

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ABOODH VE ABOODH-ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ İLE
ÇÖZÜMLERİ

YÜKSEK LİSANS

Yasin ŞAHİN

HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

**RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ABOODH VE ABOODH-ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ İLE
ÇÖZÜMLERİ**

**SOLUTIONS OF RANDOM FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
USING ABOODH AND ABOODH-ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Yasin ŞAHİN

**HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE**



T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI

RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN
ABOODH VE ABOODH-ADOMİAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ İLE
ÇÖZÜMLERİ

SOLUTIONS OF RANDOM FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATIONS
USING ABOODH AND ABOODH-ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

YÜKSEK LİSANS

Yasin ŞAHİN

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

HAZİRAN-2024
GÜMÜŞHANE

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Rastgele Kesirli Mertebeden Diferansiyel Denklemlerin Aboodh ve Aboodh-Adomian Ayırıştırma Yöntemi İle Çözümleri**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğum intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kısıtlara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanması için izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

26/06/2024

Yasin ŞAHİN

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının planlanmasından yazılmasına kadar tüm aşamalarında, kıymetli vakitlerini bana ayıran, değerli bilgi ve tecrübeleriyle beni destekleyip yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen, değerli danışman hocam Prof.Dr.Mehmet Merdan'a teşekkürlerimi borç bilirim.

YASİN ŞAHİN

GÜMÜŞHANE – 2024



ÖZET

Doğadaki birçok fiziksel problem adi veya kısmi diferansiyel denklemleri içeren matematiksel modellerle tanımlanabilir. Bu matematiksel modeller, fiziksel gerçekliğin matematiksel terimlerle ifade edilen basitleştirilmiş bir açıklamasıdır. Bu nedenle, bu fiziksel problemlerin kesin veya yaklaşık çözümün araştırılması, bu matematiksel modellerin araçlarını anlamamıza yardımcı olur. Bilim adamları adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin tam çözümlerini veya tam çözüme yakın çözümleri elde etmek için birçok yöntem geliştirmişlerdir. Geliştirilen yöntemlerin içerisinde en çok integral dönüşümlerinden faydalanmışlardır. Biz bu çalışmamızda yeni bir integral dönüşümü olan Aboodh dönüşümünden bahsedeceğiz. Aboodh dönüşümü yöntemi, doğrusal ve doğrusal olmayan kesirli diferansiyel denklemlerin çözme sürecini kolaylaştırmak için Khalid Aboodh tarafından 2013 yılında tanıtıldı. Aboodh dönüşümü kesirli diferansiyel denklem veya denklem sistemlerinin tam çözümlerini elde etmek için elverişli metotlardan biridir. Doğrusal olmayan terimlerin oluşturduğu zorluklar sebebiyle Aboodh dönüşümüyle birlikte Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak doğrusal olmayan diferansiyel denklem veya denklem sistemlerinin yaklaşık çözümleri bulunmaktadır.

Bu çalışmada, Aboodh integral dönüşümünün tanımı, Caputo-Fabrizio kesirli mertebeden türev tanımı, sürekli olasılık dağılımlarından bazıları, rastgele değişkenin beklenen değer, varyans ve moment çıkaran fonksiyon tanımları verilmiştir. Ayrıca Aboodh dönüşümü, Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi ve rastgele diferansiyel denklemler ile ilgili literatür özeti verilmiş, yöntemin uygulanışı açıklanmıştır. Diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek kesirli mertebeden diferansiyel denklemler rastgele hâle getirilmiştir. Ayrıca, elde edilen rastgele diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunarak olasılık karakterleri incelenmiştir. Parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek çözümlerin beklenen değer, varyans ve güven aralığı hesaplanmış, çözüm davranışları grafiksel olarak MATLAB ve MAPLE13 programları kullanılarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Aboodh dönüşümü, Adomian ayrıştırma yöntemi, Caputo-Fabrizio kesirli türev, Sürekli olasılık dağılımları

