

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RAMANUJAN TAU FONKSİYONU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YUSUF CAN BAYNAL

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2022

10506131

T.C.
BİLECİK ŞEYH EDEBALI ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

RAMANUJAN TAU FONKSİYONU ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YUSUF CAN BAYNAL

TEZ DANIŞMANI
DOÇ. DR. İLKER İNAM

BİLECİK, 2022

10506131

BEYAN

“Ramanujan Tau Fonksiyonu Üzerine” adlı yüksek lisans tezinin hazırlık ve yazımı sırasında bilimsel araştırma ve etik kurallarına uyduğumu, başkalarının eserlerinden yararlandığım bölümlerde bilimsel kurallara uygun olarak atıfta bulunduğumu, kullandığım verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı, tezin herhangi bir kısmının Bilecik Şeyh Edebali Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını, aksinin tespit edileceği muhtemel durumlarda doğabilecek her türlü hukuki sorumluluğu kabul ettiğimi ve vermiş olduğum bilgilerin doğru olduğunu beyan ederim.

Bu çalışmanın, Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP), TÜBİTAK veya benzeri kuruluşlarca desteklenmesi durumunda; projenin ve destekleyen kurumun adı proje numarası ile birlikte, ETİK KURUL onayı alınması durumunda ise ETİK KURUL tarih karar ve sayı bilgilerinin beyan edilmesi gerekmektedir.			
DESTEK ALINMIŞTIR		DESTEK ALINMAMIŞTIR	X
Destek alındı ise;			
Destekleyen kurum;			
Desteğin Türü		Proje Numarası	
1- BAP (Bilimsel Araştırma Projesi)			
2- TÜBİTAK			
Diğer;.....			
ETİK KURUL onayı var ise;			
ETİK KURUL karar tarih/sayı:		/.....	

Yusuf Can Baynal

Tarih

.....

İmza

.....

ÖNSÖZ

Öncelikle bu çalışmada bana yön gösteren ve desteğini benden esirgemeyen, beni her konuda yüreklendiren danışmanım sayın hocam Doç. Dr. İlker İNAM'a teşekkür ederim. Ayrıca beni sürekli maddi manevi destekleyen annem, babam eşim ve aileme teşekkür ederim. Vakitlerinden ayırarak yazdığım bu eseri aileme armağan ediyorum.

Yusuf Can BAYNAL

2022



ÖZET

RAMANUJAN TAU FONKSİYONU ÜZERİNE

Sayılar Teorisi denince akla gelen bilim insanlarından birisi olan Srinivasa Ramanujan sadece yaşadığı yüzyıla değil modern matematiğin tarihi zirve yaptığı 21. yüzyıla da süren etkisiyle çok önemli başarılarla imza atmıştır. Altı bölümden oluşan bu çalışmada Ramanujan'ın sonuçlarına temel oluşturan Ramanujan tau fonksiyonu çalışılmıştır. Modüler formların tanıtılması ile başlayan çalışmanın ikinci bölümünde Ramanujan tau fonksiyonu tanımlanıp temel özellikleri incelenmiştir. Üçüncü bölümde parçalanış fonksiyonu verilmiş ve Ramanujan'ın bu fonksiyon üzerine önemli sonuçlar verdiği kongrüanslar incelenmiştir. Dördüncü bölüme Ramanujan konjektürleri incelenmiştir. Beşinci bölümde ise Ramanujan tau fonksiyonun Fourier katsayılarının asallığı üzerine yapılan çalışmalar üzerinde durulmuştur. Çalışmanın altıncı ve son bölümünde ise Ramanujan tau fonksiyonuna dair güncel bir çalışma incelenmiştir. Çalışma derleme niteliğindedir.

Anahtar Kelimeler: Ramanujan tau fonksiyonu, parçalanış fonksiyonu, Ramanujan kongrüansları, Ramanujan konjektürleri.

ABSTRACT

ON THE RAMANUJAN TAU FUNCTION

Srinivasa Ramanujan, one of the scientists that comes to mind when it comes to Number Theory, has achieved significant success not only in the century he lived in, but also in the 21st century, when modern mathematics reached its historical peak. In this study, which consists of six chapters, the Ramanujan tau function, which forms the basis for Ramanujan's results, is studied. In the second part of the study, which started with the introduction of modular forms, the Ramanujan tau function was defined and its basic properties were examined. In the third chapter, the partition function is given and the congruences on which Ramanujan gives important results on this function are examined. In the fourth chapter, Ramanujan conjectures are examined. In the fifth chapter, the studies on the primality of the Fourier coefficients of the Ramanujan tau function are emphasized. In the sixth and last part of the study, a recent study on the Ramanujan tau function was examined. The study is a compilation.

Keywords: Ramanujan tau function, partition function, Ramanujan congruences, Ramanujan conjectures.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖN SÖZ.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ.....	v
1. MODÜLER FORM VE ÖZELLİKLERİ.....	1
1.1.Modüler Formlar	1
1.2. Hecke Operatörleri.....	4
2.RAMANUJAN TAU FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ.....	5
2.1. Giriş.....	5
2.2 Basit Kongrüansların İlk Sınıfı	5
2.3 Williams'ın Bir Sonucu	7
3. PARÇALANIŞ FONKSİYONU VE RAMANUJAN KONGRÜANSLARI	11
3.1. Ramanujan Kongrüansları.....	12
3.2 Ramanujan Kongrüanslarının İspatı	13
4. RAMANUJAN KONJEKTÜRLERİ.	16
4.1. Ramanujan Birinci Konjektürü.....	16
4.2. Ramanujan'ın İkinci Konjektürü	17
5. RAMANUJAN TAU FONKSİYONUN ASALLIĞI ÜZERİNE.....	19
6. RAMANUJAN TAU FONKSİYONU ÜZERİNE GÜNCEL BİR ÇALIŞMA	22
KAYNAKÇA	24

KISALTMALAR VE SİMGELER LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$\mathbb{Z}$	: Tamsayılar
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar
$\mathbb{H}$	: Üst Yarı Düzlem
$\mathbb{P}$	: Asal Sayıların Kümesi
$GL(2, \mathbb{R})$	: Genel Lineer Grup
$SL(2, \mathbb{R})$	: Özel Lineer Grup
$PGL(2, \mathbb{R})$	: Projektif Genel Lineer Grup
Γ	: Modüler Grup
$\Delta(z)$	: Ramanujan-Tau Fonksiyonu
$G_k(z)$	: k Ağırlıklı Eisenstein Serisi
$\Gamma_0(N)$	: Modüler Grubun N Seviyeli Temel Denklik Alt Grubu
$M_k(\Gamma)$	: Γ için k Ağırlıklı Modüler Formlar Uzayı
$S_k(\Gamma)$	: Γ için k Ağırlıklı Cusp Formların Uzayı
$M_k(\Gamma_0(N))$	: $\Gamma_0(N)$ için k Ağırlıklı N seviyeli Modüler Formlar Uzayı
$S_k(\Gamma_0(N))$	: $\Gamma_0(N)$ için k Ağırlıklı N seviyeli Cusp Formlar Uzayı
$Re(z)$	: z 'nin Reel Kısmı

1. MODÜLER FORM VE ÖZELLİKLERİ

1.1.Modüler formlar

Bu bölümde çalışmada kullanılacak olan modüler formlar kavramı sunulacaktır. Burada $\mathbb{H}$ ile karmaşık üst yarı düzlem gösterilsin. Yani,

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$$

olsun.

