

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN BAZI SERİ YÖNTEMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜŞRA SAADET MUMCU

AĞUSTOS 2022

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN BAZI SERİ YÖNTEMLERİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Büşra Saadet MUMCU

DANIŞMAN: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

ZONGULDAK

Ağustos 2022

KABUL:

Büşra Saadet MUMCU tarafından hazırlanan “Radon Dönüşümünün Tersine İçin Bazı Seri Yöntemleri” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 25/08/2022

Danışman: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Sedat ÇEVİKEL

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Mücahit AKBIYIK

Beykent Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

....../....../2022

Prof. Dr. Fikret GÖLGELEYEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü



“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Büşra Saadet MUMCU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN BAZI SERİ YÖNTEMLERİ

Büşra Saadet MUMCU

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

Ağustos 2022, 61 sayfa

Tez üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, Radon dönüşümü ve bu dönüşümün tersi ile ilgili temel bilgiler ifade edilmiştir. İkinci bölümde, gama fonksiyonu, Tchebycheff polinomları, Legendre polinomları, Gegenbauer polinomları ve küresel harmoniklerin tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. Üçüncü bölümde, Radon dönüşümü ile Gegenbauer dönüşümü arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra Radon dönüşümünün tersi için dairesel harmonik ve küresel harmonik seri açılımları incelenmiştir. Dairesel ve küresel harmonik seri açılımları kullanılarak Radon dönüşümü bilinen bir fonksiyonun kendisinin bulunmasına yönelik çeşitli örnekler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Radon dönüşümü, Tchebycheff polinomları, Legendre polinomları, Gegenbauer polinomları, dairesel harmonikler, küresel harmonikler

Bilim Kodu: 403.06.01



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVERSION OF RADON TRANSFORM BY SOME SERIES METHODS

Büşra Saadet MUMCU

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assoc. Prof. Dr. Zekeriya USTAOĞLU

August 2022, 61 pages

This thesis consists of three sections. In the first section, basic information about Radon transform and its inverse are given. In the second section, the definitions and some properties of gamma function, Tchebycheff polynomials, Legendre polynomials, Gegenbauer polynomials and spherical harmonics are given. In the third section, the relationship between Radon transform and Gegenbauer transform is presented. Then, for the inverse of the Radon transform, circular harmonics and spherical harmonic series expansions are examined. Various examples are provided on determining a function from its Radon transformation using circular and spherical harmonic series expansions.

Keywords: Radon transform, Tchebycheff polynomials, Legendre polynomials, Gegenbauer polynomials, circular harmonics, spherical harmonics.

Science Code: 403.06.01



TEŞEKKÜR

Tezin tüm aşamalarında görüş ve önerileriyle bana yol gösteren, değerli vaktini ayıran danışman hocam sayın Doç. Dr. Zekeriya USTAOĞLU'na çok teşekkür ederim.

Hayatımın her döneminde yanımda olan, maddi ve manevi desteklerini tüm fedakarlıkları ile eksik etmeyen sevgili anneme ve babama teşekkürü bir borç bilirim. Tez çalışmam esnasında yardımını esirgemeyen sevgili eşime ve bana değer katan tüm arkadaşlarıma teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
 BÖLÜM 1 GİRİŞ	 1
1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ	2
 BÖLÜM 2 BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR VE KÜRESEL HARMONİKLER	 5
2.1 GAMA FONKSİYONU	5
2.2 TCHEBYCHEFF POLİNOMLARI	7
2.3 LEGENDRE POLİNOMLARI	12
2.4 GEGENBAUER POLİNOMLARI	16
2.5 KÜRESEL HARMONİKLER	21
 BÖLÜM 3 RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN SERİ YAKLAŞIMI	 33
3.1 RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN GEGENBAUER DÖNÜŞÜMÜ İLE İLİŞKİSİ	33
3.1.1 Gegenbauer Dönüşüm Çifti	40
3.2 DAİRESEL HARMONİK SERİ AÇILIMI	41
3.2.1 Abel Dönüşüm Çifti.....	43
3.2.2 Radon Formülü	43

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
3.3 KÜRESEL HARMONİK SERİ AÇILIMI	48
3.3.1 Legendre Dönüşüm Çifti.....	48
3.3.2 Tchebycheff Dönüşüm Çifti	49
3.4 RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN SERİ YAKLAŞIM ÖRNEKLERİ	49
KAYNAKLAR.....	57
ÖZGEÇMİŞ	61

ŞEKİLLER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Birinci çeşit Tchebycheff polinomlarının grafikleri	9
Şekil 2.2 İkinci çeşit Tchebycheff polinomlarının grafikleri	12
Şekil 2.3 Legendre polinomlarının grafikleri.....	13
Şekil 2.4 Assosiye Legendre polinomlarının grafikleri	17
Şekil 2.5 Gegenbauer polinomlarının grafikleri.....	21
Şekil 3.1 Örnek 3.4.1 için seri yaklaşımı	50
Şekil 3.2 Örnek 3.4.2 için seri yaklaşımı	52



ÇİZELGELER DİZİNİ

<u>No</u>	<u>Sayfa</u>
Çizelge 2.1 Birinci çeşit Tchebycheff polinomları.	8
Çizelge 2.2 İkinci çeşit Tchebycheff polinomları.	10
Çizelge 2.3 Legendre polinomları.....	13
Çizelge 2.4 Assosiye Legendre polinomları.	16
Çizelge 2.5 Trigonometrik assosiye Legendre polinomları.	18
Çizelge 2.6 Gegenbauer polinomları.....	19
Çizelge 2.7 Küresel harmonikler.....	22



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

ds	: Eğrisel integral için yay uzunluğu elemanı
$\delta(\cdot)$	: Dirac delta
$\hat{f} = \mathfrak{R}f$	: f fonksiyonunun Radon dönüşümü
Γ	: Gamma fonksiyonu
$\ell_{t,\theta}$	: Düzlemdeki t, θ parametrelili doğru
$\mathfrak{R}$	: Radon dönüşüm operatörü

KISALTMALAR

CHT	: Dairesel Harmonik Dönüşüm
SPECT	: Tek Fotonlu Emisyonlu Bilgisayarlı Tomografi
RT	: Radon dönüşümü



BÖLÜM 1

GİRİŞ

Radon dönüşümünün temeli, Johann Radon'un yayınladığı ünlü eseri "Fonksiyonların belirli manifoldlar boyunca integrallerinden fonksiyonların kendisinin elde edilmesi (On the determination of functions from integrals along certain manifolds)" (Radon 1917) ünlü çalışmasına dayanır. Bu çalışmasında Radon, düzlemdeki tüm düz doğrular boyunca eğrisel integrallerden yararlanarak bir fonksiyonun nasıl oluşturulacağını göstermiştir. Bu problem rekonstrüksiyon problemi olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca Radon, tüm hiper düzlem üzerindeki integrallerden n değişkenli bir fonksiyonun yeniden rekonstrüksiyonunu içeren Radon dönüşümünün diğer genelleştirmelerini de yapmıştır (Debnath and Bhatta 2006).

Bir fonksiyonun Radon dönüşümü bilindiğinde, dönüşüm verileri yardımıyla bu fonksiyonun kendisinin elde edilmesi için birçok yöntem ortaya konulmuştur. Bu yöntemler arasında filtrelenmiş geri projeksiyon algoritmaları en yaygın olarak kullanılanıdır. Bu amaçla kullanılan diğer yöntemler arasında cebirsel iteratif yaklaşımlar ve seri yaklaşımları yer alır. Seri yaklaşımları yapılırken dairesel veya daha yüksek boyutlu küresel harmonikler kullanılır.

Üç boyutlu Öklid uzayında birim küre üzerinde tanımlanan klasik küresel harmonikler, birim çember üzerindeki trigonometrik fonksiyonların genişlemesidir (Atkinson and Han, 2012). Küresel harmonikler, ilk olarak Laplace ve Legendre tarafından yerçekimi teorisi hakkındaki çalışmalarda ortaya konulmuştur. Yer bilimleri, nötron taşınımı, astronomi, ısı transferi, optik, kuantum mekanik, atmosfer ve okyanus fiziği gibi doğa bilimleri ve mühendisliğin birçok probleminin çözümüne yönelik araştırmalarda kullanılmıştır.

Radon dönüşümü bilinen bir fonksiyonun kendisinin elde edilmesinde dairesel harmonik dönüşüm (CHT-Circular Harmonic Transform) yardımıyla bir nesnenin projeksiyon verilerinden yararlanarak, bu nesnenin görüntüsünün rekonstrüksiyonu için yeni bir algo-

ritma, A. M. Cormack tarafından elde edilmiştir (Cormack 1963, Cormack 1964). Ayrıca CHT algoritmasını, bağımsız olarak R. B. Marr da elde etmiştir (Marr 1974). Bu algoritma, hem analitik hem de cebirsel bir yöntem olduğu için teorik olarak önemlidir. G. Herman, Cormack ve Marr tarafından geliştirilen CHT algoritmasının rekonstrüksiyon problemini tanımlayan cebirsel denklemler sisteminin köşegenleştirilmesi olduğunu göstermiştir (Herman 1980). Bu köşegenleştirme nedeniyle, CHT algoritmaları hızlı olmalarına rağmen genel olarak filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemleri, CHT algoritmalarından daha iyi görüntü kalitesi sunmuştur (Hawkins and Barrett 1986). Dairesel harmonik açılımın üstel Radon projeksiyon verilerinin rekonstrüksiyonu için başarılı bir algoritma geliştirilmiştir ve bu algoritma tek foton emisyonlu bilgisayarlı tomografiye (SPECT) uygulanmıştır (Hawkins 1988). Cormack ve Quinto tarafından küresel harmonikleri kullanarak bu dönüşümün tersi için bir formül elde edilmiştir (Cormack 1963, Cormack 1964). Küresel Radon dönüşüm ile normal Radon dönüşümünün geri projeksiyonu ilişkilendirilmiştir ve bunu göstermek için yeni bir ters dönüşüm formülü bulunmuştur (Yagle 1992).

1.1 TEZİN KAPSAMI VE ÖNEMİ

Bir f fonksiyonunun Radon dönüşümü, düzlemdeki tüm $l_{t,\theta}$ doğruları boyunca bu fonksiyonun eğrisel integralleri yardımıyla

$$\Re f(t, \theta) = \check{f}(p, \xi) = \int_{l_{t,\theta}} f ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(t \cos \theta - s \sin \theta, t \sin \theta + s \cos \theta) ds$$

şeklinde tanımlanır. f fonksiyonunun $l_{t,\theta}$ doğruları boyunca integralleri, yani $\Re f(t, \theta)$, bilindiğinde bu fonksiyonun kendisinin elde edilmesi problemi Radon dönüşümünün tersini bulma problemidir. Bu problemin çözümü için filtrelenmiş geri projeksiyon yöntemi ve cebirsel iteratif yaklaşım yöntemleri yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden farklı olarak bu tez çalışmasında, rekonstrüksiyon probleminin çözümü için dairesel veya küresel harmonikler yardımıyla yapılan seri yaklaşımları incelenerek bu yöntemlerin uygulanabilirliğinin ve etkinliğinin çeşitli örnekler üzerinde gösterilmesi amaçlanmıştır.

Bu çalışma kapsamında Radon dönüşümünün tersinin elde edilmesinde kullanılan seri yaklaşımları araştırılmıştır. Bu seri yaklaşımlarında kullanılan Tchebycheff polinomları, Legendre polinomları, Legendre polinomlarının genişlemesi olan Gegenbauer polinomları ve küresel harmonikler tanımlanmış, bu fonksiyonların önemli temel özellikleri ve bazı özel

durumlar için grafikleri verilmiştir. Ayrıca, Radon dönüşümünün Gegenbauer dönüşümü ile ilişkisi gösterilmiş olup bu ilişki ortaya konulan seri yaklaşımlarının temelini oluşturmaktadır. Bu çalışmada Radon dönüşümünün tersi için ele alınan seri yaklaşımları dairesel harmonik seri açılımları ve daha yüksek boyutlardaki küresel harmonik seri açılımlarıdır. Bu yaklaşımların uygulamaları ile ilişkili olan Abel dönüşüm çifti, Legendre dönüşüm çifti ve Tchebycheff dönüşüm çifti ifade edilmiştir. Son olarak dairesel harmonik ve küresel harmonik seri açılımları kullanılarak Radon dönüşümünün tersinin elde edilmesine yönelik örnekler verilmiştir.





BÖLÜM 2

BAZI ÖZEL FONKSİYONLAR VE KÜRESEL HARMONİKLER

Bu bölümde Tchebycheff polinomları, Legendre polinomları ve Gegenbauer polinomları gibi bazı özel fonksiyonlar tanımlanacak ve bu fonksiyonların özellikleri verilecektir. Ayrıca küresel harmoniklerin tanımı verilecek ve küresel harmoniklerin özelliklerinden bahsedilecektir.

2.1 GAMA FONKSİYONU

Tanım 2.1.1 $x > 0$ olmak üzere

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (2.1)$$

Euler integraliyle tanımlanan fonksiyona, gama fonksiyonu denir (Arfken and Weber 2005).

Bu tanımda $x = 1$ yazılırsa

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1 \quad (2.2)$$

elde edilir.

$x - 1 > 0$ olmak üzere (2.1) integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \left[-e^{-t} t^{x-1} \right]_0^{\infty} + (x-1) \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-2} dt \\ &= (x-1) \Gamma(x-1) \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde edilir. Daha sonra bu eşitlikte x yerine $x + 1$ yazılırsa

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (2.4)$$

temel bağıntısı elde edilir. x pozitif tam sayılar için bu bağıntı aşağıdaki eşitliğin sağ tarafında yazılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = \dots \\ &= x(x-1)(x-2)\dots 3.2.1.\Gamma(1) = n!\end{aligned}$$

elde edilir.

(2.1) de t yerine u^2 yazılırsa

$$\Gamma(x) = 2 \int_0^{\infty} \exp(-u^2) u^{2x-1} du, \quad x > 0 \quad (2.5)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $x = \frac{1}{2}$ olarak alındığında

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} \exp(-u^2) du = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}$$

olur. (2.4) bağıntısı dikkate alındığında

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

olarak bulunur. Aynı şekilde (2.5) kullanılarak $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right), \Gamma\left(\frac{7}{2}\right), \dots, \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)$ değerleri elde edilebilir. Negatif x değerleri için de tanımlı olan gama fonksiyonu, (2.4) bağıntısı kullanılarak

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}, \quad x \neq 0, -1, -2, \dots$$

formunda yazılır. Bu eşitlikte sırasıyla $x = -\frac{1}{2}$ ve $x = -\frac{3}{2}$ yazılırsa

$$\begin{aligned}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) &= \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Tam sayı olmayan x değerleri için gama fonksiyonu,

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (2.6)$$

özellğine sahiptir.

$$2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2x) \quad (2.7)$$

Burada $n = 0, 1, \dots$ için $x = n$ yazılırsa

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2n)!}{2^{2n} n!}$$

elde edilir.

2.2 TCHEBYCHEFF POLİNOMLARI

Tanım 2.2.1

$$\begin{aligned} (1 - x^2) y'' - xy' + l^2 y &= 0 \\ (1 - x^2) y'' - 3xy' + l(l+2)y &= 0 \end{aligned}$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerine Tchebycheff diferansiyel denklemleri denir. Bu denklemlerin çözümlerine Tchebycheff polinomları adı verilir.

Tanım 2.2.2 $x \in [-1, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$ ve $x = \cos \theta$ olmak üzere

$$T_l(x) = \cos l\theta \quad (2.8)$$

şeklinde tanımlanan polinomlara birinci çeşit Tchebycheff polinomları denir. Birinci çeşit Tchebycheff polinomları, $T_l(x)$ ile gösterilir (Mason and Handscomb 2003).

(2.8) de sırasıyla $l = l + 1$, $l = l - 1$ yazılırsa

$$T_{l+1}(\cos \theta) = \cos[(l+1)\theta] = \cos(l\theta)\cos\theta - \sin(l\theta)\sin\theta \quad (2.9)$$

$$T_{l-1}(\cos \theta) = \cos[(l-1)\theta] = \cos(l\theta)\cos\theta + \sin(l\theta)\sin\theta$$

olur ve bu eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} T_{l+1}(\cos \theta) + T_{l-1}(\cos \theta) &= 2 \cos \theta \cos(l\theta) \\ T_{l+1} &= 2xT_l - T_{l-1} \end{aligned} \quad (2.10)$$

elde edilir. Birinci çeşit Tchebycheff polinomlarının sırasıyla birinci ve ikinci türevleri alındığında,

$$(1 - x^2) T'_l = lT_{l-1} - lxT_l$$

$$(1 - x^2) T_l'' - x T_l' + l^2 T_l = 0$$

yineleme bağıntıları elde edilir.