SUMMARY

Many physical problems in nature can be described by mathematical models involving ordinary or partial differential equations. These mathematical models are a simplified description of physical reality expressed in mathematical terms. Therefore, the search for exact or approximate solutions to these physical problems helps us understand the tools of these mathematical models. Scientists have developed many methods to obtain exact solutions or near-exact solutions of ordinary or partial differential equations. Among the developed methods, they mostly benefited from integral transformations. In this study, we will talk about the Aboodh transformation, which is a new integral transformation. The Aboodh transform method was introduced by Khalid Aboodh in 2013 to simplify the process of solving linear and nonlinear fractional differential equations. Aboodh transform is one of the convenient methods to obtain exact solutions of fractional differential equations or systems of equations. Due to the difficulties caused by nonlinear terms, approximate solutions of nonlinear differential equations or systems of equations can be found by using the Adomian decomposition method together with the Aboodh transformation.

In this study, the definition of the Aboodh integral transformation, the definition of the Caputo-Fabrizio fractional order derivative, some of the continuous probability distributions, and the definitions of the function that produces the expected value, variance and moment of the random variable are given. In addition, a summary of the literature on the Aboodh transform, the Aboodh-Adomian decomposition method and random differential equations is given, and the application of the method is explained. Fractional differential equations were made random by randomly selecting the coefficients and initial conditions of the differential equations. Additionally, the probability characteristics of the resulting random differential equations were examined by finding their solutions. Parameters were selected from different probability distributions and the expected value, variance and confidence interval of the solutions were calculated, and the solution behaviors were examined graphically using MATLAB and MAPLE13 programs.

Keywords: Aboodh transform, Adomian decomposition method, Caputo-Fabrizio fractional derivative, , Continuous probability distributions.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY.....	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER.....	VIII
TABLolar DİZİNİ	IX
ŞEKİLLER DİZİNİ	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	XIII
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Tezin Amacı Ve Kapsamı.....	1
1.2. Literatür Özeti.....	2
2. Bazı Temel Tanım Ve Teoremler.....	4
2.1. Bazı Olasılık Dağılımları.....	7
3. UYGULAMALAR.....	11
4. ABOODH- ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ.....	17
5. LİNEER VE LİNEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ABOODH-ADOMIAN AYRIŞTRMA YÖNTEMİ YARDIMI İLE ÇÖZÜMÜ.....	31
6. KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ABOODH-ADOMIAN AYRIŞTRMA YÖNTEMİ YARDIMI İLE ÇÖZÜMÜ.....	79
7. İRDELEME.....	105
8. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME.....	106
9. ÖNERİLER.....	107
KAYNAKÇA.....	108
ÖZGEÇMİŞ.....	110

TABLÖLAR DİZİNİ

Tablo 1.Bazı Fonksiyonların Aboodh Dönüşümleri.....	5
---	---



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $\alpha = 1, 0.97, 0.94$ ve 0.91 farklı değerleri için (1) denkleminin çözüm davranışı.....	12
Şekil 2. $B \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 5$ özel değeri ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (2) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	15
Şekil 3. $B \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1$ özel değeri ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (2) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	16
Şekil 4. $B \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1$, $\mu = 5$, $\alpha = 0.9$ özel değerleri için (2) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	16
Şekil 5. $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (11) denkleminin çözüm davranışı...	24
Şekil 6. $c \sim U(a, b)$, $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (12) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	28
Şekil 7. $c \sim U(a, b)$, $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (12) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	30
Şekil 8. $c \sim U(a, b)$, $a = 1$, $b = 3$, $\alpha = 0.8$ özel değerleri için (12) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	30
Şekil 9. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (24) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	39
Şekil 10. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (23) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	40
Şekil 11. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (24) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	41
Şekil 12. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (23) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	42
Şekil 13. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (24) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	42
Şekil 14. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (23) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	43
Şekil 15. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (30) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	48
Şekil 16. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (28) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	49