Aynı zamanda Γ ile modüler grup gösterilsin. O halde

$$\Gamma := SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

biçiminde olur. Modüler form tanımına geçmeden önce tanımda ihtiyaç duyulan modüler grup kavramına dair biraz daha ayrıntılı bir tartışmayı ortaya koyalım. İlk olarak

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

Möbiüs dönüşümleri bir başka deyişle kesirli lineer dönüşümler göz önüne alınsın. Bu dönüşümler fonksiyonların bileşkesi altında bir grup yapısı oluştururlar (Başkan, 1998:323). Öte yandan Möbiüs dönüşümleri a, b, c, d katsayılarının alındığı cebirsel yapılara göre farklı özellikler gösterirler. İlk olarak en genel durumlardan birisi olarak düşünülebilecek reel sayılar cismi durumu göz önüne alınsın. Buna göre aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.1.1. Reel sayılar üzerindeki genel lineer grup $PGL(2, \mathbb{R})$ ile gösterilir ve

$$PGL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

olarak tanımlanır.

Dikkat edilirse 2×2 tipindeki iki matrisi çarpmak yukarıda verilen iki lineer dönüşümün bileşkesini almaktan çok daha kolay işlemdir. Bu nedenle aşağıdaki karşılık gelme göz önüne alınabilir:

$$\frac{az + b}{cz + d} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Bu sayede örneğin projektif genel lineer grup ile eşleştirilebilen genel lineer grup olarak isimlendirilen ve $GL(2, \mathbb{Z})$ ile gösterilen aşağıdaki matris grubu elde edilir:

$$GL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc \neq 0 \right\}$$

Benzer şekilde $\phi: SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{Z})$ dönüşümü her $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$ için $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \frac{az+b}{cz+d}$ olarak tanımlansın. Bu dönüşümün bir grup epimorfizması olduğu kolayca görülebilir ve bu epimorfizmanın çekirdeği $\text{Ker}(\phi)$ ile gösterilir ise açıktır ki $\text{Ker}(\phi) = \{\pm I_2\}$ olur. Gruplar için 1. İzomorfizma Teoremi (Asar vd., 2021:108) kullanılarak aşağıdaki iyi bilinen teorem elde edilir:

Teorem 1.1.2. $SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I_2\} \cong PSL(2, \mathbb{Z})$ olur.

Genel lineer gruplar içerisinde şüphesiz ki $\Gamma := SL(2, \mathbb{Z})$ yani modüler grup önemli bir rol oynar. Bu çalışmanın kapsamında da modüler grup ve onun bazı önemli alt grupları dikkate alınacaktır. Bunlardan en önemlisi temel denklik alt grubu olup tanımı aşağıda verilmiştir.

Tanım 1.1.3. Belli bir N pozitif tam sayısı için Γ 'nın denklik alt grubu $\Gamma_0(N)$ gösterilir ve

$$\Gamma_0(N) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Modüler grubun belki de en önemli cebirsel özelliklerinden birisi kuşkusuz sonlu üreteçli olmasıdır. Özellikle de üreteçlerinin geometrik olarak üst yarı düzlemde kayma ve tersinme dönüşümlerine karşılık gelmesi konu üzerine olan ilgiyi arttırmaktadır. Hem modüler grubun hem de alt gruplarının bu özelliği kullanılarak elde edilen üst yarı düzlemin estetik döşemeleri matematiğin güzelliğini ortaya fazlasıyla koymaktadır. Aşağıdaki teoremden modüler grubun üreteçleri verilmiştir.

Teorem 1.1.4.(Schoeneberg, 1974:23) Γ modüler grubu sonlu üreteçli olup üreteçleri

$$T := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } S := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dönüşümleridir.

Burada modüler formları tanımlayabilmek için gerekli ön hazırlığın yapılması planlanmaktadır. Geriye tek bir kavramı tanımlamak kalmıştır. “Cuspların Kümeleri” modüler formlar teorisinde merkezi bir rol oynar. Bu küme $P^1(\mathbb{Q})$ ile gösterilsin.

$P^1(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ olur, üstelik dikkat edilirse $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü için c ya da $cz + d$ paydası sıfır ise bu takdirde $\gamma(z) = \infty \in P^1(\mathbb{Q})$ modüler grubun bir $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in P^1(\mathbb{Q})$ üzerinde

$$\gamma(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d}; & z \neq \infty \text{ ise} \\ \frac{a}{c}; & z = \infty \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde hareket eder.

Tanım 1.1.5. Γ 'nın bir denklik alt grubunun cusplarının kümesi $P^1(\mathbb{Q})$ 'nın Γ -yörüngelerinin $C(\tau)$ kümesi olarak tanımlanır.

Genellikle $C(\tau)$ 'nın elemanlarını yörüngeden alınan bir temsilci ile eşleşebilir. Örneğin, $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ modüler grubunun cusp yerlerinin kümesi

$$C(SL_2(\mathbb{Z})) = \{\infty\}$$

olur. Başka bir deyişle modüler grubun sadece sonsuzda cusp yeri vardır. Diğer yandan $\Gamma_0(N)$ denklik alt grubu için $C(\Gamma_0(N)) = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ olduğu kolayca görülebilir.

Bütün bu hazırlığın ardından modüler form tanımı verilebilir.

Tanım 1.1.6. $k \in \mathbb{Z}$ ve G , Γ 'nın bir alt grubu olsun ve bir $f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ karmaşık fonksiyonu verilsin. Bu durumda

(i) Her $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ için

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z),$$

(ii) $f(z)$, $\mathbb{H}$ üst yarı düzlemde analitik,

(iii) $f(z)$, G 'nin tüm cuspları üzerinde analitik

oluyor ise f 'ye G için k ağırlıklı bir modüler form adı verilir.

Aşağıda modüler formların bazı özellikleri özetlenecektir.

Uyarı 1.1.7. 1) Yukarıdaki tanımda $G = \Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ alınırsa (iii) koşulu " $f(z), \infty$ 'da analitik", eğer $G = \Gamma_0(N)$ alınırsa "tüm rasyonel sayılarda ve ∞ 'da analitik" halini alır.

2) Eğer k ağırlıklı bir modüler form $\Gamma_0(N)$ üzerinde tanımlanırsa bu durumda ' k ağırlıklı N seviyeli' modüler form adını alır. Açıkta ki Γ üzerinde tanımlanan modüler formlar 1 seviyelidir.

3) Modüler formlar $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayıdır (Cohen ve Strömberg, 2017).

4) Modüler grubun üreteçleri ve modüler formun tanımı dikkate alınırsa k ağırlıklı N seviyeli bir $f(z)$ modüler formu $f(z+1)=f(z)$ fonksiyonel eşitliğini sağlar. Yani bir modüler form aynı zamanda periyodik bir karmaşık fonksiyondur. Bu nedenle Fourier analizi teorisi gereği $f(z)$ modüler formuna

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)q^n$$

şeklinde bir Fourier serisi karşılık gelir. Buna $f(z)$ 'nin Fourier açılımı denir. $a(n)$ 'ler ise $f(z)$ 'nin Fourier katsayıları adını alır.

1.2.Hecke Operatörleri

Modüler formlar karmaşık sayı cismi üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayı olduğundan lineer cebirin hemen hemen tüm kavramlarının modüler formlarda karşılıkları vardır.

Buna göre Hecke operatörleri de modüler form vektör uzayları arasındaki lineer dönüşümler olarak düşünülebilir.

