinin kuvvetleri r -konveks olan fonksiyonlar için integral eşitsizlikler	18
4.2. İkinci mertebeden türevlerinin kuvvetleri r -konveks olan fonksiyonlar için integral eşitsizlikler	29
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	44
KAYNAKLAR	45
KİŞİSEL BİLGİLER	48

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

(a, b)	: a, b açık aralığı
$[a, b]$	: a, b kapalı aralığı
$L[a, b]$	: $[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\ln$	: e tabanında logaritma fonksiyonu
f'	: f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
f''	: f fonksiyonunun ikinci mertebeden türevi
$ f $	: f fonksiyonunun mutlak değeri
$\mathcal{L}_r$	: Genelleştirilmiş logaritmik ortalama
I°	: I aralığının içi
$\mathcal{L}$	: Logaritmik ortalama
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
I	: Reel sayılar kümesinde bir aralık
M_r	: r . Kuvvetlere göre kuvvet ortalaması
Σ	: Toplam sembolü
$\int_x^y$	: x, y aralığında integral alma işlemi

Kısaltmalar

M.Ö.	: Milattan önce
------	-----------------

1. GİRİŞ

Modern matematiğin pek çok dalında önem kazanmış konvekslik kavramının temelini M. Ö. 250 yılına dayanmasına rağmen matematikte yer edinmesi 19. yüzyıl sonu 20. yüzyıl başlangıcını bulmuştur. Hermite'in Mathesis dergisinde 1883 yılında yayınlanan çalışmasıyla konveks fonksiyonlar için en meşhur ve en temel eşitsizlik olarak bilinen, kapalı ve sınırlı bir aralıkta konveks fonksiyonun ortalama değeri için alt ve üst yaklaşımlar sunan literatürde Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak adlandırılan eşitsizlik ortaya konmuştur [1]. İlerleyen yıllarda Hadamard konvekslik kavramı üzerine çalışmalar yapmış olsa da sistematik düzeyde konveks fonksiyonların ele alınmasının bu konuda dikkate değer çalışmalar yapan Jensen ile 1905-1906 yıllarında başladığı söylenebilir.

Temelleri ünlü matematikçiler Gauss, Cauchy ve Chebyshev tarafından atılan eşitsizlik teorisi konveks fonksiyonlar teorisinde önemli bir yer edinmiştir. Burada konveks fonksiyonların bir eşitsizlik yardımıyla tanımlanmasının rolü dikkat çekmektedir. Hardy, Littlewood ve Pólya'nın "Inequalities" isimli eserinin eşitsizlik teorisinin matematiğin bir dalı olarak görülmesindeki etkisi büyüktür [2]. Yalnızca konveks fonksiyonlara özgü eşitsizliklerin ele alındığı temel sayılabilecek nitelikteki "Convex Functions: Inequalities" isimli kitap Pečarić tarafından kaleme alınmıştır [3]. Bu iki temel eserin dışında eşitsizlik teorisi ve konveks fonksiyonlar teorisi alanında yazılmış olan bazı önemli eserler aşağıda sıralanmıştır:

- Beckenbach ve Bellman tarafından yazılan "Inequalities" [4]
- Mitrinović tarafından yazılan "Analytic Inequalities" [5]
- Roberts ve Varberg tarafından yazılan "Convex Functions" [6]
- Mitrinović, Pečarić ve Fink tarafından yazılan "Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives" [7]
- Mitrinović, Pečarić ve Fink tarafından yazılan "Classical and New Inequalities in Analysis" [8]
- Pachpatte tarafından yazılan "Mathematical Inequalities" [9]
- Niculescu ve Persson tarafından yazılan "Convex Functions and Their Applications" [10]

- Dragomir ve Pearce tarafından yazılan “Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications” [11]
- Dragomir ve Rassias tarafından yazılan “Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical Integration” [12].

Richard Bellman, Almanya Oberwolfach’da 30 Temmuz-5 Ağustos 1978 tarihleri arasında düzenlenen 2. Uluslararası Matematiksel Eşitsizlikler Konferansı’nda matematiksel eşitsizliklerin çalışılma sebeplerini pratik nedenler, teorik nedenler ve estetik nedenler olarak üç temel başlık altında belirtmiştir.

Pratik yönden düşünüldüğünde çoğu araştırmalarda klasik eşitsizliklerin niceliklerin birbirleriyle sınırlandırılmalarında oldukça faydalı olduğu söylenebilir. Teorik yönden düşünüldüğünde Pozitif Operatörler Teorisi ve Diferensiyel Eşitsizlikler Teorisi örneklerinde olduğu gibi eşitsizlikler aracılığıyla sorulan basit sorularla temel teorilerin oluşturulabilmesinin mümkün olduğu söylenebilir. Estetik yönden düşünüldüğünde ise güzellik kavramının göreceli olmasının yanında sanatın dallarından resimin ve müziğin yanında matematiğin parçalarının güzel ve uyumlu olduğu kabul görmektedir. Bu nedenledir ki eşitsizliklerin göze uyumu onları dikkat çekici hale getirmektedir [13].

“ r -Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler” başlıklı tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde konvekslik ve eşitsizlik tarihi üzerine önemli bazı bilgiler sunulmuştur. İkinci bölümde r -konveks fonksiyon sınıfının temel özellikleri, bu sınıf için elde edilmiş olan ve bu tez çalışmasına kaynak teşkil eden bazı önemli eşitsizliklerin yanında integraller için üçgen eşitsizliği, Hölder eşitsizliği ve r -konveks fonksiyonlar için önem arz eden bazı eşitsizlikler gibi yardımcı eşitsizliklerden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde sonuçlar elde edilirken kullanılan iki lemma tanıtılmıştır. Dördüncü bölümde r -konveks fonksiyon sınıfı için elde edilmiş olan yeni sonuçlara yer verilmiştir. Beşinci bölümde ise tez çalışması hakkında kısa bir değerlendirme yapılmıştır.

Bu tez çalışmasıyla birinci mertebeden ve ikinci mertebeden türevlenebilir r -konveks fonksiyonlar yardımıyla Ostrowski ve Hermite-Hadamard tipli yeni ve genel eşitsizlikler elde edilerek eşitsizlikler teorisinde r -konveks fonksiyonların rolünü geliştirmek amaçlanmıştır.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Bu bölüm çalışmaya temel oluşturan bazı tanımlar, teoremler ve eşitsizliklerden oluşmaktadır.

Tanım 2.1: Boştan farklı bir L kümesi ve bir F cismi yardımıyla $+: L \times L \rightarrow L$ ve $\cdot: F \times L \rightarrow L$ işlemleri verilsin. Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda L , F cismi üzerinde lineer uzay (vektör uzayı) olarak adlandırılır:

A) L , $+$ işlemine göre değişmeli bir gruptur. Yani,

A1. Her $e_1, e_2 \in L$ için $e_1 + e_2 \in L$ dir.

A2. Her $e_1, e_2, e_3 \in L$ için $e_1 + (e_2 + e_3) = (e_1 + e_2) + e_3$ tür.

A3. Her $e_1 \in L$ için $e_1 + \theta = \theta + e_1 = e_1$ olacak şekilde $\theta \in L$ vardır.

A4. Her $e_1 \in L$ için $e_1 + (-e_1) = (-e_1) + e_1 = \theta$ olacak şekilde $-e_1 \in L$ vardır.

A5. Her $e_1, e_2 \in L$ için $e_1 + e_2 = e_2 + e_1$ dir.

B) $e_1, e_2 \in L$ ve $\alpha, \beta \in F$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

B1. $\alpha \cdot e_1 \in L$ dir.

B2. $\alpha \cdot (e_1 + e_2) = \alpha \cdot e_1 + \alpha \cdot e_2$ dir.

B3. $(\alpha + \beta) \cdot e_1 = \alpha \cdot e_1 + \beta \cdot e_1$ dir.

B4. $(\alpha\beta) \cdot e_1 = \alpha \cdot (\beta \cdot e_1)$ dir.

B5. $1 \cdot e_1 = e_1$ dir (Burada 1, F nin birim elemanıdır).

$F = \mathbb{R}$ ise L 'ye reel lineer uzay, $F = \mathbb{C}$ ise L 'ye karmaşık lineer uzay adı verilir [14].

Tanım 2.2: L bir lineer uzay ve $A \subseteq L$ olsun. Keyfi $e_1, e_2 \in A$ elemanları için

$$B = \{e_3 \in L: e_3 = te_1 + (1 - t)e_2, \quad 0 \leq t \leq 1\} \subseteq A$$

sağlanıyorsa A kümesi konveks küme olarak adlandırılır [15].

Tanım 2.3: I , $\mathbb{R}$ 'de bir aralık olmak üzere $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $e_1, e_2 \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(te_1 + (1 - t)e_2) \leq tf(e_1) + (1 - t)f(e_2) \quad (2.1)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir. (2.1) eşitsizliği her $e_1 \neq e_2$ ve $t \in (0,1)$ için kesin ise f fonksiyonuna kesin konvekstir denir [16].