(2.8) ve (2.10) dikkate alınarak $l = 0, 1, 2, \dots, 5$ için birinci çeşit Tchebycheff polinomları Çizelge 2.1’de verilmiştir.

Çizelge 2.1 Birinci çeşit Tchebycheff polinomları	
l	$T_l(x)$
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

$-1 < x < 1$ ve $|z| < 1$ olmak üzere birinci çeşit Tchebycheff polinomlarının üretici,

$$\frac{1 - z^2}{1 - 2xz + z^2} = 1 + 2 \sum_{l=1}^{\infty} T_l(x) z^l \quad (2.11)$$

olarak tanımlanır. Birinci çeşit Tchebycheff polinomları,

$$T_l(x) = \frac{1}{2} \left[(x + \sqrt{x^2 - 1})^l + (x - \sqrt{x^2 - 1})^l \right] \quad , \quad 0 < x < \infty.$$

şeklinde de tanımlanmaktadır.

Birinci çeşit Tchebycheff polinomları,

$$T_l(x) = \cos(l \arccos x) \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$T_l(x) = \cosh(l \operatorname{arccos} hx) \quad , \quad 1 < x < \infty$$

trigonometrik polinomlar cinsinden de tanımlanabilir. $x = 0$ ve $x = 1$ için birinci çeşit Tchebycheff polinomları,

$$T_l(1) = 1$$

$$T_l(0) = \cos \frac{l\pi}{2}$$

olarak bulunur.

Birinci çeşit Tchebycheff polinomları simetri koşulunu sağladığından

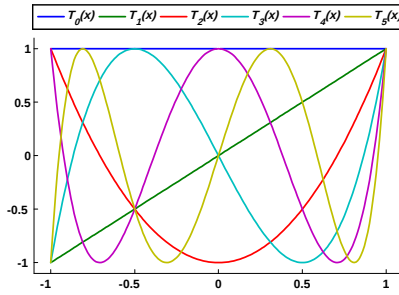
$$T_l(-x) = (-1)^l T_l(x)$$

olarak yazılır.

Birinci çeşit Tchebycheff polinomlarının ortagonallığı,

$$\int_{-1}^1 T_l(x) T_m(x) (1-x^2)^{-1/2} dx = \begin{cases} 0 & , \quad l \neq m \\ \frac{\pi}{2} & , \quad l = m \neq 0 \\ \pi & , \quad l = m = 0 \end{cases} \quad (2.12)$$

şeklinde gösterilir. (2.8) ve (2.10) dikkate alınarak $l = 0, 1, 2, \dots, 5$ için elde edilen birinci çeşit Tchebycheff polinomlarının grafikleri Şekil 2.1’de verilmiştir.



Şekil 2.1 Birinci çeşit Tchebycheff polinomları

Tanım 2.2.3 $x \in [-1, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$ ve $x = \cos \theta$ olmak üzere

$$U_l(x) = \frac{\sin(l+1)\theta}{\sin \theta} \quad (2.13)$$

şeklinde tanımlanan polinomlara ikinci çeşit Tchebycheff polinomları denir. İkinci çeşit Tchebycheff polinomları, $U_l(x)$ ile gösterilir (Mason and Handscomb 2003).

İkinci çeşit Tchebycheff polinomları,

$$U_l(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{l+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{l+1}}{2(x^2-1)^{1/2}} \quad , \quad 0 < x < \infty \quad , \quad x \neq 1 \quad (2.14)$$

$$U_{l-1}(x) = \frac{\sin(l \arccos x)}{(1-x^2)^{1/2}} \quad , \quad 0 < x < 1$$

$$U_{l-1}(x) = \frac{\sin(l \arccos hx)}{(x^2-1)^{1/2}} \quad , \quad 1 < x < \infty$$

şeklinde tanımlanabilir.

$U_l(x)$ polinomlarını elde edebilmek için

$$\sin 1\theta = \sin \theta \quad (2.15)$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\sin 3\theta = \sin \theta (4 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\sin 4\theta = \sin \theta (8 \cos^3 \theta - 4 \cos \theta)$$

$$\sin 5\theta = \sin \theta (16 \cos^4 \theta - 12 \cos^2 \theta + 1)$$

$$\sin 6\theta = \sin \theta (32 \cos^5 \theta - 32 \cos^3 \theta + 6 \cos \theta)$$

$\vdots$

formülleri kullanılmaktadır.

(2.13) ve (2.15) dikkate alınarak $l = 0, 1, 2, \dots, 5$ için ikinci çeşit Tchebycheff polinomları Çizelge 2.2'de verilmiştir.

Çizelge 2.2 İkinci çeşit Tchebycheff polinomları	
l	$U_l(x)$
0	1
1	$2x$
2	$4x^2 - 1$
3	$8x^3 - 4x$
4	$16x^4 - 12x^2 + 1$
5	$32x^5 - 32x^3 + 6x$

Trigonometrik özdeşliklerin toplamından yararlanılarak

$$\sin(l+1)\theta + \sin(l-1)\theta = 2 \cos \theta \sin l\theta \quad (2.16)$$

elde edilir. $U_0(x) = 1$ ve $U_1(x) = 2x$ başlangıç koşulları kabul edilerek tanımda verilen eşitlikte yerine yazıldığında

$$U_l(x) \sin \theta + U_{l-2}(x) \sin \theta = 2x U_{l-1}(x) \sin \theta \quad (2.17)$$

$$U_l(x) + U_{l-2}(x) = 2x U_{l-1}(x)$$

$$U_l(x) = 2x U_{l-1}(x) - U_{l-2}(x)$$

yineleme bağıntıları elde edilir. Trigonometrik özdeşliklerin farkı alındığında

$$\sin(l+1)\theta - \sin(l-1)\theta = 2\sin\theta \cos(l)\theta \quad (2.18)$$

$$U_l(x) \sin\theta - U_{l-2}(x) \sin\theta = 2\sin\theta T_l(x)$$

$$U_l(x) - U_{l-2}(x) = 2T_l(x)$$

elde edilir. Birinci çeşit Tchebycheff polinomları ve ikinci çeşit Tchebycheff polinomları arasındaki ilişki,

$$\begin{aligned} U_{l-1} &= \frac{1}{l} T_l' & , \quad l \geq 1 \\ T_l &= U_l - x U_{l-1} & , \quad l \geq 1 \\ (1-x^2) U_l &= x T_{l+1} - T_{l+2} & , \\ \frac{T_l}{(x^2-1)^{1/2}} - U_{l-1} &= \frac{(x-\sqrt{x^2-1})^l}{(x^2-1)^{1/2}} = \frac{(x+\sqrt{x^2-1})^l}{(x^2-1)^{1/2}} & , \quad x \neq 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

bağıntıları ile verilir. $x=0$ ve $x=1$ için ikinci çeşit Tchebycheff polinomları,

$$U_l(1) = l+1$$

$$U_l(0) = \cos \frac{l\pi}{2}$$

olarak bulunur.

$|x| < 1$ ve $|z| < 1$ olmak üzere ikinci çeşit Tchebycheff polinomlarının üretici,

$$\frac{1}{(1-2xz+z^2)} = \sum_{l=0}^{\infty} U_l(x) z^l \quad (2.20)$$

şeklinde tanımlanır.

$$U_{l+1} = 2xU_l(x) - U_{l-1}, \quad (2.21)$$

$$(1-x^2) U_l' = (l+1) U_{l-1} - lxU_l, \quad (2.22)$$

$$(1-x^2) U_l'' - 3xU_l' + l(l+2) U_l = 0 \quad (2.23)$$

bağıntıları, $U_l(x)$ için birinci ve ikinci türev alındığında elde edilen yineleme bağıntılarıdır.

İkinci çeşit Tchebycheff polinomları simetri koşulunu sağladığından

$$U_l(-x) = (-1)^l U_l(x)$$

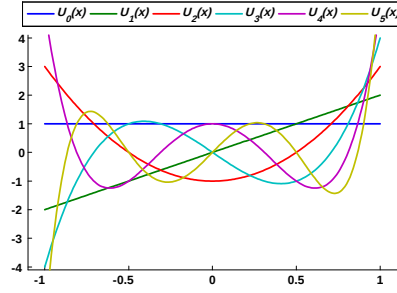
olarak yazılır.

İkinci çeşit Tchebycheff polinomlarının ortogonallığı,

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)^{\frac{1}{2}} U_l(x) U_m(x) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{lm} \quad (2.24)$$

şeklinde ifade edilir, burada δ_{lm} , Kronecker deltadır.

(2.13) ve (2.21) dikkate alınarak $l = 0, 1, 2, \dots, 5$ için elde edilen ikinci çeşit Tchebycheff polinomlarının grafikleri Şekil 2.2’de verilmiştir.



Şekil 2.2 İkinci çeşit Tchebycheff polinomları

2.3 LEGENDRE POLİNOMLARI

Tanım 2.3.1

$$(1-t^2)y'' - 2ty' + l(l+1)y = 0 \quad (2.25)$$

ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerine Legendre diferansiyel denklemleri denir. Bu denklemlerin çözümlerine Legendre polinomları adı verilir ve $P_l(x)$ ile gösterilir (Poularikas 1999).

Legendre polinomları,

$$[l/2] = \begin{cases} l/2 & , \quad l \text{ çift sayı} \\ (l-1)/2 & , \quad l \text{ tek sayı} \end{cases}$$

olmak üzere

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{(-1)^k (2l-2k)! x^{l-2k}}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!}$$

şeklinde tanımlanır.

Legendre yineleme bağıntıları,

$$P_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{l+1} x P_l(x) - \frac{l}{l+1} P_{l-1}(x) \quad (2.26)$$

$$P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x) = (2l+2)P_l(x) \quad (2.27)$$

$$(x^2 - 1)P'_l(x) = lxP_l(x) - lP_{l-1}(x) \quad (2.28)$$

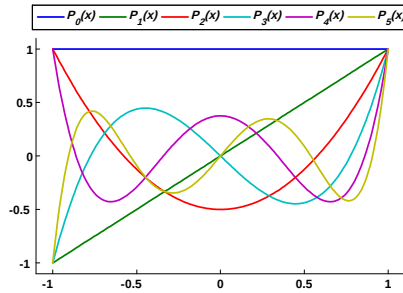
ile verilir. (2.25) ve (2.26) dikkate alınarak $l = 0, 1, 2, \dots, 5$ için Legendre polinomları Çizelge 2.3'te verilmiştir.

Çizelge 2.3 Legendre Polinomları	
l	$P_l(x)$
0	1
1	x
2	$\frac{1}{2}(3x^2 - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$
4	$\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x)$

Bütün durumlarda $P_l(1) = 1$, $P_l(-1) = (-1)^l$ dir. $P_4(x)$ ve $P_5(x)$ polinomları kullanılarak (2.26) yineleme bağıntısında $l = 6$ yazıldığında

$$\begin{aligned}
P_6(x) &= \frac{11}{6}xP_5(x) - \frac{5}{6}P_4(x) \\
&= \frac{11}{6}x \left[\frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x) \right] - \frac{5}{6} \left[\frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \right] \\
&= \frac{231}{16}x^6 - \frac{315}{16}x^4 + \frac{105}{16}x^2 - \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

elde edilir. $l = 0, 1, 2, \dots, 5$ için Legendre polinomlarının grafikleri Şekil 2.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3 Legendre polinomları

Legendre polinomu aynı zamanda Rodrigues formülü olarak bilinen

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

formülü ile de ifade edilir (Poularikas 1999).

$|x| \leq 1$ ve $|t| < 1$ olmak üzere Legendre polinomlarının üretici,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanır (Poularikas 1999).

$|x| < 1$ ve $l = 1, 2, \dots$ için ikinci çeşit Legendre fonksiyonları,

$$Q_l(x) = P_l(x) Q_0(x) - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor} \frac{2l-4k-1}{(2k+1)(l-k)} P_{l-2k-1}(x) \quad (2.31)$$

şeklinde tanımlanır, burada $l = 0$ için $Q_0(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ve $l = 1$ için

$$Q_1(x) = \frac{1}{2} x \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$$

bulunur. Ayrıca $Q_l(x)$ ikinci çeşit Legendre fonksiyonları, $P_l(x)$ Legendre polinomlarının tüm yineleme bağıntılarını sağlar. İkinci çeşit Legendre fonksiyonları,

$$\frac{1}{x-t} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_l(t) Q_l(x)$$

özelliğine sahiptir (Poularikas 1999).

Legendre polinomlarının ortogonalliği,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l(x) P_m(x) dx &= 0 \quad ; \quad l \neq m \\ \int_{-1}^1 [P_l(x)]^2 dx &= \frac{2}{2l+1} \quad ; \quad l = m \end{aligned} \quad (2.32)$$

ile verilir. (2.32) deki birinci eşitlik, farklı iki Legendre polinomunun $[-1, 1]$ aralığında ortogonal olduğunu gösterir.

$f(x)$, $[-1, 1]$ aralığında integrallenebilen bir fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun seri açılımı,

$$a_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (2.33)$$

olmak üzere

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l P_l(x) \quad -1 < x < 1 \quad (2.34)$$

formuna sahiptir. Eğer $f(x)$ çift fonksiyon ise seri açılımında, indisi çift sayı olan $P_l(x)$ terimleri, $f(x)$ tek fonksiyon ise seri açılımında sadece indisi tek sayı olan $P_l(x)$ terimleri elde edilir. $f(x)$, $(-1, 1)$ aralığında parçalı düzgün (*smooth*) ve karesi integrallenebilen bir reel fonksiyon ise $f(x)$ in sürekli olduğu her noktada bu seri yakınsaktır. Süreksiz olduğu bir x noktasında ise bu seri $[f(x+0) + f(x-0)]/2$ değerine yakınsar (Poularikas 1999).

Tanım 2.3.2

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]y = 0 \quad (2.35)$$

diferansiyel denklemlerine assosiye Legendre diferansiyel denklemleri denir ve denklemlerin çözümlerine assosiye Legendre polinomları denir (Poularikas 1999).

(2.35) denklemi, $m = 0$ için Legendre diferansiyel denklemine indirgenir. $m \geq 0$ için (2.35) denkleminin genel çözümü

$$y = C_1 P_l^m(x) + C_2 Q_l^m(x)$$

olur, burada $P_l^m(x)$, birinci çeşit assosiye Legendre fonksiyonları ve $Q_l^m(x)$ ise ikinci çeşit assosiye Legendre fonksiyonlarını ifade eder.

$m < 0$ için P_l^m ve P_l^{-m} arasında

$$P_l^{-m}(t) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(t)$$

ilişkisi vardır.

$P_l^m(x)$ assosiye Legendre polinomlarının, $[-1, 1]$ aralığında ortogonalliği,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_l^m(x) P_k^m(x) dx &= 0, \quad l \neq k \\ \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!}, \quad l = k \end{aligned} \quad (2.36)$$

ile verilir.

Assosiye Legendre polinomları için

$$P_l^m(-x) = (-1)^{l+m} P_l^m(x)$$

bağıntısı verilir. (2.35) dikkate alınarak $l = 0, 1, \dots, 4$ ve $m = 0, 1, 2, 3$ değerleri için assosiye Legendre polinomları Çizelge 2.4'te verilmiştir.

Çizelge 2.4 Assosiy Legendre polinomları

l	m	$P_l^m(x)$
0	0	1
1	0	x
1	1	$-(1-x^2)^{1/2}$
2	0	$\frac{1}{2}(3x^2-1)$
2	1	$-3x(1-x^2)^{1/2}$
2	2	$3(1-x^2)$
3	0	$\frac{1}{2}(5x^3-3x)$
3	1	$-\frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$
3	2	$15x(1-x^2)$
3	3	$-15(1-x^2)^{3/2}$
4	0	$\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$
4	1	$-\frac{5}{2}(7x^3-3x)(1-x^2)^{1/2}$
4	2	$\frac{15}{2}(7x^2-1)(1-x^2)$
4	3	$-105x(1-x^2)^{3/2}$

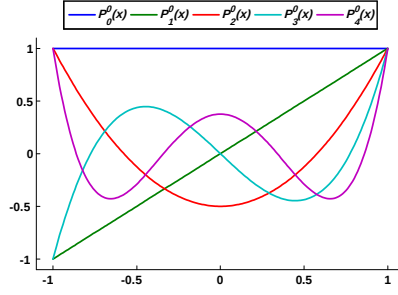
Assosiy Legendre polinomlarında $x = \cos \theta$ yazılırsa, trigonometrik assosiy Legendre polinomları elde edilir. $l = 0, 1, \dots, 4$ ve $m = 0, 1, 2, 3$ için trigonometrik assosiy Legendre polinomları Çizelge 2.5'te verilmiştir. $m = 0$, $m = 1$ ve $m = 2$ için assosiy Legendre polinomlarının grafikleri Şekil 2.4'te verilmiştir.

