

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RASTGELE KESİR MERTEBEDEN ADİ VE KISMÎ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS

Nihal ATASOY

NİSAN-2022
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RASTGELE KESİR MERTEBEDEN ADİ VE KISMÎ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ**

**SOLUTIONS OF ORDINARY AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF RANDOM FRACTIONAL WITH ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Nihal ATASOY

**NİSAN-2022
GÜMÜŞHANE**



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RASTGELE KESİR MERTEBEDEN ADİ VE KISMÎ DİFERANSİYEL
DENKLEMLERİN ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMLERİ**

**SOLUTIONS OF ORDINARY AND PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF RANDOM FRACTIONAL WITH ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Nihal ATASOY

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**NİSAN-2022
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans olarak hazırlamış olduğum “**Rastgele Kesir Mertebeden Adi ve Kısmî Diferansiyel Denklemlerin Adomian Ayrıştırma Yöntemi İle Çözümleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

18/04/2022

Nihal ATASOY

TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmıştır. Bu tez çalışmasının konusunun belirlenmesinde, yürütülmesinde ve sonuçlandırılmasında bana yardımcı olan, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kıymetli zamanını bana ayırarak desteğini hiçbir zaman esirgemeyen tez danışmanım değerli hocam Prof. Dr. Mehmet MERDAN'a teşekkür ederim.

Nihal ATASOY
GÜMÜŞHANE – 2022

ÖZET

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin fizik, mühendislik vb. alanlarda birçok uygulaması vardır, bu tür denklemlerin çoğunlukla analitik çözümleri yoktur. Fizik ve mühendislik gibi pek çok problem matematiksel olarak modellenenir. Bu modeller lineer olmayan adi ve kısmî diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edildiğinden bu denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerini elde etmek için literatürde geliştirilmiş olan yöntemler mevcuttur. Bu yöntemlerden sık kullanılanlardan biri Adomian Ayırıştırma Yöntemi'dir.

ADM ilk olarak 1980'lerin başında Adomian tarafından tanıtılmıştır. Adi, kısmî, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için bu yöntemi geliştiren Adomian, Amerikalı matematikçidir. Adomian, bu yöntemi sınır ve başlangıç şartı olan, deterministik, lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla uygulamıştır. Yöntem, lineer olmayan N_y terimlerinin ayrıştırılmasıyla

oluşturulur. $N_y = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanır. Burada, A_n ler Adomian polinomlarıdır.

Her A_n , $n > 0$ için $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ bağımsız değişkenlerine bağlıdır. Bu polinomların elde edileceği formüller Adomian tarafından geliştirilmiştir.

Bu çalışmada, bazı kesir mertebeden türev tanımları ve türev hesabında kullanılan önemli fonksiyonlar, bazı sürekli olasılık dağılımları, rastgele değişkenin beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyon tanımları verilmiştir. Adomian Ayırıştırma Yöntemi'yle ilgili literatür özeti verilmiş, yöntemin uygulanışı açıklanmıştır. Diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek kesir mertebeden diferansiyel denklemler rastgele hâle getirilmiştir. Ayrıca, elde edilen rastgele diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunarak olasılık karakterleri incelenmiştir. Parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek çözümlerin beklenen değer, varyans ve güven aralığı hesaplanmış, çözüm davranışları grafiksel olarak MATLAB(2013a) ve MAPLE13'de incelenmiştir. Adomian Ayırıştırma Yöntemi'nin yanı sıra Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi hakkında bilgi verilmiş, Laplace-Adomian Ayırıştırma Yöntemi açıklanmış kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Adomian ayırıştırma yöntemi, Kesirli türev, Lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklem, Rezidual kuvvet serisi yöntemi, Sürekli olasılık dağılımları

SUMMARY

Application of nonlinear differential equations in physics, engineering etc. It has many applications in fields, such equations often do not have analytical solutions. Many problems can be modeled mathematically. Since these models are expressed with the help of nonlinear differential equations, there are methods developed in the literature to obtain their approximate analytical solutions. One of the most frequently used methods is the Adomian Decomposition Method.

ADM was introduced by Adomian in the early 1980s. He developed this method for ordinary, partial, linear and nonlinear differential equations. Adomian applied the method to find approximate solutions of deterministic, linear and non-linear problems with boundary and initial conditions. The method is constructed by Ny decomposing its nonlinear terms. $Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ is defined as. Here, A_n are Adomian polynomials. Every A_n depends on some variables as $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ for $n > 0$. The formulas of these polynomials were developed by Adomian.

In this study, definitions of fractional derivatives, continuous probability distributions, expected value of random variable, variance and moment generating function definitions are given. The literature about ADM is given and the application of the method is explained. The coefficients and initial conditions of the differential equations are randomized by choosing a random variable. The probabilistic characters of the solutions of random differential equations are investigated. The expected value, variance and confidence interval of the solutions were calculated by choosing the parameters from different probability distributions, and the solution behaviors were analyzed graphically in MATLAB(2013a) and MAPLE13. RPS and LADM are applied to the explained differential equations.

Keywords: Adomian decomposition method, Fractional derivative, Nonlinear ordinary and partial differential equation, Residual power series method, Continuous probability distributions

İÇİNDEKİLER

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	III
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
TABLOLAR DİZİNİ	X
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	XI
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XIV
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı	1
1.2.Literatür.....	1
1.3. Bazı Önemli Fonksiyonlar	3
1.3.1. Gamma Fonksiyonu (Γ).....	3
1.3.2. Beta Fonksiyonu (β).....	5
1.3.3. Mittag-Leffler Fonksiyon (E)	6
1.3.4. Hata Fonksiyonu (Erf)	6
1.4. Kesir Mertebeden Türev	6
1.4.1. Sık Kullanılan Kesir Mertebeden Türev Tanımları	7
1.4.1.1. Euler Kesirli Türev Tanımı	7
1.4.1.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev Tanımı	7
1.4.1.3. Riemann-Liouville Kesirli Türev Tanımı	8
1.4.1.4. Caputo Kesirli Türev Tanımı	8
1.4.1.5. Conformable Kesirli Türev Tanımı.....	8
1.4.1.6. Atangana-Baleanu Kesirli Türev Tanımı	9
1.4.2. Kesir Mertebeden Türevin Özellikleri	9
1.4.2.1. Lineerlik Özelliği	9
1.4.2.2. Homojenlik Özelliği.....	10
1.4.2.3. Birleşme Özelliği	10
1.4.2.4. Kesir Mertebeden Türevler İçin Leibniz Kuralı.....	10
1.4.2.5. Bileşke Fonksiyonun Kesir Mertebeden Türevleri	10
1.5. Adomian Ayrıştırma Yöntemi.....	11
1.5.1. Laplace Dönüşümü İle Birleştirilmiş Adomian Ayrıştırma Yöntemi	13

1.6. Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi.....	15
1.7. Bazı Olasılık Dağılımları	18
1.7.1. Sürekli Düzgün Dağılım.....	18
1.7.2. Üstel Dağılım	18
1.7.3. Normal Dağılım	18
1.7.4. Gamma Dağılımı.....	18
1.7.5. Weibull Dağılımı.....	19
1.7.6. Beta Dağılımı	19
1.7.7. Cauchy Dağılımı	20
1.8. Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri, Varyansı ve Momentleri.....	20
1.8.1. Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri.....	20
1.8.2. Rastgele Değişkenin Beklenen Değerinin Temel Özellikleri	21
1.8.3. Rastgele Değişkenin Varyansı	21
1.8.4. Rastgele Değişkenin Varyansının Temel Özellikleri.....	22
1.8.5. Rastgele Değişkenin Momentleri.....	22
2. UYGULAMALAR	23
3. İRDELEME	96
4. ÖNERİLER.....	97
5. SONUÇLAR	98
KAYNAKÇA.....	99
ÖZGEÇMİŞ	102

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1. Gamma fonksiyonunun bazı değerleri.....	5
--	---



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $A \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (21) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	26
Şekil 2. $A \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (21) denkleminin varyansının çözüm davranışı	27
Şekil 3. $A \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (21) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	28
Şekil 4. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (30) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	32
Şekil 5. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (30) denkleminin varyansının çözüm davranışı	34
Şekil 6. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (30) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	34
Şekil 7. $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$, $\varepsilon = 1$ özel değerler için (36) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	43
Şekil 8. $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$, $\varepsilon = 1$ özel değerler için (36) denkleminin varyansının çözüm davranışı	47
Şekil 9. $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$, $\varepsilon = 1$ özel değerler için (36) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	48
Şekil 10. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (42) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	52
Şekil 11. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (42) denkleminin varyansın çözüm davranışı	53
Şekil 12. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (42) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	53
Şekil 13. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 5)$ özel değeri için (46) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	58
Şekil 14. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 5)$ özel değeri için (46) denkleminin varyansının çözüm davranışı	59
Şekil 15. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 5)$ özel değeri için (46) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	60
Şekil 16. $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$ özel değerler için (51) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	62

Şekil 17. $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$ özel değerler için (51) denkleminin varyansının çözüm davranışı	63
Şekil 18. $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$ özel değerler için (51) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	64
Şekil 19. $A \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 4), B \sim Gamma(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (54) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	67
Şekil 20. $A \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 4), B \sim Gamma(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (54) denkleminin varyansının çözüm davranışı	68
Şekil 21. $A \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 4), B \sim Gamma(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (54) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	69
Şekil 22. $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 4)$ ve $B \sim \text{üstel}(\lambda = 3)$ özel değerler için (57) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	72
Şekil 23. $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 4)$ ve $B \sim \text{üstel}(\lambda = 3)$ özel değerler için (57) denkleminin varyansının çözüm davranışı	73
Şekil 24. $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 4)$ ve $B \sim \text{üstel}(\lambda = 3)$ özel değerler için (57) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	74
Şekil 25. $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 2)$ özel değerler için (62) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	77
Şekil 26. $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 2)$ özel değerler için (62) denkleminin varyansının çözüm davranışı	78
Şekil 27. $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 2)$ özel değerler için (62) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	79
Şekil 28. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (67) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	83
Şekil 29. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (67) denkleminin varyansının çözüm davranışı	84
Şekil 30. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (67) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	84
Şekil 31. $B \sim Gamma(\omega = 2, \lambda = 3)$ özel değerler için (71) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	88
Şekil 32. $B \sim Gamma(\omega = 2, \lambda = 3)$ özel değerler için (71) denkleminin varyansının çözüm davranışı	89
Şekil 33. $B \sim Gamma(\omega = 2, \lambda = 3)$ özel değerler için (71) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	90

Şekil 34. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (76) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	93
Şekil 35. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (76) denkleminin varyansının çözüm davranışı	94
Şekil 36. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (76) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	95



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

N	: Doğal Sayılar
Z	: Tam Sayılar
$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar
$n!$	: Faktöriyel
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı Değildir
∞	: Sonsuz
$\lim$	: Limit Fonksiyonu
$\Gamma(p)$	: Gamma Fonksiyonu
$\beta(\alpha, \beta)$	: Beta Fonksiyonu
$E_\alpha(x)$	: Bir Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$E_{\alpha, \beta}(x)$	: İki Parametrelili Mittag-Leffler Fonksiyonu
$Erf(x)$	: Hata Fonksiyonu
${}^{RL}_a D_t^\alpha f(t)$	: Riemann- Liouville Kesirli Türev
${}^{GL}_a D_t^\alpha f(t)$	: Grünwald- Letnikov Kesirli Türev
${}^C_a D_t^\alpha f(t)$	: Caputo Kesirli Türev
$(D_a^\alpha f)(t)$	: Conformable Sol Kesirli Türevi
$({}^b_a D f)(t)$	: Conformable Sağ Kesirli Türevi
${}^{ABR}_b D_t^\alpha f(t)$	: Riemann Anlamında Atangana- Baleanu Türevi
${}^{ABC}_a D_t^\alpha f(t)$	: Caputo Türevine Bağlı Atangana-Baleanu Türevi
A_n	: Adomian Polinomları
L	: Lineer Operatör
L^{-1}	: İntegral Operatörü
N	: Lineer Olmayan Operatör
$y(t)$	: Denklemin Çözümü
$f_X(x)$	: Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$E(X)$	: Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri
$E(X^n)$	: Rastgele Değişkenin n. Dereceden Momenti
$Var(X)$	: Rastgele Değişkenin Varyansı
std	: Standart Sapma
$M_X(t)$	: Rastgele Değişkenin Moment Çıkaran Fonksiyonu

ADM : Adomian Ayrıştırma Yöntemi
LADM : Laplace-Adomian Ayrıştırma Yöntemi
RPS : Rezidual Kuvvet Serisi Metodu



1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı

Fizik, mühendislik, biyoloji, ekonomi vb. birçok alanda uygulaması olan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çoğunlukla analitik çözümleri yoktur. Bu alanlardaki birçok problem matematiksel olarak modellenen bu problemlerin, diferansiyel denklem olarak ifade edildikten sonra yaklaşık analitik çözümlerini bulmak için Adomian Ayırıştırma Yöntemi'nin kullanılması başka yöntemlere gerek kalmadan en doğru çözüme hızla ulaşmayı sağlar. Bu çalışmanın amacı, kesir mertebeden türev tanımlarını incelemek, Adomian Ayırıştırma Yöntemi'nin oluşum süreci hakkında bilgi vermek ve yöntemin uygulanışını göstermektir. Ayrıca, Rezidual Kuvvet Serisi ve Laplace- Adomian Ayırıştırma Yöntemi hakkında da bilgi verilecek olup uygulaması gösterilecektir. Katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek rastgele hâle getirilen kesir mertebeden adi diferansiyel denklemlere Adomian Ayırıştırma Yöntemi; kısmî diferansiyel denklemlere ise Rezidual Kuvvet Serisi ve Laplace-Adomian Ayırıştırma Yöntemi uygulanacak, yaklaşık analitik çözümlerinin olasılık karakterleri incelenecek, parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek çözümlerin beklenen değeri, varyansı ve güven aralığı bulunarak MATLAB (2013a) ve MAPLE 13'de çizilen grafiklerin davranışları incelenecektir.

Türk ve uluslararası literatürde, Adomian Ayırıştırma Yöntemi'nin kesir mertebeden adi ve kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması var olup rastgele kesir mertebeden adi ve kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmamıştır. Elektrokimya, biyoloji, fizik, biyomühendislik, mekatronik-mekanik gibi mühendisliğin ve matematiğin birçok problemi diferansiyel denklem olarak ifade edildiğinden, bu yöntemin kullanılmasının daha hızlı ve yaklaşık analitik çözüm elde edilmesine yönelik olarak yeni bir bakış açısı getireceği düşünülmektedir.

1.2. Literatür

Türev kavramı, matematik, fizik, kimya, biyoloji ve ekonomi gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Bir fonksiyonda bağımlı değişkenin değişiminin, bağımsız değişkendeki değişime oranı türev olarak ifade edilmektedir. Türev genel olarak, anlık değişim oranı, ortalama değişim oranlarının limiti, bir fonksiyonun bir noktasındaki teğet doğrusunun eğimi veya hız olarak ele alınmaktadır (Bingöbalı, 2013; Zandieh, 2000). Türev kavramını ilk olarak Isaac Newton kullanmış, L'Hospital ve Leibniz gibi bilim

insanları da bu alanda çalışmalar yapmıştır. Newton, L'Hospital ve Leibniz türev alanında çalışmalar yaparken türev işleminde dereceyi 1 olarak almışlardır. Bir fonksiyonun tam sayı mertebeden türevlerinin nasıl alındığı bilinirken; kesir mertebeden yani $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ inci mertebeden türevinin alınıp alınamayacağı merak konusu olmuştur. Kesir mertebeden türev kavramı 300 yıldan uzun süredir matematikçilerin ilgi odağı olmuş, bu alandaki ilk fikirler ise 1695 yılında ortaya çıkmaya başlamıştır. L'Hospital ve Leibniz arasında geçen yazışmalarda kesir mertebeden türev hesabından bahsedildiği görülmektedir. Literatürde birden çok kesir mertebeden türev tanımı vardır. İlk kez Leibniz ile başlayan kesir mertebeden türev çalışmaları, Riemann, Grünwald, Letnikov, Liouville, Caputo, Euler, Abel, Fourier, Kobel, Erdelyi, Hadamard, Laplace, Caputo ve Atangana Baleanu gibi başlıca matematikçiler ile giderek zenginleşmiştir.

Son yıllarda kesir mertebeden türev üzerine çok sayıda çalışma yapılmış olup bunun sebebi; kesir mertebeden türevin tam sayılı mertebeden türeve göre birçok avantajının olmasıdır. Tıp, elektrokimya, biyoloji, fizik, biyomühendislik, mekatronik-mekanik gibi mühendisliğin ve matematiğin birçok uygulamalı alanında, fiziksel anlamda tam sayılı mertebeden türevlerin ifade edilemediği yerlerde kesir mertebeden türevler hesaplamayı kolaylaştırır. Var olan birçok kesir mertebeden türev tanımı kullanılırken problemin çeşidine göre en uygun olanı seçilerek en doğru ve yaklaşık çözüm elde edilir.

Fizik, mühendislik, biyoloji, ekonomi vb. birçok alanda uygulaması olan lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çoğunlukla analitik çözümleri yoktur. Bu alanlardaki pek çok problem matematiksel olarak modellenenebilir. Bu modellerin pek çoğu lineer olmayan adi ve kısmi diferansiyel denklemler yardımıyla ifade edildiğinden bu tür denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerini elde etmek için literatürde geliştirilmiş olan pek çok yöntem mevcuttur. Son zamanlarda modellerin geçmiş zamandaki davranışlarını incelemek için kesir mertebeden türevli denklemler yoğun bir şekilde kullanılmaktadır. Kesir mertebeden türevli denklemleri çözmek için çok sık kullanılan yöntemlerden biri de Adomian Ayrıştırma Yöntemi'dir.

Adomian Ayrıştırma Yöntemi ilk olarak 1980'lerin başında George Adomian tarafından tanıtılmıştır. Adi, kısmî, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için bu yöntemi geliştiren Adomian Amerikalı bir matematikçidir. Adomian, bu yöntemi sınır ve başlangıç şartı olan, deterministik, stokastik, lineer ve lineer olmayan problemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak amacıyla uygulamıştır. Yöntem, lineer olmayan Ny terimlerinin ayrıştırılmasıyla oluşturulur. $Ny = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanır. Burada, A_n ler Adomian polinomlarıdır. Her A_n , $n > 0$ için $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n$ bağımsız değişkenlerine

bağılıdır. Bu polinomların elde edileceği formüller Adomian tarafından geliştirilmiştir. Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerinin Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile bulunması yukarıda sayılan pek çok alanda çözümün hızlı ve daha güvenilir olmasını sağlayacaktır.

1.3. Bazı Önemli Fonksiyonlar

1.3.1. Gamma Fonksiyonu (Γ)

Kesirli hesabın temel işlevlerinden biri, $n!$ ve n 'nin tam sayı olmayan ve hatta kompleks değerler almasına izin veren Euler'in gamma fonksiyonudur (Γ).

$\Gamma(p)$ Gamma fonksiyonu $Re(p) > 0$ için,

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$$

integrali ile tanımlanır. Faktöriyel fonksiyonunun genelleştirilmesi ile Gamma fonksiyonu elde edilir (Podlubny, 1999).

Gamma fonksiyonunun en temel özelliklerinden biri aşağıdaki fonksiyonel denklemi sağlamasıdır:

$$\Gamma(p + 1) = p \cdot \Gamma(p), \quad (1)$$

(1) eşitliği kolayca kanıtlanabilir:

$$\Gamma(p + 1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = [-e^{-x} x^p]_{x=0}^{x=\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = p \cdot \Gamma(p)$$

Açıkça, $\Gamma(1) = 1$ ve (1) ifadesi kullanılarak $p = 1, 2, 3, \dots$ için,

$$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1 = 1!$$

$$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1! = 2!$$

$$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3!$$

...

$$\Gamma(p + 1) = p \cdot \Gamma(p) = p(p - 1)! = p!$$

eşitliğinin var olduğu görülür (Podlubny, 1999).

Gamma fonksiyonu $Re(p) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^p}{p(p+1)\dots(p+n)}$$

limiti ile ifade edilebilir (Podlubny, 1999).

Gamma fonksiyonu için $n \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}$$

eşitliği mevcuttur.

Sıklıkla kullanacağımız $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ eşitliği şu şekilde ispatlanır:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{-\frac{1}{2}} dx \quad (2)$$

(2) ifadesinde $x = y^2$ ve $x = z^2$ dönüşümü yapılırsa,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy \quad (3)$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^\infty e^{-z^2} dz \quad (4)$$

(3) ve (4) ifadeleri elde edilir. (3) ve (4) ifadeleri taraf tarafa çarpılırsa,

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(y^2+z^2)} dy dz$$

eşitliği elde edilir. $y^2 + z^2 = \rho^2$ olup buradan kutupsal koordinatlara geçilirse,

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \pi$$

olup

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

olarak hesaplanır (Değerli, K., 2018). Bazı Gamma fonksiyonu değerleri hesaplanırsa Tablo 1.'deki değerler bulunur:

Tablo 1. Gamma fonksiyonunun bazı değerleri.

Gamma Fonksiyonu	Değeri
$\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right)$	$\frac{4}{3}\sqrt{\pi}$
$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)$	$-2\sqrt{\pi}$
$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$	$\sqrt{\pi}$
$\Gamma(1)$	1
$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
$\Gamma(2)$	1
$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$	$\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(3)$	2
$\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)$	$\frac{15}{8}\sqrt{\pi}$
$\Gamma(4)$	6
$\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)$	$\frac{105}{16}\sqrt{\pi}$

1.3.2. Beta Fonksiyonu (β)

Beta fonksiyonu, $Re(\alpha) > 0, Re(\beta) > 0$ olup,

$$\beta(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

olarak tanımlanır. Beta fonksiyonunun simetri özelliği vardır. $\beta(\alpha, \beta) = \beta(\beta, \alpha)$ dir.

Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasındaki ilişki,

$$\beta(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

şeklindedir (Podlubny, 1999).

1.3.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu (E)

Mittag-Leffler fonksiyonu,

$$E_{\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad (\alpha > 0)$$

olarak tanımlanır. İki parametrelili fonksiyon için Mittag-Leffler fonksiyonu ise;

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0)$$

ile ifade edilir (Podlubny, 1999).

1.3.4. Hata Fonksiyonu (Erf)

$Erf(x)$ ile gösterilen hata fonksiyonu,

$$Erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

olarak tanımlanır. Hata fonksiyonuna ilişkin bazı eşitlik ve değerler şu şekildedir:

- 1) $Erf(x) = 1 - Erfc(x)$
- 2) $Erf(-x) = -Erf(x)$
- 3) $Erf(0) = 0$
- 4) $Erf(\infty) = 1$

(Miller ve Ross, 1993).

1.4. Kesir Mertebeden Türev

Literatürde en sık kullanılan kesir mertebeden türevlerle ilgili tanım ve teoremler aşağıda ayrıntılı olarak verilmektedir. Bu tez çalışması kapsamında Euler kesirli türev tanımı kullanılmıştır.

1.4.1. Sık Kullanılan Kesirli Mertebeden Türev Tanımları

1.4.1.1. Euler Kesirli Türev Tanımı

$$\frac{d^n t^m}{dt^n} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)t^{(m-n)}$$

ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{d^n t^m}{dt^n} \cdot \frac{1}{t^{(m-n)}} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) \quad (5)$$

elde edilir. Gamma fonksiyonunun $\Gamma(p+1) = p \cdot \Gamma(p)$ özelliği kullanılırsa,

$$\Gamma(m+1) = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1)\Gamma(m-n+1) \quad (6)$$

eşitliği bulunur. (6) ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) \quad (7)$$

eşitliği elde edilir. (5) denklemi (7)'de yerine yazılıp düzenleme yapıldığında,

$$\frac{d^n t^m}{dt^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} t^{(m-n)}$$

Euler kesirli türev tanımı elde edilir (Karcı, A., 2015).

1.4.1.2. Grünwald-Letnikov Kesirli Türev Tanımı

$k = 1, 2, 3, \dots, m+1$ ve $m < p < m+1$ olmak üzere Grünwald-Letnikov kesirli türev,

$${}^G L D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^s \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+s+1)} \int_a^t (t-\tau)^{s-p} f^{(s+1)}(\tau) d\tau$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999).

1.4.1.3. Riemann-Liouville Kesirli Türev Tanımı

$k - 1 \leq p < k$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli türev,

$${}^{RL}D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau$$

olarak tanımlanır (Podlubny, 1999).

1.4.1.4. Caputo Kesirli Türev Tanımı

$n - 1 \leq \alpha < n$ olmak üzere,

$${}_a^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p+1-n}}$$

olarak tanımlanır (Kilbas vd., 2006).

1.4.1.5. Conformable Kesirli Türev Tanımı

Türevin temel limit tanımına bağlı olarak, $0 < \alpha \leq 1$ ve $t > 0$ olmak üzere $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α . mertebeden Conformable sol kesirli türevi,

$$(D_\alpha^a f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon(t-a)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır. $\alpha = 0$ alınırsa,

$$(D_\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

ifadesi elde edilir.

$0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $f: [b, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun α . mertebeden Conformable sağ kesirli türevi,

$$({}^b D_\alpha f)(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(t+\varepsilon(b-t)^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

olarak tanımlanır (Abdeljawas, T., 2015).

1.4.1.6. Atangana- Baleanu Kesirli Türev Tanımı

Riemann-Liouville anlamında Atangana- Baleanu türevi, $f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere,

$${}^{ABR}_b D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{d}{dt} \int_b^t f'(x) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx$$

olarak tanımlanır (Yetim, 2019).

$f \in H^1(a, b)$, $b > a$ ve $\alpha \in [0, 1]$ olmak üzere Caputo türevine bağlı Atangana- Baleanu yeni kesirli türevi,

$${}^{ABC}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(x) E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] dx$$

olarak tanımlanır. Burada,

$$E_\alpha \left[-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\alpha \frac{(t-x)^\alpha}{1-\alpha} \right)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

ifadesi Mittag-Leffler fonksiyonudur ve

$$B(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

eşitliği mevcuttur (Atangana, B., 2016).

1.4.2. Kesir Mertebeden Türevin Özellikleri

1.4.2.1. Lineerlik Özelliği

Kesir mertebeden türevler de tam sayı mertebeden türevlere benzer lineer özelliğe sahiptir. a ve b sabit sayılar olmak üzere,

$$D^m f(t) = (af(t) + bg(t)) = aD^m f(t) + bD^m g(t)$$

ifadesi lineerliği ifade eder (Değerli, K., 2018).

1.4.2.2. Homojenlik Özelliği

Kesir mertebeden türevler de tam sayı mertebeden türevlere benzer homojenlik özelliğine sahiptir. C herhangi bir sabit olmak üzere,

$$D^m[Cf(t)] = C[D^m f(t)]$$

ifadesi homojenliği ifade eder (Değerli, K., 2018).

1.4.2.3. Birleşme Özelliği

D^m , $k - 1 < m < k$ ve D^n , $p - 1 < n < p$ olmak üzere kesirli türevlerinin birleşimi,

$$D^m(D^n f(t)) = D^n(D^m f(t)) = D^{m+n} f(t)$$

dir (Değerli, K., 2018).

1.4.2.4. Kesir Mertebeden Türevler İçin Leibniz Kuralı

İki fonksiyonun çarpımının türev değerini bulmak için kolaylık sağlayan Leibniz Kuralı, kesir mertebeden türevi bilinen bir fonksiyon ile polinomun çarpımının kesir mertebeden türevini hesaplamak için oldukça elverişlidir. $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonlarının türevlerinin sürekli olduğu aralık $[a, t]$ ise Leibniz Kuralı,

$$D^m(g(t)f(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} g^{(k)}(t) D^{m-k} f(t)$$

ile ifade edilir (Değerli, K., 2018).

1.4.2.5. Bileşke Fonksiyonunun Kesir Mertebeden Türevleri

$g(t) = F(h(t))$ bileşke fonksiyonunun α . mertebeden kesirli türevi,

$$D^\alpha F(h(t)) = \frac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{k!(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum_{m=1}^k F^{(m)}(h(t)) \sum_{r=1}^k \frac{1}{a_r!} \left(\frac{h^{(r)}(t)}{r!} \right)^{a_r}$$

Burada toplam, $\sum_{r=1}^k = r a_r = k$ ve $\sum_r^k = a_r = m$ olmak üzere, $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ nın pozitif tam sayı değeri üzerinden alınır (Değerli, K., 2018).

1.5. Adomian Ayrıştırma Yöntemi

$$L(y) + R(y) + N(y) = f(t)$$

adi diferansiyel denklem olsun. Burada L en yüksek mertebeden terslenebilir türev operatörü, R lineer diferansiyel operatör, N lineer olmayan operatör ve f, y 'den bağımsız bir terimdir. y ise denklemin çözümüdür.

