

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

RASTGELE ELİPTİK, PARABOLİK VE HİPERBOLİK KISMI
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE ANALİZİ

YÜKSEK LİSANS

Hatice EZBER

HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE



T.C.

**GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**RASTGELE ELİPTİK, PARABOLİK VE HİPERBOLİK KISMİ
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE ANALİZİ**

**FOURIER TRANSFORM ANALYSIS OF RANDOM ELLIPTIC, PARABOLIC
AND HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Hatice EZBER

**HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**RASTGELE ELİPTİK, PARABOLİK VE HİPERBOLİK KISMI
DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN FOURIER DÖNÜŞÜMÜ İLE ANALİZİ**

**FOURIER TRANSFORM ANALYSIS OF RANDOM ELLIPTIC, PARABOLIC
AND HYPERBOLIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS**

YÜKSEK LİSANS

Hatice EZBER

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Rastgele Değişken Katsayılı Diferansiyel Denklemlerin Fourier Dönüşümü ve Serisi Yöntemi ile Çözümü**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile LisansüstEğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

13/06/2025

Hatice EZBER

TEŞEKKÜR

Yaptığım çalışmamın her aşamasında , engin bilgi ve tecrübesiyle beni destekleyen,yönlendiren ve değerli vaktini ayıran kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Mehmet MERDAN’a teşekkürlerimi borç bilirim.

Hatice EZBER
GÜMÜŞHANE – 2025



ÖZET

Fonksiyonun bilinmeyenini ile fonksiyonun türevleri arasındaki bağıntıyı ifade eden denkleme diferansiyel denklem denir. Diferansiyel denklemler, fiziksel durumu ifade ederler ve matematiksel model şeklinde adlandırılırlar. Diferansiyel denklemleri çözmenin temel amacı fizik problemlerini ifade eden matematiksel modeller hakkında bir şeyler öğrenmeye çalışmaktır. Bu diferansiyel denklemleri çözmek için de birçok integral dönüşümleri kullanılır. Bunlardan bir tanesi de Fourier dönüşümüdür. Fourier dönüşümü uygulamalı matematik, fizik, ısı akımı, kısmi türevli denklemlerin çözümü, frekans spektrumun belirlenmesi gibi birçok alanda kullanılan integral dönüşümüdür. Fourier dönüşümü, integrallerin hesabı, serilerin toplanması, kısmi türevli diferansiyel denklemlerin sınır değer problemlerinin çözümleri gibi modern bilimin uygulamalarında sıkça kullanılmaktadır.

Çalışmada kısmi diferansiyel denklemlerin sınıflandırılması ile ilgili bilgilendirme yapılmıştır. Fourier dönüşümünün tanımı ve özellikleri, literatür taraması, bazı olasılık dağılımları ile ilgili tanımlara yer verilmiştir. Rastgele değişken ve sabit katsayılı adi diferansiyel denklemlerin Fourier dönüşümü yardımıyla çözümleri incelenmiş, katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele hale getirilen bir ve iki boyutlu hiperbolik, parabolik ve eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin değişkenlere ayırma metodu, Fourier dönüşümü ve serisi yardımıyla çözümlenmesi, olasılık karakterlerinin (beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve güven aralıkları) hesaplanması, Matlab programı yardımıyla bulunan olasılık değerlerinin grafikleri çizilerek grafiksel davranışlarının incelenmesi yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Beklenen değer, Fourier dönüşümü, Güven aralığı, Olasılık karakteristikler, Varyans,

SUMMARY

The equation that expresses the relationship between the unknown of the function and the derivatives of the function is called a differential equation.. Differential equations refer to a physical condition and are called mathematical models. The main purpose of solving differential equations is to try to learn something about mathematical models that express physics problems. Many integral transformations are also used to solve these differential equations. One of them is the Fourier transform. Fourier transform is an integral transform used in many fields such as applied mathematics, physics, heat flow, solution of partial differential equations, determination of frequency spectrum, etc. The Fourier transform is frequently used in applications of modern science, such as the calculation of integrals, the addition of series, and the solution of boundary value problems of partial differential equations.

In the study, information was given about the classification of partial differential equations. The definition and properties of the Fourier transform, literature review, and definitions of some probability distributions are included. The solutions of ordinary differential equations with random variables and constant coefficients were examined with the help of Fourier transform, the one and two dimensional hyperbolic, parabolic and elliptic partial differential equations with randomized coefficients and initial conditions were solved with the help of separation of variables method, Fourier transform and series, the probability characters (expected value, variance, coefficient of variation and confidence intervals) were calculated, the graphical behaviors of the probability values found with the help of Matlab program were examined by drawing graphs.

Keywords: Expected value, Fourier transform, Confidence interval Probability characteristics, Variance,

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	III
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XIII
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı	1
1.2. Literatür Özeti	2
2. BAZI TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması	3
2.2. Fourier Dönüşümü	4
2.3. Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri	5
2.3.1. Lineerlik	5
2.3.2. Öteleme	5
2.3.3. Fourier Dönüşümünün Türevi.....	6
2.3.4. Türevin Fourier Dönüşümü.....	6
2.3.5. Konvolüsyon özelliği	7
2.4. Fourier dönüşümü ile ilgili tanım ve teoremler.....	7
2.5. Bazı Olasılık Dağılımları	8
2.5.1. Normal Dağılım	8
2.5.2. Beta Dağılımı	9
2.5.3. Gamma Dağılımı	9
2.5.4. Üstel Dağılım	9
2.5.5. Laplace Dağılımı.....	10
2.5.6. Üçgensel Dağılım.....	10
2.5.7. Düzgün Dağılım	11
2.5.8. Weibull Dağılımı.....	11
2.5.9. Ki-Kare Dağılımı	12
3. UYGULAMALAR	12

3.1.Fourier dönüşümü yöntemi ile rastgele değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümleri.....	12
3.2.Bir Boyutlu Hiperbolik denklemlerin Fourier Serisi çözümleri	21
3.3.İki Boyutlu Hiperbolik denklemlerin Fourier Serisi çözümleri.....	32
3.4. Bir Boyutlu Parabolik denklemlerin Fourier serisi çözümleri	53
3.5.İki Boyutlu Parabolik denklemlerin Fourier serisi çözümleri.....	63
3.6.İki Boyutlu Eliptik denklemlerin Fourier serisi çözümleri.....	83
3.7. İki Boyutlu Hiperbolik ve Parabolik denklem sistemlerinin Fourier serisi çözümleri	88
4. İRDELEME	101
5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	102
6. ÖNERİLER.....	103
KAYNAKÇA.....	104
ÖZGEÇMİŞ	106

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 6)$, özel değerleri için (1) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	13
Şekil 2. $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 6)$ özel değerleri için (1) denkleminin varyansının çözüm davranışı	14
Şekil 3. $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 6)$ özel değerleri için (1) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	15
Şekil 4. $A \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$, özel değerleri için (4) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	16
Şekil 5. $A \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$, özel değerleri için (4) denkleminin varyansının çözüm davranışı	17
Şekil 6. $A \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$ özel değerleri için (4) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	18
Şekil 7. $A \sim \text{Beta}(\eta = 1, \rho = 3)$, özel değerleri için (9) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	19
Şekil 8. $A \sim \text{Beta}(\eta = 1, \rho = 3)$, özel değerleri için (9) denkleminin varyansının çözüm davranışı	20
Şekil 9. $A \sim \text{Beta}(\eta = 1, \rho = 3)$, özel değerleri için (9) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	20
Şekil 10. $A \sim N_{\mu = 2, \sigma^2 = 1}$ özel değeri için (12) denklemin beklenen değerinin çözüm davranışı	23
Şekil 11. $A \sim N_{\mu = 2, \sigma^2 = 1}$ özel değerleri için (12) denkleminin varyansının çözüm davranışı	24
Şekil 12. $A \sim N_{\mu = 2, \sigma^2 = 1}$ özel değerleri için (12) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı	24
Şekil 13. $u(t, x)$ 'in değişim katsayı değeri	25
Şekil 14. $A \sim \text{Beta} \alpha = 3, \beta = 2, B \sim \text{Gama} \varsigma = 2, \xi = 1, C \sim \text{Üstel} \lambda = 3$ özel değerleri için (14) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	29
Şekil 15. $A \sim \text{Beta} \alpha = 3, \beta = 2, B \sim \text{Gama} \varsigma = 2, \xi = 1, C \sim \text{Üstel}$	30
Şekil 16. $A \sim \text{Beta} \alpha = 3, \beta = 2, B \sim \text{Gama} \varsigma = 2, \xi = 1, \dots$	31
Şekil 17. $u(t, x)$ 'in değişim katsayı değeri	32

Şekil 18. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, (a) $y = 4$, (b) $x = 4$, (c) $t = 4$ özel değerleri için (18) denkleminin beklenen değerinin 3 boyutlu çözüm davranışı	38
Şekil 19. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, (a) $y = 4$, (b) $x = 4$, (c) $t = 4$ özel değerleri için (18) denkleminin varyansın 3 boyutlu çözüm davranışı	40
Şekil 20. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, (a) $y = 4$, (b) $x = 4$, (c) $t = 4$ özel değerleri için (18) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı	41
Şekil 21. $u(t, x, y)$ 'in değişim katsayı değerinin 3D grafiği ve Contur plot davranışı...	41
Şekil 22. $A \sim \text{Üçg}(a = 1, b = 2, c = 5)$, $B \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 3)$ ve $C \sim \text{Weibull}(\xi = 2, \zeta = 4)$, (a) $y = 2$, (b) $x = 2$, (c) $t = 2$ özel değerleri için (28) denkleminin beklenen değerinin 3 boyutlu çözüm davranışı	48
Şekil 23. $A \sim \text{Üçg}(a = 1, b = 2, c = 5)$, $B \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 3)$ ve $C \sim \text{Weibull}(\xi = 2, \zeta = 4)$, (a) $y = 2$, (b) $x = 2$, (c) $t = 2$ özel değerleri için (28) denkleminin varyansın 3 boyutlu çözüm davranışı	50
Şekil 24. $A \sim \text{Üçg}(a = 1, b = 2, c = 5)$, $B \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 3)$ ve $C \sim \text{Weibull}(\xi = 2, \zeta = 4)$, (a) $t = 2$, (b) $x = 2$, (c) $y = 2$ özel değerleri için (28) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı	52
Şekil 25. $u(t, x, y)$ 'in değişim katsayısının davranışı	53
Şekil 26. $A \sim \chi(r = 2)$ özel değeri için (38) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	56
Şekil 27. $A \sim \chi(r = 2)$ özel değerleri için (38) denkleminin varyansının çözüm davranışı	57
Şekil 28. $A \sim \chi(r = 2)$ özel değeri için (38) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	57
Şekil 29. $A \sim \chi(r = 2)$ için $u(t, x)$ 'in değişim katsayısının çözüm davranışı	58
Şekil 30. $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ özel değeri için (40) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	60
Şekil 31. $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ özel değerleri için (40) denkleminin varyansının çözüm davranışı	61
Şekil 32. $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ özel değeri için (40) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	62
Şekil 33. $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ için $u(t, x)$ 'in değişim katsayı değeri	63
Şekil 34. $\Gamma\varsigma = 3, \varrho = 2$, (a) $y = 3$, (b) $x = 3$, (c) $t = 3$ özel değerleri için (42) denkleminin beklenen değerinin 3 boyutlu çözüm davranışı	68
Şekil 35. $\Gamma\varsigma = 3, \varrho = 2$, (a) $y = 3$, (b) $x = 3$, (c) $t = 3$ özel değerleri için (42) denkleminin varyansın 3 boyutlu çözüm davranışı	70

Şekil 36. $\Gamma\zeta = 3, \varrho = 2$, (a) $t = 3$, (b) $x = 3$, (c) $y = 3$ özel değerleri için (42) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı	72
Şekil 37. $t = 3$ için $u(t, x, y)$ 'nin değişim katsayı değeri	73
Şekil 38. $\lambda = 4$, (a) $y = 1$, (b) $x = 1$, (c) $t = 1$ özel değerleri için (48) denkleminin beklenen değerinin 3 boyutlu çözüm davranışı	78
Şekil 39. $\lambda = 4$, (a) $y = 1$, (b) $x = 1$, (c) $t = 1$ özel değerleri için (48) denkleminin varyansın 3 boyutlu çözüm davranışı	80
Şekil 40. $\lambda = 4$, (a) $t = 1$, (b) $x = 1$, (c) $y = 1$ özel değerleri için (48) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı	81
Şekil 41. $\lambda = 4$, (a) $t = 1$, (b) $x = 1$, özel değerleri için (48) $u(t, x)$ 'in değişim katsayı değeri.....	83
Şekil 42. $A \sim \text{Düzgün}$ $\alpha = 2, \beta = 4$ özel değerleri için (54) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	85
Şekil 44. $A \sim \text{Düzgün}$ $\alpha = 2, \beta = 4$ özel değerleri için (54) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	87
Şekil 45. $u(x, y)$ 'nin değişim katsayı değeri	88
Şekil 46. $A \sim \text{Weibull}(\xi = 1, \zeta = 4)$ özel değerleri için (63) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	93
Şekil 47. $A \sim \text{Weibull}(\xi = 1, \zeta = 4)$ özel değerleri için (63) denkleminin varyansının çözüm davranışı	94
Şekil 48. $A \sim \text{Weibull}(\xi = 1, \zeta = 4)$ özel değerleri için (63) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	95
Şekil 49. ut, x 'nin değişim katsayı değeri	95
Şekil 50. $A \sim \text{Üçg}(a = 2, b = 4, c = 7)$ özel değerleri için (75) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	98
Şekil 51. $A \sim \text{Üçg}(a = 2, b = 4, c = 7)$ özel değerleri için (75) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	99
Şekil 52. $A \sim \text{Üçg}(a = 2, b = 4, c = 7)$ özel değerleri için (75) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	100

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$Beta(p, q)$	: Beta dağılımı
d.d.	: Diğer durumlarda
$Düzgün(\delta, \xi)$	: Düzgün dağılım
$E(X)$	: Rastgele değişkenin beklenen değeri
$F[f(x)]$	: $f(x)$ fonksiyonun Fourier dönüşümü
$F^{-1}[f(x)]$	: $f(x)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü
$Gama(\theta, \gamma)$	: Gama dağılımı
KDD	: Kısmi diferansiyel denklem
$Laplace(a, b)$	: Laplace dağılımı
$M_x(t)$	: Rastgele değişkenin moment çıkaran fonksiyonu
$N(\mu, \sigma^2)$	: Normal dağılım
std	: Standart sapma
$Üçg(a, b, c)$	: Üçgensel dağılım
$Üstel(\lambda)$	: Üstel dağılım
$\chi^2_{(r)}$	: Ki-kare dağılımı
$Var(X)$	: Rastgele değişkenin varyansı
v.d.	: Ve diğerleri, ve devamı
$\mathbb{Z}$	: Tamsayı

1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı

Bilinmeyen fonksiyon ile onun türevleri arasındaki bağıntıyı ifade eden denkleme diferansiyel denklem denir. Böylece akışkan hareketi, elektrik devresindeki akımı, katı bir nesnedeki ısı transferi, sismik dalgaların belirlenmesi, popülasyon artımı veya azalması ve daha birçok benzeri problemleri anlamak ve onları incelemek için diferansiyel denklemler hakkında bilgi sahibi olmak gerekmektedir. Diferansiyel denklemler, fiziksel modeli ifade ederler ve matematiksel model şeklinde adlandırılırlar. Diferansiyel denklemleri çözmenin temel amacı fiziksel yöntemi ifade eden matematiksel model hakkında bir şeyler öğrenmeye çalışmaktır. Bilinmeyen fonksiyon çok değişkenli ise kısmi diferansiyel denklem denir. (Erdem, 2009) Kısmi diferansiyel denklemler üç tip olarak sınıflandırılır.

x ve y değişkenlerine bağlı olarak

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

şeklinde tanımlanan ikinci dereceden bir polinomun eğrisi kuadrik bir egridir. Bu eğri:

$B^2 - 4AC < 0$ ise bir elipstir.

$B^2 - 4AC = 0$ ise bir paraboldür.

$B^2 - 4AC > 0$ ise bir hiperboldür (Koca, 2001).

Tezin amacı kısmi diferansiyel denklemleri sınıflandırarak, Fourier Dönüşümü hakkında bilgi vermek ve Fourier dönüşümü yardımıyla sınıflandırılan KDD'in çözümlerini elde etmektir. Parametreler ve başlangıç koşulları farklı olasılık dağılımlarından seçilerek rastgele hale getirilen eliptik, hiperbolik ve parabolik kısmi ve adi diferansiyel denklemlerine Fourier dönüşümü uygulanarak elde edilen çözümlerinin olasılık karakterleri arasında literatürde çok yaygın kullanılan beklenen değer, varyans ve güven aralığının Matlab paket programı yardımıyla grafikleri çizilerek davranışları incelenecektir. Ulusal ve uluslararası literatürde, Fourier dönüşümü yönteminin adi ve kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması var olup rastgele eliptik, hiperbolik ve parabolik adi ve kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmamıştır. Elektrokimya, biyoloji, fizik, biyomühendislik, mekatronik-mekanik gibi mühendisliğin ve matematiğin birçok problemi diferansiyel denklem olarak ifade edildiğinden, Fourier dönüşüm yönteminin kullanılmasının daha hızlı çözüm elde edilmesine yönelik olarak yeni bir bakış açısı getireceği düşünülmektedir.

1.2. Literatür Özeti

Fourier dönüşümü matematik, fizik, ısı akımı, kısmi türevli denklemlerin çözümü, frekans spektrumun belirlenmesi gibi birçok alanda kullanılan integral dönüşümüdür. Bu alanda yapılan son çalışmalar;

Alp vd. tarafından 2008 yılında yapılan çalışmada jeofizik verilerin analizinde yaygın olarak kullanılan Fourier dönüşümü ile dalgacık dönüşümü yöntemleri karşılaştırılmıştır. Dalgacık dönüşüm yöntemi, jeofizik verilerdeki belirli fonksiyonlara uygulanarak Fourier dönüşümü ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir (Alp vd.,2008). Ceylan tarafından 2016 yılında yapılan çalışmada doğrusal olmayan gecikmeli parabolik denklemi başlangıç koşulları alınarak değişkenlere ayırma ve Fourier Serisi metodu ile çözmüştür (Ceylan, 2016). Hanbay vd. tarafından 2017 yılında yapılan çalışmada gerçek zamanlı kumaş hatası tespit sistemi geliştirilmiş ve yuvarlak örgü makinesi üzerinde test edilmiştir. Kumaş görüntüsünün dokusal özellikleri Fourier dönüşümü temelinde çıkarılmıştır (Hanbay vd.,2017). Düz vd. tarafından 2023 yılında yapılan çalışmada Fourier dönüşümü ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilerek, değişken katsayılı adi diferansiyel denklemler Fourier dönüşümü kullanılarak çözülmüştür (Düz vd.,2023).

Yakın dönemde rastgele diferansiyel denklemler üzerine gerçekleştirilen çalışmalar incelendiğinde; Merdan vd. 2019 yılında, rastgele kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri Diferansiyel dönüşüm yöntemi ile kısmi diferansiyel denklemlerin başlangıç şartları ve parametreleri Beta dağılımı ile incelenmiştir (Merdan vd.,2019). Merdan vd. tarafından 2023 yılında yapılan çalışmada adi diferansiyel denklemlerin katsayılarının veya başlangıç koşullarının rastgele seçilmesi durumunda, söz konusu denklemlerin çözümleri Residual kuvvet serisi yöntemi ile incelenmiştir (Merdan vd.,2023). Merdan vd. tarafından 2024 yılında yapılan çalışmada rastgele HIV/AIDS modelinin kesirli mertebeden yaklaşık analitik çözümü diferansiyel dönüşüm yöntemiyle incelenmiştir (Merdan vd.,2024). Şahin tarafından 2024 yılında yapılan tez çalışmasında başlangıç koşulları ve katsayıları rastgele değişken seçilerek rastgele hale getirilen kısmi diferansiyel denklemler Aboodh-Adomian Ayırıştırma Yöntemi kullanılarak yaklaşık analitik çözümleri elde edilmiştir (Şahin, 2024).

2. BAZI TANIM VE TEOREMLER

2.1. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

Kısmi diferansiyel denklemler üç tip olarak sınıflandırılır.

x ve y değişkenlerine bağlı olarak

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

şeklinde tanımlanan ikinci dereceden bir polinomun eğrisi kuadrik bir eğridir. Bu eğri:

$B^2 - 4AC < 0$ ise bir elipstir.

$B^2 - 4AC = 0$ ise bir paraboldür.

$B^2 - 4AC > 0$ ise bir hiperboldür.

x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olan bir $u(x, y)$ değişkeni olmak üzere derecesi iki olan kısmi diferansiyel denklem

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y, u) = 0$$

şeklinde tanımlandığında benzeri terminoloji kullanılarak denklemin

$B^2 - 4AC < 0$ ise eliptik

$B^2 - 4AC = 0$ ise parabolik

$B^2 - 4AC > 0$ ise hiperbolik

olduğu ifade edilir.

Kısmi diferansiyel denklemler çeşitli tipte sınır şartlarıyla birlikte verilir. Sınır şartı u cinsinden verilmişse “*Dirichlet tipi sınır şartı*” olarak, u ‘nun gradyanı cinsinden verilmişse “*Neumann tipi sınır şartı*” olarak adlandırılır. u ve gradyanı birlikte verildiği taktirde “*karışık sınır şartı*” söz konusu olur.

Eliptik denklemler “*potansiyel*” adı verilen bir büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil ederler. Potansiyel, bir büyüklüğün kesafetini (yoğunluğunu) ölçer. Örneğin sıcaklık ve konsantrasyon birer potansiyel büyüklüktür. Bağımlı u değişkeni potansiyelin herhangi bir noktada, sınırdaki değerlere bağlı olarak aldığı denge veya kararlı durumu belirtir.

Dolayısıyla eliptik denklemler aynı zamanda potansiyel denklemler olarak da adlandırılır. Eliptik denklemin 2-boyutlu hal için genel tanımı,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0$$

şeklinde dir. Potansiyelin farklı bir başlangıç durumundan itibaren eriştiği daimi durum değerleri bir parabolik denklemle temsil edilir. Dolayısıyla bu denklemler t zaman değişkenini de bağımsız değişkenlerden biri olarak içerir. Gerçekte başlangıç durumundan itibaren zaman ilerledikçe nihai denge durumuna doğru adım adım ilerlenir. Aşağıda verilen önemli bir parabolik denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{c\rho}{k} \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

şeklinde olup, bu denklem bir çubuk boyunca sıcaklığın uçlardaki şartlara bağlı olarak zamanla nasıl değiştiğini temsil etmektedir. Buradaki c, ρ ve k büyüklükleri parametreler olup, sırasıyla ısı kapasite, yoğunluk ve ısı iletkenlik katsayısını belirtmektedir. Bu örnekte $A = 1, B = 0, C = 0$ ve dolayısıyla $B^2 - 4AC = 0$ olup, parabol ile aynıdır. Bu denklem “ısı denklemi” olarak adlandırılır. Aynı denklem, “ $c\rho/k$ ” yerine, D difüzyon katsayısı olmak üzere “ $1/D$ ” konulması halinde “difüzyon denklemi” olarak adlandırılır. Bu bakımdan “ $c\rho/k$ ” katsayısı da bazen “ısı yayılım katsayısı” olarak adlandırılır. Üçüncü tip hiperbolik denklemler de zamana bağlıdır. Dalgaların nasıl yayıldığını ifade ettiklerinden, “dalga denklemi” olarak adlandırılırlar. Bir boyutlu halde yayların titreşimini gösterir. Titreşen bir yay için kısmi-diferansiyel denklem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{Tg}{w} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

şeklinde olup, burada T, g ve w büyüklükleri sırasıyla yaydaki gerilmeyi, yer çekimi ivmesini ve birim uzunluk başına ağırlığı belirtmektedir. Bütün bu parametreler pozitif büyüklükler olup $A = 1, B = 0, C < 0$ ve $B^2 - 4AC > 0$ dır (Sobolev, 1989)

2.2.Fourier Dönüşümü

$$F[f(x)] = F(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx$$

şeklinde verilen integrale $f(x)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü,

$$F^{-1}(f(x)) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} F(s) ds$$

ifadesine $F(x)$ fonksiyonunun ters Fourier dönüşümü denir. Fourier dönüşümü $F(f)$, ters Fourier dönüşümü ise $F^{-1}(f)$ ile gösterilir.

Diferansiyel denklemlerin çözümünde Fourier dönüşümü oldukça kullanışlı bir araçtır. Diferansiyel denkleme dönüşüm uygulandıktan sonra s değişkenine göre

cebirsel denklem olarak yazılabilir. Cebirsel denklemin çözümü bulunduğundan ters dönüşüm uygulanarak denklemin çözümü elde edilir.

2.3. Fourier Dönüşümünün Temel Özellikleri

2.3.1. Lineerlik

Bu dönüşüm doğrusal bir dönüşümdür. $f(x)$ ve $g(x)$ integrallenebilir fonksiyonlar, c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere;

$$F(c_1f(x) + c_2g(x)) = c_1F(f(x)) + c_2F(g(x))$$

sağlanır. Lineerlik özelliğinden Fourier Dönüşümü lineer denklem sistemlerinde de kullanılabilir.

2.3.2. Öteleme

(i) Zaman değişkenine göre Fourier dönüşümüne öteleme yapılabilir. Yani

$$F[f(x - a)](s) = e^{-isa} F[f(x)](s)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$F[f(x - a)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a) e^{-isx} dx$$

olur. İntegralde $x - a = u$ değişken dönüşümü yapılırsa

$$F[f(x - a)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-is(u+a)} du = \frac{1}{2\pi} e^{-isa} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-isu} du = e^{-isa} F(s)$$

elde edilir.

(ii) Frekans öteleme özelliğine sahip olan dönüşüm

$$F(f(x)e^{ax}) = F(s - a)$$

olur.

İspat:

$$F(f(x)e^{ax}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{iax} e^{-isx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i(s-a)x} dx = F(s - a)$$

elde edilir.

2.3.3. Fourier Dönüşümünün Türevi

$$\frac{dF(s)}{ds} = -iF(xf(x))$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$\begin{aligned}\frac{dF(s)}{ds} &= \frac{d}{ds} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-isx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{d}{ds} e^{-isx} dx \\ &= \frac{-i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) e^{-isx} dx = -iF(xf(x))\end{aligned}$$

elde edilir.

2.3.4. Türevin Fourier Dönüşümü

$$F\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = isF(s)$$

eşitliği sağlanır.

İspat:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} F(s) ds$$

ve

$$\begin{aligned}\frac{df(x)}{dx} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dx} \int_{-\infty}^{\infty} e^{isx} F(s) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx} [e^{isx} F(s)] ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} ise^{isx} F(s) ds = isf(x)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$F\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = F(isf(x)) = isF(f(x)) = isF(s)$$

elde edilir. İkinci mertebeden türevin benzer şekilde Fourier dönüşümü alınırsa

$$F\left(\frac{d^2f(x)}{dx^2}\right) = isF\left(\frac{df(x)}{dx}\right) = -s^2F(s)$$

elde edilir. Buna göre n . mertebeden türevin Fourier dönüşümü

$$F\left(\frac{d^nf(x)}{dx^n}\right) = (is)^n F(s)$$

olur.

2.3.5. Konvolüsyon özelliği

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon$$

olarak ifade edilen $(-\infty, \infty)$ aralığında f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu denir.

Teorem : $F(\omega)$ ve $G(\omega)$ sırasıyla $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının Fourier dönüşümleri iseler, o takdirde $f * g$ konvolüsyonunun Fourier dönüşümü $F(\omega)G(\omega)$ çarpımına eşittir.

İspat:

$$\begin{aligned} F\{f * g\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon \right) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} dx \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \varepsilon) g(\varepsilon) d\varepsilon \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon) e^{-i\omega \varepsilon} d\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \varepsilon) e^{-i\omega(x - \varepsilon)} dx \end{aligned}$$

dir. $\mu = x - \varepsilon$ değişken değiştirmesiyle

$$\begin{aligned} F\{f * g\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\varepsilon) e^{-i\omega \varepsilon} d\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mu) e^{-i\omega \mu} d\mu \\ &= F(\omega)G(\omega) \end{aligned}$$

elde edilir ki bu teorem ispatlanır.

Konvolüsyon aşağıdaki özelliklere sahiptir:

- a) $f * g = g * f$ (değişme)
- b) $f * (g * h) = (f * g) * h$ (birleşme)
- c) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (dağılma) (Altın, 2011).

2.4. Fourier Dönüşümü ile ilgili tanım ve teoremler

Tanım 2.4.1: Dırac delta dağılımı ile tanımlanan fonksiyonun $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon$ ise

$$\delta_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}, & 0 < t < \varepsilon \\ 0, & t < 0 \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases} \quad \delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{\varepsilon}(t)$$

özellikleri şu şekilde verilir;

- i. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
- ii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0)$
- iii. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^n(t - t_0) dt = (-1)^n f^n(t_0)$

$$\begin{aligned} \text{iv.} \quad & \delta^n(w - w_0) = n! (-1)^n \frac{\delta(w - w_0)}{(w - w_0)^n} \\ \text{v.} \quad & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w - w_0) f(w)}{(w - w_0)^n} dw = \frac{1}{n!} \frac{d^n f(w)}{dw^n} \Big|_{w=w_0} \\ & \delta(w - w_0) = \begin{cases} 0, & w \neq w_0 \\ \infty, & w = w_0 \end{cases} \end{aligned}$$

Tanım 2.4.2. Heaviside fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$H(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

Lemma 2.4.1. $H(t)' = \delta(t)$

Teorem 2.4.1. $\delta(t)$ fonksiyonun Fourier dönüşümü $F[\delta(t)] = 1$

Teorem 2.4.2. Bazı fonksiyonların Fourier dönüşümleri aşağıdaki gibidir

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & F[1] = 2\pi\delta(w) \\ \text{II.} \quad & F[t^n] = 2\pi i^n \delta^n(w) \\ \text{III.} \quad & F[t^n f(t)] = i^n \frac{d^n F[f(t)]}{dw^n} \\ \text{IV.} \quad & F[e^{i w_0 t}] = 2\pi\delta(w - w_0) \\ \text{V.} \quad & \text{Eğer } F[f(t)] = F(w) \text{ ise } F[e^{i w_0 t} f(t)] = F(w - w_0) \\ \text{VI.} \quad & F[e^{at}] = 2\pi\delta(w + ia) \\ \text{VII.} \quad & F[e^{-t^2}] = \sqrt{\pi} e^{-\frac{w^2}{4}} \\ \text{VIII.} \quad & \text{Eğer } F[f(t)] = F(w) \text{ ise } F[e^{at} f(t)] = F(w + ia) \\ \text{IX.} \quad & \text{Eğer } F[f(t)] = F(w) \text{ ise } F[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} F(w) \end{aligned}$$

Teorem 2.4.3. $w > 0$,

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & F\left[\frac{1}{t}\right] = -2\pi i H(w) \\ \text{b)} \quad & F\left[\frac{1}{t^2}\right] = -2\pi w \\ \text{c)} \quad & F\left[\frac{1}{t^3}\right] = \pi i w^2 \\ \text{d)} \quad & F\left[\frac{1}{t^4}\right] = \frac{\pi w^3}{3} \\ \text{e)} \quad & F\left[\frac{1}{t^5}\right] = -\frac{\pi i w^4}{12} \\ \text{f)} \quad & F[\ln t] = -\frac{2\pi H(w)}{w} \quad (\text{Düz vd.,2023}). \end{aligned}$$

2.5. Bazı Olasılık Dağılımları

2.5.1. Normal Dağılım

X Sürekli rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \quad -\infty < x < \infty, \mu \in \mathcal{R}, \sigma > 0 \quad (\mu, \sigma^2)$$

için X rastgele değişkeni (μ, σ^2) parametrelili normal dağılıma sahiptir denir. Normal dağılım için $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ notasyonu kullanılır (Khaniyev vd., 2017).

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \mu, E(X^2) = \mu^2 + \sigma^2, Var(X) = \sigma^2$$

2.5.2. Beta Dağılımı

Tanım 2.5.2.1. p ve q değişkenlerinin sıfırdan büyük tüm değerleri için tanımlanan

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$$

beta fonksiyonu olarak tanımlanır. (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; p, q) = \begin{cases} \frac{1}{B(p, q)} x^{p-1} (1-x)^{q-1}, & 0 < x < 1 \\ 0 & , d. d \end{cases}$$

olan X rastgele değişkeni (p, q) parametrelili beta dağılımına sahiptir denir ve $X \sim Beta(p, q)$ şeklinde gösterilir.

Beta dağılımının beklenen değer ve varyansı;

$$E(X) = \frac{p}{p+q}$$

$$Var(X) = \frac{pq}{(p+q)^2(p+q+1)} \quad \text{şeklindedir.}$$

2.5.3. Gamma Dağılımı

X negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun. Bu değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x; \theta, \gamma) = \begin{cases} \frac{\gamma^\theta}{\Gamma(\theta)} x^{\theta-1} e^{-\gamma x}, & x \geq 0, \theta, \gamma > 0 \\ 0 & , d. d \end{cases}$$

oluyor ise X rastgele değişkenine (θ, γ) parametrelili gamma dağılımına sahiptir denir.

$X \sim Gamma(\theta, \gamma)$ rastgele değişkeninin, birinci momenti ve varyansı;

$$E[X] = \frac{\theta}{\gamma}, Var[X] = \frac{\theta}{\gamma^2}$$

şeklindedir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

2.5.4. Üstel Dağılım

X rastgele değişkeninin, $\rho > 0$ parametresine göre, olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$O(x) = \begin{cases} \rho e^{-\rho x} & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases}$$

ise X 'e üstel dağılmış rastgele değişken, $O(x)$ 'e de üstel dağılım denir.

Moment çıkaran fonksiyon tanımından dağılımın moment çıkaran fonksiyonu aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
M_x(t) &= E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{xt} \rho e^{-\rho x} dx = \rho \int_0^{\infty} e^{(t-\rho)x} dx \\
&= \frac{\rho}{t-\rho} e^{(t-\rho)x} \Big|_0^{\infty} \\
&\lim_{x \rightarrow \infty} e^{(t-\rho)x} = 0 \text{ olduğu için;} \\
M(t) &= \frac{\rho}{\rho-t}; \quad t < \rho \text{ için elde edilir.}
\end{aligned}$$

Moment çıkaran fonksiyon kullanılarak beklenen değer ve varyans bulunabilir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Buna göre beklenen değer,

$$E(X) = \int_0^{\infty} \rho x e^{-\rho x} dx$$

Parçalı integral kullanırsak ($u = x, dv = \rho e^{-\rho x}$)

$$E(X) = -x e^{-\rho x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-\rho x} dx = \frac{1}{\rho}$$

şeklinde elde edilir. Buna göre varyans aşağıdaki gibi olur.

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} \rho x^2 e^{-\rho x} dx = \frac{2}{\rho^2}$$

$E(X^2)$ hesaplanırken de parçalı integral kullanılır. ($x^2 = u, dv = e^{-\rho x} dx$)

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad Var(X) = \frac{1}{\rho^2}$$

2.5.5. Laplace Dağılımı

Laplace dağılımının konum parametresi (ζ) ve ölçek parametresi

$\varrho > 0$ olmak üzere iki parametresi bulunmaktadır. Laplace dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x; \zeta, \varrho) = \begin{cases} \frac{1}{2\varrho} e^{-\left(\frac{|x-\zeta|}{\varrho}\right)}, & -\infty < x < \infty \\ 0, & d.d \end{cases}$$

şeklindedir.

Moment çıkaran fonksiyonu,

$$E[e^{tx}] = \frac{e^{\zeta t}}{1 - \varrho^2 t^2}$$

Faydalanılarak beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi bulunabilir.

$X \sim Laplace(\zeta, \varrho)$ Laplace dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, beklenen değer ve varyansı

$$E(X) = \zeta \text{ ve } Var(X) = 2\varrho^2 \quad (\text{Forbes et al, 2011}).$$

2.5.6. Üçgensel Dağılım

Genelleştirilmiş üçgensel dağılıma sahip, bir X rastgele değişkeninin,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(\mathbb{b}-a)(c-a)}, & a \leq x < c \\ \frac{2(\mathbb{b}-x)}{(\mathbb{b}-a)(\mathbb{b}-c)}, & c < x \leq \mathbb{b} \end{cases}$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu şeklinde tanımlanır (Feller, 1968). Burada rastgele değişkenin alabileceği en küçük değer a ve en büyük değer $\mathbb{b}$, c ise mod değeridir.

Beklenen değeri ve varyansı;

$$E(X) = \frac{(a + \mathbb{b} + c)}{3}, Var(X) = \frac{a^2 + \mathbb{b}^2 + c^2 - a\mathbb{b} - ac - \mathbb{b}c}{18}$$

Olur.

2.5.7. Düzgün Dağılım

X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{\xi - \delta}, & \delta \leq x \leq \xi \\ 0, & d. d \end{cases}$$

ise $[\delta, \xi]$ kapalı aralığında bu rastgele değişken sürekli düzgün dağılıma sahiptir.

Düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri, $X \sim Düzgün(\delta, \xi)$ ' dir.

Düzgün dağılımın,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\xi t} - e^{\delta t}}{(\xi - \delta)t}$$

moment çıkaran fonksiyonunu kullanarak, $X \sim Düzgün(\delta, \xi)$ rastgele değişkenin beklenen değeri ve varyansı;

$$E[X] = \frac{\delta + \xi}{2}, Var[X] = \frac{(\xi - \delta)^2}{12}$$

elde edilir (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

2.5.8. Weibull Dağılımı

X negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun. Bu rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$h_x(x; \tau, \sigma) = \begin{cases} \tau \sigma x^{\tau-1} e^{-\sigma x^\tau}, & x \geq 0, \tau > 0, \sigma > 0 \\ 0, & d. d \end{cases}$$

ise X rastgele değişkenine (τ, σ) parametrelili Weibull dağılımına sahiptir denir (Weibull, 1951).

Bu dağılımının beklenen değeri ve varyansı şöyle verilir:

$$E(X) = \frac{1}{\sigma^{\frac{1}{\tau}}} \frac{1}{\tau} \Gamma\left(\frac{1}{\tau}\right)$$

$$Var(X) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\tau}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\tau}\right)}{\sigma^{\frac{2}{\tau}}}$$

2.5.9. Ki-Kare Dağılımı

X rastgele değişkeninin ki-kare dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$h(x; r) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{r}{2}} \Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0 \\ 0, & d.d \end{cases}$$

ise X rastgele değişkenine $(x; r)$ parametrelili ki-kare dağılımına sahiptir denir.

X rastgele değişkeninin r serbestlik dereceli ki-kare dağılımı için beklenen değer ve varyans şöyle verilir:

$$E(X) = r$$

$$Var(X) = 2r$$

3. UYGULAMALAR

3.1. Fourier Dönüşümü yöntemi ile rastgele değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümleri

Bu bölümde rastgele değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Fourier Dönüşüm yöntemi kullanılarak üç adet örnek çözülmüştür.

Örnek 3.1.1

$$y'' - 3y' - 4y = Ae^{-x} \left(\frac{10}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right), \quad (1)$$

$A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 6)$ rastgele değişken olmak üzere, rastgele katsayılı adi diferansiyel denklemini Fourier dönüşümü yöntemi ile çözümler.