2.4 GEGENBAUER POLİNOMLARI

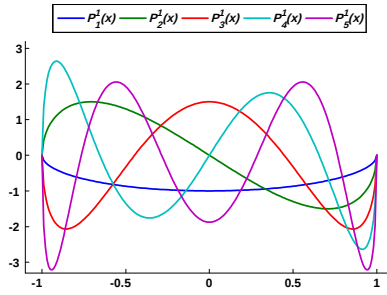
Tanım 2.4.1

$$(1-x^2)y'' - (2v+1)xy' + l(l+2v)y = 0 \quad (2.37)$$

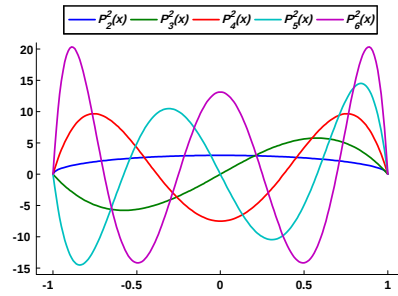
ikinci mertebeden diferansiyel denklemlerine Gegenbauer diferansiyel denklemleri denir. Bu denklemlerin özel çözümlerine Gegenbauer polinomları adı verilir. Gegenbauer polinomları, $C_l^v(x)$ ile gösterilir. Ultraküresel polinomlar olarak da adlandırılmaktadır.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.4 Assosiye Legendre polinomlarının grafikleri; (a) $m=0$, $l=0,1,\dots,4$,
(b) $m=1$, $l=1,2,\dots,5$, (c) $m=2$, $l=2,3,\dots,6$

(2.37) denkleminde $v = \frac{1}{2}$ olarak alındığında bu denklem Legendre denklemine dönüştür ve Gegenbauer polinomları ile Legendre polinomları arasındaki ilişki,

$$P_l(x) = C_l^{1/2}(x)$$

ile verilir.

Çizelge 2.5 Trigonometrik assosiye Legendre polinomları

l	m	$P_l^m(\cos \theta)$
0	0	1
1	0	$\cos \theta$
1	1	$-\sin \theta$
2	0	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
2	1	$-3 \cos \theta \sin \theta$
2	2	$3 \sin^2 \theta$
3	0	$\frac{1}{2} \cos \theta (5 \cos^2 \theta - 3)$
3	1	$-\frac{3}{2} (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta$
3	2	$15 \cos \theta \sin^2 \theta$
3	3	$-15 \sin^3 \theta$
4	0	$\frac{1}{8} (35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$
4	1	$-\frac{5}{2} \cos \theta \sin \theta (7 \cos^2 \theta - 3)$
4	2	$\frac{15}{2} (7 \cos^2 \theta - 1) \sin^2 \theta$
4	3	$-105 \cos \theta \sin^3 \theta$

(2.37) de $v = 1$ olarak alındığında ise eşitlik Tchebycheff diferansiyel denklemine dönüşür ve Gegenbauer polinomları ile ikinci çeşit Tchebycheff polinomları arasındaki ilişki,

$$U_l(x) = C_l^1(x)$$

ile verilir. Ayrıca Gegenbauer polinomları ve birinci çeşit Tchebycheff polinomları arasında

$$T_l(x) = \frac{l}{2} C_l^0(x)$$

ilişkisi vardır. Gegenbauer polinomları ile Jacobi polinomlarının arasındaki ilişki,

$$C_l^v(x) = \frac{\Gamma(2v+1)}{\Gamma(2v)} \frac{\Gamma(v+\frac{1}{2})}{\Gamma(v+\frac{1}{2}+l)} P_l^{(v-1/2, v-1/2)}(x)$$

ile verilir.

$x \in [-1, 1]$, $t \in (-1, 1)$ olmak üzere v . dereceden Gegenbauer polinomlarının üretici,

$$\sum_{l=0}^{\infty} C_l^v(x) t^l = (1 - 2xt + t^2)^{-v} \quad (2.38)$$

şeklinde tanımlanır, burada $v > -\frac{1}{2}$, $v \neq 0$ dır.

Gegenbauer polinomlarının yineleme bağıntıları,

$$(l+1) C_{l+1}^v = 2(l+v) x C_l^v - (l+2v-1) C_{l-1}^v \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} 2v(1-x^2) C_{l-1}^{v+1} &= (2v+l-1) C_{l-1}^v - l x C_l^v \\ &= (l+2v) x C_l^v - (l+1) C_{l+1}^v \end{aligned} \quad (2.40)$$

ile verilir. (2.39) dikkate alınarak $l = 0, 1, 2, \dots, 5$ için Gegenbauer polinomları Çizelge 2.6'da verilmiştir.

Çizelge 2.6 Gegenbauer polinomları	
l	$C_l^v(x)$
0	1
1	$2vx$
2	$2v(v+1)x^2 - v$
3	$\frac{4}{3}v(v+1)(v+2)x^3 - 2v(v+1)x$
4	$\frac{2}{3}v(v+1)(v+2)(v+3)x^4 - 2v(v+1)(v+2)x^2 + \frac{1}{2}v(v+1)$
5	$\frac{4}{15}v(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)x^5 - \frac{4}{3}v(v+1)(v+2)(v+3)x^3 + v(v+1)(v+2)x$

Verilen $C_4^v(x)$ ve $C_5^v(x)$ polinomlarından yararlanılarak (2.39) Gegenbauer yineleme bağıntısında $l = 5$ yazılırsa,

$$\begin{aligned} 6C_6^v(x) &= 2(v+5) x C_5^v(x) - (2v+4) C_4^v(x) \\ &= 2(v+5) x \left[\frac{4}{15}v(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)x^5 - \frac{4}{3}v(v+1)(v+2)(v+3)x^3 \right. \\ &\quad \left. + v(v+1)(v+2)x - (2v+4) \frac{2}{3}v(v+1)(v+2)(v+3)x^4 \right. \\ &\quad \left. - 2v(v+1)(v+2)x^2 + \frac{1}{2}v(v+1) \right] \\ &\quad - (2v+4) \left[\frac{2}{3}v(v+1)(v+2)(v+3)x^4 - 2v(v+1)(v+2)x^2 + \frac{1}{2}v(v+1) \right] \\ &= \frac{8}{15}v(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)x^6 - \frac{8}{3}v(v+1)(v+2)(v+3)(v+5)x^4 \\ &\quad + 2v(v+1)(v+2)(v+5)x^2 - \frac{2}{3}v(v+1)(v+2)(v+3)(2v+4)x^4 \\ &\quad + 2v(v+1)(v+2)(2v+4)x^2 - \frac{1}{2}v(v+1)(2v+4) \\ &= \frac{8}{15}v(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)x^6 - 4v(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)x^4 \\ &\quad + 6v(v+1)(v+2)(v+3)x^2 - v(v+1)(v+2) \\ C_6^v(x) &= \frac{8}{90}v(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)(v+5)x^6 - \frac{4}{6}v(v+1)(v+2)(v+3)(v+4)x^4 \\ &\quad + v(v+1)(v+2)(v+3)x^2 - \frac{1}{6}v(v+1)(v+2) \end{aligned}$$

polinomu elde edilir.

Gegenbauer polinomlarının birinci türevi alındığında,

$$DC_l^v = 2vC_{l-1}^{v+1}$$

elde edilir, burada $D = \frac{d}{dx}$ türev operatörüdür. Bu ifade (2.40) da yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} (1-x^2) DC_l^v &= (2v+l-1) C_{l-1}^v - lxC_l^v \\ &= (l+2v) xC_l^v - (l+1) C_{l+1}^v \end{aligned} \quad (2.41)$$

sonucuna ulaşılır. (2.41) eşitliğinin her iki tarafının ikinci türevi alındığında,

$$(1-x^2) D^2 C_l^v - (2v+1) xDC_l^v + l(l+2v) C_l^v = 0$$

Gegenbauer diferansiyel denklemleri elde edilir.

Bazı özel Gegenbauer polinomları,

$$\begin{aligned} C_0^0(1) &= 1 \\ C_l^0(1) &= \frac{2}{l} \\ C_l^0(x) &= \lim_{v \rightarrow 0} \frac{1}{v} C_l^v(x) \\ C_{2l+1}^v(0) &= 0 \\ C_{2l}^v(0) &= \frac{(-1)^l \Gamma(2v+1)}{l! \Gamma(v)} \\ C_l^v(1) &= \frac{\Gamma(2v+1)}{l! \Gamma(2v)} \\ C_l^v(-x) &= (-1)^v C_l^v(x) \end{aligned}$$

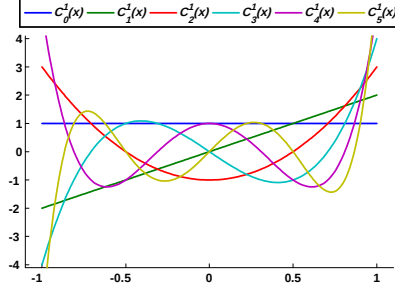
şeklindedir.

Gegenbauer polinomlarının ortogonallığı,

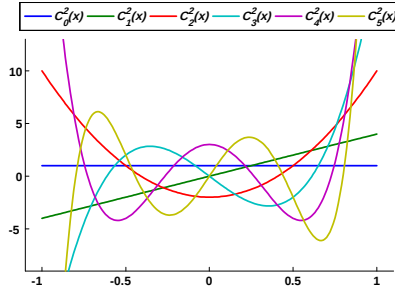
$$\int_{-1}^1 C_l^v(x) C_m^v(x) (1-x^2)^{v-1/2} dx = \frac{\pi 2^{l-2v} \Gamma(2v+1)}{l! (v+1) \Gamma(v) \Gamma(v)} \delta_{lm}$$

eşitliği ile gösterilir.

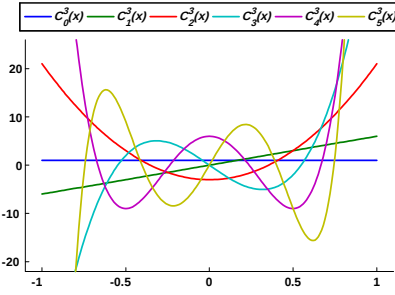
(2.39) dikkate alınarak $v = 1, 2, 3$ ve $l = 0, 1, \dots, 5$ için elde edilen Gegenbauer polinomlarının grafikleri Şekil 2.5'te verilmiştir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 2.5 Gegenbauer polinomlarının grafikleri; (a) $v=1$, $l=0,1,\dots,5$,

(b) $v=2$, $l=0,1,\dots,5$, (c) $v=3$, $l=0,1,\dots,5$

2.5 KÜRESEL HARMONİKLER

$P_l(t)$ ile gösterilen Legendre polinomları,

$$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dt} \right)^l (t^2 - 1)^l \quad (2.42)$$

şeklinde tanımlanır. Assosiye Legendre polinomları cinsinden yazılabilen küresel harmonikler,

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad 0 \leq m \leq l \quad (2.43)$$

biçiminde gösterilir. Burada θ ve ϕ sırasıyla kutupsal ve azimut açılarıdır. (2.43), küresel harmonikler için Condon-Shortley fazı olarak bilinmektedir. $l = 0, 1, 2$ ve $m = -2, -1, \dots, 2$ için küresel harmonikler Çizelge 2.7’de verilmiştir (Arfken and Weber 2005).

Çizelge 2.7 Küresel Harmonikler

l	m	S_{lm}
0	0	$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$
1	1	$-\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$
1	0	$\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$
1	-1	$\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{-i\phi}$
2	2	$\sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{2i\phi}$
2	1	$-\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$
2	0	$\sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left(\frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$
2	-1	$\sqrt{\frac{5}{24\pi}} 3 \sin \theta \cos \theta e^{-i\phi}$
2	-2	$\sqrt{\frac{5}{96\pi}} 3 \sin^2 \theta e^{-2i\phi}$

Y_{lm} , simetri koşulunu sağladığından

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (2.44)$$

şeklinde yazılır. Eşitlikte geçen $*$ karmaşık eşleniği ifade eder. Ortogonalite özelliğinden yararlanılarak

$$\langle Y_{lm}, Y_{l'm'} \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}^*(\theta, \phi) Y_{l'm'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (2.45)$$

elde edilir.

S_{lm} ve Y_{lm} arasındaki ilişkiyi göstermenin bir yolu; S_{lm} fonksiyonlarını, $\mathcal{N}(n, l) = \mathcal{N}(3, l) = 2l + 1$ tane fonksiyon ile tanımlamaktır. S_{lm} ve Y_{lm} arasındaki ilişki

$$S_{l,m}^c = \frac{Y_{lm} + Y_{lm}^*}{\sqrt{2}} = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)}{2\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi, \quad m = 1, 2, \dots, l \quad (2.46)$$

$$S_{l,m}^t = \frac{Y_{lm} - Y_{lm}^*}{i\sqrt{2}} = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)}{2\pi} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \right]^{1/2} P_l^{-m}(\cos \theta) \sin m\phi, \quad m = -l, -2, \dots, -1 \quad (2.47)$$

$$S_{l0} = Y_{l0} = \sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}} P_l(\cos \theta), \quad m = 0. \quad (2.48)$$

eşitlikleri ile verilir. Reel küresel harmoniklerin türlerini belirlerken, çift sayılar için c ve tek sayılar için t üst indisleri kullanılır. Önceki denklemlerin Y_{lm} ve Y_{lm}^* e göre çözülebilmesi için aşağıdaki ifade göz önünde bulundurulmalıdır.

$$S_{l,-m}^t = \frac{Y_{l,-m} - Y_{l,-m}^*}{i\sqrt{2}} = (-1)^m \frac{(Y_{lm}^* - Y_{lm})}{i\sqrt{2}}$$

Burada $Y_{l,-m} = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi)$ ve $Y_{l,-m}^* = (-1)^m Y_{lm}$ dir. Seri açılımlarında S_{lm} veya Y_{lm} den herhangi birinin kullanılabileceği açıktır. S_{lm} yi kullanmanın avantajı, reel ve ortonormal olmasıdır. Ancak Y_{lm} daha yaygın olarak kullanılır.

Tanım 2.5.1 $H_l(x_1, x_2, \dots, x_n)$, l . dereceden $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ değişkenlerine sahip homojen bir polinom,

$$H_l(tx_1, tx_2, \dots, tx_n) = t^l H_l(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.49)$$

şeklinde tanımlanır. l ve n sabit değerleri için sadece sonlu sayıda lineer bağımsız homojen polinom vardır (Hoschdath 1971).

Teorem 2.5.2 $K(n, l)$, l . dereceden n değişkenli lineer bağımsız homojen polinomların sayısını belirtsin. Bu durumda,

$$K(n, l) = \frac{(n+l-1)!}{l!(n-1)!} \quad (2.50)$$

olur (Hochstadt 1971).

Teorem 2.5.3 $\mathcal{N}(n, l)$, l . dereceden n değişkenli lineer bağımsız homojen harmonik polinomların sayısı olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{N}(n, l) = \frac{2l+n-2}{l} \binom{l+n-3}{l-1}$$

hesaplanır (Hochstadt 1971).

Örnek 2.5.1 $n = 2$ için l . dereceden iki değişkenli lineer bağımsız homojen harmonik polinomların sayısı,

$$\mathcal{N}(2, l) = \frac{2l+2-2}{l} \binom{l+2-3}{l-1} = 2 \binom{l-1}{l-1} = 2$$

olarak bulunur. Bu l . dereceden iki değişkenli lineer bağımsız homojen harmonik polinomlar,

$$\begin{aligned}(x + iy)^l + (x - iy)^l &= 2r^l \cos l\theta \\ (x + iy)^l - (x - iy)^l &= 2ir^l \sin l\theta\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Örnek 2.5.2 $n = 3$ için l . dereceden üç değişkenli lineer bağımsız homojen harmonik polinom sayısı,

$$\mathcal{N}(3, l) = \frac{2l + 3 - 2}{l} \binom{l + 3 - 3}{l - 1} = \frac{2l + 1}{l} \binom{l}{l - 1} = 2l + 1$$

olarak bulunur. Bu $(2l + 1)$ tane l . dereceden üç değişkenli lineer bağımsız homojen harmonik polinom, küresel koordinatlar kullanılarak

$$r^l P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}, \quad m = -l, -l + 1, \dots, l - 1, l$$

formülüyle elde edilir.

Tanım 2.5.4 H_l , l . dereceden, n boyutlu homojen bir polinom ve $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ bir vektör olmak üzere

$$\Delta_n H_l(\mathbf{X}) = 0 \tag{2.51}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda

$$S_l(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{r^l} H_l(r\boldsymbol{\xi}) = H_l(\boldsymbol{\xi}) \tag{2.52}$$

eşitliğini sağlayan $S_l(\boldsymbol{\xi})$, l . dereceden n boyutlu küresel harmonikleri ifade eder, burada $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ birim vektördür (Muller 1966).