Adomian Ayrıştırma Yöntemi'nin temel amacı ters operatörü uygulamaktır. Çözümü veren,

$$Ly(t) = f(t) - Ry(t) - N(y(t))$$

ifadesinin her iki tarafına L^{-1} uygulanırsa,

$$y(t) = \psi_0(t) + L^{-1}f(t) - L^{-1}Ry(t) - L^{-1}N(y(t))$$

eşitliği elde edilir ve ψ_0 , başlangıç koşullarının kullanılmasıyla kaynaklanan terimleri içerir.

$$\psi_0(x) = \begin{cases} y(0), & L = \frac{d}{dt} \\ y(0) + ty'(0), & L^2 = \frac{d^2}{dt^2} \\ y(0) + ty'(0) + \frac{1}{2}t^2y''(0), & L^3 = \frac{d^3}{dt^3} \\ y(0) + ty'(0) + \frac{1}{2}t^2y''(0) + \frac{1}{3!}t^3y'''(0), & L^4 = \frac{d^4}{dt^4} \end{cases}$$

ya da

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = \psi_0(t) + L^{-1}f(t) - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \quad (8)$$

olup, (8) ifadesindeki $A_n(t)$ Adomian polinomlarıdır.

Eğer $y_0(t)$, $\psi_0(t) + L^{-1}f(t)$ olarak tanımlanırsa, kalan bileşenler aşağıdaki denklemler ile belirlenir:

$$y_0(t) = \psi_0(t) + L^{-1}f(t)$$

$$y_k(t) = -L^{-1}Ry_{k-1}(t) - L^{-1}A_{k-1}(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

(Keskin, Ü., 2019).

A_n Adomian polinomları,

$$A_0 = f(y_0)$$

$$A_1 = y_1 \frac{df(y_0)}{dy_0}$$

$$A_2 = y_2 \frac{df(y_0)}{dy_0} + \frac{y_1^2}{2!} \frac{d^2f(y_0)}{dy_0^2}$$

$$A_3 = y_3 \frac{df(y_0)}{dy_0} + y_1 y_2 \frac{d^2f(y_0)}{dy_0^2} + \frac{y_1^3}{3!} \frac{d^3f(y_0)}{dy_0^3}$$

$$A_4 = y_4 \frac{df(y_0)}{dy_0} + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) \frac{d^2f(y_0)}{dy_0^2} + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \frac{d^3f(y_0)}{dy_0^3} + \frac{y_1^4}{4!} \frac{d^4f(y_0)}{dy_0^4}$$

...

şeklinde elde edilebilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ parametre olmak üzere,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$$

fonksiyonunun çözüm serisi,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$$

ve lineer olmayan

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$$

terimi parametrik olarak yazılabilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ noktasında $f(y)$ fonksiyonu analitik olmak şartıyla Adomian polinomları,

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} f\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i\right) \right]_{\lambda=0}, n \geq 0 \quad (9)$$

(9) formülünden elde edilebilir (Wazwaz, 2002).

1.5.1. Laplace Dönüşümü İle Birleştirilmiş Adomian Ayrıştırma Yöntemi

$y(x, 0) = f(x)$ başlangıç koşulu ile $Fy(x, t) = g(x, t)$ kısmî veya adi diferansiyel denklemi verilsin. Burada F lineer ve lineer olmayan terimler içeren diferansiyel operatördür.

$$L_t y(x, t) + Ry(x, t) + Ny(x, t) = g(x, t)$$

denklemi yazılabilir.

$L_t = \frac{\partial}{\partial t}$ olmak üzere R , x e göre kısmî türevler içeren lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve g , y den bağımsız homojen olmayan bir terimdir.

$L_t y(x, t)$ için çözüm,

$$L_t y(x, t) = g(x, t) - Ry(x, t) - Ny(x, t) \quad (10)$$

denklemdir.

$\mathcal{L}$ Laplace dönüşümü Pierre-Simon Laplace tarafından keşfedilen bir integral dönüşümüdür. Adi ve kısmî diferansiyel denklemleri çözmek için güçlü ve kullanışlı bir yöntemdir.

Tanım 1.5.1.1. Her $t \geq 0$ için $f(t)$ fonksiyonu verildiğinde; f in Laplace dönüşümü F olarak tanımlansın. Bu durumda,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

dır.

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Tanım 1.5.1.2. Sürekli bir $f(t)$ fonksiyonu verildiğinde $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ ise $f(t)$ ye $F(s)$ nin ters Laplace dönüşümü denir ve

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

ile gösterilir.

Laplace dönüşümü türev özelliklerine sahiptir:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-1-k} f^{(k)}(0)$$

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s)$$

Laplace Adomian Ayrıştırma Yöntemi (10) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümünün uygulanması ile oluşur.

$$\mathcal{L}\{L_t y(x, t)\} = \mathcal{L}\{g(x, t)\} - \mathcal{L}\{Ry(x, t)\} - \mathcal{L}\{Ny(x, t)\}$$

$$sy(x, s) - y(x, 0) = \mathcal{L}\{g(x, t) - Ry(x, t) - Ny(x, t)\}$$

$$g(x, t) = 0 \text{ homojen olup,}$$

$$y(x, s) = \frac{f(x)}{s} - \frac{1}{s} \mathcal{L}\{Ry(x, t) + Ny(x, t)\}$$

denklemini elde edilir ve bu denkleme ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$y(x, t) = f(x) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L}\{Ry(x, t) + Ny(x, t)\} \right] \quad (11)$$

elde edilir.

Adomian Ayrıştırma Yöntemi $y(x, t)$ ile verilen bir seri çözüm üretir:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) \quad (12)$$

$$Ny(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, \dots, y_n) \quad (13)$$

(13) Adomian polinomları dizisidir. (11), (12) ve (13) eşitlikleri kullanılarak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) = f(x) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n(y_0, y_1, \dots, y_n) \} \right] \quad (14)$$

elde edilir. (14) denkleminde aşağıdaki formüller çıkarılır:

$$\begin{cases} y_0(x, t) = f(x) \\ y_{n+1}(x, t) = -\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_n(x, t) + A_n(y_0, y_1, \dots, y_n) \} \right], n = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (15)$$

(15) denklemi kullanılarak yaklaşık çözüm elde edilir:

$$y(x, t) \approx \sum_{n=0}^k y_n(x, t)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^k y_n(x, t) = y(x, t)$$

(Gonzalez ve Gaxiola, 2017).

1.6. Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi

$t \geq t_0$ ve $0 \leq m - 1 \leq \alpha \leq m$ olmak üzere kuvvet serisi açılımı

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^{n\alpha} = c_0 + c_1 (t - t_0)^{\alpha} + c_2 (t - t_0)^{2\alpha} + \dots$$

olarak ifade edilir. $t = t_0$ olduğunda kesirli kuvvet serisi olarak tanımlanır.

Teorem:

$t \geq 0$ olmak üzere, kesirli kuvvet serisi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^{n\alpha}$ için aşağıdaki üç durum sağlanır:

1. Seri sadece $t = 0$ olduğunda yakınsaktır.
2. Her $t \geq 0$ için seri yakınsaktır.
3. R kesirli kuvvet serisinin yakınsaklık çapını göstermek üzere $t \geq R$ için serinin ıraksak ve $0 \leq t < R$ için serinin yakınsak olduğu bir pozitif R reel sayısı vardır.

Birinci durumda $R = 0$ ve ikinci durumda ise $R = \infty$ dur (El-Ajou vd., 2013).

Teorem: f fonksiyonunun t_0 da

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (t - t_0)^{n\alpha}, \quad 0 < m - 1 < \alpha \leq m, \quad t_0 \leq t < t_0 + R$$

şeklinde kesirli kuvvet serisine sahip olduğunu varsayalım. Eğer $n = 0, 1, 2, \dots$ için $f(t) \in C[t_0, t_0 + R)$ ve $D_{t_0}^{n\alpha} f(t) \in C(t_0, t_0 + R)$ olup denklemdeki c_n katsayıları,

$$c_n = \frac{D_{t_0}^{n\alpha} f(t_0)}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

olarak elde edilir. Burada,

$$D_{t_0}^{n\alpha} = D_{t_0}^{\alpha} \cdot D_{t_0}^{\alpha} \cdot D_{t_0}^{\alpha} \dots D_{t_0}^{\alpha} \quad (n \text{ defa})$$

elde edilir (El-Ajou vd., 2013).

Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi'nin temel fikrini göstermek için bir nonlinear diferansiyel denklem ele alalım.

$$f_0(x) = y(x, 0) = f(x)$$

başlangıç koşulu ile verilen

$$D_t^{n\alpha} y(x, t) + R[x]y(x, t) + N[x]y(x, t) = g(x, t), \quad t > 0, x \in \mathbb{R},$$

$$n - 1 < n\alpha \leq n,$$

denkleminde $R[x]$ x de genel lineer operatör, $N[x]$ x de genel bir nonlinear operatör ve $g(x, t)$ sürekli bir fonksiyondur.

Bu yöntem,

$$f_{n-1}(x) = D_t^{(n-1)\alpha} y(x, 0) = h(x)$$

denkleminin çözümünü $t = 0$ başlangıç noktasında kesirli kuvvet serisi açılımı için çözüm önerir.

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad x \in I, \quad 0 \leq t < R \quad (16)$$

$y(x, t)$ çözümü (16) şeklindedir. Sonraki basamakta $y(x, t)$ nin k . kesik serisi olan

$$y_k(x, t) = \sum_{n=0}^k f_n(x) \frac{t^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)},$$

$$(0 < \alpha \leq 1, x \in I, 0 \leq t < R, k \in 1, 2, 3, \dots)$$

olarak elde edilir. $y(x, t)$ in 1. RPS yaklaşık çözümünü bulmak için $y_k(x, t)$ ifadesinde $k = 1$ için;

$$y_1(x, t) = f(x) + f_1(x) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$$

ifadesi elde edilir.

$y_k(x, t)$ ifadesinin kullanılacağı Res fonksiyonu,

$$Res(x, t) = D_t^{n\alpha} y(x, t) + R[x]y(x, t) + N[x]y(x, t) - g(x, t)$$

şeklinde ifade edilir ve k . rezidual fonksiyonu Res_k ise;

$$Res_k(x, t) = D_t^{n\alpha} y_k(x, t) + R[x]y_k(x, t) + N[x]y_k(x, t) - g(x, t),$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots)$$

olarak elde edilir.

$k = 1$ için $Res_1(x, t)$ ifadesi yazılır. Bulunan bu ifade 1. RPS yaklaşık çözümü olan $y_1(x, t)$ nin bulunmasını sağlar. Sonraki basamaklarda $k = 1, 2, 3, \dots, n$ için her biri farklı $f_k(x)$ ler elde edilir. $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ için ilk basamaktan farklı olacak şekilde

$$D_t^{(n-1)\alpha} Res_k(x, t) = 0,$$

$$0 < \alpha \leq 1, x \in I, 0 \leq t < R, n = 1, 2, 3, \dots, k$$

ifadesi RPS metodunun önemli bir basamağıdır. Yani ikinci basamakta her tarafın α ya göre birinci türevi alınıp $t = 0$ için ifade sıfıra eşitlenir. Üçüncü adımda her tarafın α ya göre ikinci türevi alınır ve bu şekilde devam edilerek önce f_k değerleri sonra da y_k yaklaşık çözümleri bulunur (Değerli, K., 2018)

1.7. Bazı Olasılık Dağılımları

1.7.1. Sürekli Düzgün Dağılım

X rastgele değişkeni $[a, b]$ kapalı aralığında düzgün dağılıma sahip olduğunda olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x) = f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir (Khaniyev vd., 2017).

1.7.2. Üstel Dağılım

Negatif olmayan değerler alan sürekli X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde olan X rastgele değişkenine $\lambda > 0$ parametrelili üstel dağılıma sahiptir denir. $X \sim \text{üstel}(\lambda)$ ile gösterilir (Khaniyev vd., 2017).

1.7.3. Normal Dağılım

X sürekli rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}; -\infty < x < \infty, \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

şeklinde ise X rastgele değişkeni (μ, σ^2) parametrelili normal dağılıma sahiptir. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ şeklinde gösterilir. Bazen bu dağılıma Gauss dağılımı da denir (Khaniyev vd., 2017).

1.7.4. Gamma Dağılımı

Tüm $p > 0$ değerleri için tanımlanan

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

fonksiyonuna Euler'in gamma fonksiyonu denir. Gamma fonksiyonu,

$$\Gamma(p) = (p - 1)!, (p = 1, 2, 3, \dots)$$

ve

$$\Gamma(p + 1) = p\Gamma(p); (p > 0)$$

özelliklerine sahiptir. Ayrıca $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ dir.

X negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x; \omega, \lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda^\omega}{\Gamma(\omega)} x^{\omega-1} e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \omega, \lambda > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde ise X rastgele değişkenine (ω, λ) parametrelili gamma dağılımına sahiptir denir ve $X \sim \text{gamma}(\omega, \lambda)$ şeklinde gösterilir (Khaniyev vd., 2017).

1.7.5. Weibull Dağılımı

X negatif olmayan değerler alan sürekli bir rastgele değişken olsun. X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_X(x; \alpha, \lambda) = \begin{cases} \alpha \lambda x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, & x \geq 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

ise X rastgele değişkenine (α, λ) parametrelili Weibull dağılımına sahiptir denir (Khaniyev vd., 2017).

1.7.6. Beta Dağılımı

Bütün $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ değerleri için tanımlanan

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} dx$$

fonksiyonuna beta fonksiyonu denir. Ayrıca gösterilebilir ki $B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$ ve

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}; \alpha, \beta > 0$$

dır.

Yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, & 0 \leq x \leq 1, \alpha, \beta > 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olan X rastgele değişkeni (α, β) parametrelili beta dağılımına sahiptir denir ve $X \sim \text{beta}(\alpha, \beta)$ şeklinde gösterilir (Khaniyev vd., 2017).

1.7.7. Cauchy Dağılımı

Yoğunluk fonksiyonu

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}; x \in \mathbb{R}, a > 0$$

olan X rastgele değişkeni Cauchy dağılımına sahiptir denir (Khaniyev vd., 2017).

1.8. Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri, Varyansı ve Momentleri

1.8.1. Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri

(Ω, ξ, P) olasılık uzayında, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ bir rastgele değişken ve $F_X(x)$ bu rastgele değişkenin dağılım fonksiyonu olsun. Eğer,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x) < \infty$$

ise

$$\int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x)$$

sayısına X rastgele değişkeninin beklenen değeri denir. X rastgele değişkeninin dağılımı mutlak sürekli sınıfa ait olduğunda X rastgele değişkeninin beklenen değeri şu şekilde ifade edilir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_X(x) < \infty$$

ise

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

dir.

Burada $f_X(x)$, X rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. $E(X)$ beklenen değeri X rastgele değişkeninin ortalaması olarak da ifade edilir (Khaniyev vd., 2017).

1.8.2. Rastgele Değişkenin Beklenen Değerin Temel Özellikleri

Rastgele değişkenlerin beklenen değerleri var ve sonlu ise beklenen değer şu özelliklere sahiptir:

1. $E(m) = m; m \in \mathbb{R}$
 2. $E(mX) = mE(X); m \in \mathbb{R}$
 3. $E(mX + n) = mE(X) + n; m, n \in \mathbb{R}$
 4. $E(mX + nY) = mE(X) + nE(Y); m, n \in \mathbb{R}$
 5. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
 6. X ve Y bağımsız değişkenler olmak üzere $E(XY) = E(X)E(Y)$ dir.
- (Khaniyev vd., 2017).

1.8.3. Rastgele Değişkenin Varyansı

$E[X - E(X)]^2$ ifadesine yani rastgele değişkenin değerinin ortalamadan sapmalarının karelerinin beklenen değerine, rastgele değişkenin varyansı denir (Demir, H., 2007).

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

olarak ifade edilir.

Varyansın pozitif karekökü standart sapmayı verir ve $std(y(t))$ ile gösterilir.

$$std(y(t)) = \sqrt{Var(X)}$$

dır (Demir, H., 2007).

1.8.4. Rastgele Değişkenin Varyansının Temel Özellikleri

1. $Var(m) = 0; m \in \mathbb{R}$
2. $Var(mX) = m^2 Var(X); m \in \mathbb{R}$
3. Her X rastgele değişkeni için $Var(X) \geq 0$ dır.
4. Eğer X ve Y iki bağımsız rastgele değişken ise;

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

dir.

5. Eğer X ve Y iki bağımsız rastgele değişken ise;

$$\begin{aligned} Var(X - Y) &= Var(X) + Var[(-1)Y] \\ &= Var(X) + (-1)^2 Var(Y) \\ &= Var(X) + Var(Y) \end{aligned}$$

dir.

1.8.5. Rastgele Değişkenin Momentleri

$E(|X|^k) < \infty$ ise $\mu_k = E[(X - a)^k]$ sayısına X rastgele değişkeninin $a = E(X)$ sayısına göre k . merkezi momenti denir ($k \geq 0$) (Khaniyev vd., 2017).

Ortalamaya göre momentler; merkezi momentler olarak adlandırılır ve $E[(X - E(X))^k]$ biçiminde gösterilir (Demir, H., 2007).

X sürekli rastgele değişkeni için eğer $E(e^{tX}) < \infty$ ise,

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tX} f_X(x) dx$$

elde edilir (Khaniyev vd., 2017).

2. UYGULAMALAR

Örnek-2. 1. (Rayleigh Denklemi)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - \mu \left(1 - \frac{1}{3} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right) \frac{dy}{dt} + y = 0 \quad (17)$$

başlangıç koşulu $y(0) = A$, $y'(0) = 0$, $\mu \sim N(a, \sigma^2)$, μ normal dağılıma ve $A \sim \text{Gamma}(\omega, \lambda)$ parametrelili gamma dağılımına sahip rastgele değişkenler olmak üzere (17) Rayleigh Denkleminin çözümünü elde ediniz.

Çözüm:

(17) ifadesi düzenlenirse,

$$y'' = -y + \mu \left(1 - \frac{1}{3} (y')^2 \right) y' \quad (18)$$

$L = \frac{d^2}{dt^2}$ olmak üzere, (18) adi diferansiyel denkleminde eşitliğin her iki tarafına L^{-1} işlemi uygulanırsa,

$$L^{-1} y'' = -L^{-1} y + \mu L^{-1} \left(1 - \frac{1}{3} (y')^2 \right) y'$$

$$y_{n+1} = -L^{-1} y_n + \mu L^{-1} \left(1 - \frac{1}{3} (y_n')^2 \right) y_n'$$

$$y_{n+1} = -L^{-1} y_n + \mu L^{-1} (A_n y_n')$$

elde edilir. Burada A_n ler Adomian polinomlarıdır.

$$A_n = 1 - \frac{1}{3} (y_n')^2$$

$$y_0 = y(0) + t y'(0)$$

$$y_0 = A$$

$$A_0 = f(y_0) = 1 - \frac{1}{3}(y_0')^2 = 1$$

$n = 0$ için;

$$y_1 = -L^{-1}y_0 + \mu L^{-1}(A_0 y_0')$$

$$y_1 = -\frac{At^2}{2}$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0)$$

$$A_1 = -\frac{At^2}{2} \left(-\frac{2}{3}(y_0')y_0'' \right)$$

$$A_1 = 0$$

$n = 1$ için;

$$y_2 = -L^{-1}y_1 + \mu L^{-1}(A_1 y_1')$$

$$y_2 = -L^{-1} \left(-\frac{At^2}{2} \right) + \mu L^{-1}(0 \cdot (-At))$$

$$y_2 = \frac{At^4}{24}$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} f''(y_0)$$

$$A_2 = 0$$

$n = 2$ için;

$$y_3 = -L^{-1}y_2 + \mu L^{-1}(A_2 y_2')$$

$$y_3 = -L^{-1} \left(\frac{At^4}{24} \right) + \mu L^{-1} \left(0 \cdot \left(\frac{At^3}{6} \right) \right)$$

$$y_3 = -\frac{At^6}{720}$$

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad (19)$$

olmak üzere $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ değerleri (19)'da yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$y(t) = A - \frac{1}{2}At^2 + \frac{1}{24}At^4 - \frac{1}{720}At^6 + \dots \quad (20)$$

ifadesi elde edilir. (20) ifadesi düzenlenirse,

$$y(t) = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \dots\right) A \quad (21)$$

(21) çözümü elde edilir. X rastgele değişkeni gamma dağılıma sahip ise moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$$

ifadesinden $A \sim \text{Gamma}(\omega, \lambda)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[A] = \frac{\omega}{\lambda}$$

$$E[A^2] = \frac{\omega(\omega+1)}{\lambda^2}$$

olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için; beklenen değer in temel özellikleri kullanılırsa, (21) denkleminin beklenen değeri,

$$E[y(t)] = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \dots\right) E(A) \quad (22)$$

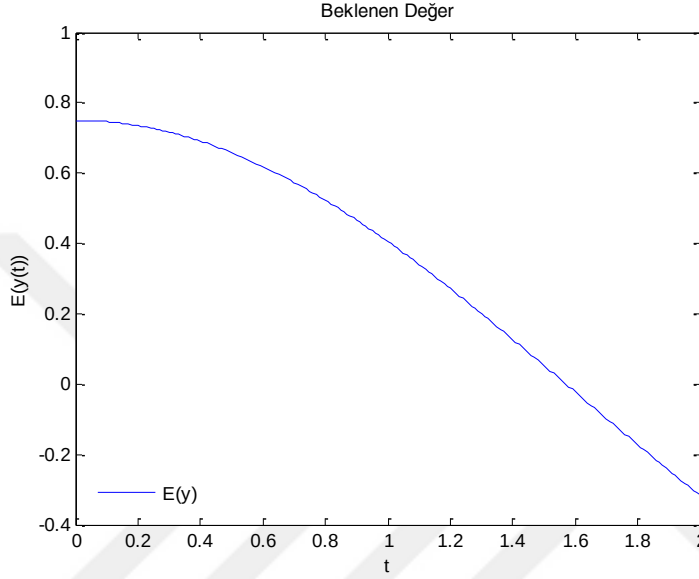
ifadesi elde edilir. Bulunan moment değeri, (22)'de yerine yazılırsa,

$$E[y(t)] = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \dots\right) \frac{\omega}{\lambda} \quad (23)$$

beklenen değer, (23) olarak bulunur. Özel olarak $A \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ seçilirse,

$$E[y(t)] = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \dots\right) \frac{3}{4}$$

ifadesi elde edilir. Beklenen değer, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 1.'deki grafik elde edilir.



Şekil 1. $A \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (21) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X, Y rastgele değişkeni için; varyansın temel özellikleri kullanılırsa, (21) denkleminin varyansı,

$$\text{Var}(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{\omega(\omega+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2 = \frac{\omega}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}[y(t)] = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \dots\right)^2 \text{Var}(A) \quad (24)$$

elde edilir. $\text{Var}(A)$ değeri, (24) ifadesinde yerine yazılırsa,

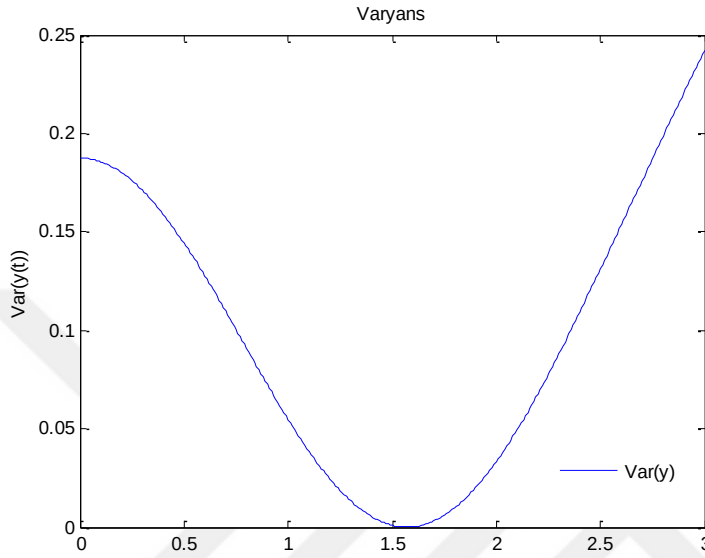
$$\text{Var}[y(t)] = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \dots\right)^2 \frac{\omega}{\lambda^2}$$

varyans değeri elde edilir. Özel olarak $A \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ seçilirse,

$$Var[y(t)] = \frac{3}{16} \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6 + \dots \right)^2$$

olarak bulunur.

Varyans, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 2.'deki grafik elde edilir.



Şekil 2. $A \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (21) denkleminin varyansının çözüm davranışı

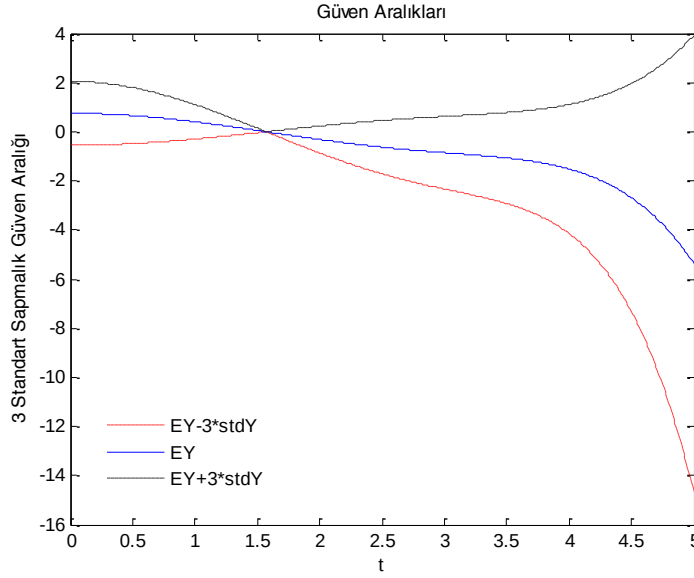
Standart sapma varyansın kareköküne eşittir.

$$std(y(t)) = \sqrt{Var(y(t))} \quad (25)$$

Rastgele değişkenlerin beklenen değerleri için güven aralıkları,

$$(E(y(t)) - K \cdot std(y(t)), E(y(t)) + K \cdot std(y(t))) \quad (26)$$

ifadesine eşittir ve bu standart sapmalar aracılığıyla elde edilebilir (Bekiryazıcı ve Hasımoğlu, 2021). (21) çözümü ele alındığında (0, 2.05) aralığı göz önüne alınırsa $K = 3$ için bu formül, gamma dağılımı gösteren rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değeri için yaklaşık %99 güven aralığı verir. Güven aralığı MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 3.'teki grafik elde edilir.



Şekil 3. $A \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (21) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-2. 2. (Van der Pol Denklemleri)

$$y'' + y - \varepsilon y' + \varepsilon y^2 y' = 0 \quad (27)$$

başlangıç koşulu $y(0) = A$, $y'(0) = 0$, $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$, ε normal dağılıma ve $A \sim \text{üstel}(\lambda)$ üstel dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere (27) Van der Pol denkleminin çözümünü elde ediniz.

Çözüm:

(27) ifadesi düzenlenirse,

$$y'' + y + \varepsilon y'(y^2 - 1) = 0$$

$$y'' = -y - \varepsilon y'(1 - y^2) \quad (28)$$

$L = \frac{d^2}{dt^2}$ olmak üzere, (28) adi diferansiyel denkleminde eşitliğin her iki tarafına L^{-1} işlemi uygulanırsa,

$$L^{-1}y'' = -L^{-1}y - \varepsilon L^{-1}y'(1 - y^2)$$

$$y_{n+1} = -L^{-1}y_n - \varepsilon L^{-1}(y_n' A_n)$$

elde edilir. Burada A_n ler Adomian polinomlarıdır.

$$y_0 = y(0) + ty'(0)$$

$$y_0 = A$$

$$A_0 = f(y_0) = 1 - A^2$$

$n = 0$ için;

$$y_1 = -L^{-1}y_0 - \varepsilon L^{-1}(y_0' \cdot A_0)$$

$$y_1 = -L^{-1}A - \varepsilon L^{-1}(0 \cdot (1 - A^2))$$

$$y_1 = -\frac{At^2}{2}$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0)$$

$$A_1 = -\frac{At^2}{2}(-2A) = A^2 t^2$$

$n = 1$ için;

$$y_2 = -L^{-1}y_1 - \varepsilon L^{-1}(y_1' \cdot A_1)$$

$$y_2 = -L^{-1}\left(-\frac{At^2}{2}\right) - \varepsilon L^{-1}((-At)(A^2 t^2))$$

$$y_2 = \frac{1}{24}At^4 + \frac{1}{20}\varepsilon A^3 t^5$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} f''(y_0)$$

$$A_2 = -2A\left(\frac{1}{24}At^4 + \frac{1}{15}\varepsilon A^3 t^5\right) - \frac{A^2 t^4}{4}$$

$n = 2$ için;

$$y_3 = -L^{-1}y_2 - \varepsilon L^{-1}(y_2' A_2)$$

$$y_3 = -\frac{At^6}{720} - \frac{\varepsilon A^3 t^7}{840} - \varepsilon \left(-\frac{1}{4400} \varepsilon^2 A^7 t^{11} - \frac{1}{900} A^5 \varepsilon t^{10} - \frac{1}{1296} A^3 t^9 \right)$$

bulunur.