Hecke, modüler formlar üzerinde hareket eden $T_n: M_k(\Gamma) \rightarrow M_k(\Gamma)$ Hecke operatörlerini tanımlamıştır. Burada T_n ile n . Hecke operatörü gösterilmekte olup bu dönüşüme gelen matris, karakteristik polinom ve özdeğerler hesaplanabilir.

T_n dönüşümleri cusp form uzaylarını korur ve Hecke operatörleri yardımıyla oldukça önemli ve ilgi çekici özelliklere sahip olan özel bir modüler form sınıfı elde edilir.

Hecke eigenform olarak adlandırılan ve T_n ile n . Hecke operatörünün öz değerlerinden oluşan bu 'özel' form modüler form teorisinde çok önemli bir yer tutar. Örneğin Sato-Tate Konjektürü gibi matematiğin son 100 yıl içerisinde en önemli teoremi Hecke eigenform için geçerlidir. Hecke eigenformların bir diğer güzel özelliği ise Euler çarpımı açılımı gibi çok önemli bir özelliğe sahip olmasıdır. Bu sayede modüler formların sayılar teorisi özellikleri kolayca incelenebilir.

2. RAMANUJAN TAU FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ

2.1. Giriş

Tanım 2.1.1. Ramanujan Tau Fonksiyonu Δ ile gösterilir ve

$$\Delta := q\phi(q)^{24} := q \prod_{n \geq 1} (1 - q^n)^{24} = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n$$

biçiminde tanımlanır. Burada ϕ , Euler phi fonksiyonunu göstermektedir.

12 ağırlıklı bir modüler form olan Ramanujan Tau Fonksiyonu'nun önemli sayı teorisi özellikleri vardır. Ramanujan Tau Fonksiyonunun bazı ilk değerleri:

$$1, -24, 252, -1472, 4830, -6048, -16744, 84480, -113643$$

olup tam sayı dizilerinin online ansiklopedisinde A000594 etiketiyle ilk 314747 katsayısına ulaşılabilir (Sloane, 2007).

Bu fonksiyonun en dikkat çekici özelliği Fourier katsayılarının belirli bir modda çalışmasıyla elde edilir.

Ramanujan Tau Fonksiyonu ile ilgili literatürde oldukça ilgi çekici bir açık problem bulunmaktadır.

Lehmer Konjektürü adı verilen bu açık problem tüm n değerleri için $\tau(n) \neq 0$ olduğunu iddia eder. Bu problem bile başlı başına Ramanujan Tau Fonksiyonu Fourier katsayılarının belirli modlarda çalışması adına önemli bir motivasyon kaynağı oluşturur.

2.2. Basit Kongrüansların İlk Sınıfı

Bölüme basit bir lemma ile başlayalım. Bu bölüm ile ilgili detaylı bilgi (Berndt ve Ono, 1999)'da bulunabilir.

Lemma 2.2.1. Herhangi bir p asalı için $(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$ olur.

Yukarıdaki lemma Ramanujan'ın kongrüanslar üzerindeki çalışmayı pratikleştirir. Bu denklik daha kompakt şekilde yazılırsa

$$q\theta(q)^{24} \equiv q\theta(q)^3\theta(q^7)^3 \pmod{7}$$

olur.

Böylece Ramanujan tau fonksiyonu mod 7 'deki kongrüans özdeşliğine denk sağ tarafı dikkatlice incelenirse belirli bir α için $\tau(7n + \alpha) \equiv 0$ tipinde bir kongrüans elde edilir.

Buna benzer özellikleri elde edebilmek için bu denklik biraz daha detaylı incelenecektir. Böyle bir sonucu elde edebilmek için $q^{7n+\alpha}$ 'nın $q\theta(q)^3$ açılımındaki katsayının 7'nin bir katı olup olmadığı kontrol edilir buradaki gerekçe 24'ten küçük herhangi bir asal sayı için geçerli olması olup farklı farklı özdeşlikler elde edilir.

Mod 7 Durumu.

Daha önce belirtildiği gibi

$$q\theta(q)^{24} \equiv q\theta(q)^3\theta(q^7)^3 \pmod{7}$$

şeklindedir.

Daha önce elde edilen kongrüansı ele alınsın. Burada $q\theta(q)^3$ ifadesinde $q^{7n+\alpha}$ teriminin katsayısı hesaplanmak isteniyor. Jacobi özdeşliği kullanılarak

$$q\theta(q)^3 = q\sum_{n \geq 0} (-1)^n (2n+1) q^{n(n+1)/2}$$

elde edilir. İstenen kongrüanslar da ikinci dereceden kalan olmayan α değerleri olan

$\alpha = 5, 7, 10, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22$ için

$$\tau(23n + \alpha) \equiv 0 \pmod{23}$$

olur.

Mod 2 Durumu.

$$q\theta(q)^{24} \equiv q\theta(q^{(2^3)})^3 \pmod{2}$$

özdeşliği doğrudur buradan kolayca görülebilir ki $\alpha \not\equiv 1 \pmod{8}$ için $\tau(8n + \alpha) \equiv 0 \pmod{2}$ 'dir.

Özel olarak $\tau(2n) \equiv 0 \pmod{2}$ olur. Gerçekten de mod 7'de kullanıldığı gibi Jacobi özdeşliği kullanarak daha fazlası söylenebilir. Öyle ki

$$q\theta(q^8)^3 = q\sum_{n \geq 0} (-1)^n (2n+1) q^{4n(n+1)} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n (2n+1) q^{(2n+1)^2}.$$

Bu ise

$$“\tau(n) \equiv 1 \pmod{2} \leftrightarrow n \text{ tek bir tam karedir.}”$$

olmasını gerektirir.

Burada ortaya çıkan kuvvetler

$$\frac{n(n+1)}{2} + 1 \equiv 0, 1, 2, 4 \pmod{7}$$

Biçimindedir, üstelik $n \equiv 3$ ise bu takdirde $2n + 1$ ifadesi 7'nin bir katı olur ki bu durumda kuvvet $7n$ biçimindedir.

O halde 3,5 ve 6 mod 7'de ikinci dereceden kalan olmadığı için

$$\tau(7n), \tau(7n + 3), \tau(7n + 5), \tau(7n + 6) \equiv 0 \pmod{7}$$

olur.

Mod23 Durumu.

Burada

$$q\theta(q)^{24} \equiv q\theta(q)\theta(q^{23}) \pmod{23}$$

şeklindedir. Öte yandan Pentagonal Sayı Teoremi gereği

$$q\theta(q) = q \sum_n (-1)^n q^{n(3n+1)/2}$$

olup kuvvetler;

$$\frac{n(3n \pm 2)}{2} + 1 \equiv 0, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 13, 16, 18 \pmod{23}$$

şeklindedir.

Mod3 Durumu.

Burada

$$q\theta(q)^{24} \equiv q\theta(q^3)^8 \pmod{3}$$

olup sadece $3n+1$ biçiminde olan kuvvetler gelecektir. O halde

$$\tau(3n), \tau(3n + 2) \equiv 0 \pmod{3}$$

olur.

2.3. Williams'ın Bir Sonucu

Srinivasa Ramanujan $\tau(n)$ fonksiyonunun ilk 30 değerini hesaplayarak tanımladığı $\tau(n)$ fonksiyonunun çarpımsal fonksiyon olduğunu tahmin etmiştir.

Üstelik yukarıda verildiği gibi tüm p asalları ve tüm n tamsayıları için

$$\tau(pn) = \tau(p)\tau(n) - p^{11}\tau\left(\frac{n}{p}\right) \quad (2.1)$$

özdeşliğinin doğru olduğunu ispatlamıştır. Burada eğer p, n 'yi bölmüyorsa $\tau\left(\frac{n}{p}\right) = 0$ olarak alınır.