Şekil 17. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (30)	
denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	52
Şekil 18. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (30)	
denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	52
Şekil 19. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (28)	
denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	53
Şekil 20. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (35)	
denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	60
Şekil 21. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (36)	
denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	62
Şekil 22. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (35)	
denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	64
Şekil 23. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (36)	
denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	66
Şekil 24. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (35)	
denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	66
Şekil 25. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (36)	
denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	67
Şekil 26. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (41) denkleminin beklenen	
değerinin çözüm davranışı.....	73
Şekil 27. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (42) denkleminin beklenen	
değerinin çözüm davranışı.....	74
Şekil 28. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (41) denkleminin varyansının	
çözüm davranışı.....	76
Şekil 29. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (42) denkleminin varyansının	
çözüm davranışı.....	77
Şekil 30. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (41) denkleminin güven	
aralığının çözüm davranışı.....	77
Şekil 31. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (42) denkleminin güven	
aralığının çözüm davranışı.....	78
Şekil 32. $C \sim B(\alpha = 1, \beta = 2)$ özel değerleri için (53) denkleminin beklenen değerinin	
çözüm davranışı.....	84
Şekil 33. $C \sim B(\alpha = 1, \beta = 2)$ özel değerleri için (53) denkleminin varyansının çözüm	
davranışı.....	86

Şekil 34. $C \sim B(\alpha = 1, \beta = 2)$ özel değerleri için (53) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	86
Şekil 35. $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (57) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	90
Şekil 36. $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (57) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	91
Şekil 37. $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (57) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	91
Şekil 38. $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (61) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	96
Şekil 39. $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (61) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	98
Şekil 40. $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (61) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	98
Şekil 41. $\lambda \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (66) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	102
Şekil 42. $\lambda \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (66) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	103
Şekil 43. $\lambda \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (66) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	104

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	:Doğal Sayılar
$\mathbb{Z}$	:Tam Sayılar
$\mathbb{R}$	:Reel Sayılar
$n!$	:Faktöriyel
$\in$	:Elemanıdır
$\notin$	:Elemanı Değildir
$\Gamma(p)$	:Gamma Fonksiyonu
$\mathcal{A}\{f(t)\}$	: $f(t)$ fonksiyonunu Aboodh dönüşümü
${}^{\text{CF}}D_t^\alpha$	:Caputo-Fabrizio Kesirli Türev
${}^{\text{ABC}}D_t^\alpha$	:Atangana-Baleanu-Caputo Kesirli Türev
$L\{{}^{\text{CF}}D_t^\alpha f(t)\}$	:Caputo-Fabrizio Kesirli Türevinin Laplace Dönüşümü
$\mathcal{A}\{{}^{\text{CF}}D_t^\alpha f(t)\}$	:Caputo-Fabrizio Kesirli Türevinin Aboodh Dönüşümü
B_n	: Adomian Polinomları
R	:Lineer Operatör
$\mathcal{A}^{-1}$	:Ters Aboodh Dönüşümü
g	:Diferansiyel Denklemin Homojenliğini Gösteren Bir Fonksiyon
N	:Lineer Olmayan Operatör
$y(t)$	:Denklemin Çözümü
$f_x(x)$	:Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu
$E(X)$	:Rastgele Değişkenin Beklenen Değeri
$E(X^n)$	:Rastgele Değişkenin n. Dereceden Momenti
$Var(X)$	:Rastgele Değişkenin Varyansı
std	:Standart Sapma
$M_X(t)$	:Rastgele Değişkenin Moment Çıkaran Fonksiyonu
H	:Normlu Uzay
G	:Banach Uzayı
E_α	: Mittag- Leffler fonksiyonu

1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı

Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler bir fonksiyonun türevlerinin kesirli derecelerini içeren ve geleneksel diferansiyel denklemlerin genişletilmiş bir formunu temsil eden denklemlerdir. Bu denklemler fiziksel olayların ve sistemlerin davranışlarını daha ayrıntılı bir şekilde açıklamak için kullanılır. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemler, birçok uygulama alanında önemli bir rol oynamaktadır; örneğin elektrik devreleri, termal sistemler, biyomühendislik, fizik, kimya ve kontrol teorisi gibi alanlarda kullanılır. Bu alanlardaki birçok problem matematiksel olarak modellenenebilir. Modellenen bu problemler, diferansiyel denklem olarak ifade edildikten sonra yaklaşık analitik çözümlerini bulmak için çeşitli yöntemler kullanılır.