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad (29)$$

olmak üzere $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ değerleri (29)'da yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} y(t) &= A - \frac{1}{2}At^2 + \frac{1}{24}At^4 + \frac{1}{15}\varepsilon A^3 t^5 - \frac{1}{720}At^6 - \frac{1}{840}\varepsilon A^3 t^7 + \frac{1}{4400}\varepsilon^3 A^7 t^{11} + \\ &\quad \frac{1}{900}A^5 \varepsilon^2 t^{10} + \frac{1}{1296}\varepsilon A^3 t^9 + \dots \\ y(t) &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6\right)A + \left(\frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{840}t^7 + \frac{1}{1296}t^9\right)\varepsilon A^3 + \\ &\quad \frac{1}{4400}\varepsilon^3 A^7 t^{11} + \frac{1}{900}A^5 \varepsilon^2 t^{10} + \dots \end{aligned} \quad (30)$$

çözümü elde edilir. Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t}$$

ifadesinden $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin 1, 2, 3, 4 ve 6. momenti,

$$E[\varepsilon] = \mu$$

$$E[\varepsilon^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E[\varepsilon^3] = 3\sigma^2\mu + \mu^3$$

$$E[\varepsilon^4] = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4$$

$$E[\varepsilon^6] = 15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6$$

olarak hesaplanır. X rastgele değişkeni üstel dağılıma sahip ise moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

ifadesinden $A \sim \text{üstel}(\lambda)$ rastgele değişkeninin 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10 ve 14. momenti,

$$E[A] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[A^2] = \frac{2!}{\lambda^2}$$

$$E[A^3] = \frac{3!}{\lambda^3}$$

$$E[A^5] = \frac{5!}{\lambda^5}$$

$$E[A^6] = \frac{6!}{\lambda^6}$$

$$E[A^7] = \frac{7!}{\lambda^7}$$

$$E[A^{10}] = \frac{10!}{\lambda^{10}}$$

$$E[A^{14}] = \frac{14!}{\lambda^{14}}$$

olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa (30) denkleminin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[y(t)] = & \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6\right)E(A) + \left(\frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{840}t^7 + \right. \\ & \left. \frac{1}{1296}t^9\right)E(\varepsilon)E(A^3) + \frac{1}{4400}t^{11}E(\varepsilon^3)E(A^7) + \frac{1}{900}t^{10}E(A^5)E(\varepsilon^2) + \dots \end{aligned} \quad (31)$$

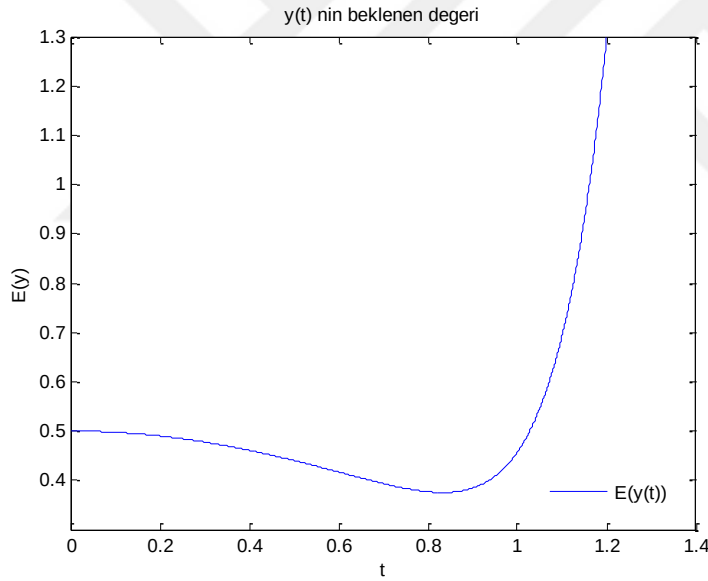
olarak elde edilir. Yukarıda bulunan moment değerleri (31) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$E[y(t)] = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6\right)\frac{1}{\lambda} + \left(\frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{840}t^7 + \frac{1}{1296}t^9\right)\mu\frac{3!}{\lambda^3} + \frac{1}{4400}t^{11}(3\sigma^2\mu + \mu^3)\frac{7!}{\lambda^7} + \frac{1}{900}t^{10}(\sigma^2 + \mu^2)\frac{5!}{\lambda^5} + \dots$$

beklenen değeri elde edilir. Özel olarak $A \sim \text{üstel}(\lambda = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ seçilirse,

$$E[y(t)] = \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6\right)\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{840}t^7 + \frac{1}{1296}t^9\right)\frac{3!}{8} + \frac{13}{4400}t^{11}\frac{7!}{128} + \frac{5}{900}t^{10}\frac{5!}{32} + \dots$$

bulunur. Beklenen değer, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 4.'deki grafik elde edilir.



Şekil 4. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (30) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X ve Y rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa varyans,

$$\begin{aligned} Var(y(t)) &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6\right)^2 Var(A) \\ &\quad + \left(\frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{840}t^7 + \frac{1}{1296}t^9\right)^2 Var(\varepsilon)Var(A^3) \\ &\quad + \frac{t^{22}}{4400^2}Var(\varepsilon^3)Var(A^7) + \frac{t^{20}}{900^2}Var(A^5)Var(\varepsilon^2) + \dots \end{aligned} \quad (32)$$

$$Var(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Var(A^3) = E(A^6) - [E(A^3)]^2 = \frac{6!}{\lambda^6} - \left(\frac{3!}{\lambda^3}\right)^2 = \frac{684}{\lambda^6}$$

$$Var(A^5) = E(A^{10}) - [E(A^5)]^2 = \frac{10!}{\lambda^{10}} - \left(\frac{5!}{\lambda^5}\right)^2 = \frac{3614400}{\lambda^{10}}$$

$$Var(A^7) = E(A^{14}) - [E(A^7)]^2 = \frac{14!}{\lambda^{14}} - \left(\frac{7!}{\lambda^7}\right)^2$$

$$Var(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned} Var(\varepsilon^2) &= E(\varepsilon^4) - [E(\varepsilon^2)]^2 = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4 - (\sigma^2 + \mu^2)^2 \\ &= 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(\varepsilon^3) &= E(\varepsilon^6) - [E(\varepsilon^3)]^2 = 15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6 \\ &\quad - (3\sigma^2\mu + \mu^3)^2 = 15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4 \end{aligned}$$

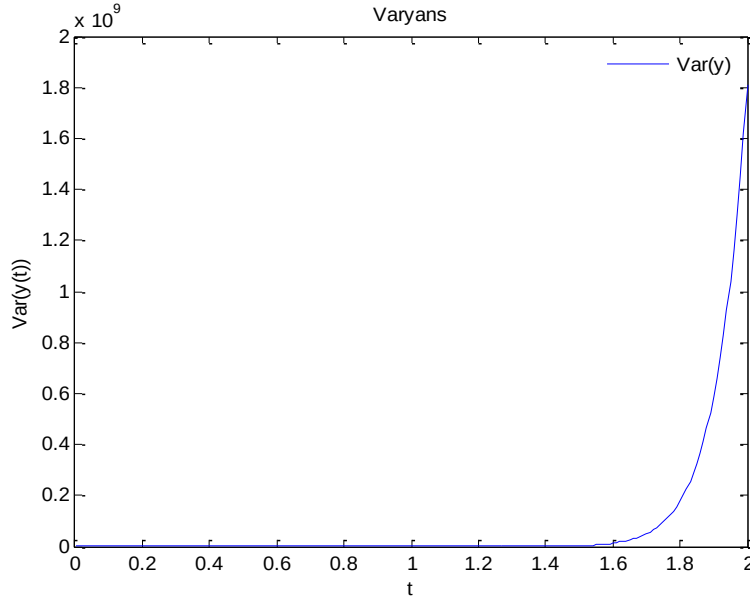
olarak hesaplanır. Bulunan varyans değerleri (32) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} Var(y(t)) &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6\right)^2 \frac{1}{\lambda^2} + \left(\frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{840}t^7 + \frac{1}{1296}t^9\right)^2 \sigma^2 \frac{684}{\lambda^6} + \frac{t^{22}}{4400^2} (15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4) \left(\frac{14!}{\lambda^{14}} - \left(\frac{7!}{\lambda^7}\right)^2\right) + \\ &\quad \frac{t^{20}}{900^2} \frac{3614400}{\lambda^{10}} (2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2) + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $A \sim \text{üstel}(\lambda = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ seçilirse,

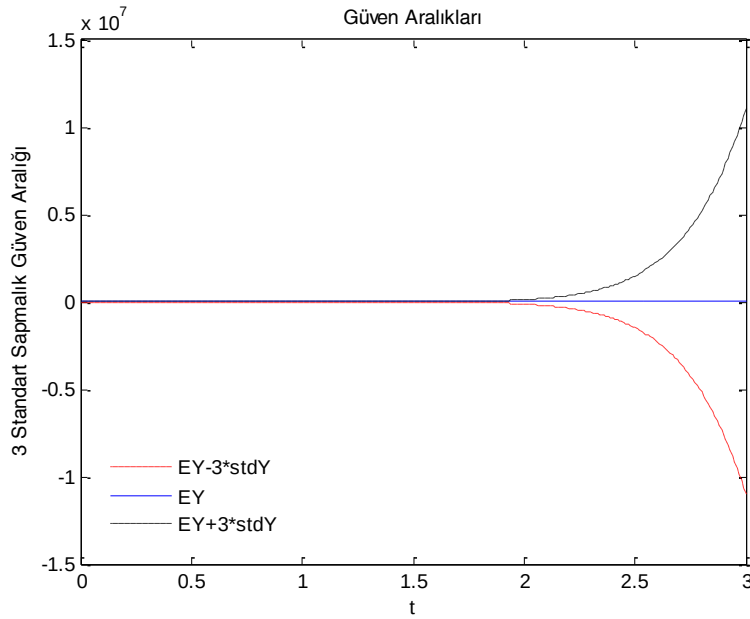
$$\begin{aligned} Var(y(t)) &= \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 - \frac{1}{720}t^6\right)^2 \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{15}t^5 - \frac{1}{840}t^7 + \frac{1}{1296}t^9\right)^2 \frac{171}{4} + \\ &\quad \frac{t^{22}}{4400^2} 1552 \left(\frac{7!}{2^{14}} 17292240\right) + \frac{t^{20}}{900^2} \frac{3614400}{2^{10}} 48 + \dots \end{aligned}$$

bulunur. Varyans, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 5.'teki grafik elde edilir.



Şekil 5. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (30) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; $(0, 2)$ aralığı göz önüne alındığında üstel dağılıma sahip rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık güven aralığı %98, normal dağılıma sahip rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık güven aralığı %99 olarak elde edilir. MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 6.'daki grafik elde edilir.



Şekil 6. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (30) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-2. 3. (Duffing Denklemi)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0 \quad (33)$$

başlangıç koşulu $y(0) = A$, $y'(0) = B$, $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$, ε normal dağılıma ve $A, B \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere (33) Duffing Deklemi'nin çözümünü elde ediniz.

Çözüm:

$$L = \frac{d^2}{dt^2} \text{ olmak üzere,}$$

$$y'' = -y - \varepsilon y^3 \quad (34)$$

(34) adi diferansiyel denkleminde eşitliğin her iki tarafına L^{-1} işlemi uygulanırsa,

$$L^{-1}y'' = -L^{-1}y - \varepsilon L^{-1}y^3$$

$$y_{n+1} = -L^{-1}y_n - \varepsilon L^{-1}A_n$$

denklemini elde edilir. Burada A_n ler Adomian polinomlarıdır.

$$y_0 = y(0) + ty'(0)$$

$$y_0 = A + Bt$$

$$A_0 = f(y_0) = (A + Bt)^3$$

$n = 0$ için;

$$y_1 = -L^{-1}y_0 - \varepsilon L^{-1}A_0$$

$$y_1 = -L^{-1}(A + Bt) - \varepsilon L^{-1}(A + Bt)^3$$

$$y_1 = -\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6} - \varepsilon \frac{(A+Bt)^5}{20B^2}$$

$$y_1 = -\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6} - \varepsilon \left(\frac{1}{20}t^5B^3 + \frac{1}{4}t^4AB^2 + \frac{1}{2}t^3A^2B + \frac{1}{2}t^2A^3 \right)$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0)$$

$$A_1 = 3 \left(-\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6} - \varepsilon \left(\frac{1}{20}t^5B^3 + \frac{1}{4}t^4AB^2 + \frac{1}{2}t^3A^2B + \frac{1}{2}t^2A^3 \right) \right) (A+Bt)^2$$

$n = 1$ için;

$$y_2 = -L^{-1}y_1 - \varepsilon L^{-1}A_1$$

$$y_2 = -L^{-1} \left(-\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6} - \varepsilon \left(\frac{1}{20}t^5B^3 + \frac{1}{4}t^4AB^2 + \frac{1}{2}t^3A^2B + \frac{1}{2}t^2A^3 \right) \right) - \\ 3\varepsilon L^{-1} \left(-\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6} - \varepsilon \left(\frac{1}{20}t^5B^3 + \frac{1}{4}t^4AB^2 + \frac{1}{2}t^3A^2B + \frac{1}{2}t^2A^3 \right) \right) (A+Bt)^2$$

$$y_2 = \frac{\varepsilon t^7 B^3}{840} + \frac{\varepsilon t^6 AB^2}{120} - \left(-\frac{1}{24}B - \frac{1}{8}\varepsilon A^2 B \right) \frac{t^5}{5} - \left(-\frac{1}{6}A - \frac{1}{6}\varepsilon A^3 \right) \frac{t^4}{4} - \\ \varepsilon \left(-\frac{\varepsilon t^9 B^5}{480} - \frac{3\varepsilon t^8 AB^4}{160} + \left(\left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \frac{B^2}{2} - \frac{11\varepsilon A^2 B^3}{40} \right) \frac{t^7}{7} + \left(\left(-\frac{1}{2}A - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) \frac{3B^2}{5} + \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \frac{6AB}{5} - \frac{3\varepsilon A^3 B^2}{20} \right) \frac{t^6}{6} + \left(\left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) \frac{3AB}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \frac{3A^2}{4} \right) \frac{t^5}{5} + \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) \frac{A^3 t^4}{4} \right)$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} f''(y_0)$$

$$A_2 = 3 \left(\frac{\varepsilon t^7 B^3}{840} + \frac{\varepsilon t^6 AB^2}{120} - \left(-\frac{1}{3}B - \varepsilon A^2 B \right) \frac{t^5}{40} + (A + \varepsilon A^3) \frac{t^4}{24} - \varepsilon \left(-\frac{\varepsilon t^9 B^5}{480} - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{3\varepsilon t^8 AB^4}{160} + \left(\left(-\frac{1}{3}B - \varepsilon A^2 B \right) \frac{B^2}{4} - \frac{11\varepsilon A^2 B^3}{40} \right) \frac{t^7}{7} + \left((-A - \varepsilon A^3) \frac{3B^2}{10} + \left(-\frac{1}{3}B - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \varepsilon A^2 B \right) \frac{6AB}{10} - \frac{3\varepsilon A^3 B^2}{20} \right) \frac{t^6}{6} + \left((-A - \varepsilon A^3) \frac{3AB}{4} + \left(-\frac{1}{3}B - \varepsilon A^2 B \right) \frac{3A^2}{8} \right) \frac{t^5}{5} + (-A - \right. \right. \\ \left. \left. \varepsilon A^3) \frac{A^3 t^4}{4} \right) \right)$$

$$\left. \varepsilon A^3 \right) \frac{A^2 t^4}{8} \Bigg) (A+Bt)^2 + 3(A+Bt) \left(-\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6} - \varepsilon \left(\frac{1}{20} t^5 B^3 + \frac{1}{4} t^4 AB^2 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} t^3 A^2 B + \frac{1}{2} t^2 A^3 \right) \right) \Bigg)^2$$

$n = 2$ için;

$$y_3 = -L^{-1}y_2 - \varepsilon L^{-1}A_2$$

$$y_3 = -L^{-1} \left(\frac{\varepsilon t^7 B^3}{840} + \frac{\varepsilon t^6 AB^2}{120} - \left(-\frac{1}{24} B - \frac{1}{8} \varepsilon A^2 B \right) \frac{t^5}{5} + (A + \varepsilon A^3) \frac{t^4}{24} - \right. \\ \varepsilon \left(-\frac{\varepsilon t^9 B^5}{480} - \frac{3\varepsilon t^8 AB^4}{160} + \left(\left(-\frac{1}{6} B - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 B \right) \frac{B^2}{2} - \frac{11\varepsilon A^2 B^3}{40} \right) \frac{t^7}{7} + \left(\left(-\frac{1}{2} A - \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} \varepsilon A^3 \right) \frac{3B^2}{5} + \left(-\frac{1}{6} B - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 B \right) \frac{6AB}{5} - \frac{3\varepsilon A^3 B^2}{20} \right) \frac{t^6}{6} + \left(\left(-\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \varepsilon A^3 \right) \frac{3AB}{2} + \right. \\ \left. \left(-\frac{1}{6} B - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 B \right) \frac{3A^2}{4} \right) \frac{t^5}{5} + \left. \left(-\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \varepsilon A^3 \right) \frac{A^3 t^4}{4} \right) \Bigg) - \varepsilon L^{-1} \left(3 \left(\frac{\varepsilon t^7 B^3}{840} + \frac{\varepsilon t^6 AB^2}{120} - \right. \right. \\ \left. \left(-\frac{1}{24} B - \frac{1}{8} \varepsilon A^2 B \right) \frac{t^5}{5} - \left(-\frac{1}{6} A - \frac{1}{6} \varepsilon A^3 \right) \frac{t^4}{4} - \varepsilon \left(-\frac{\varepsilon t^9 B^5}{480} - \frac{3\varepsilon t^8 AB^4}{160} + \left(\left(-\frac{1}{6} B - \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} \varepsilon A^2 B \right) \frac{B^2}{2} - \frac{11\varepsilon A^2 B^3}{40} \right) \frac{t^7}{7} + \left(\left(-\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \varepsilon A^3 \right) \frac{3B^2}{5} + \left(-\frac{1}{6} B - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 B \right) \frac{6AB}{5} - \right. \\ \left. \left. \frac{3\varepsilon A^3 B^2}{20} \right) \frac{t^6}{6} + \left((-A - \varepsilon A^3) \frac{3AB}{4} + \left(-\frac{1}{6} B - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 B \right) \frac{3A^2}{4} \right) \frac{t^5}{5} - (A + \right. \\ \left. \varepsilon A^3) \frac{A^2 t^4}{8} \Bigg) (A+Bt)^2 + 3(A+Bt) \left(-\frac{At^2}{2} - \frac{Bt^3}{6} - \varepsilon \left(\frac{1}{20} t^5 B^3 + \frac{1}{4} t^4 AB^2 + \right. \right. \\ \left. \left. \frac{1}{2} t^3 A^2 B + \frac{1}{2} t^2 A^3 \right) \right) \Bigg)^2 \Bigg)$$

$$y_3 = -\frac{t^{11} \varepsilon^2 B^5}{52800} - \frac{t^{10} \varepsilon^2 AB^4}{4800} - \left(\frac{\varepsilon B^3}{6720} - \frac{\varepsilon}{8} \left(\left(\left(-\frac{1}{6} B - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 B \right) \frac{B^2}{14} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. \frac{11\varepsilon A^2 B^3}{280} \right) \right) \frac{t^9}{9} - \left(\frac{\varepsilon AB^2}{840} - \frac{\varepsilon}{7} \left(\left(-\frac{1}{2} A - \frac{1}{2} \varepsilon A^3 \right) \frac{B^2}{10} + \left(-\frac{1}{6} B - \frac{1}{2} \varepsilon A^2 B \right) \frac{AB}{5} - \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\varepsilon A^3 B^2}{40} \right) \frac{t^8}{8} - \left(-\frac{\varepsilon}{6} \left(\left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) \frac{3AB}{10} + \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \frac{3A^2}{20} \right) + \frac{B}{720} + \right. \\
& \left. \frac{\varepsilon A^2 B}{240} \right) \frac{t^7}{7} - \left(-\frac{\varepsilon A^2}{20} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{A}{120} + \frac{\varepsilon A^3}{120} \right) \frac{t^6}{6} - \varepsilon \left(\frac{11t^{13}\varepsilon^2 B^7}{124800} + \frac{11t^{12}\varepsilon^2 AB^6}{9600} + \right. \\
& \left(\left(\left(\frac{\varepsilon B^3}{840} - \varepsilon \left(\frac{B^2}{14} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 \right) - \frac{11\varepsilon A^2 B^3}{280} \right) \right) \frac{3B^2}{10} \right) + \frac{31\varepsilon^2 A^2 B^5}{1600} + \right. \\
& \left. \frac{3B}{10} \left(-\frac{\varepsilon B^3}{10} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) + \frac{\varepsilon^2 A^2 B^4}{16} \right) \right) \frac{t^{11}}{11} + \left(\frac{B^2}{3} \left(\frac{\varepsilon AB^2}{120} - \varepsilon \left(\frac{B^2}{10} \left(-\frac{1}{2}A - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{AB}{5} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) - \frac{\varepsilon A^3 B^2}{40} \right) \right) + \frac{2AB}{3} \left(\frac{\varepsilon B^3}{840} - \varepsilon \left(\frac{B^2}{14} \left(-\frac{1}{6}B - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) - \frac{11\varepsilon A^2 B^3}{280} \right) \right) + \frac{\varepsilon^2 A^3 B^4}{160} + \frac{B}{3} \left(-\frac{\varepsilon B^3}{10} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) - \frac{\varepsilon AB^2}{2} \left(-\frac{1}{6}B - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \right) + \frac{A}{3} \left(-\frac{\varepsilon B^3}{10} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) + \frac{\varepsilon^2 A^2 B^4}{16} \right) \right) \frac{t^{10}}{10} + \\
& \left(\frac{3B^2}{8} \left(-\varepsilon \left(\frac{3AB}{10} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{3A^2}{20} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \right) + \frac{B}{120} + \frac{\varepsilon A^2 B}{40} \right) + \right. \\
& \left. \frac{3AB}{4} \left(\frac{\varepsilon AB^2}{120} - \varepsilon \left(\frac{B^2}{10} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{AB}{5} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) - \frac{\varepsilon A^3 B^2}{40} \right) \right) + \right. \\
& \left. \frac{3A^2}{8} \left(\frac{\varepsilon B^3}{840} - \varepsilon \left(\frac{B^2}{14} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) - \frac{11\varepsilon A^2 B^3}{280} \right) \right) + \frac{3B}{8} \left(-\frac{\varepsilon AB^2}{2} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \right. \\
& \left. \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right)^2 \right) + \frac{3A}{8} \left(-\frac{\varepsilon B^3}{10} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) - \frac{\varepsilon AB^2}{2} \left(-\frac{1}{6}B - \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \right) \right) \frac{t^9}{9} + \left(\frac{3B^3}{7} \left(-\frac{\varepsilon}{4} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) A^2 + \frac{A}{24} + \frac{\varepsilon A^3}{24} \right) + \right. \\
& \left. \frac{6AB}{7} \left(-\varepsilon \left(\frac{3AB}{10} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{3A^2}{20} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \right) + \frac{B}{120} + \frac{\varepsilon A^2 B}{40} \right) + \right. \\
& \left. \frac{3A^2}{7} \left(\frac{\varepsilon AB^2}{120} - \varepsilon \left(\frac{B^2}{10} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{AB}{5} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) - \frac{\varepsilon A^3 B^2}{40} \right) \right) + \right. \\
& \left. \frac{6B}{7} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) + \frac{3A}{7} \left(-\frac{\varepsilon AB^2}{2} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \right. \right. \\
& \left. \left. \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right)^2 \right) \right) \frac{t^8}{8} + \left(\left(-\frac{\varepsilon A^2}{4} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{A}{24} + \frac{\varepsilon A^3}{24} \right) AB + \right. \\
& \left. \frac{A^2}{2} \left(-\varepsilon \left(\frac{3AB}{10} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{3A^2}{20} \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) \right) + \frac{B}{120} + \frac{\varepsilon A^2 B}{40} \right) + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{B}{2} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right)^2 + \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) \left(-\frac{1}{6}B - \frac{1}{2}\varepsilon A^2 B \right) A \Bigg) \frac{t^7}{7} + \\ & \left(\frac{3A^2}{5} \left(-\frac{\varepsilon A^2}{4} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right) + \frac{A}{24} + \frac{\varepsilon A^3}{24} \right) + \frac{3A}{5} \left(-\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}\varepsilon A^3 \right)^2 \right) \frac{t^6}{6} \Bigg) \\ & y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \end{aligned} \quad (35)$$

olmak üzere $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ değerleri (35)'te yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned} y(t) = & \frac{\varepsilon^2 t^9 B^5}{480} - \frac{\varepsilon t^2 A^3}{2} + \frac{\varepsilon t^4 A^3}{6} + \frac{\varepsilon^2 t^4 A^5}{8} - \frac{\varepsilon t^5 B^3}{20} - \frac{17 t^6 \varepsilon^2 A^5}{240} - \frac{11 t^{13} \varepsilon^3 B^7}{124800} - \frac{3 t^6 \varepsilon^3 A^7}{80} - \\ & \frac{5 \varepsilon t^6 A^3}{144} - \frac{11 t^{11} \varepsilon^3 A^2 B^5}{1600} - \frac{11 t^{12} \varepsilon^3 A B^6}{9600} - \frac{307 t^{10} \varepsilon^2 A B^4}{33600} - \frac{7 t^7 \varepsilon^3 A^6 B}{80} - \frac{3 t^8 \varepsilon^3 A^5 B^2}{32} - \\ & \frac{121 t^{10} \varepsilon^3 A^3 B^4}{4800} - \frac{71 t^7 \varepsilon^2 A^4 B}{560} - \frac{27 t^8 \varepsilon^2 A^3 B^2}{280} - \frac{29 t^9 \varepsilon^3 A^4 B^3}{480} - \frac{17 t^9 \varepsilon^2 A^2 B^3}{420} - \frac{23 \varepsilon t^7 A^2 B}{560} - \\ & \frac{B t^3}{6} - \frac{17 \varepsilon t^8 A B^2}{1120} + \frac{11 \varepsilon t^7 B^3}{840} - \frac{17 \varepsilon t^9 B^3}{10080} - \frac{307 t^{11} \varepsilon^2 B^5}{369600} + \frac{B t^5}{120} + \frac{A t^4}{24} - \frac{B t^7}{5040} + \frac{\varepsilon t^5 A^2 B}{5} + \\ & B t + \frac{11 \varepsilon t^6 A B^2}{120} + \frac{9 \varepsilon^2 t^5 A^4 B}{40} + \frac{7 \varepsilon^2 t^6 A^3 B^2}{40} + \frac{3 \varepsilon^2 t^7 A^2 B^3}{40} + \frac{3 \varepsilon^2 t^8 A B^4}{160} - \frac{\varepsilon t^3 A^2 B}{2} - \frac{\varepsilon t^4 A B^2}{4} + \\ & A - \frac{A t^2}{2} - \frac{A t^6}{720} + \dots \end{aligned}$$

çözümü elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned} y(t) = & \left(1 - \frac{t^2}{2} - \frac{t^6}{720} + \frac{t^4}{24} \right) A + \left(t + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040} - \frac{t^3}{6} \right) B + \left(\frac{t^9}{480} - \right. \\ & \left. \frac{307 t^{11}}{369600} \right) \varepsilon^2 B^5 + \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6} \right) \varepsilon A^3 + \left(\frac{t^4}{8} - \frac{17 t^6}{240} \right) \varepsilon^2 A^5 - \frac{11 t^{13}}{124800} \varepsilon^3 B^7 - \frac{3 t^6}{80} \varepsilon^3 A^7 - \\ & \frac{5 t^6}{144} \varepsilon A^3 - \frac{11 t^{11}}{1600} \varepsilon^3 A^2 B^5 - \frac{11 t^{12}}{9600} \varepsilon^3 A B^6 + \left(-\frac{307 t^{10}}{33600} + \frac{3 t^8}{160} \right) \varepsilon^2 A B^4 - \frac{7 t^7}{80} \varepsilon^3 A^6 B - \\ & \frac{3 t^8}{32} \varepsilon^3 A^5 B^2 - \frac{121 t^{10}}{4800} \varepsilon^3 A^3 B^4 + \left(-\frac{71 t^7}{560} + \frac{9 t^5}{40} \right) \varepsilon^2 A^4 B + \left(-\frac{27 t^8}{280} + \frac{7 t^6}{40} \right) \varepsilon^2 A^3 B^2 - \\ & \frac{29 t^9}{480} \varepsilon^3 A^4 B^3 + \left(-\frac{17 t^9}{420} + \frac{3 t^7}{40} \right) \varepsilon^2 A^2 B^3 + \left(\frac{11 t^7}{840} - \frac{17 t^9}{10080} - \frac{t^5}{20} \right) \varepsilon B^3 + \\ & \left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{2} - \frac{23 t^7}{560} \right) \varepsilon A^2 B + \left(\frac{11 t^6}{120} - \frac{t^4}{4} - \frac{17 t^8}{1120} \right) \varepsilon A B^2 + \dots \end{aligned} \quad (36)$$