Çözüm:

(1) denkleminin iki tarafının Fourier dönüşümünü alalım

$$F(y'' - 3y' - 4y) = F\left(Ae^{-x} \left(\frac{10}{x^3} + \frac{6}{x^4} \right)\right),$$

$$F(y'') - 3F(y') - 4F(y) = F\left(\frac{10Ae^{-x}}{x^3}\right) + F\left(\frac{6Ae^{-x}}{x^4}\right),$$

$$(-w^2 Y) - 3iwY - 4Y = A \left(10\pi i(w - i)^2 + \frac{6\pi(w - i)^3}{3} \right),$$

$$-(w^2 + 3iw + 4)Y = 2A\pi(w - i)^2(w + 4i),$$

$$Y = \frac{-2A\pi(w-i)^2(w+4i)}{(w-i)(w+4i)} = -2A\pi(w-i). \quad (2)$$

(2) ifadesinin ters Fourier dönüşümü alınır

$$\begin{aligned} y(x) &= F^{-1}(Y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} -2A\pi(w-i)e^{iwx}dw \\ &= -A \int_{-\infty}^{\infty} (w-i)e^{iwx}dw = \frac{Ae^{-x}}{x^2} \end{aligned} \quad (3)$$

genel çözüm elde edilir.

Düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri, $X \sim \text{Düzgün}(\alpha, \beta)$ ' dir.

$A \sim U(\alpha, \beta)$ rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı;

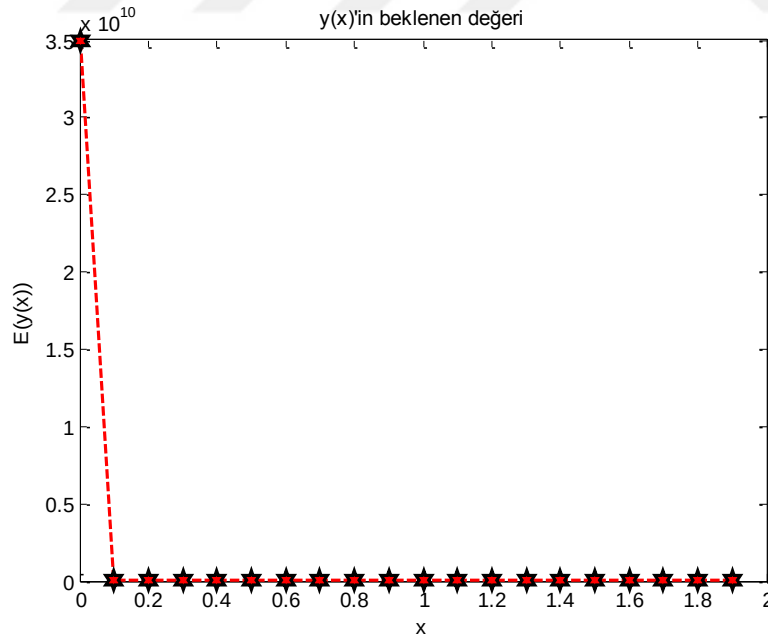
$$E[A] = \frac{\alpha+\beta}{2}, \text{Var}[A] = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$$

şeklinde (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017). (3) ifadesinin beklenen değer ve varyansları;

$$E[y(x)] = E\left[\frac{Ae^{-x}}{x^2}\right] = \frac{e^{-x}}{x^2} E[A] = \frac{e^{-x}}{x^2} \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$\alpha = 1, \beta = 6$ özel değerleri için

$$E[y(x)] = \frac{7}{2} \frac{e^{-x}}{x^2} \text{ bulunur.}$$



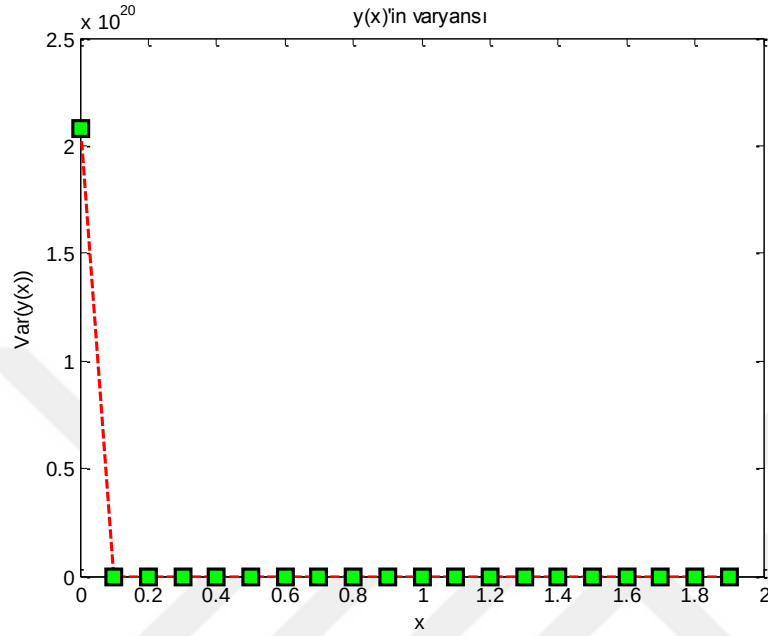
Şekil 1. $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 6)$, özel değerleri için (1) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$\text{Var}[y(x)] = \text{Var}\left[\frac{Ae^{-x}}{x^2}\right] = \left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right)^2 \text{Var}[A] = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12} \left(\frac{e^{-x}}{x^2}\right)^2$$

bulunur.

$\alpha = 1, \beta = 6$ özel değerleri için

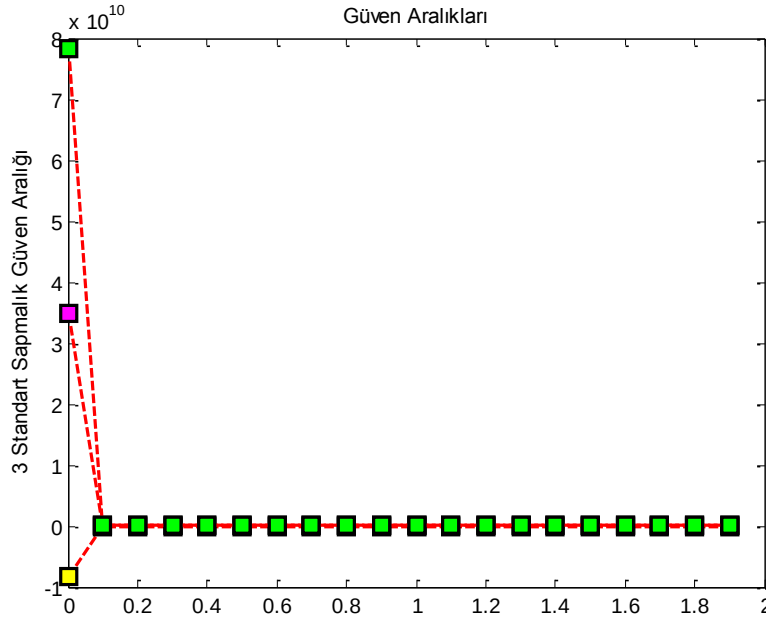
$$Var[y(x)] = \frac{25}{12} \left(\frac{e^{-x}}{x^2} \right)^2 \text{ elde edilir.}$$



Şekil 2. $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 6)$ özel değerleri için (1) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları

$$[E(y(x)) - 3std(y(x)), E(y(x)) + 3std(y(x))]$$



Şekil 3. $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 6)$ özel değerleri için (1) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek 3.1.2

$$xy'' - 4xy' + 4xy = Ax^2e^{2x} \quad (4)$$

$A \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$ rastgele değişken olmak üzere, rastgele değişken katsayılı adi diferansiyel denklemini Fourier dönüşümü yöntemi ile çözünüz.

Çözüm:

(4) denkleminin iki tarafının Fourier dönüşümünü alınırsa

$$F(xy'' - 4xy' + 4xy) = F(Ax^2e^{2x}),$$

$$F(xy'') - 4F(xy') + 4F(xy) = AF(x^2e^{2x}),$$

$$i \frac{d}{dw}(-w^2Y) - 4i \frac{d}{dw}(iwY) + 4i \frac{dy}{dw} = -2\pi A \delta''(w + 2i),$$

$$i(-2wY - w^2Y') + 4(Y + wY') + 4iY' = -2\pi A \delta''(w + 2i),$$

$$Y'(-w^2i + 4w + 4i) + Y(-2wi + 4) = -2\pi A \delta''(w + 2i). \quad (5)$$

(5) Denkleminde her iki taraf $-i(w + 2i)^2$ ile bölünürse;

$$Y' + Y \frac{-2i(w+2i)}{-i(w+2i)^2} = \frac{-2\pi i A \delta''(w+2i)}{(w+2i)^2},$$

$$Y' + Y \frac{2}{(w+2i)} = \frac{-2\pi i A \delta''(w+2i)}{(w+2i)^2}. \quad (6)$$

lineer diferansiyel denklemini çözülürse

İntegral çarpanı $\lambda = e^{\int \frac{2}{(w+2i)} d\omega} = (w + 2i)^2$ bulunur.

$(Y(w + 2i)^2)' = -2\pi i A \delta''(w + 2i)$ denkleminin her iki tarafının integralini alınırsa;

$$Y(w + 2i)^2 = -2\pi i A \delta'(w + 2i),$$

$$Y = -2\pi i A \frac{\delta'(w+2i)}{(w+2i)^2}. \quad (7)$$

(7) ifadesinin ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$y(x) = F^{-1}(Y) = F^{-1}\left(\frac{-2\pi i A \delta'(w+2i)}{(w+2i)^2}\right) = -iA \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta'(w+2i)}{(w+2i)^2} e^{iwx} dw ,$$

$$y(x) = iA \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta(w+2i)}{(w+2i)^3} e^{iwx} dw ,$$

$$y(x) = iA \frac{(ix)^3}{6} e^{2x} = \frac{Ax^3}{6} e^{2x} \quad (8)$$

genel çözümü elde edilir.

$X \sim \text{Üstel}(\lambda)$ üstel dağılımına sahip rastgele değişken için, moment çıkaran fonksiyon

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t} .$$

Buna göre beklenen değer ve varyansı;

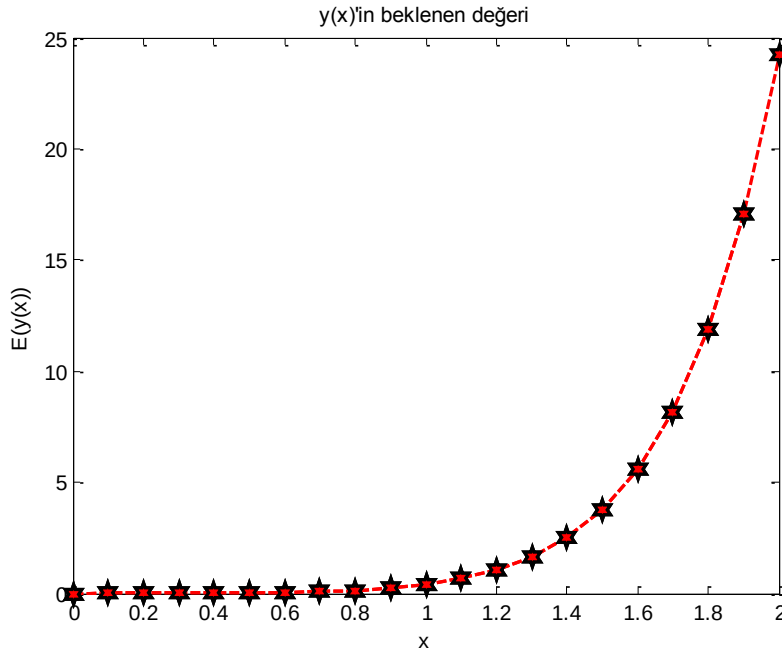
$$E[A] = \frac{1}{\lambda}, \text{Var}[A] = \frac{1}{\lambda^2},$$

olur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

$$E[y(x)] = E\left[\frac{Ax^3}{6} e^{2x}\right] = \frac{x^3 e^{2x}}{6} E[A] = \frac{x^3 e^{2x}}{6} \left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

$\lambda = 3$,özel değeri için

$$E[y(x)] = \frac{x^3 e^{2x}}{18} \text{ bulunur.}$$



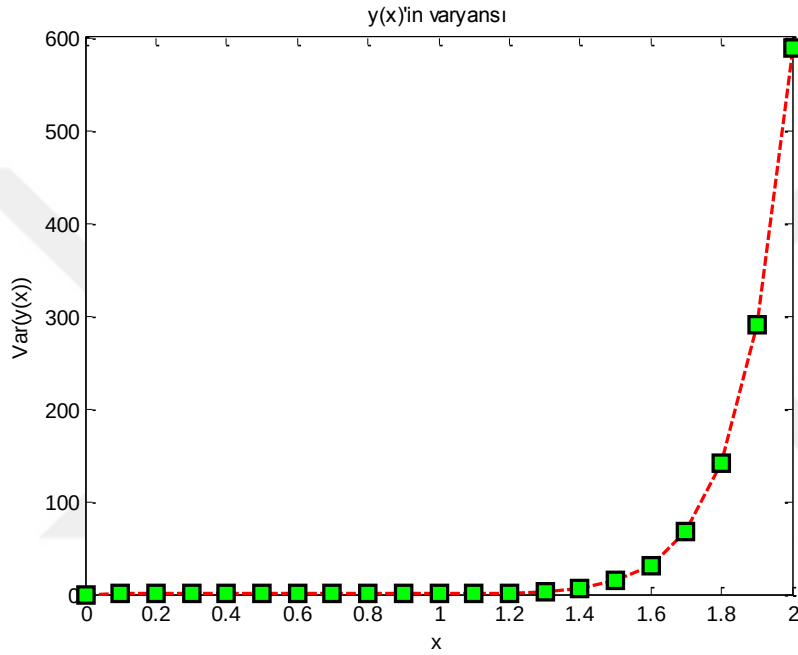
Şekil 4. $A \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$, özel değerleri için (4) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$Var[y(x)] = Var\left[\frac{Ax^3}{6}e^{2x}\right] = \left(\frac{x^3e^{2x}}{6}\right)^2 Var[A] = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{x^3e^{2x}}{6}\right)^2$$

bulunur. $\lambda = 3$, özel değeri için

$$Var[y(x)] = \frac{1}{9} \left(\frac{x^3e^{2x}}{6}\right)^2$$

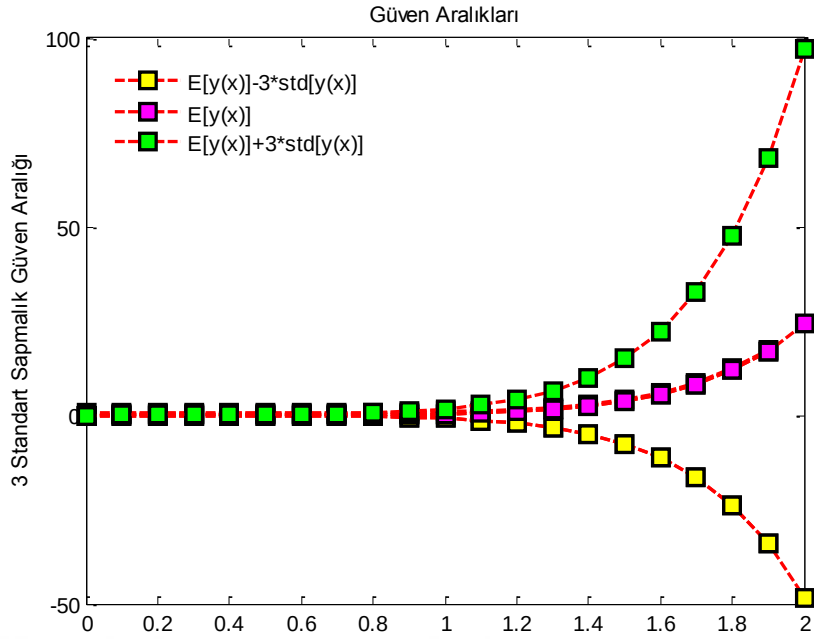
bulunur.



Şekil 5. $A \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$, özel değerleri için (4) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları,

$$[E(y(x)) - 3std(y(x)), E(y(x)) + 3std(y(x))]$$



Şekil 6. $A \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$ özel değerleri için (4) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek 3.1.3

$$y'(x) + y(x - 1) = A(x^3 + 3x - 1) \quad (9)$$

$A \sim \text{Beta}(\alpha = 1, \beta = 3)$ rastgele değişken olmak üzere, rastgele katsayılı adi diferansiyel denklemini Fourier dönüşümü yöntemi ile çözünüz.

Çözüm:

(9) denkleminin iki tarafın Fourier dönüşümü alınırsa

$$F(y'(x) + y(x - 1)) = F(A(x^3 + 3x - 1)),$$

$$(iw + e^{-iw})Y = -2\pi Ai\delta'''(w) + 6\pi Ai\delta'(w) - 2wA\delta(w),$$

$$Y = \frac{-2\pi Ai\delta'''(w) + 6\pi Ai\delta'(w) - 2wA\delta(w)}{iw + e^{-iw}}. \quad (10)$$

(10) ifadesinin ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$y(x) = F^{-1} \left(\frac{-2\pi Ai\delta'''(w) + 6\pi Ai\delta'(w) - 2wA\delta(w)}{iw + e^{-iw}} \right),$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-Ai\delta'''(w)}{iw + e^{-iw}} e^{iwx} dw + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-3Ai\delta'(w)}{iw + e^{-iw}} e^{iwx} dw - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Ai\delta(w)}{iw + e^{-iw}} e^{iwx} dw,$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{6Ai\delta(w)}{w^3(iw + e^{-iw})} e^{iwx} dw + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-3Ai\delta(w)}{w(iw + e^{-iw})} e^{iwx} dw - A,$$

$$y(x) = A6i \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dw^3} \left(\frac{e^{iwx}}{(iw + e^{-iw})} \right)_{w=0} - 3iA \frac{d}{dw} \left(\frac{e^{iwx}}{(iw + e^{-iw})} \right)_{w=0} - A,$$

$$y(x) = Ai(-i(x^3 - 3x + 1) - 3iA(ix) - A,$$

$$y(x) = Ax^3 - 3Ax + A + 3Ax - A,$$

$$y(x) = Ax^3 \quad (11)$$

genel çözümü elde edilir. Aynı zamanda Beta dağılımı için 1.,2. momentleri ve varyansı;

$$E(A) = \frac{\eta}{\eta + \varrho}, E(A^2) = \frac{\eta(\eta + 1)}{(\eta + \varrho)(\eta + \varrho + 1)},$$

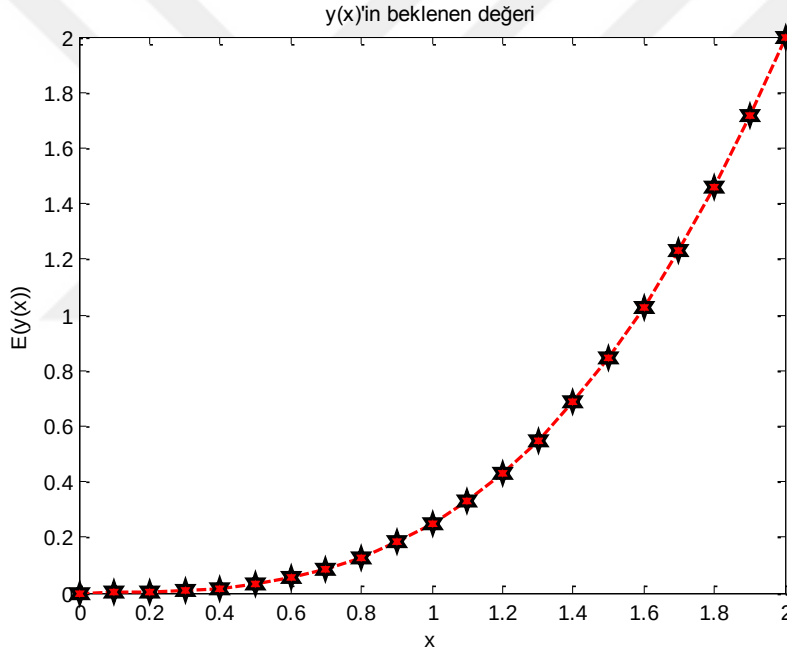
$$Var(A) = \frac{\eta\varrho}{(\eta + \varrho + 1)(\eta + \varrho)^2}$$

şeklinde hesaplanır (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017). (11) denklemin beklenen değer ve varyansı;

$$E[y(x)] = E[Ax^3] = x^3 E[A] = x^3 \left(\frac{\eta}{\eta + \varrho} \right)$$

$\eta = 1, \varrho = 3$, özel değerleri için

$$E[y(x)] = \frac{x^3}{4} \text{ bulunur.}$$



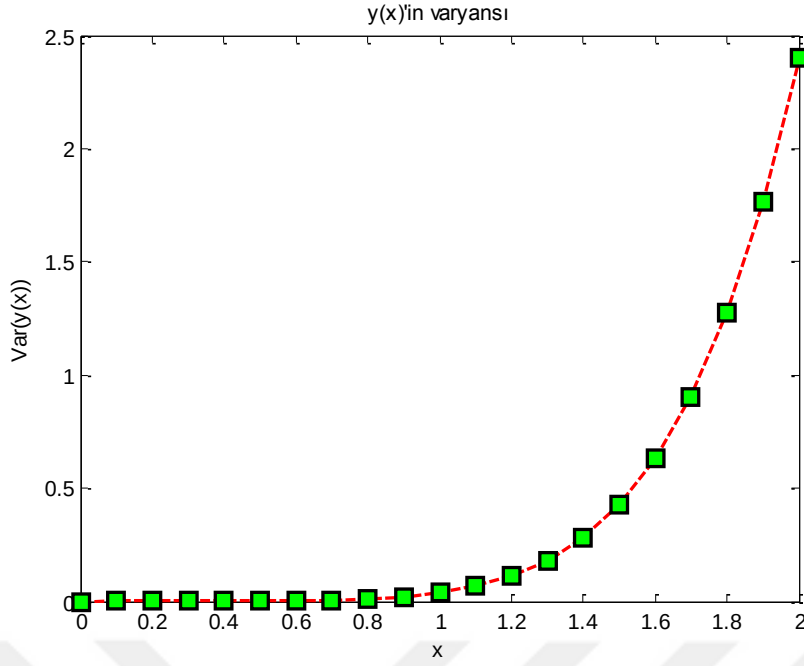
Şekil 7. $A \sim \text{Beta}(\eta = 1, \varrho = 3)$, özel değerleri için (9) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$Var[y(x)] = Var[Ax^3] = (x^3)^2 Var[A] = \frac{\eta\varrho}{(\eta + \varrho + 1)(\eta + \varrho)^2} x^6$$

bulunur.

$\eta = 1, \varrho = 3$, özel değerleri için

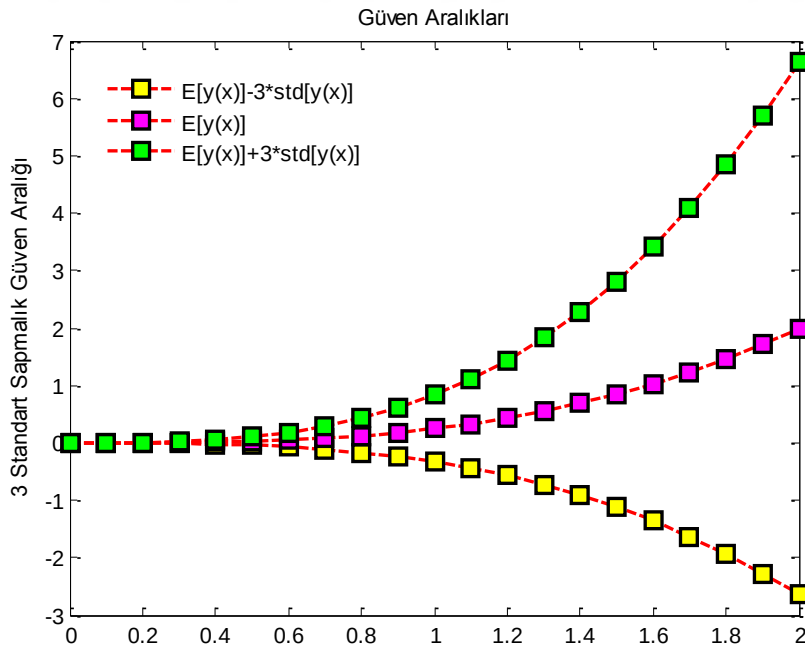
$$Var[y(x)] = \frac{3}{80} x^6 \text{ bulunur.}$$



Şekil 8. $A \sim \text{Beta}(\eta = 1, \varrho = 3)$, özel değerleri için (9) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları

$$[E(y(x)) - 3\text{std}(y(x)), E(y(x)) + 3\text{std}(y(x))]$$



Şekil 9. $A \sim \text{Beta}(\eta = 1, \varrho = 3)$, özel değerleri için (9) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

3.2.Bir Boyutlu Hiperbolik denklemlerin Fourier Serisi çözümleri

Bu bölümde bir boyutlu rastgele hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Fourier dönüşüm yöntemini kullanarak, iki adet örnek üzerinde uygulama gerçekleştirildi.

Örnek 3.2.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (3A - 4Ax^2)e^{-x^2+t}$$

$$u(0, x) = Ae^{-x^2}, \quad (12)$$

$$u_t(0, x) = Ae^{-x^2},$$

Burada, $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$ normal dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için tek boyutlu hiperbolik KDD'ini Fourier dönüşümü yöntemi yardımı ile çözüyoruz.

Çözüm:

İlk olarak (12) denklemin Fourier dönüşümü uygulayalım,

$$F\{u_{tt}(t, x)\} = F\{u_{xx}(t, x)\} - F\{(4Ax^2 - 2A)e^{-x^2+t}\} + F\{Ae^{-x^2+t}\},$$

$$u_{tt}(t, w) - (iw)^2 u(t, w) = -F\{(Ae^{-x^2+t})\} + AF\{e^{-x^2}\}e^t,$$

$$u(0, w) = A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}},$$

$$u_t(0, w) = A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}},$$

$$u_{tt}(t, w) - (iw)^2 u(t, w) = -(iw)^2 A F\{e^{-x^2}\}e^t + AF\{e^{-x^2}\}e^t,$$

$$u_{tt}(t, w) + w^2 u(t, w) = A(w^2 + 1)F\{e^{-x^2}\}e^t$$

denklemin genel çözümü

$$u(t, w) = u_h(t, w) + u_0(t, w).$$

homojen kısmının çözümü,

$$u_{tt}(t, w) + w^2 u(t, w) = 0$$

karakteristik denklemi

$$r^2 + w^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp iw$$

$$u_h(t, w) = c_1 \cos wt + c_2 \sin wt.$$

$$\text{Özel çözüm ; } u_0(t, w) = K F\{e^{-x^2}\}e^t,$$

$$u_{0tt}(t, w) = K F\{e^{-x^2}\}e^t,$$

$$K F\{e^{-x^2}\}e^t + w^2 K F\{e^{-x^2}\}e^t = A(w^2 + 1)F\{e^{-x^2}\}e^t,$$

$$K(w^2 + 1)F\{e^{-x^2}\}e^t = A(w^2 + 1)F\{e^{-x^2}\}e^t,$$

$$K=A \text{ olur. } u_0(t, w) = A F\{e^{-x^2}\}e^t = A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}e^t.$$

Genel çözüm;

$$u(t, w) = u_h(t, w) + u_ö(t, w),$$

$$= c_1 \cos wt + c_2 \sin wt + A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}e^t.$$

başlangıç ve sınır koşullarını kullanırsak

$t = 0$ için;

$$u(0, w) = c_1 + A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}} = A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}$$

$$\boxed{c_1 = 0}$$

$$u_t(t, w) = -c_1 w \sin wt + c_2 w \cos wt + A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}e^t$$

$$u_t(0, w) = c_2 w + A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}} = A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}$$

$$\boxed{c_2 = 0}$$

$$u(t, w) = A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}e^t \quad \text{ters Fourier dönüşümü alınırsa}$$

$$F^{-1}\{u(t, w)\} = F^{-1}\left\{A\sqrt{\pi}e^{-\frac{w^2}{4}}e^t\right\}$$

$$u(t, x) = Ae^{-x^2+t}$$

(13)

elde edilir.

Normal dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir.

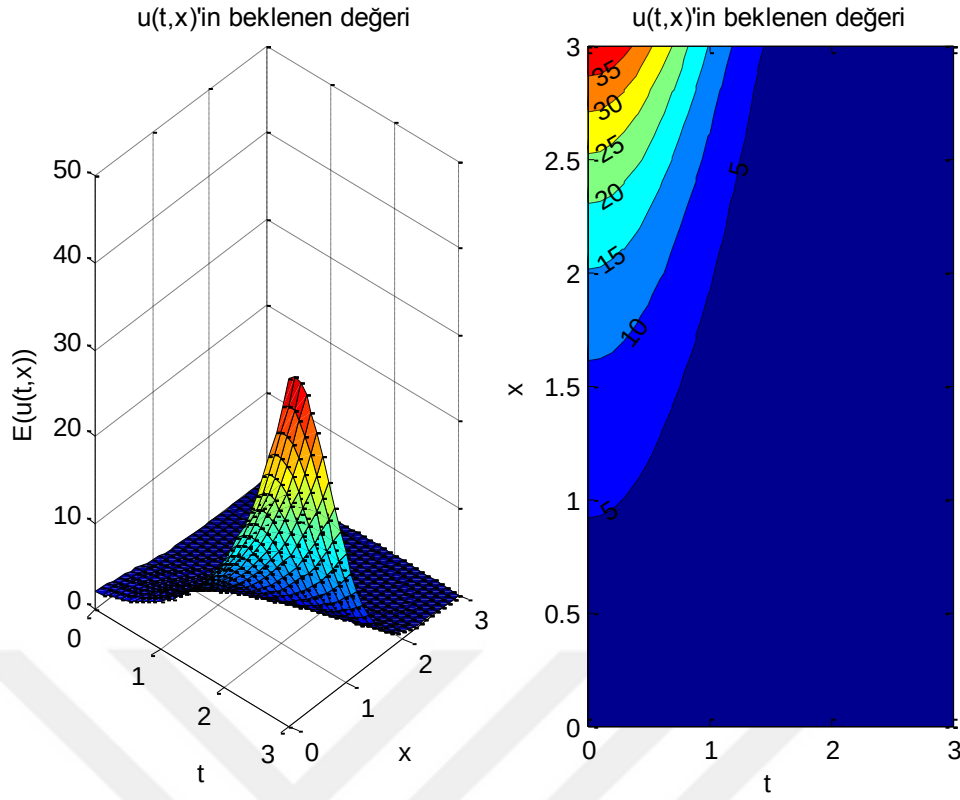
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değer özellikleri uygulanırsa $u(t, x)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[u(t, x)] = E[Ae^{-x^2+t}] = e^{-x^2+t}E[A] = e^{-x^2+t}\mu$$

$\mu = 2$, özel değeri için,

$$E[u(t, x)] = 2e^{-x^2+t}$$

bulunur.



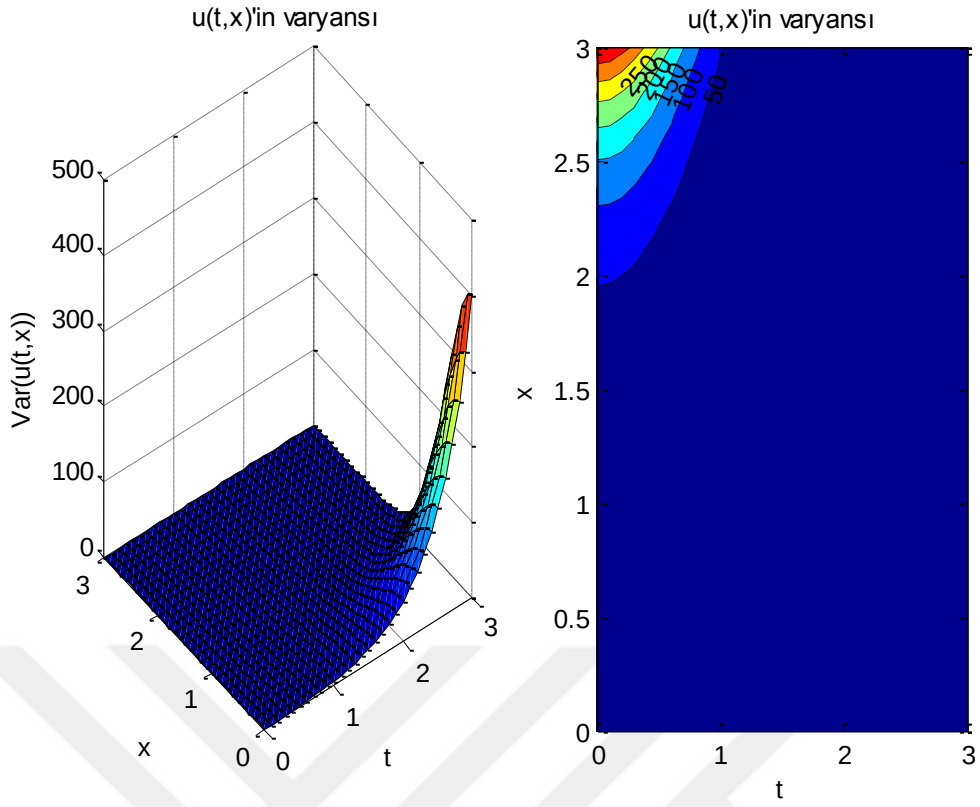
Şekil 10. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$ özel değeri için (12) denklemin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$Var[u(t, x)] = Var[Ae^{-x^2+t}] = (e^{-x^2+t})^2 Var[A] = (e^{-x^2+t})^2 \sigma^2$$

$\sigma^2 = 1$, özel değeri için,

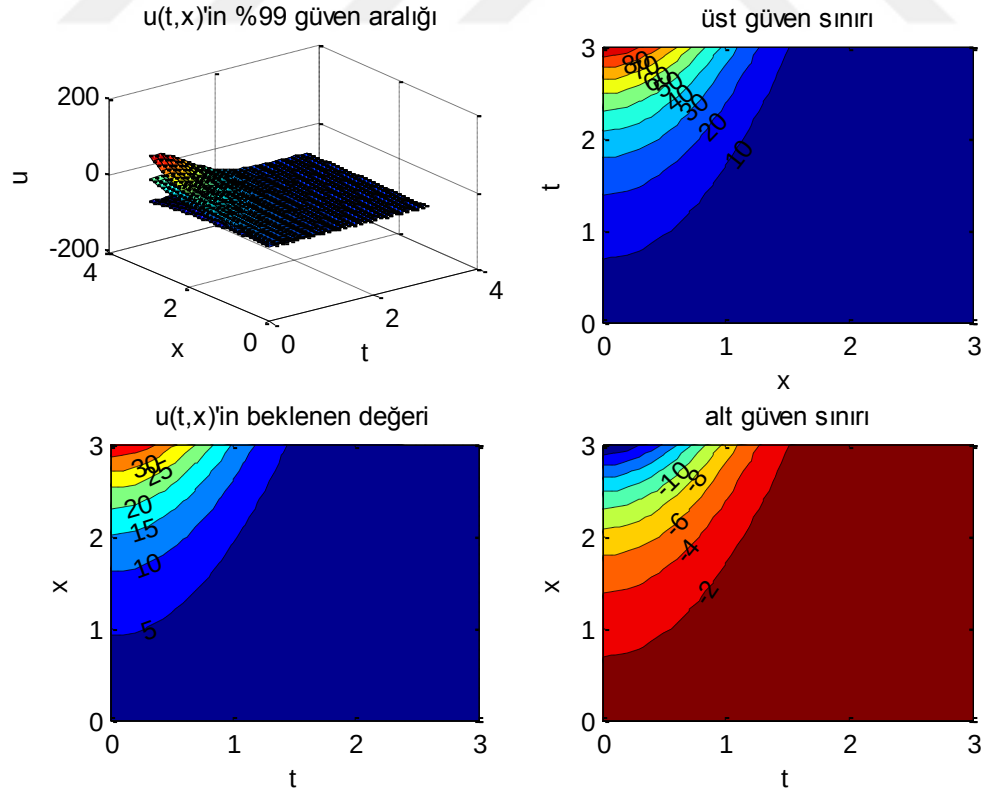
$$Var[u(t, x)] = (e^{-x^2+t})^2$$

bulunur.



Şekil 11. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$ özel değerleri için (12) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları,



Şekil 12. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 1)$ özel değerleri için (12) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı

$u(t, x)$ değişim katsayısı;

standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

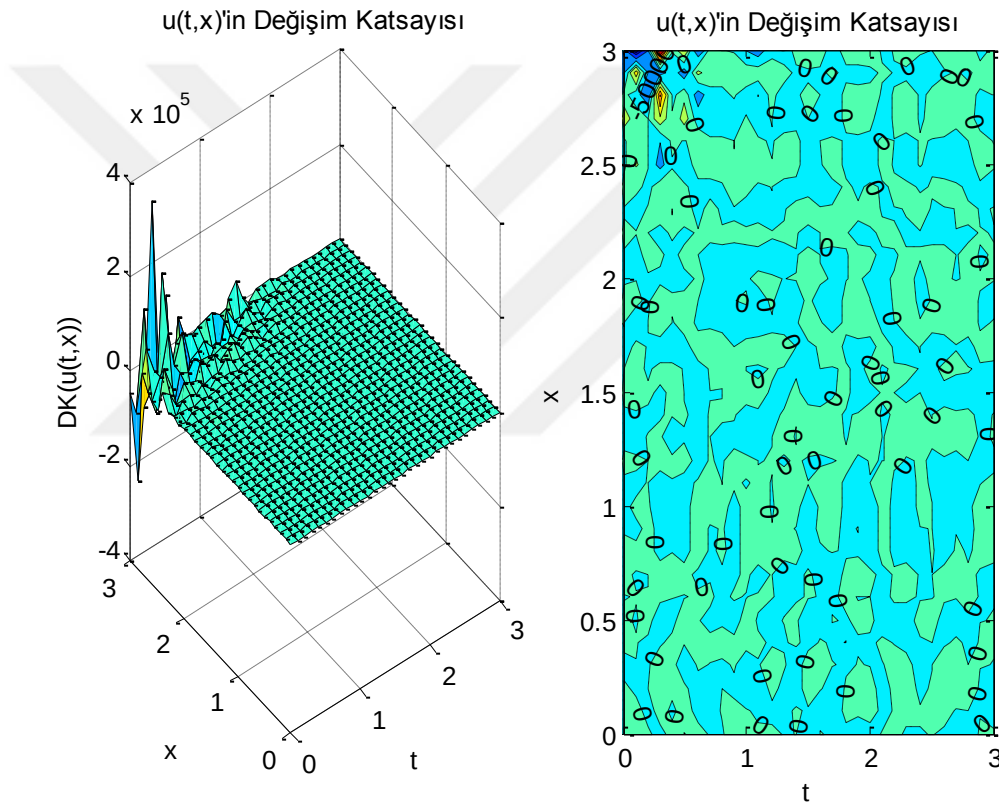
$$std[u(t, x)] = \sqrt{Var[u(t, x)]} = \sqrt{(e^{-x^2+t})^2}$$

elde edilir. Değişim katsayısı ise

$$D.K = \frac{std[u(t, x)]}{E[u(t, x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{(e^{-x^2+t})^2}}{2e^{-x^2+t}} \times 100$$

şeklinde elde edilir.