Bu tez, Aboodh dönüşümü kavramını Caputo-Fabrizio kesirli türevini kullanarak kesirli mertebeden adi ve kısmi diferansiyel denklem ve denklem sistemlerinin çözümüne uygulanmasını incelemektedir. Ayrıca lineer olmayan diferansiyel denklemler için Aboodh dönüşümü ve Adomian ayrıştırma yöntemini beraber uygulanmaktadır. Aboodh dönüşümü, kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri daha sade cebirsel bir forma dönüştürerek çözüm sürecini kolaylaştırır. Bu dönüşümü kullanarak çeşitli diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunacaktır. Katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek rastgele hâle getirilen kesirli mertebeden diferansiyel denklemlere Aboodh dönüşüm yöntemi ve Aboodh-Adomian Ayrıştırma Yöntemi uygulanacak, yaklaşık analitik çözümlerinin olasılık karakterleri incelenecek, parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek çözümlerin beklenen değeri, varyansı ve güven aralığı bulunarak MATLAB ve MAPLE programlarında çizilen grafiklerin davranışları incelenecektir. Ulusal ve uluslararası literatürde, Aboodh dönüşümü Yönteminin adi ve kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması var olup rastgele kesirli mertebeden adi ve kısmî diferansiyel denklemlere uygulaması yapılmamıştır. Elektrokimya, biyoloji, fizik, biyomühendislik, mekatronik-mekanik gibi mühendisliğin ve matematiğin birçok problemi diferansiyel denklem olarak ifade edildiğinden, bu yöntemin kullanılmasının daha hızlı ve yaklaşık analitik çözüm elde edilmesine yönelik olarak yeni bir bakış açısı getireceği düşünülmektedir.

1.2. LİTERATÜR ÖZETİ

Aboodh dönüşüm yöntemi ve Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi ile yapılan son çalışmalar: Khalid Suliman Aboodh tarafından 2013 yılında yapılan çalışmada yeni İntegral Dönüşümü "Aboodh Dönüşümü" tanıtılmıştır (Aboodh, 2013). Cherif ve Ziane tarafından 2017 yılında yapılan bir çalışmada doğrusal olmayan kesirli kısmi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü Aboodh ve Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi ile ele alınmaktadır (Cherif ve Ziane, 2017). Nuruddeen ve Nass tarafından 2017 yılında yapılan bir çalışmada kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilen dalga tipi denklemlerin çözümlerinde Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılmıştır (Nuruddeen ve Nass, 2017). Mahgoub ve Sedeeg tarafından 2017 yılında yapılan bir çalışmada kısmi didiferansiyel denklemlerin çözümü için Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılmıştır (Mahgoub ve Sedeeg, 2017). Benattia ve Belghaba tarafından 2019 yılında yapılan bir çalışmada Aboodh dönüşümü kullanılarak adi diferansiyel denklemlerin çözümü için bir varyasyonel iterasyon yöntemi incelenmektedir (Benattia ve Belghaba, 2019). Ziane vd. tarafından 2019 yılında yapılan bir çalışmada doğrusal olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak ele alınmıştır (Ziane vd., 2019). Aruldoss ve Devi tarafından 2020 yapılan bir çalışmada bazı kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için Aboodh dönüşümü uygulanmıştır (Aruldoss ve Devi, 2020). Özgür Kotan tarafından 2021 yılında çalışmada Lineer gecikmeli diferansiyel denklemlerin çözümü Aboodh dönüşümü ile incelenmektedir (Kotan, 2021). Almardy vd. tarafından 2023 yılında yapılan çalışmada farklı form ve katsayılarıdaki Lojistik Diferansiyel Modeli (LDM) çözmek için Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi uygulanmıştır (Almardy vd., 2023a). Almardy vd. tarafından 2023 yılında yapılan bir çalışmada “Bazı Özel Doğrusal Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Aboodh-Adomian Ayrıştırma Yöntemi Kullanılarak Analitik Çözümleri” incelenmektedir (Almardy vd., 2023b).

Son zamanlarda rastgele diferansiyel denklemler ile ilgili yapılan çalışmalar; Merdan ve Khaniyev tarafından 2008 yılında yapılan çalışmada Kuş Gribi hastalığının yayılımı için rastgele bir model kullanılmaktadır (Merdan ve Khaniyev, 2008). Bekiryazici vd. tarafından 2016 yılında yapılan bir çalışmada Dang Humması hastalığının yayılımı için bir rastgele diferansiyel denklem sistemi kullanılmaktadır (Bekiryazici vd., 2016). Bekiryazici vd. tarafından 2017 yılında bir çalışmada Sıtma hastalığının yayılımı rastgele diferansiyel denklem sistemleri ile incelenmektedir (Bekiryazici vd., 2017).