Tanım 2.4: f fonksiyonu, her $e_1, e_2 \in [a, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(te_1 + (1-t)e_2) \leq [f(e_1)]^t [f(e_2)]^{1-t} \quad (2.2)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde $\log$ -konveks fonksiyon denir. (2.2)'deki eşitsizlik f fonksiyonu için ters yönde sağlanırsa f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde $\log$ -konkav fonksiyon olarak isimlendirilir [16].

Tanım 2.5: e_1, e_2 pozitif sayılarının r . kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(e_1, e_2; t) = \begin{cases} (te_1^r + (1-t)e_2^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \text{ ise} \\ e_1^t e_2^{1-t}, & r = 0 \text{ ise} \end{cases} \quad (2.3)$$

olarak tanımlanır [11].

Gill, Pearce ve Pečarić, 1997 yılında yaptıkları çalışmada (2.3)'teki tanım yardımıyla konveks fonksiyon sınıfının bir genelleştirmesi olan r -konveks fonksiyon sınıfını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

Tanım 2.6: Pozitif bir f fonksiyonu, her $e_1, e_2 \in [a, b]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$f(te_1 + (1-t)e_2) \leq M_r(f(e_1), f(e_2); t) \quad (2.4)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde r -konveks fonksiyon denir [17].

(2.4)'teki eşitsizlik f fonksiyonu için ters yönde sağlanırsa f fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde r -konkav fonksiyon olarak isimlendirilir [17].

Tanım 2.3, Tanım 2.4 ve Tanım 2.6 yardımıyla 0-konveks fonksiyonların $\log$ -konveks fonksiyonlar, 1-konveks fonksiyonların ise konveks fonksiyonlar olduğu açıktır.

Konvekslik kavramı r -konveksliği gerektirirken tersinin böyle olmadığı $x > 0$ için $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonu yardımıyla görülür [18]. Bu fonksiyon 4-konveks fonksiyondur ancak konveks değildir [19].

Tanım 2.7: Pozitif e_1, e_2 sayılarının r . kuvvetlerine göre genelleştirilmiş logaritmik ortalaması

$$\mathcal{L}_r(e_1, e_2) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \frac{e_1^{r+1} - e_2^{r+1}}{e_1^r - e_2^r}, & r \neq 0, -1, e_1 \neq e_2, \\ \frac{e_1 - e_2}{\ln e_1 - \ln e_2}, & r = 0, e_1 \neq e_2, \\ e_1 e_2 \frac{\ln e_1 - \ln e_2}{e_1 - e_2}, & r = -1, e_1 \neq e_2, \\ e_1, & e_1 = e_2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [11].

Gill ve arkadaşları [17]'deki çalışmalarında pozitif r -konveks fonksiyonlar için genelleştirilmiş logaritmik ortalama yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği elde etmiştir.

Teorem 2.8: f fonksiyonu $[e_1, e_2]$ üzerinde pozitif r -konveks olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \leq \mathcal{L}_r(f(e_1), f(e_2)) \quad (2.5)$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer f fonksiyonu $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konkav seçilirse eşitsizlik ters yönde sağlanır.

(2.5) eşitsizliğinde $r = 0$ seçilmesi halinde $[e_1, e_2]$ üzerinde pozitif $\log$ -konveks fonksiyonlar için

$$\frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \leq \mathcal{L}(f(e_1), f(e_2))$$

eşitsizliği elde edilir [17].

Tanım 2.9: $\mathbb{R}$ 'nin boş olmayan bir I alt kümesi ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. I kümesinin ayrık açık alt aralıklarının $\{(e_i, m_i)\}_{i=1}^n$ birleşimi göz önüne alınsın. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\sum_{i=1}^n |m_i - e_i| < \delta$ olduğunda $\sum_{i=1}^n |f(m_i) - f(e_i)| < \varepsilon$ eşitsizliğinin sağlanacağı bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise f fonksiyonu I üzerinde mutlak süreklidir denir [20].

Konveks bir fonksiyonun ortalama değeri için alt ve üst yaklaşımlar sunan Hermite-Hadamard eşitsizliği, konveks fonksiyonlar teorisi için önemli bir yere sahip olmasının yanında eşitsizlikler teorisi için de oldukça kullanışlı ve estetik eşitsizliklerin başında gelmektedir.

Teorem 2.10: $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık, $e_1, e_2 \in I$ ve $e_1 < e_2$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$f\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \leq \frac{f(e_1) + f(e_2)}{2}$$

eşitsizliği sağlanır [1].

Ostrowski, 1938 yılında yaptığı çalışmasıyla [21], türevi sınırlı fonksiyonlar için literatüre kendi adıyla tanınan Ostrowski eşitsizliğini kazandırmıştır. Eşitsizlik teorisinde Hermite-Hadamard eşitsizliği gibi önemli bir yere sahip olan bu eşitsizlik, fonksiyonun ortalama değeri ile fonksiyonun değerleri arasındaki fark için üst sınırlar vermesi açısından önemlidir.

Teorem 2.11: $e_1, e_2 \in I$ ve $e_1 < e_2$ ve $f' \in L[e_1, e_2]$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde diferensiyellenebilen bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'(x)| \leq M$ ise $\forall x \in [e_1, e_2]$ için

$$\left| f(x) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \leq M(e_2 - e_1) \left[\frac{1}{4} + \frac{\left(x - \frac{e_1 + e_2}{2}\right)^2}{(e_2 - e_1)^2} \right]$$

eşitsizliği elde edilir. $\frac{1}{4}$ katsayısı en iyi katsayıdır [21].

Ostrowski eşitsizliğinde $x = \frac{e_1 + e_2}{2}$ yazılırsa Hermite-Hadamard eşitsizliğinin sol tarafına ilişkin üst sınır veren eşitsizlik elde edilir.

İki temel eşitsizlik olan Hermite-Hadamard ve Ostrowski eşitsizliklerinin yanında tez çalışmasında kullanılacak bazı yardımcı eşitsizlikler aşağıda sıralanmıştır.

Teorem 2.12 (İntegraller için Hölder Eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[e_1, e_2]$ üzerinde tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[e_1, e_2]$ üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_{e_1}^{e_2} |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_{e_1}^{e_2} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1}^{e_2} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \quad (2.6)$$

eşitsizliği geçerlidir [8].

Teorem 2.13: Herhangi $e_1, e_2 \in \mathbb{R}$ için

$$|e_1 + e_2| \leq |e_1| + |e_2|,$$

$$||e_1| - |e_2|| \leq |e_1 - e_2|,$$

$$||e_1| - |e_2|| \leq |e_1 + e_2|$$

eşitsizlikleri geçerlidir [5].

Teorem 2.14: $[e_1, e_2]$ üzerinde sürekli reel değerli bir f fonksiyonu için

$$\left| \int_{e_1}^{e_2} f(x)dx \right| \leq \int_{e_1}^{e_2} |f(x)|dx \quad (2.7)$$

eşitsizliği geçerlidir. (2.7)'deki eşitsizlik üçgen eşitsizliğinin integral formu olarak bilinir [8].

Teorem 2.15: $0 < k \leq 1, e_1, e_2, \dots, e_n \geq 0$ ve $m_1, m_2, \dots, m_n \geq 0$ için

$$\sum_{i=1}^n (e_i + m_i)^k \leq \sum_{i=1}^n e_i^k + \sum_{i=1}^n m_i^k \quad (2.8)$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Gill ve arkadaşlarının 1997 yılında r -konveks fonksiyon sınıfını tanımlamasından sonra çoğu araştırmacı bu yeni konveks fonksiyon sınıfı için yeni sonuçlar üretmeye odaklanmıştır. Gill ve arkadaşlarının çalışmalarına benzer olarak Pearce ve arkadaşlarının 1998 yılında yaptıkları çalışma [18] ile Yang ve Hwang'ın 2001 yılında yaptıkları çalışma [23] r -konveks fonksiyonlar için ortalamalar yardımıyla elde edilmiş sonuçlar içermektedir.

Bu çalışmalardan oldukça farklı olarak Alomari, 2011'de tamamladığı doktora tez çalışmasının bir bölümünde ilk defa Ostrowski tipinde bir lemma kullanarak r -konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipinde eşitsizlikler elde etmiştir [22]. Ayrıca Alomari bu çalışmasında r -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard ve Simpson tipinde eşitsizlikler de elde etmiştir. Aşağıda Alomari'nin [22]'deki çalışmasında r -konveks fonksiyonlar için elde ettiği bazı eşitsizlikler sıralanmıştır.

Teorem 2.16: $e_1, e_2 \in I$ ve $e_1 < e_2$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° üzerinde pozitif, diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[e_1, e_2]$ olsun. Eğer $|f'|^{p/(p-1)}$, $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ise her $e_3 \in [e_1, e_2]$, $p > 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| f(e_3) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{(e_2 - e_1)(p+1)^{1/p}} \left[(e_3 - e_1)^2 \mathcal{L}_r^{1/q}(|f'(e_3)|^q, |f'(e_1)|^q) \right. \\ & \quad \left. + (e_2 - e_3)^2 \mathcal{L}_r^{1/q}(|f'(e_3)|^q, |f'(e_2)|^q) \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\mathcal{L}_r(\cdot, \cdot)$ genelleştirilmiş logaritmik ortalamadır [22].