$u(t, x)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 13. $u(t, x)$ 'in değişim katsayısı değeri

Örnek 3.2.2

Bir boyutlu rastgele hiperbolik KDD'in Fourier serisi yöntemi ile çözümü

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (4At^2 + 4Bt + (2A + 4C)) \cos x$$

$$u(0, x) = C \cos x,$$

$$u_t(0, x) = B \cos x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$u\left(t, -\frac{\pi}{2}\right) = u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad 0 \leq t \leq 1$$

(14)

Sırasıyla $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$, $B \sim \text{Gamma}(\zeta = 2, \xi = 1)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$ beta, gamma ve üstel dağılıma sahip rastgele etki ve başlangıç koşulu için Fourier serisi yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm:

Fourier serisi Formülü

$$u(t, x) = a_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(t) \cos(nx) + b_n(t) \sin(nx)) \quad (15)$$

$a_0(t)$, $a_n(t)$, $b_n(t)$ bilinmeyen fonksiyonlardır. İlk olarak $u(0, x) = C \cos x$ başlangıç koşulu ile başlayalım.

$$u(0, x) = a_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(0) \cos(nx) + b_n(0) \sin(nx)) = C \cos x$$

ya da

$$a_0(0) + a_1(0) \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(0) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(0) \sin(nx) = C \cos x$$

bulunur. Yukarıdaki ifadeden gerekli işlemler yapılırsa,

$$a_0(0) = 0,$$

$$a_1(0) = C, \quad a_n(0) = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$b_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

elde edilir. $u_t(0, x) = B \cos x$ diğer başlangıç koşulundan,

$$u'(t, x) = a'_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n(t) \cos(nx) + b'_n(t) \sin(nx))$$

yada

$$u'_t(0, x) = a'_0(0) + \sum_{n=1}^{\infty} (a'_n(0) \cos(nx) + b'_n(0) \sin(nx)) = B \cos x$$

$$a'_0(0) = 0,$$

$$a'_1(0) = B, \quad a'_n(0) = 0, \quad n = 2, 3, \dots$$

$$b'_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

bulunur. (15) ifadesini (14) de yerine yazalım.

$$\begin{aligned} a''_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a''_n(t) \cos(nx) + b''_n(t) \sin(nx)) \\ - 4 \left[\sum_{n=1}^{\infty} -n^2 a_n(t) \cos(nx) - n^2 b_n(t) \sin(nx) \right] \\ = (4At^2 + 4Bt + (2A + 4C)) \cos x \end{aligned}$$

$$a_0''(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n''(t) + 4n^2 a_n(t)) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} [b_n''(t) + 4n^2 b_n(t)] \sin(nx) \\ = (4At^2 + 4Bt + (2A + 4C)) \cos x$$

ifadesinden

$$a_0''(t) = 0, \quad a_n''(t) + 4n^2 a_n(t) = 0, \quad n = 2, 3, \dots \\ b_n''(t) + 4n^2 b_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

bulunur.

$$a_1''(t) + 4a_1(t) = 4At^2 + 4Bt + (2A + 4C) \quad (16)$$

$$a_1(0) = C \quad a_1'(0) = B$$

(16) denklemini çözelim. Öncelikle homojen kısmın çözümü

$$a_1''(t) + 4a_1(t) = 0 \quad \text{karakteristik denklemi ve kökleri}$$

$$r^2 + 4 = 0$$

$$r_{1,2} = \pm 2i \text{ olduğundan,}$$

$$\boxed{a_1^h(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t}$$

bulunur. Denklemin geneli için özel çözüm,

Belirsiz katsayılar yönteminden, $a_1^{\ddot{}}(t) = K_2 t^2 + K_1 t + K_0$ seçilir ve türevleri ile birlikte denklemde yerlerine yazılırsa

$$a_1^{\ddot{}}(t) = 2K_2 t + K_1,$$

$$a_1^{\ddot{}}(t) = 2K_2,$$

$$2K_2 + 4(K_2 t^2 + K_1 t + K_0) = 4At^2 + 4Bt + (2A + 4C)$$

$$4K_2 = 4A, \quad 4K_1 = 4B, \quad 2K_2 + 4K_0 = 2A + 4C,$$

$$K_2 = A, \quad K_1 = B, \quad K_0 = C,$$

$$\boxed{a_1^{\ddot{}}(t) = At^2 + Bt + C}$$

bulunur. Buna göre genel çözüm

$$a_1(t) = a_1^h(t) + a_1^{\ddot{}}(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t + At^2 + Bt + C$$

elde edilir. Başlangıç değer probleminin çözümü

$$a_1(0) = c_1 + C = C, \quad \boxed{c_1 = 0}$$

$$a_1'(t) = -2c_1 \sin 2t + 2c_2 \cos 2t + 2At + B$$

$$a_1'(0) = 2c_2 + B = B, \quad \boxed{c_2 = 0}$$

bulunur. Bu durumda $a_1(t) = At^2 + Bt + C$ elde edilir. $b_n''(t) + 4n^2 b_n(t) = 0$ denklemin çözümü için, karakteristik denklemi

$$r^2 + 4n^2 = 0, \quad r_{1,2} = \pm 2ni$$

olmak üzere,

$$b_n(t) = F_1 \cos 2nt + F_2 \sin 2nt$$

bulunur. Başlangıç değer probleminin çözümü

$t = 0$ için $F_1 = 0$,

$$b'_n(t) = -2nF_1 \sin 2nt + 2nF_2 \cos 2nt$$

$$b'_n(0) = 2nF_2 = 0, \quad F_2 = 0,$$

olduğundan,

$$b_n(t) = 0,$$

bulunur. Bulunan ifadeler Fourier serisinde yerleştirilirse

$$u(t, x) = a_0(t) + a_1(t) \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n(t) \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(t) \sin(nx)$$

$$a_0(t) = 0, a_n(t) = 0 \quad (n > 1 \text{ için}), \quad b_n(t) = 0 \text{ olduğu için}$$

$$u(t, x) = a_1(t) \cos x = (At^2 + Bt + C) \cos x \quad (17)$$

elde edilir.

Aynı zamanda Beta dağılımı için 1.,2. momentleri ve varyansı;

$$E(A) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad E(A^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)},$$

$$Var(A) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$$

şeklinde hesaplanır.

B rastgele değişkeni gamma dağılımına sahip olduğundan 1.,2. momentleri ve varyansı;

$$E(B) = \frac{\zeta}{\xi}, \quad E(B^2) = \frac{\zeta(\zeta + 1)}{\xi^2},$$

$$Var(B) = \frac{\zeta}{\xi^2},$$

X rastgele değişkeni üstel dağılıma sahipse moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_x(t) = E[e^{tx}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}; \quad t < \lambda$$

1.,2. momentleri ve varyansı;

$$E[C] = \frac{1}{\lambda}, \quad E[C^2] = \frac{2}{\lambda^2}, \text{ olarak hesaplanır.}$$

$$Var(C) = E(C^2) - [E(C)]^2 \text{ eşitliğinden;}$$

$$Var[C] = \frac{1}{\lambda^2},$$

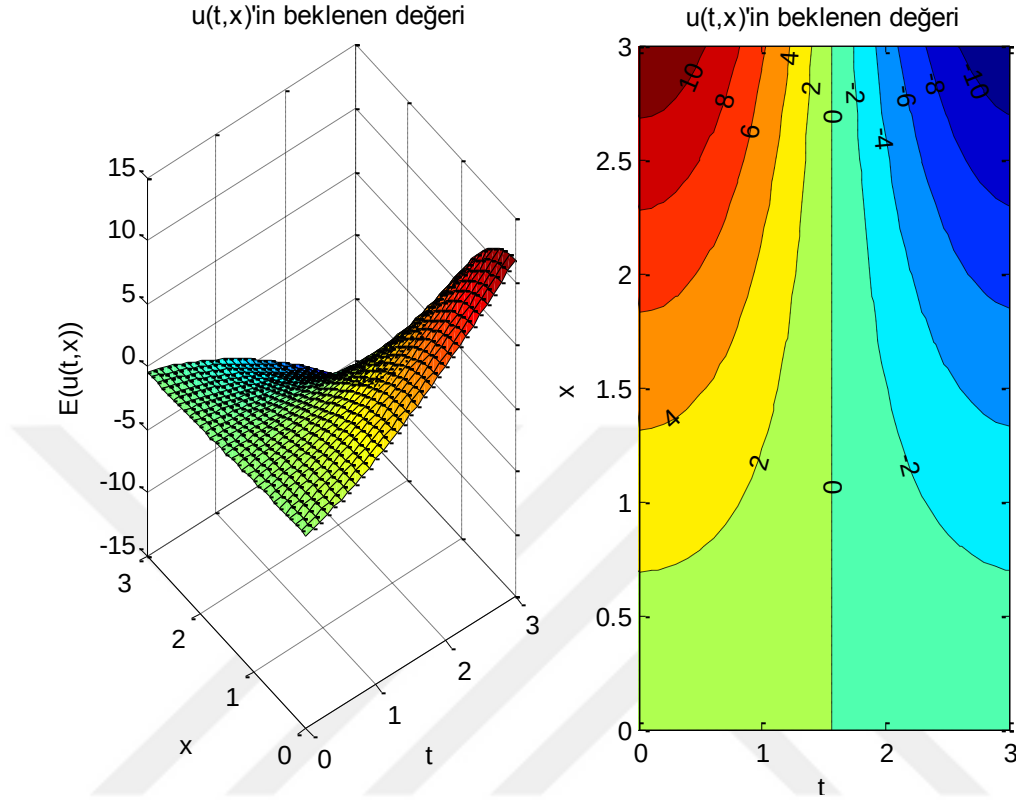
olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa $u(t, x)$ denkleminin beklenen değeri;

$$\begin{aligned} E[u(t, x)] &= E[(At^2 + Bt + C) \cos x] = t^2 \cos x E[A] + t \cos x E[B] + \cos x E[C] \\ &= \frac{\alpha t^2 \cos x}{\alpha + \beta} + \frac{\zeta}{\xi} t \cos x + \frac{\cos x}{\lambda} \end{aligned}$$

$\alpha = 3, \beta = 2, \zeta = 2, \xi = 1$ ve $\lambda = 3$ özel değerleri için,

$$E[u(t, x)] = \frac{3t^2 \cos x}{5} + 2t \cos x + \frac{\cos x}{3}$$

bulunur.



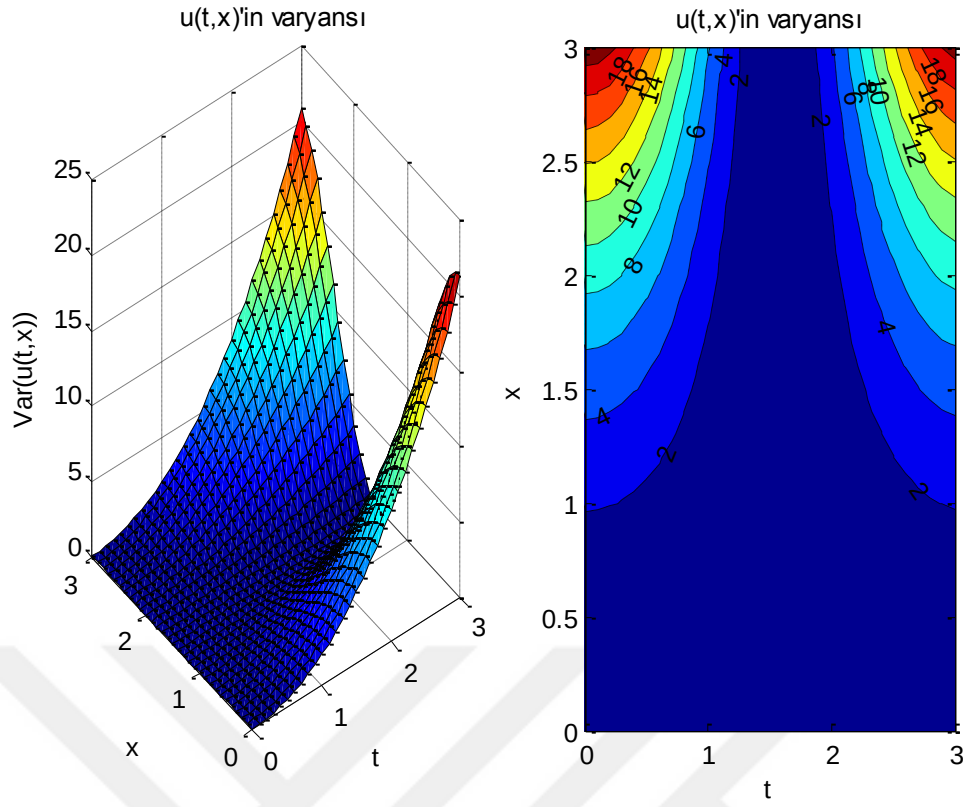
Şekil14. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$, $B \sim \text{Gama}(\zeta = 2, \xi = 1)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$ özel değerleri için (14) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$\begin{aligned} \text{Var}[u(t, x)] &= \text{Var}[(At^2 + Bt + C) \cos x] \\ &= (t^2 \cos x)^2 \text{Var}[A] + (t \cos x)^2 \text{Var}[B] + \cos^2 x \text{Var}[C] \\ &= \frac{(t^2 \cos x)^2 \alpha \beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} + (t \cos x)^2 \zeta \xi^2 + \frac{\cos^2 x}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$\alpha = 3, \beta = 2, \zeta = 2, \xi = 1$ ve $\lambda = 3$ özel değerleri için,

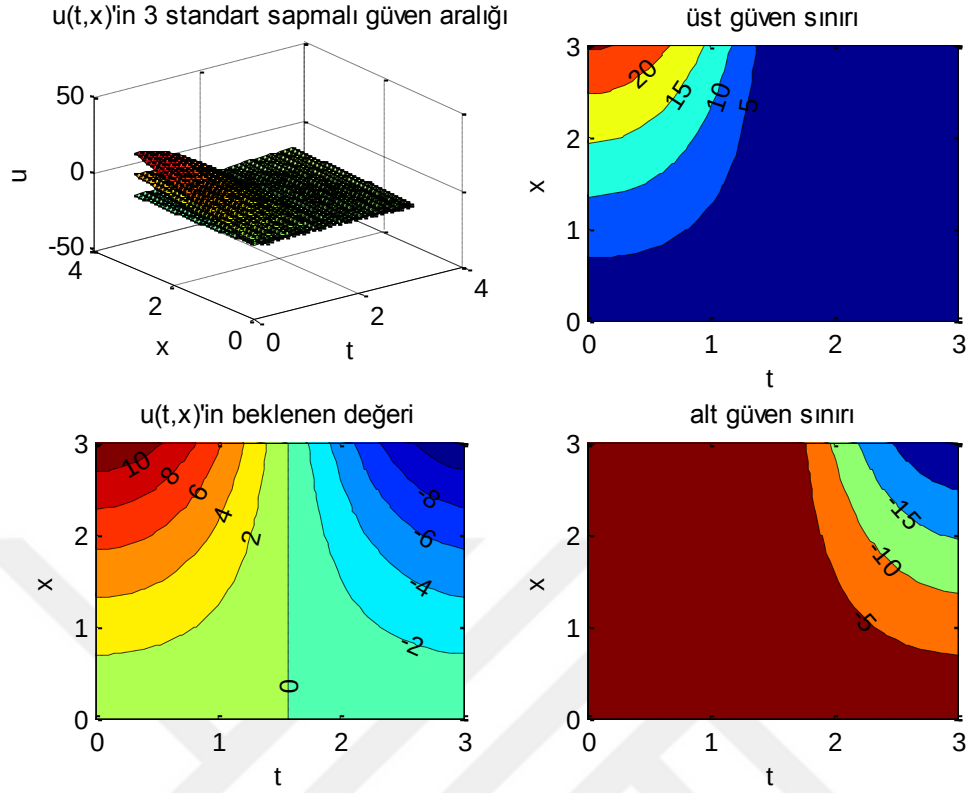
$$\text{Var}[u(t, x)] = \frac{(t^2 \cos x)^2}{25} + 2(t \cos x)^2 + \frac{\cos^2 x}{9}$$

bulunur.



Şekil 15. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$, $B \sim \text{Gama}(\varsigma = 2, \xi = 1)$, $C \sim \text{Üstel}$
 $(\lambda = 3)$ özel değerleri için (14) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları



Şekil 16. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$, $B \sim \text{Gama}(\zeta = 2, \xi = 1)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 3)$ özel değerleri için (14) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

$u(t, x)$ değişim katsayısı;

standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

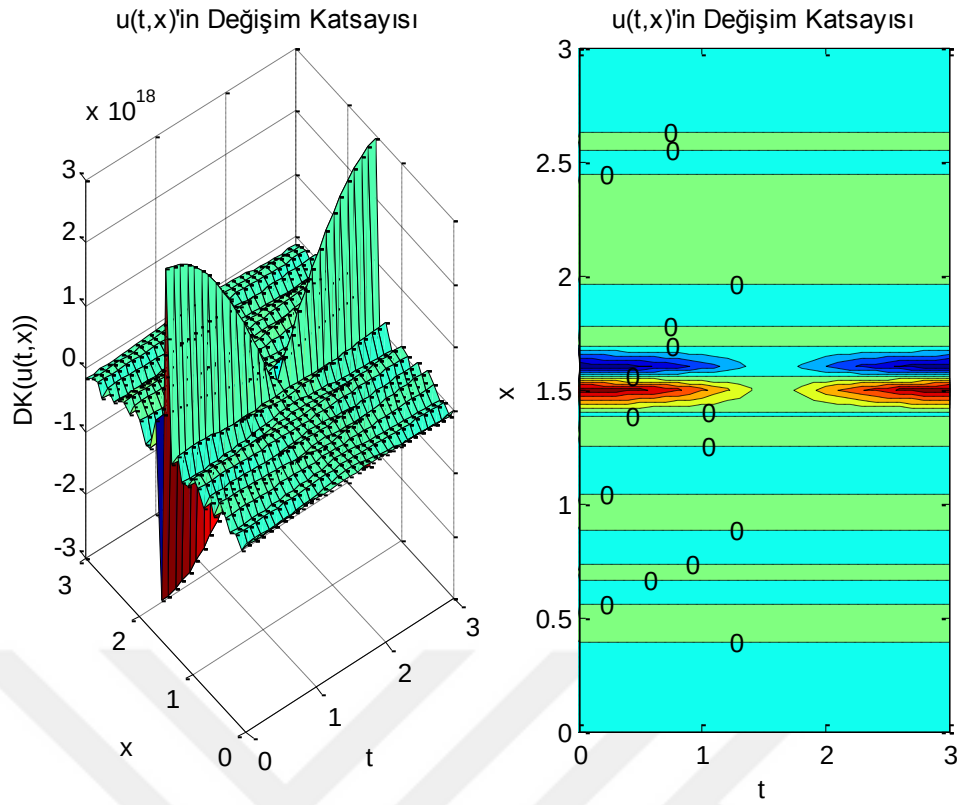
$$\text{std}[u(t, x)] = \sqrt{\text{Var}[u(t, x)]} = \sqrt{\frac{(t^2 \cos x)^2}{25} + 2(tc \cos x)^2 + \frac{\cos^2 x}{9}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise

$$D.K = \frac{\text{std}[u(t, x)]}{E[u(t, x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{(t^2 \cos x)^2}{25} + 2(tc \cos x)^2 + \frac{\cos^2 x}{9}}}{\frac{3t^2 \cos x}{5} + 2tc \cos x + \frac{\cos x}{3}} \times 100$$

bulunur.

$u(t, x)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 17. $u(t, x)$ 'in değişim katsayı değeri

3.3. İki Boyutlu Hiperbolik denklemlerin Fourier serisi çözümleri

Bu bölümde iki boyutlu rastgele hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Fourier serisi ve değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak, iki adet örnek üzerinde uygulama gerçekleştirildi.

Örnek 3.3.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 3A\pi^2 e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (18)$$

$$0 < t < 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u(0, x, y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u_t(0, x, y) = -\pi A \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1$$

$$u(t, 0, y) = u(t, 1, y) = 0,$$

$$u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0,$$

burada, $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$ normal dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için iki boyutlu rastgele hiperbolik KDD'ini Fourier serisi yöntemi yardımı ile çözüyoruz.

Çözüm:

Kabul edelim ki,

$$u(t, x, y) = v(t, x, y) + w(t, x, y)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, x, y) = v(t, x, y) + w(t, x, y) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \\ 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ v(0, x, y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ v_t(0, x, y) = -\pi A \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ v(t, 0, y) = v(t, 1, y) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ v(t, x, 0) = v(t, x, 1) = 0, \quad 0 < t < 1 \end{array} \right. \quad (19)$$

$w(t, x, y)$ problemin çözümü;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 3A\pi^2 e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \\ 0 < t < 1, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ w(0, x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ w_t(0, x, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1 \\ w(t, 0, y) = w(t, 1, y) = 0, \quad 0 < t < 1 \\ w(t, x, 0) = w(t, x, 1) = 0, \quad 0 < t < 1 \end{array} \right. \quad (20)$$

(19) denkleminin değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümü,

$$v(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y) \neq 0 \text{ için}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ denkleminde yerine yazılırsa}$$

$$T''(t)X(x)Y(y) - (T(t)X''(x)Y(y) + T(t)X(x)Y''(y)) = 0$$

elde edilir.

$$T''(t)X(x)Y(y) = T(t)(X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)) \quad \text{her iki tarafı } T(t)X(x)Y(y) \text{ ifadesine bölünürse;}$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

elde edilir. Her iki tarafı tek bir sabitle eşitlersek;

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -m^2 \quad \text{ve} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -m^2.$$

Bu negatif sabitlere göre t cinsinden çözümler bulmak için;

$$T''(t) + m^2 T(t) = 0,$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{X''(x)}{X(x)} &= -\varphi^2 \text{ sabiti için} & -\varphi^2 &= -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - m^2, \\ \varphi^2 - m^2 &= \frac{Y''(y)}{Y(y)}, \end{aligned}$$

$$-\beta^2 = \frac{Y''(t)}{Y(t)} , (\beta^2 = m^2 - \varphi^2)$$

$$X''(x) + \varphi^2 X(x) = 0 \text{ ve } Y''(y) + \beta^2 Y(y) = 0$$

denklemleri elde edilir .

Dirichlet sınır koşulları yerine yazarsak ,

$$X''(x) + \varphi^2 X(x) = 0, \quad X(0) = X(1) = 0,$$

$$Y''(y) + \beta^2 Y(y) = 0, \quad Y(0) = Y(1) = 0 \text{ elde edilir.}$$

(18) denklemindeki başlangıç koşullarını yerine yazarsak;

$$v(0, x, y) = T(0)X(x)Y(y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$v_t(0, x, y) = T'(0)X(x)Y(y) = -\pi A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$v(t, 0, y) = v(t, 1, y) = T(t)X(0)Y(y) = T(t)X(1)Y(y) = 0$$

$$v(t, x, 0) = v(t, x, 1) = T(t)X(x)Y(0) = T(t)X(x)Y(1) = 0$$

bulunur.

$$X''(x) + \varphi^2 X(x) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \varphi^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp i\varphi \text{ olduğundan,}$$

$$X(x) = c_1 \cos \varphi x + c_2 \sin \varphi x \quad (21)$$

bulunur.

$$Y''(y) + \beta^2 Y(y) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \beta^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp i\beta \text{ olduğundan,}$$

$$Y(y) = b_1 \cos \beta y + b_2 \sin \beta y \quad (22)$$

bulunur.

$$T''(t) + m^2 T(t) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + m^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp im \text{ olduğundan,}$$

$$T(t) = a_1 \cos m t + a_2 \sin m t \quad (m^2 = \beta^2 + \varphi^2)$$

bulunur. Sınır koşulları yerine yazılırsa;

$$X(0) = c_1 = 0, \quad X(1) = c_2 \sin \varphi = 0, \quad \varphi = k\pi, k \in Z$$

$$\varphi = \varphi_k = k\pi$$

$$Y(0) = b_1 = 0, \quad Y(1) = b_2 \sin \beta = 0, \quad \beta = n\pi$$

$$\beta = \beta_n = n \quad (k, n=1, 2, \dots) \text{ elde edilir.}$$

(21) ve (22) üncü denklemde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$X_k(x) = \sin(k\pi x), \quad Y_n(y) = \sin(n\pi y)$$

bulunur.

$$k, n = 1, 2, \dots \text{ için } m = m_{kn} = \sqrt{\varphi_k^2 + \beta_n^2} = \sqrt{(k^2 + n^2)\pi^2} = \delta_{kn},$$

$$T(t) = T_{kn}(t) = D_{kn} \cos(\delta_{kn} t) + D_{kn}^* \sin(\delta_{kn} t)$$

elde edilir. Bulunan $T(t), X(x), Y(y)$ fonksiyonlarını $v(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$v_{kn}(t, x, y) = \sin(k\pi x) \sin(n\pi y) (D_{kn} \cos(\delta_{kn} t) + D_{kn}^* \sin(\delta_{kn} t)) \quad (23)$$

elde edilir.

Bulunan bütün çözümler toplanırsa,

$$v_{kn}(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (D_{kn} \cos(\delta_{kn} t) + D_{kn}^* \sin(\delta_{kn} t)) \sin(k\pi x) \sin(n\pi y)$$

çözümü uygulanır.

(19) denklemindeki ilk başlangıç koşulu uygulanırsa;

$$v(0, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{kn} \sin(k\pi x) \sin(n\pi y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

eşitlik ile,

$$D_{11} \sin(\pi x) \sin(\pi y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad D_{11} = A, \quad k = n = 1$$

elde edilir. (19) denklemindeki ikinci başlangıç koşulu uygulanırsa;

$$v_t(0, x, y) = -\pi A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D_{kn}^* \delta_{kn} \sin(k\pi x) \sin(n\pi y) = -\pi A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

$$(\delta_{11} = \sqrt{1^2 + 1^2} \pi = \sqrt{2} \pi)$$

Son eşitlik ile, $D_{11}^* \delta_{11} \sin(\pi x) \sin(\pi y) = -\pi A \sin(\pi x) \sin(\pi y)$

$$D_{11}^* = \frac{-\pi A}{\sqrt{2} \pi} = -\frac{A}{\sqrt{2}}$$

elde edilir. (23) denkleminde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$v_{11}(t, x, y) = D_{11} \cos(\delta_{11} t) + D_{11}^* \sin(\delta_{11} t) \sin(\pi x) \sin(\pi y) = (A \cos(\sqrt{2} \pi t) - \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \pi t)) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

bulunur. $m, n \neq 1$ için çözüm olmadığından

$$v(t, x, y) = \left(A \cos(\sqrt{2} \pi t) - \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2} \pi t) \right) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

elde edilir. $w(t, x, y)$ için,

$$w(t, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \sin(k\pi x) \sin(k\pi y)$$

ifadesini (20) denkleminde gerekli türevler alınarak yerine yazalım.

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t) \sin(k\pi x) \sin(k\pi y) \\
& + \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \pi^2 \sin(k\pi x) \sin(k\pi y) \right. \\
& \left. + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \pi^2 \sin(k\pi x) \sin(k\pi y) \right) \\
& = 3A\pi^2 e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)
\end{aligned}$$

$k = 1$ için;

$$A_1''(t) + 2\pi^2 A_1(t) = 3A\pi^2 e^{-\pi t} \quad (24)$$

elde edilir.

$k \geq 2$ için

$$A_k''(t) + 2k^2\pi^2 A_k(t) = 0 \quad (25)$$

bulunur.

(24) denkleminin homojen kısmının çözümü,

$$A_1''(t) + 2\pi^2 A_1(t) = 0, \quad r^2 + 2\pi^2 = 0, \quad r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}\pi \text{ bulunur.}$$

$$A_1^h(t) = e_{11} \cos\sqrt{2}\pi t + e_{11}^* \sin\sqrt{2}\pi t$$

elde edilir. Özel çözüm, $A_0(t) = ke^{-\pi t}$ seçilir ve türevleri ile birlikte denklemde yerine yazılırsa

$$k\pi^2 e^{-\pi t} + 2\pi^2 k e^{-\pi t} = 3A\pi^2 e^{-\pi t}, \quad 3k\pi^2 e^{-\pi t} = 3A\pi^2 e^{-\pi t}$$

buradan $k = A$ elde edilir. $A_0(t) = Ae^{-\pi t}$ bulunur. Buna göre genel çözüm

$$A_1(t) = A_1^h(t) + A_0(t) = e_{11} \cos\sqrt{2}\pi t + e_{11}^* \sin\sqrt{2}\pi t + Ae^{-\pi t}$$

bulunur.

$$w(t, x, y) = (e_{11} \cos\sqrt{2}\pi t + e_{11}^* \sin\sqrt{2}\pi t + Ae^{-\pi t}) \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (26)$$

elde edilir.

(20) denklemindeki başlangıç şartları yerine yazılırsa,

$$w(0, x, y) = (e_{11} + A) \sin(\pi x) \sin(\pi y) = 0 \quad e_{11} = -A$$

$$w_t(0, x, y) = (\sqrt{2}\pi e_{11}^* - A\pi) \sin(\pi x) \sin(\pi y) = 0 \quad e_{11}^* = \frac{A}{\sqrt{2}}$$

elde edilir. (26) denkleminde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$w(t, x, y) = \left(-A \cos\sqrt{2}\pi t + \frac{A}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}\pi t + Ae^{-\pi t} \right) \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

elde edilir.

Böylece genel çözüm için $v(t, x, y), w(t, x, y)$ yerine yazılırsa,

$$u(t, x, y) = v(t, x, y) + w(t, x, y) =$$

$$\begin{aligned}
& \left(A \cos(\sqrt{2}\pi t) - \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}\pi t) \right) \sin(\pi x) \sin(\pi y) + \\
& \left(-A \cos\sqrt{2}\pi t + \frac{A}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2}\pi t + Ae^{-\pi t} \right) \sin(\pi x) \sin(\pi y) , \\
u(t, x, y) &= Ae^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)
\end{aligned} \tag{27}$$

elde edilir.

Normal dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir.

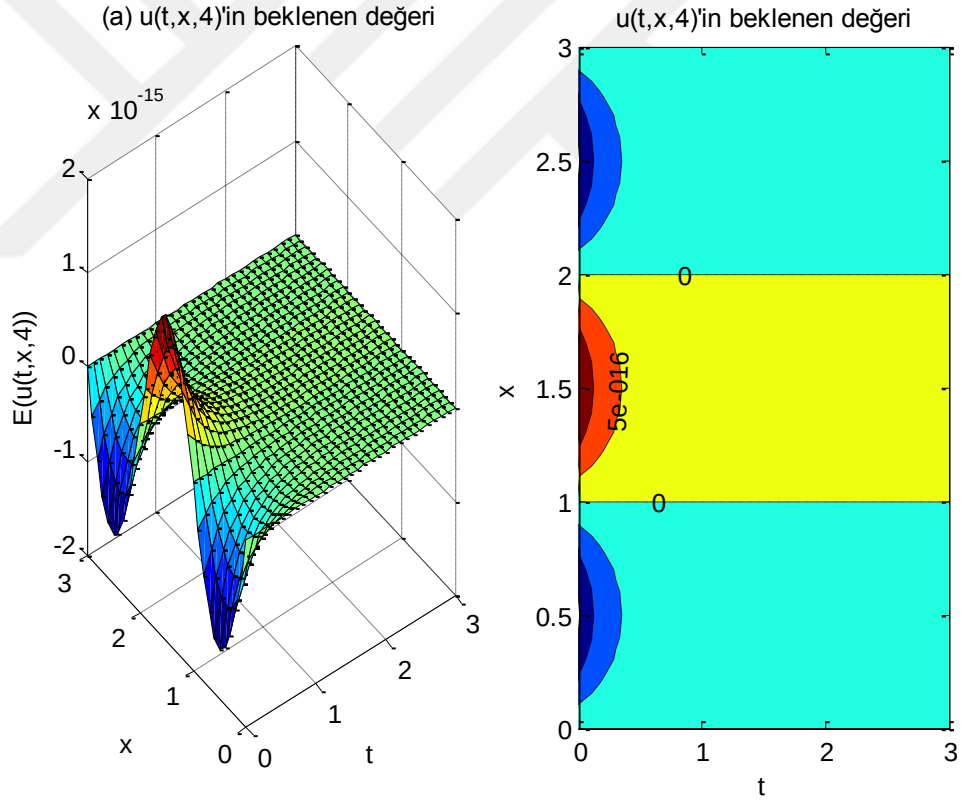
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değer özelliklerinden $u(t, x, y)$ denkleminin beklenen değeri;

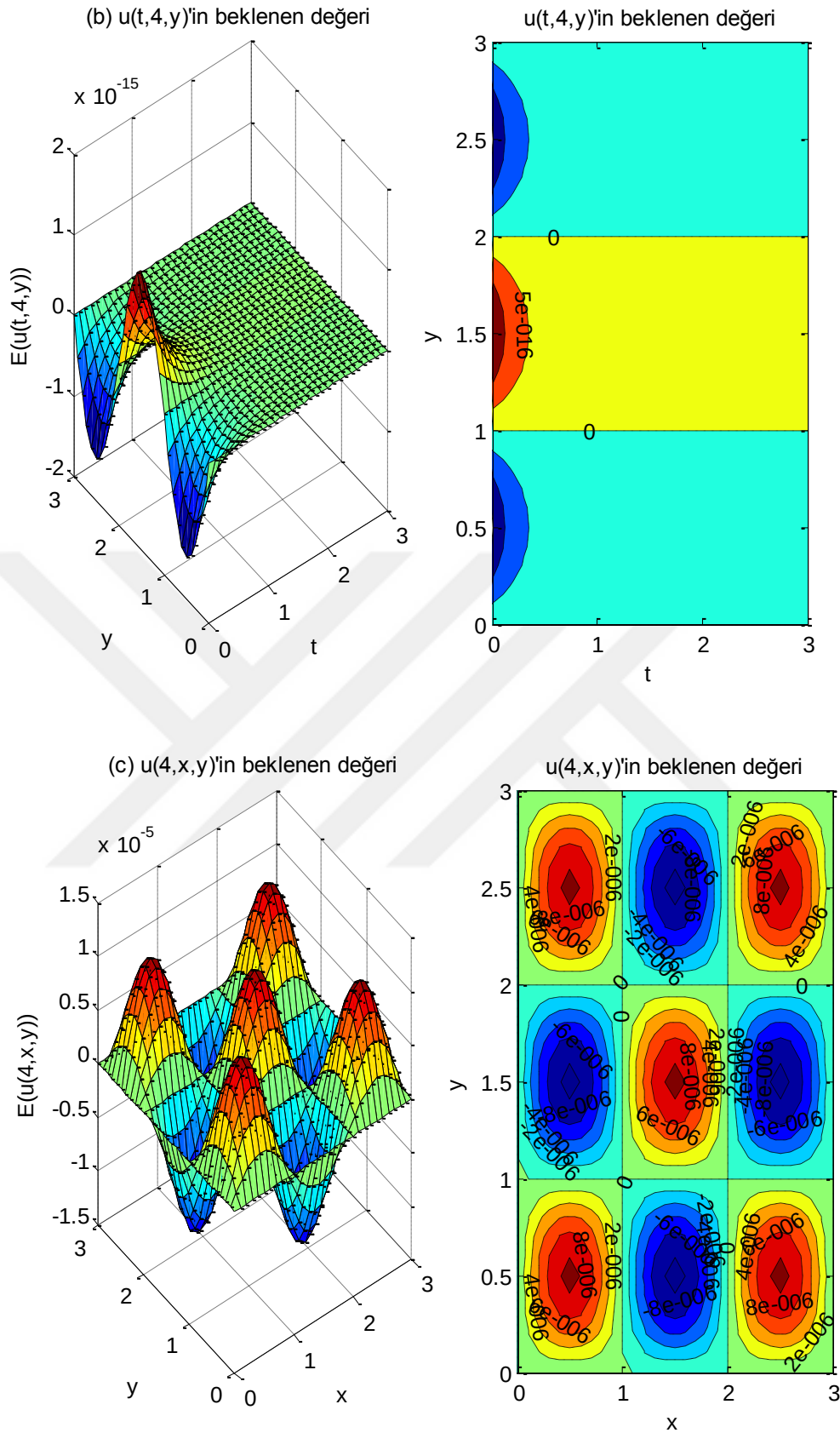
$$\begin{aligned}
E[u(t, x, y)] &= E[Ae^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)] = e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) E[A] \\
&= e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \mu
\end{aligned}$$

$\mu = 3$ özel değeri için,

$$E[u(t, x, y)] = 3e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

bulunur.