Merdan vd. tarafından 2017 yılında, Hepatit C hastalığının yayılımının rastgele davranışları ile ilgili bir çalışma yapılmıştır (Merdan vd., 2017). Yapılan bu çalışma literatürdeki rastgele modelleme çalışmalarını kaynak alarak el, ayak, ağız hastalığı ile ilgili bir inceleme içermektedir. Bekiryazici vd. tarafından 2018 yılında yapılan bir çalışmada Çocuk Felci hastalığının yayılımı için bir rastgele diferansiyel denklem sistemi kullanılmaktadır (Bekiryazici vd., 2018). Merdan vd. tarafından 2018 yılında yapılan bir çalışmada Ebola hastalığının rastgele yayılımına ait yaklaşık karakteristikler üzerine bir inceleme yapılmaktadır (Merdan vd., 2018). Halil Anaç tarafından 2020 yılında yapılan bir çalışmada deterministik kısmi diferansiyel denklemler ve kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemler rastgele hale getirilip nümerik ve yarı-analitik metotlarla çözümleri incelenmiştir (Anaç, 2020).

Bu çalışmada literatürdeki Aboodh dönüşüm yöntemi, Aboodh- Adomian ayrıştırma yöntemi ve rastgele diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalar kaynak alınarak, adi ve kısmi diferansiyel denklem ve denklem sistemleri, bazı olasılık dağılımları ile rastgele etki terimleri Düzgün, Gamma, Normal, Beta, Üçgensel ve Üstel dağılımlarından seçilerek rastgele hale dönüştürülen denklemlerin yaklaşık analitik çözümleri ve rastgele davranışları incelenecektir.

2.BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 2.1. $f(t)$ fonksiyonunun α mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevi

$f' \in H'(a, b)$, $b > a$ olmak üzere

$${}^{CF}_a D_t^\alpha = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t f'(\tau) e^{\left[\frac{-\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right]} d\tau, \quad 0 < \alpha \leq 1$$

biçiminde tanımlanır.

Burada $M(\alpha)$, $M(0) = M(1) = 1$ şartını sağlayan α 'ya bağlı olan normalleştirme sabitidir (Jadhav vd., 2023).

Tanım 2.2. α mertebeden Mittag- Leffler tekil olmayan çekirdeği ile Atangana - Baleanu Caputo kesirli türevi

$${}^{ABC}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)} \int_a^t f'(\tau) E_\alpha \left[\frac{-\alpha(t-\tau)^\alpha}{1-\alpha} \right] d\tau, \quad \tau > 0$$

biçiminde tanımlanır. Burada, E_α Mittag- Leffler fonksiyonu ve $B(\alpha)$,

$B(0) = B(1) = 1$, koşullarını sağlayan normal pozitif fonksiyondur (Jadhav vd., 2023).

Tanım 2.3. Aboodh dönüşümü olarak adlandırılan ve üstel mertebeden fonksiyonlar için tanımlanan yeni bir dönüşüm, aşağıdaki şekilde tanımlanan $\mathcal{A}$ kümesindeki fonksiyonları dikkate alır.

$$\mathcal{A} = \{f(t) : \exists M, k_1, k_2 > 0, |f(t)| < M e^{-st}\}$$

$f(t)$ Fonksiyonunun Aboodh dönüşümü

$$\mathcal{A}\{f(t)\} = \mathcal{A}\{y(s)\} = \frac{1}{s} \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt, \quad t \geq 0, \quad k_1 \leq s \leq k_2$$

şeklinde tanımlanır (Jadhav vd., 2023).

Tanım 2.4. Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Laplace Dönüşümü

$$L\{{}^{CF}_0 D_t^{\alpha+n} f(t)\}(s) = \frac{s^{n+1} L\{f(t)\} - f(0)s^n - f'(0)s^{n-1} - \dots - f^{(n)}(0)}{\alpha + s(1-\alpha)},$$

$$0 < \alpha \leq 1$$

biçiminde tanımlanır.