Lemma 2.5.5

$$S_l(-\boldsymbol{\xi}) = (-1)^l S_l(\boldsymbol{\xi}). \tag{2.53}$$

$H_l(x)$ ve $H_m(x)$, l . ve m . dereceden iki homojen harmonik polinomlar olsun. Green teoreminden

$$0 = \int_{|x| \leq 1} (H_l \Delta_n H_m - H_m \Delta_n H_l) dV = \int_{\Omega_n} H_l(\boldsymbol{\xi}) H_m(\boldsymbol{\xi}) (m - l) d\boldsymbol{\omega} \tag{2.54}$$

elde edilir. Ω_n üzerindeki H_m ve H_l harmonik polinomlarının türevleri sırasıyla

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial r} H_m(r\xi) \right\}_{r=1} = m H_m(\xi) \quad \text{ve} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial r} H_l(r\xi) \right\}_{r=1} = l H_l(\xi)$$

bulunur (Muller 1966).

$f(r)$ bir fonksiyon olmak üzere n boyutlu birim kürenin yüzey alanını bulmak için ilk önce

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \quad (2.55)$$

olarak yazılır. Bu integrasyon, $f(r)$ nin küresel simetri özelliği kullanılarak yapılır ve $r = \sqrt{\sum_1^n x_i^2}$ dir. Birim kürenin yüzey alanı a_n olarak tanımlansın. (2.55) eşitliğindeki integral,

$$I_n = a_n \int_0^{\infty} f(r) r^{n-1} dr \quad (2.56)$$

küresel kabuk yöntemi ile hesaplanır, burada $a_n r^{n-1}$, r yarıçaplı bir kürenin yüzey alanını ifade eder. (2.56) da a_n yalnız bırakılırsa

$$a_n = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(r) dx_1 dx_2 \cdots dx_n}{\int_0^{\infty} f(r) r^{n-1} dr}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı, seçilen herhangi bir $f(r)$ fonksiyonundan bağımsızdır. Bu yüzden,

$$f(r) = e^{-r^2} = e^{-(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$$

olarak alınır

$$a_n = \frac{\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right]^n}{\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr} = \frac{[\sqrt{\pi}]^n}{\frac{1}{2} \Gamma(n/2)} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$$

elde edilir. $n = 1, \dots, 4$ için a_n ,

$$a_1 = 2, \quad a_2 = 2\pi, \quad a_3 = 4\pi, \quad a_4 = 2\pi^2$$

değerleri bulunur. $n = 5$ için hesaplanırsa

$$a_5 = \frac{2\pi^{5/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{2\pi^{5/2}}{\frac{3}{4}\pi^{1/2}} = \frac{8}{3}\pi^2$$

elde edilir.

$S_l(\boldsymbol{\xi})$ ve $S_k(\boldsymbol{\xi})$ küresel harmonik fonksiyonlar olmak üzere, ortogonalite

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} S_l(\boldsymbol{\xi}) S_k(\boldsymbol{\xi}) da_n = 0, \quad l \neq k \quad (2.57)$$

ile gösterilir. Böylece küre üzerinde dereceleri farklı olan küresel harmonik fonksiyonlar ortogonaldır (Hochstadh 1971).

Önerme 2.5.6 $S_l(\boldsymbol{\xi})$, l . dereceden küresel harmonik fonksiyon olmak üzere R herhangi bir dönme matrisi için

$$S'_l(\boldsymbol{\xi}) = S_l(R\boldsymbol{\xi}) \quad (2.58)$$

l . dereceden küresel harmonik olur (Frye and Efthimiou 2012).

$\{S_l(\boldsymbol{\xi})\}$, $\mathcal{N}(n, l)$ lineer bağımsız reel küresel harmoniklerin bir kümesi,

$$S_{l1}(\boldsymbol{\xi}), S_{l2}(\boldsymbol{\xi}), \dots, S_{l\mathcal{N}(n,l)}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.59)$$

olsun. Gram Schmidt metodundan yararlanılarak ortonormal bir küme oluşturulursa,

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} S_{lj}(\boldsymbol{\xi}) S_{lk}(\boldsymbol{\xi}) da_n = \delta_{jk} \quad (2.60)$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca R , koordinat sisteminde rotasyonu temsil eden bir ortogonal matris olsun. Tüm rotasyon matrisleri için

$$\int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} S_{lj}(R\boldsymbol{\xi}) S_{lk}(R\boldsymbol{\xi}) da_n = \delta_{jk} \quad (2.61)$$

yazılır. $\{S_l(\boldsymbol{\xi})\}$ kümesinin lineer bağımsız olması kullanılarak ve ayrıca sadece $\mathcal{N}(n, l)$, l . dereceden lineer bağımsız küresel harmoniklerin sayısı olduğundan

$$S_{lj}(R\boldsymbol{\xi}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}(n,l)} C_{ij} S_{li}(\boldsymbol{\xi}) \quad (2.62)$$

elde edilir. (2.61) eşitliğindeki ifadenin içine (2.62) eklendikten sonra (2.60) da kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}(n,l)} C_{ij} C_{ik} = \delta_{jk} \quad (2.63)$$

olur. Böylece $C = (C_{ij})$ matrisinin de ortogonal olduğu elde edilir.

Lemma 2.5.7 ξ, η iki birim vektör olmak üzere,

$$F_l(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}(n,l)} S_{li}(\xi) S_{li}(\eta) \quad (2.64)$$

şeklinde tanımlanan F_l fonksiyonu, koordinatların rotasyonu altında değişmezdir (Frye and Efthimiou 2012).

İspat. R , bir rotasyon matrisi olsun. C , ortogonal matrisi kullanılarak

$$\begin{aligned} F_l(R\xi, R\eta) &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}(n,l)} S_{li}(R\xi) S_{li}(R\eta) \\ &= \sum_{i=1}^{\mathcal{N}(n,l)} \left(\sum_{k=1}^{\mathcal{N}(n,l)} C_{ki} S_{lk}(\xi) \right) \left(\sum_{m=1}^{\mathcal{N}(n,l)} C_{mi} S_{lm}(\eta) \right) \\ F_l(R\xi, R\eta) &= \sum_{k,m=1}^{\mathcal{N}(n,l)} S_{lk}(\xi) S_{lm}(\eta) \left(\sum_{i=1}^{\mathcal{N}(n,l)} C_{ki} C_{im}^t \right) \\ &= \sum_{k=1}^{\mathcal{N}(n,l)} S_{lk}(\xi) S_{lk}(\eta) = F_l(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (2.65)$$

elde edilir. ■

Tanım 2.5.8 L_l , aşağıdaki özelliklere sahip l . dereceden homojen harmonik bir polinom olsun.

a) ξ_q vektörünü aynı bırakan tüm $\mathbf{A}$ ortogonal dönüşümleri için $L_l(\mathbf{A}x) = L_l(x)$ olur.

b) $L_l(\xi_q) = 1$

Bu durumda

$$\frac{1}{t^l} L_l(x) = L_l(\xi) \quad (2.66)$$

ifadesi l . dereceden Legendre polinomları olarak adlandırılır (Muller 1966).

Teorem 2.5.9 $L_l(\xi)$ Legendre polinomları,

$$L_l(\xi) = P_l(t)$$

olarak tanımlansın. $P_l(t)$, l . dereceden polinom olmak üzere

$$P_l(1) = 1 \quad ; \quad P_l(-t) = (-1)^l P_l(t)$$

eşitlikleri elde edilir (Muller 1966).

Lemma 2.5.10 $\{S_{lj}(\boldsymbol{\eta})\}$, $k \leq \mathcal{N}(n, l)$ olarak tanımlanan lineer bağımsız küresel harmoniklerin bir kümesi olsun. $k \times k$ determinanı sıfırdan farklı olmak üzere,

$$|S_{lj}(\boldsymbol{\eta})| \neq 0 \quad (2.67)$$

k birim vektöre sahip, bir $\{\eta_i\}$ kümesi vardır (Hochstadt 1971).

Teorem 2.5.11 $P_l(t)$, l . dereceden n boyutlu Legendre polinomlar ve η_k , birim vektörlerin bir kümesi olmak üzere her küresel harmonik

$$S_l(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}(n,l)} A_k P_l((\boldsymbol{\xi}, \eta_k)) \quad (2.68)$$

şeklinde yazılır (Hochstadt 1971).

İspat. İlk olarak (2.67) yi sağlayan bir $\{\eta_i\}$ kümesi seçilir. Bu denklem,

$$P_l((\boldsymbol{\xi}, \eta_k)) = \frac{a_{n-1}}{\mathcal{N}(n,l)} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(n,l)} S_{lj}(\boldsymbol{\xi}) S_{lj}(\eta_k) \quad k = 1, 2, \dots, \mathcal{N}(n, l)$$

tersinir olduğundan

$$S_{lj}(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}(n,l)} A_k P_l((\boldsymbol{\xi}, \eta_k))$$

olarak yazılır. Ayrıca keyfi bir küresel harmonik,

$$S_l(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(n,l)} b_j S_{lj}(\boldsymbol{\xi})$$

olarak ifade edilir ve eşitliğin sağ tarafındaki

$$b_j = \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} S_l(\boldsymbol{\xi}) S_{lj}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{n}$$

olarak yazılır. ■

Teorem 2.5.12 (Toplam Teoremi) $S_{lj}(\boldsymbol{\xi})$, l . mertebeden n boyutlu $\mathcal{N}(n, l)$ küresel harmoniklerin ortonormal bir kümesi olarak tanımlansın ve $P_l(t)$, l . dereceden n boyutlu Legendre polinomlar olmak üzere

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}(n,l)} S_{lj}(\boldsymbol{\xi}) S_{lj}(\boldsymbol{\eta}) = \frac{\mathcal{N}(n, l)}{a_n} P_l(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \quad (2.69)$$

eşitliği yazılır (Muller 1966).

Lemma 2.5.13 Her küresel harmonik $S_l(\xi)$ için

$$S_l(\xi) = \frac{\mathcal{N}(n, l)}{a_n} \int_{|\eta|=1} S_l(\eta) P_l((\xi, \eta)) da_n \quad (2.70)$$

eşitliği vardır (Hochstadt 1971).

Teorem 2.5.14 $S_l(\xi)$, küresel harmonikler ve $P_l(t)$, l . dereceden Legendre polinomlar olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$|S_l(\xi)| \leq \left[\frac{\mathcal{N}(n, l)}{a_n} \int_{|\eta|=1} S_l^2(\eta) da_n \right]^{1/2} \quad (2.71)$$

$$|P_l(t)| \leq 1 \quad |t| \leq 1 \quad (2.72)$$

$$\int_{|\xi|=1} P_l^2(\xi, \eta) da_n = \frac{a_n}{\mathcal{N}(n, l)} \quad (2.73)$$

eşitlikleri sağlanır (Hochstadt 1971).

İspat. İlk olarak (2.72) yi göstermek için (2.69) daki toplam teoremi kullanılır. Daha sonra Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa,

$$P_l^2((\xi, \eta)) \leq \left[\frac{a_n}{\mathcal{N}(n, l)} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(n, l)} S_{lj}^2(\xi) \right] \left[\frac{a_n}{\mathcal{N}(n, l)} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(n, l)} S_{lj}^2(\eta) \right] = P_l^2(1) = 1$$

olduğu görülür. (2.73) eşitliğini ispatlamak için önce (2.69) daki eşitliğin her iki tarafının karesi alınır. Daha sonra her iki tarafın ξ değişkenine göre integrali alınır

$$\begin{aligned} \int_{|\xi|} P_l^2((\xi, \eta)) da_n &= \frac{a_n^2}{\mathcal{N}^2(n, l)} \int_{|\xi|=1} \sum_{j,k=1}^{\mathcal{N}(n, l)} S_{lj}(\xi) S_{lj}(\eta) S_{lk}(\xi) S_{lk}(\eta) da_n \\ &= \frac{a_n^2}{\mathcal{N}^2(n, l)} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}(n, l)} S_{lj}^2(\eta) \\ &= \frac{a_n}{\mathcal{N}(n, l)} P_l(1) \\ &= \frac{a_n}{\mathcal{N}(n, l)} \end{aligned}$$

elde edilir. Geriye sadece (2.71) daki eşitsizliği göstermek kalır. Bunun için önce (2.70) eşitliğine Cauchy-Schwarz uygulanır ve sonra (2.73) eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned} |S_l(\xi)|^2 &\leq \frac{\mathcal{N}^2(n, l)}{a_n^2} \int_{|\eta|=1} S_l^2(\eta) da_n \int_{|\eta|=1} P_l^2((\xi, \eta)) da_n \\ &= \frac{\mathcal{N}(n, l)}{a_n} \int_{|\eta|=1} S_l^2(\eta) da_n \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak da eşitsizliğin her iki tarafının karekökü alınırsa,

$$|S_l(\xi)| \leq \left[\frac{\mathcal{N}(n, l)}{a_n} \int_{|\eta|=1} S_l^2(\eta) da_n \right]^{1/2}$$

olur. ■

(2.73) eşitliğindeki integral, integrali alınması istenen fonksiyonun simetrisi kullanılarak tek boyutlu integrale indirgenebilir. Bu durumda,

$$\int_{|\eta|=1} P_l^2((\xi, \eta)) da_n = a_{n-1} \int_{-1}^1 P_l^2(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt$$

olur. Aynı zamanda bu eşitlik,

$$\int_{-1}^1 P_l^2(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt = \frac{a_n}{a_{n-1} \mathcal{N}(n, l)}$$

olarak da yazılır.

Teorem 2.5.15 (*Hecke-Funk Teoremi*) $f(t)$, $[-1, 1]$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere l . dereceden küresel harmonikler,

$$\int_{|\eta|=1} f((\xi, \eta)) S_l(\eta) da_n = a_{n-1} S_l(\xi) \int_{-1}^1 f(t) P_l(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt \quad (2.74)$$

şeklinde ifade edilir (*Hochstadt 1971*).

İspat. İlk olarak $S_l(\eta) = P_l((\eta, \zeta_k))$ olarak kabul edelim. Burada ζ_k , sabit birim vektördür. Bu fonksiyon için

$$F(\xi, \zeta_k) = \int_{|\eta|=1} f((\xi, \eta)) P_l((\eta, \zeta_k)) da_n \quad (2.75)$$

yazılır ve (2.65) eşitliğinden yararlanılarak

$$F(A\xi, A\zeta_k) = F(\xi, \zeta_k)$$

olduğu görülür. Daha sonra $\xi = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ve $\zeta_k = (\tau, 1-\tau^2, 0, \dots, 0)$ olarak seçilir ve (2.74), l . dereceden τ ya bağlı bir polinom olmak üzere

$$F(\xi, \zeta_k) = c P_l(\tau)$$

biçiminde tanımlanır. Burada c , sabit sayıdır. $\tau = 1$ için

$$\int_{|\eta|=1} f((\xi, \eta)) P_l((\eta, \xi)) da_n = c = a_{n-1} \int_{-1}^1 f(t) P_l(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt$$

eşitliğine ulaşılır, burada τ , $\boldsymbol{\eta}$ nin birinci bileşenidir. Böylece

$$\int_{|\boldsymbol{\eta}|=1} f((\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta})) P_l((\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}_k)) da_n = a_{n-1} P_l((\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}_k)) \int_{-1}^1 f(t) P_l(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} dt$$

elde edilir. Sonuç olarak, (2.74) ün $S_l(\boldsymbol{\eta}) = P_l((\boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\zeta}_k))$ için özel bir durum olduğu görülür.

Ayrıca her küresel harmonik, (2.74) gibi özel durumların lineer kombinasyonu şeklinde ifade edilir. ■





BÖLÜM 3

RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN SERİ YAKLAŞIMI

Bu bölümde, öncelikle Gegenbauer dönüşüm çifti tanımlanmış daha sonra Radon dönüşümü ve Gegenbauer dönüşüm çifti arasındaki ilişki kullanılarak Radon dönüşümünün tersi için bazı seri yöntemleri (Deans 1983) çalışmasından yararlanılarak ifade edilmiştir. Bilinmeyen bir fonksiyona bu fonksiyonun dairesel veya daha yüksek boyutlardaki küresel harmonikler kullanılarak yapılan seri açılımları yardımıyla yaklaşımlar araştırılacaktır.

3.1 RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN GEGENBAUER DÖNÜŞÜMÜ İLE İLİŞKİSİ

$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere, n -değişkenli bir $f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonunun Radon dönüşümü, bu fonksiyonun $\mathbb{R}^n$ deki tüm hiper düzlemler üzerinde alınan integralleri ile tanımlanır.

Tanım 3.1.1 $p \in \mathbb{R}$ ve $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ birim vektör olmak üzere, $\mathbb{R}^n$ de

$$p = \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x} = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 \dots + \xi_n x_n$$

hiper düzlemleri üzerinde bir f fonksiyonunun integralleri, yani f fonksiyonunun Radon dönüşümü, δ fonksiyonu kullanılarak

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \Re \{f(\mathbf{x})\} = \int f(\mathbf{x}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

şeklinde tanımlanır, burada $d\mathbf{x} = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ hacim elemanıdır.