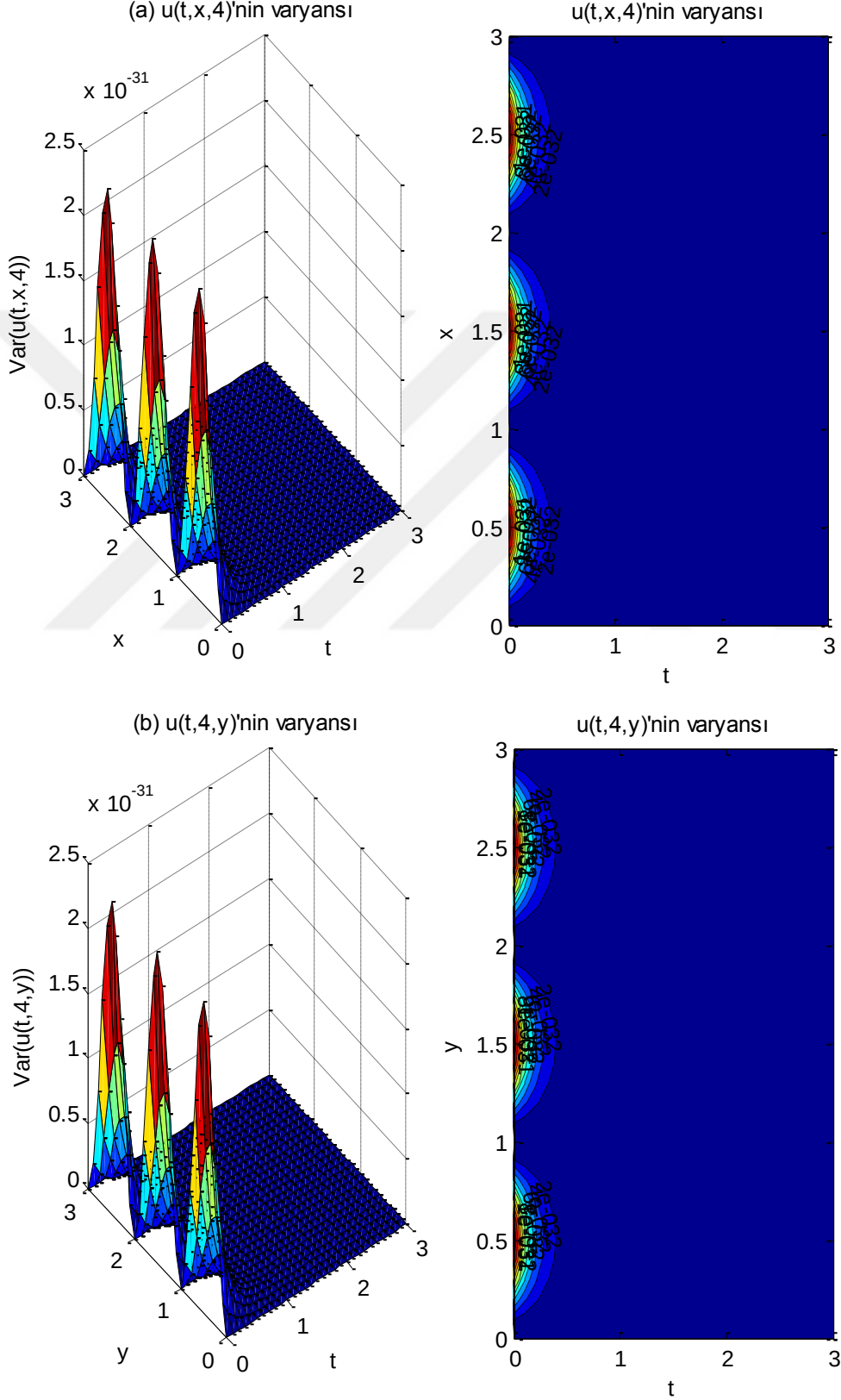
Şekil 18. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, (a) $y = 4$, (b) $x = 4$, (c) $t = 4$ özel değerleri için (18) denkleminin beklenen değerinin 3 boyutlu çözüm davranışı

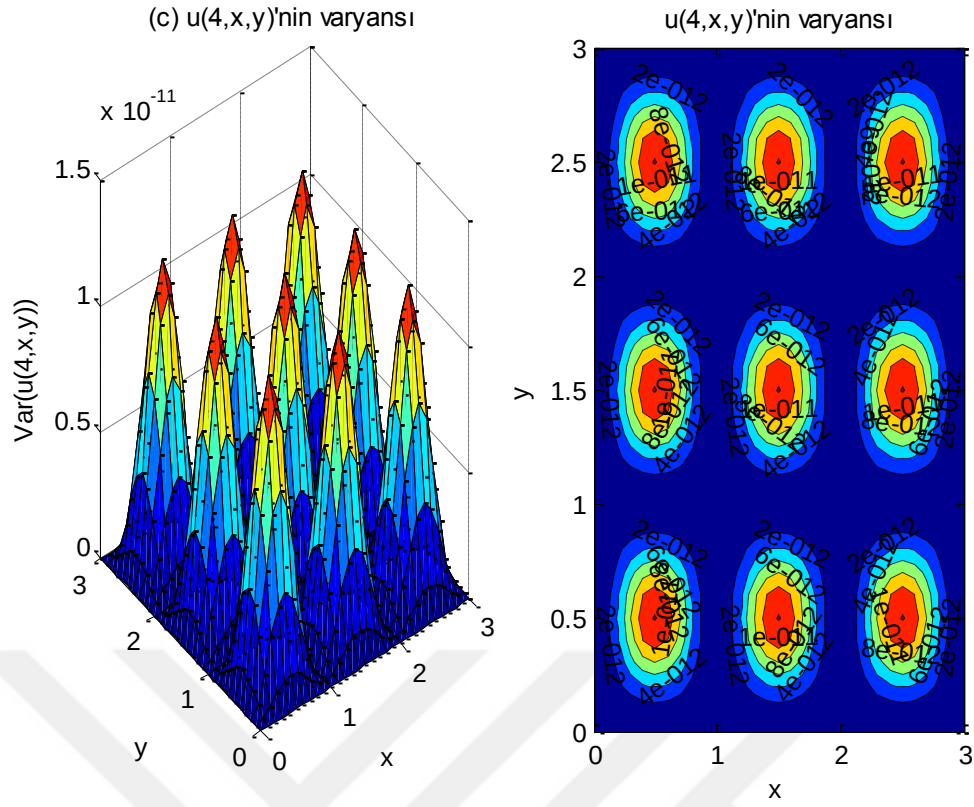
$$\begin{aligned} \text{Var}[u(t, x, y)] &= \text{Var}[Ae^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)] = (e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2 \text{Var}[A] \\ &= (e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2 \sigma^2 \end{aligned}$$

$\sigma^2 = 1$ özel değerleri için,

$$\text{Var}[u(t, x, y)] = (e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2$$

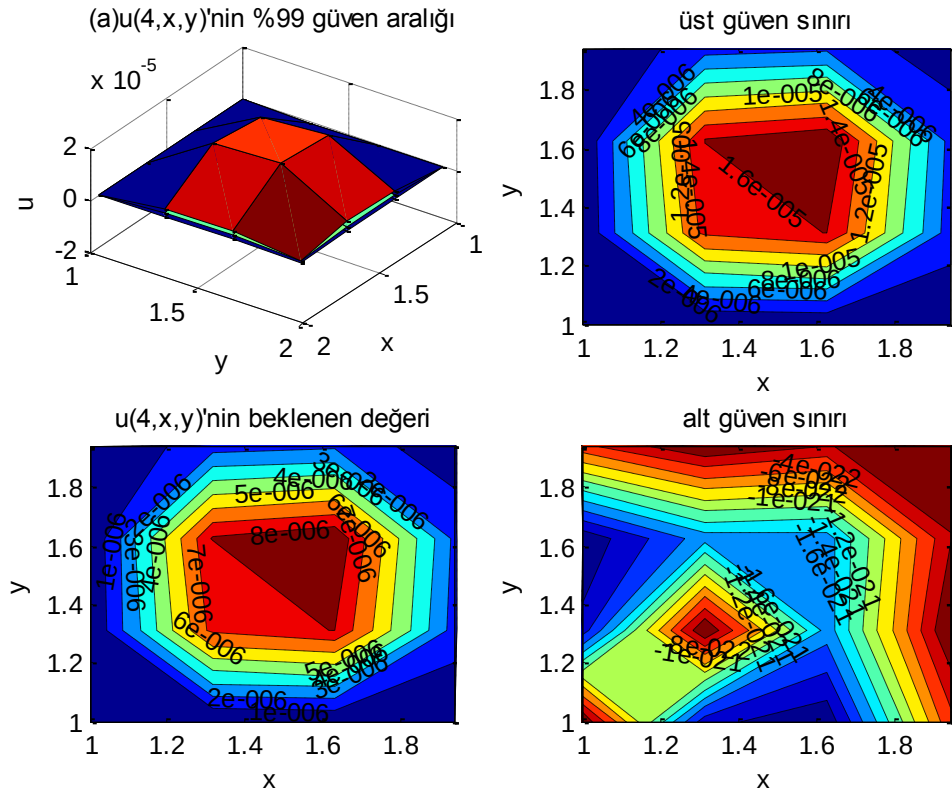
bulunur.





Şekil 19. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, (a) $y = 4$, (b) $x = 4$, (c) $t = 4$ özel değerleri için (18) denkleminin varyansın 3 boyutlu çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları



Şekil 20. $A \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 1)$, (a) $y = 4$, (b) $x = 4$, (c) $t = 4$ özel değerleri için (18) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı

$u(t, x, y)$ değişim katsayısı;

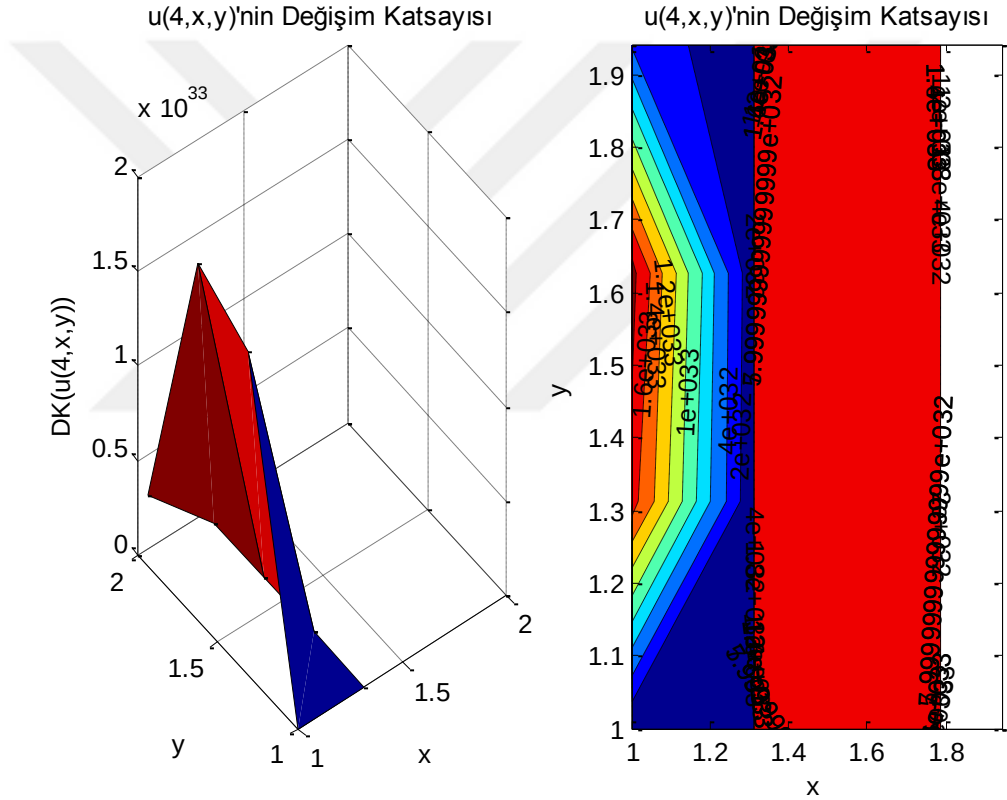
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$std[u(t, x, y)] = \sqrt{Var[u(t, x, y)]} = \sqrt{(e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2}$$

bulunur. Değişim katsayısı

$$D.K = \frac{std[u(t, x, y)]}{E[u(t, x, y)]} \times 100 = \frac{\sqrt{(e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2}}{3e^{-\pi t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)} \times 100 \quad \text{bulunur.}$$

$u(t, x, y)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 21. $u(t, x, y)$ 'in değişim katsayısı değerinin 3D grafiği ve Contur plot davranışı

Örnek 3.3.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = (2At^2 + 2Bt + (2A + 2C) \cos x \cos y) \quad (28)$$

$$0 < t < 1, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$u(0, x, y) = C \cos x \cos y, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$u_t(0, x, y) = B \cos x \cos y, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

$$u\left(t, -\frac{\pi}{2}, y\right) = u\left(t, \frac{\pi}{2}, y\right) = 0,$$

$$u\left(t, x, -\frac{\pi}{2}\right) = u\left(t, x, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

sırasıyla

$A \sim \text{Üçg}(a = 1, b = 2, c = 5)$, $B \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 3)$ ve $C \sim \text{Weibull}(\xi = 2, \zeta = 4)$, üçgensel, düzgün ve Weibull dağılımına sahip rastgele değişkenler olmak üzere iki boyutlu hiperbolik rastgele K.D.D. problemini Fourier serisi metodu ile çözelim.

Çözüm:

Kabul edelim ki,

$$u(t, x, y) = v(t, x, y) + w(t, x, y)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u(t, x, y) = v(t, x, y) + w(t, x, y) \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \\ 0 < t < 1, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ v(0, x, y) = C \cos x \cos y, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ v_t(0, x, y) = B \cos x \cos y, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ v\left(t, -\frac{\pi}{2}, y\right) = v\left(t, \frac{\pi}{2}, y\right) = 0, 0 \leq t \leq 1 \\ v\left(t, x, -\frac{\pi}{2}\right) = v\left(t, x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (29)$$

$w(t, x, y)$ problemin çözümü;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = (2At^2 + 2Bt + (2A + 2C) \cos x \cos y) \\ 0 < t < 1, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ w(0, x, y) = 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ w_t(0, x, y) = 0, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \\ w\left(t, -\frac{\pi}{2}, y\right) = w\left(t, \frac{\pi}{2}, y\right) = 0, 0 \leq t \leq 1 \\ w\left(t, x, -\frac{\pi}{2}\right) = w\left(t, x, \frac{\pi}{2}\right) = 0, 0 \leq t \leq 1 \end{array} \right. \quad (30)$$

(29)denkleminin değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümü,

$$v(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y) \neq 0 \text{ için}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ denkleminde yerine yazılırsa}$$

$$T''(t)X(x)Y(y) - (T(t)X''(x)Y(y) + T(t)X(x)Y''(y)) = 0 \text{ elde edilir.}$$

$$T''(t)X(x)Y(y) = T(t)(X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y)) \text{ her iki tarafı } T(t)X(x)Y(y) \text{ ifadesine bölünürse;}$$

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \text{ elde edilir.}$$

Her iki tarafı tek bir sabitle eşitlersek;

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -k^2 \quad \text{ve} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -k^2.$$

Bu negatif sabitlere göre t cinsinden çözümler bulmak için;

$$T''(t) + k^2 T(t) = 0,$$

ve

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2 \quad \text{sabiti için} \quad -\mu^2 = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - k^2,$$

$$\mu^2 - k^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)},$$

$$(\gamma^2 = k^2 - \mu^2)$$

$$-\gamma^2 = \frac{Y''(t)}{Y(t)},$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \quad \text{ve} \quad Y''(y) + \gamma^2 Y(y) = 0 \quad \text{denklemleri elde edilir.}$$

Dirichlet sınır koşulları yerine yazarsak ,

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad X(-\frac{\pi}{2}) = X(\frac{\pi}{2}) = 0,$$

$$Y''(y) + \gamma^2 Y(y) = 0, \quad Y(-\frac{\pi}{2}) = Y(\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \text{elde edilir.}$$

(29) denklemindeki başlangıç koşullarını yerine yazarsak;

$$v(0, x, y) = T(0)X(x)Y(y) = C \cos x \cos y,$$

$$v_t(0, x, y) = T'(0)X(x)Y(y) = B \cos x \cos y,$$

$$v(t, -\frac{\pi}{2}, y) = v(t, \frac{\pi}{2}, y) = T(t)X(-\frac{\pi}{2})Y(y) = T(t)X(\frac{\pi}{2})Y(y) = 0,$$

$$v(t, x, -\frac{\pi}{2}) = v(t, x, \frac{\pi}{2}) = T(t)X(x)Y(-\frac{\pi}{2}) = T(t)X(x)Y(\frac{\pi}{2}) = 0,$$

bulunur.

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \mu^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp i\mu \quad \text{olduğundan,}$$

$$X(x) = c_1 \cos \mu x + c_2 \sin \mu x \quad (31)$$

bulunur.

$$Y''(y) + \gamma^2 Y(y) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \gamma^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp i\gamma \quad \text{olduğundan,}$$

$$Y(y) = d_1 \cos \gamma y + d_2 \sin \gamma y \quad (32)$$

bulunur.

$$T''(t) + k^2 T(t) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + k^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp ik \quad \text{olduğundan,}$$

$$T(t) = e_1 \cos k t + e_2 \sin k t, \quad (k^2 = \gamma^2 + \mu^2)$$

bulunur.Sınır koşulları yerine yazılırsa ;

$$X(-\frac{\pi}{2}) = c_2 = 0, X(\frac{\pi}{2}) = c_1 \cos(\frac{\mu\pi}{2}) = 0, \frac{\mu\pi}{2} = m\frac{\pi}{2}, m \in Z$$

$$\mu = \mu_m = m,$$

$$Y(-\frac{\pi}{2}) = d_2 = 0, Y(\frac{\pi}{2}) = d_1 \cos(\frac{\gamma\pi}{2}) = 0, \frac{\gamma\pi}{2} = \frac{n\pi}{2}, \gamma = n$$

$$\gamma = \gamma_n = n(m, n = 1, 2, \dots) \text{ elde}$$

edilir.

(31) ve (32) inci denklemde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$X_m(x) = \cos(mx), Y_n(y) = \cos(ny) \text{ elde edilir.}$$

$$m, n = 1, 2, \dots \text{ için } k = k_{mn} = \sqrt{\mu_m^2 + \gamma_n^2} = \sqrt{m^2 + n^2} = \tau_{mn}$$

$$T(t) = T_{mn}(t) = S_{mn} \cos(\tau_{mn}t) + S^*_{mn} \sin(\tau_{mn}t)$$

elde edilir.Bulunan $T(t), X(x), Y(y)$ fonksiyonlarını $v(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$v_{mn}(t, x, y) = \cos(mx) \cos(ny) (S_{mn} \cos(\tau_{mn}t) + S^*_{mn} \sin(\tau_{mn}t)) \quad (33)$$

elde edilir.

Bulunan bütün çözümler toplanırsa,

$$v_{mn}(t, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (S_{mn} \cos(\tau_{mn}t) + S^*_{mn} \sin(\tau_{mn}t)) \cos(mx) \cos(ny)$$

çözümü uygulanır. (29) denklemindeki ilk başlangıç koşulu uygulanırsa;

$$v(0, x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S_{mn} \cos(mx) \cos(ny) = C \cos(x) \cos(y) \text{ eşitlik ile,}$$

$$S_{11} \cos(x) \cos(y) = C \cos(x) \cos(y), m = n = 1 \text{ için } S_{11} = C,$$

elde edilir. (29) denklemindeki ikinci başlangıç koşulu uygulanırsa;

$$v_t(0, x, y) = B \cos x \cos y,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} S^*_{mn} \tau_{mn} \cos(mx) \cos(ny) = B \cos x \cos y (\tau_{11} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2})$$

son eşitlik ile, $S^*_{11} \tau_{11} \cos x \cos y = B \cos x \cos y,$

$$S^*_{11} = \frac{B}{\sqrt{2}}$$

elde edilir.(33) denkleminde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$v_{11}(t, x, y) = S_{11} \cos(\tau_{11}t) + S^*_{11} \sin(\tau_{11}t) \cos x \cos y = (C \cos(\sqrt{2}t) + \frac{B}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)) \cos x \cos y \text{ bulunur.}$$

$m, n \neq 1$ için çözüm olmadığından

$$v(t, x, y) = (C \cos(\sqrt{2}t) + \frac{B}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t)) \cos x \cos y \text{ elde edilir.}$$

$w(t, x, y)$ için,

$w(t, x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) \cos(kx) \cos(ky)$ ifadesini (30) denkleminde gerekli türevler alınarak yerine yazalım.

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} A_k''(t) \cos(kx) \cos(ky) \\ & + \left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \cos(kx) \cos(ky) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(t) k^2 \cos(kx) \cos(ky) \right) \\ & = (2At^2 + 2Bt + (2A + 2C)) \cos x \cos y \end{aligned}$$

$k = 1$ için;

$$A_1''(t) + 2A_1(t) = 2At^2 + 2Bt + (2A + 2C) \quad (34)$$

elde edilir.

$$k \geq 2 \text{ için } A_k''(t) + 2k^2 A_k(t) = 0 \quad (35)$$

bulunur. (34) denkleminin homojen kısmının çözümü,

$$A_1''(t) + 2A_1(t) = 0, \quad r^2 + 2 = 0, \quad r_{1,2} = \pm i\sqrt{2}$$

bulunur.

$$A_1^h(t) = c_{11} \cos\sqrt{2} t + c_{11}^* \sin\sqrt{2} t$$

elde edilir. Özel çözüm, belirsiz katsayılar yönteminden,

$A_0(t) = at^2 + bt + c$ seçilir ve türevleri ile birlikte denklemde yerine yazılırsa

$$2a + 2(at^2 + bt + c) = 2At^2 + 2Bt + (2A + 2C)$$

$$2a = 2A, \quad 2b = 2B, \quad 2a + 2c = 2A + 2C,$$

$$\boxed{a = A}, \quad \boxed{b = B}, \quad \boxed{c = C},$$

$$A_0(t) = At^2 + Bt + C$$

bulunur. Buna göre genel çözüm

$$A_1(t) = A_1^h(t) + A_0(t) = c_{11} \cos\sqrt{2} t + c_{11}^* \sin\sqrt{2} t + At^2 + Bt + C$$

bulunur. Yukarıda bulunan değerler yerine yazılırsa

$$w(t, x, y) = (c_{11} \cos\sqrt{2} t + c_{11}^* \sin\sqrt{2} t + At^2 + Bt + C) \cos x \cos y \quad (36)$$

elde edilir.

(30) denklemindeki başlangıç koşulları yerine yazılırsa,

$$w(0, x, y) = (c_{11} + C) \cos x \cos y = 0, \quad c_{11} = -C$$

$$w_t(0, x, y) = (\sqrt{2}c_{11}^* + B) \cos x \cos y = 0, \quad c_{11}^* = -\frac{B}{\sqrt{2}}$$

elde edilir. (36) denkleminde bulunan değerler yerine yazılırsa,

$$w(t, x, y) = \left(-C \cos\sqrt{2} t - \frac{B}{\sqrt{2}} \sin\sqrt{2} t + At^2 + Bt + C \right) \cos x \cos y$$

elde edilir. Böylece genel çözüm için $v(t, x, y), w(t, x, y)$ yerine yazılırsa,

$$u(t, x, y) = v(t, x, y) + w(t, x, y) =$$

$$\left(C \cos(\sqrt{2}t) + \frac{B}{\sqrt{2}} \sin(\sqrt{2}t) \right) \cos x \cos y + \left(-C \cos \sqrt{2}t - \frac{B}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}t + At^2 + Bt + C \right) \cos x \cos y$$

$$u(t, x, y) = (At^2 + Bt + C) \cos x \cos y \quad (37)$$

elde edilir.

$X \sim \text{Üçg}(a, b, c)$ üçgensel dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, moment çıkaran fonksiyonu (Feller, 1968).

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

$A \sim \text{Üçg}(a, b, c)$ rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı

$$E[A] = \frac{(a+b+c)}{3}, \text{Var}[A] = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

Düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri, $X \sim \text{Düzgün}(\alpha, \beta)$ ' dir.

Düzgün dağılımın,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak, $B \sim \text{Düzgün}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkenin birinci momenti ve varyansı;

$$E[B] = \frac{\alpha + \beta}{2}, \text{Var}[B] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

C rastgele değişkenine (ξ, ζ) parametrelili Weibull dağılımına sahiptir denir (Weibull, 1951).

Weibull dağılımı için beklenen değer ve varyans şöyle verilir:

$$E(C) = \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{\xi}}} \frac{1}{\xi} \Gamma\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

$$\text{Var}(C) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\xi}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{\zeta^{\frac{2}{\xi}}}.$$

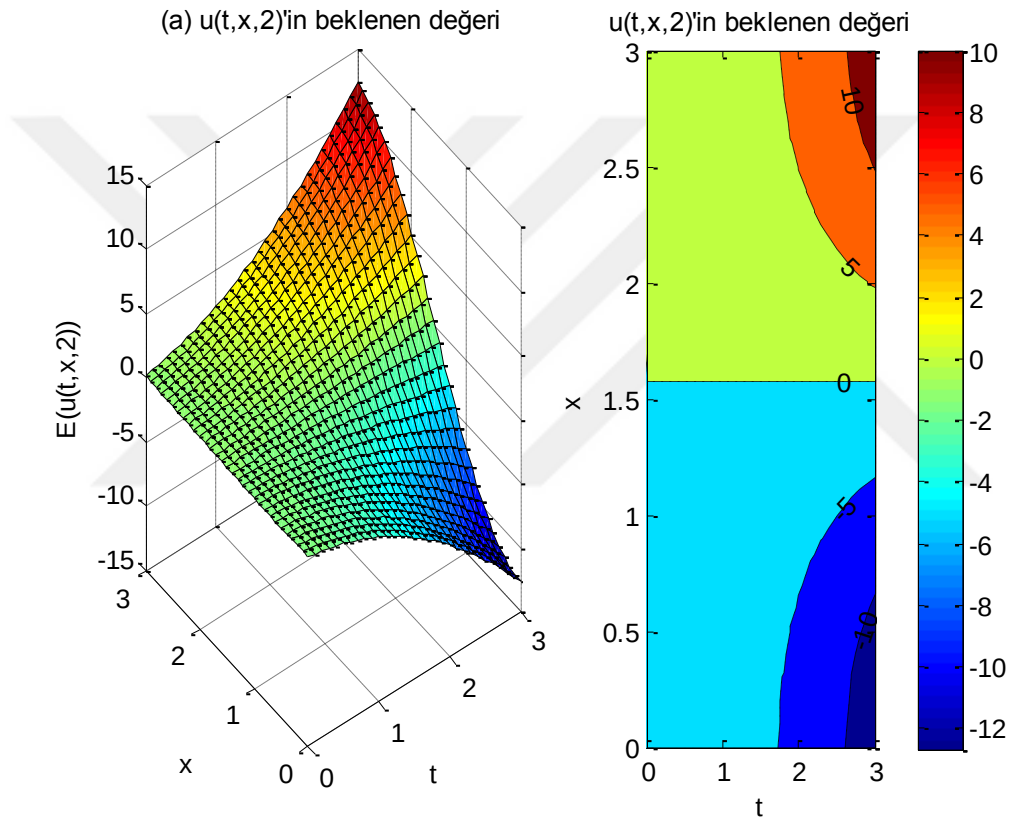
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa $u(t, x, y)$ denkleminin beklenen değeri;

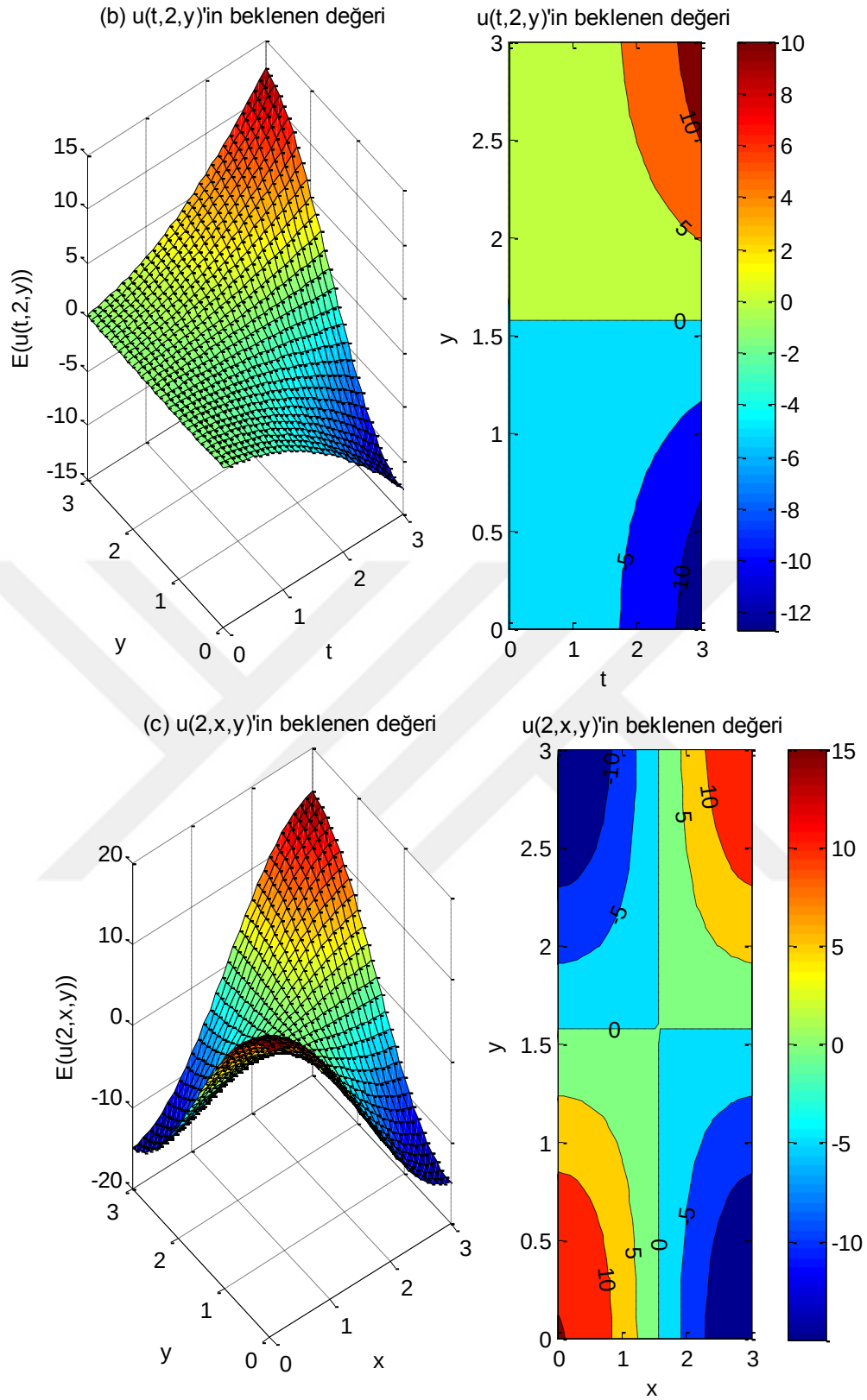
$$\begin{aligned}
E[u(t, x, y)] &= E[(At^2 + Bt + C) \cos x \cos y] \\
&= t^2 \cos x \cos y E[A] + t \cos x \cos y E[B] + \cos x \cos y E[C] \\
&= \frac{(a + b + c)t^2 \cos x \cos y}{3} + \frac{(\alpha + \beta)t \cos x \cos y}{2} \\
&\quad + \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{\xi}}} \frac{1}{\xi} \Gamma\left(\frac{1}{\xi}\right) \cos x \cos y
\end{aligned}$$

$a = 1, b = 2, c = 5, \alpha = 1, \beta = 3, \xi = 2$ ve $\zeta = 4$ özel değerleri için,

$$E[u(t, x, y)] = \frac{8t^2 \cos x \cos y}{3} + 2t \cos x \cos y + \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cos x \cos y$$

bulunur.





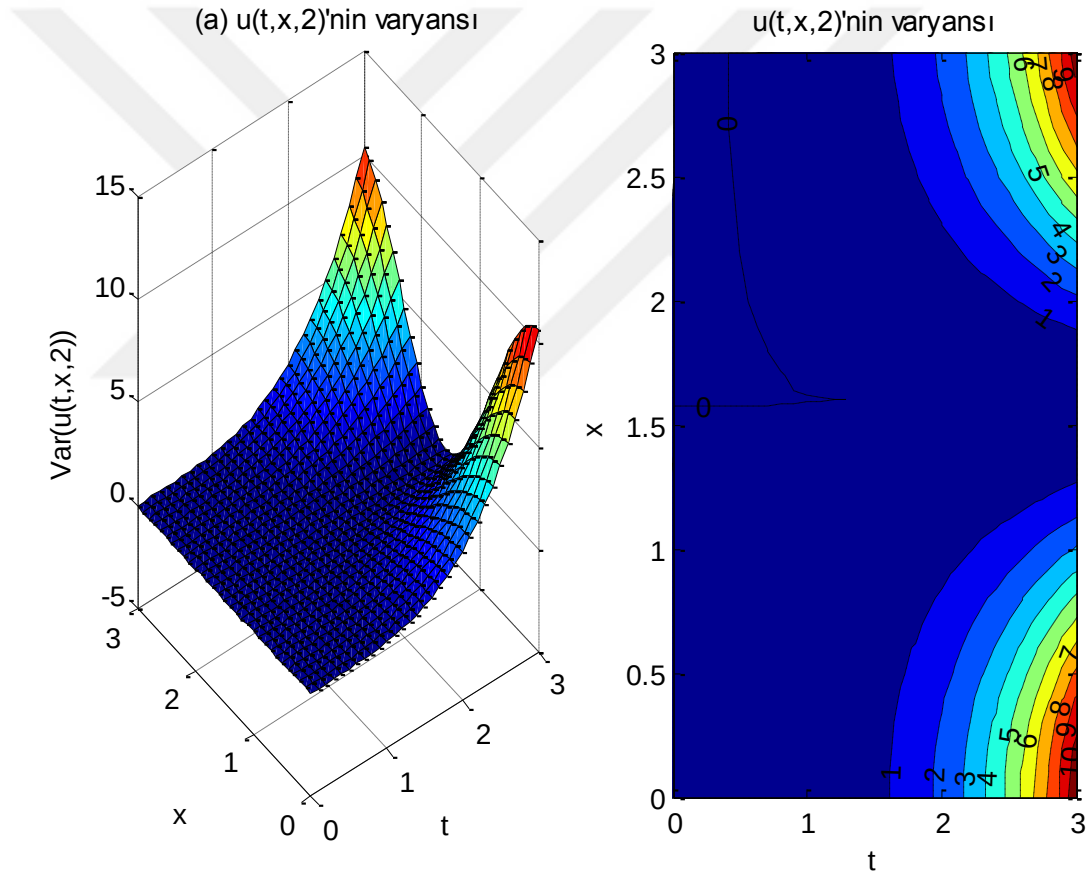
Şekil 22. $A \sim \text{Üçg}(a = 1, b = 2, c = 5)$, $B \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 3)$ ve $C \sim \text{Weibull}(\xi = 2, \zeta = 4)$, (a) $y = 2$, (b) $x = 2$, (c) $t = 2$ özel değerleri için (28) denkleminin beklenen değerinin 3 boyutlu çözüm davranışı

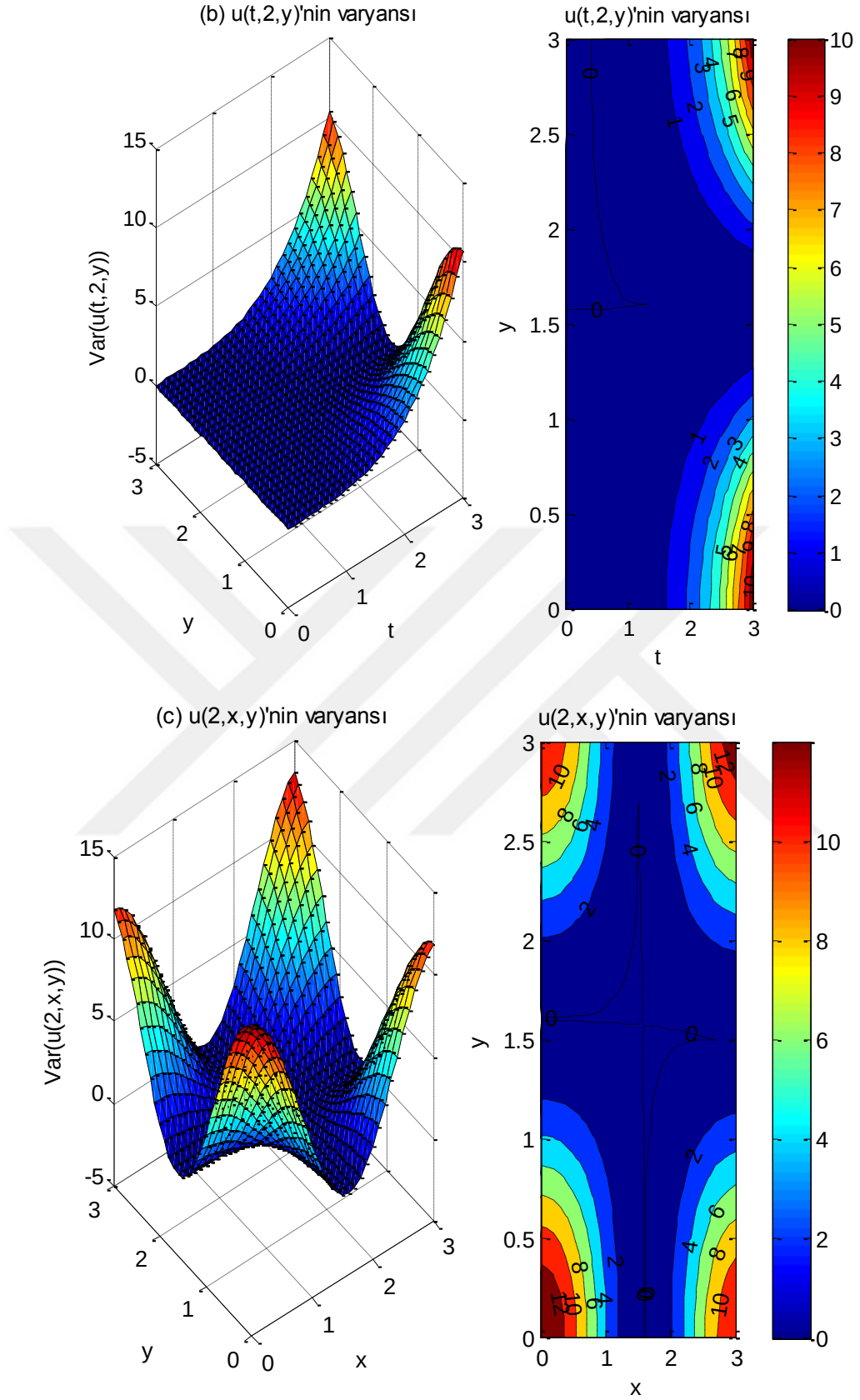
$$\begin{aligned}
Var[u(t, x, y)] &= Var[(At^2 + Bt + C) \cos x \cos y] \\
&= (t^2 \cos x \cos y)^2 Var[A] + (t \cos x \cos y)^2 Var[B] + \cos^2 x \cos^2 y Var[C] \\
&= \left(\frac{a + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \right) (t^2 \cos x \cos y)^2 \\
&\quad + \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} (t \cos x \cos y)^2 + \left(\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\xi}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{\zeta^{\frac{2}{\xi}}}\right) \cos^2 x \cos^2 y
\end{aligned}$$

$a = 1, b = 2, c = 5, \alpha = 1, \beta = 3, \xi = 2$ ve $\zeta = 4$ özel değerleri için,

$$Var[u(t, x, y)] = \frac{13}{18} (t^2 \cos x \cos y)^2 + \frac{1}{3} (t \cos x \cos y)^2 + \left(\frac{1 - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{4} \right) \cos^2 x \cos^2 y$$

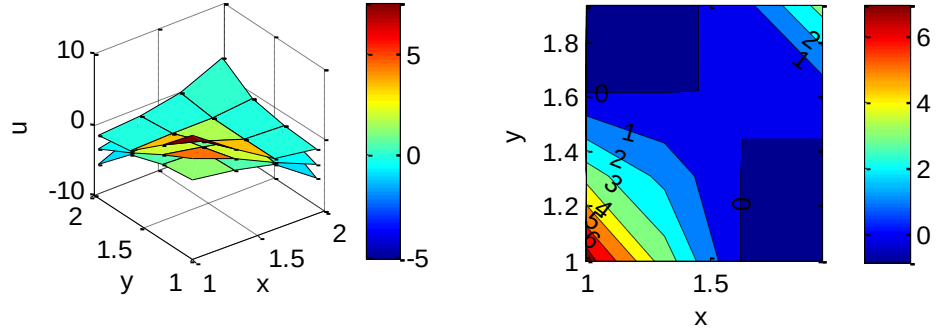
bulunur.