Sonuç 2.17: Teorem 2.16'da $e_3 = \frac{e_1 + e_2}{2}$ seçilirse

$$\left| f\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(e_2 - e_1)}{4(1+p)^{1/p}} \left[\mathcal{L}_r^{1/q} \left(|f'(e_1)|^q, \left| f' \left(\frac{e_1 + e_2}{2} \right) \right|^q \right) \right. \\
&\quad \left. + \mathcal{L}_r^{1/q} \left(\left| f' \left(\frac{e_1 + e_2}{2} \right) \right|^q, |f'(e_2)|^q \right) \right] \quad (2.10)
\end{aligned}$$

elde edilir [22].

Teorem 2.18: $e_1, e_2 \in I$ ve $e_1 < e_2$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° üzerinde pozitif, diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $f' \in L[e_1, e_2]$ olsun. Eğer $|f'|$, $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ($r \geq 1$) ise her $e_3 \in [e_1, e_2]$ için

$$\begin{aligned}
&\left| f(e_3) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
&\leq \frac{(e_3 - e_1)^2}{e_2 - e_1} \left[|f'(e_3)| \frac{r}{1 + 2r} + |f'(e_1)| \frac{r^2}{(1 + r)(1 + 2r)} \right] \\
&\quad + \frac{(e_2 - e_3)^2}{e_2 - e_1} \left[|f'(e_3)| \frac{r}{1 + 2r} + |f'(e_2)| \frac{r^2}{(1 + r)(1 + 2r)} \right] \quad (2.11)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [22].

Sonuç 2.19: Teorem 2.18'de $e_3 = \frac{e_1 + e_2}{2}$ seçilirse $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left| f \left(\frac{e_1 + e_2}{2} \right) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
&\leq \frac{e_2 - e_1}{4(1 + r)(1 + 2r)} \\
&\quad \times \left[r^2 |f'(e_1)| + 2r(1 + r) \left| f' \left(\frac{e_1 + e_2}{2} \right) \right| + r^2 |f'(e_2)| \right] \quad (2.12)
\end{aligned}$$

ve $r = 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{e_2 - e_1}{24} \left[|f'(e_1)| + 4 \left| f'\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) \right| + |f'(e_2)| \right]
\end{aligned} \tag{2.13}$$

eşitsizlikleri elde edilir [22].

Karagözlü 2019 yılında tamamladığı yüksek lisans tezinin bir bölümünde [24], Alomari'nin çalışmasına [22] benzer olarak r -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard, Ostrowski ve Simpson tipli yeni eşitsizlikler elde etmiştir. Karagözlü'nün bu çalışmasında yer alan bazı önemli sonuçlar sıralanmıştır.

Teorem 2.20: $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $e_1, e_2 \in I$, $e_1 < e_2$ ve $f'' \in L[e_1, e_2]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ise $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve her $e_3 \in [e_1, e_2]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) + \left(e_3 - \frac{e_1 + e_2}{2} \right) f'(e_3) \right| \\
& \leq \frac{(e_3 - e_1)^3}{2(e_2 - e_1)} \left(\frac{1}{2p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} [\mathcal{L}_r(|f''(e_3)|^q, |f''(e_1)|^q)]^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(e_2 - e_3)^3}{2(e_2 - e_1)} \left(\frac{1}{2p + 1} \right)^{\frac{1}{p}} [\mathcal{L}_r(|f''(e_3)|^q, |f''(e_2)|^q)]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

eşitsizliği sağlanır [24].

Teorem 2.21: $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $e_1, e_2 \in I$, $e_1 < e_2$ ve $f'' \in L[e_1, e_2]$ olsun. Eğer $|f''|$, $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ise $r > 1$ ve her $e_3 \in [e_1, e_2]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) + \left(e_3 - \frac{e_1 + e_2}{2} \right) f'(e_3) \right| \\
& \leq \frac{r}{3r + 1} \left(\frac{(e_3 - e_1)^3 + (e_2 - e_3)^3}{2(e_2 - e_1)} \right) |f''(e_3)|
\end{aligned}$$

$$+ \frac{r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} \left(\frac{(e_3 - e_1)^3 |f''(e_1)| + (e_2 - e_3)^3 |f''(e_2)|}{e_2 - e_1} \right) \quad (2.15)$$

eşitsizliği sağlanır [24].

Teorem 2.22: $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu I° üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon, $e_1, e_2 \in I$, $e_1 < e_2$ ve $f'' \in L[e_1, e_2]$ olsun. Eğer $|f''|^q$, $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ise $r > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve her $e_3 \in [e_1, e_2]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) + \left(e_3 - \frac{e_1 + e_2}{2} \right) f'(e_3) \right| \\ & \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)(2p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left(\frac{r}{1 + r} \right)^{\frac{1}{q}} \left[(e_3 - e_1)^3 [|f''(e_1)|^q + |f''(e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + (e_2 - e_3)^3 [|f''(e_3)|^q + |f''(e_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

eşitsizliği sağlanır [24].

Ngoc ve arkadaşları [25] ile Zabandan ve arkadaşları [26] yaptıkları çalışmalarında r -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmelerinin yanında iki r -konveks fonksiyonun çarpımının ortalama değeri için de üst yaklaşımlarda bulunmuştur. Han ve Liu [27] yaptıkları çalışmada Ngoc ve arkadaşları [25] ile Zabandan ve arkadaşlarının [26] yaptıkları çalışmalara benzer olarak r -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tipli eşitsizlikler elde etmişlerdir. Ayrıca Han ve Liu çalışmalarında [27] Hölder eşitsizliği ve Stolarsky ortalaması yardımıyla Ngoc ve arkadaşlarının [25] r -konveks fonksiyonların ortalama değerine ilişkin bulundukları yaklaşımları daha da iyileştirmiştir.

Brahim ve arkadaşları [28] ile You ve arkadaşları [29] yaptıkları çalışmalarda q -kalkülüs yardımıyla r -konveks fonksiyonlar için dikkat çeken eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Wang ve arkadaşları [19], Lin ve arkadaşları [30] ile Merad ve arkadaşları [31] çalışmalarında r -konveks fonksiyonlar için Riemann-Liouville kesirli integralleri yardımıyla Hermite-Hadamard tipli integral eşitsizlikler elde etmiştir.

Bu çalışmaların yanında r -konveks fonksiyonlar ile ilgili önemli bazı diğer sonuçlar ve genelleştirmeler [32-38] çalışmalarında bulunabilir.

Alomari ve arkadaşları çalışmalarında [39], Dragomir'in çalışmasında [40] yer alan lemmayı kullanarak konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipine benzer aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.23: $e_1 < e_2$ ve $e_1, e_2 \in I$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde mutlak sürekli ve $f' \in L[e_1, e_2]$ olsun. $|f'|$, $[e_1, e_2]$ üzerinde konveks ise her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(e_3 - e_1)^2}{6(e_2 - e_1)} (|f'(e_1)| + |f'(e_2)|) \\ & + \frac{8(e_3 - e_1)^2 + 3(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{24(e_2 - e_1)} (|f'(e_3)| + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|) \end{aligned} \quad (2.17)$$

eşitsizliği sağlanır [39].

Sonuç 2.24: Teorem 2.23'ün şartları altında, f fonksiyonu için $f(e_1 + e_2 - e_3) = f(e_3)$ şartı sağlanıyorsa her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} & \left| f(e_3) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{(e_3 - e_1)^2}{6(e_2 - e_1)} (|f'(e_1)| + |f'(e_2)|) \\ & + \frac{8(e_3 - e_1)^2 + 3(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{24(e_2 - e_1)} (|f'(e_3)| + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|) \end{aligned} \quad (2.18)$$

eşitsizliği elde edilir [39].

Teorem 2.25: $e_1 < e_2$ ve $e_1, e_2 \in I$ olmak üzere $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu I° üzerinde mutlak sürekli ve $f' \in L[e_1, e_2]$ olsun. $|f'|^q, [e_1, e_2]$ üzerinde konveks ise her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2}\right], q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2^{1/q}(e_2 - e_1)(p+1)^{1/p}} \left\{ (e_3 - e_1)^2 [|f'(e_1)|^q + |f'(e_3)|^q]^{1/q} \right. \\ & \quad + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{2} [|f'(e_3)|^q + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q]^{1/q} \\ & \quad \left. + (e_3 - e_1)^2 [|f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f'(e_2)|^q]^{1/q} \right\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

eşitsizliği sağlanır [39].

Sonuç 2.26: Teorem 2.25'in şartları altında, f fonksiyonu için $f(e_1 + e_2 - e_3) = f(e_3)$ şartı sağlanıyorsa her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} & \left| f(e_3) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{2^{1/q}(e_2 - e_1)(p+1)^{1/p}} \left\{ (e_3 - e_1)^2 [|f'(e_1)|^q + |f'(e_3)|^q]^{1/q} \right. \\ & \quad + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{2} [|f'(e_3)|^q + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q]^{1/q} \\ & \quad \left. + (e_3 - e_1)^2 [|f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f'(e_2)|^q]^{1/q} \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

eşitsizliği elde edilir [39].