Bu bölümde, radyal ve açısal kısmın çarpımı olarak

$$f(\mathbf{x}) = g_l(r) S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilen $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun Radon dönüşümünün bulunması problemi ele alınacaktır. Burada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $r = |\mathbf{x}| \geq 0$, $\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ ve $S_{lm}(\boldsymbol{\omega})$, $\mathbb{R}^n$ de tanımlı l . dereceden

reel küresel harmonikleri (yüzey harmonikleri) ifade etmektedir (Erdélyi et al. 1953b, Hochstadt 1971). Küresel harmonikler, $S_{lm}(\omega)$, ve özellikleri Bölüm 2’de verilmiştir.

$S_{lm}(\omega)$, elemanları $\mathcal{N} = \mathcal{N}(n, l)$ olan ortonormal bir kümeden gelmektedir. Elemanları,

$$\{S_{l1}, S_{l2}, \dots, S_{lN}\}$$

olan bir küme, ortonormallik koşulunu sağladığından

$$\int_{|\omega|=1} S_{lm}(\omega) S_{l'm'}(\omega) d\omega = \delta_{ll'} \delta_{mm'} \quad (3.2)$$

şeklinde yazılır, burada δ_{ij} Kronecker deltayı, $d\omega$ hiperküresel koordinatlardaki birim küre üzerindeki yüzey elemanını ve $\int_{|\omega|=1}$ ise bu yüzey üzerindeki integrali gösterir. Daha açık ifade etmek gerekirse, $r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \phi$ hiper küresel polar koordinatlar,

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta_1, \\ x_2 &= r \sin \theta_1 \cos \theta_2, \\ x_3 &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3, \\ &\vdots \\ x_{n-2} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-3} \cos \theta_{n-2}, \\ x_{n-1} &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \cos \phi, \\ x_n &= r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \dots \sin \theta_{n-2} \sin \phi \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. $S(\omega)$ yerine $S(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \phi)$ yazılırsa, $r \geq 0$, $0 \leq \theta_j \leq \pi$, $j = 1, 2, \dots, n-2$ ve $0 \leq \phi \leq 2\pi$ olmak üzere birim küre üzerinde n boyutlu yüzey elemanı,

$$d\omega = (\sin \theta_1)^{n-2} (\sin \theta_2)^{n-3} \dots (\sin \theta_{n-2}) d\theta_1 \dots d\theta_{n-2} d\phi$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca $S_{lm}(\omega)$ simetri koşulunu sağladığından

$$S_{lm}(-\omega) = (-1)^l S_{lm}(\omega) \quad (3.3)$$

şeklinde yazılır.

$\mathcal{N} = \mathcal{N}(n, l)$ tam sayısı, hem n uzay boyutuna hem de küresel harmoniklerin derecesi olan l ye bağlı olup bu sayı, her bir küresel harmoniğin $n-1$ tane $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2}, \phi$ açısal

koordinatlarına bağılı olduğu l . dereceden lineer bağımsız küresel harmoniklerin sayısını ifade eder. Bu $\mathcal{N}$ değeri,

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}(n, l) = \frac{2l + n - 2}{l} \binom{l + n - 3}{l - 1}$$

şeklinde tanımlanır (Hochstadt 1971). Burada kullanılan binom katsayısı,

$$\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!}$$

formülü ile hesaplanır.

(3.1) eşitliğinin her iki tarafına Radon dönüşümü uygulandığında,

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) &= \Re \{g_l(r) S_{lm}(\boldsymbol{\omega})\} \\ &= \int g_l(r) S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \delta(p - \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir. Genelliği kaybetmeden, $\boldsymbol{\xi}$ bir birim vektör olarak kabul edilir ve $p \geq 0$ dır.

$$\check{f}(p, a\boldsymbol{\xi}) = |a|^{-1} \check{f}\left(\frac{p}{a}, \boldsymbol{\xi}\right)$$

eşitliğinde $a = -1$ olarak alınırsa

$$\check{f}(p, -\boldsymbol{\xi}) = \check{f}(-p, \boldsymbol{\xi}) \quad (3.5)$$

elde edilir. $p < 0$ durumunda ise Radon dönüşümünün simetri koşulundan yararlanılarak elde edilen (3.5) kullanılır ve (3.4) eşitliğindeki integral, küresel koordinatlarda yazılırsa

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_0^\infty r^{n-1} g_l(r) \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \delta(p - r\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} dr \quad (3.6)$$

elde edilir, burada $\mathbf{x} = r\boldsymbol{\omega}$ dır. (3.6) daki δ , Dirac delta, fonksiyonu,

$$\delta(p - r\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{r} \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) \quad (3.7)$$

$$\delta(p - r\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{\delta\left(\frac{p}{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}} - r\right)}{|\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}|} \quad (3.8)$$

şeklinde yazılabilir ve bu eşitliklerden (3.7), (3.6) da yerine konulursa

$$\begin{aligned} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) &= \int_0^\infty \frac{1}{r} r^{n-1} g_l(r) \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega} dr \\ &= \int_0^\infty r^{n-2} g_l(r) \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega} dr \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. $0 \leq r < |p|$ için bu integral,

$$\int_0^{|p|} \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) dr = 0$$

olur, burada $|\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}| \leq 1$ ve $\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega} > 0$ dir. Sonuç olarak $r \geq |p|$ olmak üzere, yani $p/r, -1$ ile 1 arasında değer aldığından

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_{|p|}^{\infty} r^{n-2} g_l(r) \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega} dr \quad (3.10)$$

olur.

Birim küre üzerinde integral almak için ilk olarak, yüzey integrali

$$S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) I_l(p/r) = \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega} \quad (3.11)$$

şeklinde yazılır, burada $I_l(p/r)$ bilinmediğinden $S_{lm}(\boldsymbol{\xi})$ ancak simetri koşulundan yararlanılarak elde edilir. (3.11) eşitliğinin her iki tarafı $S_{lm}(\boldsymbol{\xi})$ ile çarpıldıktan sonra eşitliğin her iki tarafının $\sum_{m=1}^{\mathcal{N}}$ toplamı alınır ve son olarak, bu eşitlikte toplam teoremi (Erdelyi 1953b, Hochstadt 1971) kullanılırsa

$$C_l^v(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) = \frac{a_n}{\mathcal{N}} C_l^v(1) \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \quad (3.12)$$

elde edilir. Burada $C_l^v(t)$, Gegenbauer polinomudur, $v = (n-2)/2$ ve a_n , n boyutlu bir kürenin yüzey alanını ifade eder. Böylelikle (3.11) den

$$\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) I_l\left(\frac{p}{r}\right) = \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} \sum_{m=1}^{\mathcal{N}} S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega} \quad (3.13)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı (3.12) eşitliğinde $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\xi}$ yazılarak hesaplanabilir ve sağ tarafı (3.12) kullanılarak

$$\frac{\mathcal{N}}{a_n} I_l\left(\frac{p}{r}\right) = \frac{\mathcal{N}}{a_n C_l^v(1)} \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} C_l^v(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega}$$

veya

$$I_l\left(\frac{p}{r}\right) = \frac{1}{C_l^v(1)} \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} C_l^v(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right) d\boldsymbol{\omega}$$

elde edilir. Sağ taraftaki integralin hesaplanabilmesi için

$$F(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) = C_l^v(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) \delta\left(\frac{p}{r} - \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}\right)$$

$$\int_{|\omega|=1} F(\xi \cdot \omega) d\omega = a_{n-1} \int_{-1}^{+1} (1-t^2)^{(n-3)/2} F(t) dt \quad (3.14)$$

özdeşliği kullanılır (Courant and Hilbert 1962, John 1955), burada $\xi \cdot \omega = t$ dir. Böylece

$$I_l\left(\frac{p}{r}\right) = \frac{a_{n-1}}{C_l^v(1)} \int_{-1}^{+1} C_l^v(t) (1-t^2)^{(n-3)/2} \delta\left(\frac{p}{r} - t\right) dt$$

olur. Sonuç olarak, p/r , -1 ile 1 arasında değer aldığından

$$I_l\left(\frac{p}{r}\right) = \frac{a_{n-1}}{C_l^v(1)} C_l^v\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{v-1/2} \quad (3.15)$$

elde edilir, burada $v = (n-2)/2$ dir. Daha sonra (3.15), (3.11) de yerine yazılırsa (3.10) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \int_{|\omega|=1} S_{lm}(\omega) \delta\left(\frac{p}{r} - \xi \cdot \omega\right) d\omega &= \frac{a_{n-1} S_{lm}(\xi)}{C_l^v(1)} C_l^v\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{v-1/2} \\ \check{f}(p, \xi) &= \frac{a_{n-1} S_{lm}(\xi)}{C_l^v(1)} \int_{|p|}^{\infty} r^{2v} g_l(r) C_l^v\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{v-1/2} dr \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. Böylece (3.4) te tanımlanan $f(x)$ fonksiyonunun Radon dönüşümü,

$$\check{f}(p, \xi) = \Re \{g_l(r) S_{lm}(\omega)\} = \check{g}_l(p) S_{lm}(\xi) \quad (3.17)$$

olarak yazılır ve bu eşitlikteki $\check{g}_l(p)$, Gegenbauer dönüşümünden yararlanılarak

$$\check{g}_l(p) = \frac{a_{n-1}}{C_l^v(1)} \int_{|p|}^{\infty} r^{2v} g_l(r) C_l^v\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{v-1/2} dr \quad (3.18)$$

ile verilir.

(3.3) teki simetri koşulu, $\check{f}(-p, \xi) = \check{f}(p, \xi)$ özelliği ile birlikte $\check{g}_l(-p)$ fonksiyonunun

$$\check{g}_l(-p) = (-1)^l \check{g}_l(p) \quad (3.19)$$

şeklinde tanımlanabilmesini sağlayan başka bir simetri sonucunu ortaya çıkarır. Bu sonuç, $\check{g}_l(-p)$ değerlerinin hesaplanmasında kullanılır. $\check{g}_l(p)$ negatif değişkenler için tanımlanmasına rağmen sadece $r \geq 0$ durumu dikkate alındığından dolayı $g_l(r)$ henüz tanımlanmamıştır. Bazı durumlarda, $g_l(r)$ yerine $u(r) g_l(r)$ yazmak;

$$g_l(r) \longrightarrow u(r) g_l(r) \quad (3.20)$$

daha kullanışlı ve tutarlı olacaktır. Burada u ,

$$u(r) = \begin{cases} 0 & , \quad r < 0 \\ 1 & , \quad r \geq 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

şeklinde tanımlı birim adım fonksiyonudur.

Uyarı 1 a_n için açık bir ifade elde etmenin kolay bir yolu, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^1$ için şu adımları izlemektir:

$$\begin{aligned} \int e^{-\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x} &= \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} d\boldsymbol{\omega} dr \\ \left(\int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} dt \right)^n &= a_n \int_0^\infty r^{n-1} e^{-r^2} dr \\ (\sqrt{\pi})^n &= \frac{1}{2} a_n \Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Böylece

$$a_n = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)} \quad (3.22)$$

olur. Burada gama fonksiyonu,

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt$$

şeklinde tanımlanır. (3.22) eşitliğinden yararlanılarak $n = 1, 2, \dots, 6$ için a_n değerleri, $a_1 = 2$, $a_2 = 2\pi$, $a_3 = 4\pi$, $a_4 = 2\pi^2$, $a_5 = 8\pi^2/3$, $a_6 = \pi^3$ olur (Schwartz 1966).

Uyarı 2 (3.18) eşitliğindeki katsayı (3.20),

$$C_l^v(1) = C_l^{(n-2)/2}(1) = \binom{l+n-3}{l}$$

ve gama fonksiyonu için var olan bazı özdeşlikler kullanılarak

$$\frac{a_{n-1}}{C_l^v(1)} = \frac{(4\pi)^v l! \Gamma(v)}{(l+2v-1)!} \quad (3.23)$$

şeklinde hesaplanabilir (Hochsdath 1971).

Hecke-Funk teoremi uygulandığında,

$$\int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} F(\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}) S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega} = \frac{a_{n-1} S_{lm}(\boldsymbol{\xi})}{C_l^v(1)} \int_{-1}^{+1} F(t) C_l^v(t) (1-t^2)^{v-1/2} dt \quad (3.24)$$

elde edilir (Erdélyi et al. 1953b, Hochsdath 1971).

Diğer yöntem ise (3.16) temel sonucu (3.24) kullanılarak ve farklı bir integral sıralaması ile de elde edilir. (3.6) daki delta fonksiyonu çarpanlara ayrılıp önce r değişkenine göre integral alınırsa

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} S_{lm}(\boldsymbol{\omega}) \int_0^\infty r^{n-1} u(r) g_l(r) \frac{\delta\left(\frac{p}{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}} - r\right)}{|\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}|} dr d\boldsymbol{\omega} \quad (3.25)$$

$$= \int_{|\boldsymbol{\omega}|=1} \left(\frac{p}{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}}\right)^{n-1} u\left(\frac{p}{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}}\right) g_l\left(\frac{p}{\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}}\right) \frac{S_{lm}(\boldsymbol{\omega})}{|\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\omega}|} d\boldsymbol{\omega} \quad (3.26)$$

elde edilir. Bu noktada, (3.24) eşitliğinden yararlanmak uygun olacaktır. Ancak dikkate alınması gereken $p > 0$ veya $p < 0$ olma durumlarıdır. Eğer (3.26) da $p > 0$ olursa, (3.24) eşitliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned}\check{f}(p, \xi) &= \kappa_l^v S_{lm}(\xi) \int_{-1}^{+1} \left(\frac{p}{t}\right)^{n-1} u\left(\frac{p}{t}\right) g_l\left(\frac{p}{t}\right) C_l^v(t) (1-t^2)^{v-1/2} \frac{dt}{|t|} \\ &= \kappa_l^v S_{lm}(\xi) \int_0^1 \left(\frac{p}{t}\right)^{n-1} g_l\left(\frac{p}{t}\right) C_l^v(t) (1-t^2)^{v-1/2} \frac{dt}{t}\end{aligned}$$

elde edilir, burada kolaylık olması amacıyla $\kappa_l^v = \frac{a_{n-1}}{C_l^v(1)}$ gösterimi kullanılmıştır. Daha sonra $t = p/r$ değişken değişimi yapılırsa,

$$\check{f}(p, \xi) = \kappa_l^v S_{lm}(\xi) \int_p^\infty r^{n-2} g_l(r) C_l^v\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{v-1/2} dr \quad (3.27)$$

sonucuna ulaşılır. Eğer (3.26) da $p < 0$ olursa, $p = -|p|$ yazılır ve (3.24),

$$\begin{aligned}\check{f}(p, \xi) &= \kappa_l^v S_{lm}(\xi) \int_{-1}^{+1} \left(\frac{-|p|}{t}\right)^{n-1} u\left(\frac{-|p|}{t}\right) g_l\left(\frac{-|p|}{t}\right) C_l^v(t) (1-t^2)^{v-1/2} \frac{dt}{|t|} \\ &= \kappa_l^v S_{lm}(\xi) \int_{-1}^0 \left(\frac{-|p|}{t}\right)^{n-1} g_l\left(\frac{-|p|}{t}\right) C_l^v(t) (1-t^2)^{v-1/2} \frac{dt}{|t|}\end{aligned}$$

olur. Bu durumda t yerine $-t$ yazılarak değişken değişimi yapılırsa,

$$\check{f}(p, \xi) = \kappa_l^v S_{lm}(\xi) \int_0^1 \left(\frac{|p|}{t}\right)^{n-1} g_l\left(\frac{|p|}{t}\right) C_l^v(-t) (1-t^2)^{v-1/2} \frac{dt}{t}$$

elde edilir. Daha sonra $p < 0$ için $t = \frac{|p|}{r}$ yazılır ve $C_l^v(-t) = (-1)^l C_l^v(t)$ bağıntısı kullanılırsa,

$$\check{f}(p, \xi) = (-1)^l \kappa_l^v S_{lm}(\xi) \int_{|p|}^\infty r^{n-2} g_l(r) C_l^v\left(\frac{|p|}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{v-1/2} dr$$

sonucuna ulaşılır. (3.27) deki integral alt sınırı $|p|$ ile değiştirildiğinde, bu eşitlik hem negatif hem de pozitif p için kullanılabilir ve beklendiği gibi (3.16) daki eşitlik yeniden elde edilmiştir.

3.1.1 Gegenbauer Dönüşüm Çifti

$f(\mathbf{x})$ fonksiyonu,

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{l,m} A_{lm} g_l(r) S_{lm}(\omega) \quad (3.28)$$

şeklinde yazılsın, burada A_{lm} katsayıları, sabit sayılardır. $\sum_{l,m}$ toplamı, $\sum_{m=1}^{\mathcal{N}} \sum_{l=0}^{\infty}$ toplamını göstermektedir. Uygulamalarda bu toplam sonludur ve $f(\mathbf{x})$ fonksiyonuna yapılan bir yaklaşımı ifade eder.