$n = 0$ için

$$L\{ {}^{CF}_0 D_t^\alpha f(t) \}(s) = \frac{s L\{f(t)\} - f(0)}{\alpha + s(1-\alpha)} \quad (\text{Jadhav vd., 2023}).$$

Tanım 2.5. H normlu uzay ve (v_n) , H de bir dizi olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $\|v_n - v\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa, (v_n) dizisine H de yakınsak dizi denir ve $\lim_n v_n = v$ veya $v_n \rightarrow u$ şeklinde gösterilir (Kreyszig, 1978).

Teorem 2.6. $f(t)$ fonksiyonunun Aboodh dönüşümü $\mathcal{A}\{y(s)\}$ olmak üzere, α mertebeden Caputo-Fabrizio kesirli türevinin Aboodh dönüşümü;

$$\mathcal{A}\{ {}^{CF}_0 D_t^\alpha f(t) \}(s) = \frac{s \mathcal{A}\{y(s)\} - \frac{y(0)}{s}}{\alpha + s(1-\alpha)} \text{ biçimindedir } (\text{Jadhav vd., 2023}).$$

Teorem 2.7. α mertebeden Atangana – Baleanu- Caputo kesirli türevinin Aboodh dönüşümü;

$$\mathcal{A}[{}^{ABC}_a D_t^\alpha f(t)] = \frac{B(\alpha)}{(1-\alpha)s^{\alpha+\alpha}} [s^\alpha \mathcal{A}(f(s)) - s^{\alpha-2} f(0)] \quad (\text{Jadhav vd., 2023}).$$

Teorem 2.8 $G, \sum_{i=1}^\infty v_i$ serisinin tanımlandığı uygun bir $\|.\|$ normu ile gösterilen bir Banach uzayı olsun ve ilk tahmin $x_0 = v_0$ 'nin $x(t)$ çözüm topunun içinde kaldığını varsayalım. $\sum_{i=1}^\infty v_i$ seri çözümü, (Bildik, 2017) $\|v_{n+1}\| \leq r\|v_n\|$ olacak şekilde

$0 < r < 1$ sayısı varsa yakınsar.

Birinci, ikinci ve n'inci türevlerin Aboodh dönüşümleri:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(f'(t)) &= s\mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s} \\ \mathcal{A}(f''(t)) &= s^2\mathcal{A}(y(s)) - \frac{y'(0)}{s} - y(0) \\ \mathcal{A}(f^{(n)}(t)) &= s^n\mathcal{A}(y(s)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{s^{2-n+k}} \end{aligned}$$

(Benattia vd., 2020).

Kısmi Türevlerin Aboodh Dönüşümleri:

$$\mathcal{A} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right] = s \mathcal{A}(u(x, t)) - \frac{1}{s} u(x, 0)$$

$$\mathcal{A} \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right] = s^2 \mathcal{A}(u(x, t)) - u(x, 0) - \frac{1}{s} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}$$

$$\mathcal{A} \left[\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} \right] = s^n \mathcal{A}(u(x, t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s^{2-n+k}} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k}$$

$$\mathcal{A} \left[\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right] = \frac{d}{dx} [\mathcal{A}(u(x, t))]$$

$$\mathcal{A} \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] = \frac{d^2}{dx^2} [\mathcal{A}(u(x, t))]$$

$$\mathcal{A} \left[\frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right] = \frac{d^3}{dx^3} [\mathcal{A}(u(x, t))]$$

(Almardy vd.,2023b).

Tablo 1. Bazı Fonksiyonların Aboodh Dönüşümleri (Aboodh, 2013).