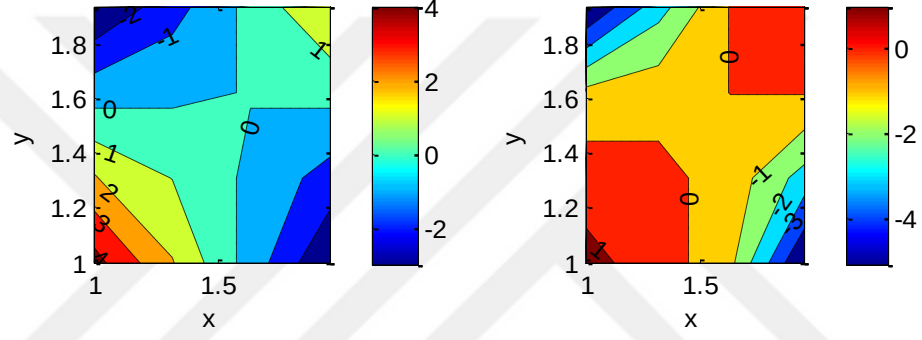


Şekil 23. $A \sim \text{Üçg}(\alpha = 1, \theta = 2, c = 5)$, $B \sim \text{Düzgün}(\alpha = 1, \beta = 3)$ ve $C \sim \text{Weibull}(\xi = 2, \zeta = 4)$, (a) $y = 2$, (b) $x = 2$, (c) $t = 2$ özel değerleri için (28) denkleminin varyansın 3 boyutlu çözüm davranışı
Beklenen değer için güven aralıkları

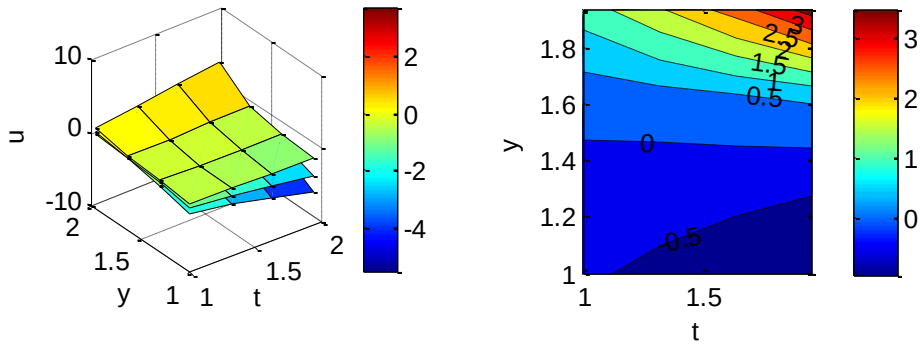
(a) $u(2,x,y)$ 'nin 3 standart sapmalı güven aralığı



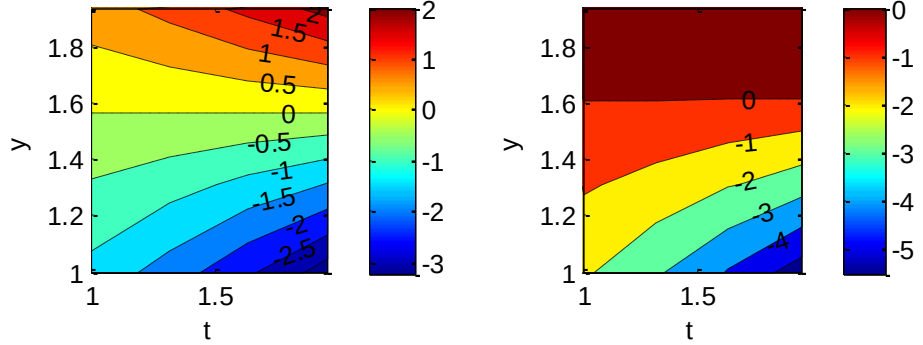
$u(2,x,y)$ 'nin beklenen değeri



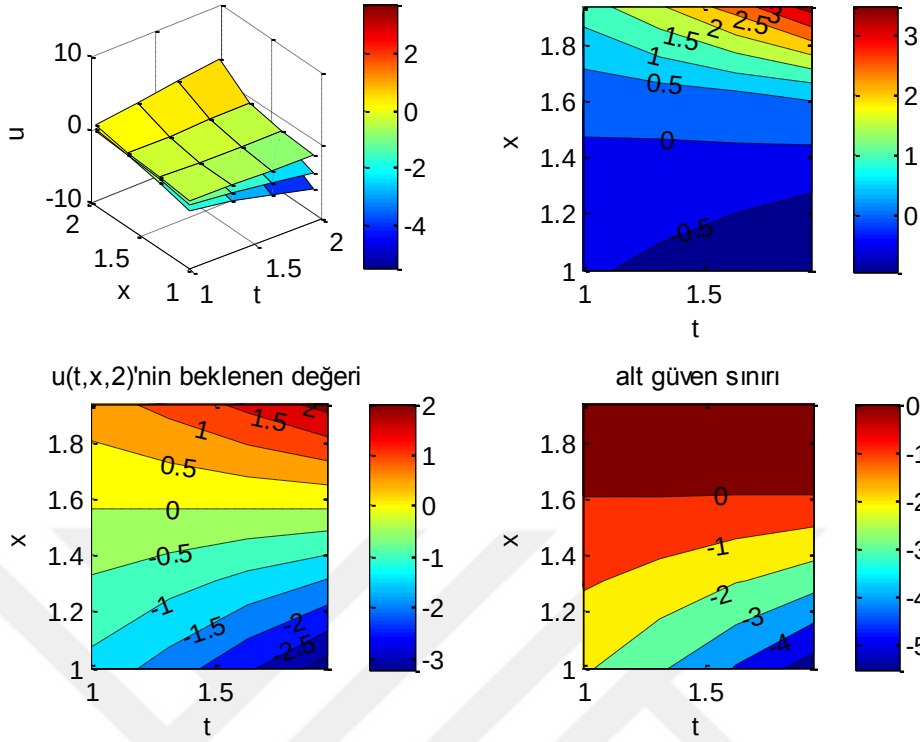
(b) $u(t,2,y)$ 'nin 3 standart sapmalı güven aralığı



$u(t,2,y)$ 'nin beklenen değeri



(c) $u(t,x,2)$ 'nin 3 standart sapmalı güven aralığı



Şekil 24. $A \sim \text{Üçg}(a = 1, b = 2, c = 5)$, $B \sim \text{Düzgün}(a = 1, b = 3)$ ve $C \sim \text{Weibull}(\xi = 2, \zeta = 4)$, (a) $t = 2$, (b) $x = 2$, (c) $y = 2$ özel değerleri için (28) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı

$u(t, x, y)$ değişim katsayısı;

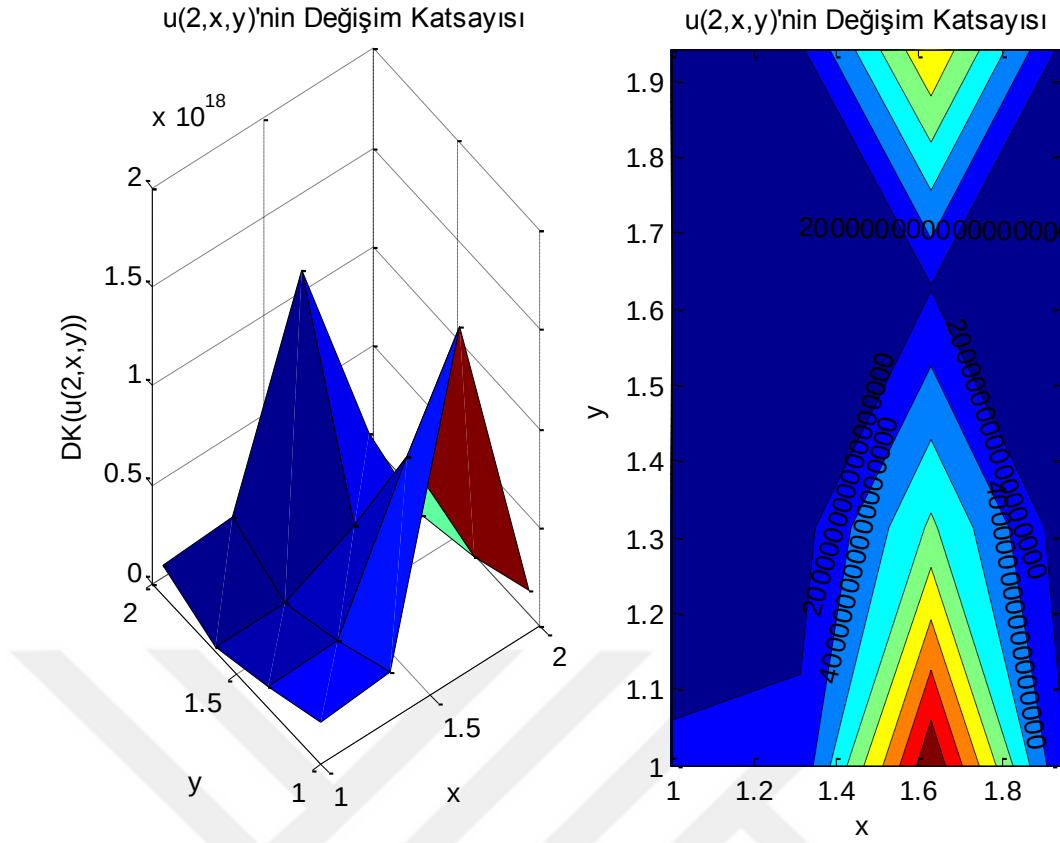
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$\begin{aligned} \text{std}[u(t, x, y)] &= \sqrt{\text{Var}[u(t, x, y)]} \\ &= \sqrt{\frac{13}{18}(t^2 \cos x \cos y)^2 + \frac{1}{3}(t \cos x \cos y)^2 + \left(\frac{1 - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{4}\right) \cos^2 x \cos^2 y} \end{aligned}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise

$$\begin{aligned} D.K &= \frac{\text{std}[u(t, x, y)]}{E[u(t, x, y)]} \times 100 \\ &= \frac{\sqrt{\frac{13}{18}(t^2 \cos x \cos y)^2 + \frac{1}{3}(t \cos x \cos y)^2 + \left(\frac{1 - \Gamma^2\left(\frac{3}{2}\right)}{4}\right) \cos^2 x \cos^2 y}}{\frac{8t^2 \cos x \cos y}{3} + 2t \cos x \cos y + \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cos x \cos y} \times 100 \quad \text{elde edilir.} \end{aligned}$$

$u(t, x, y)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 25. $u(t, x, y)$ 'in değişim katsayısının davranışı

3.4. Bir Boyutlu Parabolik denklemlerin Fourier serisi çözümleri

Bu bölümde bir boyutlu rastgele parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Fourier Dönüşüm Yöntemini kullanarak, iki adet örnek üzerinde uygulama gerçekleştirildi.

Örnek 3.4.1

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (-2Ae^{-t} - At + A)\cos(x) \quad (38)$$

$$u_x(t, 0) = u\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = 0,$$

Burada, $A \sim \chi^2_{(r)}$ ($r = 2$) serbestlik dereceli ki-kare dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için tek boyutlu rastgele parabolik KDD'ini Fourier dönüşümü yöntemi yardımı ile çözüyoruz.

Çözüm:

İlk olarak denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım,

$$F\{u_t(t, x)\} + F\{u_{xx}(t, x)\} = F\{-2Ae^{-t}\cos(x) - At\cos(x) + A\cos(x)\},$$

$$iwu(w, x) + u_{xx}(w, x) = \cos(x)F\left\{\left(-2Ae^{-t} - \frac{At^3}{6} + \frac{At^2}{2}\right)\right\},$$

$$= -(iw)^2(\cos(x)) F \left\{ 2Ae^{-t} + \frac{At^3}{6} - \frac{At^2}{2} \right\},$$

$$u_{xx}(w, x) + iwu(w, x) = Aw^2(\cos(x)) F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\}.$$

Denklemin genel çözümü

$$u(w, x) = u_h(w, x) + u_{\bar{o}}(w, x)$$

homojen kısmının çözümü,

$$u_{xx}(w, x) + iwu(w, x) = 0,$$

karakteristik denklemi

$$r^2 + iw = 0, \quad r_{1,2} = \mp \sqrt{-iw}$$

$$u_h(w, x) = c_1 e^{-\sqrt{-iw}x} + c_2 e^{\sqrt{-iw}x}$$

elde edilir.

Özel çözüm ;

$$u_{\bar{o}}(w, x) = Kw^2 F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \cos(x) + Lw^2 F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \sin(x),$$

$$u_{\bar{o}xx}(w, x) = -Kw^2 F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \cos(x) - Lw^2 F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \sin(x)$$

$$-Kw^2 F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \cos(x) - Lw^2 F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \sin(x) +$$

$$iw \left(Kw^2 F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \cos(x) + Lw^2 F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \sin(x) \right) =$$

$$Aw^2(\cos(x)) F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\},$$

$$K(iw - 1)F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} w^2 \cos(x) = Aw^2(\cos(x)) F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\}.$$

Buradan, $L = 0$ ve $K = \frac{A}{iw-1}$ olur.

$$u_{\bar{o}}(w, x) = \frac{Aw^2}{iw-1} F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \cos(x)$$

Genel çözüm;

$$u(w, x) = u_h(w, x) + u_{\bar{o}}(w, x)$$

$$= c_1 e^{-\sqrt{-iw}x} + c_2 e^{\sqrt{-iw}x} + \frac{Aw^2}{iw-1} F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \cos(x)$$

başlangıç ve sınır koşullarını kullanırsak,

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ için;}$$

$$u \left(w, \frac{\pi}{2} \right) = c_1 e^{-\sqrt{-iw}\frac{\pi}{2}} + c_2 e^{\sqrt{-iw}\frac{\pi}{2}} = 0,$$

$$c_1 = -c_2 e^{2\sqrt{-iw}\frac{\pi}{2}},$$

$$u_x(w, x) = -\sqrt{-iw}c_1 e^{-\sqrt{-iw}x} + \sqrt{-iw}c_2 e^{\sqrt{-iw}x} - \frac{Aw^2}{iw-1} F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \sin(x)$$

$$u_x(w, 0) = -\sqrt{-iw}c_1 + \sqrt{-iw}c_2 = 0$$

$-c_1 + c_2 = 0$, $c_1 = c_2$ olduğundan $c_1 = -c_1 e^{2\sqrt{-iw}\frac{\pi}{2}}$ buradan, $c_1 = c_2 = 0$

$$u(w, x) = \frac{Aw^2}{iw-1} F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \cos(x)$$

ters Fourier dönüşümü alınır

$$F^{-1}\{u(w, x)\} = F^{-1} \left\{ \frac{Aw^2}{iw-1} F \left\{ 2e^{-t} + \frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{2} \right\} \cos(x) \right\},$$

$$u(t, x) = A(e^{-t} + t)\cos(x) \quad (39)$$

elde edilir. Ki-kare dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri $X \sim \chi^2_{(r)}$ dir. Ki-kare dağılımın

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{1}{(1-2t)^{\frac{r}{2}}},$$

moment çıkaran fonksiyonundan faydalanılarak $A \sim \chi^2_{(r)}$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri;

$$E[A] = r, E[A^2] = r(r+2) \text{ ve varyansı } Var[A] = 2r,$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

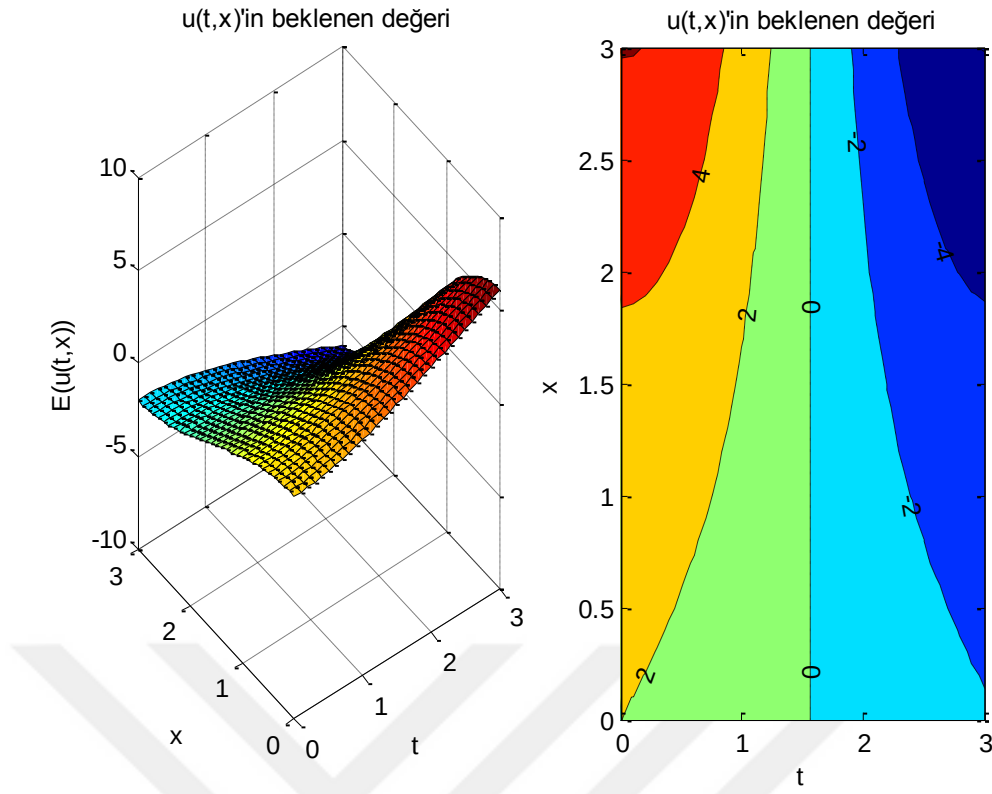
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değer özelliklerinden $u(t, x)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[u(t, x)] = E[A(e^{-t} + t)\cos(x)] = (e^{-t} + t)\cos(x)E[A] = (e^{-t} + t)\cos(x)r$$

$r = 2$, özel değeri için,

$$E[u(t, x)] = 2(e^{-t} + t)\cos(x)$$

bulunur.



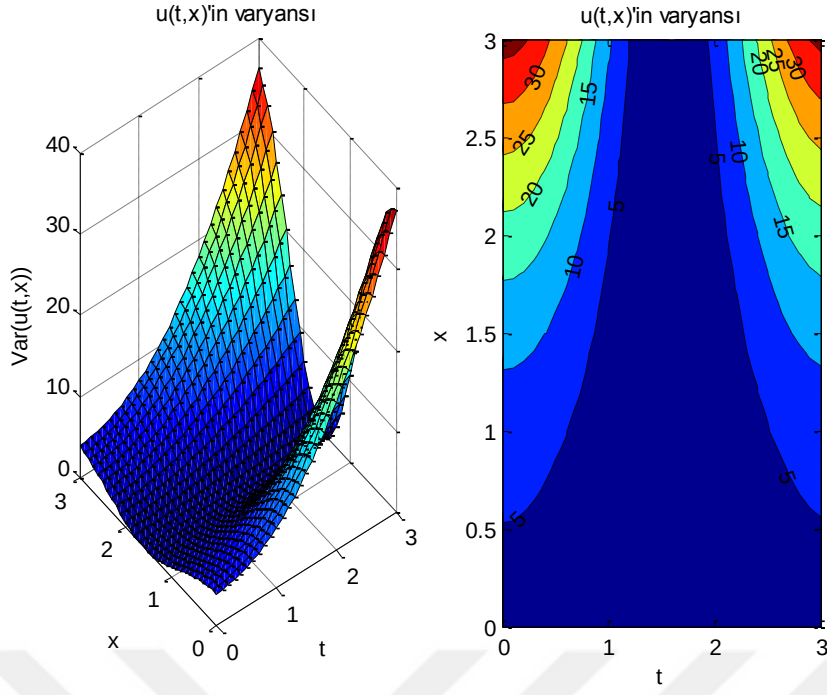
Şekil 26. $A \sim \chi^2_{(r=2)}$ özel değeri için (38) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$\begin{aligned} Var[u(t, x)] &= Var[A(e^{-t} + t)\cos(x)] = ((e^{-t} + t)\cos(x))^2 Var[A] \\ &= ((e^{-t} + t)\cos(x))^2 2r \end{aligned}$$

$r = 2$, özel değeri için,

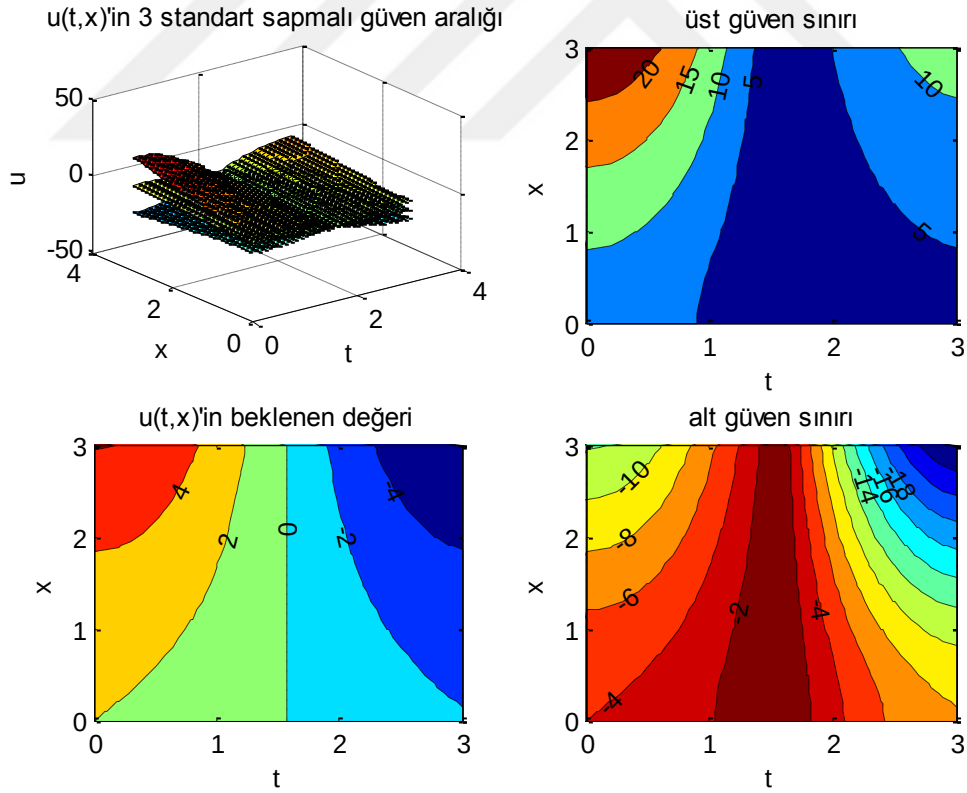
$$Var[u(t, x)] = 4((e^{-t} + t)\cos(x))^2$$

bulunur.



Şekil 27. $A \sim \chi^2_{(r=2)}$ özel değerleri için (38) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları



Şekil 28. $A \sim \chi^2_{(r=2)}$ özel değeri için (38) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

$u(t, x)$ değişim katsayısı;

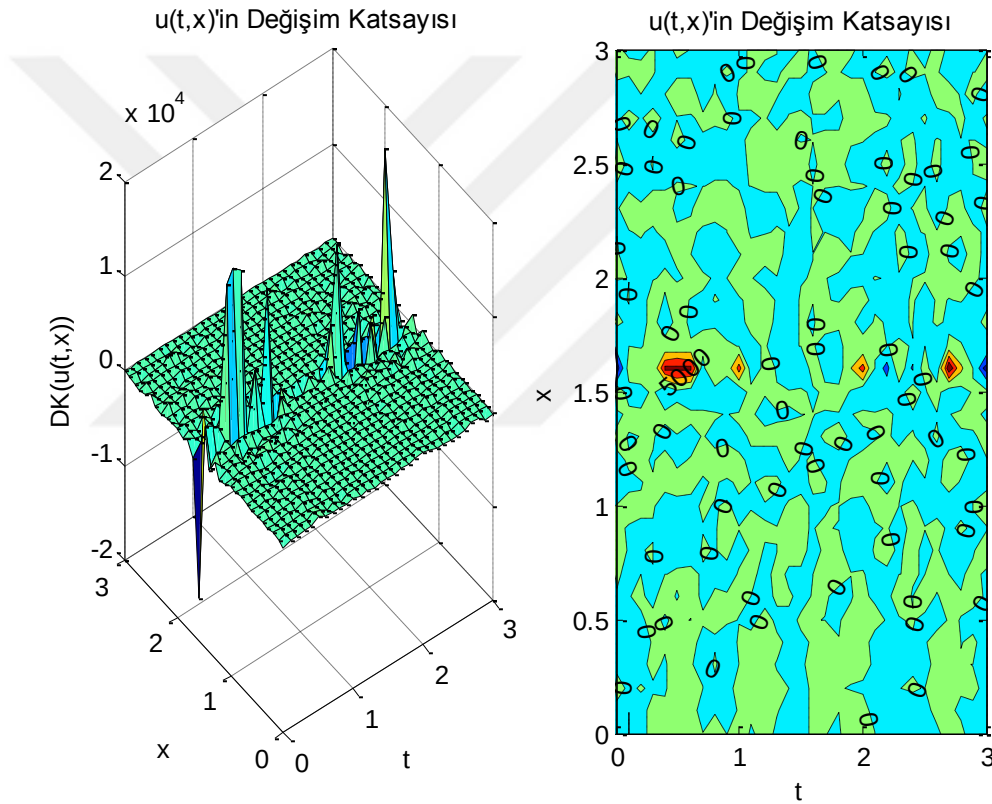
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$std[u(t, x)] = \sqrt{Var[u(t, x)]} = \sqrt{4((e^{-t} + t)\cos(x))^2}$$

bulunur.

$$D.K = \frac{std[u(t, x)]}{E[u(t, x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{4((e^{-t} + t)\cos(x))^2}}{2(e^{-t} + t)\cos(x)} \times 100$$

$u(t, x)$ için değişim katsayısı grafiği



Şekil 29. $A \sim \chi^2_{(r=2)}$ için $u(t, x)$ 'in değişim katsayısının çözüm davranışı

Örnek 3.4.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u = -A \sin(x) \quad (40)$$

$$u_x\left(t, \frac{\pi}{2}\right) = u(t, \pi) = 0,$$

Burada, $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ Laplace dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için tek boyutlu rastgele parabolik KDD'ini Fourier dönüşümü yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm:

İlk olarak denkleme Fourier dönüşümü uygulayalım,

$$F\{u_t(t, x)\} - F\{u_{xx}(t, x)\} - 2F\{u(t, x)\} = F\{-A\sin(x)\},$$

$$iwu(w, x) - u_{xx}(w, x) - 2u(w, x) = -A\sin(x),$$

$$u(w, x)(iw - 2) - u_{xx}(w, x) = -A\sin(x), \quad \text{denklemin genel çözümü}$$

$$u(w, x) = u_h(w, x) + u_0(w, x),$$

homojen kısmının çözümü,

$$u(w, x)(iw - 2) - u_{xx}(w, x) = 0 \quad \text{karakteristik denklemi}$$

$$(iw - 2) - r^2 = 0, \quad r_{1,2} = \pm\sqrt{iw - 2}$$

$$u_h(w, x) = c_1 e^{-\sqrt{iw-2}x} + c_2 e^{\sqrt{iw-2}x},$$

$$\text{Özel çözüm ; } u_0(w, x) = C\sin(x) + B\cos(x),$$

$$u_{0xx}(w, x) = -C\sin(x) - B\cos(x),$$

$$(C\sin(x) + B\cos(x))(iw - 2) + C\sin(x) + B\cos(x) = -A\sin(x)$$

$$\sin(x)(C(iw - 1)) = -A\sin(x)$$

$$\text{Buradan, } B = 0 \text{ ve } C = \frac{A}{1-iw} \text{ olur.}$$

$$u_0(w, x) = \frac{A}{1-iw} \sin(x)$$

Genel çözüm;

$$u(w, x) = u_h(w, x) + u_0(w, x)$$

$$= c_1 e^{-\sqrt{iw-2}x} + c_2 e^{\sqrt{iw-2}x} + \frac{A}{1-iw} \sin(x)$$

başlangıç ve sınır koşullarını kullanırsak

$$x = \pi \text{ için;}$$

$$u(w, \pi) = c_1 e^{-\sqrt{iw-2}\pi} + c_2 e^{\sqrt{iw-2}\pi} = 0,$$

$$c_1 = -c_2 e^{2\sqrt{iw-2}\pi},$$

$$u_x(w, x) = -\sqrt{iw-2}c_1 e^{-\sqrt{iw-2}x} + \sqrt{iw-2}c_2 e^{\sqrt{iw-2}x} + \frac{A}{1-iw} \cos(x)$$

$$u_x\left(w, \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{iw-2}c_1 e^{-\sqrt{iw-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} + \sqrt{iw-2}c_2 e^{\sqrt{iw-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0,$$

$$-c_1 e^{-\sqrt{iw-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} + c_2 e^{\sqrt{iw-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 0, \quad c_1 = c_2 e^{\sqrt{iw-2}(\pi)} \text{ olduğundan } c_2 \left(e^{\sqrt{iw-2}(\pi)} + e^{\sqrt{iw-2}(2\pi)} \right) = 0, \text{ buradan, } c_1 = c_2 = 0,$$

$$u(w, x) = \frac{A}{1-iw} \sin(x).$$

Ters Fourier dönüşümü alınırsa

$$F^{-1}\{u(w, x)\} = F^{-1}\left\{\frac{A}{1-iw}\sin(x)\right\}$$

$$u(t, x) = A(e^t + 1)\sin(x) \quad (41)$$

elde edilir. Laplace dağılımına sahip X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu (Forbes et al, 2011)

$$f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\left(\frac{|x-a|}{b}\right)}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Moment çıkaran fonksiyonu,

$$E[e^{tx}] = \frac{e^{at}}{1-b^2t^2},$$

faizdalanılarak beklenen değeri ve varyans aşağıdaki gibi bulunabilir.

$A \sim \text{Laplace}(a, b)$ Laplace dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, beklenen değeri ve varyansı,

$$E(A) = a \text{ ve } \text{Var}(A) = 2b^2.$$

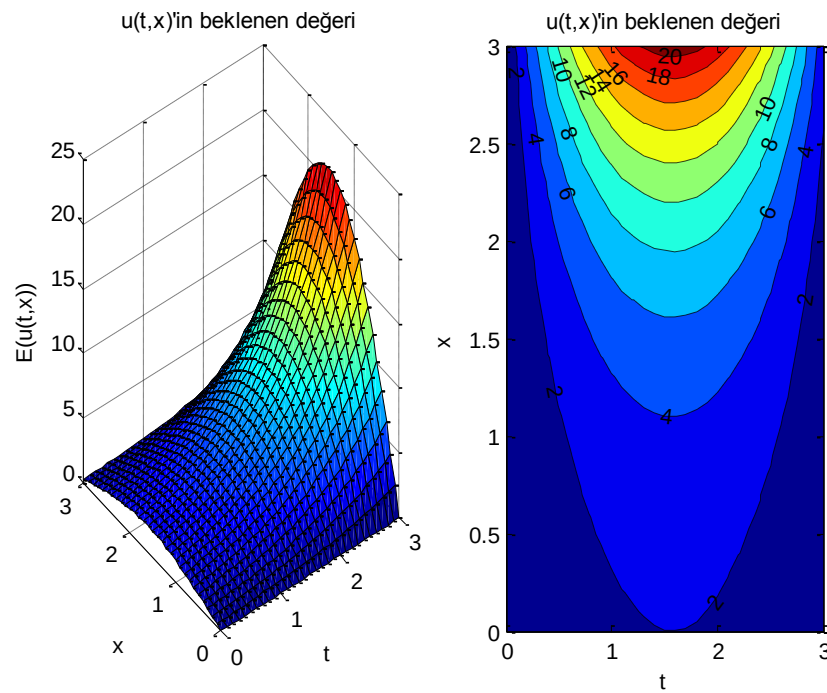
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değeri temel özellikleri kullanılırsa $u(t, x)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[u(t, x)] = E[A(e^t + 1)\sin(x)] = (e^t + 1)\sin(x)E[A] = (e^t + 1)\sin(x)a$$

$a = 1$, özel değeri için,

$$E[u(t, x)] = (e^t + 1)\sin(x)$$

bulunur.



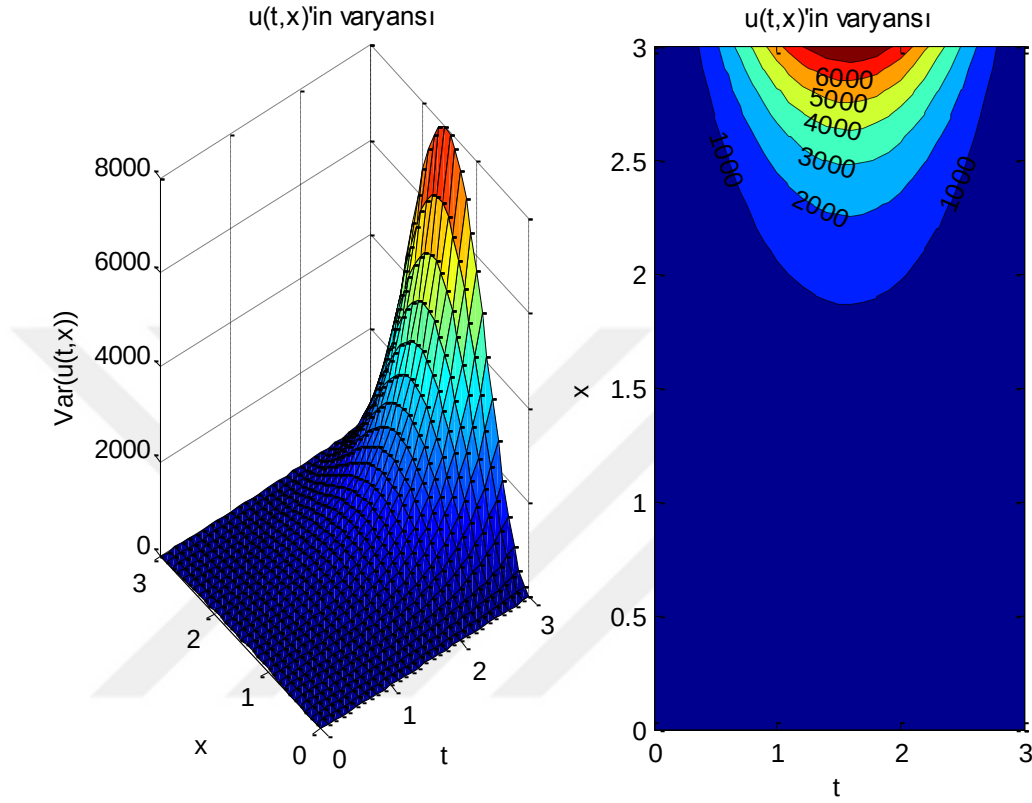
Şekil 30. $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ özel değeri için (40) denkleminin beklenen değeri için çözüm davranışı

$$\begin{aligned} \text{Var}[u(t, x)] &= \text{Var}[A(e^t + 1)\sin(x)] = ((e^t + 1)\sin(x))^2 \text{Var}[A] \\ &= ((e^t + 1)\sin(x))^2 2b^2 \end{aligned}$$

$b = 3$, özel değeri için,

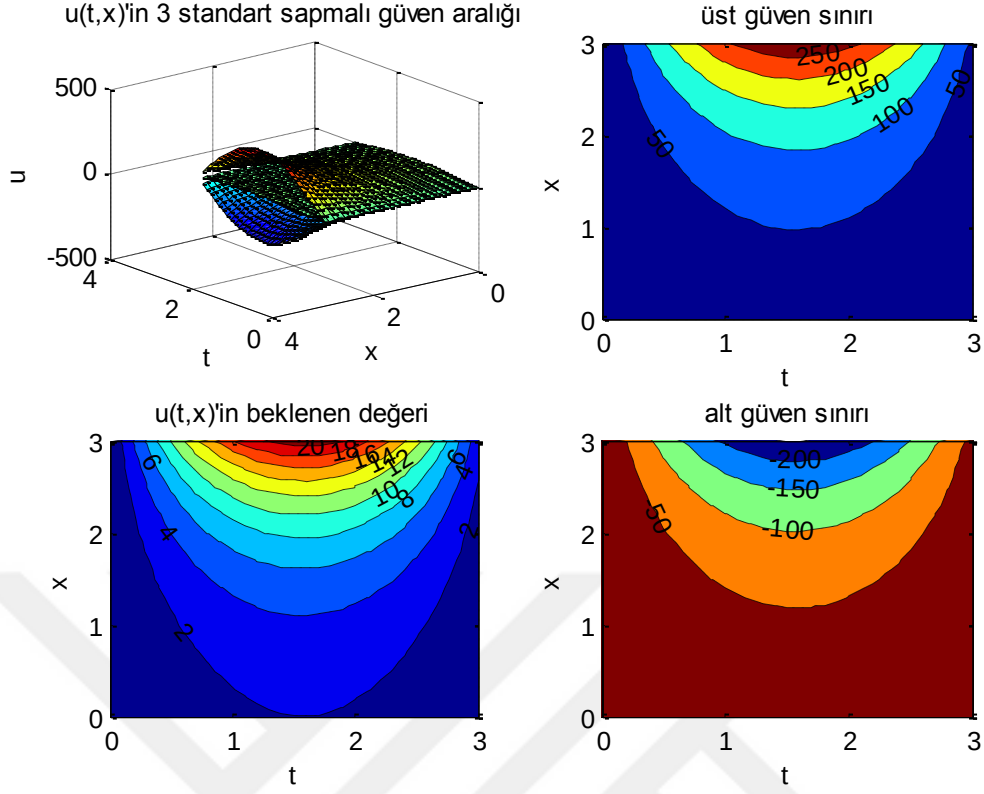
$$\text{Var}[u(t, x)] = 18((e^t + 1)\sin(x))^2$$

bulunur.



Şekil 31. $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ özel değerleri için (40) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları



Şekil 32. $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ özel değeri için (40) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

$u(t, x)$ değişim katsayısı;

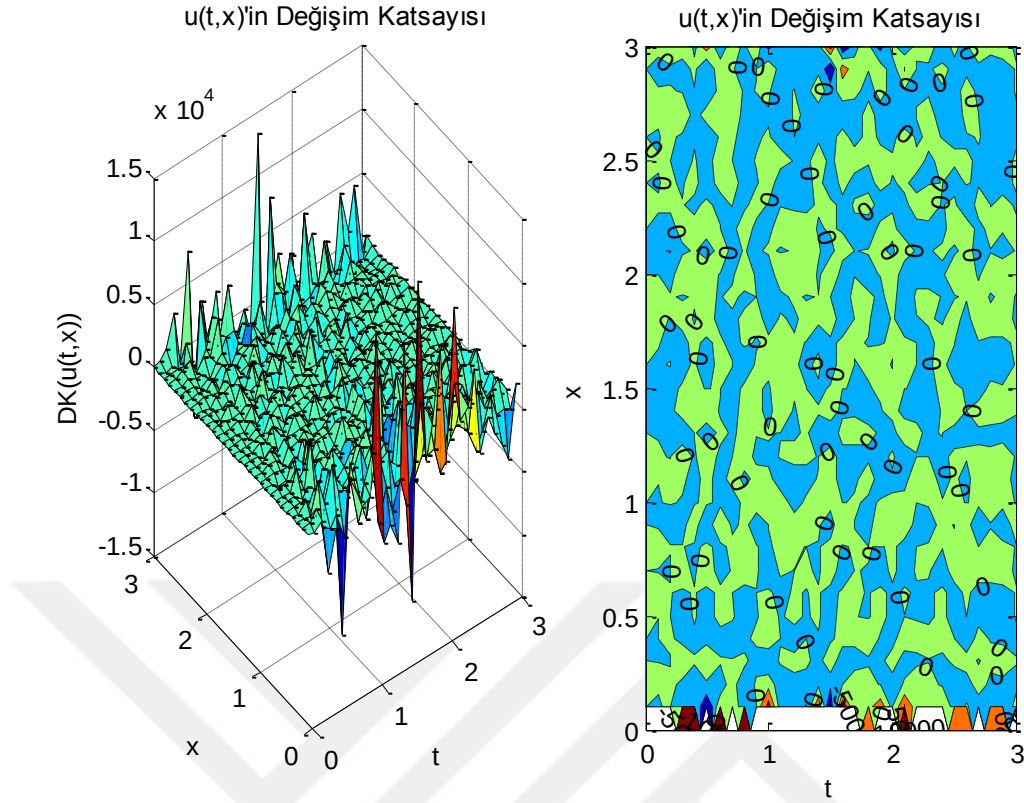
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$\text{std}[u(t, x)] = \sqrt{\text{Var}[u(t, x)]} = \sqrt{18((e^t + 1)\sin(x))^2}$$

bulunur.

$$D.K = \frac{\text{std}[u(t, x)]}{E[u(t, x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{18((e^t + 1)\sin(x))^2}}{(e^t + 1)\sin(x)} \times 100$$

$u(t, x)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 33. $A \sim \text{Laplace}(a = 1, b = 3)$ için $u(t, x)$ 'in değişim katsayı değeri

3.5. İki Boyutlu Parabolik denklemlerin Fourier serisi çözümleri

Bu bölümde iki boyutlu rastgele parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Fourier serisi ve değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak, iki adet örnek üzerinde uygulama gerçekleştirildi.

Örnek 3.5.1

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (42)$$

$$u(0, x, y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y),$$

$$u(t, 0, y) = u(t, 1, y) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1,$$

$$u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1.$$

Burada, $A \sim \text{Gamma}(\zeta = 3, \varrho = 2)$ Gamma dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için iki boyutlu parabolik rastgele KDD'ini Fourier serisi yöntemi yardımı ile çözüyoruz.

Çözüm:

$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ denkleminin değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümü,

$$u(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y), \quad (43)$$

için,

$$T'(t)X(x)Y(y) = \frac{1}{\pi^2} (X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)), \quad (44)$$

elde edilir. (44) denkleminin her iki tarafı π^2 ile çarpıp $T(t)X(x)Y(y)$ ifadesine bölünürse;

$$\frac{\pi^2 T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

elde edilir. Her iki tarafı tek bir sabitle eşitlersek;

$$\frac{\pi^2 T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2 \quad \text{ve} \quad \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda^2.$$

Bu negatif sabitlere göre t cinsinden çözümler bulmak için;

$$\frac{\pi^2 T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2 \quad \text{her iki tarafı } T(t) \text{ ile çarparsak,}$$

$$\pi^2 T'(t) = -T(t)\lambda^2,$$

$$T'(t) = -\frac{\lambda^2}{\pi^2} T(t),$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{\lambda^2}{\pi^2} T(t),$$

$$\int \frac{dT}{T(t)} = -\int \frac{\lambda^2}{\pi^2} dt,$$

$$\ln T = -\frac{\lambda^2}{\pi^2} dt,$$

$$T(t) = H \cdot e^{-\frac{\lambda^2}{\pi^2} t} \quad \text{elde edilir.}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\mu^2$$

sabiti için

$$-\mu^2 = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \lambda^2,$$

$$\mu^2 - \lambda^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)}, \quad (\beta^2 = \lambda^2 - \mu^2)$$

$$-\beta^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)},$$

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \quad \text{ve} \quad Y''(y) + \beta^2 Y(y) = 0$$

denklemleri bulunur.