Bu kısımda bu özelliğin özel durumlarından bir tanesi yani $p=2$ durumu (Williams, 2015)'te verilen farklı bir ispatı incelenecektir. Dikkat edilirse $p=2$ alındığında $n \in \mathbb{N}$ için

$$\tau(2n) = \tau(2)\tau(n) - 2^{11}\tau\left(\frac{n}{2}\right) \quad (2.2)$$

elde edilir.

Burada N bir tek pozitif sayı ve $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için Ramanujan tau fonksiyonunun çarpımsallık özelliğinden gelen

$$\tau(2^k N) = \tau(2^k)\tau(N)$$

özdeşliği kullanılabilir.

Teorem 2.3.1. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\tau(2n) = \tau(2)\tau(n) - 2^{11}\tau\left(\frac{n}{2}\right)$$

özdeşliği doğrudur.

İspat. Ramanujan'ın verdiği teta fonksiyonu φ ile gösterilir ve $q = e^{2\pi iz}$, $Im(z) > 0$ ve $|q| < 1$ için

$$\varphi(q) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2}$$

olarak tanımlanır.

φ fonksiyonu birçok ilgi çekici özelliğe sahip olup sayılar teorisinde özellikle modüler formlarda önemli bir yeri vardır. φ fonksiyonunun tanımı kullanılarak

$$\varphi^2(q^2) = \frac{1}{2}(\varphi^2(q) + \varphi^2(-q)) \text{ ve } \varphi^2(-q^2) = \varphi(q)\varphi(-q) \quad (2.3)$$

olduğu görülür.

Diğer yandan literatürdekilerden farklı bir yol kullanılarak ispat için aşağıdaki Eisenstein serileri tanımlansın.

$$Q(q) := 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 q^n}{1-q^n} \quad (2.4)$$

ve

$$R(q) := 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 q^n}{1-q^n} \quad (2.5)$$

olarak tanımlansın.

Ramanujan, Eisenstein serisiyle φ tetaserileri arasındaki önemli ilişkiyi ortaya koymuştur. Öyle ki,

$$x = x(q) := 1 - \frac{\varphi^4(-q)}{\varphi^4(q)} \text{ ve } z = z(q) := \varphi^2(q) \quad (2.6)$$

olmak üzere

$$Q(q) = (1+14x+x^2)z^4 \quad (2.7)$$

ve

$$R(q) = (1 - 33x - 33x^2 + x^3)z^6 \quad (2.8)$$

dir. Böylece:

$$Q(q) = 16\varphi^8(q) - 16\varphi^4(q)\varphi^4(-q) + \varphi^8(-q) \quad (2.9)$$

ve

$$R(q) = -6416\varphi^{12}(q) + 9616\varphi^8(q)16\varphi^4(-q) - 3016\varphi^4(q)16\varphi^8(-q) - 16\varphi^{12}(-q) \quad (2.10)$$

elde edilir.

Modüler formlar teorisi geliştikten sonra elde edilen tüm modüler formların bu iki Eisenstein serisi ile üretilmesi sonucunun ilk işaret fişğini Ramanujan yakmış olup çok basit yöntemler kullanarak

$$1728q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24} = Q^3(q) - R^2(q) \quad (2.11)$$

olduğunu ispatlamıştır.

(2.9)-(2.10)-(2.11) eşitlikleri kullanılarak, Ramanujan Tau fonksiyonunun tanımı yardımıyla Denklem (2.11) elde edilir. Yukarıdaki eşitlikte q yerine $-q$ yazılıp taraf tarafa toplandığında:

$$32 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^{2n} = -\varphi^{20}(q)\varphi^4(-q) + \varphi^{16}(q)\varphi^8(-q) + \varphi^8(q)\varphi^{16}(-q) - \varphi^4(q)\varphi^{20}(-q) \quad (2.12)$$

elde edilir.

Burada q yerine q^2 yazılarak ve Denklem (2.3) kullanılarak

$$256 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^{2n} = \varphi^{16}(q)\varphi^8(-q) + 2\varphi^{12}(q)\varphi^{12}(-q) + \varphi^8(q)\varphi^{16}(-q) \quad (2.13)$$

elde edilir.

Denklem (2.13)'de q yerine q^2 yazılarak ve tekrar (2.3) yardımıyla

$$65536 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{4n} = \varphi^{20}(q) \varphi^4(-q) - 4\varphi^{16}(q) \varphi^8(-q) + 6\varphi^{12}(q) \varphi^{12}(-q) - 4\varphi^8(q) \varphi^{16}(-q) + \varphi^4(q) \varphi^{20}(-q) \quad (2.14)$$

Elde edilir.

Böylece (2.12), (2.13) ve (2.14) eşitlikleri gereği

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(2n) q^{2n} + 24 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{2n} + 2048 \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^{4n} = 0 \quad (2.15)$$

elde edilir.

O halde $\tau(2) = -24$ ve $2^{11} = 2048$ olduğundan $n \in \mathbb{N}$ için

$$\tau(2n) + 24\tau(n) + 2048\tau(n/2) = 0$$

elde edilir ve bu da ispatı bitirir.

3. PARÇALANIŞ FONKSİYONU VE RAMANUJAN KONGRÜANSLARI

Parçalaniş fonksiyonu gerek geometride gerek sayma problemlerinde ve hatta fizikte uygulama alanlarıyla oldukça ilgi çeken bir konudur.

Parçalaniş fonksiyonu genel kabul gereği $p(n)$ ile gösterilir. Örneğin $p(n)$ fonksiyonu yardımıyla S_n simetrik grubunun indirgenemez temsillerinin özellikleri incelenebilir.

$p(n)$ fonksiyonunun çalışıldığı üst düzey teorilerden biriside Kuantum Cisim Teorisidir. Dikkat edilirse bir n doğal sayısı verildiğinde n sayısını pozitif tam sayıların artmayan toplamları şeklinde yazabilmenin birçok yolu vardır. Üstelik n sayısı büyüdükçe $p(n)$ 'nin de büyüyeceği açıktır.

Örneğin :

$$3 = 3$$

$$= 2 + 1$$

$$= 1 + 1 + 1$$

$$7 = 7$$

$$= 6 + 1$$

$$= 5 + 2$$

$$= 5 + 1 + 1$$

$$= 4 + 3$$

$$= 4 + 2 + 1$$

$$= 4 + 1 + 1 + 1$$

$$= 3 + 3 + 1$$

$$= 3 + 2 + 2$$

$$= 3 + 2 + 1 + 1$$

$$= 3 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 2 + 2 + 2 + 1$$

$$= 2 + 2 + 1 + 1 + 1$$

$$= 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$= 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

O halde

$$p(3) = 3 \text{ ve } p(7) = 15$$

olur.

Parçalanış fonksiyonları çalışılırken sıklıkla kullanılan metotlardan bir tanesi de $p(n)$ 'nin üreteç fonksiyonu için Euler'in sonsuz çarpım formülüdür.

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)}$$

Verilen eşitliğin ispatı aslında geometrik seri kullanarak elde edilecek olan sonsuz çarpım açılımından gelir.

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1 - q^n)} &= \left(\frac{1}{1 - q} \right) \cdot \left(\frac{1}{1 - q^2} \right) \dots \\ &= (1 + q^1 + q^{1+1} + \dots) \cdot (1 + q^2 + q^{2+2} + \dots) \dots \end{aligned}$$

Gerçektende bu q serisindeki q^n 'nin katsayılarının üslerin toplamı olacak şekilde farklı yoldan sayıdır. Bu ise tam olarak n 'nin parçalanış sayısı olup bu sayı $p(n)$ 'dir.