Sonuç 2.27: Teorem 2.25'te $e_3 = \frac{e_1+e_2}{2}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
& \left| f\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{e_2 - e_1}{2^{2+\frac{1}{q}}(p+1)^{1/p}} \\
& \times \left[\left[|f'(e_1)|^q + \left| f'\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) \right|^q \right]^{1/q} + \left[\left| f'\left(\frac{e_1 + e_2}{2}\right) \right|^q + |f'(e_2)|^q \right]^{1/q} \right] \quad (2.21)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Özdemir ve Avcı Ardıç çalışmalarında [41], Liu'nun çalışmasında [42] yer alan lemmayı kullanarak konveks fonksiyonlar için Ostrowski tipine benzer aşağıdaki sonuçları elde etmişlerdir.

Teorem 2.28: $f: [e_1, e_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f', [e_1, e_2]$ üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon ve $f'' \in L[e_1, e_2]$ olsun. Eğer $|f''|$, $[e_1, e_2]$ üzerinde konveks ise her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1 + e_2}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\
& \leq \frac{(e_3 - e_1)^3}{24(e_2 - e_1)} [|f''(e_1)| + |f''(e_2)|] \\
& + \frac{6(e_3 - e_1)^3 + (e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{48(e_2 - e_1)} [|f''(e_3)| + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|] \quad (2.22)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır [41].

Sonuç 2.29: Teorem 2.28'de $f'(e_3) = f'(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1 + e_2}{2}\right]$ için

$$\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{(e_3 - e_1)^3}{24(e_2 - e_1)} [|f'''(e_1)| + |f'''(e_2)|] \\
&+ \frac{6(e_3 - e_1)^3 + (e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{48(e_2 - e_1)} [|f'''(e_3)| + |f'''(e_1 + e_2 - e_3)|] \quad (2.23)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [41].

Sonuç 2.30: Sonuç 2.29’da f fonksiyonu için $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ şartı sağlanırsa her $e_3 \in [e_1, \frac{e_1+e_2}{2}]$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) \right| \\
&\leq \frac{(e_3 - e_1)^3}{24(e_2 - e_1)} [|f'''(e_1)| + |f'''(e_2)|] \\
&+ \frac{6(e_3 - e_1)^3 + (e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{48(e_2 - e_1)} [|f'''(e_3)| + |f'''(e_1 + e_2 - e_3)|] \quad (2.24)
\end{aligned}$$

Ostrowski tipli eşitsizlik elde edilir [41].

Sonuç 2.31: Teorem 2.28’de $e_3 = \frac{3e_1+e_2}{4}$ seçilirse

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} \left[f\left(\frac{3e_1+e_2}{4}\right) + f\left(\frac{e_1+3e_2}{4}\right) \right] \right| \\
&\leq \frac{(e_2 - e_1)^2}{1536} \\
&\times \left[|f'''(e_1)| + 7 \left| f'''\left(\frac{3e_1+e_2}{4}\right) \right| + 7 \left| f'''\left(\frac{e_1+3e_2}{4}\right) \right| + |f'''(e_2)| \right] \quad (2.25)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir [41].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu çalışmada birinci ve ikinci mertebeden türevlerinin mutlak değerlerinin kuvvetleri r -konveks olan fonksiyonlar için Ostrowski tipine benzer eşitsizlikler elde edilmesi amaçlanmıştır. Çalışmadaki sonuçlar elde edilirken r -konveks fonksiyon tanımı, üçgen eşitsizliği, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu, Hölder eşitsizliği, (2.5) ve (2.8) eşitsizliklerinden faydalanılmıştır. Sonuçlar elde edilirken Dragomir'in [40] ve Liu'nun [42] çalışmalarında kısmi integrasyon yönteminden faydalanarak elde ettikleri aşağıdaki lemmalar kullanılmıştır.

Lemma 3.1: $f: [e_1, e_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[e_1, e_2]$ üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $e_3 \in [e_1, \frac{e_1+e_2}{2}]$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \\ &= \frac{1}{e_2 - e_1} \left[\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1) f'(t) dt + \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left(t - \frac{e_1+e_2}{2} \right) f'(t) dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (t - e_2) f'(t) dt \right] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır [40].

Lemma 3.2: $f: [e_1, e_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $f', [e_1, e_2]$ üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $e_3 \in [e_1, \frac{e_1+e_2}{2}]$ için

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2}[f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \\ &+ \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left[\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)^2 f''(t) dt + \int_{e_3}^{e_1 + e_2 - e_3} \left(t - \frac{e_1 + e_2}{2} \right)^2 f''(t) dt \right. \\ \left. + \int_{e_1 + e_2 - e_3}^{e_2} (t - e_2)^2 f''(t) dt \right]$$

eşitliği elde edilir [42].



4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde Lemma 3.1 ve Lemma 3.2'deki eşitlikler kullanılarak r -konveks fonksiyonlar için elde edilen eşitsizlikler sunulmuştur.

4.1 Birinci Mertebeden Türevlerinin Kuvvetleri r -Konveks Olan Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.1.1: $[e_1, e_2]$ üzerinde mutlak sürekli $f: [e_1, e_2] \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ve $f' \in L[e_1, e_2]$ verilsin. $|f'|^q, [e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ise her $e_3 \in [e_1, \frac{e_1+e_2}{2}]$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[(\mathcal{L}_r(|f'(e_1)|^q, |f'(e_3)|^q))^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (\mathcal{L}_r(|f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q, |f'(e_2)|^q))^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} (\mathcal{L}_r(|f'(e_3)|^q, |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q))^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.1, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{(e_2 - e_1)} \left[\left(\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1}^{e_3} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \left(\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1+e_2}{2} \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \left(\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |t - e_2|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \quad (4.2)
\end{aligned}$$

yazılır.

r -konveks fonksiyonlar için geçerli olan Teorem 2.8’de verilen (2.5) eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{1}{e_3 - e_1} \int_{e_1}^{e_3} |f'(t)|^q dt \leq \mathcal{L}_r (|f'(e_1)|^q, |f'(e_3)|^q), \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{e_1 + e_2 - 2e_3} \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} |f'(t)|^q dt \leq \mathcal{L}_r (|f'(e_3)|^q, |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q) \quad (4.4)$$

ve

$$\frac{1}{e_3 - e_1} \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |f'(t)|^q dt \leq \mathcal{L}_r (|f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q, |f'(e_2)|^q) \quad (4.5)$$

eşitsizlikleri elde edilir.

(4.3), (4.4) ve (4.5)’te verilen eşitsizlikler (4.2)’deki eşitsizlikte kullanılırsa ve (4.2)’deki eşitsizlikteki gereken integral hesaplamaları yapılırsa (4.1)’deki eşitsizlik elde edilerek ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.2: Teorem 4.1.1’de $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2} \right]$

için Ostrowski tipindeki

$$\begin{aligned}
& \left| f(e_3) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^2}{(p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[(\mathcal{L}_r(|f'(e_1)|^q, |f'(e_3)|^q))^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + (\mathcal{L}_r(|f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q, |f'(e_2)|^q))^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{2(p+1)^{\frac{1}{p}}} (\mathcal{L}_r(|f'(e_3)|^q, |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q))^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.1.3: Sonuç 4.1.2’de $e_3 = \frac{e_1 + e_2}{2}$ yazılırsa (4.6)’daki eşitsizlik (2.10)’daki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.1.4: $[e_1, e_2]$ üzerinde mutlak sürekli $f: [e_1, e_2] \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu ve $f' \in L[e_1, e_2]$ verilsin. $|f'|, [e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ise her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1 + e_2}{2} \right]$ ve $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left[\left(\frac{r^2(e_3 - e_1)^2}{(1+r)(1+2r)} \right) (|f'(e_1)| + |f'(e_2)|) \right. \\
& \quad \left. + \left(\frac{r(e_3 - e_1)^2}{1+2r} + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2 (r^2 + r2^{\frac{1}{r}})}{2^{1+\frac{1}{r}}(1+r)(1+2r)} \right) \right. \\
& \quad \left. \times (|f'(e_3)| + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|) \right] \quad (4.7)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.1 ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left[\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1| |f'(t)| dt + \int_{e_3}^{e_1 + e_2 - e_3} \left| t - \frac{e_1 + e_2}{2} \right| |f'(t)| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_{e_1 + e_2 - e_3}^{e_2} |t - e_2| |f'(t)| dt \right] \tag{4.8}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır.

$|f'|, [e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks olduğundan

$$|f'(t)| \leq \left(\frac{e_3 - t}{e_3 - e_1} |f'(e_1)|^r + \frac{t - e_1}{e_3 - e_1} |f'(e_3)|^r \right)^{\frac{1}{r}}, t \in [e_1, e_3] \tag{4.9}$$

$$\begin{aligned}
|f'(t)| & \leq \left(\frac{e_1 + e_2 - e_3 - t}{e_1 + e_2 - 2e_3} |f'(e_3)|^r + \frac{t - e_3}{e_1 + e_2 - 2e_3} |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \\
t & \in (e_3, e_1 + e_2 - e_3] \tag{4.10}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|f'(t)| & \leq \left(\frac{e_2 - t}{e_3 - e_1} |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^r + \frac{t - e_1 - e_2 + e_3}{e_3 - e_1} |f'(e_2)|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \\
t & \in (e_1 + e_2 - e_3, e_2] \tag{4.11}
\end{aligned}$$

yazılır.