çözümü elde edilir. Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t}$$

ifadesinden $\varepsilon \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin 1, 2, 3, 4 ve 6. momenti,

$$E[\varepsilon] = \mu$$

$$E[\varepsilon^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

$$E[\varepsilon^3] = 3\sigma^2\mu + \mu^3$$

$$E[\varepsilon^4] = 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4$$

$$E[\varepsilon^6] = 15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6$$

olarak hesaplanır. X rastgele değişkeni düzgün dağılıma sahip ise moment çıkaran fonksiyonundan faydalananarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

ifadesinden $A, B \sim U(\alpha, \beta)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişkeninin 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12 ve 14. momenti,

$$E[A] = E[B] = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

$$E[A^2] = E[B^2] = \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3},$$

$$E[A^3] = E[B^3] = \frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4},$$

$$E[A^4] = E[B^4] = \frac{\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4}{5},$$

$$E[A^5] = E[B^5] = \frac{\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5}{6},$$

$$E[A^6] = E[B^6] = \frac{\alpha^6 + \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 + \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 + \alpha\beta^5 + \beta^6}{7}$$

$$E[A^7] = E[B^7] = \frac{\alpha^7 + \alpha^6\beta + \alpha^5\beta^2 + \alpha^4\beta^3 + \alpha^3\beta^4 + \alpha^2\beta^5 + \alpha\beta^6 + \beta^7}{8}$$

$$E[A^8] = E[B^8] = \frac{\alpha^8 + \alpha^7\beta + \alpha^6\beta^2 + \alpha^5\beta^3 + \alpha^4\beta^4 + \alpha^3\beta^5 + \alpha^2\beta^6 + \alpha\beta^7 + \beta^8}{9}$$

$$E[A^{10}] = E[B^{10}] = \frac{\alpha^{10} + \alpha^9\beta + \alpha^8\beta^2 + \alpha^7\beta^3 + \alpha^6\beta^4 + \alpha^5\beta^5}{11} + \frac{\alpha^4\beta^6 + \alpha^3\beta^7 + \alpha^2\beta^8 + \alpha\beta^9 + \beta^{10}}{11}$$

$$E[A^{12}] = E[B^{12}] = \frac{\alpha^{12} + \alpha^{11}\beta + \alpha^{10}\beta^2 + \alpha^9\beta^3 + \alpha^8\beta^4 + \alpha^7\beta^5 + \alpha^6\beta^6}{13} + \frac{\alpha^5\beta^7 + \alpha^4\beta^8 + \alpha^3\beta^9 + \alpha^2\beta^{10} + \alpha\beta^{11} + \beta^{12}}{13}$$

$$E[A^{14}] = E[B^{14}] = \frac{\alpha^{14} + \alpha^{13}\beta + \alpha^{12}\beta^2 + \alpha^{11}\beta^3 + \alpha^{10}\beta^4 + \alpha^9\beta^5 + \alpha^8\beta^6 + \alpha^7\beta^7}{15} + \frac{\alpha^6\beta^8 + \alpha^5\beta^9 + \alpha^4\beta^{10} + \alpha^3\beta^{11} + \alpha^2\beta^{12} + \alpha\beta^{13} + \beta^{14}}{15}$$

olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} E[y(t)] = & \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}\right) E(A) + \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040}\right) E(B) + \\ & \left(\frac{t^9}{480} - \frac{307t^{11}}{369600}\right) E(\varepsilon^2)E(B^5) + \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}\right) E(\varepsilon)E(A^3) + \left(\frac{t^4}{8} - \right. \\ & \left.\frac{17t^6}{240}\right) E(\varepsilon^2)E(A^5) - \frac{11t^{13}}{124800} E(\varepsilon^3)E(B^7) - \frac{3t^6}{80} E(\varepsilon^3)E(A^7) - \frac{5t^6}{144} E(\varepsilon)E(A^3) - \\ & \frac{11t^{11}}{1600} E(\varepsilon^3)E(A^2)E(B^5) - \frac{11t^{12}}{9600} E(\varepsilon^3)E(A)E(B^6) + \left(\frac{3t^8}{160} - \right. \\ & \left.\frac{307t^{10}}{33600}\right) E(\varepsilon^2)E(A)E(B^4) - \frac{7t^7}{80} E(\varepsilon^3)E(A^6)E(B) - \frac{3t^8}{32} E(\varepsilon^3)E(A^5)E(B^2) - \\ & \frac{121t^{10}}{4800} E(\varepsilon^3)E(A^3)E(B^4) + \left(\frac{9t^5}{40} - \frac{71t^7}{560}\right) E(\varepsilon^2)E(A^4)E(B) + \left(\frac{7t^6}{40} - \right. \\ & \left.\frac{27t^8}{280}\right) E(\varepsilon^2)E(A^3)E(B^2) - \frac{29t^9}{480} E(\varepsilon^3)E(A^4)E(B^3) + \left(\frac{3t^7}{40} - \right. \\ & \left.\frac{17t^9}{420}\right) E(\varepsilon^2)E(A^2)E(B^3) + \left(-\frac{t^5}{20} + \frac{11t^7}{840} - \frac{17t^9}{10080}\right) E(\varepsilon)E(B^3) + \left(-\frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{5} - \right. \\ & \left.\frac{23t^7}{560}\right) E(\varepsilon)E(A^2)E(B) + \left(-\frac{t^4}{4} + \frac{11t^6}{120} - \frac{17t^8}{1120}\right) E(\varepsilon)E(A)E(B^2) + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

ifadesi elde edilir. Yukarıda bulunan moment değerleri (37) ifadesinde yerine yazılırsa,

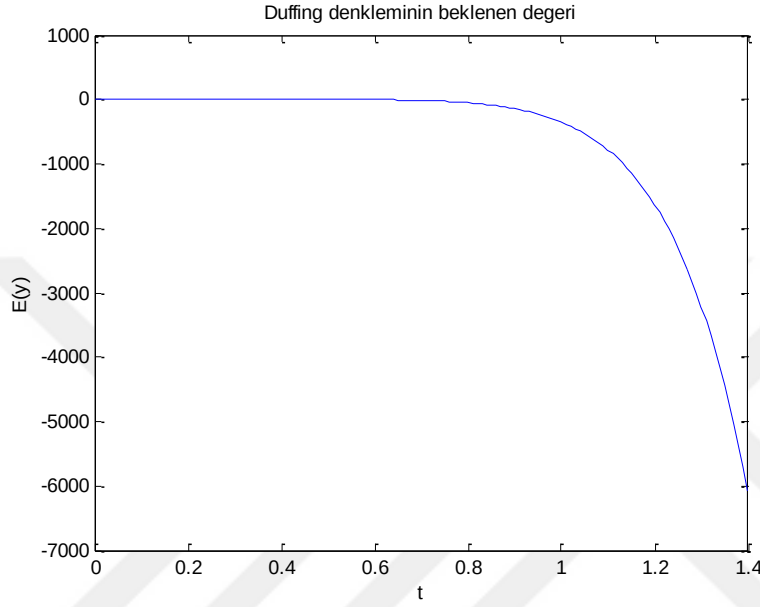
$$\begin{aligned}
E[y(t)] = & \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}\right) \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040}\right) \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{t^9}{480} - \right. \\
& \left. \frac{307t^{11}}{369600}\right) (\sigma^2 + \mu^2) \left(\frac{\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5}{6}\right) + \left(-\frac{t^2}{2} + \right. \\
& \left. \frac{t^4}{6}\right) \mu \left(\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}\right) + \left(\frac{t^4}{8} - \frac{17t^6}{240}\right) (\sigma^2 + \mu^2) \left(\frac{\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5}{6}\right) - \\
& \frac{11t^{13}}{124800} (3\sigma^2\mu + \mu^3) \left(\frac{\alpha^7 + \alpha^6\beta + \alpha^5\beta^2 + \alpha^4\beta^3 + \alpha^3\beta^4 + \alpha^2\beta^5 + \alpha\beta^6 + \beta^7}{8}\right) - \frac{3t^6}{80} (3\sigma^2\mu + \\
& \mu^3) \left(\frac{\alpha^7 + \alpha^6\beta + \alpha^5\beta^2 + \alpha^4\beta^3 + \alpha^3\beta^4 + \alpha^2\beta^5 + \alpha\beta^6 + \beta^7}{8}\right) - \frac{5t^6}{144} \mu \left(\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}\right) - \\
& \frac{11t^{11}}{1600} (3\sigma^2\mu + \mu^3) \left(\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}\right) \left(\frac{\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5}{6}\right) - \frac{11t^{12}}{9600} (3\sigma^2\mu + \\
& \mu^3) \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left(\frac{\alpha^6 + \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 + \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 + \alpha\beta^5 + \beta^6}{7}\right) + \left(\frac{3t^8}{160} - \frac{307t^{10}}{33600}\right) (\sigma^2 + \\
& \mu^2) \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left(\frac{\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4}{5}\right) - \frac{7t^7}{80} (3\sigma^2\mu + \\
& \mu^3) \left(\frac{\alpha^6 + \alpha^5\beta + \alpha^4\beta^2 + \alpha^3\beta^3 + \alpha^2\beta^4 + \alpha\beta^5 + \beta^6}{7}\right) \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \frac{3t^8}{32} (3\sigma^2\mu + \\
& \mu^3) \left(\frac{\alpha^5 + \alpha^4\beta + \alpha^3\beta^2 + \alpha^2\beta^3 + \alpha\beta^4 + \beta^5}{6}\right) \left(\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}\right) - \frac{121t^{10}}{4800} (3\sigma^2\mu + \\
& \mu^3) \left(\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}\right) \left(\frac{\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4}{5}\right) + \left(\frac{9t^5}{40} - \frac{71t^7}{560}\right) (\sigma^2 + \\
& \mu^2) \left(\frac{\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4}{5}\right) \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{7t^6}{40} - \frac{27t^8}{280}\right) (\sigma^2 + \\
& \mu^2) \left(\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}\right) \left(\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}\right) - \frac{29t^9}{480} (3\sigma^2\mu + \\
& \mu^3) \left(\frac{\alpha^4 + \alpha^3\beta + \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta^3 + \beta^4}{5}\right) \left(\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}\right) + \left(\frac{3t^7}{40} - \frac{17t^9}{420}\right) (\sigma^2 + \\
& \mu^2) \left(\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}\right) \left(\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}\right) + \left(-\frac{t^5}{20} + \frac{11t^7}{840} - \frac{17t^9}{10080}\right) \mu \left(\frac{\alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3}{4}\right) + \\
& \left(-\frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{5} - \frac{23t^7}{560}\right) \mu \left(\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}\right) \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(-\frac{t^4}{4} + \frac{11t^6}{120} - \right. \\
& \left. \frac{17t^8}{1120}\right) \mu \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \left(\frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2}{3}\right) + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Özel olarak $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$, $\varepsilon = 1$ seçilirse,

$$\begin{aligned}
E[y(t)] = & \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}\right) \left(\frac{3}{2}\right) + \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040}\right) \left(\frac{3}{2}\right) + \\
& \left(\frac{t^9}{480} - \frac{307t^{11}}{369600}\right) \left(\frac{105}{2}\right) + \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}\right) \left(\frac{15}{4}\right) + \left(\frac{t^4}{8} - \frac{17t^6}{240}\right) \left(\frac{105}{2}\right) - \frac{2431t^{13}}{66560} - \frac{1989t^6}{128} - \\
& \frac{25t^6}{192} - \frac{7007t^{11}}{3200} - \frac{18161t^{12}}{44800} + \left(\frac{3t^8}{160} - \frac{307t^{10}}{33600}\right) \left(\frac{93}{2}\right) - \frac{4953t^7}{160} - \frac{91t^8}{2} - \frac{48763t^{10}}{6400} + \\
& \left(\frac{9t^5}{40} - \frac{71t^7}{560}\right) \left(\frac{93}{2}\right) + \left(\frac{7t^6}{40} - \frac{27t^8}{280}\right) \left(\frac{175}{4}\right) - \frac{11687t^9}{640} + \left(\frac{3t^7}{40} - \frac{17t^9}{420}\right) \left(\frac{175}{4}\right) +
\end{aligned}$$

$$\left(-\frac{t^5}{20} + \frac{11t^7}{840} - \frac{17t^9}{10080}\right)\left(\frac{15}{4}\right) + \left(-\frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{5} - \frac{23t^7}{560}\right)\left(\frac{7}{2}\right) + \left(-\frac{t^4}{4} + \frac{11t^6}{120} - \frac{17t^8}{1120}\right)\left(\frac{7}{2}\right) + \dots$$

beklenen değeri bulunur. Beklenen değer, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 7.'deki grafik elde edilir.



Şekil 7. $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$, $\varepsilon = 1$ özel değerler için (36) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X, Y rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} Var[y(t)] = & \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}\right)^2 Var(A) + \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040}\right)^2 Var(B) + \\ & \left(\frac{t^9}{480} - \frac{307t^{11}}{369600}\right)^2 Var(\varepsilon^2)Var(B^5) + \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}\right)^2 Var(\varepsilon)Var(A^3) + \\ & \left(\frac{t^4}{8} - \frac{17t^6}{240}\right)^2 Var(\varepsilon^2)Var(A^5) + \left(-\frac{11t^{13}}{124800}\right)^2 Var(\varepsilon^3)Var(B^7) + \\ & \left(-\frac{3t^6}{80}\right)^2 Var(\varepsilon^3)Var(A^7) + \\ & \left(-\frac{5t^6}{144}\right)^2 Var(\varepsilon)Var(A^3) + \left(-\frac{11t^{11}}{1600}\right)^2 Var(\varepsilon^3)Var(A^2)Var(B^5) + \\ & \left(-\frac{11t^{12}}{9600}\right)^2 Var(\varepsilon^3)Var(A)Var(B^6) + \left(\frac{3t^8}{160} - \frac{307t^{10}}{33600}\right)^2 Var(\varepsilon^2)Var(A)Var(B^4) + \left(-\frac{7t^7}{80}\right)^2 Var(\varepsilon^3)Var(A^6)Var(B) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{3t^8}{32}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon^3)\text{Var}(A^5)\text{Var}(B^2) + \left(-\frac{121t^{10}}{4800}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon^3)\text{Var}(A^3)\text{Var}(B^4) + \\
& \left(\frac{9t^5}{40} - \frac{71t^7}{560}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon^2)\text{Var}(A^4)\text{Var}(B) + \left(\frac{7t^6}{40} - \right. \\
& \left. \frac{27t^8}{280}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon^2)\text{Var}(A^3)\text{Var}(B^2) + \left(-\frac{29t^9}{480}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon^3)\text{Var}(A^4)\text{Var}(B^3) + \\
& \left(\frac{3t^7}{40} - \frac{17t^9}{420}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon^2)\text{Var}(A^2)\text{Var}(B^3) + \left(-\frac{t^5}{20} + \frac{11t^7}{840} - \right. \\
& \left. \frac{17t^9}{10080}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon)\text{Var}(B^3) + \left(-\frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{5} - \frac{23t^7}{560}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon)\text{Var}(A^2)\text{Var}(B) + \\
& \left(-\frac{t^4}{4} + \frac{11t^6}{120} - \frac{17t^8}{1120}\right)^2 \text{Var}(\varepsilon)\text{Var}(A)\text{Var}(B^2) + \dots
\end{aligned} \tag{38}$$

eşitliği elde edilir.

$$\text{Var}(\varepsilon) = E(\varepsilon^2) - [E(\varepsilon)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\varepsilon^2) &= E(\varepsilon^4) - [E(\varepsilon^2)]^2 \\
&= 3\sigma^4 + 6\sigma^2\mu^2 + \mu^4 - (\sigma^2 + \mu^2)^2 = 2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(\varepsilon^3) &= E(\varepsilon^6) - [E(\varepsilon^3)]^2 = 15\sigma^6 + 45\sigma^4\mu^2 + 15\sigma^2\mu^4 + \mu^6 - \\
& (3\sigma^2\mu + \mu^3)^2 = 15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4
\end{aligned}$$

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(B) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12}$$

$$\text{Var}(A^2) = \text{Var}(B^2) = E(A^4) - [E(A^2)]^2 = \frac{4\alpha^4}{45} - \frac{\alpha^3\beta}{45} - \frac{2\alpha^2\beta^2}{15} - \frac{\alpha\beta^3}{45} + \frac{4\beta^4}{45}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(A^3) &= \text{Var}(B^3) = E(A^6) - [E(A^3)]^2 \\
&= \frac{9\alpha^6}{112} + \frac{\alpha^5\beta}{56} - \frac{5\alpha^4\beta^2}{112} - \frac{3\alpha^3\beta^3}{28} - \frac{5\alpha^2\beta^4}{112} + \frac{\alpha\beta^5}{56} + \frac{9\beta^6}{112}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Var}(A^4) &= \text{Var}(B^4) = E(A^8) - [E(A^4)]^2 \\
&= \frac{16\alpha^8}{225} + \frac{7\alpha^7\beta}{225} - \frac{2\alpha^6\beta^2}{225} - \frac{11\alpha^5\beta^3}{225} - \frac{4\alpha^4\beta^4}{45} \\
& \quad - \frac{11\alpha^3\beta^5}{225} - \frac{2\alpha^2\beta^6}{225} + \frac{7\alpha\beta^7}{225} + \frac{16\beta^8}{225}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(A^5) &= Var(B^5) = E(A^{10}) - [E(A^5)]^2 \\
&= \frac{25\alpha^{10}}{396} + \frac{7\alpha^9\beta}{198} + \frac{\alpha^8\beta^2}{132} - \frac{2\alpha^7\beta^3}{99} - \frac{19\alpha^6\beta^4}{396} - \frac{5\alpha^5\beta^5}{66} - \frac{19\alpha^4\beta^6}{396} - \frac{2\alpha^3\beta^7}{99} \\
&\quad + \frac{\alpha^2\beta^8}{132} + \frac{7\alpha\beta^9}{198} + \frac{25\beta^{10}}{396}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(A^6) &= Var(B^6) = E(A^{12}) - [E(A^6)]^2 \\
&= \frac{36\alpha^{12}}{637} + \frac{23\alpha^{11}\beta}{637} + \frac{10\alpha^{10}\beta^2}{637} - \frac{3\alpha^9\beta^3}{637} - \frac{16\alpha^8\beta^4}{637} - \frac{29\alpha^7\beta^5}{637} - \frac{6\alpha^6\beta^6}{91} - \frac{29\alpha^5\beta^7}{637} \\
&\quad - \frac{16\alpha^4\beta^8}{637} - \frac{3\alpha^3\beta^9}{637} + \frac{10\alpha^2\beta^{10}}{637} + \frac{23\alpha\beta^{11}}{637} + \frac{36\beta^{12}}{637}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var(A^7) &= Var(B^7) = E(A^{14}) - [E(A^7)]^2 \\
&= \frac{49\alpha^{14}}{960} + \frac{17\alpha^{13}\beta}{480} + \frac{19\alpha^{12}\beta^2}{960} + \frac{\alpha^{11}\beta^3}{240} - \frac{11\alpha^{10}\beta^4}{960} - \frac{13\alpha^9\beta^5}{480} - \frac{41\alpha^8\beta^6}{960} - \frac{7\alpha^7\beta^7}{120} \\
&\quad - \frac{41\alpha^6\beta^8}{960} - \frac{13\alpha^5\beta^9}{480} - \frac{11\alpha^4\beta^{10}}{960} + \frac{\alpha^3\beta^{11}}{240} + \frac{19\alpha^2\beta^{12}}{960} + \frac{17\alpha\beta^{13}}{480} + \frac{49\beta^{14}}{960}
\end{aligned}$$

olup bulunan varyans değerleri (38)'de yerine yazılırsa,

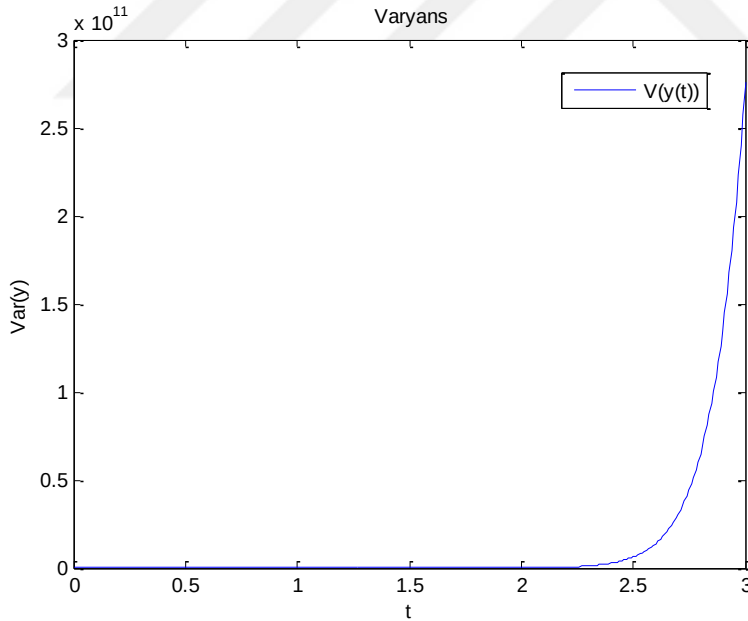
$$\begin{aligned}
Var[y(t)] &= \left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}\right)^2 \left(\frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12}\right) + \left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040}\right)^2 \left(\frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12}\right) + \left(\frac{t^9}{480} - \frac{307t^{11}}{369600}\right)^2 (2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2) \left(\frac{25\alpha^{10}}{396} + \frac{7\alpha^9\beta}{198} + \frac{\alpha^8\beta^2}{132} - \frac{2\alpha^7\beta^3}{99} - \frac{19\alpha^6\beta^4}{396} - \frac{5\alpha^5\beta^5}{66} - \frac{19\alpha^4\beta^6}{396} - \frac{2\alpha^3\beta^7}{99} + \frac{\alpha^2\beta^8}{132} + \frac{7\alpha\beta^9}{198} + \frac{25\beta^{10}}{396}\right) + \left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}\right)^2 \sigma^2 \left(\frac{9\alpha^6}{112} + \frac{\alpha^5\beta}{56} - \frac{5\alpha^4\beta^2}{112} - \frac{3\alpha^3\beta^3}{28} - \frac{5\alpha^2\beta^4}{112} + \frac{\alpha\beta^5}{56} + \frac{9\beta^6}{112}\right) + \left(\frac{t^4}{8} - \frac{17t^6}{240}\right)^2 (2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2) \left(\frac{25\alpha^{10}}{396} + \frac{7\alpha^9\beta}{198} + \frac{\alpha^8\beta^2}{132} - \frac{2\alpha^7\beta^3}{99} - \frac{19\alpha^6\beta^4}{396} - \frac{5\alpha^5\beta^5}{66} - \frac{19\alpha^4\beta^6}{396} - \frac{2\alpha^3\beta^7}{99} + \frac{\alpha^2\beta^8}{132} + \frac{7\alpha\beta^9}{198} + \frac{25\beta^{10}}{396}\right) + \left(-\frac{11t^{13}}{124800}\right)^2 (15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4) \left(\frac{49\alpha^{14}}{960} + \frac{17\alpha^{13}\beta}{480} + \frac{19\alpha^{12}\beta^2}{960} + \frac{\alpha^{11}\beta^3}{240} - \frac{11\alpha^{10}\beta^4}{960} - \frac{13\alpha^9\beta^5}{480} - \frac{41\alpha^8\beta^6}{960} - \frac{7\alpha^7\beta^7}{120} - \frac{41\alpha^6\beta^8}{960} - \frac{13\alpha^5\beta^9}{480} - \frac{11\alpha^4\beta^{10}}{960} + \frac{\alpha^3\beta^{11}}{240} + \frac{19\alpha^2\beta^{12}}{960} + \frac{17\alpha\beta^{13}}{480} + \frac{49\beta^{14}}{960}\right) + \left(-\frac{3t^6}{80}\right)^2 (15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4) \left(\frac{49\alpha^{14}}{960} + \frac{17\alpha^{13}\beta}{480} + \frac{19\alpha^{12}\beta^2}{960} + \frac{\alpha^{11}\beta^3}{240} - \frac{11\alpha^{10}\beta^4}{960} - \frac{13\alpha^9\beta^5}{480} - \frac{41\alpha^8\beta^6}{960} - \frac{7\alpha^7\beta^7}{120} - \frac{41\alpha^6\beta^8}{960} - \frac{13\alpha^5\beta^9}{480} - \frac{11\alpha^4\beta^{10}}{960} + \frac{\alpha^3\beta^{11}}{240} + \frac{19\alpha^2\beta^{12}}{960} + \frac{17\alpha\beta^{13}}{480} + \frac{49\beta^{14}}{960}\right) + \left(-\frac{5t^6}{144}\right)^2 \sigma^2 \left(\frac{9\alpha^6}{112} + \frac{\alpha^5\beta}{56} - \frac{5\alpha^4\beta^2}{112} - \frac{3\alpha^3\beta^3}{28} - \frac{5\alpha^2\beta^4}{112} + \frac{\alpha\beta^5}{56} + \frac{9\beta^6}{112}\right) + \left(-\frac{11t^{11}}{1600}\right)^2 (15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4) \left(\frac{4\alpha^4}{45} - \frac{\alpha^3\beta}{45} - \frac{2\alpha^2\beta^2}{15} - \frac{\alpha\beta^3}{45} + \frac{4\beta^4}{45}\right) \left(\frac{25\alpha^{10}}{396} + \frac{7\alpha^9\beta}{198} + \frac{\alpha^8\beta^2}{132} - \frac{2\alpha^7\beta^3}{99} - \frac{19\alpha^6\beta^4}{396} - \frac{5\alpha^5\beta^5}{66} - \frac{19\alpha^4\beta^6}{396} - \frac{2\alpha^3\beta^7}{99} + \frac{\alpha^2\beta^8}{132} + \frac{7\alpha\beta^9}{198} + \frac{25\beta^{10}}{396}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2\alpha^3\beta^7}{99} + \frac{\alpha^2\beta^8}{132} + \frac{7\alpha\beta^9}{198} + \frac{25\beta^{10}}{396} \Big) + \left(-\frac{11t^{12}}{9600}\right)^2 (15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4) \left(\frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \right. \\
& \left. \frac{\beta^2}{12}\right) \left(\frac{36\alpha^{12}}{637} + \frac{23\alpha^{11}\beta}{637} + \frac{10\alpha^{10}\beta^2}{637} - \frac{3\alpha^9\beta^3}{637} - \frac{16\alpha^8\beta^4}{637} - \frac{29\alpha^7\beta^5}{637} - \frac{6\alpha^6\beta^6}{91} - \frac{29\alpha^5\beta^7}{637} - \frac{16\alpha^4\beta^8}{637} - \right. \\
& \left. \frac{3\alpha^3\beta^9}{637} + \frac{10\alpha^2\beta^{10}}{637} + \frac{23\alpha\beta^{11}}{637} + \frac{36\beta^{12}}{637}\right) + \left(\frac{3t^8}{160} - \frac{307t^{10}}{33600}\right)^2 (2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2) \left(\frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \right. \\
& \left. \frac{\beta^2}{12}\right) \left(\frac{16\alpha^8}{225} + \frac{7\alpha^7\beta}{225} - \frac{2\alpha^6\beta^2}{225} - \frac{11\alpha^5\beta^3}{225} - \frac{4\alpha^4\beta^4}{45} - \frac{11\alpha^3\beta^5}{225} - \frac{2\alpha^2\beta^6}{225} + \frac{7\alpha\beta^7}{225} + \frac{16\beta^8}{225}\right) + \\
& \left(-\frac{7t^7}{80}\right)^2 (15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4) \left(\frac{36\alpha^{12}}{637} + \frac{23\alpha^{11}\beta}{637} + \frac{10\alpha^{10}\beta^2}{637} - \frac{3\alpha^9\beta^3}{637} - \frac{16\alpha^8\beta^4}{637} - \right. \\
& \left. \frac{29\alpha^7\beta^5}{637} - \frac{6\alpha^6\beta^6}{91} - \frac{29\alpha^5\beta^7}{637} - \frac{16\alpha^4\beta^8}{637} - \frac{3\alpha^3\beta^9}{637} + \frac{10\alpha^2\beta^{10}}{637} + \frac{23\alpha\beta^{11}}{637} + \frac{36\beta^{12}}{637}\right) \left(\frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12}\right) + \\
& \left(-\frac{3t^8}{32}\right)^2 (45\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4 - 9\sigma^4) \left(\frac{25\alpha^{10}}{396} + \frac{7\alpha^9\beta}{198} + \frac{\alpha^8\beta^2}{132} - \frac{2\alpha^7\beta^3}{99} - \frac{19\alpha^6\beta^4}{396} - \frac{5\alpha^5\beta^5}{66} - \right. \\
& \left. \frac{19\alpha^4\beta^6}{396} - \frac{2\alpha^3\beta^7}{99} + \frac{\alpha^2\beta^8}{132} + \frac{7\alpha\beta^9}{198} + \frac{25\beta^{10}}{396}\right) \left(\frac{4\alpha^4}{45} - \frac{\alpha^3\beta}{45} - \frac{2\alpha^2\beta^2}{15} - \frac{\alpha\beta^3}{45} + \frac{4\beta^4}{45}\right) + \\
& \left(-\frac{121t^{10}}{4800}\right)^2 (15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4) \left(\frac{9\alpha^6}{112} + \frac{\alpha^5\beta}{56} - \frac{5\alpha^4\beta^2}{112} - \frac{3\alpha^3\beta^3}{28} - \frac{5\alpha^2\beta^4}{112} + \right. \\
& \left. \frac{\alpha\beta^5}{56} + \frac{9\beta^6}{112}\right) \left(\frac{16\alpha^8}{225} + \frac{7\alpha^7\beta}{225} - \frac{2\alpha^6\beta^2}{225} - \frac{11\alpha^5\beta^3}{225} - \frac{4\alpha^4\beta^4}{45} - \frac{11\alpha^3\beta^5}{225} - \frac{2\alpha^2\beta^6}{225} + \frac{7\alpha\beta^7}{225} + \right. \\
& \left. \frac{16\beta^8}{225}\right) + \left(\frac{9t^5}{40} - \frac{71t^7}{560}\right)^2 (2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2) \left(\frac{16\alpha^8}{225} + \frac{7\alpha^7\beta}{225} - \frac{2\alpha^6\beta^2}{225} - \frac{11\alpha^5\beta^3}{225} - \frac{4\alpha^4\beta^4}{45} - \right. \\
& \left. \frac{11\alpha^3\beta^5}{225} - \frac{2\alpha^2\beta^6}{225} + \frac{7\alpha\beta^7}{225} + \frac{16\beta^8}{225}\right) \left(\frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12}\right) + \left(\frac{7t^6}{40} - \frac{27t^8}{280}\right)^2 (2\sigma^4 + \\
& 4\sigma^2\mu^2) \left(\frac{9\alpha^6}{112} + \frac{\alpha^5\beta}{56} - \frac{5\alpha^4\beta^2}{112} - \frac{3\alpha^3\beta^3}{28} - \frac{5\alpha^2\beta^4}{112} + \frac{\alpha\beta^5}{56} + \frac{9\beta^6}{112}\right) \left(\frac{4\alpha^4}{45} - \frac{\alpha^3\beta}{45} - \frac{2\alpha^2\beta^2}{15} - \right. \\
& \left. \frac{\alpha\beta^3}{45} + \frac{4\beta^4}{45}\right) + \left(-\frac{29t^9}{480}\right)^2 (15\sigma^6 + 36\sigma^4\mu^2 + 9\sigma^2\mu^4) \left(\frac{16\alpha^8}{225} + \frac{7\alpha^7\beta}{225} - \frac{2\alpha^6\beta^2}{225} - \right. \\
& \left. \frac{11\alpha^5\beta^3}{225} - \frac{4\alpha^4\beta^4}{45} - \frac{11\alpha^3\beta^5}{225} - \frac{2\alpha^2\beta^6}{225} + \frac{7\alpha\beta^7}{225} + \frac{16\beta^8}{225}\right) \left(\frac{9\alpha^6}{112} + \frac{\alpha^5\beta}{56} - \frac{5\alpha^4\beta^2}{112} - \frac{3\alpha^3\beta^3}{28} - \right. \\
& \left. \frac{5\alpha^2\beta^4}{112} + \frac{\alpha\beta^5}{56} + \frac{9\beta^6}{112}\right) + \left(\frac{3t^7}{40} - \frac{17t^9}{420}\right)^2 (2\sigma^4 + 4\sigma^2\mu^2) \left(\frac{4\alpha^4}{45} - \frac{\alpha^3\beta}{45} - \frac{2\alpha^2\beta^2}{15} - \frac{\alpha\beta^3}{45} + \right. \\
& \left. \frac{4\beta^4}{45}\right) \left(\frac{9\alpha^6}{112} + \frac{\alpha^5\beta}{56} - \frac{5\alpha^4\beta^2}{112} - \frac{3\alpha^3\beta^3}{28} - \frac{5\alpha^2\beta^4}{112} + \frac{\alpha\beta^5}{56} + \frac{9\beta^6}{112}\right) + \left(-\frac{t^5}{20} + \frac{11t^7}{840} - \right. \\
& \left. \frac{17t^9}{10080}\right)^2 \sigma^2 \left(\frac{9\alpha^6}{112} + \frac{\alpha^5\beta}{56} - \frac{5\alpha^4\beta^2}{112} - \frac{3\alpha^3\beta^3}{28} - \frac{5\alpha^2\beta^4}{112} + \frac{\alpha\beta^5}{56} + \frac{9\beta^6}{112}\right) + \left(-\frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{5} - \right. \\
& \left. \frac{23t^7}{560}\right)^2 \sigma^2 \left(\frac{4\alpha^4}{45} - \frac{\alpha^3\beta}{45} - \frac{2\alpha^2\beta^2}{15} - \frac{\alpha\beta^3}{45} + \frac{4\beta^4}{45}\right) \left(\frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12}\right) + \left(-\frac{t^4}{4} + \frac{11t^6}{120} - \right. \\
& \left. \frac{17t^8}{1120}\right)^2 \sigma^2 \left(\frac{\alpha^2}{12} - \frac{\alpha\beta}{6} + \frac{\beta^2}{12}\right) \left(\frac{4\alpha^4}{45} - \frac{\alpha^3\beta}{45} - \frac{2\alpha^2\beta^2}{15} - \frac{\alpha\beta^3}{45} + \frac{4\beta^4}{45}\right) + \dots
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Özel olarak $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$ ve $\varepsilon = 1$ seçilirse,