3.1. Ramanujan Kongrüansları

Bu bölümde Ramanujan'ın gözlemlediği $P(n)$ fonksiyonu için bazı denklikleri incelenecektir. Ramanujan (1921)'de aşağıdaki sonuçları bulmuştur. Her $n \in \mathbb{Z}$ için

$$p(5n + 4) \equiv 0 \pmod{5} \tag{3.1}$$

$$p(7n + 5) \equiv 0 \pmod{7} \tag{3.2}$$

$$p(11n + 6) \equiv 0 \pmod{11} \tag{3.3}$$

kongrüansları doğrudur.

Bu sonuçların yanı sıra yukarıdaki çalışmalarında Ramanujan bu formdaki kongrüansların sadece bundan ibaret olduğunu iddia etmiştir. Özel olarak tüm $n \in \mathbb{Z}$ ve l asalları için belli bir sabit $\beta \in \mathbb{Z}$ için $p(ln + \beta) \equiv 0 \pmod{l}$ olur.

Bu problem Ahlgren ve Boylan tarafından (2003)'te çalışılmış olup aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.1. l bir asal sayı olsun. Eğer $(mod 1)$ 'de bir Ramanujan kongrüansı varsa bu takdirde bu kongrüans mutlaka (3.1) , (3.2) ve (3.3)'teki kongruanstan biridir.

Problemin tarihçesine bakılacak olursa matematikçiler Ramanujan kongrüanslarının varlığı kadar yokluğuyla da ilgilenmişlerdir. (Ono, 2000)'da parçalanış fonksiyonu için $p(An + \beta) \equiv 0 \pmod{l}$ biçimindeki aileler oluşturulmuştur.

Bu çalışmada özellikle sonsuz çoklukta aile olduğu gösterilmiş olup bundaki fikir Ahlgren tarafından (2000)'de l ile aralarında asal olan M modunda genişletilmiştir. Boylan bu yönde çalışmaya devam etmiş olup parçalanışın üreteç fonksiyonunu kuvvetlerinde Ramanujan kongrüanslarının varlığı ispatlanmıştır.

3.2.Ramanujan Kongrüanslarının İspatı

İlk olarak mod 2 ve 3'te Ramanujan kongruansının bulunmadığı ispatlanacaktır.

A) $p = 2$ olsun, bu takdirde herhangi bir β için öyle bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır ki $2n - \beta = 0$ veya 1'dir. Ancak bu durumda $p(0) = 1$ ve $p(1) = 1$ olur. Bu nedenle bu özellikte bir Ramanujan kongruansı bulunmaz.

B) $l = 3$ olsun. Bu durumda herhangi bir β öyle bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır ki $3n - \beta = 0, 1$ veya 2 olur.

Bu durumda ise $p(0) = 1$ $p(1) = 1$ ve $p(2) = 2$ olur. Bu nedenle bulduğumuz n değerleri için bu özellikte bir Ramanujan kongruansı bulunmaz.

Şimdi $p \geq s$ olmak üzere bir p asalını sabitleyelim. (Kiming ve Olsson, 1992)'de aşağıdaki sonuç elde edilmiştir.

Teorem 3.2.1. (Kiming ve Olsson, 1992) Tüm n sayıları için $p(ln + \beta) \equiv 0 \pmod{l}$ olacak şekilde bir $\beta \in \mathbb{Z}$ varsa bu takdirde $24\beta \equiv 1 \pmod{l}$ 'dir.

$\delta p = \frac{p^2-1}{24}$ olacak şekilde tanımlayalım. $p \geq 5$ bir asal sayı olduğundan ve bu özellikler bütün asallar 6 modunda 1'e ve 5'e eşit olduğundan $\frac{p^2-1}{24} \equiv 0 \pmod{24}$ olur. O halde δl bir pozitif tam sayıdır. Gerçekten de $p = 6n+1$ ve $6n - 5$ değerlerini verip bu değerlerin sonuçlarının bir tamsayı oluşturup oluşturmadığını araştıralım

$p=6n+1$ için

$$= \frac{(6n+1)^2-1}{24}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{36n^2 + 12n + 1 - 1}{24} \\
&= \frac{36n^2 + 12n}{24} \\
&= \frac{12n(3n+1)}{24}
\end{aligned}$$

Burada n çift olursa parantez dışından sadeleşme oluşuyor, tek olursa da parantez içi çift olup yine 24 tamamen sadeleşebiliyor. Bunun ispatı içinde $n = 2k$ ve $n = 2k+1$ değerlerini vererek her iki durumda da tam sayı olduğunu görebiliriz.

$n=2k$ için

$$\begin{aligned}
&= \frac{12 \cdot 2k(3 \cdot 2k + 1)}{24} \\
&= \frac{24k(6k+1)}{24} \\
&= \frac{k(6k+1)}{1}
\end{aligned}$$

elde edilir ve tam sayı oluştuğu görülür.

$n=2k+1$ için

$$\begin{aligned}
&= \frac{12 \cdot (2k+1)[3 \cdot (2k+1) + 1]}{24} \\
&= \frac{(2k+1)[3 \cdot (2k+1) + 1]}{2} \\
&= \frac{(2k+1)[6k+4]}{2} \\
&= \frac{(2k+1)(3k+2) \cdot 2}{2}
\end{aligned}$$

$$= (2k + 1)(3k + 2)$$

şeklinde bir tam sayı oluştuğu görülür.

Benzer işlemler $p=6n - 5$ değeri içinde yerine yazılıp bulunabilir.

$$\delta l := \frac{l^2 - 1}{24}$$

Biliyoruz ki δl bir pozitif tam olacaktır $l^2 - 1 = 0 \pmod{24}$ olduğundan dolayı.

O halde

$$l^2 - 1 = (l + 1)(l - 1).$$

Buradan l asal sayısı mod 4'te 1 veya 3 kalanını verir.

Açıkça görülür ki $l \equiv 1 \pmod{4}$ iken $l - 1 \equiv 0 \pmod{4}$ ve $l + 1 \equiv 2 \pmod{4}$

Buradan

$$8|l^2 - 1 = (l + 1)(l - 1)$$

olur.

Ayrıca 3 sayısı $(l + 1)$ veya $(l - 1)$ den birini böler. $l \geq 5$ bir asal sayı olduğunu ve 3 sayısı $(l + 1)$ veya $(l - 1)$ den birini böldüğünü biliyoruz. Ebob(3,8)=1 olduğundan $3.8 = 24|(l + 1)(l - 1) = l^2 - 1$ olduğunu anlarız. Dolayısıyla δl aslında bir tamsayıdır.

Örnek: $l = 5, 7$ yada 11 değerleri için aşağıdaki sonuçları inceleyelim.

$$\delta 5 = \frac{5^2 - 1}{24} = \frac{25 - 1}{24} = 1,$$

$$\delta 7 = \frac{7^2 - 1}{24} = \frac{49 - 1}{24} = 2,$$

$$\delta 11 = \frac{11^2 - 1}{24} = \frac{121 - 1}{24} = 5,$$

olur.