Bu durumda $f(\mathbf{x})$ fonksiyonunun Radon dönüşümü,

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{l,m} A_{lm} \check{g}_l(p) S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) \quad (3.29)$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlikte $\check{f}(p, \boldsymbol{\xi})$ nin bilindiği kabul edilir. A_{lm} katsayıları, açısıl integrasyon yapılarak ve $S_{lm}(\boldsymbol{\xi})$ nin ortogonallığından yararlanılarak

$$\begin{aligned} \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) S_{l'm'}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} &= \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \sum_{l,m} A_{lm} \check{g}_l(p) S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) S_{l'm'}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \\ &= \sum_{l,m} A_{lm} \check{g}_l(p) \delta_{ll'} \delta_{mm'} \\ &= A_{l'm'} \check{g}_{l'}(p) \\ A_{lm} \check{g}_l(p) &= \int_{|\boldsymbol{\xi}|=1} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) S_{lm}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \quad (3.30)$$

şeklinde belirlenebilir.

(3.28) deki $g_l(r)$ radyal fonksiyonlar ve (3.30) daki $\check{g}_l(p)$ fonksiyonları, Gegenbauer dönüşüm çiftidir. Daha açık olarak bu dönüşüm çifti

$$\check{g}_l(p) = \frac{(4\pi)^v \Gamma(l+1) \Gamma(v)}{\Gamma(l+2v)} \int_p^\infty r^{2v} g_l(r) C_l^v\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{v-1/2} dr \quad (3.31)$$

$$g_l(r) = \frac{(-1)^{2v+1} \Gamma(l+1) \Gamma(v)}{2\pi^{v+1} \Gamma(l+2v) r} \int_r^\infty \check{g}_l^{(2v+1)}(p) C_l^v\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{v-1/2} dp \quad (3.32)$$

şeklinde yazılır, burada $r \geq 0$, $p \geq 0$ ve $\check{g}_l^{(2v+1)} = (d/dp)^{2v+1} \check{g}_l(p)$ dir.

$0 < s \leq t$ için (3.32) nin (3.31) eşitliğini sağladığı,

$$\int_s^p x^{2v-1} C_l^v\left(\frac{s}{x}\right) C_l^v\left(\frac{p}{x}\right) \left[1 - \frac{s^2}{x^2}\right]^{v-1/2} \left[\frac{p^2}{x^2} - 1\right]^{v-1/2} dx \quad (3.33)$$

$$= \frac{\pi}{2^{2v-1}} \left[\frac{\Gamma(l+2v)}{\Gamma(l+1) \Gamma(v)} \right]^2 \frac{(p-s)^{2v}}{\Gamma(2v+1)} \quad (3.34)$$

formülü kullanılarak doğrudan gösterilebilir (Deans 1978, Montaldi 1979).

İlk önce (3.30) dan $A_{lm} \check{g}_l(p)$ belirlenir ve (3.34) kullanılarak $A_{lm} g_l(r)$ elde edilir. Daha sonra (3.28) den $f(\mathbf{x})$ için bir yaklaşım elde edilir. Ancak bu prosedürün sayısal uygulamalarında $\frac{p}{r}$ oranının bazı değerleri için ortaya çıkabilen büyük zorlukları vardır.

3.2 DAİRESEL HARMONİK SERİ AÇILIMI

İki boyutlu uzayda, l . dereceden lineer bağımsız küresel harmoniklerin sayısı, Teorem 2.5.3 ten yararlanılarak $\mathcal{N}(2, l) = 2$ olarak bulunur. $n = 2$ için küresel harmonikler, açısıl koordinata sahiptir ve bu açısıl koordinat $\omega = (\cos \theta, \sin \theta)$ biçiminde tanımlandığında, özel olarak $m = 1$ ve $m = 2$ için S_{lm} dairesel fonksiyonları

$$S_{l1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos l\theta \quad , \quad S_{l2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin l\theta \quad (3.35)$$

biçiminde yazılır. İki boyutlu uzayda S_{lm} dairesel fonksiyonlarının,

$$\sqrt{\pi} (S_{l1} + iS_{l2}) = e^{il\theta} \quad \text{ve} \quad \sqrt{\pi} (S_{l1} - iS_{l2}) = e^{-il\theta} \quad (3.36)$$

gibi bilinen bazı kombinasyonlarından faydalanmak daha uygun olacaktır. Ayrıca hem $f(r, \theta)$ fonksiyonu hem de $\check{f}(p, \phi)$ dönüşümü 2π periyodu ile periyodiktir. Sonuç olarak, $f(r, \theta)$ fonksiyonu

$$f(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(r) e^{il\theta} \quad (3.37)$$

formunda yazılır. Dikkat edilirse $e^{il\theta}$ terimini vermek için S_{lm} nin uygun lineer kombinasyonu (3.28) eşitliğinin aynı formda olduğu görülür. (3.28) deki A_{lm} katsayıları, (3.37) deki $g_l(r)$ içinde yer almaktadır. $f(r, \theta)$ fonksiyonun Radon dönüşümü,

$$\check{f}(p, \phi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{g}_l(p) e^{il\phi} \quad (3.38)$$

olarak yazılır. $\check{g}_l(p)$ fonksiyonunu hesaplamak için

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \check{f}(p, \phi) e^{-il'\phi} d\phi &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{g}_l(p) \int_0^{2\pi} e^{il\phi} e^{-il'\phi} d\phi \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \check{g}_l(p) 2\pi \delta_{ll'} = 2\pi \check{g}_{l'}(p) \end{aligned} \quad (3.39)$$

olarak yazılır ve

$$\delta_{ll'} = \begin{cases} 1 & , \quad l = l' \\ 0 & , \quad l \neq l' \end{cases}$$

olduğu için

$$\int_0^{2\pi} \check{f}(p, \phi) e^{-il'\phi} d\phi = \begin{cases} 2\pi \check{g}_{l'}(p) & , \quad l = l' \\ 0 & , \quad l \neq l' \end{cases}$$

elde edilir. Buna göre $l = l'$ olduğundan

$$\check{g}_l(p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{f}(p, \phi) e^{-il\phi} d\phi \quad (3.40)$$

şeklinde yazılır. $\check{g}_l(p)$ ve $g_l(r)$ arasındaki ilişkiyi veren denklemi bulmak için (3.32) de $n = 2$ yazılır. $g_l(r)$ nin hesaplanabilmesi için yöntem basittir. Önce (3.32), $\frac{v}{v}$ ile çarpılır ve $v \rightarrow 0$ için limiti alınır. Daha sonra

$$\lim_{v \rightarrow 0} C_l^v(z) = \frac{2}{l} T_l(z)$$

olduğundan yararlanılarak

$$g_l(r) = \frac{-1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}'_l(p) T_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-1/2} dp \quad (3.41)$$

elde edilir. Sonuç, bir Tchebycheff dönüşümüdür, burada $\check{g}'_l(p) = \frac{d}{dp} \check{g}_l(p)$ ve $r > 0$ dır. $g_l(r)$ ve $\check{g}_l(p)$ arasındaki ilişkiyi veren denklemin tersi, aynı yöntem (3.31) eşitliğine uygulanarak

$$\check{g}_l(p) = 2 \int_p^\infty g_l(r) T_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{-1/2} dr \quad (3.42)$$

elde edilir, burada $p \geq 0$ dır. (3.41) de $r = 0$ olduğuna dikkat edilmelidir. Bu durumda, $f(0, \theta)$ için sadece (3.37) eşitliğinin $l = 0$ olma durumu gelmektedir. İlk önce $r = 0$, (3.38) eşitliğinde

$$f(r, \theta) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-\infty}^\infty \frac{\check{f}_p(p, \xi)}{p - r \cos(\phi - \theta)} dp d\phi$$

yerine yazılır. $l = 2, 4, 6, \dots$ için ϕ değişkenine göre integrasyon ve $l = 1, 3, 5, \dots$ için p değişkenine göre integrasyon yapıldıktan sonra (3.19) daki simetri koşulu kullanılırsa, $l = 0$ durumu gösterilmiş olur.

3.2.1 Abel Dönüşüm Çifti

Abel dönüşüm çiftini elde etmek için (3.41) ve (3.42) de $l = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} g_0(r) &= \frac{-1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}'_0(p) T_0\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-1/2} dp \\ &= \frac{-1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}'_0(p) r (p^2 - r^2)^{-1/2} dp \\ &= \frac{-1}{\pi} \int_r^\infty \check{g}'_0(p) (p^2 - r^2)^{-1/2} dp \end{aligned} \quad (3.43)$$

ve

$$\begin{aligned}\check{g}_0(p) &= 2 \int_p^\infty g_0(r) T_0\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{-1/2} dr \\ &= 2 \int_p^\infty r g_0(r) (r^2 - p^2)^{-1/2} dr\end{aligned}\quad (3.44)$$

elde edilir, burada $T_0\left(\frac{p}{r}\right) = 1$ dir. Ayrıca $l = 0$, dairesel simetrik olma durumudur. (3.43) ve (3.44) eşitliklerinde $r = 0$ için $f(0, \theta)$ değeri, sıfırdan farklıdır. Örneğin; $\check{g}_0(p) = \sqrt{\pi}e^{-p^2}$ ise $g_0(0) = 1$ ve $f(0, \theta) = 1$ olur (Bracewell 1978).

3.2.2 Radon Formülü

$g_l(r)$ ile $\check{g}_l(p)$ arasındaki ilişkiyi göstermenin bir başka yolu, Radon dönüşümünün tersini alma formülünü doğrudan uygulamaktır. Önce $f(r, \theta)$ fonksiyonu,

$$f(r, \theta) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \frac{\partial \check{f} / \partial p}{p - r \cos(\phi - \theta)} dp d\phi, \quad 0 < r \leq 1 \quad (3.45)$$

biçiminde yazılır. Burada, yarıçapı 1 olan diskin dışında $f = 0$ olduğu varsayılır. Ayrıca birim disk olması şart değildir. Çünkü istenilen şekilde bölge büyütülebilmekte veya küçültülebilmektedir. Birim diski kullanmak ve $f \in \mathcal{D}$ olduğunu varsaymak işlemleri daha kolaylaştıracaktır.

(3.45) te $\check{f}(p, \phi)$ yerine $\check{g}_l(p) e^{il\phi}$ yazılırsa

$$f(r, \theta) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_0^\pi \int_{-1}^1 \int_{-r}^r \frac{1}{p - t} \frac{\partial \check{g}_l(p)}{\partial p} e^{il\phi} [t - r \cos(\phi - \theta)] dt dp d\phi \quad (3.46)$$

elde edilir, burada $|t/r| \leq 1$ dir. Ayrıca $\check{g}_l(-p) = (-1)^l \check{g}_l(p)$ olduğu unutulmamalıdır.

$$J = \int_0^\pi e^{il\phi} \delta[t - r \cos(\phi - \theta)] d\phi \quad (3.47)$$

olsun. $\cos(\phi - \theta) = x$ değişken değişimi yapılsa

$$J = \int_{-\cos\theta}^{\cos\theta} \frac{\exp[il\theta + il \cos^{-1}(x)] \delta(t - rx)}{(1 - x^2)^{1/2}} dx \quad (3.48)$$

olur. $0 < r \leq 1$ ve $|t/r| \leq 1$ olmak üzere $\delta(t - rx)$ yerine $(1/r) \delta(t/r - x)$ yazılırsa

$$\begin{aligned}J &= \int_{-\cos\theta}^{\cos\theta} \frac{\exp[il\theta + il \cos^{-1}(x)] \frac{1}{r} \delta(t/r - x)}{(1 - x^2)^{1/2}} dx \\ &= \frac{1}{r} \int_{-\cos\theta}^{\cos\theta} \frac{\exp[il\theta + il \cos^{-1}(x)] \delta(t/r - x)}{(1 - x^2)^{1/2}} dx\end{aligned}$$

elde edilir. δ fonksiyonu üzerinde integral alındığında

$$J = \frac{1}{r} \frac{\exp [il\theta + il \cos^{-1} (t/r)]}{(1 - t^2/r^2)^{1/2}} \quad (3.49)$$

olur ve buradaki üstel ifade

$$e^{il\theta} \left\{ \cos \left[l \cos^{-1} \left(\frac{t}{r} \right) \right] + i \sin \left[l \cos^{-1} \left(\frac{t}{r} \right) \right] \right\}$$

şeklinde yazılır. Bu eşitliği, (3.49) eşitliğinde yerine koyulursa

$$J = \frac{1}{r} \frac{e^{il\theta} \left\{ \cos \left[l \cos^{-1} \left(\frac{t}{r} \right) \right] + i \sin \left[l \cos^{-1} \left(\frac{t}{r} \right) \right] \right\}}{(1 - t^2/r^2)^{1/2}}$$

$$J = e^{il\theta} \left\{ \frac{T_l \left(\frac{t}{r} \right)}{(r^2 - t^2)^{1/2}} + \frac{i}{r} U_{l-1} \left(\frac{t}{r} \right) \right\} \quad (3.50)$$

elde edilir, burada $T_l \left(\frac{t}{r} \right) = \cos \left[l \cos^{-1} \left(\frac{t}{r} \right) \right]$ ve $U_{l-1} \left(\frac{t}{r} \right) = \frac{\sin \left[l \cos^{-1} \left(\frac{t}{r} \right) \right]}{(1 - t^2/r^2)^{1/2}}$ dir. ϕ değişkenine göre integral almır ve (3.46) eşitliğinde değişkenler farklı sırayla yazıldığında

$$f(r, \theta) = g_l(r) e^{il\theta} = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 \check{g}_l'(p) \int_{-r}^r \frac{J}{p - t} dt dp \quad (3.51)$$

elde edilir. (3.51) de $t = rx$, $-1 \leq x \leq 1$ değişken değişimi yapıldıktan sonra J , (3.50) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g_l(r) e^{il\theta} &= \frac{-1}{2\pi^2} \int_{-1}^1 \check{g}_l'(p) \int_{-1}^1 \frac{e^{il\theta}}{(x - \frac{p}{r})} \left\{ \frac{T_l(x)}{r(1 - x^2)^{1/2}} + \frac{i}{r} U_{l-1}(x) \right\} dx dp \\ &= \frac{e^{il\theta}}{2\pi^2 r} \int_{-1}^1 \check{g}_l'(p) \int_{-1}^1 \frac{1}{(x - \frac{p}{r})} \left\{ \frac{T_l(x)}{(1 - x^2)^{1/2}} + i U_{l-1}(x) \right\} dx dp \end{aligned} \quad (3.52)$$

olarak bulunur. $g_l(r)$ reel olduğu için, $U_{l-1}(x)$ in sıfır olduğunu göstermek kolaydır.