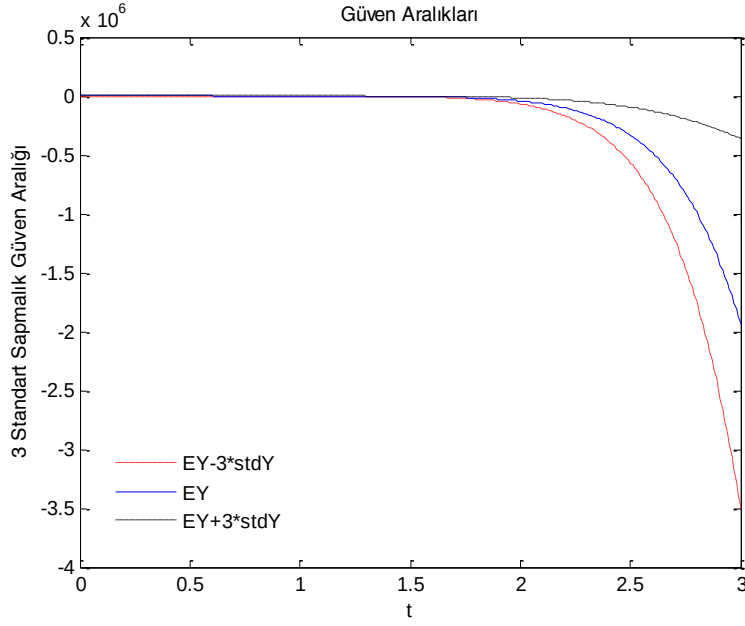
$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = & \left(\frac{1}{12}\right)\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} - \frac{t^6}{720}\right)^2 + \left(\frac{1}{12}\right)\left(t - \frac{t^3}{6} + \frac{t^5}{120} - \frac{t^7}{5040}\right)^2 + \\
& \left(\frac{40044}{11}\right)\left(\frac{t^9}{480} - \frac{307t^{11}}{369600}\right)^2 + \left(\frac{457}{28}\right)\left(-\frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{6}\right)^2 + \left(\frac{40044}{11}\right)\left(\frac{t^4}{8} - \right. \\
& \left.\frac{17t^6}{240}\right)^2 + \left(\frac{57207363}{80}\right)\left(-\frac{11t^{13}}{124800}\right)^2 + \left(\frac{57207363}{80}\right)\left(-\frac{3t^6}{80}\right)^2 + \\
& \left(\frac{457}{28}\right)\left(-\frac{5t^6}{144}\right)^2 + \left(\frac{46281514}{495}\right)\left(-\frac{11t^{11}}{1600}\right)^2 + \left(\frac{9775782}{637}\right)\left(-\frac{11t^{12}}{9600}\right)^2 + \left(\frac{16504}{225}\right)\left(\frac{3t^8}{160} - \right. \\
& \left.\frac{307t^{10}}{33600}\right)^2 + \left(\frac{9775782}{637}\right)\left(-\frac{7t^7}{80}\right)^2 + \left(\frac{1928786}{55}\right)\left(-\frac{3t^8}{32}\right)^2 + \left(\frac{16027447}{350}\right)\left(-\frac{121t^{10}}{4800}\right)^2 + \\
& \left(\frac{16504}{225}\right)\left(\frac{9t^5}{40} - \frac{71t^7}{560}\right)^2 + \left(\frac{15538}{105}\right)\left(\frac{7t^6}{40} - \frac{27t^8}{280}\right)^2 + 960\left(-\frac{29t^9}{480}\right)^2 + \left(\frac{16027447}{350}\right) + \\
& \left(\frac{11882}{35}\right)\left(\frac{3t^7}{40} - \frac{17t^9}{420}\right)^2 + \left(\frac{457}{28}\right)\left(-\frac{t^5}{20} + \frac{11t^7}{840} - \frac{17t^9}{10080}\right)^2 + \left(\frac{34}{135}\right)\left(-\frac{t^3}{2} + \frac{t^5}{5} - \right. \\
& \left.\frac{23t^7}{560}\right)^2 + \left(-\frac{302}{135}\right)\left(-\frac{t^4}{4} + \frac{11t^6}{120} - \frac{17t^8}{1120}\right)^2 + \dots
\end{aligned}$$

varyans değeri elde edilir. Varyans, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 8.'deki grafik elde edilir.



Şekil 8. $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$, $\varepsilon = 1$ özel değerler için (36) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; normal dağılım gösteren rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %99 güven aralığı MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 9.'daki grafik elde edilir.



Şekil 9. $A, B \sim U(\alpha = 1, \beta = 2)$, $\varepsilon \sim N(\mu = 1, \sigma^2 = 4)$, $\varepsilon = 1$ özel değerleri için (36) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-1.9.4.

$$\frac{dy}{dt} - \frac{\frac{1}{dt^2}y}{\frac{1}{dt^2}} + y = 0, \quad (39)$$

başlangıç koşulu $y(0) = B$, $B \sim N(\mu, \sigma^2)$, B normal dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere (39) kesirli diferansiyel denkleminin çözümünü Adomian Ayırıştırma Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

(39) ifadesi düzenlenirse,

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\frac{1}{dt^2}(-y)}{\frac{1}{dt^2}} - y \quad (40)$$

$L = \frac{d}{dt}$ olmak üzere, (40) adi diferansiyel denkleminde eşitliğin her iki tarafına L^{-1} işlemi uygulanırsa,

$$L^{-1} \frac{dy}{dt} = -L^{-1} \frac{\frac{1}{dt^2}(-y)}{\frac{1}{dt^2}} - L^{-1}y$$

$$y_{n+1} = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} A_n - L^{-1} y_n$$

denklemleri elde edilir. Burada A_n ler Adomian polinomlarıdır. $f(y) = -y$, $f'(y) = -1$, $f''(y) = 0$ dir.

$$y_0 = B$$

$$A_0 = f(y_0) = B$$

$n = 0$ için;

$$y_1 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} A_0 - L^{-1} y_0$$

$$y_1 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} B - L^{-1} B$$

$$y_1 = -\frac{2B}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} - Bt$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0) = -y_1$$

$$A_1 = \frac{2B}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + Bt$$

$n = 1$ için;

$$y_2 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} A_1 - L^{-1} y_1$$

$$y_2 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} \left[\frac{2B}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + Bt \right] + L^{-1} \left[\frac{2B}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + Bt \right]$$

$$y_2 = -\left(\frac{2B}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})t}{\Gamma(2)} + B \frac{\Gamma(2)t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} \right) + \frac{4B}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{Bt^2}{2}$$

$$y_2 = -Bt - \frac{4B}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{4B}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{Bt^2}{2}$$

$$y_2 = -Bt + \frac{Bt^2}{2}$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{y_2^2}{2!} f''(y_0)$$

$$A_2 = -y_2$$

$$A_2 = Bt - \frac{Bt^2}{2}$$

$n = 2$ için;

$$y_3 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} A_2 - L^{-1} y_2$$

$$y_3 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} \left(Bt - \frac{Bt^2}{2} \right) + L^{-1} \left(Bt - \frac{Bt^2}{2} \right)$$

$$y_3 = -\left(B \frac{\Gamma(2)t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} - \frac{B}{2} \frac{\Gamma(3)t^{\frac{5}{2}}}{\Gamma(\frac{7}{2})} \right) + \frac{Bt^2}{2} - \frac{Bt^3}{6}$$

$$y_3 = -\frac{4B}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{8B}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} + \frac{Bt^2}{2} - \frac{Bt^3}{6}$$

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad (41)$$

olmak üzere $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ değerleri (41)'de yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$y(t) = B - \frac{2B}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} - Bt - Bt + \frac{Bt^2}{2} - \frac{4B}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{8B}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} + \frac{Bt^2}{2} - \frac{Bt^3}{6} + \dots$$

$$y(t) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + t^2 - 2t - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^3}{6} + \dots \right) B \quad (42)$$

çözümü elde edilir. Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t}$$

ifadesinden $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[B] = \mu$$

$$E[B^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

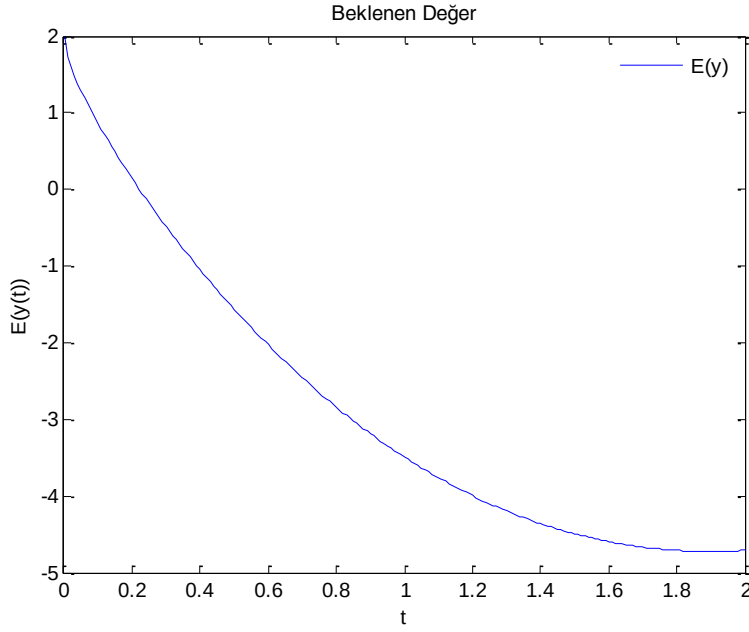
olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa (42) denkleminin beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + t^2 - 2t - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^3}{6} + \dots\right) E(B) \\ E[y(t)] &= \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + t^2 - 2t - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^3}{6} + \dots\right) \mu \end{aligned} \quad (43)$$

beklenen değer (43) olarak bulunur. Özel olarak $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ seçilirse,

$$E[y(t)] = 2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + t^2 - 2t - \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}} t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^3}{6} + \dots\right)$$

denklemini elde edilir. Beklenen değer, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 10.'daki grafik elde edilir.



Şekil 10. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (42) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X ve Y rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (42) denkleminin varyansı,

$$Var(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$Var[y(t)] = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + t^2 - 2t - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^3}{6} + \dots\right)^2 Var(B)$$

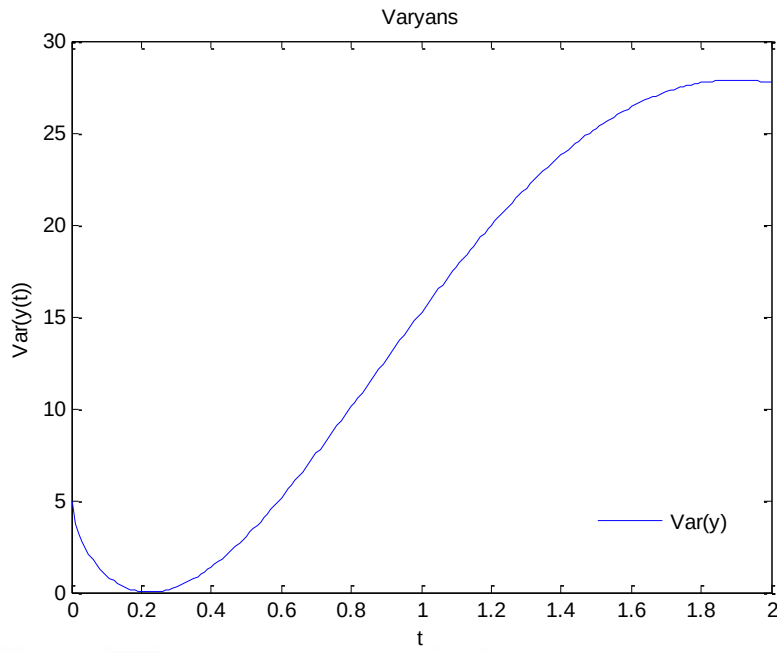
olup bulunan $Var(B)$ değeri yerine yazılırsa,

$$Var[y(t)] = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + t^2 - 2t - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^3}{6} + \dots\right)^2 \sigma^2$$

elde edilir. Özel olarak, $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ seçilirse,

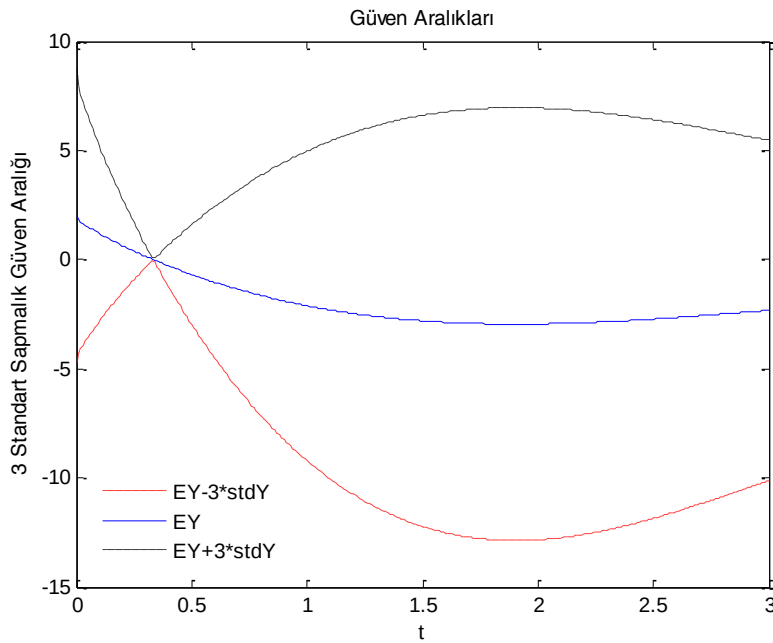
$$Var[y(t)] = 5 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + t^2 - 2t - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{15\sqrt{\pi}}t^{\frac{5}{2}} - \frac{t^3}{6} + \dots\right)^2$$

varyans değeri bulunur. Varyans, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 11.'deki grafik elde edilir.



Şekil 11. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (42) denkleminin varyansın çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; normal dağılım gösteren rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %99 güven aralığı, MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 12.'deki grafik elde edilir.



Şekil 12. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (42) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-1.9.5.

$$y^{\frac{1}{2}} = 1 - y^2 \quad (44)$$

başlangıç koşulu $y(0) = A$, $A \sim \text{üstel}(\lambda)$ üstel dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere (44) kesirli diferansiyel denkleminin çözümünü Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

(44) kesirli diferansiyel denklemi düzenlenirse,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dt^{\frac{1}{2}}} = 1 - y^2$$

denklemi elde edilir. $L = \frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}}$ olmak üzere, (44) adi diferansiyel denkleminde eşitliğin her iki tarafına $L^{-\frac{1}{2}}$ işlemi uygulanırsa,

$$L^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{d^{\frac{1}{2}}y}{dt^{\frac{1}{2}}}\right) = L^{-\frac{1}{2}}(1) - L^{-\frac{1}{2}}(y^2)$$

$$y_{n+1} = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}A_n + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

elde edilir. Burada A_n ler Adomian Polinomlarıdır. $f(y) = y^2$, $f'(y) = 2y$ ve $f''(y) = 2$ dir.

$$y_0 = A$$

$$A_0 = f(y_0) = A^2$$

$n = 0$ için;

$$y_1 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}A_0 + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$y_1 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}A^2 + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$y_1 = -A^2 \frac{\Gamma(1)t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}$$

$$y_1 = -A^2 \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}$$

$$y_1 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - A^2)t^{\frac{1}{2}}$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - A^2)t^{\frac{1}{2}} \cdot 2A^2$$

$$A_1 = \frac{4}{\sqrt{\pi}}A^2(1 - A^2)t^{\frac{1}{2}}$$

$n = 1$ için;

$$y_2 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}A_1 + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$y_2 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}\left(\frac{4}{\sqrt{\pi}}A^2(1 - A^2)t^{\frac{1}{2}}\right) + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$y_2 = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}A^2(1 - A^2)\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}}t^{\frac{1}{2}} + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$y_2 = -\frac{4}{\sqrt{\pi}}A^2(1 - A^2)\frac{\Gamma(\frac{3}{2})t}{\Gamma(2)} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}$$

$$y_2 = -2A^2(1 - A^2)t + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} f''(y_0)$$

$$A_2 = \left(-2A^2(1 - A^2)t + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}\right) 2A^2 + \frac{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - A^2)t^{\frac{1}{2}}\right)^2}{2} \cdot 2$$

$$A_2 = \left(-4A^4 + \frac{4}{\pi}(1 - A^2) \right) (1 - A^2)t + \frac{4A^2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}$$

$n = 2$ için;

$$y_3 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} A_2 + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$y_3 = -\frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} \left[\left(-4A^4 + \frac{4}{\pi}(1 - A^2) \right) (1 - A^2)t + \frac{4A^2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} \right] + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$y_3 = -\left(-4A^4 + \frac{4}{\pi}(1 - A^2) \right) (1 - A^2) \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} t - \frac{4A^2}{\sqrt{\pi}} \frac{d^{-\frac{1}{2}}}{dt^{-\frac{1}{2}}} t^{\frac{1}{2}} + L^{-\frac{1}{2}}(1)$$

$$y_3 = \left(4A^4 - \frac{4}{\pi}(1 - A^2) \right) (1 - A^2) \frac{\Gamma(2)t^{\frac{3}{2}}}{\Gamma(\frac{5}{2})} - \frac{4A^2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})t}{\Gamma(2)} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}$$

$$y_3 = \left(4A^4 - \frac{4}{\pi}(1 - A^2) \right) (1 - A^2) \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} - 2A^2 t + \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}}$$

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t) + y_2(t) + y_3(t) + \dots \quad (45)$$

olmak üzere $y_0(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$, $y_3(t)$ değerleri (45)'te yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$y(t) = A + \frac{2}{\sqrt{\pi}}(1 - A^2)t^{\frac{1}{2}} - 2A^2(1 - A^2)t + \frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + \left(4A^4 - \frac{4}{\pi}(1 - A^2) \right) (1 - A^2) \frac{4}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} - 2A^2 t + \frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + \dots$$

$$y(t) = A + \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} - 4t + \frac{32}{3\pi\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} \right) A^2 + \left(2t + \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) t^{\frac{3}{2}} \right) A^4 - \frac{16}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} A^6 + \frac{6}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} - \frac{16}{3\pi\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (46)$$

çözümü elde edilir. Üstel dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $A \sim \text{üstel}(\lambda)$ dir. Üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalananak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

ifadesinden $A \sim \text{üstel}(\lambda)$ rastgele değişkeninin 1, 2, 4, 6, 8 ve 12. momenti,

$$E[A] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[A^2] = \frac{2!}{\lambda^2}$$

$$E[A^4] = \frac{4!}{\lambda^4}$$

$$E[A^6] = \frac{6!}{\lambda^6}$$

$$E[A^8] = \frac{8!}{\lambda^8}$$

$$E[A^{12}] = \frac{12!}{\lambda^{12}}$$

olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa (46) denkleminin beklenen değeri,

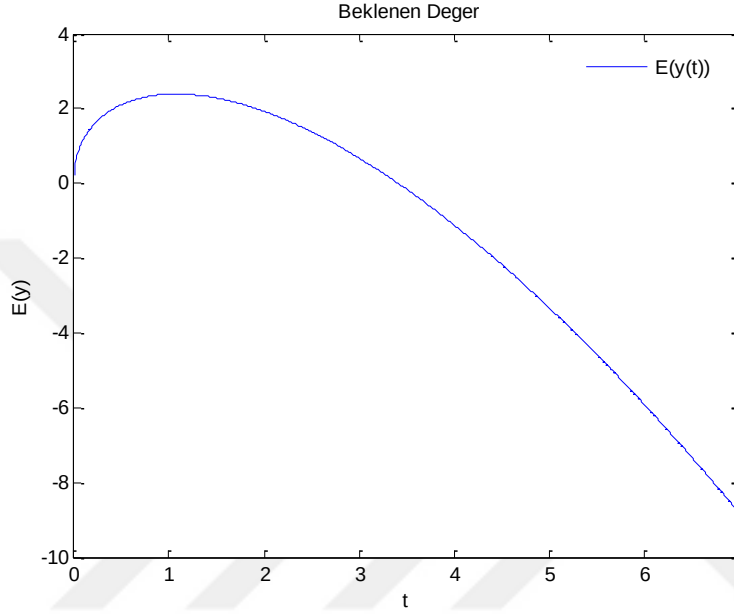
$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E(A) + \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} - 4t + \frac{32}{3\pi\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right)E(A^2) + \\ &\quad \left(2t + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)t^{\frac{3}{2}}\right)E(A^4) - \frac{16}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}E(A^6) + \\ &\quad E\left(\frac{6}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}}\right) - E\left(\frac{16}{3\pi\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right) + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= \frac{1}{\lambda} + \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} - 4t + \frac{32}{3\pi\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right)\frac{2!}{\lambda^2} + \left(2t + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)t^{\frac{3}{2}}\right)\frac{4!}{\lambda^4} - \\ &\quad \frac{16}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\frac{6!}{\lambda^6} + \frac{6}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} - \frac{16}{3\pi\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} + \dots \end{aligned} \quad (47)$$

beklenen değer (47) olarak bulunur. Özel olarak $A \sim \text{üstel}(\lambda = 5)$ seçilirse,

$$E[y(t)] = \frac{1}{5} + \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} - 4t + \frac{32}{3\pi\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right) \frac{2!}{5^2} + \left(2t + \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) t^{\frac{3}{2}} \right) \frac{4!}{5^4} - \frac{16}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \frac{6!}{5^6} + \frac{6}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} - \frac{16}{3\pi\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} + \dots$$

elde edilir. Beklenen değer, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 13.'deki grafik elde edilir.