Şimdi $\{ln + \beta | n \in \mathbb{N}\}$ ve $\{ln - \delta l | n \in \mathbb{N}\}$ kümelerini göz önüne alalım. Dikkat edilirse $\beta \equiv -\delta l \pmod{l}$ ise bu iki küme birbirine eşit olur. (Kiming ve Olsson, 1992) 'de yer alan sonucu δl 'nin tanımı ile birleştirecek olursak

$$24\delta l = l^2 - 1 \equiv -1 \pmod{l} \equiv -24\beta \pmod{l} \text{ elde edilir.}$$

$$\text{O halde } \delta l \equiv -\beta \pmod{l} \text{ ve } \{ln + \beta | \forall n \in \mathbb{N}\} = \{ln - \delta l | \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

olur.

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.2. (Kiming ve Olsson, 1992) Eğer $p \geq 13$ bir asal ise bu taktirde

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(ln - \delta l)q^n \not\equiv 0 \pmod{l}.$$

4. RAMANUJAN KONJEKTÜRLERİ

Bu bölümde 1916'da yer alan Ramanujan'ın ortaya attığı ancak kanıtlayamadığı üç konjektürden ikisi incelenecektir.

Bunlardan ilki $\tau(n)$ Ramanujan tau fonksiyonu çarpımsal fonksiyonu olduğunu iddia eder. İkincisi Ramanujan tau fonksiyonu Fourier katsayılar üzerinde bir indirgeme bağıntısı verir, üçüncüsü ve sonuncusu ise bu Fourier katsayılarının mutlak değerleri üzerinde ideal bir üst sınırı verir.

Bu çalışmada Mordell (1917)'de verilmiş olan ilk konjektürün ispatı, ikinci konjektürün ifadesi verilecektir. Üçüncü ve son konjektür “Ramanujan-PeterssonKonjektürü” olarak adlandırılmış olup Deligne (1974)'te ispatlanmıştır. Oldukça teknik olan bu ispat tezin kapsamı dışındadır.

4.1. Ramanujan'ın Birinci Konjektürü

Teorem 4.1.1. (Mordell, 1917) $\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n)q^n$ Ramanujan tau fonksiyonu olsun. Eğer $(m,n) = 1$ ise bu takdirde

$$\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$$

olur, yani $\tau(n)$ bir çarpımsal fonksiyondur.

Uyarı 4.1.2. $\tau(1) = 1$ olduğu ve Ramanujan tau fonksiyonun bir aritmetik fonksiyon olduğu dikkate alınırsa $\tau(n)$ 'in tam çarpımsal fonksiyon olduğu söylenebilir.

İspat. Ramanujan tau fonksiyonunun tanımına dikkat edilirse

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)q^n = (2\pi)^{-12} \Delta(\tau) = q \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m)^{24}$$

şeklindeydi. p bir asal ve k bir tamsayı olsun. $1 \leq k \leq p - 1$ için öyle bir h tamsayısı vardır ki

$$\tau^{12} \Delta\left(\frac{\tau + h}{p}\right) = \Delta\left(\frac{k\tau - 1}{p\tau}\right)$$

olur. Burada h , mod p 'de k tarafından indirgenen kalan sistemi üzerinde hareket eder. Şimdi p asal olmak üzere

$$F_p(\tau) = p^{11}\Delta(p\tau) + \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \Delta\left(\frac{\tau+k}{p}\right)$$

olarak tanımlansın. Kolayca görülebilir ki bu fonksiyon

$$F_p(\tau + 1) = F_p(\tau) \text{ ve } F_p\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tau^{12} F_p(\tau)$$

fonksiyonel eşitliklerini sağlar. Diğer yandan tanım kullanılarak

$$F_p(\tau) = \tau(p)\Delta(\tau)$$

olduğu ispatlanabilir. F_p fonksiyonu tanımı yardımıyla gerekli işlemler yapılarak $r \geq 1$ için

$$\tau(p^{r+1}) = \tau(p) \cdot \tau(p^r) - p^{11} \tau(p^{r-1})$$

ve $\alpha \geq 2$ ve $(n, p) = 1$ için

$$\tau(p^\alpha n) = \tau(p) \tau(p^{\alpha-1} n) - p^{11} \tau(p^{\alpha-2} n)$$

özdeşlikleri elde edilir. Eğer $\alpha, \alpha \geq 0$ özelliğinde bir tamsayı ve eğer $(n, p) = 1$ ise

$$g(\alpha) = \tau(p^\alpha n) - \tau(p^\alpha) \tau(n)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $g(\alpha + 1)$, $g(\alpha)$ ve $g(\alpha - 1)$ 'in bir lineer kombinasyonu olur. Böylece bu son sonuçlar kullanılarak

$$\tau(m)\tau(n) = \sum_{d|(m,n)} d^{11} \tau\left(\frac{mn}{d^2}\right)$$

olur. Özel olarak $(m, n) = 1$ ise

$$\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$$

olur ki bu da ispatı bitirir.

4.2. Ramanujan'ın İkinci Konjektürü

Teorem 4.2.1.(Mordell, 1917) $\Delta(z) = \sum_{n \geq 1} \tau(n) q^n$ Ramanujan tau fonksiyonu ve p bir asal sayı ve $r > 0$ olmak üzere

$$\tau(p^{r+1}) = \tau(p) \tau(p^r) - p^{11} \tau(p^{r-1})$$

olur.

Konjektürün ispatı referans kaynakta bulunabilir. Bu indirgeme formülü yardımıyla ve çarpımsal özelliği kullanılarak Ramanujan tau fonksiyonunun asal indisli değerleri hesaplanarak tüm Fourier katsayıları hesaplanabilir.



5. RAMANUJAN TAU FONKSİYONUN ASALLIĞI ÜZERİNE

Bu bölümde D. H. Lehmer tarafından (1965)'te verilen önemli bir sonuç incelenecektir. $\tau(n)$ 'nin aritmetik özellikleri oldukça ilgi çekici olup üzerine birçok araştırma yapılmıştır. Bu problemlerden biriside belli bir n için $\tau(n)$ 'nin asallığıdır. (Lehmer 1965)'te $\tau(n)$ 'nin ilk asal olduğu n değeri verilmiş ve ispatlanmıştır.

Teorem 5.1. (Lehmer, 1965) $22 \leq n \leq 63000$ değerleri için $\tau(n)$ bileşik sayı olup $\tau(63001) = -80561663527802406257321747$ sayısı bir asal sayıdır.

İspata geçmeden önce makalede kullanılan teknikler göz önüne alınsın. Her ne kadar özellikle günümüz bilgisayar teknolojisinde büyük sayılar için bile asallık kolaylıkla tespit edilebileceği bilinse de Teorem 5.1'in ispatında Ramanujan tau fonksiyonunun denklik özellikleri ve formülleri kullanılacaktır. Magma cebir programında teoremden verilen sayının asallığı 0,01 saniyede hesaplanmıştır. Herhangi bir programlama yeteneği kullanılmadan sadece “düz hesaplama” (p -adik metotla) $\tau(n)$ 'in ilk 63000 değerini makul bir sürede hesaplanabilir olduğu görülür.