(4.9)-(4.11)'deki eşitsizlikler (4.8)'deki eşitsizlikte kullanılırsa

$$\left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left[\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1| \left(\frac{e_3 - t}{e_3 - e_1} |f'(e_1)|^r + \frac{t - e_1}{e_3 - e_1} |f'(e_3)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dt \right. \\
&+ \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1+e_2}{2} \right| \left(\frac{e_1+e_2-e_3-t}{e_1+e_2-2e_3} |f'(e_3)|^r + \frac{t-e_3}{e_1+e_2-2e_3} |f'(e_1+e_2-e_3)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dt \\
&+ \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |t - e_2| \left(\frac{e_2-t}{e_3-e_1} |f'(e_1+e_2-e_3)|^r + \frac{t-e_1-e_2+e_3}{e_3-e_1} |f'(e_2)|^r \right)^{\frac{1}{r}} dt \quad (4.12)
\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.15'te verilen (2.8)'deki eşitsizlik (4.12)'deki eşitsizlikte kullanılırsa ve bu işlem sonucunda karşılaşılan aşağıdaki (4.13)-(4.15) hesaplamaları (4.12)'de yerlerine yazılırsa (4.7)'deki eşitsizlik ispatlanmış olur.

$$\begin{aligned}
&\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)^{1+\frac{1}{r}} dt \\
&= \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (e_2 - t)^{1+\frac{1}{r}} dt \\
&= \frac{r(e_3 - e_1)^{2+\frac{1}{r}}}{1 + 2r}, \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)(e_3 - t)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (e_2 - t)(t - e_1 - e_2 + e_3)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \frac{r^2(e_3 - e_1)^{2+\frac{1}{r}}}{(1+r)(1+2r)}, \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$$\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1+e_2}{2} \right| (t - e_3)^{\frac{1}{r}} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1+e_2}{2} \right| (e_1+e_2-e_3-t)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \frac{(e_1+e_2-2e_3)^{2+\frac{1}{r}} \left(r^2 + r2^{\frac{1}{r}} \right)}{2^{1+\frac{1}{r}}(1+r)(1+2r)}. \tag{4.15}
\end{aligned}$$

Sonuç 4.1.5: Teorem 4.1.4'te $f(e_3) = f(e_1+e_2-e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned}
&\left| f(e_3) - \frac{1}{e_2-e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
&\leq \frac{1}{e_2-e_1} \left[\left(\frac{r^2(e_3-e_1)^2}{(1+r)(1+2r)} \right) (|f'(e_1)| + |f'(e_2)|) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{r(e_3-e_1)^2}{1+2r} + \frac{(e_1+e_2-2e_3)^2 \left(r^2 + r2^{\frac{1}{r}} \right)}{2^{1+\frac{1}{r}}(1+r)(1+2r)} \right) \right. \\
&\quad \left. \times (|f'(e_3)| + |f'(e_1+e_2-e_3)|) \right] \tag{4.16}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.1.6: Teorem 4.1.4'te $e_3 = \frac{e_1+e_2}{2}$ yazılırsa (4.7)'deki eşitsizlik (2.12)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.1.7: Teorem 4.1.4'te $e_3 = \frac{e_1+e_2}{2}$ yazılıp $r = 1$ seçilirse (4.7)'deki eşitsizlik (2.13)'teki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.1.8: Teorem 4.1.4'te $r = 1$ seçilirse (4.7)'deki eşitsizlik (2.17)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.1.9: Sonuç 4.1.5'te $r = 1$ seçilirse (4.16)'daki eşitsizlik (2.18)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.1.10: Teorem 4.1.1'in şartları altında, $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ (e_3 - e_1)^2 [|f'(e_1)|^q + |f'(e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{2} [|f'(e_3)|^q + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + (e_3 - e_1)^2 [|f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f'(e_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.1, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği yardımıyla (4.2)'deki eşitsizlik elde edilir. $|f'|^q, [e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks olduğundan (2.8)'deki eşitsizlik yardımıyla

$$\int_{e_1}^{e_3} |f'(t)|^q dt \leq \frac{r(e_3 - e_1)}{1 + r} [|f'(e_1)|^q + |f'(e_3)|^q], \quad (4.18)$$

$$\int_{e_3}^{e_1 + e_2 - e_3} |f'(t)|^q dt \leq \frac{r(e_1 + e_2 - 2e_3)}{1 + r} [|f'(e_3)|^q + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q] \quad (4.19)$$

ve

$$\int_{e_1 + e_2 - e_3}^{e_2} |f'(t)|^q dt \leq \frac{r(e_3 - e_1)}{1 + r} [|f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f'(e_2)|^q] \quad (4.20)$$

eşitsizlikleri yazılır. (4.18)-(4.20) eşitsizlikleri (4.2)'deki eşitsizlikte kullanılırsa (4.17)'deki eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.11: Teorem 4.1.10'da $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1 + e_2}{2} \right]$ için aşağıdaki Ostrowski tipli

$$\begin{aligned}
& \left| f(e_3) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ (e_3 - e_1)^2 [|f'(e_1)|^q + |f'(e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{2} [|f'(e_3)|^q + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \\
& \quad \left. + (e_3 - e_1)^2 [|f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f'(e_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.21)
\end{aligned}$$

eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.1.12: Teorem 4.1.10'daki (4.17) eşitsizliğinde $r = 1$ seçilirse (4.17)'deki eşitsizlik (2.19)'daki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.1.13: Sonuç 4.1.11'deki (4.21) eşitsizliğinde $r = 1$ seçilirse (4.21)'deki eşitsizlik (2.20)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.1.14: Teorem 4.1.10'da $e_3 = \frac{e_1 + e_2}{2}$ yazılıp $r = 1$ seçilirse (4.17)'deki eşitsizlik (2.21)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.1.15: Teorem 4.1.1'in şartları altında, $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
& \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^2}{2^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r^2}{(1+r)(1+2r)} |f'(e_1)|^q + \frac{r}{1+2r} |f'(e_3)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{4^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r^2 + r2^{\frac{1}{r}}}{2^{1+\frac{1}{r}}(1+r)(1+2r)} [|f'(e_3)|^q + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q] \right]^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{(e_3 - e_1)^2}{2^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r}{1+2r} |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q + \frac{r^2}{(1+r)(1+2r)} |f'(e_2)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \quad (4.22)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.1, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left\{ \left(\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1| dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1| |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \left(\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1+e_2}{2} \right| dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1+e_2}{2} \right| |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + \left(\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |t - e_2| dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |t - e_2| |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.23) \end{aligned}$$

eşitsizliği yazılır. $|f'|^q$ 'nin $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks oluşu kullanılarak (2.8)'deki eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned} & \int_{e_1}^{e_3} |t - e_1| |f'(t)|^q dt \\ & \leq (e_3 - e_1)^2 \left[\frac{r^2}{(1+r)(1+2r)} |f'(e_1)|^q + \frac{r}{1+2r} |f'(e_3)|^q \right], \quad (4.24) \\ & \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1+e_2}{2} \right| |f'(t)|^q dt \end{aligned}$$

$$\leq (e_1 + e_2 - 2e_3)^2 \frac{r^2 + r2^{\frac{1}{r}}}{2^{1+\frac{1}{r}}(1+r)(1+2r)} \times [|f'(e_3)|^q + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q] \quad (4.25)$$

ve

$$\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |t - e_2| |f'(t)|^q dt \leq (e_3 - e_1)^2 \times \left[\frac{r}{1+2r} |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q + \frac{r^2}{(1+r)(1+2r)} |f'(e_2)|^q \right] \quad (4.26)$$

eşitsizlikleri elde edilir. (4.24)-(4.26) eşitsizlikleri (4.23)'teki eşitsizlikte kullanılırsa ve gereken integral hesaplamaları yapılırsa (4.22)'deki eşitsizliğe ulaşılır.

Sonuç 4.1.16: Teorem 4.1.15'te $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2} \right]$ için aşağıdaki Ostrowski tipli

$$\left| f(e_3) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^2}{2^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r^2}{(1+r)(1+2r)} |f'(e_1)|^q + \frac{r}{1+2r} |f'(e_3)|^q \right]^{\frac{1}{q}} + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^2}{4^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r^2 + r2^{\frac{1}{r}}}{2^{1+\frac{1}{r}}(1+r)(1+2r)} [|f'(e_3)|^q + |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q] \right]^{\frac{1}{q}} + \frac{(e_3 - e_1)^2}{2^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r}{1+2r} |f'(e_1 + e_2 - e_3)|^q + \frac{r^2}{(1+r)(1+2r)} |f'(e_2)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.27)$$

eşitsizlik elde edilir.

Teorem 4.1.17: Teorem 4.1.1'in şartları altında

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
 & \leq \frac{1}{(e_2 - e_1)^{1-\frac{1}{q}}} \left(\frac{2(e_3 - e_1)^{p+1}}{p+1} + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^{p+1}}{2^p(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & \times (\mathcal{L}_r(|f'(e_1)|^q, |f'(e_2)|^q))^{\frac{1}{q}} \quad (4.28)
 \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: Lemma 3.1, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)}{2} - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\
 & \leq \frac{1}{e_2 - e_1} \left(\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1|^p dt + \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1 + e_2}{2} \right|^p dt + \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |t - e_2|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
 & \times \left(\int_{e_1}^{e_2} |f'(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

yazılır.