Şekil 13. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 5)$ özel değeri için (46) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X ve Y rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned} Var[y(t)] = Var(A) + \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} - 4t + \frac{32}{3\pi\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right)^2 Var(A^2) + \\ \left(2t + \frac{16}{3\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{\pi} \right) t^{\frac{3}{2}} \right)^2 Var(A^4) + \left(\frac{16}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right)^2 Var(A^6) + \dots \end{aligned} \quad (48)$$

$$Var(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$Var(A^2) = E(A^4) - [E(A^2)]^2 = \frac{4!}{\lambda^4} - \left(\frac{2}{\lambda^2} \right)^2 = \frac{20}{\lambda^4}$$

$$Var(A^4) = E(A^8) - [E(A^4)]^2 = \frac{8!}{\lambda^8} - \left(\frac{4!}{\lambda^4} \right)^2 = \frac{39744}{\lambda^8}$$

$$Var(A^6) = E(A^{12}) - [E(A^6)]^2 = \frac{12!}{\lambda^{12}} - \left(\frac{6!}{\lambda^6}\right)^2 = \frac{478483200}{\lambda^{12}}$$

(48) eşitliği ve varyans değerleri elde edilir. Bulunan varyans değerleri (48) denkleminde yerine yazılırsa,

$$Var[y(t)] = \frac{1}{\lambda^2} + \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} - 4t + \frac{32}{3\pi\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right)^2 \frac{20}{\lambda^4} +$$

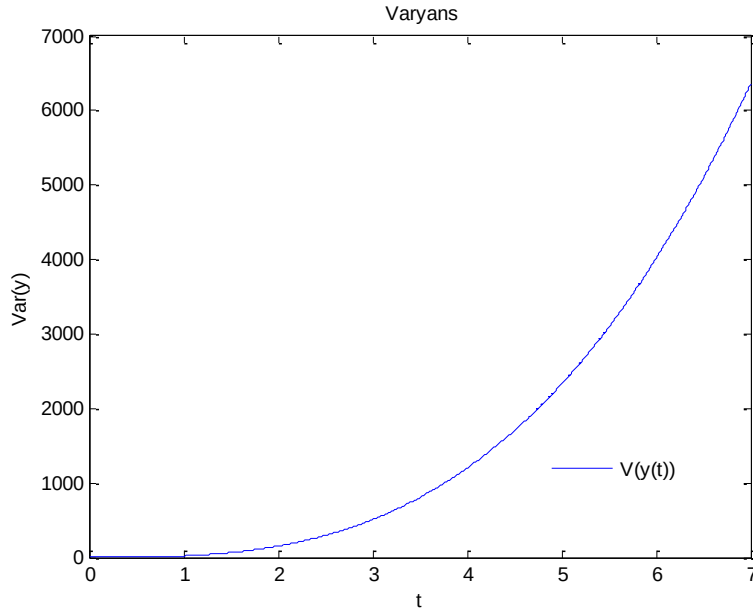
$$\left(2t + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)t^{\frac{3}{2}}\right)^2 \frac{39744}{\lambda^8} + \left(\frac{16}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right)^2 \frac{478483200}{\lambda^{12}} + \dots$$

varyans değeri bulunur. Özel olarak $A \sim \text{üstel}(\lambda = 5)$ seçilirse varyans,

$$Var[y(t)] = \frac{1}{5^2} + \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} - 4t + \frac{32}{3\pi\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right)^2 \frac{20}{5^4} +$$

$$\left(2t + \frac{16}{3\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)t^{\frac{3}{2}}\right)^2 \frac{39744}{5^8} + \left(\frac{16}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}}\right)^2 \frac{478483200}{5^{12}} + \dots$$

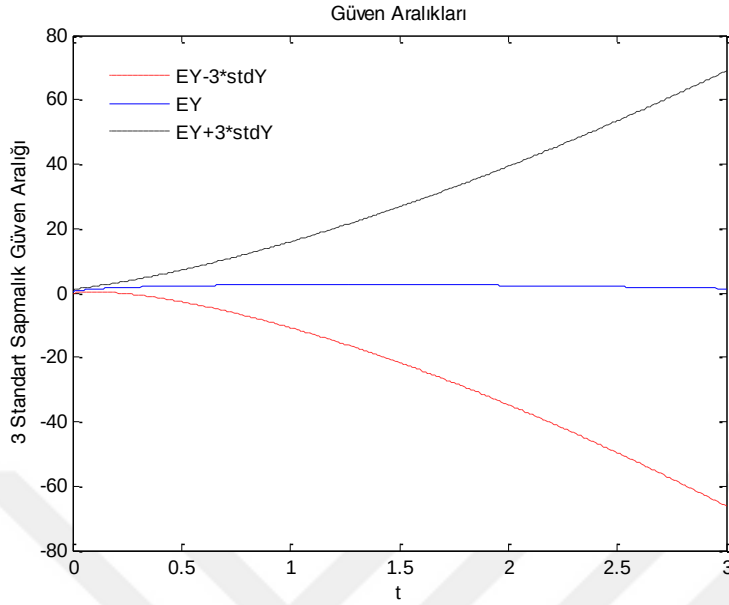
olarak hesaplanır. Varyans, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 14.'teki grafik elde edilir.



Şekil 14. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 5)$ özel değeri için (46) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; (0, 0.8) aralığı göz önüne alınırsa üstel dağılıma sahip rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %98 güven

aralığının çözüm davranışı, MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 15.'teki grafik elde edilir.



Şekil 15. $A \sim \text{üstel}(\lambda = 5)$ özel değeri için (46) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-1.9.6.

$$Dy(t) - D^{\frac{1}{2}}y(t) - y(t) = \frac{3A}{2}t^{\frac{1}{2}} - \frac{3A}{4}\sqrt{\pi}t - At^{\frac{3}{2}} \quad (49)$$

başlangıç koşulu $y(0) = 0$, $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ A normal dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere (49) kesirli diferansiyel denkleminin çözümünü Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}}$$

$$y'(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \frac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1}$$

$$D^{\frac{1}{2}}y(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p D^{\frac{1}{2}}t^{\frac{p}{2}} = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)t^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}$$

olmak üzere $y(t)$, $y'(t)$ ve $D^{\frac{1}{2}}y(t)$ eşitlikleri (49) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p \frac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1} - \sum_{p=1}^{\infty} c_p \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}) t^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(\frac{p+1}{2})} -$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}} = \frac{3A}{2} t^{\frac{1}{2}} - \frac{3A}{4} \sqrt{\pi} t - A t^{\frac{3}{2}}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki $t^{\frac{p}{2}}$ katsayıları eşitlenirse;

$$p = 1 \text{ için } t^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{c_1}{2} = 0 \text{ ise } c_1 = 0$$

$$p = 2 \text{ için } t^0; \quad c_2 - c_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} = 0 \text{ ise } c_2 = 0$$

$$p = 3 \text{ için } t^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{3c_3}{2} - c_2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} - c_1 = \frac{3A}{2} \text{ ise } c_3 = A$$

$$p = 4 \text{ için } t; \quad 2c_4 - c_3 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)} - c_2 = -\frac{3A}{4} \sqrt{\pi} \text{ ise } c_4 = 0$$

$$p = 5 \text{ için } t^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{5c_5}{2} - c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} - c_3 = -A \text{ ise } c_5 = 0$$

$$p = 6 \text{ için } t^2; \quad 3c_6 - c_5 \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(3)} - c_4 = 0 \text{ ise } c_6 = 0$$

olup katsayılar $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = A$, $c_4 = 0$, $c_5 = 0$, $c_6 = 0$ olarak bulunur.
 $p \geq 6$ $c_p = 0$ dır.

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}} = c_0 + c_1 t^{\frac{1}{2}} + c_2 t + c_3 t^{\frac{3}{2}} + c_4 t^2 + c_5 t^{\frac{5}{2}} + \dots \quad (50)$$

olup bulunan katsayılar (50) denkleminde yerine yazılırsa;

$$y(t) = A t^{\frac{3}{2}} \quad (51)$$

çözümü elde edilir. Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalananarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t}$$

ifadesinden $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[A] = \mu, E[A^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

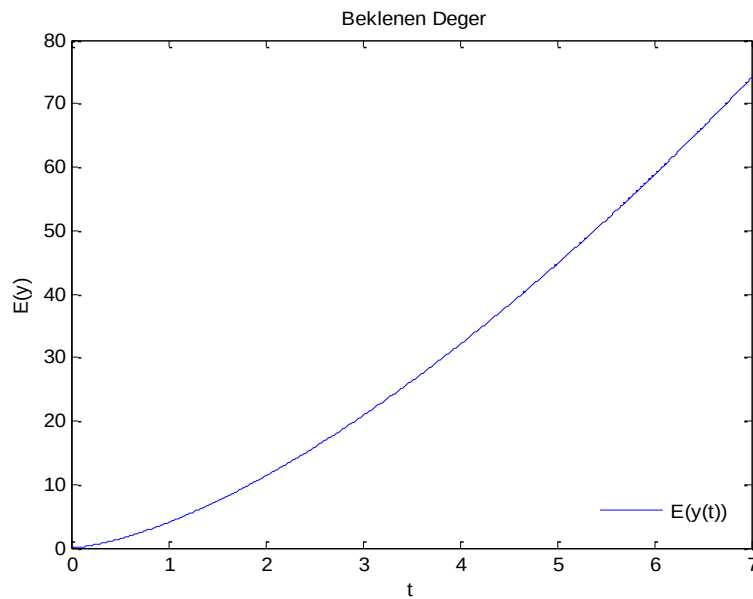
olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (51) denkleminin beklenen değeri,

$$E[y(t)] = t^{\frac{3}{2}} E(A) = t^{\frac{3}{2}} \mu$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$ seçilirse,

$$E[y(t)] = 4t^{\frac{3}{2}}$$

elde edilir. Beklenen değer, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 16.'daki grafik elde edilir.



Şekil 16. $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$ özel değerler için (51) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X ve Y rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (51) denkleminin varyansı,

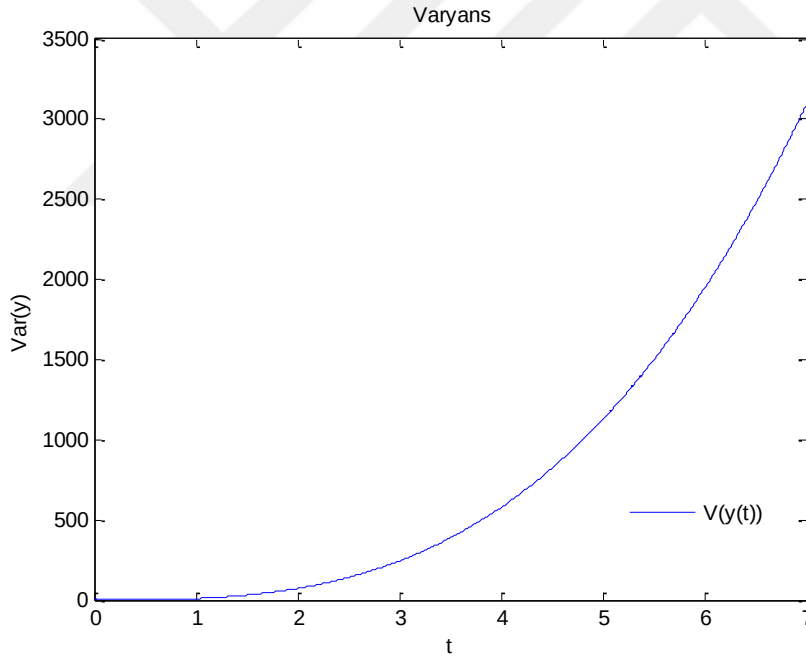
$$Var(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \sigma^2$$

$$Var[y(t)] = t^3 Var(A) = t^3 \sigma^2$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$ seçilirse,

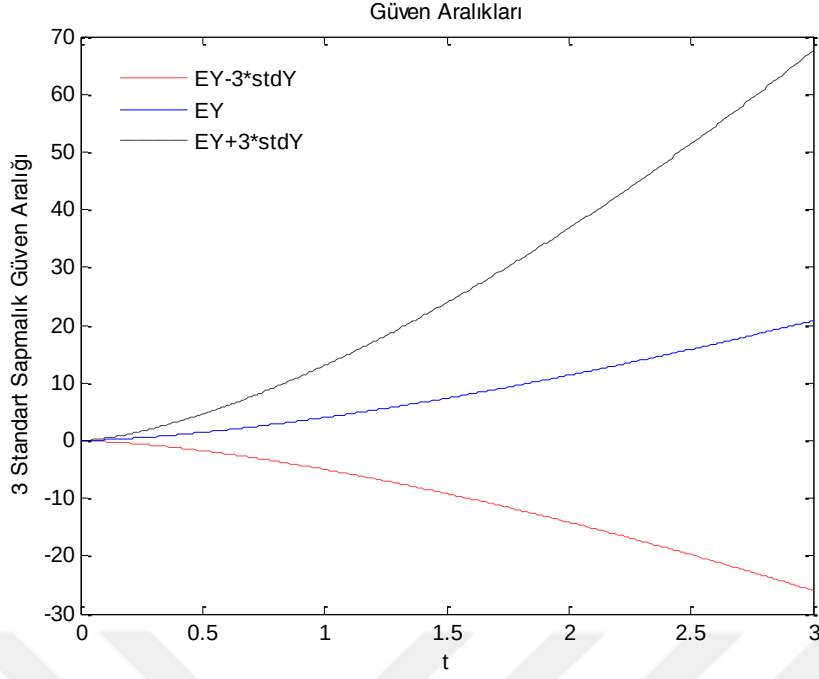
$$Var[y(t)] = 9t^3$$

elde edilir. Varyans, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse şekil 17.'deki grafik elde edilir.



şekil 17. $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$ özel değerler için (51) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; normal dağılım gösteren rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %99 güven aralığının çözüm davranışı, MATLAB (2013a) ile çizdirilirse şekil 18.'deki grafik elde edilir.



Şekil 18. $A \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 9)$ özel değerler için (51) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-1.9.7.

$$D^2 y(t) - D^{\frac{3}{2}} y(t) + y(t) = \frac{3B}{4} t^{-\frac{1}{2}} - \frac{3B}{4} \sqrt{\pi} + \frac{15A}{4} t^{\frac{1}{2}} - \frac{15A}{8} \sqrt{\pi} t + B t^{\frac{3}{2}} + A t^{\frac{5}{2}} \quad (52)$$

başlangıç koşulları $y(0) = 0, y'(0) = 0$, $A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, $B \sim \text{Gamma}(\omega, \lambda)$ gamma dağılımına sahip rastgele değişkenler olmak üzere (52) kesirli diferansiyel denkleminin çözümünü Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}}$$

$$y'(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \frac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1}$$

$$y''(t) = \sum_{p=3}^{\infty} c_p \frac{p}{2} \left(\frac{p}{2} - 1 \right) t^{\frac{p}{2}-2}$$

$$D^{\frac{3}{2}}y(t) = \sum_{p=3}^{\infty} c_p D^{\frac{3}{2}}t^{\frac{p}{2}} = \sum_{p=3}^{\infty} c_p \frac{\Gamma(\frac{p}{2}+1)t^{\frac{p-3}{2}}}{\Gamma(\frac{p-1}{2})}$$

olmak üzere $y(t)$, $y''(t)$ ve $D^{\frac{3}{2}}y(t)$ eşitlikleri (52) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{p=3}^{\infty} c_p \frac{p(p-2)}{4} t^{\frac{p-4}{2}} - \sum_{p=3}^{\infty} c_p \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})t^{\frac{p-3}{2}}}{\Gamma(\frac{p-1}{2})} + \sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}} &= \frac{3B}{4} t^{-\frac{1}{2}} - \frac{3B}{4} \sqrt{\pi} + \\ &\frac{15A}{4} t^{\frac{1}{2}} - \frac{15A}{8} \sqrt{\pi} t + B t^{\frac{3}{2}} + A t^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki $t^{\frac{p}{2}}$ katsayıları eşitlenirse;

$$p = 3 \text{ için } t^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{3}{4} c_3 = \frac{3B}{4} \text{ ise } c_3 = B$$

$$p = 4 \text{ için } t^0; \quad 2c_4 - c_3 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(1)} = -\frac{3B}{4} \sqrt{\pi} \text{ ise } c_4 = 0$$

$$p = 5 \text{ için } t^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{15}{4} c_5 - c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})} = \frac{15A}{4} \text{ ise } c_5 = A$$

$$p = 6 \text{ için } t; \quad 6c_6 - c_5 \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(2)} = -\frac{15A}{8} \sqrt{\pi} \text{ ise } c_6 = 0$$

$$p = 7 \text{ için } t^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{35}{4} c_7 - c_6 \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{5}{2})} + c_3 = B \text{ ise } c_7 = 0$$

$$p = 8 \text{ için } t^2; \quad 12c_8 - c_7 \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(3)} + c_4 = 0 \text{ ise } c_8 = 0$$

$$p = 9 \text{ için } t^{\frac{5}{2}}; \quad \frac{63}{4} c_9 - c_8 \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{7}{2})} + c_5 = A \text{ ise } c_9 = 0$$

olup katsayılar $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = B$, $c_4 = 0$, $c_5 = A$, $c_6 = 0$, $c_7 = 0$, $c_8 = 0$ ve $c_9 = 0$ olarak bulunur. $p \geq 9$ için $c_p = 0$ dır.

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}} = c_0 + c_1 t^{\frac{1}{2}} + c_2 t + c_3 t^{\frac{3}{2}} + c_4 t^2 + c_5 t^{\frac{5}{2}} + \dots \quad (53)$$

bulunan katsayılar (53) denkleminde yerine yazılırsa;

$$y(t) = B t^{\frac{3}{2}} + A t^{\frac{5}{2}} \quad (54)$$

çözümü elde edilir. Beta dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $A \sim Beta(\alpha, \beta)$ dir. Beklenen değer tanımından faydalanarak $A \sim Beta(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[A] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$E[A^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

olarak hesaplanır. Gamma dağılımına sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $B \sim Gamma(\omega, \lambda)$ dir. Beklenen değer tanımından faydalanarak $B \sim Gamma(\omega, \lambda)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[B] = \frac{\omega}{\lambda}$$

$$E[B^2] = \frac{\omega(\omega+1)}{\lambda^2}$$

olarak hesaplanır.

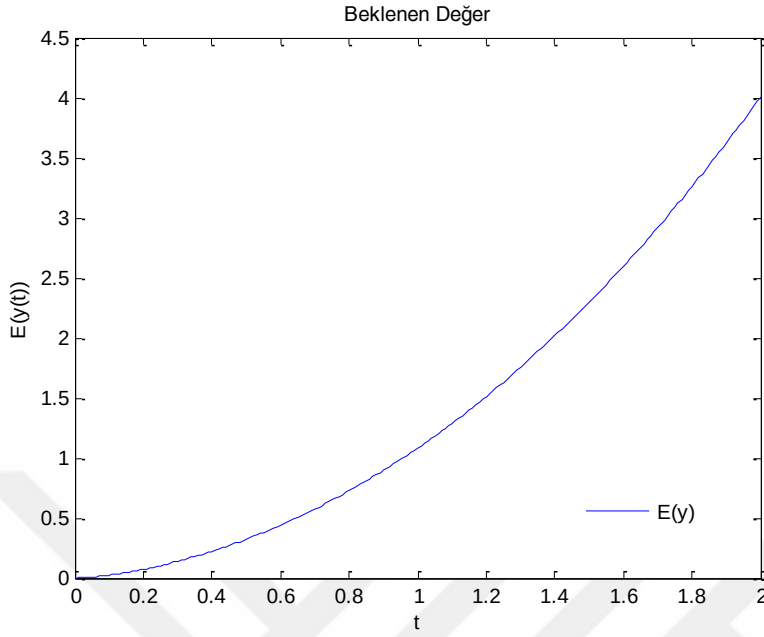
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değer temelli özellikleri kullanılırsa (54) denkleminin beklenen değeri,

$$E[y(t)] = t^{\frac{3}{2}} E(B) + t^{\frac{5}{2}} E(A) = t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\omega}{\lambda} \right) + t^{\frac{5}{2}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 4), B \sim Gamma(\omega = 3, \lambda = 4)$ seçilirse,

$$E[y(t)] = t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{4} \right) + t^{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{3} \right)$$

elde edilir. Beklenen değer, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 19.'daki grafik elde edilir.



Şekil 19. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 4)$, $B \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (54) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X ve Y rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (54) denkleminin varyansı,

$$\text{Var}(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$\text{Var}(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = \frac{\omega(\omega+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2 = \frac{\omega}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}[y(t)] = \text{Var}(B)t^3 + \text{Var}(A)t^5$$

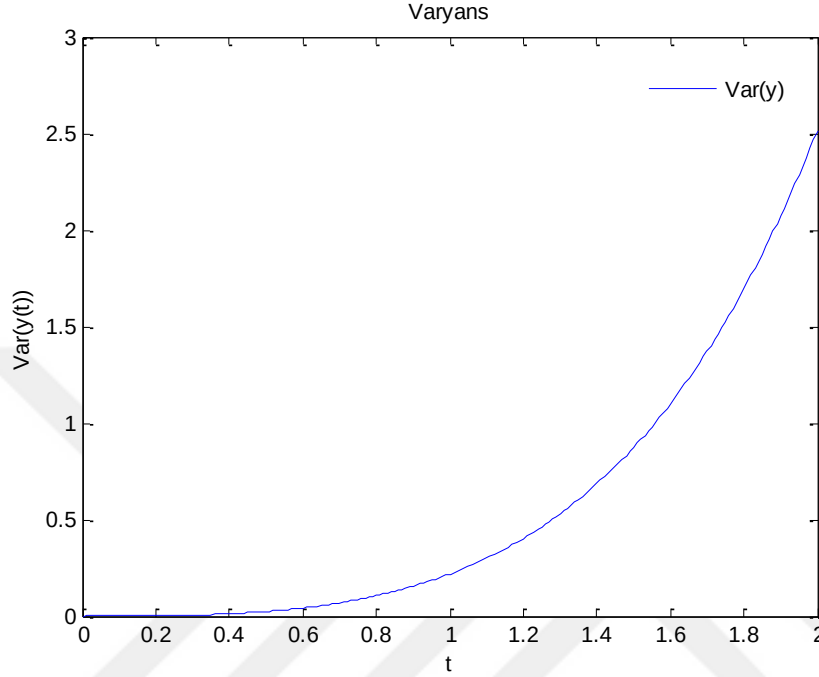
olup bulunan varyans değerleri yerine yazılırsa,

$$\text{Var}[y(t)] = t^3 \left(\frac{\omega}{\lambda^2}\right) + t^5 \left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}\right)$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 4)$, $B \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ seçilirse;

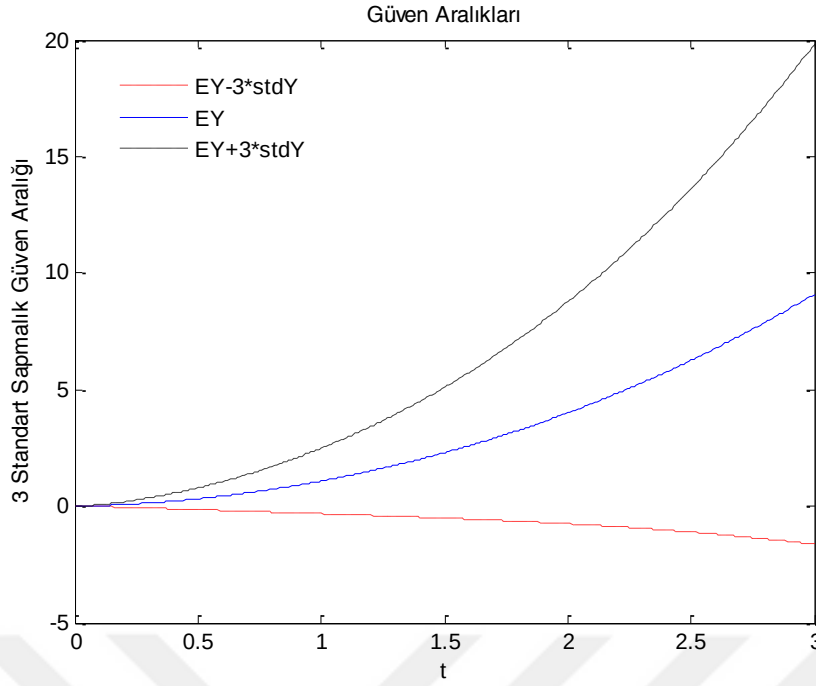
$$Var[y(t)] = t^3 \left(\frac{3}{16} \right) + t^5 \left(\frac{2}{63} \right)$$

elde edilir. Varyans, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 20.'deki grafik elde edilir.



Şekil 20. $A \sim Beta(\alpha = 2, \beta = 4)$, $B \sim Gamma(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (54) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; (0, 1) aralığı için Beta dağılımı gösteren rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık güven aralığı %100 olarak elde edilir. (0, 2.05) aralığı için Gamma dağılımına sahip rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık güven aralığı ise %98 olarak elde edilir. Güven aralığı MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 21.'deki grafik elde edilir.



Şekil 21. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 2, \beta = 4)$, $B \sim \text{Gamma}(\omega = 3, \lambda = 4)$ özel değerler için (54) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek- 1.9.8.

$$D^{\frac{1}{2}}y(t) + D^{\frac{3}{2}}y(t) - y(t) = \frac{3A}{4}\sqrt{\pi} + \frac{4B}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + \frac{3A}{4}\sqrt{\pi}t - At^{\frac{3}{2}} + \frac{8B}{3\sqrt{\pi}}t^{\frac{3}{2}} - Bt^2 \quad (55)$$

başlangıç koşulları $y(0) = 0, y'(0) = 0$, $A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ parametrelili Beta dağılımına ve $B \sim \text{üstel}(\lambda)$ parametrelili üstel dağılıma sahip rastgele değişkenler olmak üzere (55) kesirli diferansiyel denkleminin çözümünü Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}}$$

$$D^{\frac{1}{2}}y(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p D^{\frac{1}{2}}t^{\frac{p}{2}} = \sum_{p=1}^{\infty} c_p \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2})t^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}$$

$$D^{\frac{3}{2}}y(t) = \sum_{p=3}^{\infty} c_p D^{\frac{3}{2}}t^{\frac{p}{2}} = \sum_{p=3}^{\infty} c_p \frac{\Gamma(\frac{p+4}{2})t^{\frac{p-3}{2}}}{\Gamma(\frac{p+1}{2})}$$

olmak üzere $y(t)$, $y''(t)$ ve $D^{\frac{3}{2}}y(t)$ eşitlikleri (55) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{p=1}^{\infty} c_p \frac{\Gamma(\frac{p+2}{2}) t^{\frac{p-1}{2}}}{\Gamma(\frac{p+1}{2})} + \sum_{p=3}^{\infty} c_p \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2}) t^{\frac{p-3}{2}}}{\Gamma(\frac{p-1}{2})} - \sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}} = \frac{3A}{4} \sqrt{\pi} + \frac{4B}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + \frac{3A}{4} \sqrt{\pi} t - A t^{\frac{3}{2}} + \frac{8B}{3\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} - B t^2$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki $t^{\frac{p}{2}}$ katsayıları eşitlenirse; $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ dır.

$$p = 1 \text{ için } t^0; \quad c_1 \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(1)} + c_3 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(1)} - c_0 = \frac{3A}{4} \sqrt{\pi} \text{ ise } c_3 = A$$

$$p = 2 \text{ için } t^{\frac{1}{2}}; \quad c_2 \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{3}{2})} + c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})} - c_1 = \frac{4B}{\sqrt{\pi}} \text{ ise } c_4 = B$$

$$p = 3 \text{ için } t; \quad c_3 \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)} + c_5 \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(2)} - c_2 = \frac{3A}{4} \sqrt{\pi} \text{ ise } c_5 = 0$$

$$p = 4 \text{ için } t^{\frac{3}{2}}; \quad c_4 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{5}{2})} + c_6 \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{5}{2})} - c_3 = \frac{8B}{3\sqrt{\pi}} - A \text{ ise } c_6 = 0$$

$$p = 5 \text{ için } t^2; \quad c_5 \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(3)} + c_7 \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(3)} - c_4 = -B \text{ ise } c_7 = 0$$

$$p = 6 \text{ için } t^{\frac{5}{2}}; \quad c_6 \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{7}{2})} + c_8 \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{7}{2})} - c_5 = 0 \text{ ise } c_8 = 0$$

$$p = 7 \text{ için } t^3; \quad c_7 \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(4)} + c_9 \frac{\Gamma(\frac{11}{2})}{\Gamma(4)} - c_6 = 0 \text{ ise } c_9 = 0$$

$$p = 8 \text{ için } t^{\frac{7}{2}}; \quad c_8 \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{9}{2})} + c_{10} \frac{\Gamma(6)}{\Gamma(\frac{9}{2})} - c_7 = 0 \text{ ise } c_{10} = 0$$

olup katsayılar $c_0 = 0$, $c_1 = 0$, $c_2 = 0$, $c_3 = A$, $c_4 = B$, $c_5 = 0$, $c_6 = 0$, $c_7 = 0$, $c_8 = 0$ ve $c_9 = 0$, $c_{10} = 0$ olarak bulunur. $p \geq 8$ için $c_p = 0$ dır.