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0,$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \mu^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp i\mu \text{ olduğundan,}$$

$$X(x) = A_1 \cos \mu x + A_2 \sin \mu x \quad (45)$$

bulunur.

$$Y''(y) + \beta^2 Y(y) = 0,$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \beta^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp i\beta \text{ olduğundan,}$$

$$Y(y) = B_1 \cos \beta y + B_2 \sin \beta y \quad (46)$$

bulunur. Başlangıç şartları (43) denkleminde yerine yazılırsa;

$$u(t, 0, y) = 0 \text{ için } T(t)X(0)Y(y) = 0 \text{ ise } X(0) = 0,$$

$$u(t, 1, y) = 0 \text{ için } T(t)X(1)Y(y) = 0 \text{ ise } X(1) = 0,$$

(45) denkleminde yerine yazarsak,

$$X(0) = A_1 = 0 \text{ ve } X(1) = A_2 \sin \mu = 0, \quad \sin \mu = 0,$$

$$\mu = m\pi,$$

$$\mu_m = m\pi \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

$$X_m(x) = B_m \sin(m\pi x) \text{ bulunur.}$$

$$u(t, x, 0) = 0 \text{ için } T(t)X(x)Y(0) = 0 \text{ ise } Y(0) = 0,$$

$$u(t, x, 1) = 0 \text{ için } X(x)Y(1)T(t) = 0 \text{ ise } Y(1) = 0,$$

(46) denkleminde yerine yazarsak,

$$Y(0) = B_1 = 0 \text{ ve } Y(1) = B_2 \sin \beta = 0, \quad \sin \beta = 0,$$

$$\beta = n\pi,$$

$$\beta_n = n\pi, \quad n = 1, 2 \dots$$

$$Y_n(y) = C_n \sin(n\pi y) \text{ elde edilir.}$$

$$\lambda_{mn}^2 = m^2\pi^2 + n^2\pi^2 = \pi^2(m^2 + n^2).$$

Bulunan $T(t), X(x), Y(y)$ fonksiyonlarını $u(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_{mn}(t, x, y) = D_{mn} e^{-\frac{\lambda_{mn}^2}{\pi^2} t} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y),$$

$$u(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} e^{-(m^2+n^2)t} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y),$$

$$u(0, x, y) = A \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} e^{-(m^2+n^2)t} \sin(m\pi x) \sin(n\pi y),$$

$$D_{mn} = \frac{4}{1.1} \int_0^1 \int_0^1 A \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(m\pi x) \sin(n\pi y) dy dx,$$

$$D_{mn}$$

$$= \frac{A(\sin(\pi(-1+n)) + \sin(\pi(-1+n))n + \sin(\pi(1+n)) - \sin(\pi(1+n))n)(\sin(\pi(-1+m))) + \sin(\pi(-1+m))m + \sin(\pi(1+m)) - \sin(\pi(1+m))m}{\pi^2(n^2 - 1)(m^2 - 1)}$$

$$D_{mn} = \begin{cases} \frac{A(\sin(\pi)\cos(\pi)-\pi)^2}{\pi^2} = A, & m = n = 1. \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Bu bilgiler ışığında,

$$u(t, x, y) = Ae^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad (47)$$

analitik çözümü elde edilir.

$X \sim \Gamma(\zeta, \varrho)$ gamma dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, moment çıkaran fonksiyonu (Feller, 1968).

$$M_X(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t}{\varrho}\right)^{-\zeta}, & t < \varrho \\ \text{mevcut değil}, & t > \varrho \end{cases}$$

$A \sim \Gamma(\zeta, \varrho)$ rastgele değişkeni gamma dağılımına sahip olduğundan 1.,2. momentleri ve varyansı;

$$E(A) = \frac{\zeta}{\varrho}, \quad E(B^2) = \frac{\zeta(\zeta + 1)}{\varrho^2},$$

$$Var(B) = \frac{\zeta}{\varrho^2},$$

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa $u(t, x, y)$ denkleminin beklenen değeri;

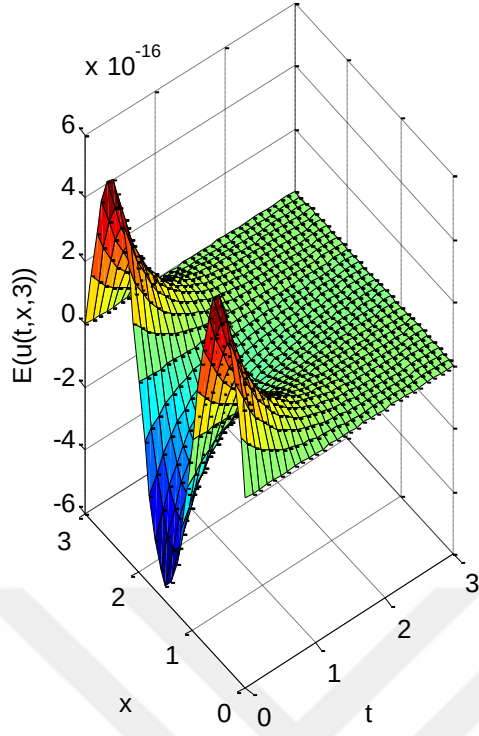
$$E[u(t, x, y)] = E[Ae^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)] = E[A]e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y) = \frac{\zeta}{\varrho} e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

$\zeta = 3$ ve $\varrho = 2$ özel değerleri için,

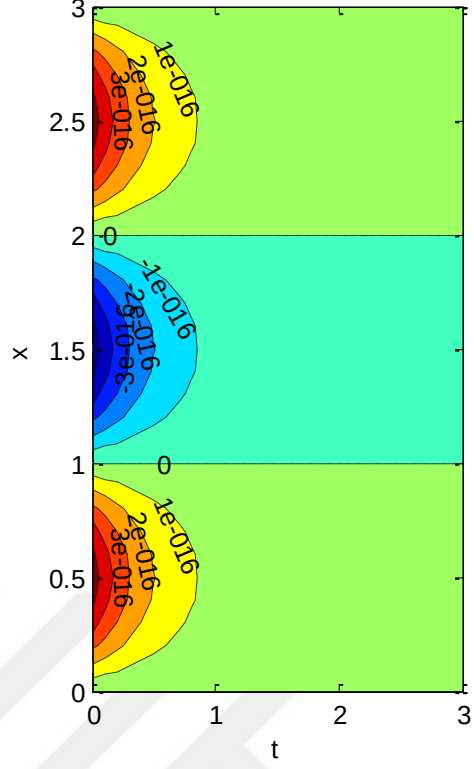
$$E[u(t, x, y)] = \frac{3}{2} e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$$

bulunur.

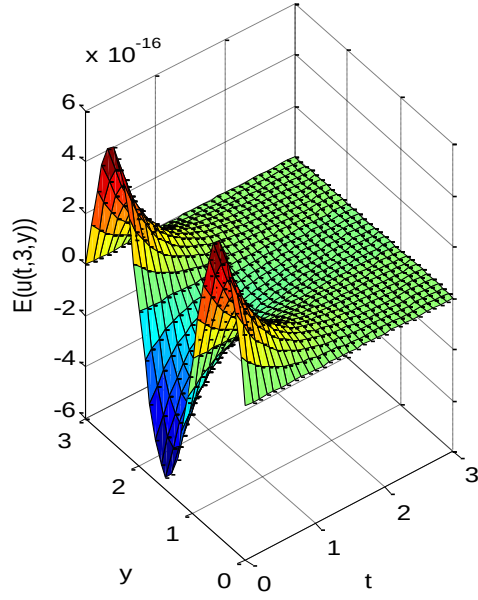
(a) $u(t,x,3)$ 'in beklenen değeri



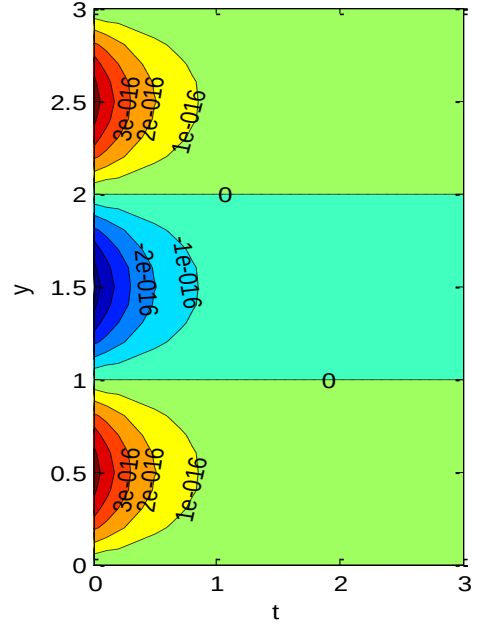
$u(t,x,3)$ 'in beklenen değeri

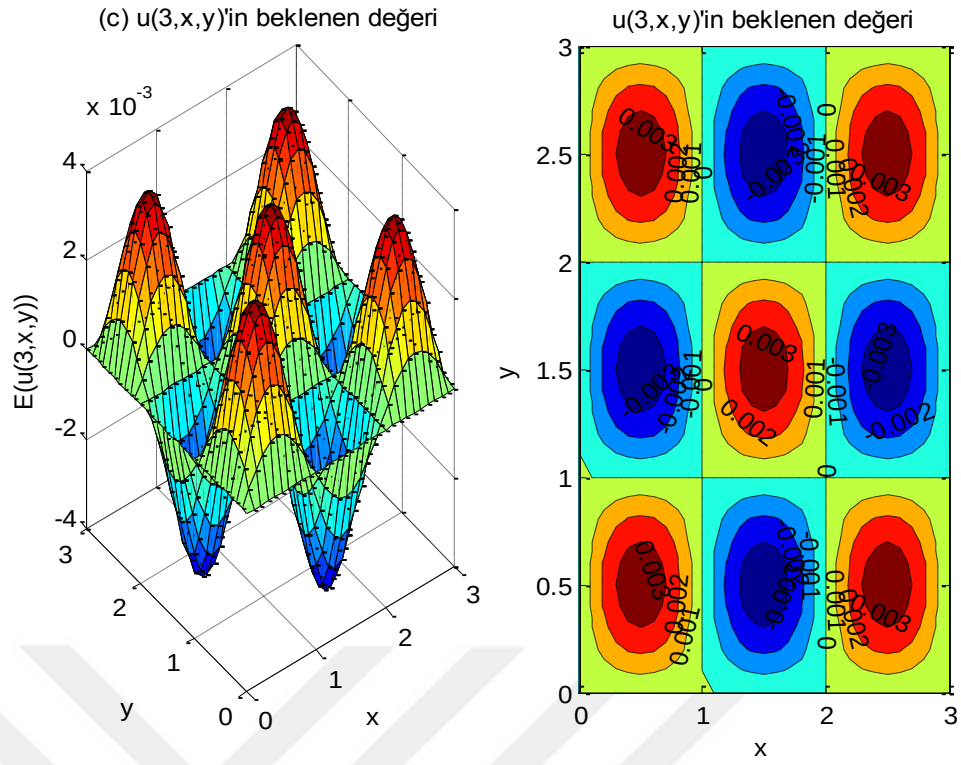


(b) $u(t,3,y)$ 'in beklenen değeri



$u(t,3,y)$ 'in beklenen değeri





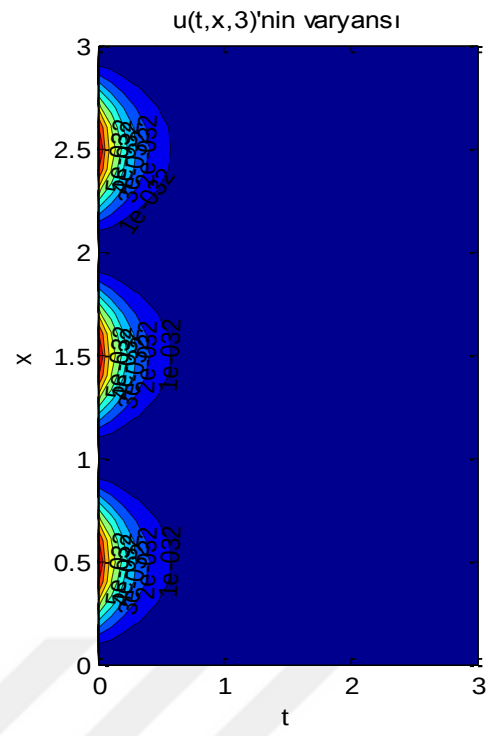
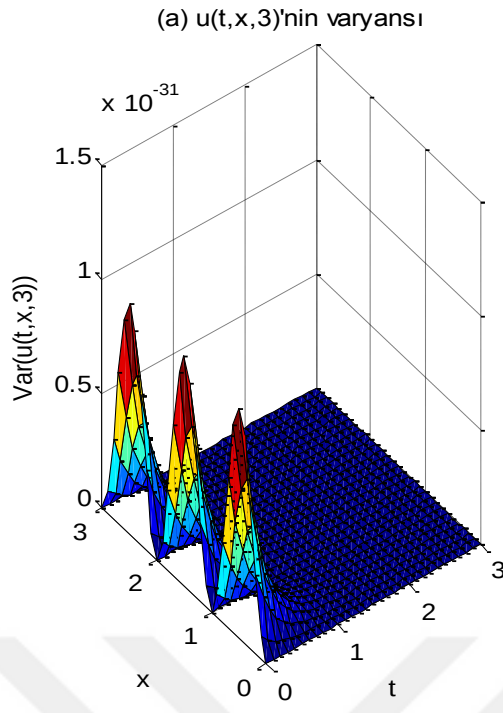
Şekil 34. $\Gamma(\varsigma = 3, \varrho = 2)$, (a) $y = 3$, (b) $x = 3$, (c) $t = 3$ özel değerleri için (42) denkleminin beklenen değerinin 3 boyutlu çözüm davranışı

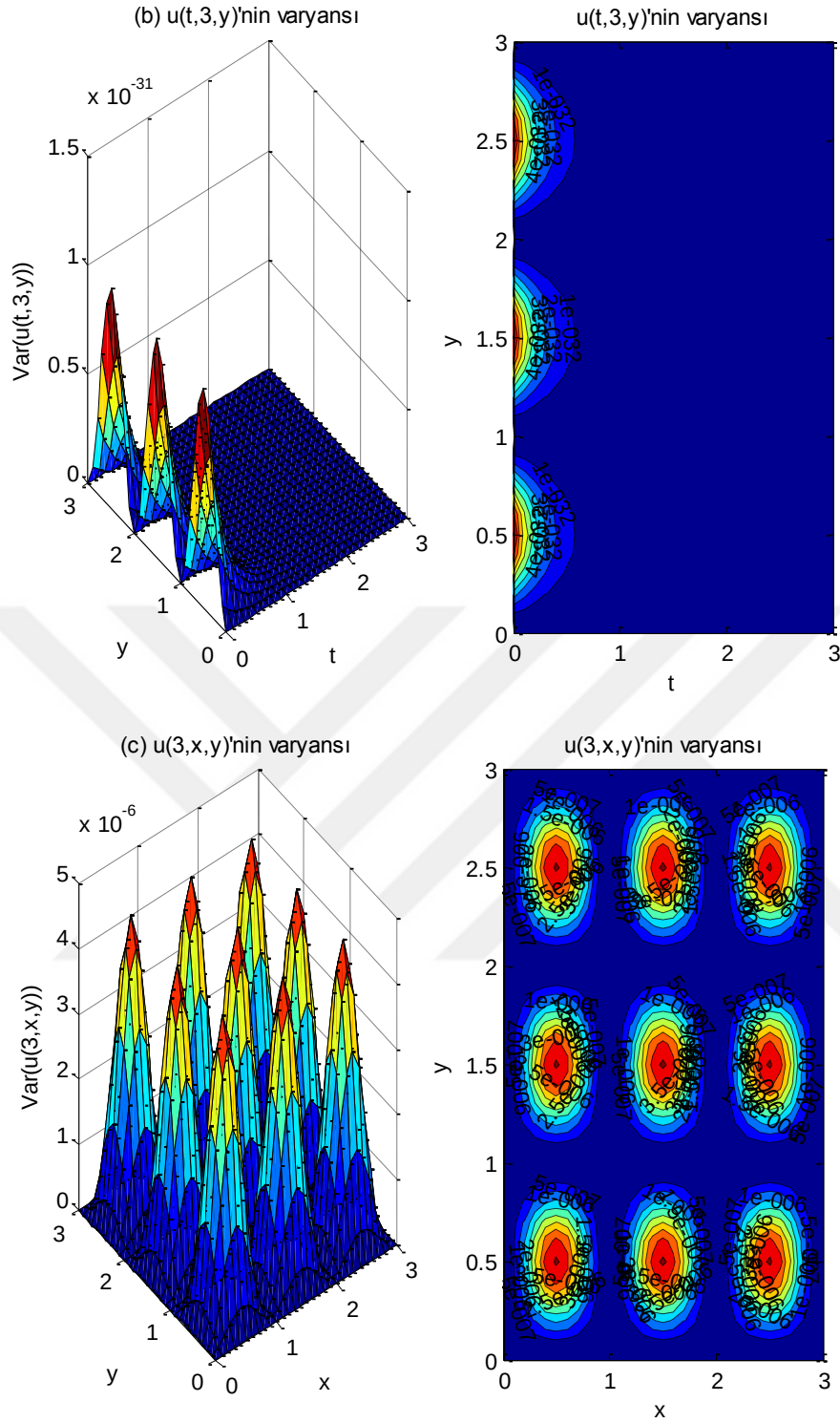
$$Var[u(t, x, y)] = Var[Ae^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)] = (e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2 Var[A] = \frac{(e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2 \varsigma}{\varrho^2}.$$

$\varsigma = 3$ ve $\varrho = 2$ özel değerleri için,

$$Var[u(t, x, y)] = \frac{3(e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2}{4}$$

bulunur.

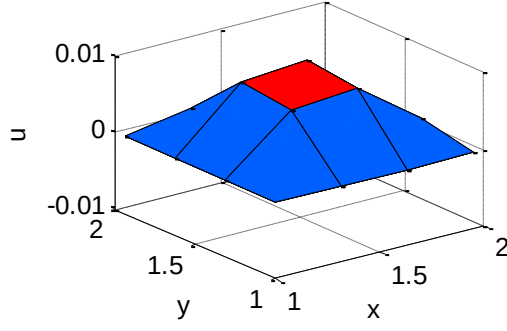




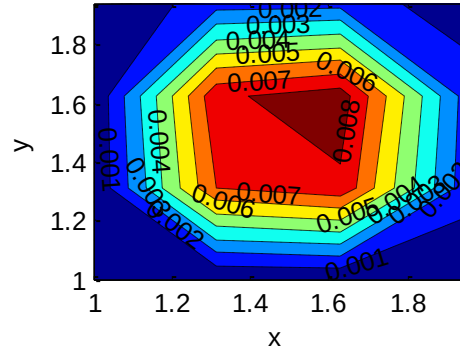
Şekil 35. $\Gamma(\zeta = 3, \varrho = 2)$, (a) $y = 3$, (b) $x = 3$, (c) $t = 3$ özel değerleri için (42) denkleminin varyansın 3 boyutlu çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları,

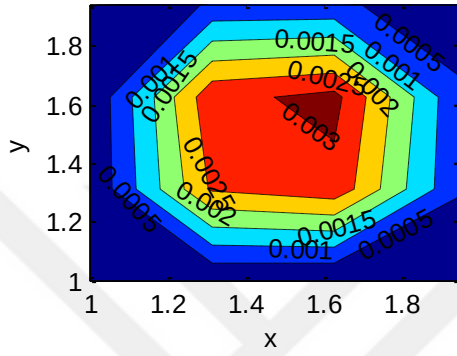
(a) $u(3,x,y)$ 'nin 3 standart sapmalı güven aralığı



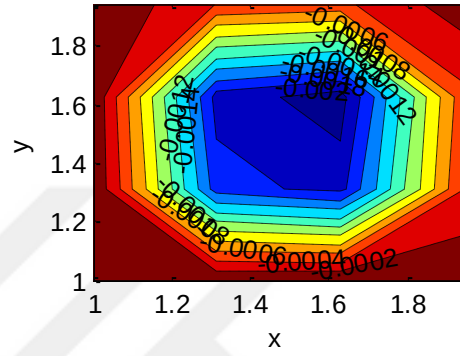
üst güven sınırı



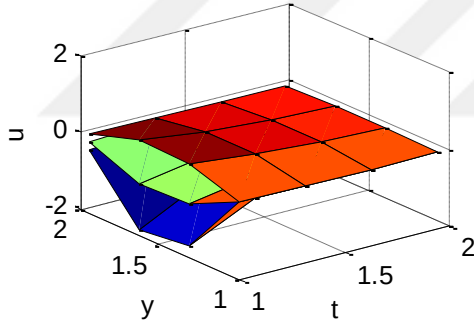
$u(3,x,y)$ 'nin beklenen değeri



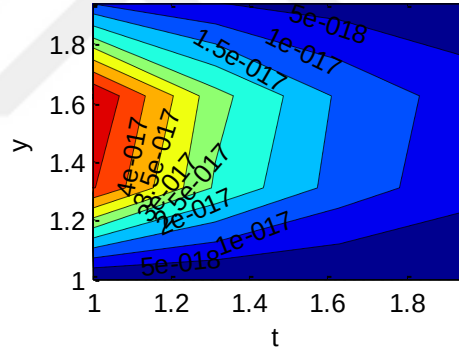
alt güven sınırı



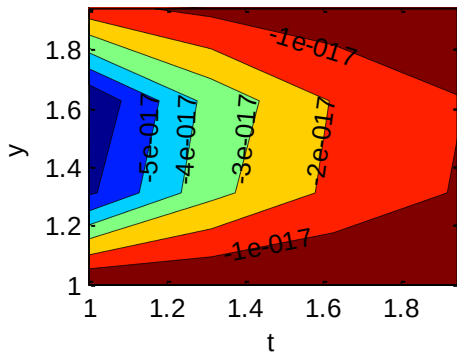
(b) $u(t,3,y)$ 'nin 3 standart sapmalı güven aralığı



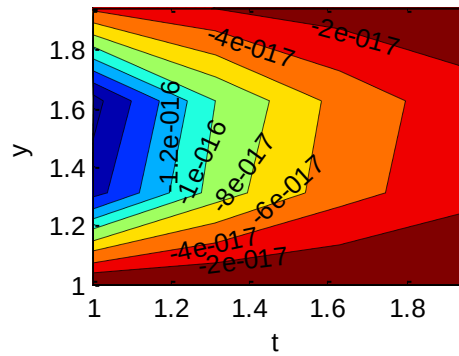
üst güven sınırı



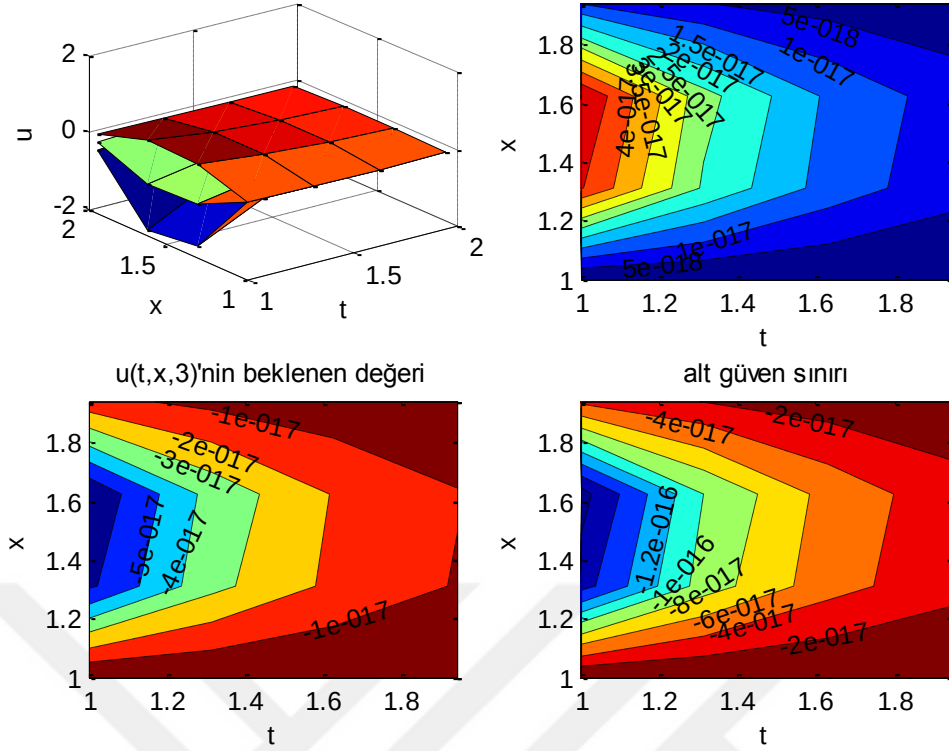
$u(t,3,y)$ 'nin beklenen değeri



alt güven sınırı



(c) $u(t, x, 3)$ 'nin 3 standart sapmalı güven aralığı



Şekil 36. $\Gamma(\zeta = 3, \varrho = 2)$, (a) $t = 3$, (b) $x = 3$, (c) $y = 3$ özel değerleri için (42) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı

$u(t, x, y)$ değişim katsayısı;

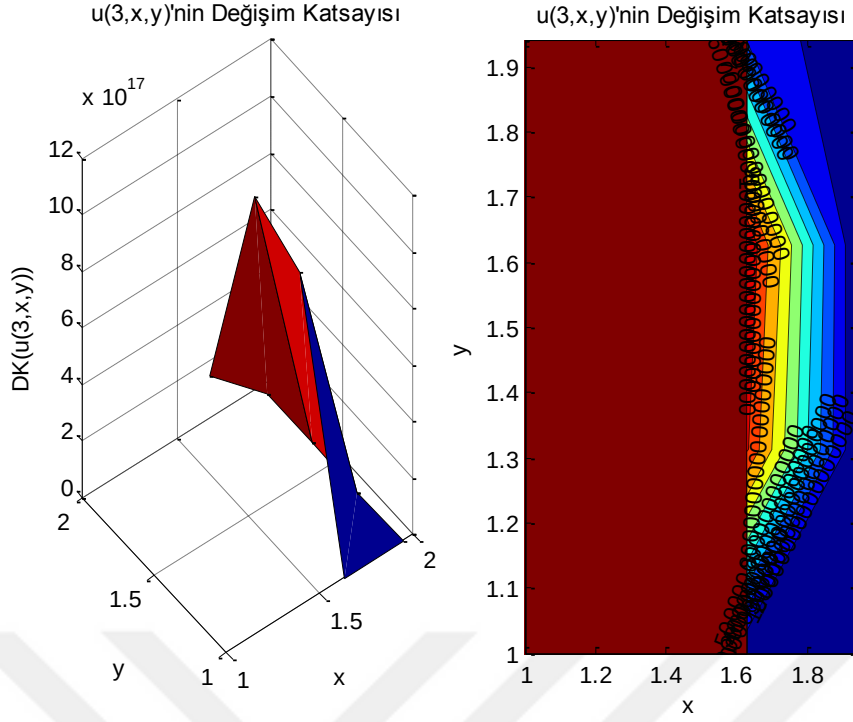
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$std[u(t, x, y)] = \sqrt{Var[u(t, x, y)]} = \sqrt{\frac{3(e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2}{4}}$$

bulunur.

$$D.K = \frac{std[u(t, x, y)]}{E[u(t, x, y)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{3(e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y))^2}{4}}}{\frac{3}{2}e^{-2t} \sin(\pi x) \sin(\pi y)} \times 100$$

$u(t, x, y)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 37. $t = 3$ için $u(t, x, y)$ 'nin değişim katsayı değeri

Örnek 3.5.2

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (48)$$

$$u(0, x, y) = A \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right),$$

$$u(t, -\pi, y) = u(t, \pi, y) = 0, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi,$$

$$u(t, x, 0) = u(t, x, 1) = 0, \quad -\pi < x < \pi, \quad -\pi < y < \pi.$$

Burada, $A \sim \text{Üstel}(\lambda = 4)$ üstel dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için iki boyutlu parabolik KDD'ini Fourier serisi yöntemi yardımı ile çözüünüz.

Çözüm:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ denkleminin değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümü,}$$

$$u(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y), \quad (49)$$

için,

$$T'(t)X(x)Y(y) = (X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)), \quad (50)$$

elde edilir. (50) denkleminin her iki tarafı $T(t)X(x)Y(y)$ ifadesine bölünürse;

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

elde edilir. Her iki tarafı tek bir sabitle eşitlersek;

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\zeta^2 \text{ ve } \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\zeta^2,$$

Bu negatif sabitlere göre t cinsinden çözümler bulmak için;

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\zeta^2 \text{ her iki tarafı } T(t) \text{ ile çarparsak,}$$

$$T'(t) = -T(t)\zeta^2,$$

$$T'(t) = -\zeta^2 T(t),$$

$$\frac{dT}{dt} = -\zeta^2 T(t),$$

$$\int \frac{dT}{T(t)} = - \int \zeta^2 dt,$$

$$\ln T = -\zeta^2 t,$$

$$T(t) = H \cdot e^{-\zeta^2 t} \quad \text{elde edilir.}$$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\gamma^2$$

sabiti için

$$-\gamma^2 = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} - \zeta^2,$$

$$\gamma^2 - \zeta^2 = \frac{Y''(y)}{Y(y)},$$

$$(\eta^2 = \zeta^2 - \gamma^2)$$

$$-\eta^2 = \frac{Y''(t)}{Y(t)},$$

$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0 \text{ ve } Y''(y) + \eta^2 Y(y) = 0$$

denklemleri bulunur.

$$X''(x) + \gamma^2 X(x) = 0,$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \gamma^2 = 0, r_{1,2} = \mp i\gamma \text{ olduğundan,}$$

$$X(x) = A_1 \cos \gamma x + A_2 \sin \gamma x, \quad (51)$$

bulunur.

$$Y''(y) + \eta^2 Y(y) = 0,$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \eta^2 = 0, \quad r_{1,2} = \mp i\eta \text{ olduğundan,}$$

$$Y(y) = B_1 \cos \eta y + B_2 \sin \eta y \quad (52)$$

bulunur. Başlangıç şartları (49) denkleminde yerine yazılırsa ;

$$u(t, -\pi, y) = 0 \text{ için } T(t)X(-\pi)Y(y) = 0 \text{ ise } X(-\pi) = 0,$$

$$u(t, \pi, y) = 0 \text{ için } T(t)X(\pi)Y(y) = 0 \text{ ise } X(\pi) = 0.$$

(51) denkleminde yerine yazarsak,

$$X(-\pi) = A_1 \cos(\gamma \pi) - A_2 \sin(\gamma \pi) = 0,$$

$$X(\pi) = A_1 \cos(\gamma \pi) + A_2 \sin(\gamma \pi) = 0,$$

$$-A_1 \cos(\gamma \pi) + A_2 \sin(\gamma \pi) = 0,$$

$$A_1 \cos(\gamma \pi) + A_2 \sin(\gamma \pi) = 0,$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2A_2 \sin(\gamma \pi) = 0 \text{ 'dan } A_2 = 0$$

bulunur.

$$A_1 \cos(\gamma \pi) = 0, \quad \gamma \pi = \frac{m\pi}{2},$$

$$\gamma_m = \frac{m}{2} \quad m = 0, 1, 2 \dots$$

$$X_m(x) = B_m \cos\left(\frac{mx}{2}\right)$$

bulunur.

$$u(t, x, -\pi) = 0 \text{ için } T(t)X(x)Y(-\pi) = 0 \text{ ise } Y(-\pi) = 0.$$

$$u(t, x, \pi) = 0 \text{ için } T(t)X(x)Y(\pi) = 0 \text{ ise } Y(\pi) = 0.$$

(52) denkleminde yerine yazarsak,

$$Y(-\pi) = B_1 \cos(\eta \pi) - B_2 \sin(\eta \pi) = 0,$$

$$Y(\pi) = B_1 \cos(\eta \pi) + B_2 \sin(\eta \pi) = 0,$$

$$-B_1 \cos(\eta \pi) + B_2 \sin(\eta \pi) = 0,$$

$$B_1 \cos(\eta \pi) + B_2 \sin(\eta \pi) = 0,$$

ifadeleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2B_2 \sin(\eta \pi) = 0 \text{ 'dan } B_2 = 0$$

bulunur.

$$B_1 \cos(\eta \pi) = 0, \quad \eta \pi = \frac{n\pi}{2},$$

$$\eta_n = \frac{n}{2} \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

$$Y_n(y) = C_n \cos\left(\frac{ny}{2}\right) \text{ elde edilir.}$$

$$\zeta_{mn}^2 = \eta_n^2 + \gamma_m^2 = \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} = \frac{(m^2+n^2)}{4}.$$

Bulunan $T(t), X(x), Y(y)$ fonksiyonlarını $u(t, x, y) = T(t)X(x)Y(y)$ denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_{mn}(t, x, y) = D_{mn} e^{-\zeta^2 t} \cos\left(\frac{mx}{2}\right) \cos\left(\frac{ny}{2}\right),$$

$$u(t, x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} e^{-\frac{(m^2+n^2)t}{4}} \cos\left(\frac{mx}{2}\right) \cos\left(\frac{ny}{2}\right),$$

$$u(0, x, y) = A \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} e^{-\frac{(m^2+n^2)t}{4}} \cos\left(\frac{mx}{2}\right) \cos\left(\frac{ny}{2}\right),$$

$$D_{mn} = \frac{4}{2\pi \cdot 2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} A \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \cos\left(\frac{mx}{2}\right) \cos\left(\frac{ny}{2}\right) dy dx,$$

D_{mn}

$$= \frac{A(\sin(\pi(-1+n)) + \sin(\pi(-1+n))n - \sin(\pi(1+n)) + \sin(\pi(1+n))n)(\sin(\pi(-1+m))) + \sin(\pi(-1+m))m - \sin(\pi(1+m)) + \sin(\pi(1+m))m}{\pi^2(n^2-1)(m^2-1)}$$

$$D_{mn} = \begin{cases} -\frac{A(-2\cos(\pi)\sin(\pi)\pi - \pi^2 - \cos(\pi)^2 + \cos(\pi)^4)}{\pi^2}, & m = n = 1. \\ 0, & \text{aksi takdirde} \end{cases}$$

Bu bilgiler ışığında,

$$u(t, x, y) = Ae^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right), \quad (53)$$

analitik çözümü elde edilir. $A \sim \text{Üstel}(\lambda)$ rastgele değişkeni üstel dağılımına sahip olduğundan 1.,2. momentleri ve varyansı;

$$E(A) = \frac{1}{\lambda}, \quad E(A^2) = \frac{1}{\lambda^2},$$

$$Var(A) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa $u(t, x, y)$ denkleminin beklenen değeri;

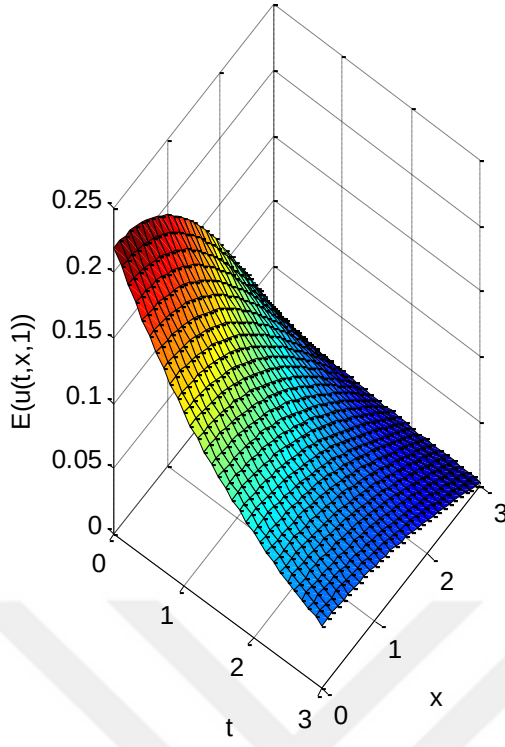
$$\begin{aligned} E[u(t, x, y)] &= E\left[Ae^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right)\right] = E[A]e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \end{aligned}$$

$\lambda = 4$, özel değeri için,

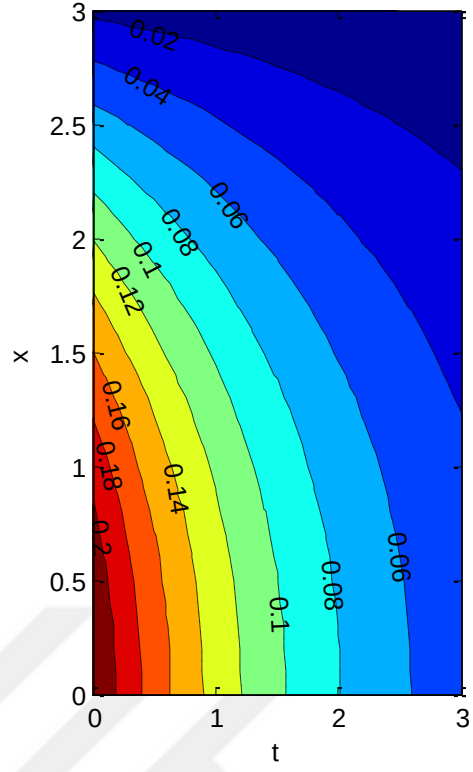
$$E[u(t, x, y)] = \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right)$$

bulunur.