İlk olarak teoremin ispatında kullanılacak olan özellikler listelensin:

$$\text{Eğer } (a, b) = 1 \text{ ise bu durumda } \tau(ab) = \tau(a)\tau(b) \text{ olur.} \quad (5.1)$$

$$\alpha > 0 \text{ olmak üzere } \tau(p)\tau(p^\alpha) - p^{11}\tau(p^{\alpha-1})' \text{dir.} \quad (5.2)$$

$$\text{Eğer } p \mid \tau(p) \text{ ise bu durumda } n > 0 \text{ için } p \mid \tau(np) \text{ olur.} \quad (5.3)$$

$$\text{Eğer } n \text{ tek sayı ise } \tau(n) \equiv \sigma(n) \pmod{8} \text{'dir.} \quad (5.4)$$

$$\tau(n) \text{ sayısının tek sayı olması için gerek ve yeter şart } n \text{ bir tek tam kare olmasıdır.} \quad (5.5)$$

$$\text{Eğer } n \text{ tek sayı ise } \tau(n) \equiv \sigma_3(n) \pmod{32} \text{'dir.} \quad (5.6)$$

$$\text{Eğer } (n, 3) = 1 \text{ ise } \tau(n) \equiv \sigma(n) \pmod{3} \text{'dir.} \quad (5.7)$$

$$\text{Eğer } 3p = u^2 + 23v^2 \text{ ise } \tau(p) \equiv -1 \pmod{23} \text{ olur.} \quad (5.8)$$

$$\tau(n) \equiv \sigma_{11}(n) \pmod{691} \text{'dir.} \quad (5.9)$$

Bu özelliklerle ilgili tüm referans listesi (Lehmer, 1965)'te bulunabilir. Dikkat edilirse Denklem (5.3) ve (5.4), Denklem (5.1) ve (5.2)'nin direkt bir sonucu olup Denklem (5.3)'te $p=2$ yazılıp Denklem (5.4) kullanılarak Denklem (5.5) elde edilir.

İspat. İlk olarak $n_0 \leq 63000$ için $\tau(n_0)$ asal sayı olacak şekilde en azından bir tam sayı olduğu kabul edilsin. Eğer n_0 bir asalın kuvveti değilse bu takdirde $1 < a < b < n_0$ ve $(a, b) = 1$ olmak

üzere $n_0 = ab$ yazılabilir. (1) özelliği gereği n_0 'ın minimal özelliğine karşın ya $\tau(a)$ ya da $\tau(b)$ asaldır. Böylece $n_0 = p^\alpha$ ($\alpha \geq 1$) için o halde iki durum söz konusudur.

1.Durum.

$|\tau(n_0)| = 2$ durumudur. Bu durumda $\tau(2) = -2, 8$ ' in bir katı olduğundan $p \neq 2$ olduğu açıktır. Bu nedenle Denklem (5.2) gereği $\tau(2^{2^\alpha})$ 'dır. Böylece n_0 'ın teksayı olduğu ancak Denklem (5.5) gereği bir tek tam kare olmadığı sonucuna varılır. Bu yüzden $p > 2$ ve $\beta \geq 0$ için $n_0 = p^{2\beta+1}$ olur. Bu değer Denklem (5.2) yerine yazılırsa elde edilir. Tümevarım yapılarak $\tau(p)$ 'nin $\tau(p^{2\beta+1}) = \pm 2$ 'yi böldüğü görülebilir. $|\tau(p)| = 1$ olması Denklem (5.5) ile çelişmekte olup bu nedenle $|\tau(p)| = 2$ olduğu sonucuna varılır. n_0 'ın minimal olma özelliği gereği $n_0 = p$ sonucu elde edilir. Denklem (5.7) gereği $\tau(p) = -2$ olması imkansızdır. Gerçektende $p \neq 3$ 'tür. Çünkü $\tau(3) = 252 \neq -2$ bu nedenle Denklem (5.7) gereği

$$-2 = \tau(p) \equiv \tau(p) = 1 + p \pmod{3}$$

elde edilir ki buradan (12) $p=3$ olduğu sonucuna ulaşılır. Halbuki $p \neq 3$ olarak bulunmuştu. Dolayısı ile geriye yalnızca $\tau(p) = 2$ olasılığı kalır. 1. Durumun ispatını tamamlamak için $p > 63000$ olmak üzere Denklem (5.12) imkansızlığı gösterilmelidir. Bu ise Denklem (5.6) ve Denklem (5.9) denklikleri kullanılarak kolayca yapılabilir. Gerçekten de Denklem (5.6) gereği $2 = \tau(p) \equiv 1 + p^3 \pmod{32}$ elde edilir. Bu ise Denklem (5.13) olmasını gerektirir. Üstelik Denklem (5.9) gereği

$$2 = \tau(p) \equiv 1 + p^{11} \pmod{6n}$$

olup bu ise

$$p \equiv p^{1+4 \cdot 690} \equiv p^{2761} \equiv (p^{11})^{251} \equiv 1 \pmod{691}$$

olmasını gerektirir.

Bu sonuç Denklem (5.13) ile birleştirilerek $p = 22112x + 1$ olduğu elde edilir. 63000'den küçük yalnızca iki değer olup bunlar 22113 ve 44225'tir. Bu sayılardan ilki 3 ile ikincisi 5 ile bölünür. Bu nedenle asal değildirler. Böylece 1.durumun ispatı biter.

2.Durum.

$|\tau(n_0)| > 2$ olması bu durumda $|\tau(n_0)|$ bir tek asal sayı olduğundan $p > 2$ ve $\beta \geq 1$ olmak üzere Denklem (5.5) ve Denklem (5.10) gereği $n_0 = p^{2\beta}$ elde edilir. Şimdi p 'nin $\tau(p)$ 'yi bölmediği gösterilsin. Aksi takdirde Denklem (5.2) gereği $\tau(p^2), \tau(p^3), \dots$ sayılarını böler ve böylece $\tau(n_0) = \tau(p^{2\beta})$ asal olamazlar.

$p=3,5,7$ için; $p/\tau(p)$ 'yi böldüğünden $p \geq 11$ olduğu sonucuna varılır.

$$63000 < 83521 = 17^4 < 1771561 = 11^6$$

Olduğundan $\beta > 1$ durumu

$$\tau(11^4) = -81544677556667127577895$$

ve

$$\tau(13^4) = 1528680442488998435984621$$

durumlarına indirgenir. Bu iki sayıda asal değildir. Gerçekten de ilk sayı 5 ile ikinci sayı 25741 ile bölünür. O halde $11 \leq p \leq 251$ olmak üzere $n_0 = p^2$ durumu kalır. Denklem (5.7) kullanılarak eğer $p = 6x + 1$ ise bu takdirde;

$$\tau(p^2) \equiv \tau(p^4) \equiv 1 + p + p^2 \equiv 0 \pmod{3}$$

Buradan $\tau(p^2) = \pm 3$ olduğu sonucu elde edilir. Denklem (5.9) kullanılarak kongrüansı ortaya çıkardık. Bu iki kongrüans çözülerek $p \equiv 1, 21, 33, 348 \pmod{691}$ elde edilir. Bu ise 251'den küçük olmak üzere p 'nin asal olmasıyla çakışır. O halde $p \neq 6x + 1$ sonucu elde edilir. Sırada (5.14) $3p = v^2 + 23v^2$ olduğu kabul edilsin. Bu takdirde

$$p^{11} \equiv \left(\frac{p}{23}\right) \equiv \left(\frac{3p}{23}\right) = \left(\frac{u^2}{23}\right) \equiv 1 \pmod{23}$$

ve böylece Denklem (5.2) ve Denklem (5.8)'den

$$\tau(p^2) = (\tau(p))^2 - p^{11} \equiv (-1)^2 - 1 \equiv 0 \pmod{23}$$

elde edilir.