$|f'|^q, [e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks olduğundan, (2.5)'teki eşitsizlik kullanılarak

$$\frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} |f'(t)|^q dt \leq \mathcal{L}_r(|f'(e_1)|^q, |f'(e_2)|^q) \quad (4.30)$$

elde edilir. (4.30)'daki eşitsizliği (4.29)'daki eşitsizlikte yerine yazıp (4.29)'daki integral hesapları yapılırsa (4.28)'deki eşitsizlik elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1.18: Teorem 4.1.17’de $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2}\right]$ için aşağıdaki Ostrowski tipli

$$\begin{aligned} & \left| f(e_3) - \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt \right| \\ & \leq \frac{1}{(e_2 - e_1)^{1-\frac{1}{q}}} \left(\frac{2(e_3 - e_1)^{p+1}}{p+1} + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^{p+1}}{2^p(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \times (\mathcal{L}_r(|f'(e_1)|^q, |f'(e_2)|^q))^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \quad (4.31)$$

eşitsizlik yazılır.

4.2 İkinci Mertebeden Türevlerinin Kuvvetleri r -Konveks Olan Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Teorem 4.2.1: f' , $[e_1, e_2]$ üzerinde mutlak sürekli ve $f'' \in L[e_1, e_2]$ olmak üzere $f: [e_1, e_2] \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. $|f''|^q$, $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ise her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2}\right]$, $q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\ & \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^3}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[(\mathcal{L}_r(|f''(e_1)|^q, |f''(e_3)|^q))^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\ & \left. \left. + (\mathcal{L}_r(|f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q, |f''(e_2)|^q))^{\frac{1}{q}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{4(2p+1)^{\frac{1}{p}}} (\mathcal{L}_r(|f''(e_3)|^q, |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q))^{\frac{1}{q}} \Big\} \quad (4.32)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.2, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu yardımıyla

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\ & \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left[\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1|^2 |f''(t)| dt \right. \\ & \quad \left. + \int_{e_3}^{e_1 + e_2 - e_3} \left| t - \frac{e_1 + e_2}{2} \right|^2 |f''(t)| dt + \int_{e_1 + e_2 - e_3}^{e_2} |t - e_2|^2 |f''(t)| dt \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

yazılır. (4.33)'teki eşitsizliğin sağ tarafına Hölder eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\ & \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left\{ \left(\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1|^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1}^{e_3} |f''(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{e_3}^{e_1 + e_2 - e_3} \left| t - \frac{e_1 + e_2}{2} \right|^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_3}^{e_1 + e_2 - e_3} |f''(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad \left. + \left(\int_{e_1 + e_2 - e_3}^{e_2} |t - e_2|^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1 + e_2 - e_3}^{e_2} |f''(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned}$$

$$+ \left(\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |t - e_2|^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |f''(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \quad (4.34)$$

elde edilir.

$|f''|^q, [e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks olduğundan (2.5)'teki eşitsizlik yardımıyla

$$\frac{1}{e_3 - e_1} \int_{e_1}^{e_3} |f''(t)|^q dt \leq \mathcal{L}_r(|f''(e_1)|^q, |f''(e_3)|^q), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{e_1 + e_2 - 2e_3} \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} |f''(t)|^q dt \\ & \leq \mathcal{L}_r(|f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q, |f''(e_3)|^q) \end{aligned} \quad (4.36)$$

ve

$$\frac{1}{e_3 - e_1} \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |f''(t)|^q dt \leq \mathcal{L}_r(|f''(e_2)|^q, |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q) \quad (4.37)$$

yazılır. (4.35)-(4.37)'deki eşitsizlikler (4.34)'teki eşitsizlikte kullanılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (4.32)'deki eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.2: Teorem 4.2.1'de $f'(e_3) = f'(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\ & \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^3}{(2p + 1)^{\frac{1}{p}}} \left[(\mathcal{L}_r(|f''(e_1)|^q, |f''(e_3)|^q))^{\frac{1}{q}} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\mathcal{L}_r(|f'''(e_1 + e_2 - e_3)|^q, |f'''(e_2)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg] \\
& + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{4(2p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\mathcal{L}_r(|f'''(e_3)|^q, |f'''(e_1 + e_2 - e_3)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\} \quad (4.38)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.3: Sonuç 4.2.2’de $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1 + e_2}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) \right| \\
& \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^3}{(2p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[\left(\mathcal{L}_r(|f'''(e_1)|^q, |f'''(e_3)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left(\mathcal{L}_r(|f'''(e_1 + e_2 - e_3)|^q, |f'''(e_2)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{4(2p+1)^{\frac{1}{p}}} \left(\mathcal{L}_r(|f'''(e_3)|^q, |f'''(e_1 + e_2 - e_3)|^q) \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.39)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.4: f' , $[e_1, e_2]$ üzerinde mutlak sürekli ve $f'' \in L[e_1, e_2]$ olmak üzere $f: [e_1, e_2] \rightarrow \mathbb{R}^+$ fonksiyonu verilsin. $|f''|$, $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks ise her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1 + e_2}{2} \right]$ ve $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left[(e_3 - e_1)^3 \left(\frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} \right) (|f''(e_1)| + |f''(e_2)|) \right. \\
&\quad \left. + \left((e_3 - e_1)^3 \left(\frac{r}{1+3r} \right) + (e_1 + e_2 - 2e_3)^3 \left(\frac{r + r^2 + 2r^3}{4(1+r)(1+2r)(1+3r)} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. \times (|f''(e_3)| + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|) \right] \quad (4.40)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.2 ve üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu yardımıyla (4.33)'teki eşitsizlik elde edilir.

$|f''|^q$, $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks olduğundan,

$$|f''(t)| \leq \left(\frac{t - e_1}{e_3 - e_1} |f''(e_3)|^r + \frac{e_3 - t}{e_3 - e_1} |f''(e_1)|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad t \in [e_1, e_3], \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned}
|f''(t)| &\leq \left(\frac{t - e_3}{e_1 + e_2 - 2e_3} |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^r + \frac{e_1 + e_2 - e_3 - t}{e_1 + e_2 - 2e_3} |f''(e_3)|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \\
t &\in (e_3, e_1 + e_2 - e_3], \quad (4.42)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|f''(t)| &\leq \left(\frac{t - e_1 - e_2 + e_3}{e_3 - e_1} |f''(e_2)|^r + \frac{e_2 - t}{e_3 - e_1} |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^r \right)^{\frac{1}{r}}, \\
t &\in (e_1 + e_2 - e_3, e_2] \quad (4.43)
\end{aligned}$$

yazılır. (4.41)-(4.43)'teki eşitsizlikler (4.33)'te kullanılırsa (2.8)'deki eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left[\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)^2 \left(\left(\frac{t - e_1}{e_3 - e_1} \right)^{\frac{1}{r}} |f''(e_3)| + \left(\frac{e_3 - t}{e_3 - e_1} \right)^{\frac{1}{r}} |f''(e_1)| \right) dt \right. \\
&+ \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left(t - \frac{e_1+e_2}{2} \right)^2 \left(\left(\frac{t - e_3}{e_1+e_2-2e_3} \right)^{\frac{1}{r}} |f''(e_1+e_2-e_3)| + \left(\frac{e_1+e_2-e_3-t}{e_1+e_2-2e_3} \right)^{\frac{1}{r}} |f''(e_3)| \right) dt \\
&+ \left. \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (t - e_2)^2 \left(\left(\frac{e_2 - t}{e_3 - e_1} \right)^{\frac{1}{r}} |f''(e_1+e_2-e_3)| + \left(\frac{t - e_1 - e_2 + e_3}{e_3 - e_1} \right)^{\frac{1}{r}} |f''(e_2)| \right) dt \right] \quad (4.44)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)^{2+\frac{1}{r}} dt &= \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (t - e_2)^2 (e_2 - t)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \frac{r(e_3 - e_1)^{3+\frac{1}{r}}}{1 + 3r}, \quad (4.45)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)^2 (e_3 - t)^{\frac{1}{r}} dt &= \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (t - e_2)^2 (t - e_1 - e_2 + e_3)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \frac{2r^3(e_3 - e_1)^{3+\frac{1}{r}}}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} \quad (4.46)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left(t - \frac{e_1+e_2}{2} \right)^2 (t - e_3)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left(t - \frac{e_1+e_2}{2} \right)^2 (e_1+e_2-e_3-t)^{\frac{1}{r}} dt \\
&= \frac{(e_1+e_2-2e_3)^{3+\frac{1}{r}}(r+r^2+2r^3)}{4(1+r)(1+2r)(1+3r)} \quad (4.47)
\end{aligned}$$

dir. (4.45)-(4.47) eşitlikleri (4.44)'teki eşitsizlikte kullanılırsa (4.40)'daki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.2.5: Teorem 4.2.4'te $f'(e_3) = f'(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\ & \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left[(e_3 - e_1)^3 \left(\frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} \right) (|f''(e_1)| + |f''(e_2)|) \right. \\ & \quad \left. + \left((e_3 - e_1)^3 \left(\frac{r}{1+3r} \right) + (e_1 + e_2 - 2e_3)^3 \left(\frac{r + r^2 + 2r^3}{4(1+r)(1+2r)(1+3r)} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. \times (|f''(e_3)| + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|) \right] \end{aligned} \quad (4.48)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.6: Sonuç 4.2.5'te $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2}\right]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) \right| \\ & \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left[(e_3 - e_1)^3 \left(\frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} \right) (|f''(e_1)| + |f''(e_2)|) \right. \\ & \quad \left. + \left((e_3 - e_1)^3 \left(\frac{r}{1+3r} \right) + (e_1 + e_2 - 2e_3)^3 \left(\frac{r + r^2 + 2r^3}{4(1+r)(1+2r)(1+3r)} \right) \right) \right. \\ & \quad \left. \times (|f''(e_3)| + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|) \right] \end{aligned} \quad (4.49)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.7: Teorem 4.2.4'te $r = 1$ seçilirse (4.40)'daki eşitsizlik (2.22)'deki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.2.8: Sonuç 4.2.5'te $r = 1$ seçilirse (4.48)'deki eşitsizlik (2.23)'teki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.2.9: Sonuç 4.2.6'da $r = 1$ seçilirse (4.49)'daki eşitsizlik (2.24)'teki eşitsizliğe indirgenir.