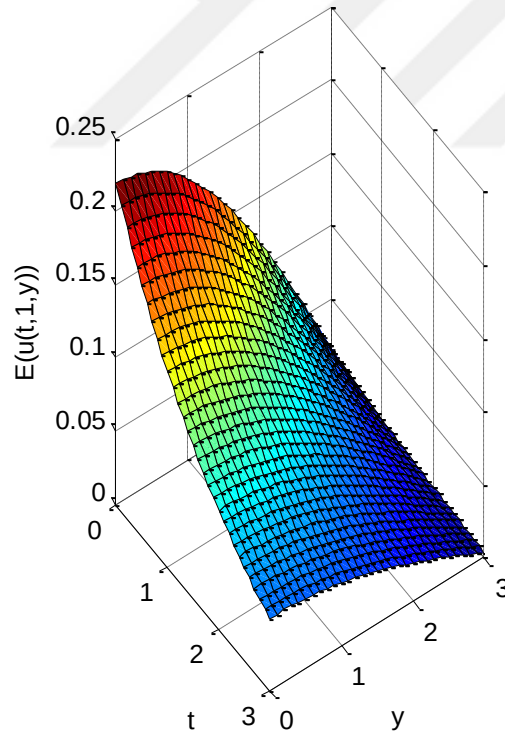
(a) $u(t,x,1)$ 'in beklenen değeri



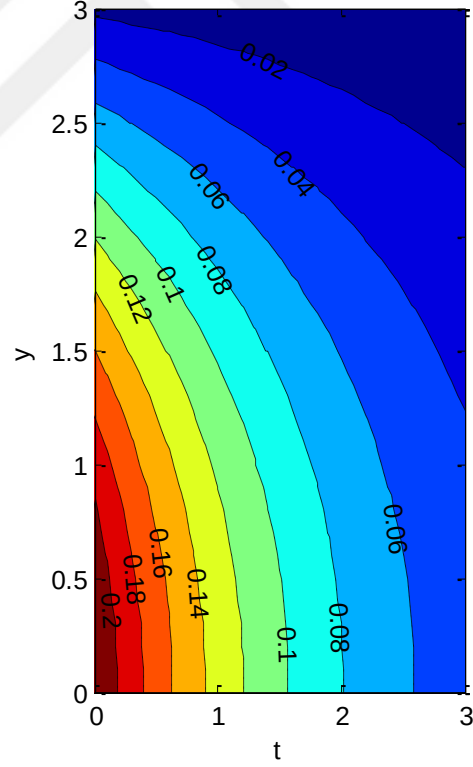
$u(t,x,1)$ 'in beklenen değeri

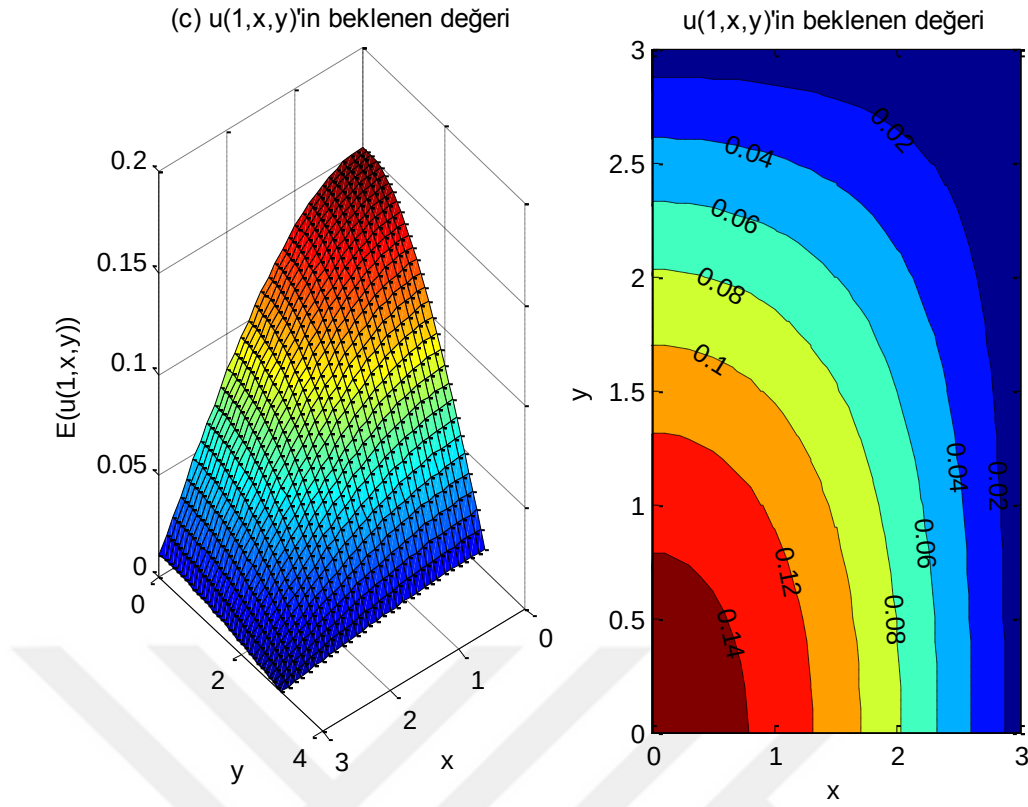


(b) $u(t,1,y)$ 'in beklenen değeri



$u(t,1,y)$ 'in beklenen değeri





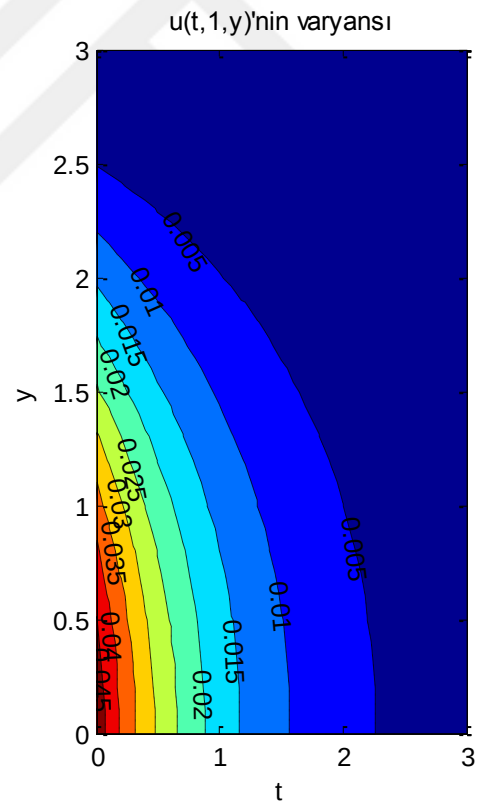
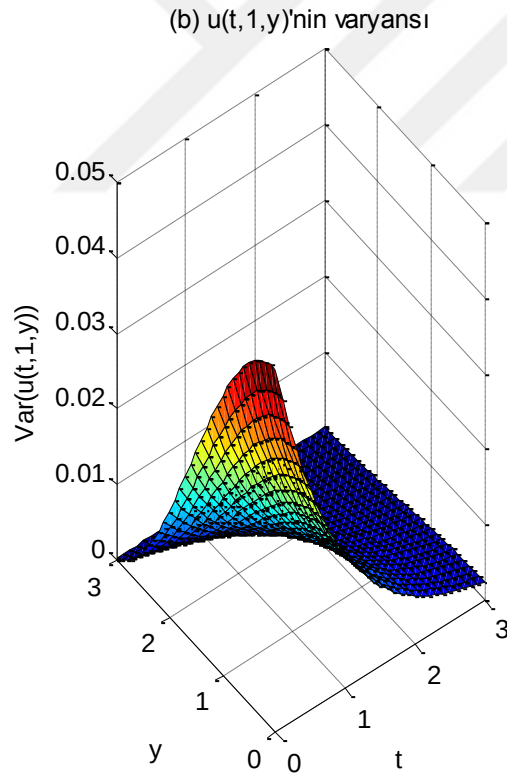
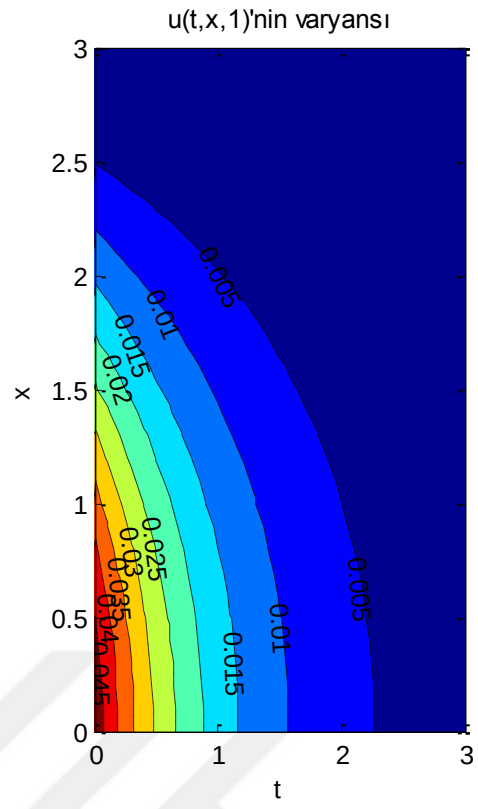
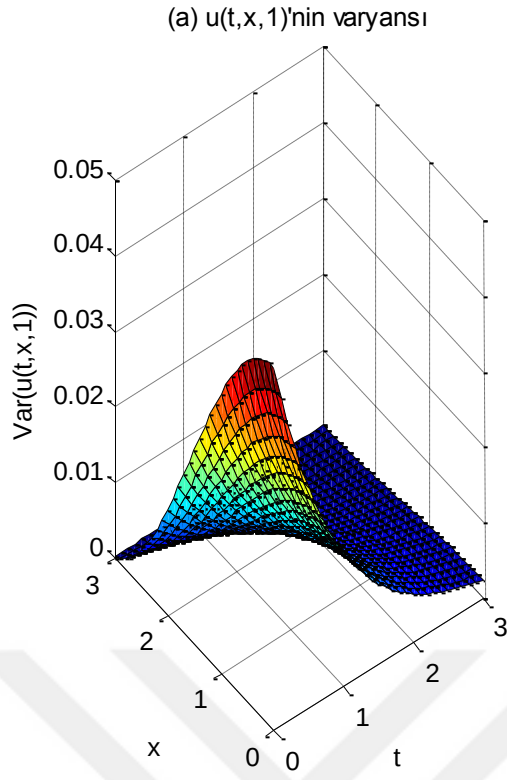
Şekil 38. $\lambda = 4$, (a) $y = 1$, (b) $x = 1$,(c) $t = 1$ özel değerleri için (48) denkleminin beklenen değerinin 3 boyutlu çözüm davranışı

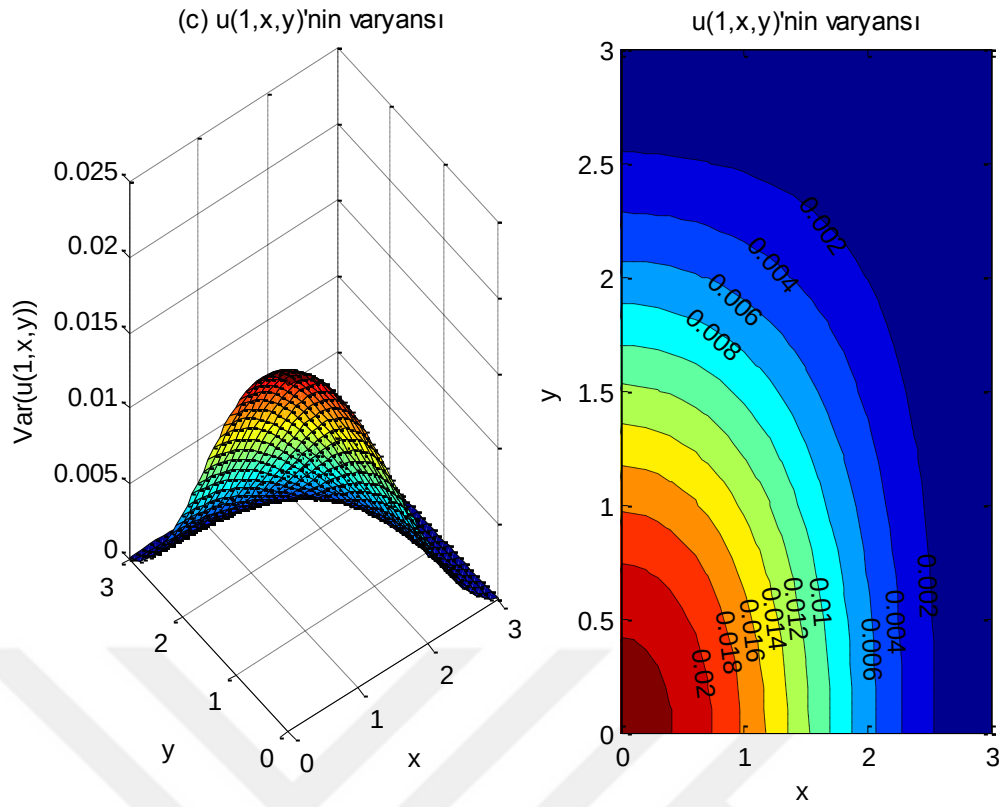
$$\begin{aligned} Var[u(t,x,y)] &= Var \left[Ae^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \right] = \left(e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \right)^2 Var[A] \\ &= \frac{\left(e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \right)^2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

$\lambda = 4$ özel değeri için,

$$Var[u(t,x,y)] = \frac{\left(e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \right)^2}{16},$$

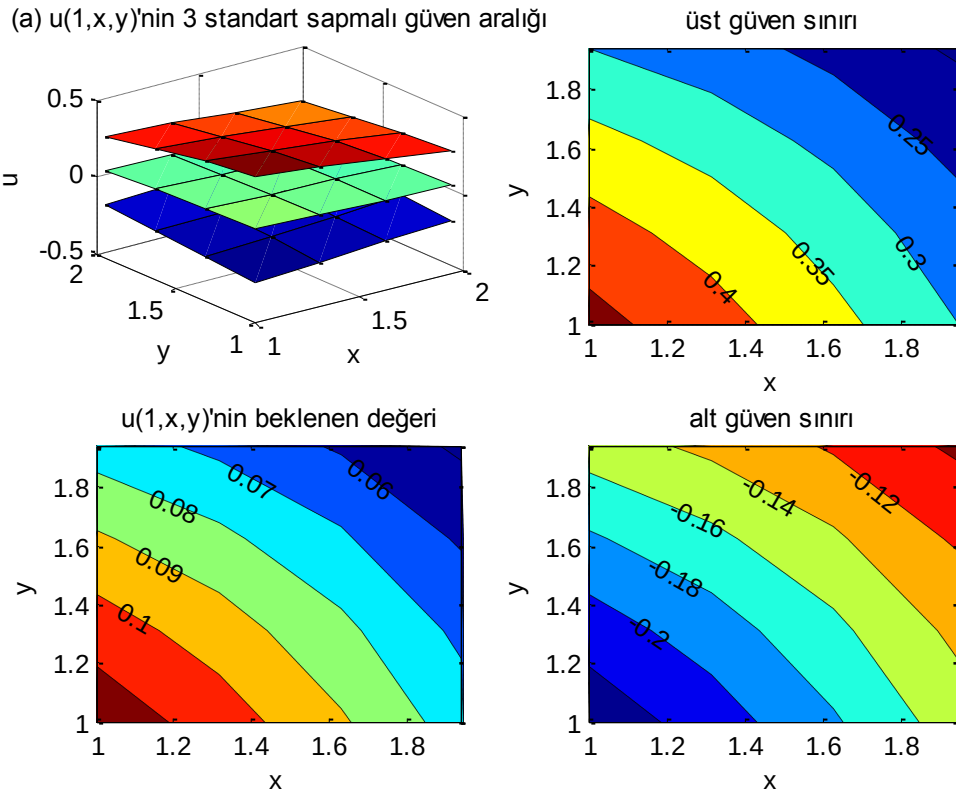
bulunur.

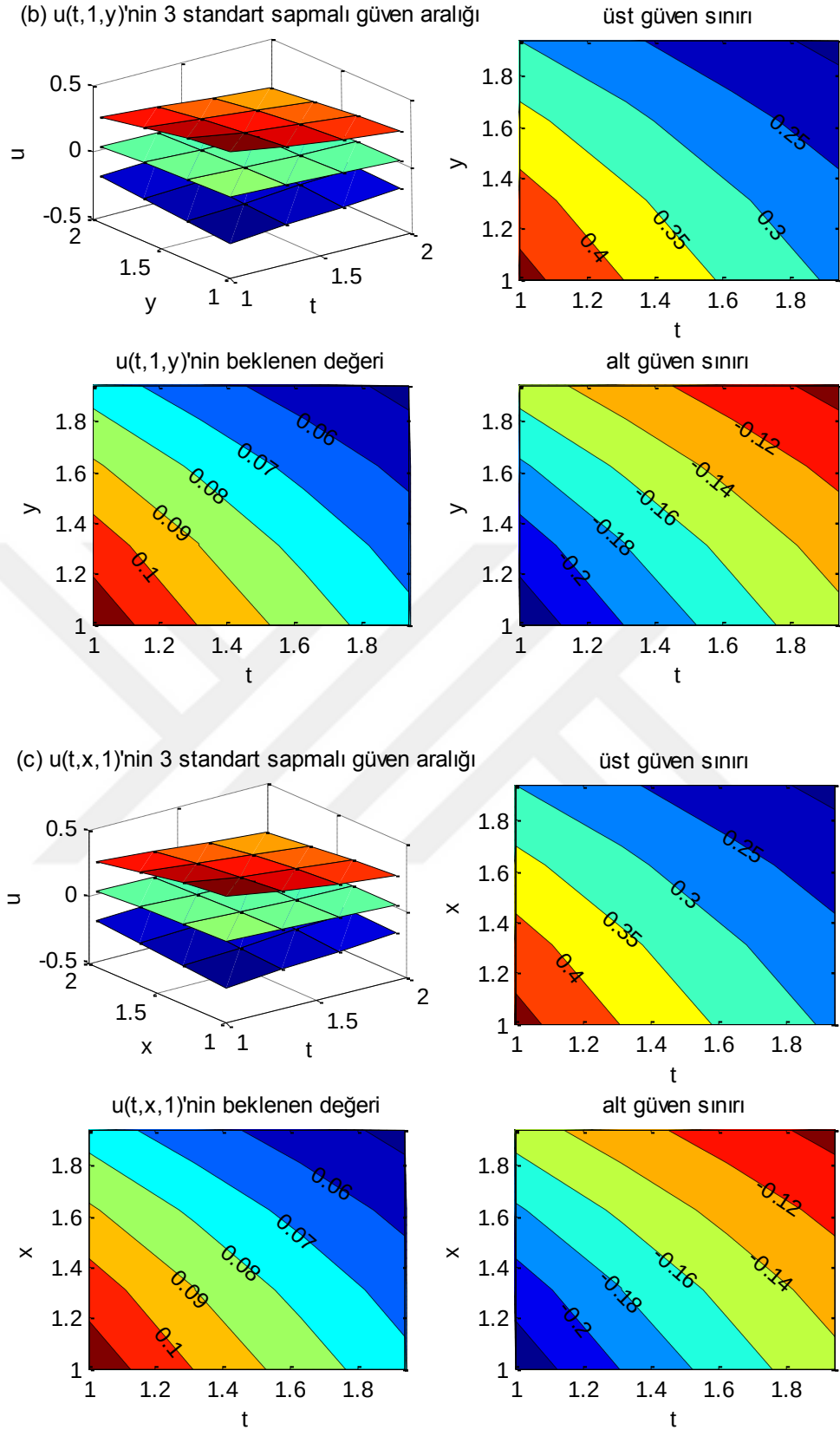




Şekil 39. $\lambda = 4$, (a) $y = 1$, (b) $x = 1$,(c) $t = 1$ özel değerleri için (48) denkleminin varyansın 3 boyutlu çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları,





Şekil 40. $\lambda = 4$, (a) $t = 1$, (b) $x = 1$, (c) $y = 1$ özel değerleri için (48) denkleminin güven aralığının 3 boyutlu çözüm davranışı

$u(t, x, y)$ değişim katsayısı;

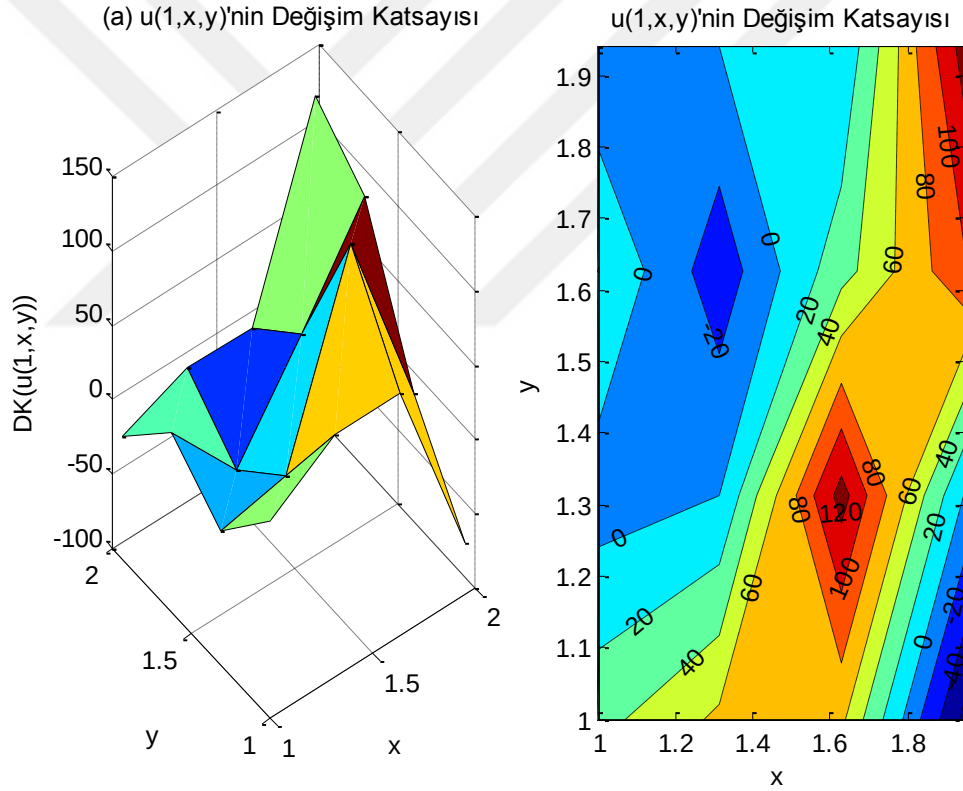
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

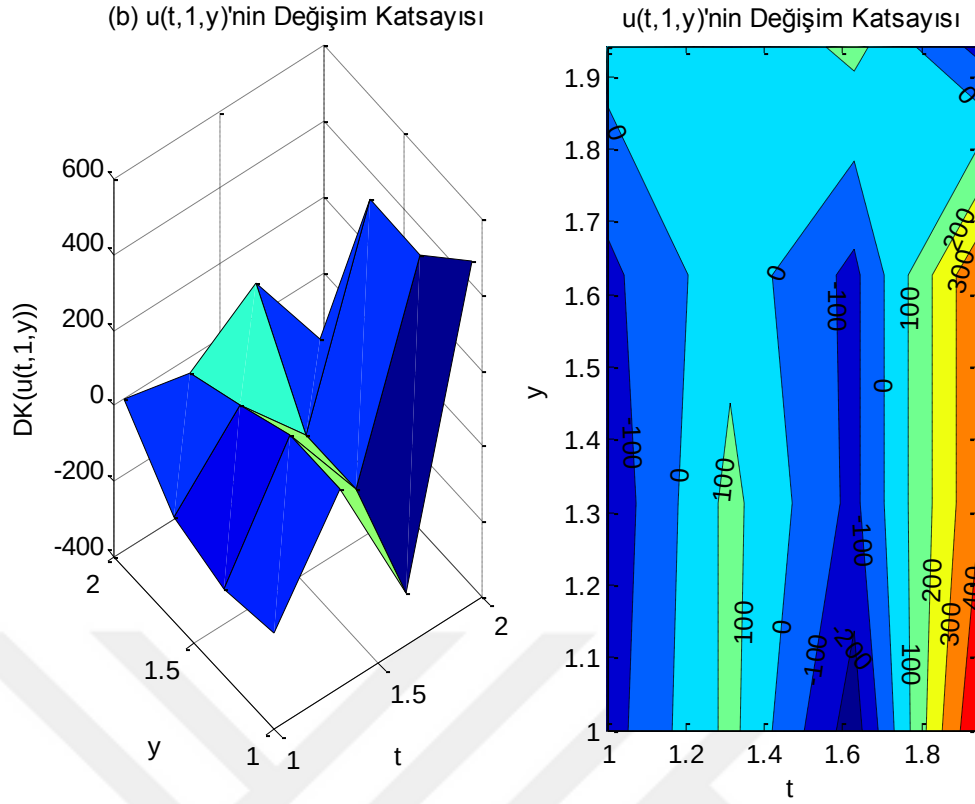
$$std[u(t, x, y)] = \sqrt{Var[u(t, x, y)]} = \sqrt{\frac{\left(e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2}{16}}$$

bulunur.

$$D.K = \frac{std[u(t, x, y)]}{E[u(t, x, y)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{\left(e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right)\right)^2}{16}}}{\frac{1}{4}e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{y}{2}\right)} \times 100$$

$u(t, x, y)$ için değişim katsayısı grafiği:





Şekil 41. $\lambda = 4$, (a) $t = 1$, (b) $x = 1$, özel değerleri için (48) $u(t, x)$ 'in değişim katsayı değeri

3.6. İki Boyutlu Eliptik denklemlerin Fourier serisi çözümleri

Bu bölümde iki boyutlu rastgele eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak, bir adet örnek üzerinde uygulama gerçekleştirildi.

Örnek 3.6.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (54)$$

$$u(x, 0) = A \cos x, \quad -\infty < x < \infty$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = 0$$

Burada $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 2, \beta = 4)$ düzgün dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için iki boyutlu eliptik KDD'ini Laplace denklemini değişkenlerine ayrılabilir çözümlerini elde ediniz.

Çözüm:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ denkleminin değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözümü}$$

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \quad (55)$$

için,

(54) denkleminde yerine yazarsak

$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$ denklemini $X(x)Y(y)$ ile bölüp düzenlersek;

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\delta^2$$

negatif sabiti alalım.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\delta^2 \text{ sabiti için } X''(x) + \delta^2 X(x) = 0 \quad (56)$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \delta^2, Y''(y) - \delta^2 Y(y) = 0 \quad (57)$$

denklemleri elde edilir.

$$X''(x) + \delta^2 X(x) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + \delta^2 = 0 \quad r_{1,2} = \mp i\delta \text{ olduğundan,}$$

$$X(x) = a_1 \cos \delta x + a_2 \sin \delta x \quad (58)$$

bulunur.

$$Y''(y) - \delta^2 Y(y) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 - \delta^2 = 0 \quad r_{1,2} = \mp \delta \text{ olduğundan,}$$

$$Y(y) = a_3 e^{\delta y} + a_4 e^{-\delta y} \quad (59)$$

bulunur.

(55) denkleminde bulunan (58) ve (59) denklemleri yerine yazılırsa;

$$u(x, y) = (a_1 \cos \delta x + a_2 \sin \delta x)(a_3 e^{\delta y} + a_4 e^{-\delta y}) \quad (60)$$

elde edilir. Başlangıç koşulları (60) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y) = a_3 e^{\delta y} (a_1 \cos \delta x + a_2 \sin \delta x) = 0$$

olması için $a_3 = 0$ ($\delta > 0$) olması gerekir. $a_3 = 0$ (60) da yerine yazılırsa;

$$u(x, y) = (a_1 \cos \delta x + a_2 \sin \delta x) a_4 e^{-\delta y} \quad (61)$$

$$u(x, 0) = A \cos x$$

başlangıç koşulunu (61) denkleminde yerine yazalım.

$$(a_1 \cos \delta x + a_2 \sin \delta x) a_4 = A \cos x$$

olur.

$$a_1 a_4 = A, a_2 a_4 = 0, a_2 = 0, \delta = 1$$

seçilirse eşitlik sağlanır. Buradan elde edilenler (61) denkleminde yerine yazılırsa;

$$u(x, y) = A e^{-y} \cos x \quad (62)$$

elde edilir.

Düzgün dağılıma sahip X rastgele değişkenin parametreleri, $X \sim \text{Düzgün}(\alpha, \beta)$ ' dir.

$A \sim \text{Düzgün}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkenin birinci momenti ve varyansı;

$$E[A] = \frac{\alpha+\beta}{2}, Var[A] = \frac{(\alpha-\beta)^2}{12}$$

elde edilir (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

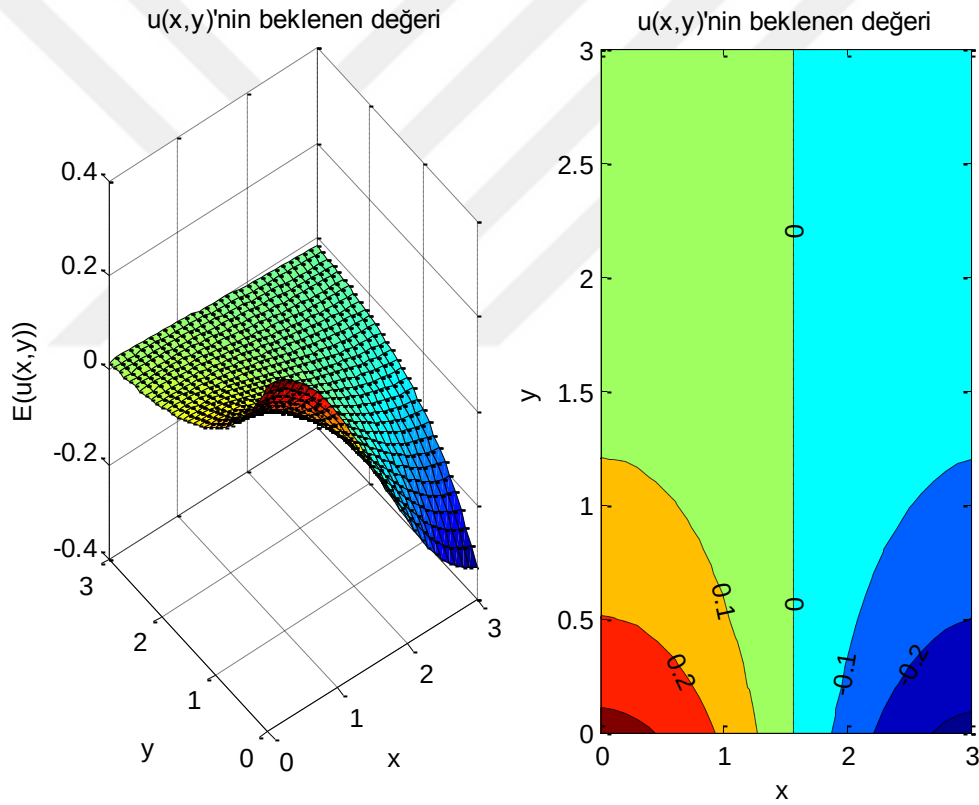
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, y)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[u(x, y)] = E[Ae^{-y} \cos x] = e^{-y} \cos x E[A] = \frac{\alpha e^{-y} \cos x}{\alpha + \beta}$$

$\alpha = 2$ ve $\beta = 4$ özel değerleri için,

$$E[u(x, y)] = \frac{e^{-y} \cos x}{3}$$

bulunur.



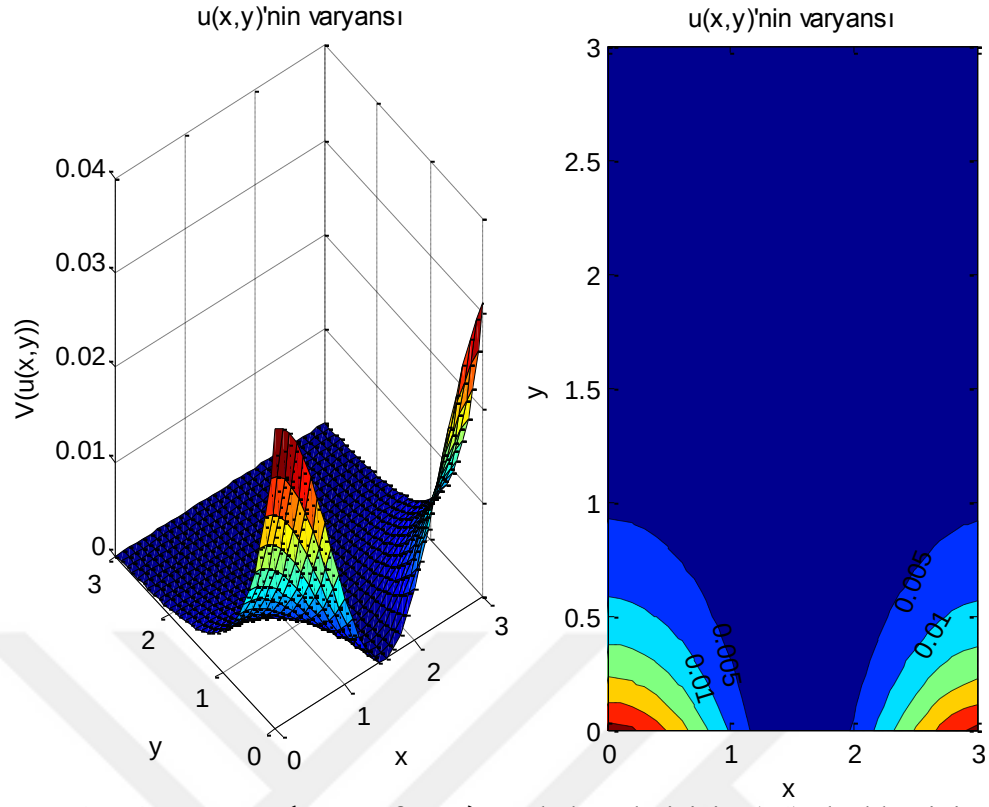
Şekil 42. $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 2, \beta = 4)$ özel değerleri için (54) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$Var[u(x, y)] = Var[Ae^{-y} \cos x] = (e^{-y} \cos x)^2 Var[A] = \frac{(e^{-y} \cos x)^2 \alpha \beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$$

$\alpha = 2$ ve $\beta = 4$ özel değerleri için,

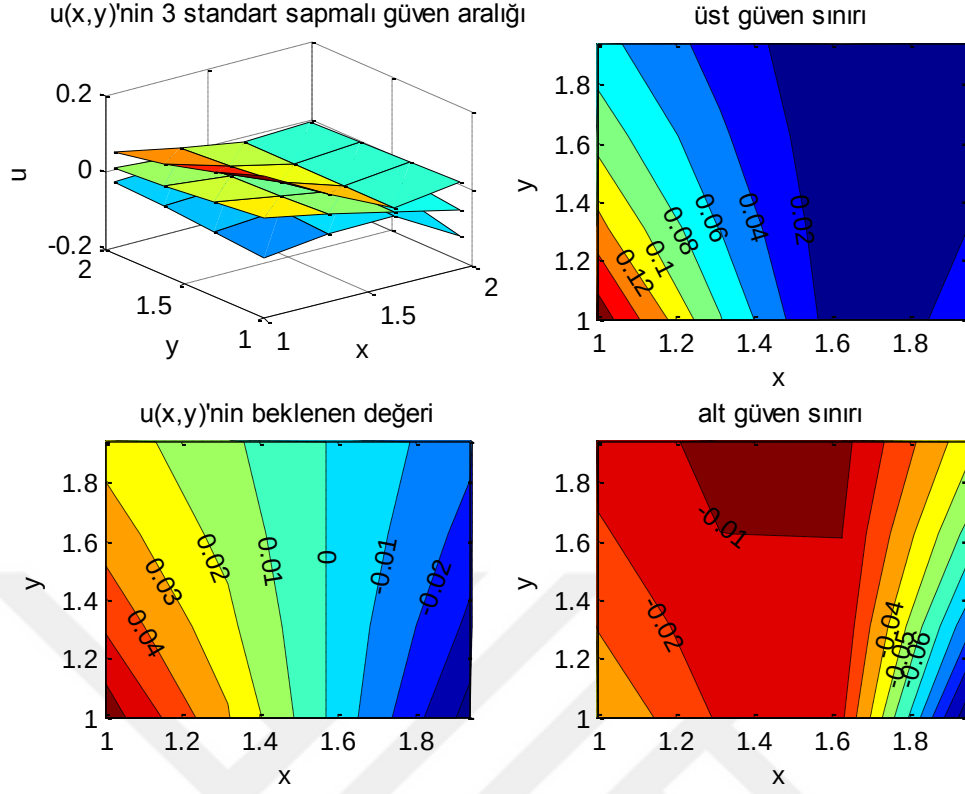
$$Var[u(x, y)] = \frac{2(e^{-y} \cos x)^2}{63}$$

bulunur.



Şekil43. $A \sim \text{Düzgün}(\alpha = 2, \beta = 4)$ özel değerleri için (54) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları



Şekil 43. $A \sim Düzgün(\alpha = 2, \beta = 4)$ özel değerleri için (54) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı
 $u(x, y)$ değişim katsayısı;

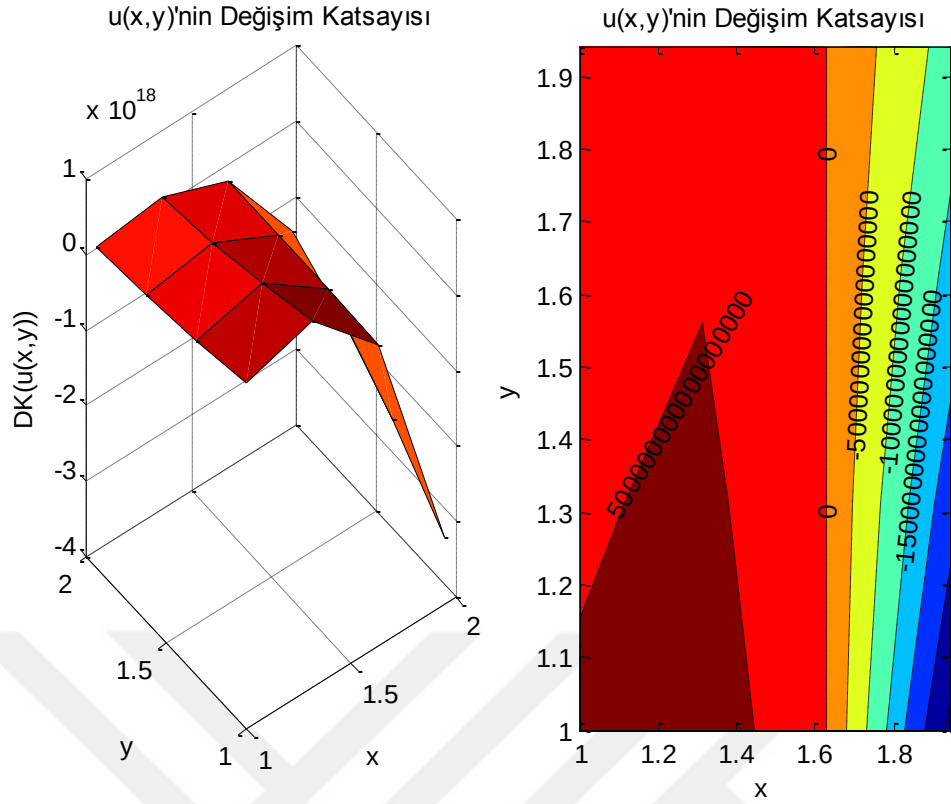
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$std[u(x, y)] = \sqrt{Var[u(x, y)]} = \sqrt{\frac{2(e^{-y} \cos x)^2}{63}}$$

bulunur.

$$D.K = \frac{std[u(x, y)]}{E[u(x, y)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{2(e^{-y} \cos x)^2}{63}}}{\frac{e^{-y} \cos x}{3}} \times 100$$

$u(x, y)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 44. $u(x, y)$ 'nin değişim katsayı değeri

3.7. İki Boyutlu Hiperbolik ve Parabolik denklem sistemlerinin Fourier serisi çözümleri

Bu bölümde iki boyutlu rastgele hiperbolik ve parabolik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Fourier serisi, Fourier dönüşümü ve değişkenlerine ayırma yöntemini kullanarak, iki adet örnek üzerinde uygulama gerçekleştirildi.

Örnek 3.7.1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u = -Asintcosx,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = (Acost + 2Asint)cosx, \quad (63)$$

$$u(0, x) = u(\pi, x) = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

$$u(t, -1) = u(t, 1), \quad -1 \leq x \leq 1$$

Burada $A \sim \text{Weibull}(\xi = 1, \zeta = 4)$ dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için iki boyutlu hiperbolik ve parabolik kısmi diferansiyel denklem sistemlerini değişkenlerine ayırma ve Fourier serisi yöntemiyle çözümlerini elde ediniz.

Çözüm:

Kabul edelim ki,

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v = 0, \\ v(0, x) = v(\pi, x) = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi \\ v(t, -1) = v(t, 1), \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (64)$$

$w(t, x)$ problemin çözümü;

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w = -Asintcosx, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = (Acost + 2Asint)cosx, \\ w(0, x) = w(\pi, x) = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi \\ w(t, -1) = w(t, 1), \quad -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (65)$$

(64) denkleminin değişkenlere ayırma yöntemi ile çözümü,

$$v(t, x) = T(t)X(x) \neq 0 \text{ için}$$

$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v = 0$ denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{T''(t)-T(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0 \quad \text{elde edilir.}$$

Her iki tarafı negatif bir sabite eşitlersek;

$$\frac{T''(t)-T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -n^2.$$

$$X''(x) + n^2 X(x) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + n^2 = 0 \quad r_{1,2} = \pm i n \text{ olduğundan,}$$

$$X_n(x) = c_1 \cos n x + c_2 \sin n x$$

bulunur.

$$T''(t) - T(t) = -n^2 T(t), \quad T''(t) + (n^2 - 1)T(t) = 0$$

karakteristik denklemi

$$r^2 + (n^2 - 1) = 0, \quad r_{1,2} = \pm i \sqrt{n^2 - 1}, \quad |n| > 1 \text{ için}$$

$$T_n(t) = A_n \sin(\sqrt{n^2 - 1} t) + B_n \cos(\sqrt{n^2 - 1} t)$$

elde edilir.