Bu ise $\tau(p^2) = \pm 23$ olmasını gerektirir. Ancak Denklem (5.9) gereği

$$\pm 23 \equiv \sigma_{11}(p^2) \equiv 1 + p^{11} + p^{22}$$

kongrüansı elde edilir ki bu kongrüansın çözümleri $p \equiv 92, 340, 410, 432$ olup $p < 251$ olmasıyla çelişir. Böylece p asalı Denklem (5.14) eşitliğindeki formda değil ancak $6x - 1$ özelliğindedir. 251'den küçük bu özellikte 45 asal sayı vardır. Bu asallar (Lehmer, 1965:117) Tablo 1'de listelenmiştir. Bu ise ispatı bitirir.

$\tau(251^2)$ 'nin asallık testi yani teoremin ispatından geriye $\tau(63001)$ 'in asallığını göstermek kalır. Bu sayı da 80561663527802406257321747 olup bu sayı asal sayıdır. Böylece ispat biter. Dikkat edilirse bu değer Ramanujan tau fonksiyonunun ilk asal değeridir.

6. RAMANUJAN TAU FONKSİYONU ÜZERİNE GÜNCEL BİR ÇALIŞMA

Bu bölümde literatüre yeni girmiş olan güzel bir sonucu ele alınacaktır (Lakein ve Larsen, 2021). Bu makalede $\tau(n)$ 'nin küçük değerleri üzerine bazı sonuçlar verilmiştir. Bu bölümde aşağıdaki teoremin ispatını incelenecektir.

Teorem 6.1.(Lakein ve Larsen, 2021) Aşağıdaki önermeler doğrudur:

- (i) Eğer $\tau(n) \in \{2, -24, -70, -90, 92\}$ ise bu takdirde $n=p$ bir asal sayıdır.
- (ii) Eğer $\tau(n) = 2^k < 100$ ise bu takdirde her i için $\tau(p_i) = 2$ ve p_i 'ler farklı asallar olmak üzere $n = p_1 \dots p_k$ 'dir.
- (iii) Eğer $\tau(n) = 48$ ise bu takdirde $\tau(p_1) = 2$ ve $\tau(p_2) = -24$ özelliğindeki p_1 ve p_2 asalları için $n = p_1 p_2$ 'dir.
- (iv) Eğer $\tau(n) = -96$ ise bu takdirde $\tau(p_1) = \tau(p_2)$ ve $\tau(p_3) = -24$ özelliğindeki farklı p_1, p_2, p_3 asalları için $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3$ olur.
- (v) $0 < |\alpha| < 100$ için $\alpha \in \mathbb{Z}$ 'nin yukarıdaki listelenmeyen tüm değerleri için $n > 1$ olmak üzere $\tau(n) \neq \alpha$ 'dır.

Uyarı 6.2. Lang-Trotter konjektürü doğru kabul edilirse herhangi bir α tamsayısı için $\tau(p) = \alpha$ olacak şekilde sonlu sayıda p asalının var olduğu görülebilir. Bu durumda ise Teorem 6.1, $0 < |\alpha| < 100$ olacak şekilde sadece sonlu sayıda n 'nin var olduğunu söyler.

Tüm $n > 2$ değerleri için $|\tau(n)| \geq 100$ eşitsizliğini ispatlama önündeki en önemli engel Swinnerton-Dyer kongrüanslarıdır (Swinnerton-Dyer, 1973). Çünkü bu kongrüanslar $\tau(p)$ 'nin olası değerlerini dışlamak için elimizdeki tek bilinen sonuçlardır. Ancak bu sonuçlar Teorem 6.1(i) şıkkındaki istisnai değerleri elemine etmez ki bu değerler (ii), (iii) ve (iv) şıklarındaki istisnai değerlerin oluşmasına yol açar. Bu nedenle $\tau(p)$ 'nin olası değerlerini daha iyi anlamak için yeni metotlara ihtiyaç duyulduğunu gösterir.

Atkin-Serre konjektürü üzerindeki yapılmış son çalışma $|\tau(p)|$ 'nin tüm asalları için aşağıda sınırlandırılabilceğine dair bir gelişim kaydedilmiştir.

2011 yılında ispat edilmiş ve matematikte son yıllarda yapılmış en büyük başarısı olan Sato-Tate konjektürünün etkili bir versiyonu kullanılarak hemen hemen tüm p asalları için (1.3)'ün doğru olduğunu göstermişlerdir (Gafni vd., 2021).

Burada 1.3 eşitsizliğini sağlamayan sonlu tane p asal kümesini S ile göstereceğiz ve bu kümeye istisnai küme adını vereceğiz. Eğer $P \in S \cup \{2,3\}$ ise bu takdirde 1.3 eşitsizliği $|\tau(n)| \geq 100$ olmasını gerektirir. Bunu kullanarak Teorem 6.1'in aşağıdaki diziyle sonucunu verebiliriz.

Sonuç 6.3. Eğer $n > 1$ ve $0 < |\tau(n)| < 100$ ise bu takdirde n 'nin her bir tek asal çarpanı S kümesinin bir elemanıdır.

Dikkat edilirse $n > 2$ için $|\tau(n)| \geq 100$ eşitsizliğinin doğru olduğunu ispatlayabilmek için Atkin-Serre Konjektürü'nün özel bir hali gibi çok daha güçlü bir ifadeye ihtiyaç duyulmakta olup bu durum literatürde açık problemdir.



KAYNAKÇA

Ahlgren, S., & Boylan, M. (2003). Arithmetic properties of the partition function. *Invent. Math.* 153, No. 3, 487-502.

Asar, A. O., & Arıkan, A., Arıkan, A. (2021). Cebir. Palme Yayınevi.

Ahlgren, S. (2000) The sixth, eighth, ninth, and tenth powers of Ramanujan's theta function. *Proc. Am. Math. Soc.* 128, No. 5, 1333-1338 (2000).

Berndt, B. C., & Ono, K.(1999). Ramanujan's unpublished manuscript on the partition and tau functions with proofs and commentary. *Sémin. Lothar. Comb.*, 42, B42c, 63 p. (1999).

Cohen, H., & Strömberg F. (2017). *Modular Forms: A Classical Approach*, The United States of America: American Mathematical Society.

Deligne, P. (1973) La conjecture de Weil. I. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 43, 273-307.

Gafni, A., & Thorner, J. & Wong, P.-J.(2021).Almost all primes satisfy the Atkin–Serre conjecture and are not extremal. *Research in Number Theory*, volume 7, Article number: 31.

Kiming, I. & Olsson, J. B.(1992). Congruences like Ramanujan's for powers of the partition function, *Archiv der Mathematik*, 59, 348–360.

Lakein, K. & Larsen, A. (2021) Some remarks on small values of $\tau(n)$. *Archiv der Mathematik*, 117, 635–645.

Lehmer, D. H. (1965) The Primality of Ramanujan's Tau-Function, *The American Mathematical Monthly*.72, No. 2, Part II, 15-18.

Mordell, L. J. (1917) On Mr. Ramanujan's empirical expansions of modular functions.", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 19: 117–124.

Ramanujan, S. (1921). Congruence properties of partitions. *Mathematische Zeitschrift*. **9** (1–2): 147–153.

Schoeneberg B. (1974) *Elliptic Modular Functions: An Introduction*. New York: Springer-Verlag.

Sloane, N. J. A. (2007) The on-line encyclopedia of integer sequences.

Swinnerton-Dyer, H. P. F. (1973), On l -adic representations and congruences for coefficients of modular forms, in Kuyk, Willem; Serre, Jean-Pierre (eds.), *Modular functions of one variable, III*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 350, pp. 1–55.

Williams, K. S. (2015) Historical remark on Ramanujan's tau function. *The American Mathematical Monthly*. 122, No. 1, 30-35.