$$K = \int_{-1}^1 \check{g}_l'(p) \int_{-1}^1 \frac{U_{l-1}(x)}{(x - \frac{p}{r})} dx dp \quad (3.53)$$

olsun. (3.53) te x yerine $-x$ ve p yerine $-p$ yazılırsa

$$\begin{aligned} K &= \int_{-1}^1 [\check{g}_l(-p)]' \int_{-1}^1 \frac{U_{l-1}(-x)}{\left(-x - \frac{(-p)}{r}\right)} dx dp \\ &= \int_{-1}^1 -[\check{g}_l(-p)]' \int_{-1}^1 \frac{U_{l-1}(-x)}{\left(-x - \frac{(-p)}{r}\right)} dx dp \\ &= \int_{-1}^1 -[(-1)^l \check{g}_l(p)]' \int_{-1}^1 \frac{(-1)^{l-1} U_{l-1}(x)}{-\left(x - \frac{p}{r}\right)} dx dp \\ &= -\int_{-1}^1 \check{g}_l'(p) \int_{-1}^1 \frac{U_{l-1}(x)}{\left(x - \frac{p}{r}\right)} dx dp \\ &= -K \end{aligned} \quad (3.54)$$

elde edilir, burada $U_{l-1}(-x) = (-1)^{l-1} U_{l-1}(x)$ ve $[\check{g}_l(-p)]' = - \left[(-1)^l \check{g}_l(p) \right]'$ dir. Sonra eşitliğin her iki tarafı $e^{il\theta}$ ortak çarpanına bölünür ve $U_{l-1}(x)$ terimi yok edilirse

$$g_l(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_{-1}^1 \check{g}_l'(p) \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(x - \frac{p}{r}\right)} \frac{T_l(x)}{(1-x^2)^{1/2}} dx dp \quad (3.55)$$

elde edilir. Daha sonra x değişkenine göre integral alınan kısım

$$I_l\left(\frac{p}{r}\right) = \int_{-1}^1 \left(x - \frac{p}{r}\right)^{-1} (1-x^2)^{-1/2} T_l(x) dx \quad (3.56)$$

biçiminde tanımlanırsa

$$g_l(r) = \frac{-1}{2\pi^2 r} \int_{-1}^1 I\left(\frac{p}{r}\right) \check{g}_l'(p) dp \quad (3.57)$$

elde edilir. Ayrıca (3.57) eşitliğini basitleştirmek mümkündür. Ancak $I_l(p/r)$ değeri, $|p/r| < 1$ veya $|p/r| > 1$ olmasına bağlı olarak

$$g_l(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \left\{ \int_{-1}^{-r} I_l\left(\frac{p}{r}\right) \check{g}_l'(p) dp + \int_{-r}^0 I_l\left(\frac{p}{r}\right) \check{g}_l'(p) dp \right. \\ \left. + \int_0^r I_l\left(\frac{p}{r}\right) \check{g}_l'(p) dp + \int_r^1 I_l\left(\frac{p}{r}\right) \check{g}_l'(p) dp \right\}$$

biçiminde yazılır. Sağ taraftaki ilk iki integralde x yerine $-x$, p yerine $-p$ yazılarak değişken değişimi yapılırsa

$$g_l(r) = \frac{1}{\pi^2 r} \left\{ \int_0^r I_l\left(\frac{p}{r}\right) \check{g}_l'(p) dp + \int_r^1 I_l\left(\frac{p}{r}\right) \check{g}_l'(p) dp \right\} \quad (3.58)$$

elde edilir. $0 < r < 1$ ve $f(r, \theta) = f(-r, \theta + \pi)$ eşitliğinden $g_l(-r) = (-1)^l g_l(r)$ olduğu anlaşılır. (3.58) eşitliğinin ilk integralinde $p/r \leq 1$ ve ikinci integralinde $p/r \geq 1$ olduğundan $I_l(p/r)$, (Luke 1969, s. 299) ve (3.56) daki eşitliklerden yararlanılarak

$$-\int_{-1}^1 (z-x)^{-1} (1-x^2)^{-1/2} T_l(x) dx = \frac{\pi e^{-l\varphi}}{\sinh \varphi} = -\frac{\pi(z+\sqrt{z^2-1})^{-l}}{\sqrt{z^2-1}} \quad , \quad \varphi > 0 \quad (3.59)$$

$$I_l\left(\frac{p}{r}\right) = \int_{-1}^1 \left(x - \frac{p}{r}\right)^{-1} (1-x^2)^{-1/2} T_l(x) dx \quad (3.60) \\ = -\frac{\pi \left(\frac{p}{r} + \sqrt{\frac{p^2}{r^2} - 1}\right)^{-l}}{\sqrt{\frac{p^2}{r^2} - 1}} \\ = -\pi \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-1/2} \left(\frac{p}{r} + \sqrt{\frac{p^2}{r^2} - 1}\right)^{-l}$$

bulunur. (3.59) ve (3.60) dikkate alınarak $I_l\left(\frac{p}{r}\right)$, (3.58) de yazılırsa

$$g_l(r) = \frac{1}{\pi r} \int_0^r \check{g}_l'(p) U_{l-1}\left(\frac{p}{r}\right) dp - \frac{1}{\pi r} \int_r^1 \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-1/2} \left(\frac{p}{r} + \sqrt{\frac{p^2}{r^2} - 1}\right)^{-l} \check{g}_l'(p) dp \quad (3.61)$$

elde edilir (Deans 1977, Minerbo and Sanderson 1977, Perry 1975).

Tchebycheff polinomlarının (2.19) daki son bağıntısı kullanılarak, (3.61) yeniden yazılırsa

$$g_l(r) = \frac{1}{\pi r} \int_0^1 \check{g}_l'(p) U_{l-1}\left(\frac{p}{r}\right) dp - \frac{1}{\pi r} \int_r^1 \check{g}_l'(p) \frac{T_l\left(\frac{p}{r}\right)}{\left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{1/2}} dp \quad (3.62)$$

elde edilir. Geriye sağ taraftaki integralin

$$K = \int_0^1 \check{g}_l'(p) U_{l-1}\left(\frac{p}{r}\right) dp, \quad (3.63)$$

sıfır olduğunu göstermek kalır. Temel fikir, $\check{g}_l'$ deki türevi, U_{l-1} ile değiştirmek ve $\check{g}_l(p)$ ye (3.42) eklendikten sonra kısmi türev almaktır. Son olarak bazı cebirsel işlemler yapıldıktan sonra $T_l(x)$ in $[-1, 1]$ aralığında l den küçük herhangi bir polinoma ortogonal olması, K nın sıfır olduğunu göstermek için yeterlidir. Böylece üst limit 1 için (3.41), (3.61) e eşit olur.

Cormack'tan sonra $g_l(r)$ nin alternatif bir formu elde edilmiştir. Bunu göstermek için

$$\check{g}_l(p) = 2 \int_p^1 \frac{r g_l(r) T_l\left(\frac{p}{r}\right) dr}{(r^2 - p^2)^{1/2}} \quad (3.64)$$

eşitliğinin her iki tarafı $(t/p)(p^2 - t^2)^{-1/2} T_l\left(\frac{p}{t}\right)$ ile çarpılır. Daha sonra alt sınır $p = t$ ve üst sınır $p = 1$ olacak şekilde her iki tarafın integrali alınarak

$$\int_t^1 \frac{t \check{g}_l(p) T_l\left(\frac{p}{t}\right)}{p(p^2 - t^2)^{1/2}} dp = 2 \int_t^1 dp \int_p^1 dr \frac{tr g_l(r) T_l\left(\frac{p}{r}\right) T_l\left(\frac{p}{t}\right) dp}{p(r^2 - p^2)^{1/2} (r^2 - t^2)^{1/2}} \quad (3.65)$$

elde edilir. Sağ taraftaki çift katlı integralde integrasyon sırası değiştirilerek

$$\int_t^1 \frac{t \check{g}_l(p) T_l\left(\frac{p}{t}\right)}{p(p^2 - t^2)^{1/2}} dp = 2 \int_t^1 g_l(r) dr \int_t^r \frac{tr T_l\left(\frac{p}{r}\right) T_l\left(\frac{p}{t}\right) dp}{p(r^2 - p^2)^{1/2} (r^2 - t^2)^{1/2}} \quad (3.66)$$

sonucuna ulaşılır. Eşitliğin sağ tarafındaki p integrali, Gegenbauer polinomlarını (Deans 1978) ve Jacobi polinomlarını (Koornwinder 1982) içeren daha genel sonuçların özel bir durumudur. Bu integrali hesaplayabilmek için önce (3.34), $v = 0$ durumuna indirgenir. Daha sonra x yerine $1/x$ yazılarak değişken değişimi yapılır. Son olarak da istenilen

formu elde etmek için s ve t sabitleri yeniden tanımlandığında sağ taraftaki p integrali $\pi/2$ sonucunu verir.

$$\pi \int_t^1 g_l(r) dr = \int_t^1 \frac{t \check{g}_l(p) T_l\left(\frac{p}{t}\right) dp}{p(p^2 - t^2)^{1/2}} \quad (3.67)$$

Son adım ise t ye göre türev almaktır. Eşitliğin sol tarafı, $g_l(1) = 0$ olduğundan $-\pi g_l(t)$ olur ve $g_l(t)$ için çözüm yapıldıktan sonra

$$g_l(t) = \frac{-1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_t^1 \frac{t \check{g}_l(p) T_l\left(\frac{p}{t}\right) dp}{p(p^2 - t^2)^{1/2}} \quad (3.68)$$

elde edilir. Burada t bağımsız değişkeni yerine r yazıldığında

$$\begin{aligned} g_l(r) &= \frac{-1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{r \check{g}_l(p) T_l\left(\frac{p}{r}\right) dp}{pr \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{1/2}} \\ &= \frac{-1}{\pi} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{\check{g}_l(p) T_l\left(\frac{p}{r}\right) dp}{p \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.69)$$

elde edilir ve bu eşitlik

$$g_l(r) = \frac{-1}{\pi r} \int_r^1 \frac{\check{g}_l'(p) T_l\left(\frac{p}{r}\right) dp}{\left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{1/2}}$$

ile karşılaştırılabilir.

3.3 KÜRESEL HARMONİK SERİ AÇILIMI

Üç boyutlu bir uzayda, S_{lm} reel ortonormal fonksiyonları ile daha yaygın olarak kullanılan Y_{lm} küresel harmonikleri arasında bir ilişki kurulabilmektedir. Bu ilişkiyi açıklamadan önce, Y_{lm} nin tanımlanabilmesi için bazı temel bağıntıların verilmesi gerekmektedir. Bu tanım ve verilen aşamalar standart kullanımla aynıdır (Arfken 1970, Condon and Shortley 1970, Jackson 1975).

3.3.1 Legendre Dönüşüm Çifti

$f(\mathbf{x}) = f(r, \theta, \phi)$ fonksiyonu

$$f(r, \omega) = \sum_{m=-l}^l \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm} g_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (3.70)$$

şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonun Radon dönüşümü,

$$\check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{m=-l}^l \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm} \check{g}_l(p) Y_{lm}(\theta', \phi'). \quad (3.71)$$

olarak yazılır. Burada kullanılan $\boldsymbol{\omega}$ ve $\boldsymbol{\xi}$ birim vektörlerdir. (3.30) da A_{lm} katsayıları ve $\check{g}_l(p)$ fonksiyonu,

$$A_{lm} \check{g}_l(p) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \check{f}(p, \boldsymbol{\xi}) Y_{lm}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \quad (3.72)$$

şeklinde açısıl integral alınarak bulunur. Genel olarak, S_{lm} yerine Y_{lm} kullanıldığı için A_{lm} katsayıları, karmaşık sayı olarak elde edilir. (3.31) ve (3.32) de $(n = 3, v = \frac{1}{2})$ olarak alındığında elde edilen $\check{g}_l(p)$ ve $g_l(r)$, Legendre dönüşüm çiftini oluşturur.

$$\begin{aligned} \check{g}_l(p) &= \frac{(4\pi)^{1/2} \Gamma(l+1) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(l+1)} \int_p^{\infty} r g_l(r) C_l^{1/2}\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^0 dr \\ &= 2\pi \int_p^{\infty} r g_l(r) P_l\left(\frac{p}{r}\right) dr, \end{aligned} \quad (3.73)$$

burada $C_l^{1/2}\left(\frac{p}{r}\right) = P_l\left(\frac{p}{r}\right)$ ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ dir.

$$\begin{aligned} g_l(r) &= \frac{(-1)^2 \Gamma(l+1) \Gamma(\frac{1}{2})}{2\pi^{3/2} \Gamma(l+1) r} \int_r^{\infty} \check{g}_l''(p) C_l^{1/2}\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^0 dp \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_r^{\infty} \check{g}_l''(p) P_l\left(\frac{p}{r}\right) dp, \end{aligned} \quad (3.74)$$

burada $\check{g}_l''(p) = (d/dp)^2 \check{g}_l(p)$ dir.

3.3.2 Tchebycheff Dönüşüm Çifti

Dört boyutlu problemler, iki atomlu moleküllerin incelenmesiyle bağlantılı olarak ortaya çıkmıştır. $S_{lm}(\boldsymbol{\omega})$ ile dört boyutlu küresel harmonikler ilişkilendirilmiştir (Judd 1975). Seri açılımları, dairesel ve küresel harmoniklerin seri açılımları ile aynı olup en büyük fark, radyal fonksiyonların ikinci çeşit Tchebycheff dönüşüm çifti olmasıdır. $n = 4$ olduğunda $v = 1$ dir ve Gegenbauer polinomları,

$$C_l^1(t) = U_l(t).$$

şeklinde ikinci çeşit Tchebycheff polinomları cinsinden yazılır. Bu eşitlik, $g_l(r)$ ve $\check{g}_l(p)$ Gegenbauer dönüşüm çiftinde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} \check{g}_l(p) &= \frac{(4\pi) \Gamma(l+1) \Gamma(1)}{\Gamma(l+2)} \int_p^{\infty} r^2 g_l(r) C_l^1\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2} dr \\ &= \frac{4\pi}{(l+1)} \int_p^{\infty} r^2 g_l(r) U_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(1 - \frac{p^2}{r^2}\right)^{1/2} dr, \end{aligned} \quad (3.75)$$

$$\begin{aligned}
g_l(r) &= \frac{(-1)^3 \Gamma(l+1) \Gamma(1)}{2\pi^2 \Gamma(l+2) r} \int_r^\infty \check{g}_l'''(p) C_l^1\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{1/2} dp \\
&= \frac{-1}{2\pi^2 (l+1) r} \int_r^\infty \check{g}_l'''(p) U_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{1/2} dp
\end{aligned} \tag{3.76}$$

ikinci çeşit Tchebycheff dönüştürme çifti elde edilir.

3.4 RADON DÖNÜŞÜMÜNÜN TERSİ İÇİN SERİ YAKLAŞIM ÖRNEKLERİ

Örnek 3.4.1 $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$ olmak üzere

$$\Re f = \check{f}(p, \phi) = \sqrt{\pi} e^{-p^2}$$

olur (Deans 1983). Bu durumda (3.40) ve (3.41) eşitlikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned}
\check{g}_l(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{f}(p, \phi) e^{-il\phi} d\phi \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\pi} e^{-p^2} e^{-il\phi} d\phi \\
&= \frac{\sqrt{\pi} e^{-p^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-il\phi} d\phi
\end{aligned}$$

ve

$$\int_0^{2\pi} e^{-il\phi} d\phi = \begin{cases} 2\pi & , \quad l = 0 \\ 0 & , \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

olduğundan

$$\check{g}_l(p) = \begin{cases} \sqrt{\pi} e^{-p^2} & , \quad l = 0 \\ 0 & , \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

elde edilir. Buna göre $\check{g}_0'(p) = -2\sqrt{\pi} p e^{-p^2}$ ve $T_0\left(\frac{p}{r}\right) = 1$ olduğundan yararlanılarak

$$g_l(r) = -\frac{1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}_l'(p) T_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dp$$

olup

$$g_l(r) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}_0'(p) T_0\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dp & , \quad l = 0 \\ 0 & , \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

veya

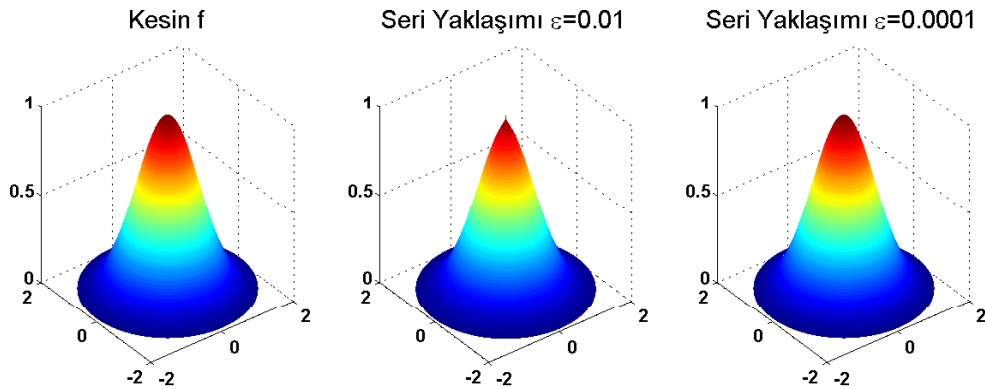
$$g_l(r) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \int_r^\infty p e^{-p^2} \frac{1}{\sqrt{p^2 - r^2}} dp & , \quad l = 0 \\ 0 & , \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

elde edilir. Bu durumda $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ olmak üzere

$$f(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(r) e^{il\theta} = g_0(r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_r^\infty \frac{p e^{-p^2}}{\sqrt{p^2 - r^2}} dp$$

elde edilir. Burada $r = 0$ durumu için $f(0, \theta) = g_0(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-p^2} dp = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = 1$ olduğu direkt olarak hesaplanabilir. $r > 0$ durumu için yukarıdaki seri açılımında yer alan integral $p = r$ noktasında singüleriteye sahip olup bu integral uygun sayısal yöntemlerle yaklaşık olarak hesaplanabilir.

$r \in [0, 2]$ ve $\theta \in [0, 2\pi]$ olmak üzere, $p \in [r + \varepsilon, 10]$, $\varepsilon > 0$, için yamuk kuralı kullanılarak yaklaşımlar yapılmıştır. Bu yaklaşımlarda Δ_r , Δ_θ ve Δ_p ilgili aralıkların parçalanışlarında kullanılan adım büyüklüklerini göstermek üzere, $\Delta_r = 0.01$ ve $\Delta_\theta = 1$, $\Delta_p = 0.001$ sabit tutularak $\varepsilon = 0.01$ ve $\varepsilon = 0.0001$ değerleri için elde edilen yaklaşım sonuçları Şekil 3.1'de verilmiştir.