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t, x),$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \sqrt{n^2 - 1} t + B_n \cos \sqrt{n^2 - 1} t) (c_1 \cos n x + c_2 \sin n x).$$

(64) denklemindeki başlangıç koşulları alınır;

$$v(t, -1) = v(t, 1),$$

$$c_1 \cos n + c_2 \sin n = c_1 \cos n - c_2 \sin n,$$

$$2c_2 \sin n = 0, \quad c_2 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$X_n(x) = c_1 \cos n x$$

elde edilir.

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \sqrt{n^2 - 1} t + B_n \cos \sqrt{n^2 - 1} t) c_1 \cos n x,$$

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin \sqrt{n^2 - 1} t + D_n \cos \sqrt{n^2 - 1} t) \cos n x \quad (66)$$

$v(t, x) = T(t)X(x) \neq 0$ için

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v = 0$$

denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{T'(t)+T(t)}{T(t)} - \frac{X''(x)}{X(x)} = 0$$

elde edilir. Her iki tarafı negatif bir sabite eşitlersek;

$$\frac{T'(t)+T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -n^2,$$

$$X''(x) + n^2 X(x) = 0$$

karakteristik denklemini ve kökleri

$$r^2 + n^2 = 0, \quad r_{1,2} = \pm i n \text{ olduğundan,}$$

$$X_n(x) = \cos n x$$

bulunur.

$$\frac{T'(t)+T(t)}{T(t)} = -n^2 \text{ denkleminde } T'(t) + (1 + n^2)T(t) = 0$$

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -(1 + n^2),$$

her iki tarafı $T(t)$ ile çarparsak,

$$T'(t) = -T(t)(1 + n^2),$$

$$T'(t) = -(1 + n^2)T(t),$$

$$\frac{dT}{dt} = -(1 + n^2)T(t),$$

$$\int \frac{dT}{T(t)} = - \int (1 + n^2) dt,$$

$$\ln T = -(1 + n^2)t,$$

$$T(t) = F_n e^{-(1+n^2)t}$$

elde edilir.

$$v(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{-(1+n^2)t} \cos n x \quad (67)$$

(64) denklemindeki başlangıç koşulları (66) ve (67) denklemlerinde yerine yazılırsa;

$$v(0, x) = v(\pi, x) = 0,$$

$$F_n = C_n = D_n = 0 \text{ bulunur.}$$

Homojen çözüm $v(t, x) = 0$ elde edilir.

$w(t, x)$ çözümü için (65) sistemi çözülürse,

$$f(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(t) \cos n x = -A \sin t \cos x,$$

$$n = 1, H_1(t) = -Asint,$$

$$n \neq 1 \text{ için } H_n(t) = 0$$

bulunur.

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t) \cos nx \quad (68)$$

denklemini (65) denklemindeki

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w = -Asint \cos x$$

denkleminde gerekli türevler alınarak yerine yazalım;

$$w_{tt} - w_{xx} - w = \sum_{n=1}^{\infty} (G_n''(t) + (n^2 - 1)G_n(t)) \cos nx = -Asint \cos x \quad (69)$$

$n \neq 1$ ve $0 \leq t \leq \pi$ için

$$G_n''(t) + (n^2 - 1)G_n(t) = 0$$

karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + (n^2 - 1) = 0, \quad r_{1,2} = \mp i\sqrt{(n^2 - 1)}, \quad |n| > 1 \text{ için}$$

$$G_n(t) = c_1 \cos \sqrt{(n^2 - 1)} t + c_2 \sin \sqrt{(n^2 - 1)} t \quad (70)$$

bulunur.

$$(65) \text{ denkleminin } \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = (A \cos t + 2A \sin t) \cos x \text{ homojen çözümü;}$$

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) \cos nx \quad (71)$$

$$M_n'(t) + (1 + n^2)M_n(t) = 0,$$

çözümü

$$M_n(t) = c_3 e^{-(1+n^2)t} \quad (72)$$

bulunur.

(65) denklemindeki $w(0, x) = w(\pi, x) = 0, \quad 0 \leq t \leq \pi$ sınır koşullarını

(70) ve (71) denklemlerinde yerine yazarsak;

$$G_n(0) = M_n(0) = 0,$$

$$G_n(\pi) = M_n(\pi) = 0, \text{ için } c_1 = c_2 = c_3 = 0 \text{ bulunur.}$$

Buradan $\forall n \neq 1$ için $G_n(t) = M_n(t) = 0$ elde edilir.

$n = 1$ için (69) denkleminde yerine yazarsak,

$$G_1''(t) = -Asint$$

denkleminin çözümü için iki kez integral alırsak,

$$G_1(t) = Asint + ct + c_1$$

bulunur. (68) denkleminde elde edilenler yerine yazılırsa,

$$w(t, x) = (Asint + ct + c_1) \cos x \quad (73)$$

bulunur.

$$(65) \text{ denkleminin } \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = (A \cos t + 2A \sin t) \cos x \text{ özel çözümü;}$$

$$g(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} N_n(t) \cos nx = (A \cos t + 2A \sin t) \cos x,$$

$$n = 1 \text{ için } N_1(t) = A \cos t + 2A \sin t,$$

$$n \neq 1 \text{ için } N_n(t) = 0.$$

$$w(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n(t) \cos nx \text{ alalım. } \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w = (A \cos t + 2A \sin t) \cos x$$

denkleminde yerine yazarsak;

$$w_t - w_{xx} + w = \sum_{n=1}^{\infty} (S'_n(t) + (n^2 + 1)S_n(t)) \cos nx = (A \cos t + 2A \sin t) \cos x,$$

$$n = 1 \text{ için } ;$$

$$S'_1(t) + 2S_1(t) = A \cos t + 2A \sin t, \text{ lineer denklemini çözersek;}$$

$$S_1(t) = e^{-2t} c_1 + A \sin t$$

elde edilir.

$$w(t, x) = (e^{-2t} c_1 + A \sin t) \cos x$$

bulunur. (65) denklemindeki başlangıç koşulları yerine yazılırsa;

$$w(0, x) = w(\pi, x) = 0,$$

$$N_1(0) = M_1(0) = 0,$$

$$N_1(\pi) = M_1(\pi) = 0, \text{ olduğundan } c_1 \cos x = 0, \quad c_1 = 0 \text{ bulunur.}$$

$$w(t, x) = A \sin t \cos x$$

elde edilir. Bulduğumuz homojen ve özel çözümleri yerine yazarsak

$$u(t, x) = v(t, x) + w(t, x)$$

$$u(t, x) = A \sin t \cos x$$

(74)

bulunur.

A rastgele değişkenine (ξ, ζ) parametrelili Weibull dağılımına sahiptir denir (Weibull, 1951).

Weibull dağılımı için beklenen değer ve varyans şöyle verilir:

$$E(A) = \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{\xi}}} \frac{1}{\xi} \Gamma\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

$$Var(A) = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\xi}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)}{\zeta^{\frac{2}{\xi}}}.$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

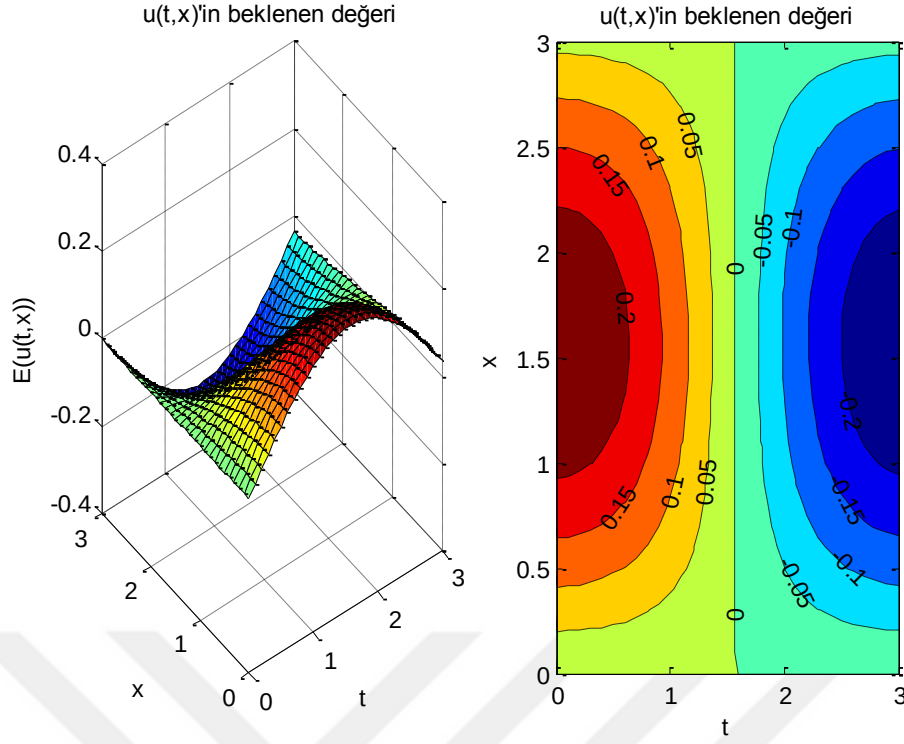
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için $u(t, x)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[u(t, x)] = E[A \sin t \cos x] = \sin t \cos x E[A] = \sin t \cos x \frac{1}{\zeta^{\frac{1}{\xi}}} \frac{1}{\xi} \Gamma\left(\frac{1}{\xi}\right)$$

$\xi = 1$ ve $\zeta = 4$ özel değerleri için,

$$E[u(t, x)] = \frac{\sin t \cos x}{4}$$

bulunur.



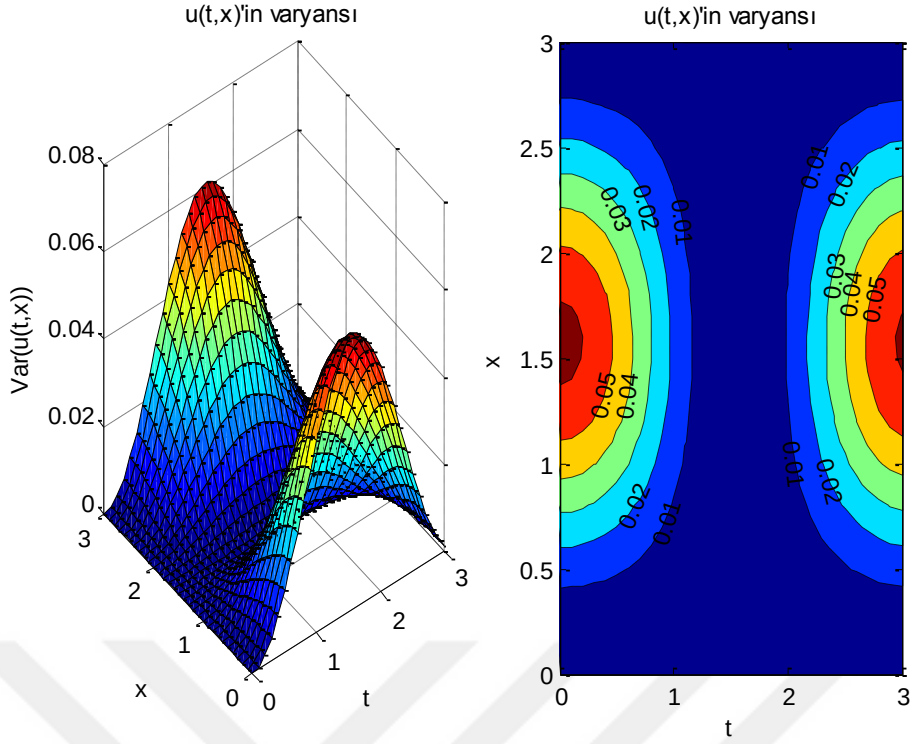
Şekil 45. $A \sim \text{Weibull}(\xi = 1, \zeta = 4)$ özel değerleri için (63) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$\text{Var}[u(t, x)] = \text{Var}[A \text{sintcos}x] = (\text{sintcos}x)^2 \text{Var}[A] = \frac{\Gamma(1+\frac{2}{\xi}) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\xi})}{\zeta^{\frac{2}{\xi}}} (\text{sintcos}x)^2,$$

$\xi = 1$ ve $\zeta = 4$ özel değerleri için,

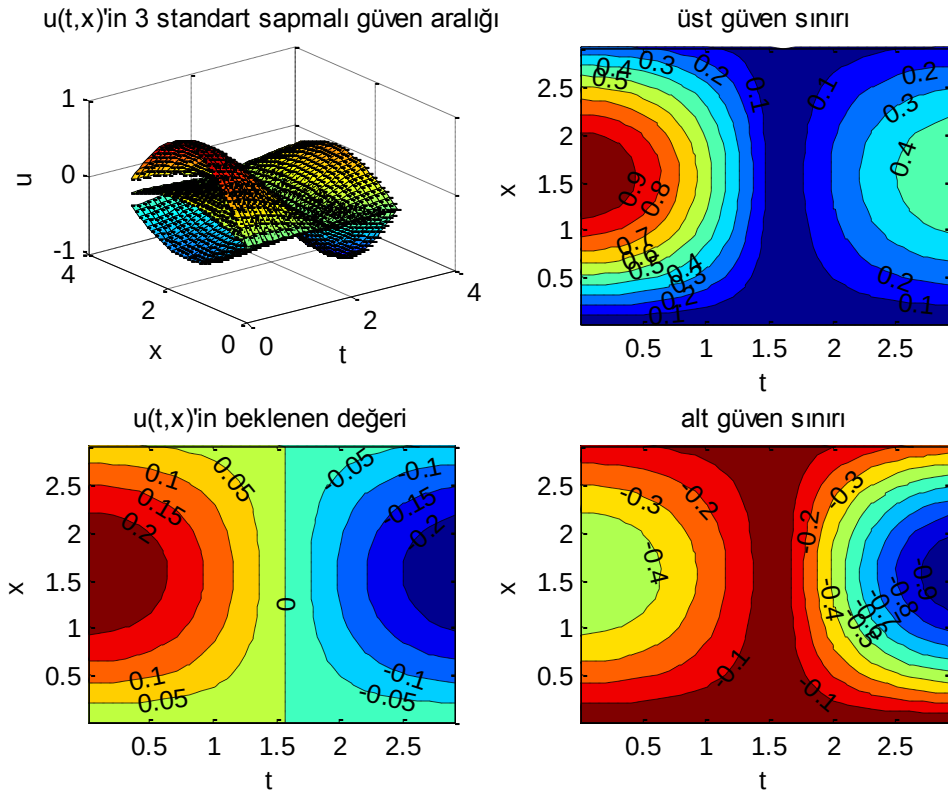
$$\text{Var}[u(t, x)] = \frac{(\text{sintcos}x)^2}{16}$$

bulunur.



Şekil 46. $A \sim \text{Weibull}(\xi = 1, \zeta = 4)$ özel değerleri için (63) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları,



Şekil 47. $A \sim \text{Weibull}(\xi = 1, \zeta = 4)$ özel değerleri için (63) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

$u(t, x)$ değişim katsayısı;

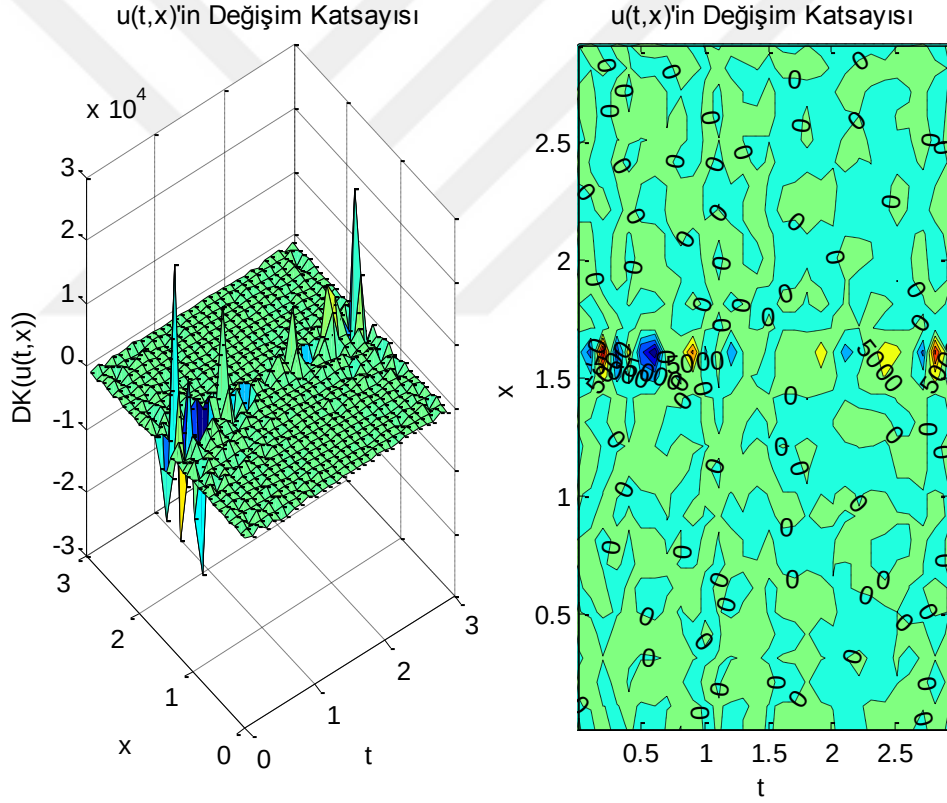
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$\text{std}[u(t, x)] = \sqrt{\text{Var}[u(t, x)]} = \sqrt{\frac{(\text{sintcosx})^2}{16}}$$

bulunur.

$$D.K = \frac{\text{std}[u(t, x)]}{E[u(t, x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{(\text{sintcosx})^2}{16}}}{\frac{\text{sintcosx}}{4}} \times 100$$

$u(t, x)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 48. $u(t, x)$ 'nin değişim katsayısı değeri

Örnek 3.7.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = (-A - 4Ax^2)e^{x^2}, 0 \leq t \leq 1, -\infty \leq x \leq \infty$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = (-A - 4Ax^2)e^{x^2}, -1 \leq t \leq 0, -\infty \leq x \leq \infty \quad (75)$$

$$u(1, x) = u(-1, x), \quad -\infty < x < \infty$$

Burada $A \sim \text{Üçg}(a = 1, b = 2, c = 5)$, dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere, verilen başlangıç koşulları için iki boyutlu hiperbolik ve parabolik kısmi diferansiyel denklem sistemlerini Fourier dönüşümü yöntemiyle çözümlerini elde ediniz.

Çözüm:

$0 \leq t \leq 1$ için (75) denklemindeki $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = (-A - 4Ax^2)e^{x^2}$ denkleminin her iki tarafının Fourier dönüşümünü alalım

$$F\{u_{tt}\} - F\{u_{xx}\} + F\{u\} = F\{(-A - 4Ax^2)e^{x^2}\},$$

$$F\{u(t, x)\}_{tt} - (iw)^2 F\{u(t, x)\} + F\{u(t, x)\} = -AF\{(1 + 4x^2)e^{x^2}\},$$

$$u_{tt}(t, w) + (w^2 + 1)u(t, w) = -AF\{(1 + 4x^2)e^{x^2}\},$$

$$= -A \left(-F\{e^{x^2}\} + F\{(2 + 4x^2)e^{x^2}\} \right),$$

$$= -A \left(-F\{e^{x^2}\} + F\{(e^{x^2})''\} \right),$$

$$= -A \left(-F\{e^{x^2}\} + (iw)^2 F\{e^{x^2}\} \right),$$

$$= A(1 + w^2)F\{e^{x^2}\},$$

$$u_{tt}(t, w) + (w^2 + 1)u(t, w) = A(1 + w^2)F\{e^{x^2}\}. \quad (76)$$

(76) denkleminin homojen çözümü;

$u_{tt}(t, w) + (w^2 + 1)u(t, w) = 0$ karakteristik denklemi ve kökleri

$$r^2 + (w^2 + 1) = 0, \quad r = \mp i\sqrt{(w^2 + 1)}$$

$$u_h(t, w) = c_1 \cos(\sqrt{(w^2 + 1)}t) + c_2 \sin(\sqrt{(w^2 + 1)}t).$$

(76) denkleminin özel çözümü için belirsiz katsayılar yönteminden

$$u_{\bar{o}}(t, w) = KF\{e^{x^2}\}$$

alalım. Gerekli türevleri alıp (76) denkleminde yerine yazarsak;

$$(w^2 + 1)KF\{e^{x^2}\} = A(1 + w^2)F\{e^{x^2}\},$$

$K = A$ elde edilir.

$$u_{\bar{o}}(t, w) = AF\{e^{x^2}\}$$

bulunur.

$$u(t, w) = u_h(t, w) + u_{\bar{o}}(t, w),$$

$$u(t, w) = c_1 \cos(\sqrt{(w^2 + 1)}t) + c_2 \sin(\sqrt{(w^2 + 1)}t) + AF\{e^{x^2}\}. \quad (77)$$

$u(1, w) = u(-1, w)$, başlangıç koşullarını yerine yazarsak $c_1 = c_2 = 0$ elde edilir. (77)

denkleminde elde edilenler yerine yazılırsa;

$$u(t, w) = AF\{e^{x^2}\} \text{ bulunur.}$$

$-1 \leq t \leq 0$ için (75) denklemindeki $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = (-A - 4Ax^2)e^{x^2}$ denkleminin her iki tarafının Fourier dönüşümünü alalım.

$$F\{u_t\} - F\{u_{xx}\} + F\{u\} = F\{(-A - 4Ax^2)e^{x^2}\},$$

$$F\{u(t, x)\}_t - (iw)^2 F\{u(t, x)\} + F\{u(t, x)\} = -AF\{(1 + 4x^2)e^{x^2}\},$$

$$u_t(t, w) + (w^2 + 1)u(t, w) = -AF\{(1 + 4x^2)e^{x^2}\},$$

$$u_t(t, w) + (w^2 + 1)u(t, w) = A(1 + w^2)F\{e^{x^2}\}. \quad (78)$$

(78) denkleminin homojen çözümü;

$$u_t(t, w) + (w^2 + 1)u(t, w) = 0,$$

$$u'(t, w) = -(w^2 + 1)u(t, w),$$

$$\frac{du(t, w)}{dt} = -(w^2 + 1)u(t, w),$$

$$\int \frac{du(t, w)}{u(t, w)} = - \int (w^2 + 1) dt,$$

$$\ln u(t, w) = -(w^2 + 1)t + c,$$

$$u(t, w) = c_3 e^{-(w^2+1)t}, \quad u_h(t, w) = c_3 e^{-(w^2+1)t}$$

bulunur. (78) denkleminin özel çözümü için belirsiz katsayılar yönteminden

$u_0(t, w) = LF\{e^{x^2}\}$ alalım. Gerekli türevleri alıp (78) denkleminde yerine yazarsak;

$$(w^2 + 1)LF\{e^{x^2}\} = A(1 + w^2)F\{e^{x^2}\},$$

$L = A$ elde edilir.

$$u_0(t, w) = AF\{e^{x^2}\}$$

bulunur.

$$u(t, w) = u_h(t, w) + u_0(t, w),$$

$$u(t, w) = c_3 e^{-(w^2+1)t} + AF\{e^{x^2}\} \quad (79)$$

bulunur.

$u(1, w) = u(-1, w)$ başlangıç koşullarını yerine yazarsak;

$$c_3 e^{-(w^2+1)t} + AF\{e^{x^2}\} = c_3 e^{(w^2+1)t} + AF\{e^{x^2}\}, \quad c_3 = 0$$

elde edilir. (79) denkleminde yerine yazarsak;

$$u(t, w) = AF\{e^{x^2}\}$$

bulunur. Her iki tarafın ters Fourier dönüşümü alınır;

$$u(t, x) = Ae^{x^2} \quad (80)$$

elde edilir.

$A \sim \text{Üçg}(a, b, c)$ rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı

$$E[A] = \frac{(a + b + c)}{3}, \quad Var[A] = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

(Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

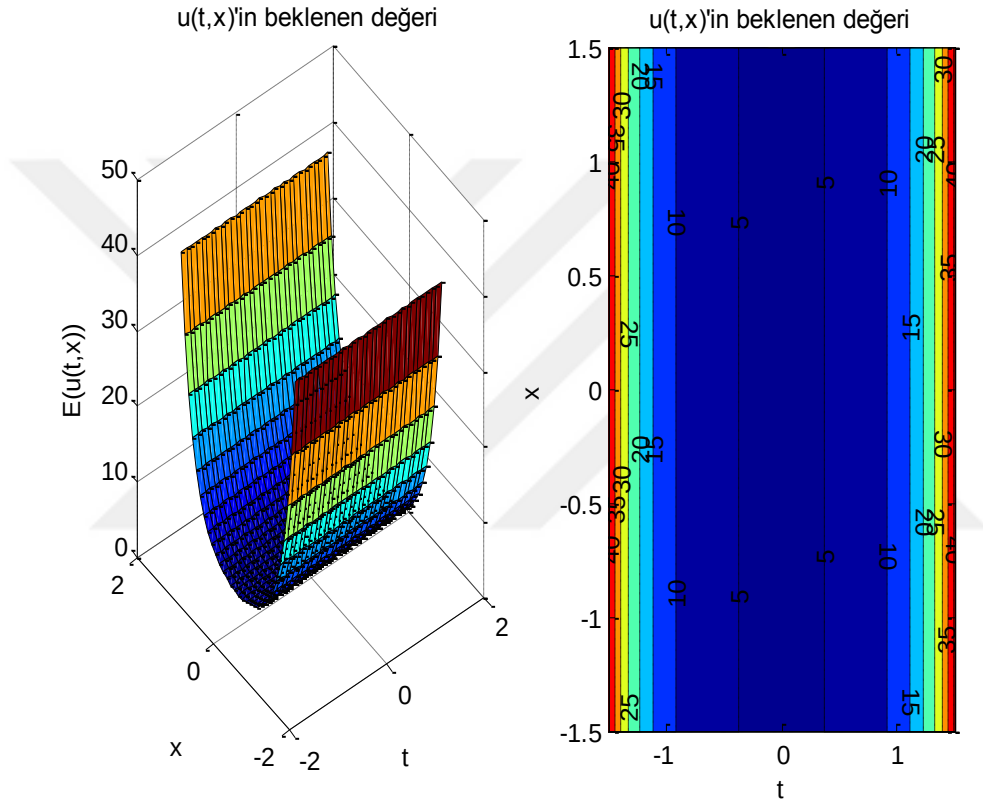
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(t, x)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[u(t, x)] = E[Ae^{x^2}] = e^{x^2} E[A] = \frac{(a + b + c)}{3} e^{x^2}$$

$a = 2, b = 4$ ve $c = 7$ özel değerleri için,

$$E[u(t, x)] = \frac{13e^{x^2}}{3}$$

bulunur.



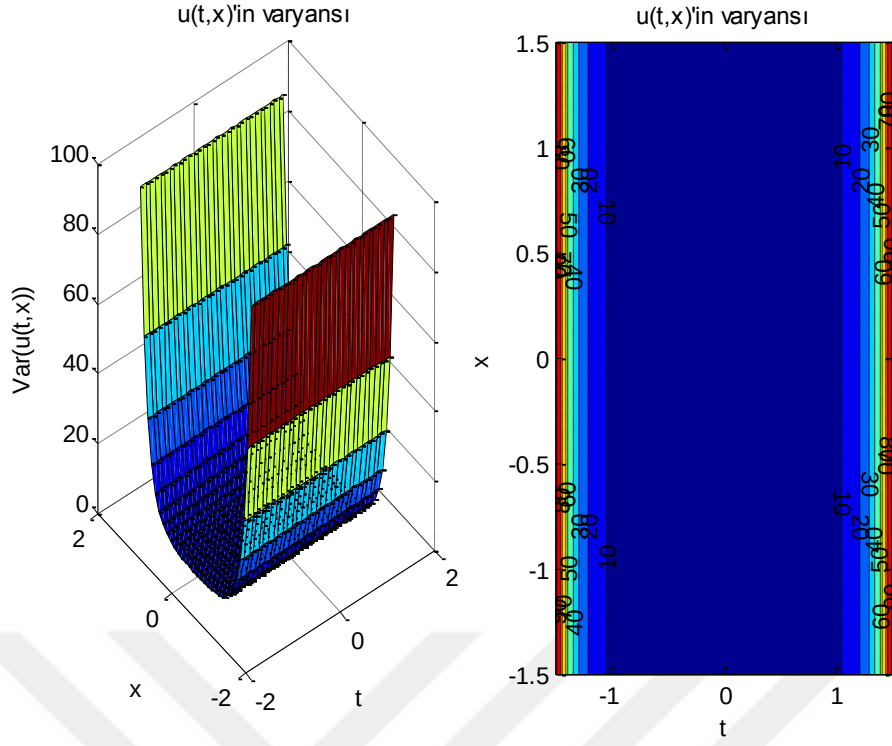
Şekil 49. $A \sim \text{Üçg}(a = 2, b = 4, c = 7)$ özel değerleri için (75) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$\text{Var}[u(t, x)] = \text{Var}[Ae^{x^2}] = (e^{x^2})^2 \text{Var}[A] = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} e^{2x^2}$$

$a = 2, b = 4$ ve $c = 7$ özel değerleri için,

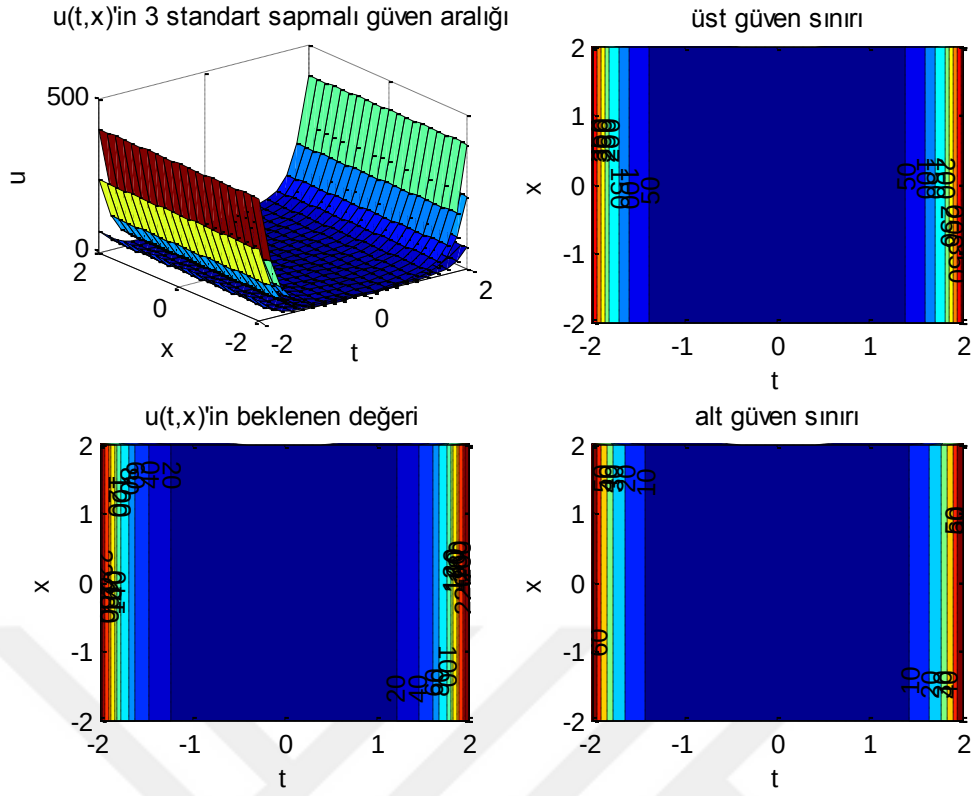
$$\text{Var}[u(t, x)] = \frac{19}{18} e^{2x^2}$$

bulunur.



Şekil 50. $A \sim \text{Üçg}(a = 2, b = 4, c = 7)$ özel değerleri için (75) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Beklenen değer için güven aralıkları ,



Şekil 51. $A \sim \text{Üçg}(a = 2, b = 4, c = 7)$ özel değerleri için (75) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

$u(t, x)$ değişim katsayısı;

standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$std[u(t, x)] = \sqrt{Var[u(t, x)]} = \sqrt{\frac{19}{18} e^{2x^2}}$$

bulunur.

$$D.K = \frac{std[u(t, x)]}{E[u(t, x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{19}{18} e^{2x^2}}}{\frac{13e^{x^2}}{3}} \times 100$$

4. İRDELEME

Bu tez çalışmasında elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuca göre, bir ve iki boyutlu hiperbolik, parabolik ve eliptik kısmi diferansiyel denklemler ile hiperbolik, parabolik diferansiyel denklem sistemlerinin başlangıç koşulları veya katsayılar rastgele seçilerek, denklemler rastgele hale dönüştürülmüşlerdir. Bir ve iki boyutlu hiperbolik, parabolik ve eliptik kısmi diferansiyel denklemler ile hiperbolik, parabolik diferansiyel denklem sistemleri rastgele etkiler altında bakılması için sürekli dağılımlardan seçilen Ki-kare, Düzgün, Normal, Gamma, Üstel, Weibull, Üçgensel, Laplace ve Beta dağılımlarına sahip rastgele etki terimleri kullanılmıştır. Bu rastgele bir ve iki boyutlu hiperbolik, parabolik ve eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için değişkenlere ayırma metodu, Fourier serisi yöntemi ve Fourier dönüşümünden yararlanılmıştır. Elde edilen çözümlerin literatürde en çok kullanılan olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve güven aralıkları hesap edilerek Matlab paket programı aracılığıyla grafiksel olarak gösterilmiştir.

Yapılan literatür taramasında, Fourier dönüşüm yönteminin değişken katsayılı adi diferansiyel denklemlere uygulaması oldukça az olduğundan bu alanda yapılan çalışmalara yol gösterici olacağı düşünülmektedir. Ayrıca kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması ile ilgili çalışmalar mevcut olup rastgele eliptik, hiperbolik ve parabolik adi ve kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması daha önceden yapılmamıştır. Yapılacak olan bu tez çalışması ile bu boşluk bir nebze de olsa doldurulup, alana katkıda bulunacaktır.

5. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, bir ve iki boyutlu hiperbolik, parabolik ve eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları, sürekli olasılık dağılımları olan, ki-kare, düzgün, normal, gamma, üstel, weibull, üçgensel, laplace ve beta dağılımlarından herhangi biri ya da birkaçı alınarak denklemler rastgele hâle getirilmiştir. Bu dönüştürülen denklemlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve güven aralıkları bulunmuştur. Bir ve iki boyutlu hiperbolik, parabolik ve eliptik kısmi diferansiyel denklemleri çözmek değişkenlere ayırma metodu, Fourier dönüşümü ve serisi yöntemleri kullanılmıştır. Bulunan çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve güven aralıkları MATLAB (2013a) ve MAPLE 13 paket programları yardımıyla çizdirilmiştir.



6. ÖNERİLER

Bu çalışmada, Fourier dönüşümü yöntemi ile ilgili literatür özeti verilmiş olup yöntemin özellikleri ve diferansiyel denklemlere uygulanışı açıklanmıştır. Bir ve iki boyutlu hiperbolik, parabolik ve eliptik kısmi diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek rastgele hâle getirilmiştir. Ayrıca, elde edilen rastgele eliptik, hiperbolik ve parabolik adi ve kısmî diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunarak, çözümlerin olasılık karakterleri incelenmiştir. Parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek çözümlerin beklenen değer, varyans, değişim katsayısı ve güven aralıkları hesaplanmış, çözüm davranışları grafiksel olarak MATLAB ve MAPLE paket programları kullanılarak incelenmiştir. Fourier dönüşümü yönteminin, rastgele integral denklemlerine, kesir mertebeden diferansiyel denklemlere ve gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulaması yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Alp, H., Akıncı, T. Ç., ve Albora, M. (2008). Jeofizik uygulamalarında Fourier ve Dalgacık dönüşümlerinin karşılaştırılması. *Pamukkale University Journal of Engineering Sciences*, 14(1), 67-76.
- Altın, A. (2011). *Fourier Analizi*. Gazi Kitabevi.
- Beerends, R. J., ter Morche, H. G., van den Berg, J. C., ve van de Vrie , E. M. (2003). *Fourier and Laplace Transform*. Cambridge University Press, Netherlands.
- Bracewell, R. R. (1999). *The Fourier Transform and Its Applications*. McGraw- Hill Science.
- Ceylan, B. (2016). *Zaman gecikmeli lineer olmayan parabolik denklemlerin sınır çözümleri*. Yüksek lisans tezi, Trakya Üniversitesi, Trakya.
- Çağlıyan, M., ve Çelebi, O. (2002). *Kısmi Diferansiyel Denklemler*. Uludağ Üniversitesi Güçlendirme Vakfı: Vipaş a.ş., Bursa.
- Doetsch, G. (1963). *Guide to the Applications of Laplace Transforms*. Van Nostrand Co.
- Doetsch, G. (1970). *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transform*. Springer-Verlag.
- Düz, M., Avezov, S., ve Issa, A. (2023). Solutions to differential-differential difference equations with variable. *Süleyman Demirel University Faculty of Arts and Sciences Journal of Science*, 18(3), 259-267.
- Dyke, P. (2004). *An Introduction to Laplace Transform and Fourier Series*. Great Britain.
- Erdem, A. (2009). Adi diferansiyel denklemler notları.[PDF belgesi].Ders Notları Çevrimiçi Web sitesi:10 ekim 2025 tarihinde <http://www.kocaelimakine.com/wp-content/uploads/2011/10/adi-diferansiyel-denklemler-ders-notlari-arzu-erdem.pdf> adresinden erişildi.
- Feller, W. (1968). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. John Wiley, Hoboken.
- Forbes, C., Evans, M., Hastings, N., ve Peacock, B. (2011). *Statistical Distributions*. Wiley&Sons.
- Fourier, J. (1955). *The Analytical Theory of Heat*(transl. by A. Freeman). Newyork: Dover Publicatins, Inc.

- Hanbay, K., Talu, M., ve Özgüven, Ö. (2017). Fourier dönüşümü kullanılarak gerçek zamanlı kumaş hatası tespiti. *Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University*, 32(1), 151-158.
- Hasanov, A. H. (2010). *Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler*. İstanbul: Literatür Yayınları.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z., ve Kesemen, T. (2017). *Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler*. Nobel Akademik.
- Koca, K. (2001). *Kısmi Türevli Denklemler*. Gündüz Eğitim ve Yayıncılık.
- Merdan, M., ve Atasoy, N. (2023). On the solutions of fractional random ordinary differential equations with the Residual power series method. *Alexandria Engineering Journal*, 70, 169-177.
- Merdan, M., ve Öktem, S. (2024). On solutions of time fractional order random HIV/AIDS modelling. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 42(6), 1899-1906.
- Merdan, M., Anaç, H., Bekiryazıcı, Z., ve Kesemen, T. (2019). Solving of some random partial differential equations by using Differential. *Gümüşhane University, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Department of Mathematical Engineering*, 9(1), 108-119.
- Pala, Y. (2006). *Modern Uygulamalı Diferansiyel Denklemler*. Ankara: Nobel Yayıncılık.
- Schiff, J. L. (1999). *The Laplace Transform: Theory and Applications*. New York: Springer-Verlag.
- Sobolev, S. (1989). *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*.
- Sunnet, A., Issa, A., ve Düz, M. (2024). Solving difference equations using fourier transform method. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 42(4), 1239-1244.
- Şahin, Y. (2024). *Rastgele kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin aboodh ve aboodh-adomian ayrıştırma yöntemi ile çözümleri*. Yüksek lisans tezi, Gümüşhane Üniversitesi, Gümüşhane.

ÖZGEÇMİŞ

Hatice EZBER İlkokulu Yusuf Çiftçioğlu İlkokulu'nda, ortaokulu Ali Fuat Kadirbeyoğlu Anadolu lisesi, lise öğrenimini Mareşal Çakmak Anadolu Öğretmen lisesinde tamamladı. 2009 yılında Samsun Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Lise Matematik Öğretmenliğinden mezun olarak 2014-2017 yılları arasında Şırnak'ta matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2017 yılında Gümüşhane Tobb Kız Anadolu İmam Hatip Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı ve hâlen bu görevini sürdürmekte.