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} c_p t^{\frac{p}{2}} = c_0 + c_1 t^{\frac{1}{2}} + c_2 t + c_3 t^{\frac{3}{2}} + c_4 t^2 + c_5 t^{\frac{5}{2}} + \dots \quad (56)$$

olup bulunan katsayılar (56) eşitliğinde yerine yazılırsa;

$$y(t) = At^{\frac{3}{2}} + Bt^2 \quad (57)$$

çözümü elde edilir. Beta dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $A \sim Beta(\alpha, \beta)$ dir. Beklenen değer tanımından faydalananarak $A \sim Beta(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[A] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$E[A^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

olarak hesaplanır. Üstel dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $B \sim \text{üstel}(\lambda)$ dir. Üstel dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalananarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

ifadesinden $B \sim \text{üstel}(\lambda)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[B] = \frac{1}{\lambda}$$

$$E[B^2] = \frac{2!}{\lambda^2}$$

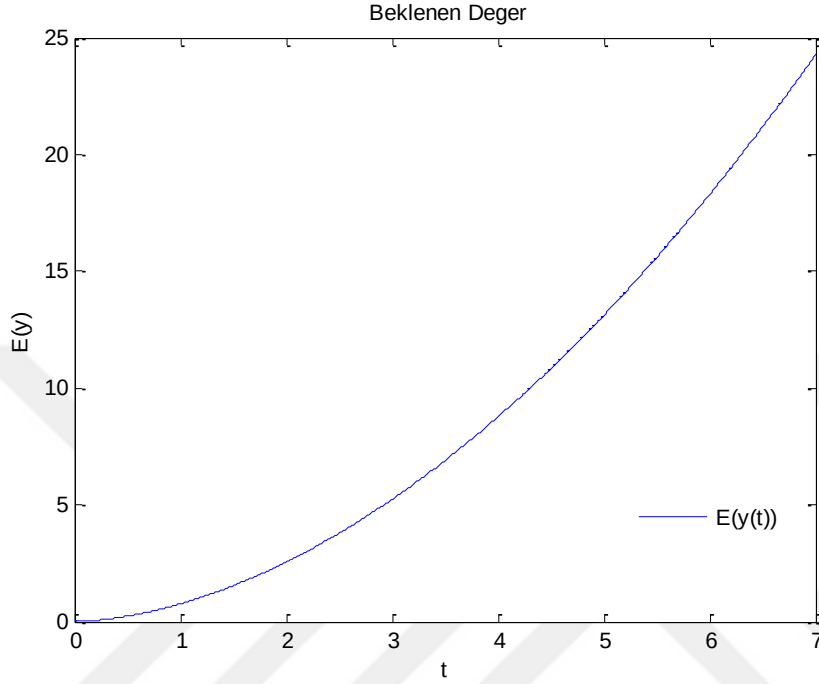
olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa (57) denkleminin beklenen değeri,

$$E[y(t)] = t^{\frac{3}{2}} E(A) + t^2 E(B) = t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right) + t^2 \left(\frac{1}{\lambda} \right)$$

elde edilir. Özel olarak $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 4)$ ve $B \sim \text{üstel}(\lambda = 3)$ seçilirse,

$$E[y(t)] = t^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{7} \right) + t^2 \left(\frac{1}{3} \right)$$

bulunur. Beklenen değer, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 22.'deki grafik elde edilir.



Şekil 22. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ ve $B \sim \text{üstel}(\lambda = 3)$ özel değerler için (57) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (57) denkleminin varyansı,

$$\text{Var}(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \right)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$\text{Var}(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = \frac{2!}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda} \right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

olup bulunan varyans değerleri yerine yazılırsa,

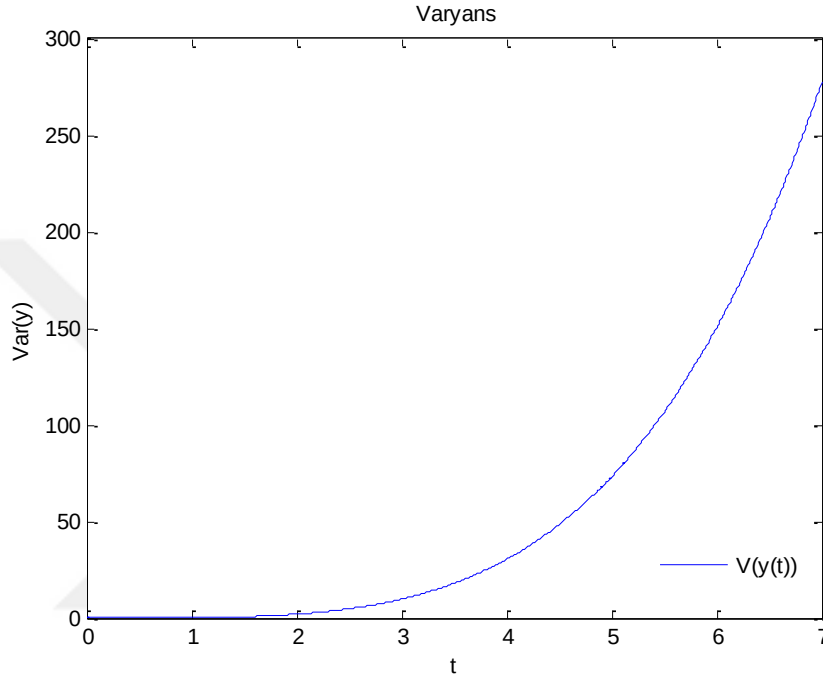
$$\text{Var}[y(t)] = t^3 \text{Var}(A) + t^4 \text{Var}(B)$$

$$\text{Var}[y(t)] = t^3 \left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \right) + t^4 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ ve $B \sim \text{üstel}(\lambda = 3)$ seçilirse,

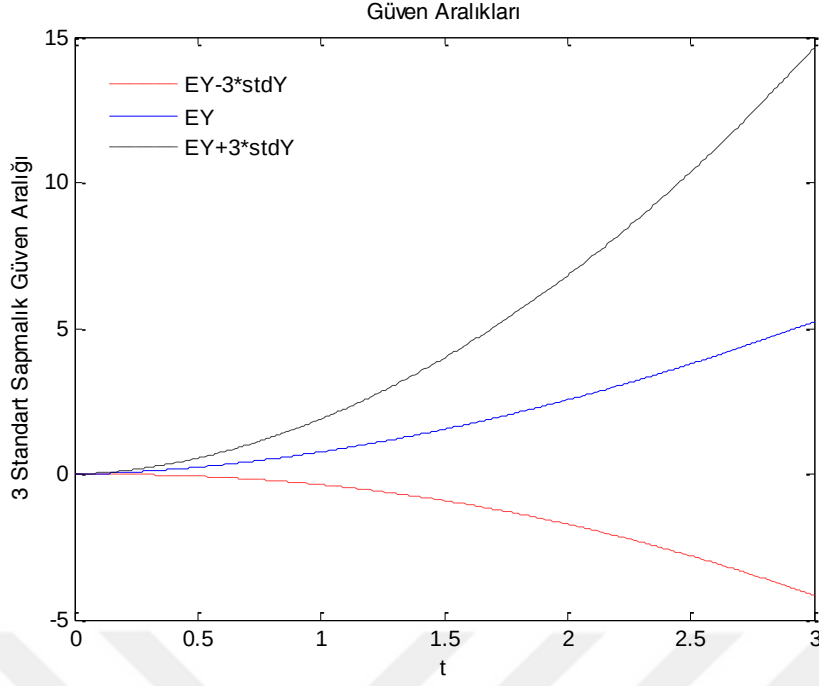
$$\text{Var}[y(t)] = t^3 \left(\frac{3}{98} \right) + t^4 \left(\frac{1}{9} \right)$$

varyans değeri elde edilir. Varyans, verilen parametre değerleri için MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 23.'teki grafik elde edilir.



Şekil 23. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ ve $B \sim \text{üstel}(\lambda = 3)$ özel değerler için (57) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; (0, 1) aralığı için Beta dağılımına sahip rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %100 güven aralığı elde edilir. (0, 1.3) aralığı için rastgele değişken üstel dağılıma sahip ise yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %98 güven aralığı elde edilir. Güven aralığı MATLAB (2013a) ile çizdirilirse Şekil 24.'teki grafik elde edilir.



Şekil 24. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ ve $B \sim \text{üstel}(\lambda = 3)$ özel değerler için (57) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek- 1.9.9.

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} + D^{\frac{3}{2}}y(t,x) + \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = \left(\frac{4A}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + 2At + At^2 \right) e^x \quad (58)$$

başlangıç koşulları $y(0, x) = 0, y(t, 0) = At^2, y_x(t, 0) = At^2, 0 \leq t \leq T$ olarak verilen $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$ parametrelili beta dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere (58) kesirli kısmî diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$y(t, s) = \mathcal{L}[y(t, x)]$ ve $\mathcal{L}[e^{mx}] = \frac{1}{s-m}$ olmak üzere,

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} + D^{\frac{3}{2}}y(t,x) + \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = \left(\frac{4A}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + 2At + At^2 \right) e^x \quad (59)$$

(59) kısmî diferansiyel denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü hesaplanırsa,

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} \right] + \mathcal{L} \left[D^{\frac{3}{2}}y(t,x) \right] + \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \right] = \mathcal{L} \left[\left(\frac{4A}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{1}{2}} + 2At + At^2 \right) e^x \right]$$

elde edilir.

$$y_t(t, s) + D^{\frac{3}{2}}y(t, s) + s^2y(t, s) - sy(t, 0) - y_x(t, 0) = \left(\frac{4A}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + 2At + At^2\right)\frac{1}{s-1}$$

$$y(0, s) = \mathcal{L}[(0, x)] = \mathcal{L}(0) = 0 \text{ olmak üzere,}$$

$$y_t(t, s) + D^{\frac{3}{2}}y(t, s) + s^2y(t, s) = Ast^2 + At^2 + \left(\frac{4A}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + 2At + At^2\right)\frac{1}{s-1} \quad (60)$$

Cauchy denklemi bulunur.

$$y(t, s) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) t^{\frac{p}{2}}$$

$$y_t(t, s) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p(s) \frac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1}$$

$$D^{\frac{3}{2}}y(t, s) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})t^{\frac{p-3}{2}}}{\Gamma(\frac{p-1}{2})}$$

olmak üzere $y(t, s)$, $y_t(t, s)$ ve $D^{\frac{3}{2}}y(t, s)$ eşitlikleri (60) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p(s) \frac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1} + \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})t^{\frac{p-3}{2}}}{\Gamma(\frac{p-1}{2})} + s^2 \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) t^{\frac{p}{2}} = Ast^2 + At^2 + \left(\frac{4A}{\sqrt{\pi}}t^{\frac{1}{2}} + 2At + At^2\right)\frac{1}{s-1}$$

eşitliği elde edilir.

Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki $t^{\frac{p}{2}}$ katsayıları eşitlenirse; $A_0(s) = 0, A_1(s) = 0$ dır.

$$p = 1 \text{ için } t^{-\frac{1}{2}}; \quad \frac{1}{2}A_1(s) + A_2(s) \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\frac{1}{2})} = 0 \text{ ise } A_2(s) = 0$$

$$p = 2 \text{ için } t^0; \quad A_2(s) + A_3(s) \frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(2)} + s^2 A_0(s) = 0 \text{ ise } A_3(s) = 0$$

$$p = 3 \text{ için } t^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{3}{2} A_3(s) + A_4(s) \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})} + s^2 A_1(s) = \frac{4A}{\sqrt{\pi}(s-1)} \text{ ise } A_4(s) = \frac{A}{s-1}$$

$$p = 4 \text{ için } t; \quad 2A_4(s) + A_5(s) \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(2)} + s^2 A_2(s) = \frac{2A}{s-1} \text{ ise } A_5(s) = 0$$

$$p = 5 \text{ için } t^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{5}{2} A_5(s) + A_6(s) \frac{\Gamma(4)}{\Gamma(\frac{5}{2})} + s^2 A_3(s) = 0 \text{ ise } A_6(s) = 0$$

$$p = 6 \text{ için } t^2; \quad 3A_6(s) + A_7(s) \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(3)} + s^2 A_4(s) = \frac{As^2}{s-1} \text{ ise } A_7(s) = 0$$

$$p = 7 \text{ için } t^{\frac{5}{2}}; \quad \frac{7}{2} A_7(s) + A_8(s) \frac{\Gamma(5)}{\Gamma(\frac{7}{2})} + s^2 A_5(s) = 0 \text{ ise } A_8(s) = 0$$

$$p = 8 \text{ için } t^3; \quad 4A_8(s) + A_9(s) \frac{\Gamma(\frac{11}{2})}{\Gamma(4)} + s^2 A_6(s) = 0 \text{ ise } A_9(s) = 0$$

olup katsayılar $A_0(s) = 0$, $A_1(s) = 0$, $A_2(s) = 0$, $A_3(s) = 0$, $A_4(s) = \frac{A}{s-1}$, $A_5(s) = 0$, $A_6(s) = 0$, $A_7(s) = 0$, $A_8(s) = 0$ ve $A_9(s) = 0$, olarak bulunur. $p \geq 8$ için $A_p(s) = 0$ dır.

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) t^{\frac{p}{2}} = A_0(s) + A_1(s) t^{\frac{1}{2}} + A_2(s) t + A_3(s) t^{\frac{3}{2}} + A_4(s) t^2 + A_5(s) t^{\frac{5}{2}} + \dots \quad (61)$$

bulunan katsayılar (61) denkleminde yerine yazılırsa;

$$y(t) = \frac{At^2}{s-1}$$

bulunur. $y(t, s) = \mathcal{L}[y(t, x)]$ ise $\mathcal{L}^{-1}[y(t, s)] = y(t, x)$ olduğundan,

$$y(t, x) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{At^2}{s-1} \right] = At^2 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] = At^2 e^x \quad (62)$$

çözümü elde edilir.

Beta dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ dir. Beklenen değer tanımından faydalanarak $A \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[A] = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$$E[A^2] = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)}$$

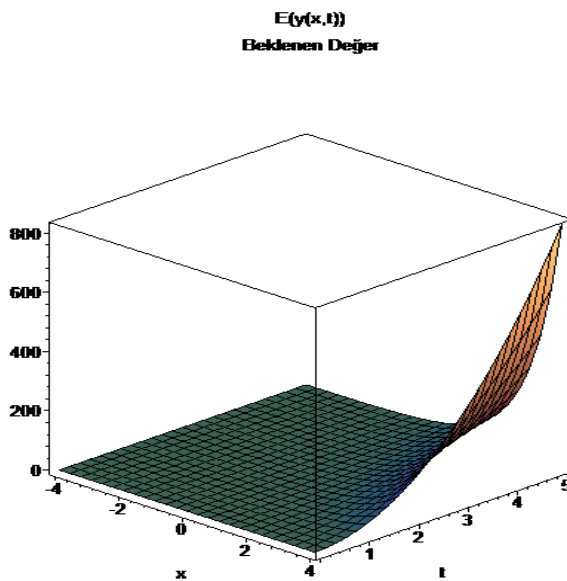
olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa (62) denkleminin beklenen değeri,

$$E[y(t)] = t^2 e^x E(A) = t^2 e^x \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right)$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$ seçilirse,

$$E[y(t)] = \frac{3}{5} t^2 e^x$$

elde edilir. Beklenen değer verilen parametre değerleri için MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 25. elde edilir.



Şekil 25. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$ özel değerler için (62) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (62) denkleminin varyansı,

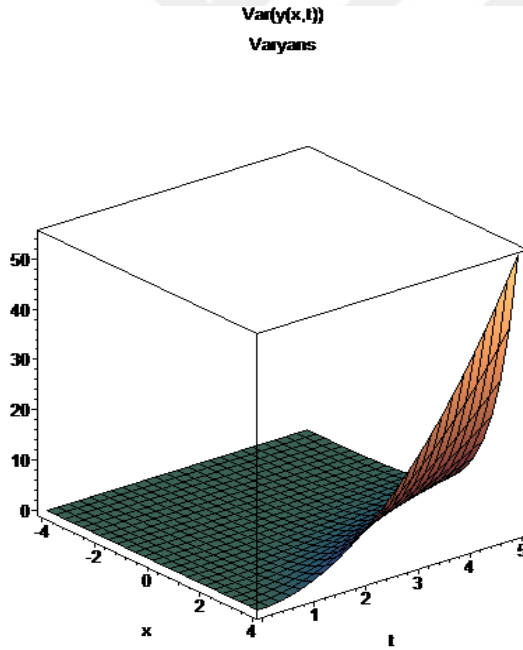
$$Var(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)} - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^2 = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$Var[y(t, x)] = t^2 e^x Var(A) = t^2 e^x \left(\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)} \right)$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 2)$ seçilirse varyans,

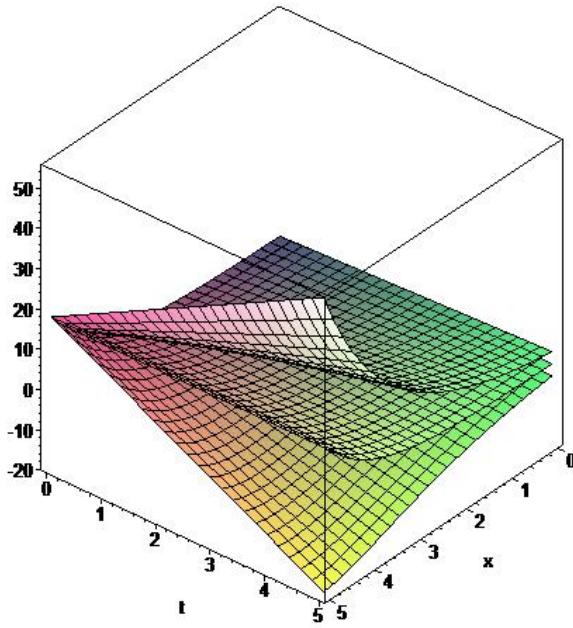
$$Var[y(t, x)] = \frac{1}{25} t^2 e^x$$

olarak hesaplanır. Varyans, verilen parametre değerleri için MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 26.'daki grafik elde edilir.



Şekil 26. $A \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 2)$ özel değerler için (62) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; $(0, 1)$ aralığı için Beta dağılımına sahip rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin %100 güven aralığı, MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 27.'deki grafik elde edilir.



Şekil 27. $A \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 2)$ özel değerler için (62) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek- 1.9.10.

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} + D^{\frac{5}{2}}y(t,x) + \frac{\partial y(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = Ae^{-x} \left(4t^3 + \frac{32}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right) \quad (63)$$

başlangıç koşulları $y(0, x) = 0, y(t, 0) = At^4, y_x(t, 0) = -At^4, 0 \leq t \leq T$ olarak verilen $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ parametrelili normal dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere (63) kesirli kısmî diferansiyel denkleminin çözümünü bulunuz.

Çözüm:

$$y(t, s) = \mathcal{L}[y(t, x)] \text{ ve } \mathcal{L}[e^{mx}] = \frac{1}{s-m} \text{ olmak üzere,}$$

$$\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} + D^{\frac{5}{2}}y(t,x) + \frac{\partial y(t,x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = Ae^{-x} \left(4t^3 + \frac{32}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right) \quad (64)$$

(64) kısmî diferansiyel denkleminin her iki tarafının Laplace dönüşümü hesaplanırsa,

$$\mathcal{L} \left[\frac{\partial y(t,x)}{\partial t} \right] + \mathcal{L} \left[D^{\frac{5}{2}}y(t,x) \right] + \mathcal{L} \left[\frac{\partial y(t,x)}{\partial x} \right] + \mathcal{L} \left[\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} \right] = \mathcal{L} \left[Ae^{-x} \left(4t^3 + \frac{32}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right) \right]$$

elde edilir.

$$y_t(t, s) + D^{\frac{5}{2}}y(t, s) + sy(t, s) - y(t, 0) + s^2y(t, s) - sy(t, 0) - y_x(t, 0) = 4A \left(t^3 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right) \left(\frac{1}{1+s} \right)$$

$y(0, s) = \mathcal{L}[(0, x)] = \mathcal{L}(0) = 0$ olmak üzere,

$$y_t(t, s) + D^{\frac{5}{2}}y(t, s) + sy(t, s) + s^2y(t, s) = sAt^4 + 4A \left(t^3 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right) \left(\frac{1}{1+s} \right) \quad (65)$$

Cauchy denklemi bulunur.

$$y(t, s) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) t^{\frac{p}{2}}$$

$$y_t(t, s) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p(s) \frac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1}$$

$$D^{\frac{5}{2}}y(t, s) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2}) t^{\frac{p-5}{2}}}{\Gamma(\frac{p-3}{2})}$$

olmak üzere $y(t, s)$, $y_t(t, s)$ ve $D^{\frac{5}{2}}y(t, s)$ eşitlikleri (65) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{p=1}^{\infty} A_p(s) \frac{p}{2} t^{\frac{p}{2}-1} + \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2}) t^{\frac{p-5}{2}}}{\Gamma(\frac{p-3}{2})} + (s + s^2) \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s) t^{\frac{p}{2}} = sAt^4 + 4A \left(t^3 + \frac{8}{\sqrt{\pi}} t^{\frac{3}{2}} \right) \left(\frac{1}{1+s} \right)$$

eşitliği elde edilir.

Eşitliğin sağ ve sol tarafındaki $t^{\frac{p}{2}}$ katsayıları eşitlenirse; $A_0(s) = A_1(s) = A_2(s) = A_3(s) = A_4(s) = 0$ dir.

$$p = 0 \text{ için } t^0; \quad A_2(s) + A_5(s) \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(1)} + (s + s^2)A_0(s) = 0 \text{ ise } A_5(s) = 0$$

$$p = 1 \text{ için } t^{\frac{1}{2}}; \quad \frac{3}{2}A_3(s) + A_6(s)\frac{\Gamma(\frac{4}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} + (s + s^2)A_1(s) = 0 \text{ ise } A_6(s) = 0$$

$$p = 2 \text{ için } t; \quad 2A_4(s) + A_7(s)\frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{\Gamma(2)} + (s + s^2)A_2(s) = 0 \text{ ise } A_7(s) = 0$$

$$p = 3 \text{ için } t^{\frac{3}{2}}; \quad \frac{5}{2}A_5(s) + A_8(s)\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\Gamma(\frac{5}{2})} + (s + s^2)A_3(s) = \frac{32A}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{1+s}\right) \text{ ise}$$

$$A_8(s) = \frac{A}{1+s}$$

$$p = 4 \text{ için } t^2; \quad 3A_6(s) + A_9(s)\frac{\Gamma(\frac{11}{2})}{\Gamma(3)} + (s + s^2)A_4(s) = 0 \text{ ise } A_9(s) = 0$$

$$p = 5 \text{ için } t^{\frac{5}{2}}; \quad \frac{7}{2}A_7(s) + A_{10}(s)\frac{\Gamma(\frac{6}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} + (s + s^2)A_5(s) = 0 \text{ ise } A_{10}(s) = 0$$

$$p = 6 \text{ için } t^3; \quad 4A_8(s) + A_{11}(s)\frac{\Gamma(\frac{13}{2})}{\Gamma(4)} + (s + s^2)A_6(s) = 4A\left(\frac{1}{1+s}\right) \text{ ise}$$

$$A_{11}(s) = 0$$

$$p = 7 \text{ için } t^{\frac{7}{2}}; \quad \frac{9}{2}A_9(s) + A_{12}(s)\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(\frac{9}{2})} + (s + s^2)A_7(s) = 0 \text{ ise } A_{12}(s) = 0$$

$$p = 8 \text{ için } t^4; \quad 5A_{10}(s) + A_{13}(s)\frac{\Gamma(\frac{15}{2})}{\Gamma(5)} + (s + s^2)A_8(s) = sA \text{ ise}$$

$$A_{13}(s) = 0$$

olup katsayılar $A_0(s) = 0$, $A_1(s) = 0$, $A_2(s) = 0$, $A_3(s) = 0$, $A_4(s) = 0$, $A_5(s) = 0$, $A_6(s) = 0$, $A_7(s) = 0$, $A_8(s) = \frac{A}{1+s}$ ve $A_9(s) = 0$, $A_{10}(s) = 0$, $A_{11}(s) = 0$, $A_{12}(s) = 0$, $A_{13}(s) = 0$ olarak bulunur. $p \geq 8$ için $A_p(s) = 0$ dır.

$$y(t) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p(s)t^{\frac{p}{2}} = A_0(s) + A_1(s)t^{\frac{1}{2}} + A_2(s)t + A_3(s)t^{\frac{3}{2}} +$$

$$A_4(s)t^2 + A_5(s)t^{\frac{5}{2}} + \dots \quad (66)$$

bulunan katsayılar (66) denkleminde yerine yazılırsa;

$$y(t) = \frac{At^4}{s+1}$$

olarak bulunur.

$$y(t, s) = \mathcal{L}[y(t, x)] \text{ ise } \mathcal{L}^{-1}[y(t, s)] = y(t, x) \text{ olduğundan,}$$

$$y(t, x) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{At^4}{s+1} \right] = At^4 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \right] = At^4 e^{-x} \quad (67)$$

çözümü elde edilir.

Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \mu t}$$

ifadesinden $A \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[A] = \mu$$

$$E[A^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

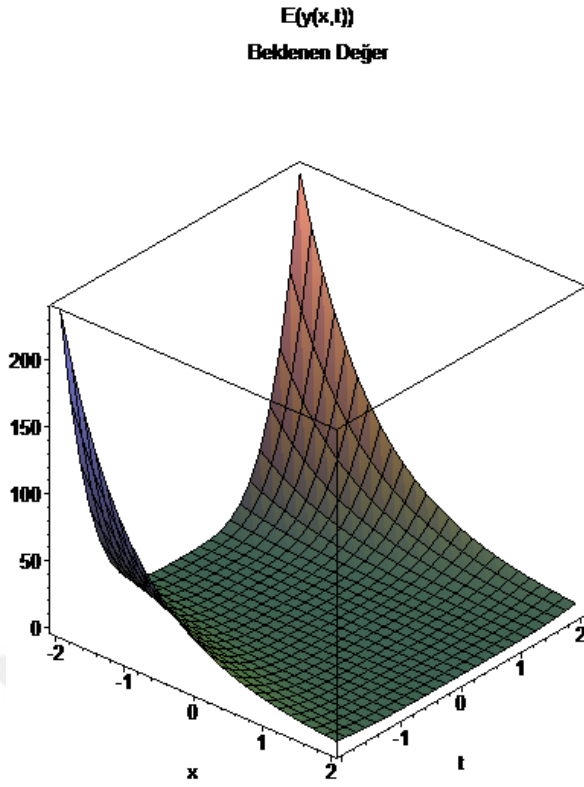
olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa (67) denkleminin beklenen değeri,

$$E[y(t, x)] = t^4 e^{-x} E(A) = t^4 e^{-x} \mu$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ seçilirse,

$$E[y(t, x)] = 2t^4 e^{-x}$$

elde edilir. Beklenen değer verilen parametre değerleri için MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 28. elde edilir.



Şekil 28. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (67) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X ve Y rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (67) denkleminin varyansı,

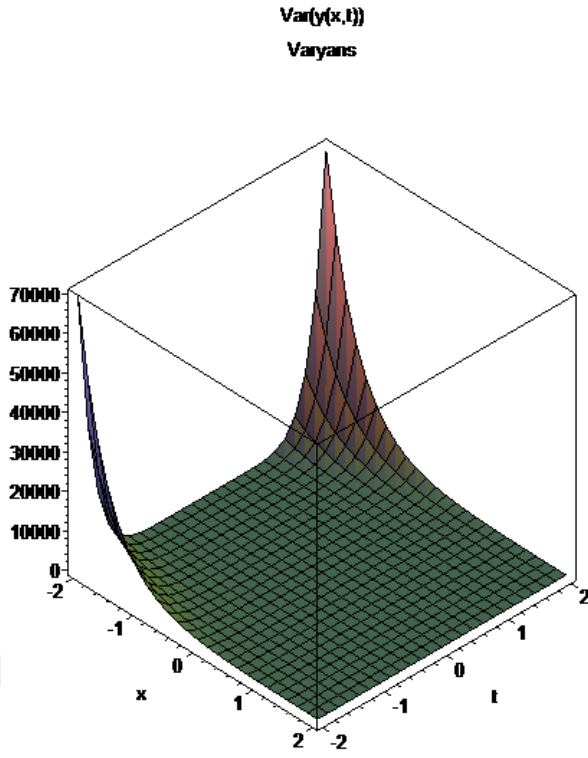
$$Var(A) = E(A^2) - [E(A)]^2 = \sigma^2$$

$$Var[y(t, x)] = t^8 e^{-2x} Var(A) = t^8 e^{-2x} \sigma^2$$

olarak bulunur. Özel olarak $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ seçilirse varyans,

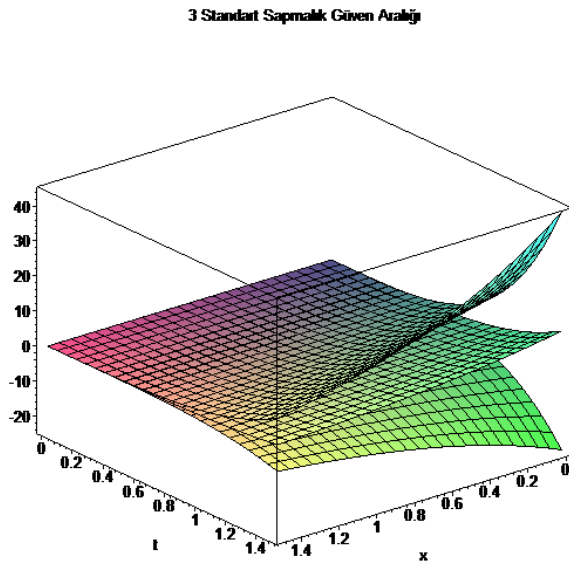
$$Var[y(t, x)] = 5t^8 e^{-2x}$$

olarak hesaplanır. Varyans verilen parametre değerleri için MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 29.'daki grafik elde edilir.



Şekil 29. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (67) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; normal dağılım gösteren rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %99 güven aralığı, MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 30. elde edilir.