Sonuç 4.2.10: Teorem 4.2.4'te $e_3 = \frac{3e_1+e_2}{4}$ yazılıp $r = 1$ seçilirse (4.40)'daki eşitsizlik (2.25)'teki eşitsizliğe indirgenir.

Teorem 4.2.11: Teorem 4.2.1'in şartları altında, $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\
& \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ (e_3 - e_1)^3 [|f''(e_1)|^q + |f''(e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{4} [|f''(e_3)|^q + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \left. + (e_3 - e_1)^3 [|f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f''(e_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.50)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.2, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği yardımıyla (4.34)'teki eşitsizlik elde edilir. $|f''|^q, [e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks olduğundan (2.8)'deki eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
& \int_{e_1}^{e_3} |f''(t)|^q dt \leq \frac{r(e_3 - e_1)}{1+r} [|f''(e_1)|^q + |f''(e_3)|^q], \quad (4.51) \\
& \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} |f''(t)|^q dt
\end{aligned}$$

$$\leq \frac{r(e_1 + e_2 - 2e_3)}{1 + r} [|f''(e_3)|^q + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q] \quad (4.52)$$

ve

$$\begin{aligned} & \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |f''(t)|^q dt \\ & \leq \frac{r(e_3 - e_1)}{1 + r} [|f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f''(e_2)|^q] \end{aligned} \quad (4.53)$$

yazılır. (4.51)-(4.53) eşitsizlikleri (4.34) eşitsizliğinde kullanılırsa ve (4.34)'teki gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.50)'deki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.2.12: Teorem 4.2.11'de $f'(e_3) = f'(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in [e_1, \frac{e_1+e_2}{2}]$ için

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\ & \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left(\frac{r}{r+1} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2p+1} \right)^{\frac{1}{p}} \left\{ (e_3 - e_1)^3 [|f''(e_1)|^q + |f''(e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\ & \quad + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{4} [|f''(e_3)|^q + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \\ & \quad \left. + (e_3 - e_1)^3 [|f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f''(e_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \end{aligned} \quad (4.54)$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.13: Sonuç 4.2.12'de $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in [e_1, \frac{e_1+e_2}{2}]$ için

$$\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left(\frac{r}{r+1}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{2p+1}\right)^{\frac{1}{p}} \left\{ (e_3 - e_1)^3 [|f'''(e_1)|^q + |f'''(e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{4} [|f'''(e_3)|^q + |f'''(e_1 + e_2 - e_3)|^q]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + (e_3 - e_1)^3 [|f'''(e_1 + e_2 - e_3)|^q + |f'''(e_2)|^q]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.55)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.14: Teorem 4.2.1'in şartları altında, $r \geq 1$ için

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\
&\leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^3}{3^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} |f'''(e_1)|^q + \frac{r}{1+3r} |f'''(e_3)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{12^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r + r^2 + 2r^3}{4(1+r)(1+2r)(1+3r)} (|f'''(e_3)|^q + |f'''(e_1 + e_2 - e_3)|^q) \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \frac{(e_3 - e_1)^3}{3^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r}{1+3r} |f'''(e_1 + e_2 - e_3)|^q + \frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} |f'''(e_2)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.56)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.2, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left\{ \left(\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)^2 dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)^2 |f''(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
&+ \left(\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left(t - \frac{e_1+e_2}{2} \right)^2 dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left(t - \frac{e_1+e_2}{2} \right)^2 |f''(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\left. + \left(\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (t - e_2)^2 dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (t - e_2)^2 |f''(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.57)
\end{aligned}$$

yazılır. $|f''|^q$ 'nin $[e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks oluşu kullanılarak (2.8)'deki eşitsizlik yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\int_{e_1}^{e_3} (t - e_1)^2 |f''(t)|^q dt \\
&\leq (e_3 - e_1)^3 \\
&\times \left[\frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} |f''(e_1)|^q + \frac{r}{1+3r} |f''(e_3)|^q \right], \quad (4.58)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left(t - \frac{e_1+e_2}{2} \right)^2 |f''(t)|^q dt \\
&\leq (e_1 + e_2 - 2e_3)^3 \frac{r + r^2 + 2r^3}{4(1+r)(1+2r)(1+3r)} \\
&\times [|f''(e_3)|^q + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q] \quad (4.59)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} (t-e_2)^2 |f''(t)|^q dt \\
& \leq (e_3 - e_1)^3 \\
& \times \left[\frac{r}{1+3r} |f''(e_1+e_2-e_3)|^q + \frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} |f''(e_2)|^q \right] \quad (4.60)
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılır. (4.58)-(4.60) eşitsizlikleri (4.57)'deki eşitsizlikte kullanılırsa ve gerekli hesaplamalar yapılırsa (4.56)'daki eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.2.15: Teorem 4.2.14'te $f'(e_3) = f'(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\
& \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^3}{3^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} |f''(e_1)|^q + \frac{r}{1+3r} |f''(e_3)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{12^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r + r^2 + 2r^3}{4(1+r)(1+2r)(1+3r)} (|f''(e_3)|^q + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q) \right]^{\frac{1}{q}} \\
& \left. + \frac{(e_3 - e_1)^3}{3^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r}{1+3r} |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q + \frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} |f''(e_2)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.61)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.16: Sonuç 4.2.15'te $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2} \right]$ için

$$\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)} \left\{ \frac{(e_3 - e_1)^3}{3^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} |f''(e_1)|^q + \frac{r}{1+3r} |f''(e_3)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right. \\
&\quad + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^3}{12^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r + r^2 + 2r^3}{4(1+r)(1+2r)(1+3r)} (|f''(e_3)|^q + |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q) \right]^{\frac{1}{q}} \\
&\quad \left. + \frac{(e_3 - e_1)^3}{3^{\frac{1}{p}}} \left[\frac{r}{1+3r} |f''(e_1 + e_2 - e_3)|^q + \frac{2r^3}{(1+r)(1+2r)(1+3r)} |f''(e_2)|^q \right]^{\frac{1}{q}} \right\} \quad (4.62)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 4.2.17: Teorem 4.2.1'in şartları altında

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\
&\leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)^{1-\frac{1}{q}}} \left(\frac{2(e_3 - e_1)^{2p+1}}{2p+1} + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^{2p+1}}{2^{2p}(2p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times (\mathcal{L}_r(|f''(e_1)|^q, |f''(e_2)|^q))^{\frac{1}{q}} \quad (4.63)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Lemma 3.2, üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu ve Hölder eşitsizliği yardımıyla

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2} \left(e_3 - \frac{3e_1 + e_2}{4} \right) [f'(e_3) - f'(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\
&\leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_{e_1}^{e_3} |t - e_1|^{2p} dt + \int_{e_3}^{e_1+e_2-e_3} \left| t - \frac{e_1+e_2}{2} \right|^{2p} dt + \int_{e_1+e_2-e_3}^{e_2} |t - e_2|^{2p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_{e_1}^{e_2} |f''(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.64}$$

yazılır. $|f''|^q, [e_1, e_2]$ üzerinde r -konveks olduğundan (2.5)'teki eşitsizlik yardımıyla

$$\frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} |f''(t)|^q dt \leq \mathcal{L}_r(|f''(e_1)|^q, |f''(e_2)|^q) \tag{4.65}$$

elde edilir. (4.65)'teki eşitsizlik (4.64)'te kullanılırsa ve (4.64)'teki gerekli hesaplamalar yapılırsa (4.63)'teki eşitsizlik elde edilir.

Sonuç 4.2.18: Teorem 4.2.17'de $f'(e_3) = f'(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - \frac{1}{2} [f(e_3) + f(e_1 + e_2 - e_3)] \right| \\
& \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)^{1-\frac{1}{q}}} \left(\frac{2(e_3 - e_1)^{2p+1}}{2p+1} + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^{2p+1}}{2^{2p}(2p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times (\mathcal{L}_r(|f''(e_1)|^q, |f''(e_2)|^q))^{\frac{1}{q}}
\end{aligned} \tag{4.66}$$

eşitsizliği elde edilir.