Şekil 3.1 Örnek 3.4.1 için seri yaklaşımı

Örnek 3.4.2 $f(x, y) = x e^{-x^2 - y^2}$ olmak üzere

$$\Re f = \check{f}(p, \phi) = \sqrt{\pi} p e^{-p^2} \cos \phi$$

olur (Deans 1983). Bu durumda (3.40) ve (3.41) eşitlikleri dikkate alınarak

$$\begin{aligned}\check{g}_l(p) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \check{f}(p, \phi) e^{-il\phi} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{\pi} p e^{-p^2} \cos \phi e^{-il\phi} d\phi \\ &= \frac{\sqrt{\pi} e^{-p^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos \phi e^{-il\phi} d\phi\end{aligned}$$

ve

$$\int_0^{2\pi} \cos \phi e^{-il\phi} d\phi = \begin{cases} \pi & , \quad l = -1 \\ \pi & , \quad l = 1 \\ 0 & , \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \end{cases}$$

olduğundan

$$\check{g}_l(p) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} p e^{-p^2} & , \quad l = -1 \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} p e^{-p^2} & , \quad l = 1 \\ 0 & , \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \end{cases}$$

elde edilir. Buna göre $\check{g}'_{-1}(p) = \check{g}'_1(p) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (1 - 2p^2) e^{-p^2}$ ve $T_{-1}\left(\frac{p}{r}\right) = T_1\left(\frac{p}{r}\right) = \frac{p}{r}$ olduğundan yararlanılarak $r > 0$ için

$$g_l(r) = -\frac{1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}'_l(p) T_l\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dp$$

olup

$$g_l(r) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}'_{-1}(p) T_{-1}\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dp & , \quad l = -1 \\ -\frac{1}{\pi r} \int_r^\infty \check{g}'_1(p) T_1\left(\frac{p}{r}\right) \left(\frac{p^2}{r^2} - 1\right)^{-\frac{1}{2}} dp & , \quad l = 1 \\ 0 & , \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \end{cases}$$

veya

$$g_l(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}r} \int_r^\infty (2p^3 - p) e^{-p^2} \frac{1}{\sqrt{p^2 - r^2}} dp & , \quad l \in \{-1, 1\} \\ 0 & , \quad l \in \mathbb{Z} \setminus \{-1, 1\} \end{cases}$$

elde edilir. Bu durumda $g_{-1}(r) = g_l(r)$ olduğundan, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ olmak üzere $r > 0$ için

$$f(r, \theta) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} g_l(r) e^{il\theta}$$

olduğundan

$$f(r, \theta) = g_{-1}(r) e^{-i\theta} + g_1(r) e^{i\theta}$$

veya

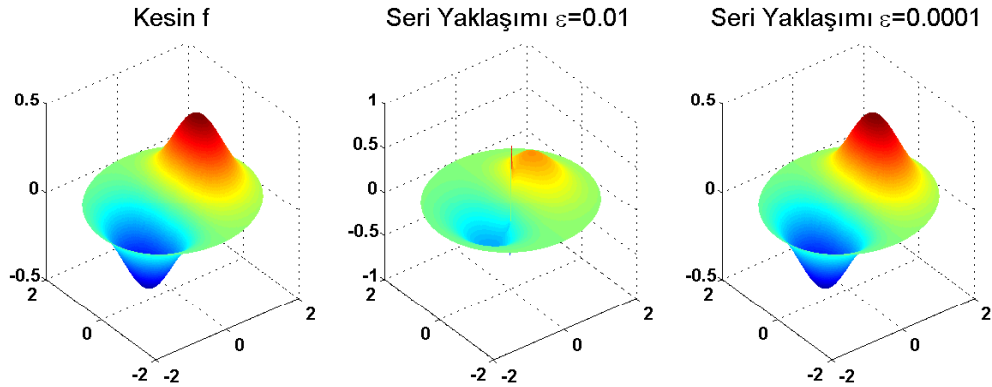
$$f(r, \theta) = \frac{e^{-i\theta} + e^{i\theta}}{2\sqrt{\pi}r} \int_r^\infty (2p^3 - p) e^{-p^2} \frac{1}{\sqrt{p^2 - r^2}} dp$$

yazılabilir. Böylece

$$f(r, \theta) = \frac{\cos \theta}{\sqrt{\pi}r} \int_r^\infty (2p^3 - p) e^{-p^2} \frac{1}{\sqrt{p^2 - r^2}} dp$$

hesaplanır. $r = 0$ durumunda (3.43) ile (3.44) de verilen Abel dönüşüm çifti ve $g_0(p) = 0$ olduğu göz önüne alınarak $f(0, \theta) = g_0(0) = 0$ olur.

$r \in [0, 2]$ ve $\theta \in [0, 2\pi]$ olmak üzere, $p \in [r + \varepsilon, 10]$, $\varepsilon > 0$, için yamuk kuralı kullanılarak yaklaşımlar yapılmıştır. $\Delta_r = 0.01$ ve $\Delta_\theta = 1$, $\Delta_p = 0.001$ sabit tutularak $\varepsilon = 0.01$ ve $\varepsilon = 0.0001$ değerleri için elde edilen yaklaşım sonuçları Şekil 3.2’de verilmiştir.



Şekil 3.2 Örnek 3.4.2 için seri yaklaşımı

Örnek 3.4.3 $f(x, y) = e^{-x^2 - y^2 - z^2}$ olmak üzere

$$\Re f = \check{f}(p, \phi) = \pi e^{-p^2}$$

olur (Deans 1983). Bu durumda (3.72) dikkate alınarak

$$\begin{aligned} A_{lm}\check{g}_l(p) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \check{f}(p, \xi) Y_{lm}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= \check{f}(p, \xi) \int_0^\pi \sin \theta' \int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta', \phi') d\phi' d\theta' \\ &= \pi e^{-p^2} \int_0^\pi \sin \theta' \int_0^{2\pi} Y_{lm}(\theta', \phi') d\phi' d\theta' \end{aligned}$$

elde edilir. $m = 0$ için

$$\begin{aligned} A_{l0}\check{g}_l(p) &= \pi e^{-p^2} \int_0^\pi \sin \theta' \int_0^{2\pi} Y_{l0}(\theta', \phi') d\phi' d\theta' \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \pi e^{-p^2} \int_0^\pi P_l^0(\cos \theta') \sin \theta' d\phi' d\theta' \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \pi e^{-p^2} \int_0^\pi P_l^0(\cos \theta') \sin \theta' 2\pi d\theta' \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} 2\pi^2 e^{-p^2} \int_0^\pi P_l^0(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \pi^2 e^{-p^2} \int_0^\pi P_l^0(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' \end{aligned}$$

olur. $m \neq 0$ durumunda

$$A_{lm}\check{g}_l(p) = 0$$

olur.

$$A_{lm}\check{g}_l(p) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2l+1}{\pi}} \pi^2 e^{-p^2} \int_0^\pi P_l^0(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' & , \quad m = 0 \\ 0 & , \quad m \neq 0 \end{cases}$$

eşitliğinden yararlanılarak $A_{00}\check{g}_0(p) = 2\sqrt{\pi^3}e^{-p^2}$ elde edilir. İkinci türevi hesaplandığında

$$\begin{aligned} (A_{00}\check{g}_0(p))' &= -4\sqrt{\pi^3}pe^{-p^2} \\ (A_{00}\check{g}_0(p))'' &= 4\sqrt{\pi^3}(2p^2 - 1)e^{-p^2} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

$$g_l(r) = \frac{1}{2\pi r} \int_r^\infty \check{g}_0''(p) P_l\left(\frac{p}{r}\right) dp$$

eşitliği yardımıyla $l = 0$ ve $m = 0$ için

$$\begin{aligned} A_{00}g_0(r) &= \frac{1}{2\pi r} \int_r^\infty \check{g}_0''(p) P_0\left(\frac{p}{r}\right) dp \\ &= \frac{1}{2\pi r} \int_r^\infty 4\sqrt{\pi^3}(2p^2 - 1)e^{-p^2} dp \\ &= \frac{2\sqrt{\pi}}{r} \int_r^\infty (2p^2 - 1)e^{-p^2} dp \\ &= 2\sqrt{\pi}e^{-r^2} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde

$$A_{lm}g_l(r) = \begin{cases} 2\sqrt{\pi}e^{-r^2} & , \quad l=0, m=0 \\ 0 & , \quad l, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \end{cases}$$

olarak bulunur.

Bu durumda $x = \sin \theta \cos \phi$, $y = \sin \theta \sin \phi$, $z = \cos \theta$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(r, \theta, \phi) &= \sum_{m=-l}^l \sum_{l=0}^{\infty} A_{lm}g_l(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \\ &= A_{00}g_0(r) Y_{00}(\theta, \phi) \\ &= A_{00}g_0(r) \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ &= 2\sqrt{\pi}e^{-r^2} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \\ &= e^{-r^2} \end{aligned}$$

elde edilir.

Bazı l ve m değerleri için $A_{lm}\check{g}_l(p)$ değerlerinin hesaplanması aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} A_{00}\check{g}_0(p) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \check{f}(p, \xi) Y_{00}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \pi e^{-p^2} P_0(\cos \theta') \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \pi e^{-p^2} 1 \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \pi e^{-p^2} \int_0^\pi \sin \theta' \int_0^{2\pi} d\phi' d\theta' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} 2\pi^2 e^{-p^2} \int_0^\pi \sin \theta' d\theta' \\ &= 2\pi\sqrt{\pi}e^{-p^2} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

$$\begin{aligned} A_{11}\check{g}_1(p) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \check{f}(p, \xi) Y_{11}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \pi e^{-p^2} (-1) \left[\frac{3}{4\pi} \frac{0!}{2!} \right]^{1/2} P_1^1(\cos \theta') e^{i\phi'} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \pi e^{-p^2} (-1) \left[\frac{3}{4\pi} \frac{0!}{2!} \right]^{1/2} (-\sin \theta') e^{i\phi'} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\ &= \pi e^{-p^2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^2 \theta' e^{i\phi'} d\theta' d\phi' \\ &= \pi e^{-p^2} \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{\pi}{2} \int_0^{2\pi} e^{i\phi'} d\phi' \\ &= 0 \end{aligned}$$

Burada $\int_0^{2\pi} e^{i\phi'} d\phi' = 0$ olduğundan $A_{11\check{g}_1}(p) = 0$ elde edilir.

$$\begin{aligned}
A_{32\check{g}_3}(p) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \check{f}(p, \xi) Y_{32}(\theta', \phi') \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \pi e^{-p^2} (-1)^2 \left[\frac{7}{4\pi} \frac{1!}{5!} \right]^{1/2} P_3^2(\cos \theta') e^{2i\phi'} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \pi e^{-p^2} (-1)^2 \left[\frac{7}{4\pi} \cdot \frac{1!}{5!} \right]^{1/2} (15 \cos \theta' \sin^2 \theta') e^{2i\phi'} \sin \theta' d\theta' d\phi' \\
&= 15 \sqrt{\frac{7}{480\pi}} \pi e^{-p^2} \int_0^{2\pi} e^{2i\phi'} \int_0^\pi (\cos \theta' \sin^3 \theta') d\theta' d\phi' \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Radon dönüşümünün tersinin bulunması problemi görüntüleme ile ilgili önemli bir ters problemdir. Bu problemin ve genelleştirilmelerinin çözümüne yönelik filtrelennmiş geri projeksiyon ve cebirsel iteratif yöntemler bilgisayarlı tomografi gibi pratik uygulamalarda kullanılmaktadır. Bu çalışmada Radon dönüşümünün tersi ile ilgili temel bilgiler verilmiş olup daha sonra dairesel ve küresel harmonikler kullanılarak problemin çözümüne yönelik seri yaklaşımları incelenmiştir. Bu seri yaklaşımlarının uygulamalarına ilişkin olarak bazı örnekler verilmiştir. Ele alınan örnekler için seri yaklaşımları kullanılarak yeni sonuçlar elde edilmiş ve kullanılan yöntemlerin uygulanabilir olduğu görülmüştür.



KAYNAKLAR

- Abramowitz M and Stegun I A, Eds** (1964) *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series 55, U. S Government Printing Office, Washington, DC.
- Arfken G B and Weber H J** (2005) *Mathematical Methods for Physicists*, Sixth Edition, Academic, New York.
- Atkinson K and Han W** (2012) *Spherical Harmonics and Approximations on the Unit Sphere: An Introduction*, Springer, New York.
- Bracewell R N** (1978) *The Fourier Transform and Its Applications*, Second Edition, McGraw-Hill, New York.
- Condon E U and Shortley G H** (1970) *Theory of Atomic Spectra*, reprinted with corrections, Cambridge University, London.
- Cormack A M** (1963) Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications, *Journal of Applied Physics*, 34, 2722-2727.
- Cormack A M** (1964) Representation of a function by its line integrals, with some radiological applications II, *Journal of Applied Physics*, 35, 2908-2912.
- Courant R and Hilbert D** (1962) *Methods of Mathematical Physics*, Vol 2, Interscience, New York.
- Deans S R** (1977) The Radon Transform: Some remarks and formulas for two dimensions, Lawrence Berkeley Laboratory report LBL-5691, Berkeley, CA.
- Deans S R** (1978) A unified Radon inversion formula, *Journal of Mathematical Physics*, 19: 2346-2349.
- Deans S R** (1983) *The Radon Transform and Some of Its Applications*, John Wiley & Sons, New York.
- Deans S R** (2000) Radon and Abel Transform, *The Transforms and Applications Handbook*, Second Edition, CRC Press LLC, South Florida.
- Debnath L and Bhatta D** (2006) Radon and Abel Transform, *Integral Transforms and Their Applications*, Second Edition, CRC Press LLC, Edinburg.
- Erdélyi A, Magnus W, Oberhettinger F and Tricomi F G** (1953b) *Higher Transcendental Functions*, 2, McGraw-Hill, New York.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

- Frye C R and Efthimiou** (2012) Spherical Harmonics in p Dimensions, *Department of Physics University of Central Florida*, Orlando.
- Hawkins W G and Barrett H H** (1986) A Numerically Stable Circular Harmonic Reconstruction Algorithm, *SIAM J. Numer. Anal.*, 23, 873-889.
- Hawkins W G, Lechner P K and Yang N C** (1988) The circular harmonic transform for SPECT reconstruction and boundary conditions on the Fourier transform of the sinogram, *IEEE Trans. Med. Imaging*, 7, 135-48.
- Herman G** (1980) *Image Reconstruction from Projections*, Academic, New York.
- Hochstadt H** (1971) *The Functions of Mathematical Physics*, Wiley, New York.
- Jackson J D** (1975) *Classical Electrodynamics*, Second Edition, Wiley, New York.
- John F** (1955) *Plane Waves and Spherical Means Applied to Partial Differential Equations*, Interscience, New York.
- Judd F** (1975) *Angular Momentum Theory for Diatomic Molecules*, Academic, New York.
- Koornwinder T H** (1982) The representation theory of $SL(2, \mathbb{R})$. A non-infinitesimal approach, *L'Enseignement Mathématique* 28, fasc. 1-2, 53-59.
- Luke Y L** (1969) *The Special Functions and Their Approximations*, 1, Academic, New York.
- MacRobert T M** (1927) *Spherical Harmonics, An Elementary Treatise on Harmonic Functions with Applications*, First Edition, Methuen & CO, London.
- Marr R B** (1974) On the reconstruction of a function on a circular domain from a sampling of its line integrals, *J. Math. Anal. Appl.*, 45, 357-374.
- Mason J C and Handscomb D C** (2003) *Chebyshev Polynomials*, CRC Press LLC, Boca Raton.
- Minerbo G N and Sanderson J G** (1977) Reconstruction of a source from a few (2 or 3) projections, Informal Report LA-6747-MS, Los Alamos Scientific Laboratory, Los Alamos, NM.
- Montaldi E** (1979) On the Radon inversion formula, *Lettere al Nuovo Cimento*, 26, 593-598.
- Müller C** (1966) Spherical Harmonics, *Institut für Reine und Angewandte Mathematik Technische Hochschule Aachen*, Springer, New York.
- Perry R M** (1975) Reconstructing a function by circular harmonic analysis of its line integrals, in *Image Processing for 2-D and 3-D Reconstruction from Projections: Theory and Practice in Medicine and the Physical Sciences*, Aug. 4-7, Stanford University, Technical Digest, Optical Society of America, Washington DC, pp. ThA6-1–ThA6-4.

KAYNAKLAR (devam ediyor)

Poularikas A D (1999) *The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing*, CRC Press LLC, Boca Raton.

Radon J (1917) Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte längs gewisser mannigfaltigkeiten, *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften*, 69, 262-277.

Schwartz L (1966) *Mathematics for the Physical Sciences*, Hermann, Paris.

Yagle A E (1992) Inversion of spherical means using geometric inversion and Radon Transform, *Inverse Problems*, 8, 949.





ÖZGEÇMİŞ

Büşra Saadet MUMCU; ilk ve orta öğrenimini Kdz. Ereğli’de tamamladıktan sonra 2009 yılında girdiği Dokuz Eylül Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünden 2015 yılında mezun oldu. 2018 yılında girdiği BEÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programını sürdürmektedir.