Şekil 30. $A \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 5)$ özel değerler için (67) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek- 1.9.11.

$$By_t = By_{xx} + 6By - 6y^2 \quad (68)$$

başlangıç koşulları $y(x, 0) = \frac{B}{(1+e^x)^2}$ olarak verilen $B \sim \text{Gamma}(\omega, \lambda)$ parametrelili gamma dağılımına sahip rastgele değişken olmak üzere (68) kısmî diferansiyel denkleminin çözümünü Laplace-Adomian Ayırıştırma Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$By_t = By_{xx} + 6By - 6y^2$$

(68) denklemini $y(x, 0) = f(x) = \frac{B}{(1+e^x)^2}$ başlangıç koşullarına sahiptir.

$$\begin{cases} y_0(x, t) = f(x) \\ y_{n+1}(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_n(x, t) + A_n(y_0, y_1, \dots, y_n) \} \right], n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

olup buna göre,

$$y_0(x, t) = \frac{B}{(1+e^x)^2}$$

$$A_0 = f(y_0) = 6y_0^2 = \frac{6B^2}{(1+e^x)^4}$$

$n = 0$ için;

$$y_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_0(x, t) + A_0 \} \right]$$

$$y_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ y_{0,xx} + 6y_0 - \frac{6}{B} y_0^2 \} \right]$$

$$y_1(x, t) = -\frac{10Bt(e^{2x}+e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$A_1 = y_1 \frac{df(y_0)}{dy_0} = 12y_0y_1 = 12 \left(\frac{B}{(1+e^x)^2} \right) \left(-\frac{10Bt(e^{2x}+e^x)}{(1+e^x)^4} \right)$$

$$A_1 = -120 \frac{B^2 t (e^{2x} + e^x)}{(1+e^x)^6}$$

$n = 1$ için;

$$y_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_1(x, t) + A_1 \} \right]$$

$$y_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ y_{1,xx} + 6y_1 - \frac{A_1}{B} \right\} \right]$$

$$y_2(x, t) = \frac{25Bt^2(2e^{2x} - e^x)}{(1+e^x)^4}$$

$$A_2 = y_2 \frac{df(y_0)}{dy_0} + \frac{y_1^2}{2!} \frac{d^2 f(y_0)}{dy_0^2} = 12y_0 y_2 + 6y_1^2$$

$$A_2 = 12 \left(\frac{B}{(1+e^x)^2} \right) \left(\frac{25Bt^2(2e^{2x} - e^x)}{(1+e^x)^4} \right) + \frac{600B^2 t^2 (e^{2x} + e^x)}{(1+e^x)^8}$$

$$A_2 = \frac{600B^2 t^2 (e^{2x} + e^x)}{(1+e^x)^8} + \frac{300B^2 t^2 (2e^{2x} - e^x)}{(1+e^x)^6}$$

$n = 2$ için;

$$y_3(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_2(x, t) + A_2 \} \right]$$

$$y_3(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s} \mathcal{L} \left\{ y_{2,xx} + 6y_2 - \frac{A_2}{B} \right\} \right]$$

$$y_3(x, t) = -\frac{125Bt^3(4e^{3x} - 7e^{2x} + e^x)}{3(1+e^x)^5}$$

$$y_{LADM} = y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + y_3(x, t) + \dots \quad (69)$$

olmak üzere $y_0(x, t)$, $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$, $y_3(x, t)$ değerleri (69)'da yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$y_{LADM} = \frac{B}{(1+e^x)^2} - \frac{10Bt(e^{2x}+e^x)}{(1+e^x)^4} + \frac{25Bt^2(2e^{2x}-e^x)}{(1+e^x)^4} - \frac{125Bt^3(4e^{3x}-7e^{2x}+e^x)}{3(1+e^x)^5} + \dots \quad (70)$$

denklemini elde edilir. (70) denklemini Taylor serisine açılırsa;

$$y(x, t) = \frac{1}{4}B - \frac{1}{4}Bx + \frac{5}{4}Bt + \frac{1}{16}Bx^2 - \frac{5}{8}Btx + \frac{25}{16}Bt^2 + \frac{1}{48}Bx^3 - \frac{5}{16}Btx^2 + \frac{25}{16}Bt^2x - \frac{125}{48}Bt^3 \quad (71)$$

çözümü elde edilir. X rastgele değişkeni gamma dağılıma sahip ise moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$$

ifadesinden $B \sim \text{Gamma}(\omega, \lambda)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[B] = \frac{\omega}{\lambda}$$

$$E[B^2] = \frac{\omega(\omega+1)}{\lambda^2}$$

olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa (71) denkleminin beklenen değeri,

$$E[y(x, t)] = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}t + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{8}tx + \frac{25}{16}t^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{5}{16}tx^2 + \frac{25}{16}t^2x - \frac{125}{48}t^3\right) E(B) \quad (72)$$

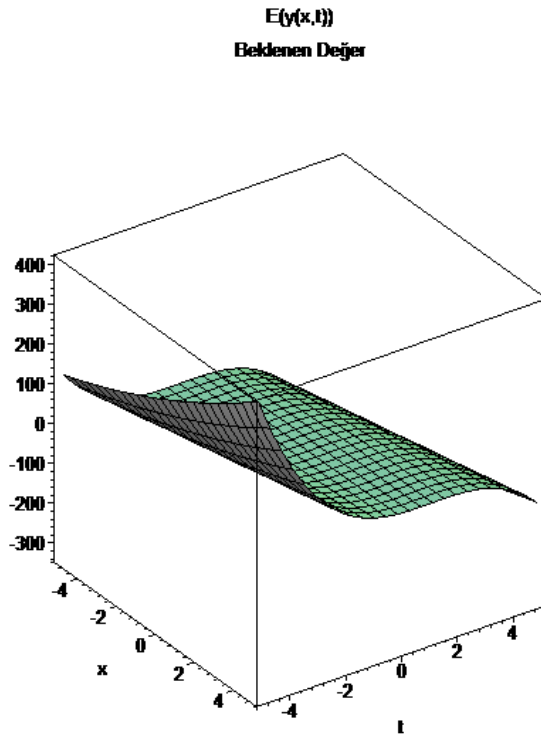
elde edilir. Yukarıda bulunan moment değeri (72) ifadesinde yerine yazılırsa beklenen değer,

$$E[y(x, t)] = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}t + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{8}tx + \frac{25}{16}t^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{5}{16}tx^2 + \frac{25}{16}t^2x - \frac{125}{48}t^3\right) \frac{\omega}{\lambda}$$

olarak bulunur. Özel olarak $B \sim \text{Gamma}(\omega = 2, \lambda = 3)$ seçilirse,

$$E[y(x, t)] = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}t + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{8}tx + \frac{25}{16}t^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{5}{16}tx^2 + \frac{25}{16}t^2x - \frac{125}{48}t^3 \right) \frac{2}{3}$$

elde edilir. Beklenen değer verilen parametre değerleri için MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 31.'deki grafik elde edilir.



Şekil 31. $B \sim \text{Gamma}(\omega = 2, \lambda = 3)$ özel değerler için (71) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (71) denkleminin varyansı,

$$\text{Var}(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = \frac{\omega(\omega+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{\omega}{\lambda}\right)^2 = \frac{\omega}{\lambda^2}$$

$$\text{Var}[y(x, t)] = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}t + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{8}tx + \frac{25}{16}t^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{5}{16}tx^2 + \frac{25}{16}t^2x - \frac{125}{48}t^3 \right)^2 \text{Var}(B)$$

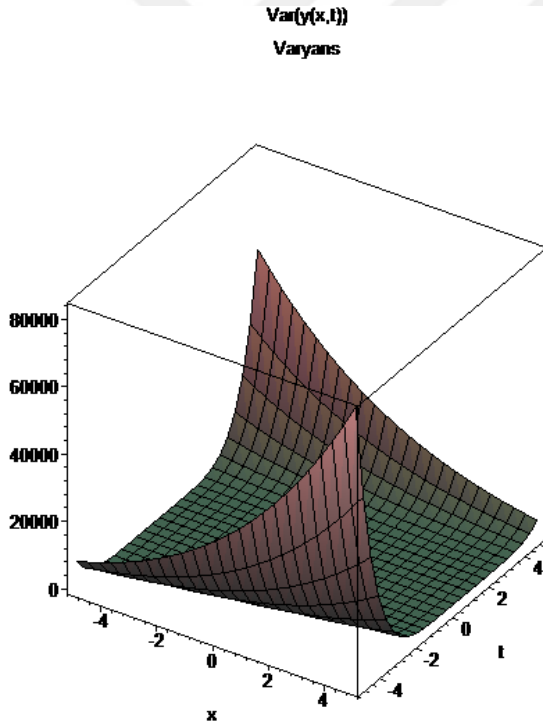
olup bulunan varyans değeri yerine yazılırsa,

$$Var[y(x, t)] = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}t + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{8}tx + \frac{25}{16}t^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{5}{16}tx^2 + \frac{25}{16}t^2x - \frac{125}{48}t^3 \right)^2 \frac{\omega}{\lambda^2}$$

elde edilir. Özel olarak $B \sim \text{Gamma}(\omega = 2, \lambda = 3)$ seçilirse varyans,

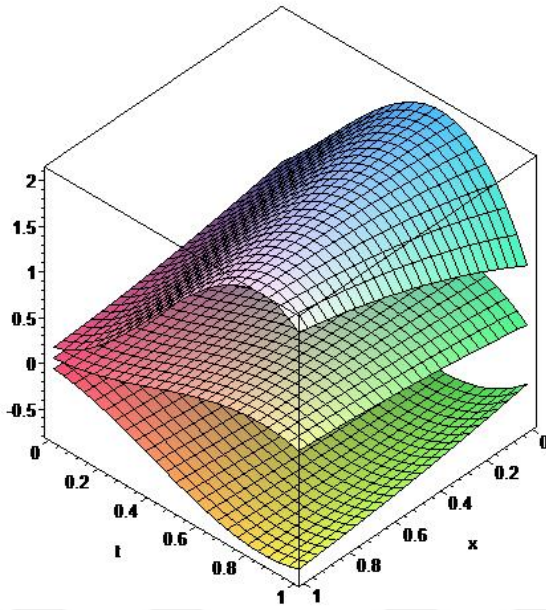
$$Var[y(x, t)] = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}t + \frac{1}{16}x^2 - \frac{5}{8}tx + \frac{25}{16}t^2 + \frac{1}{48}x^3 - \frac{5}{16}tx^2 + \frac{25}{16}t^2x - \frac{125}{48}t^3 \right)^2 \frac{2}{9}$$

olarak hesaplanır. Varyans verilen parametre değerleri için MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 32. elde edilir.



Şekil 32. $B \sim \text{Gamma}(\omega = 2, \lambda = 3)$ özel değerler için (71) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; $(0, 2.05)$ aralığı göz önüne alınırsa Gamma dağılımı gösteren rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %98 güven aralığı, MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 33.'teki grafik elde edilir.



Şekil 33. $B \sim \text{Gamma}(\omega = 2, \lambda = 3)$ özel değerler için (71) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek- 1.9.12.

$$y_t + y_{xx} - y^2 - y \cdot y_{xx} = 0 \quad (73)$$

başlangıç koşulları $y(x, 0) = B \sin x$ olarak verilen $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ parametrelili normal dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere (73) kısmî diferansiyel denkleminin çözümünü Laplace-Adomian Ayırıştırma Yöntemi ile bulunuz.

Çözüm:

$$y_t + y_{xx} - y^2 - y \cdot y_{xx} = 0$$

(73) kısmî diferansiyel denklemini $y(x, 0) = f(x) = B \sin x$ başlangıç koşuluna sahiptir.

$$\begin{cases} y_0(x, t) = f(x) \\ y_{n+1}(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_n(x, t) + A_n(y_0, y_1, \dots, y_n) \} \right], n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

olup buna göre,

$$y_0(x, t) = B \sin x$$

$$A_0 = f(y_0) = y_0^2 = B^2 \sin^2 x$$

$n = 0$ için;

$$y_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_0(x, t) + A_0 \} \right]$$

$$y_1(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ y_{0,xx} - y_0 \cdot y_{0,xx} - y_0^2 \} \right]$$

$$y_1(x, t) = B t \sin x$$

$$A_1 = y_1 \frac{df(y_0)}{dy_0} = 2y_0 y_1 = 2(B \sin x)(B t \sin x)$$

$$A_1 = 2B^2 t \sin^2 x$$

$n = 1$ için;

$$y_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_1(x, t) + A_1 \} \right]$$

$$y_2(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ y_{1,xx} - y_1 \cdot y_{1,xx} - y_1^2 \} \right]$$

$$y_2(x, t) = \frac{B t^2}{6} \sin x (3 - 2B(t - 3) \sin x)$$

$$A_2 = y_2 \frac{df(y_0)}{dy_0} + \frac{y_1^2}{2!} \frac{d^2 f(y_0)}{dy_0^2} = 2y_0 y_2 + y_1^2$$

$$A_2 = 2B \sin x \left(\frac{B t^2}{6} \sin x (3 - 2B(t - 3) \sin x) \right) + B^2 t^2 \sin^2 x$$

$$A_2 = B^2 t^2 \sin^2 x + \frac{B^2 t^2}{3} \sin^2 x (3 - 2B(t - 3) \sin x)$$

$n = 2$ için;

$$y_3(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ R y_2(x, t) + A_2 \} \right]$$

$$y_3(x, t) = \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s} \mathcal{L} \{ y_{2,xx} - y_2 \cdot y_{2,xx} - y_2^2 \} \right]$$

$$y_3(x, t) = -\frac{2B^4 t^5}{315} \sin^4 x (5t^2 - 35t + 63) + \frac{Bt^3}{1260} \left[210 \sin x + 21B^2 \sin^3 x (5t^3 - 18t^2 - 10t + 40) + B \left(2 \cos^2 x (-420 + 105t - Bt^2 \sin x (35t - 126 - 4B \sin x (5t^2 - 35t + 63))) - 21 \sin^2 x (3t^2 + 10t - 80) \right) \right]$$

$$y_{LADM} = y_0(x, t) + y_1(x, t) + y_2(x, t) + y_3(x, t) + \dots \quad (74)$$

olmak üzere $y_0(x, t)$, $y_1(x, t)$, $y_2(x, t)$, $y_3(x, t)$ değerleri (74)'te yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$y_{LADM} = B \sin x + Bt \sin x + \frac{Bt^2}{6} \sin x (3 - 2B(t - 3) \sin x) - \frac{2B^4 t^5}{315} \sin^4 x (5t^2 - 35t + 63) + \frac{Bt^3}{1260} \left[210 \sin x + 21B^2 \sin^3 x (5t^3 - 18t^2 - 10t + 40) + B \left(2 \cos^2 x (-420 + 105t - Bt^2 \sin x (35t - 126 - 4B \sin x (5t^2 - 35t + 63))) - 21 \sin^2 x (3t^2 + 10t - 80) \right) \right] \quad (75)$$

denklemini elde edilir. (75) denklemini, Taylor serisine açılırsa;

$$y(x, t) = Bx + Btx + \frac{1}{2} Bt^2 x - \frac{1}{6} Bx^3$$

$$y(x, t) = \left(x + tx + \frac{1}{2} t^2 x - \frac{1}{6} x^3 \right) B \quad (76)$$

çözümü elde edilir. Normal dağılıma sahip X rastgele değişkeninin parametreleri $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\frac{1}{2} \sigma^2 t^2 + \mu t}$$

ifadesinden $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin 1 ve 2. momenti,

$$E[B] = \mu$$

$$E[B^2] = \sigma^2 + \mu^2,$$

olarak hesaplanır. X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa (76) denkleminin beklenen değeri,

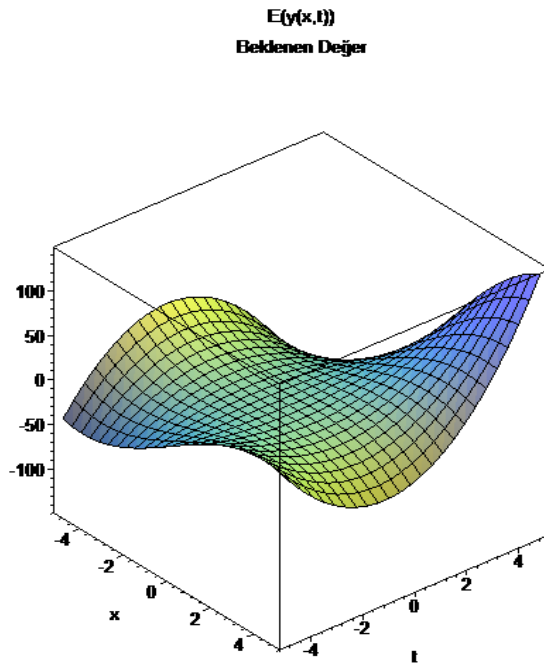
$$E[y(x, t)] = \left(x + tx + \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{6}x^3 \right) E(B)$$

$$E[y(x, t)] = \left(x + tx + \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{6}x^3 \right) \mu$$

olarak elde edilir. Özel olarak $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ seçilirse,

$$E[y(x, t)] = 2 \left(x + tx + \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{6}x^3 \right)$$

bulunur. Beklenen değer verilen parametre değerleri için MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 34.'teki grafik elde edilir.



Şekil 34. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (76) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

Her X rastgele değişkeni için varyansın temel özellikleri kullanılırsa (76) denkleminin varyansı,

$$Var(B) = E(B^2) - [E(B)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

$$Var[y(x, t)] = \left(x + tx + \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 Var(B)$$

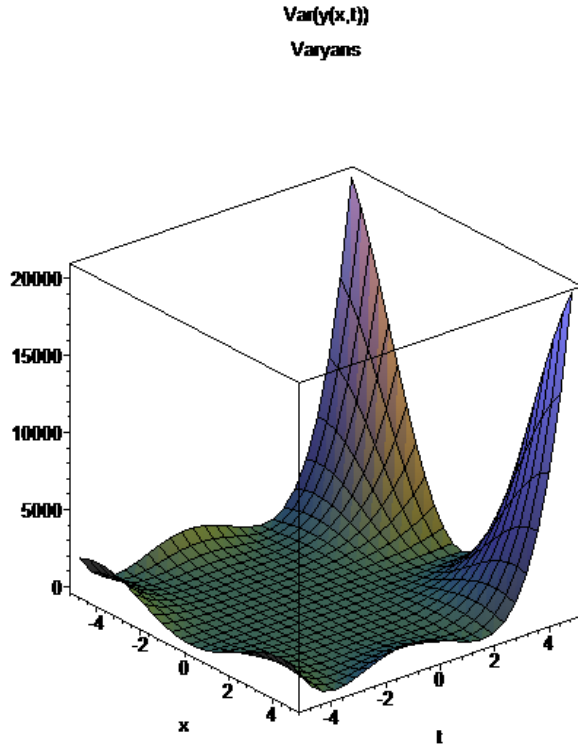
olup bulunan varyans değeri yerine yazılırsa,

$$Var[y(x, t)] = \left(x + tx + \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{6}x^3\right)^2 \sigma^2$$

elde edilir. Özel olarak $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ seçilirse varyans,

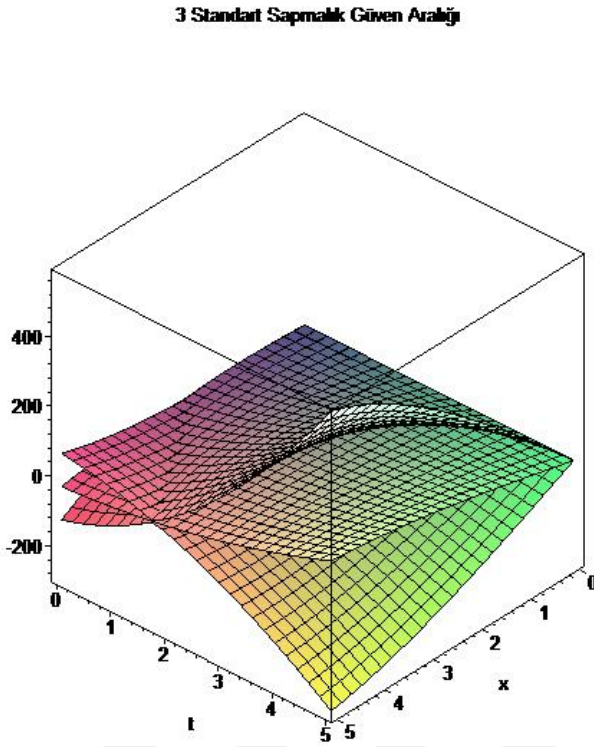
$$Var[y(x, t)] = 4 \left(x + tx + \frac{1}{2}t^2x - \frac{1}{6}x^3\right)^2$$

olarak hesaplanır. Varyans verilen parametre değerleri için MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 35. elde edilir.



Şekil 35. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (76) denkleminin varyansının çözüm davranışı

(25) ve (26) eşitlikleri kullanılırsa $K = 3$ için; normal dağılım gösteren rastgele değişkenin yaklaşık beklenen değerinin yaklaşık %99 güven aralığı, MAPLE 13 ile çizdirilirse Şekil 36.'daki grafik elde edilir.



Şekil 36. $B \sim N(\mu = 2, \sigma^2 = 4)$ özel değerler için (76) denkleminin güven aralığının çözüm davranış

3. İRDELEME

Bu tez çalışmasından elde edilen bulgulardan çıkarılan sonucu göre, Adomian Ayırıştırma Yöntemi kullanılarak rastgele kesir mertebeden adi ve kısmî diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerine daha doğru ve hızlı bir şekilde ulaşıldığı görülmektedir. Kesir mertebeden adi ve kısmî diferansiyel denklemler ile ilgili Türk ve uluslararası literatürde kaynaklar mevcut olup, rastgele kesir mertebeden adi ve kısmî diferansiyel denklemler ile ilgili kaynağın az olduğu görülmektedir. Bu tez çalışması ile bu boşluk bir nebze de olsa doldurulacaktır. Bu çalışmadan elde edilen sonuçların bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılar için yol gösterici olacağı düşünülmektedir.



4. ÖNERİLER

Bu çalışmada, Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile ilgili literatür özeti verilmiş olup yöntemin uygulanışı açıklanmıştır. Diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek kesir mertebeden diferansiyel denklemler rastgele hâle getirilmiştir. Ayrıca, elde edilen rastgele diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunarak, çözümlerin olasılık karakterleri incelenmiştir. Parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek çözümlerin beklenen değer, varyans ve güven aralıkları hesaplanmış, çözüm davranışları grafiksel olarak MAPLE 13 ve MATLAB (2013a) kullanılarak incelenmiştir. Adomian Ayrıştırma Yöntemi'nin yanı sıra Rezidual Kuvvet Serisi Yöntemi hakkında bilgi verilmiş, Laplace-Adomian Ayrıştırma Yöntemi açıklanmış diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmıştır. Adomian Ayrıştırma Yöntemi'nin, rastgele integral denklemlerine, rastgele diferansiyel denklem sistemlerine, stokastik denklemlere ve gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulaması yapılabilir.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, kesir mertebeden diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları, sürekli olasılık dağılımları olan, düzgün, geometrik, beta, üstel, normal, gamma dağılımlarından herhangi biri seçilerek denklemler rastgele hâle dönüştürülmüştür. Bu dönüştürülen denklemlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güven aralığı hesaplanmıştır. Kesir mertebeden adi diferansiyel denklemleri çözmek için yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinden literatürde sıklıkla kullanılan Adomian Ayrıştırma Yöntemi kullanılmış, kesir mertebeden kısmî diferansiyel denklemleri çözmek için ise Rezidual Kuvvet Serisi ve Laplace-Adomian Ayrıştırma yöntemlerinden faydalanılmıştır. Elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güven aralığı MATLAB (2013a) ve MAPLE 13 paket programları yardımıyla çizdirilmiştir.

KAYNAKÇA

- Abdeljawas, T. (2015). *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Netherlands: Elsevier.
- Adomian, G. (1986). *Nonlinear Stochastic Operator Equation*, USA: Academic Press.
- Adomian, G. (1991). A review of decomposition method and some recent results for nonlinear equation, *Math. Comput. Model.*, 5, 101-127.
- Adomian, G. (1993). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Dordrecht: Kluwer Academic.
- Akyol, H. (2012). *Adomian ayrıştırma (Decomposition) metodu ile modelleme örnekleri. Yüksek lisans tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Samsun.*
- Alquran, M. (2014). Analytical solutions of fractional foam drainage equation by residual power series method. *Mathematical sciences*, 8(4), 153-160.
- Ata, A. (2017). *Kesirli kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümleri. Yüksek lisans tezi, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, Nevşehir.*
- Babolian, E., Biazar, J. ve Vahidi, A. R. (2004). Solution of a system of nonlinear equations by Adomian decomposition method. *Applied Mathematics and Computation*, 150(3), 847-854.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2021). Modification of the random differential transformation method and its applications to compartmental models. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, 50(18), 4271-4292.
- Bilgiçli, N. (2011). *Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Çözümlerinin Davranışı Üzerine. Yüksek lisans tezi, Afyon Kocatepe Üniversitesi, Afyon.*
- Birgani, O. T., Chandok, S., Dedovic, N. ve Radenovic, S. (2019). A note on some recent results of the conformable fractional derivative. *Advances in the Theory of Nonlinear Analysis and its Application*, 3(1), 11-17.
- Çadırcı Aksan, E. (2019). *Adomian ayrışım metodunun uygulamaları. Yüksek lisans tezi, Harran Üniversitesi, Şanlıurfa.*
- Değerli, K. (2018). *Kesir mertebeden türeveler uygulamalarla genel bakış. Yüksek lisans tezi, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.*
- Demir, H. (2007). *Olasılık*, Ankara: Nobel Yayın Dağıtım.
- Doruk, M., Duran, M. ve Kaplan, A. (2018). Lisans öğrencilerinin türev tanımıyla ilgili yorumları ve türeveler yükledikleri anlamlar. *Abant İzzet Baysal Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 18 (2), 834-856.

- El-Ajou, A., Arqub, O. A., Zhou, Z. A. ve Momani, S. (2013). New results on fractional power series: theories and applications. *Entropy*, 15(12), 5305-5323.
- González-Gaxiola, O. (2017). The Laplace-Adomian decomposition method applied to the Kundu-Eckhaus equation. *arXiv preprint arXiv:1704.07730*.
- Jaradat, H. M., Al-Shara, S., Khan, Q. J., Alquran, M. ve Al-Khaled, K. (2016). Analytical solution of time-fractional Drinfeld-Sokolov-Wilson system using residual power series method. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 46(1), 64-70.
- Karcı, A. (2015). Kesir Dereceli Türevin Yeni Yaklaşımının Özellikleri. *Gazi Üniversitesi Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 30(3).
- Keskin, A. Ü. (2019). *Boundary Value Problems for Engineers With MATLAB Solutions*, Switzerland: Springer.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z. ve Kesemen T. (2017), Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler, Nobel Akademik Yayıncılık.
- Kilbas, A. A., Srivastava, H. M., ve Trujillo, J. J. (2006). Theory and applications of fractional differential equations (Vol. 204). *Elsevier*.
- Kiymaz, O. (2009). An algorithm for solving initial value problems using Laplace Adomian decomposition method. *Applied Mathematical Sciences*, 3(30), 1453-1459.
- Kumar, A., Kumar, S. ve Singh, M. (2016). Residual Power Series Method for Fractional Sharma-Tasso-Olevers equation, *Commun. Numer. Anal.*, 1, 1-10.
- Miller, S.K. ve Ross, B. (1993). *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, New York: Wiley-Interscience.
- İnç, M., Korpınar, Z. S., Al Qurashi, M. M. ve Baleanu, D. (2016). A new method for approximate solutions of some nonlinear equations: Residual power series method. *Advances in Mechanical Engineering*, 8(4), 1687814016644580.
- Podlubny, I. (1999). *Fractional differential equations, mathematics in science and engineering*. San Diego: Akademik Basım.
- Podlubny, I. (2001). Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation. *arXiv preprint math/0110241*.
- Sánchez Cano, J. A. (2011). Adomian decomposition method for a class of nonlinear problems. *International Scholarly Research Notices*. doi:10.5402/2011/709753
- Soytaş, C. (2006). *Kesirli diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri. Yüksek lisans tezi, Selçuk Üniversitesi, Konya*.
- Şahantürk, F. (2019). *Kesirli türevler ve ilgili nümerik notlar. Yüksek lisans tezi, Gaziantep Üniversitesi, Gaziantep*.

- Tavares, D., Almeida, R. ve Torres, D. F. (2016). Caputo derivatives of fractional variable order: numerical approximations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 35, 69-87.
- Terzioğlu, B. (2019). *Kesirli diferansiyel denklemler için başlangıç değer problemlerinin nümerik çözümleri. Yüksek lisans tezi, Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Muğla.*
- Ünal, E. ve Gökdoğan, A. (2017). Solution of conformable fractional ordinary differential equations via differential transform method. *Optik*, 128, 264-273.
- Wazwaz, A. M. (2000). A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators, *Applied Mathematics and Computation*, 111(1), 53–69.
- Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications*, Beijing: Springer.



ÖZGEÇMİŞ

Lise öğrenimini Amasya-Taşova Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2013 yılında Selçuk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2014-2018 yılları arasında Ankara'da matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2018 yılında Gümüşhane Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak göreve başladı ve hâlen bu görevini sürdürmektedir.