Sonuç 4.2.19: Sonuç 4.2.18'de $f(e_3) = f(e_1 + e_2 - e_3)$ seçilirse her $e_3 \in \left[e_1, \frac{e_1+e_2}{2} \right]$ için

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{e_2 - e_1} \int_{e_1}^{e_2} f(t) dt - f(e_3) \right| \\
& \leq \frac{1}{2(e_2 - e_1)^{1-\frac{1}{q}}} \left(\frac{2(e_3 - e_1)^{2p+1}}{2p+1} + \frac{(e_1 + e_2 - 2e_3)^{2p+1}}{2^{2p}(2p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times (\mathcal{L}_r(|f''(e_1)|^q, |f''(e_2)|^q))^{\frac{1}{q}} \tag{4.67}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada birinci ve ikinci mertebeden diferensiyellenebilir r -konveks fonksiyonlar için literatürde mevcut olan iki lemma yardımıyla yeni integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Elde edilen bu sonuçların bazılarının literatürle uyumlu sonuçlar olduğu gözlemlenmiştir.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar, bu tez çalışmasında kullanılan lemmalar yardımıyla konveks fonksiyonların farklı sınıfları için eşitsizlikler elde edebilecekleri gibi farklı lemmalar kullanarak r -konveks fonksiyonlar için de yeni sonuçlar üretebilirler. Ayrıca son zamanlarda çoğu araştırmacının üzerinde yoğunlaştığı Atangana-Baleanu operatörleri yardımıyla r -konveks fonksiyonlar için farklı tipten integral eşitsizlikler üretebilirler.

KAYNAKLAR

- [1] Ch. Hermite, “Sur deux limites d’une intégrale définie”, *Mathesis*, vol. 3, pp. 82, 1883.
- [2] G.H. Hardy, J.E. Littlewood ve G. Pólya, *Inequalities*. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1952.
- [3] J.E. Pečarić, *Convex Functions: Inequalities*. Serbocroatian, Beograd: 1987.
- [4] E.F. Beckenbach ve R. Bellman, *Inequalities*. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1961.
- [5] D.S. Mitrinović, *Analytic Inequalities*. Berlin, New York, Heidelberg: Springer-Verlag, 1970.
- [6] A.W. Roberts ve D.E. Varberg, *Convex Functions*. New York, London: Academic Press, 1973.
- [7] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić ve A.M. Fink, *Inequalities Involving Functions and Their Integrals and Derivatives*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1991.
- [8] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić ve A.M. Fink, *Classical and New Inequalities in Analysis*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [9] B.G. Pachpatte, *Mathematical Inequalities*. Amsterdam, The Netherlands: Elsevier B.V., 2005.
- [10] C.P. Niculescu ve L.-E. Persson, *Convex Functions and Their Applications*. United States of America: Springer, 2006.
- [11] S.S. Dragomir ve C.E.M. Pearce, *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, Victoria University: RGMIA Monographs, 2000.
- [12] S.S. Dragomir ve T.M. Rassias, *Ostrowski Type Inequalities and Applications in Numerical integration*. Dordrecht: Kluwer Academic, 2002.
- [13] “Why Mathematical Inequalities?”, RGMIA, <https://rgmia.org/inequalities.php>. [Erişim Tarihi:13.06.2021].
- [14] H. Anton ve C.Rorres, *Elementary Linear Algebra: Applications Version*. John Wiley & Sons, Inc., 2005.
- [15] M. Bayraktar, *Fonksiyonel Analiz*. Ankara: Gazi Kitabevi, 2000.
- [16] J.E. Pečarić, F. Proschan ve Y.L. Tong, *Convex Functions, Partial Orderings, and Statistical Applications*. United States of America: Academic Press, Inc., 1992.
- [17] P.M. Gill, C.E.M. Pearce ve J. Pečarić, “Hadamard’s inequality for r -convex functions”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 215, no. 2, pp. 461-470, 1997.
- [18] C.E.M. Pearce, J. Pečarić ve V. Šimić, “Stolarsky means and Hadamard’s inequality”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 220, no.1, pp. 99-109, 1998.
- [19] J. Wang, J. Deng ve M. Fečkan, “Hermite-Hadamard-Type inequalities for r -convex functions based on the use of Riemann-Liouville fractional integrals”, *Ukrainian Mathematical Journal*, vol.65, no. 2, pp. 193-211, 2013.

- [20] M. Carter ve B. van Brunt, *The Lebesgue-Stieltjes Integral: A Practical Introduction*. New York: Springer, 2000.
- [21] A. Ostrowski, “Über Die Absolutabweichung Einer Differentiierbaren Funktion von Ihrem Integralmittelwert”, *Commentarii Mathematici Helvetici*, vol. 10, pp. 226-227, 1938.
- [22] M.W.N. Alomari, “Several Inequalities of Hermite-Hadamard, Ostrowski and Simpson Type for s -Convex, Quasi-Convex and r -Convex Mappings and Applications”, Doktora tezi, Kebangsaan Üniversitesi, 2011.
- [23] G.-S. Yang ve D.-Y. Hwang, “Refinements of Hadamard’s Inequality for r -Convex Functions”, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol.32, no.10, pp.1571-1579, 2001.
- [24] M. Karagözlü, “Konveks, İkinci Anlamda s -Konveks ve r -Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler”, Yüksek lisans tezi, Adıyaman Üniversitesi, 2019.
- [25] N.P.N. Ngoc, N.V. Vinh, ve P.T.T. Hien, “Integral inequalities of Hadamard type for r -convex functions”, *International Matematical Forum*, vol. 4, no. 35, pp. 1723-1728, 2009.
- [26] G. Zabandan, A. Bodaghi ve A. Kılıçman, “The Hermite-Hadamard inequality for r -convex functions”, *Journal of Inequalities and Applications*, vol. 2012, 2012.
- [27] L. Han ve G. Liu, “Integral inequalities of Hermite-Hadamard type for r -convex functions”, *Applied Mathematics*, vol. 3, pp. 1967-1971, 2012.
- [28] K. Brahim, L. Riahi ve S. Taf, “Hermite-Hadamard type inequalities for r -convex functions in q -calculus,” *Le Matematiche*, vol. 70, no. 2, pp. 295–303, 2015.
- [29] X. You, H. Kara, H. Budak ve H. Kalsoom, “Quantum inequalities of Hermite-Hadamard type for r -convex functions”, *Journal of Mathematics*, vol. 2021, 2021.
- [30] Z. Lin, J.-R. Wang ve W. Wei, “Fractional Hermite-Hadamard inequalities through r -convex functions via power means”, *Facta Universitatis Series: Mathematics and Informatics*, vol. 30, no. 2, pp. 129-145, 2015.
- [31] M. Merad, B. Meftah ve N. Qanas, “Fractional Hermite-Hadamard type inequalities for n -times r -convex functions”, *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society*, vol. 21, no. 2, pp. 253-292, 2018.
- [32] M. Sun ve X. Yang, “Inequalities for the weighted mean of r -convex functions”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 133, no. 6, pp. 1639-1646, 2005.
- [33] W. T. Sulaiman, “Integral inequality regarding r -convex and r -concave functions”, *Journal of the Korean Mathematical Society*, vol. 47, no. 2, pp. 373-383, 2010.
- [34] S. Abbaszadeh ve M. Eshaghi, “A Hadamard-type inequality for fuzzy integrals based on r -convex functions”, *Soft Computing*, vol. 20, pp. 3117-3124, 2016.
- [35] B. Meftah, “Some new Ostrwoski’s inequalities for functions whose n th derivatives are r -convex”, *International Journal of Analysis*, vol. 2016, 2016.

- [36] W. Ul-Haq, N. Rehman ve Z.A. Al-Hussain, “Hermite-Hadamard type inequalities for r -convex positive stochastic processes”, *Journal of Taibah University for Science*, vol. 13, no. 1, pp. 87-90, 2019.
- [37] H. Wang, “Choquet integrals of r -convex functions”, *Soft Computing*, vol. 23, pp. 12991-12999, 2019.
- [38] B. Bayraktar, “Some integral inequalities for functions whose absolute values of the third derivative is concave and r -convex”, *Turkish Journal of Inequalities*, vol. 4, no. 2, pp. 59-78, 2020.
- [39] M.W. Alomari, M.E. Özdemir ve H. Kavurmac, “On companion of Ostrowski inequality for mappings whose first derivatives absolute value are convex with applications”, *Miskolc Mathematical Notes*, vol. 13, no. 2, pp. 233-248, 2012.
- [40] S.S. Dragomir, “Some companions of Ostrowski’s inequality for absolutely continuous functions and applications”, *Bulletin of the Korean Mathematical Society.*, vol. 42, no. 2, pp. 213–230, 2005.
- [41] M.E. Özdemir ve M. Avcı Ardiç, “Some companions of Ostrowski type inequality for functions whose second derivatives are convex and concave with applications”, *Arab Journal of Mathematical Sciences*, vol. 21, no. 1, pp. 53-66, 2015.
- [42] Z. Liu, “Some companions of an Ostrowski type inequality and applications”, *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, vol. 10, no. 2, 2009.