$f(t)$	$\mathcal{A}(f(t))$
1	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+2}} \quad (n \geq 0)$
e^{-at}	$\frac{1}{s(s+a)}$
$\frac{-1}{a} \cdot e^{-at} + \frac{1}{a}$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
$\frac{1}{a^2} \cdot e^{-at} + \frac{1}{a}t - \frac{1}{a}$	$\frac{1}{s^3(s+a)}$
$\delta(t)$	$\frac{1}{s}$
$\frac{t^n}{\Gamma(n+1)} \quad (n > -1)$	$\frac{1}{s^{n+2}}$
$\sin at$	$\frac{a}{s(s^2 + a^2)}$
$\sinh at$	$\frac{a}{s(s^2 - a^2)}$

2.1.BAZI OLASILIK DAĞILIMLARI

2.1.1. Sürekli Düzgün Dağılım:

X Rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_x(x) = f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ 0 & , a < x < b \end{cases}$$

ise, X rastgele değişkeni $[a, b]$ kapalı aralığında düzgün dağılıma sahiptir denir ve $X \sim U(a, b)$ biçiminde gösterilir (Khaniyev vd., 2017).

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \begin{cases} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} & , t \neq 0 \\ 1 & , t = 0 \end{cases}$$

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X^n) = \int_a^b x^n \cdot \frac{1}{b-a} dx$$

$$\mu = E(X) = \frac{b+a}{2} , E(X^2) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} , Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

2.1.2. Normal Dağılım:

X Sürekli rastgele değişkeni için olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_x(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} ; -\infty < x < \infty , \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

şeklinde ise X rastgele değişkeni (μ, σ^2) parametrelili normal dağılıma sahiptir denir.

Normal dağılım için $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ notasyonu kullanılır. Bazen bu dağılıma Gauss dağılımı da denir (Khaniyev vd., 2017).

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \mu , E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2 , Var(X) = \sigma^2$$

2.1.3. Üstel Dağılım:

X Rastgele değişkeninin, $\lambda > 0$ parametre olmak üzere, olasılık yoğunluk fonksiyon,

$$\varphi(X) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

ise, X, λ parametrelili üstel dağılıma sahiptir denir ve $X \sim \text{Üstel}(\lambda)$ ile gösterilir. Bu dağılımın tek parametresi λ 'dır.

Bu durumda birikimli dağılım fonksiyonu;

$$\varphi(X) = P(X \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$\varphi(X) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 1, & x \rightarrow \infty \end{cases} \quad \text{biçimindedir (Khaniyev vd., 2017).}$$

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}; t < \lambda$$

Beklenen Değer ve Varyans

$$\mu = E(X) = \frac{1}{\lambda}, E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}, \text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

2.1.4. Üçgensel Dağılım:

Bir X rastgele değişkeni,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2(x-a)}{(b-a)(c-a)}, & a < x < c \\ \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-c)}, & c \leq x < b \end{cases}$$

şeklinde olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahipse genelleştirilmiş üçgensel dağılıma sahiptir (Khaniyev vd., 2017).

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_x(t) = 2 \frac{(b-c)e^{at} - (b-a)e^{ct} + (c-a)e^{bt}}{(b-a)(c-a)(b-c)t^2}$$

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X) = \frac{(a + b + c)}{3}, \quad Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

2.1.5. Gamma Dağılımı:

Gamma dağılımına sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim \Gamma(u, v)$ dir.

Gamma dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f_x(x) = f(x; u, v) = \begin{cases} \frac{x^{u-1} e^{-\frac{x}{v}}}{v^u \Gamma(u)} & , \quad 0 \leq x < \infty \\ 0 & , \text{ diğ er yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada Gamma fonksiyonu; $\Gamma(u) = \int_0^\infty x^{u-1} e^{-x} dx$ tir (Khaniyev vd., 2017).

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \left(\frac{1}{1 - vt} \right)^u$$

Beklenen Değer ve Varyans

$$\mu = E(X) = u \cdot v, \quad E(X^2) = (u^2 + u) \cdot v^2, \quad Var(X) = u \cdot v^2$$

2.1.6. Beta Dağılımı:

Beta dağılımına sahip X rastgele değişkeninin parametreleri, $X \sim B(\alpha, \beta)$ dir.

Beta dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$f_x(x) = f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ diğ er yerlerde} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Burada Beta fonksiyonu Gamma fonksiyonu tarafından verilir; $B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \cdot \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}$

(Merdan, M., Anaç, H.vd.,2019).

Moment Çıkaran Fonksiyon

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_0^1 e^{tx} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Beklenen Değer ve Varyans

$$E(X^n) = \frac{\Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + n + \beta)} \cdot \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\mu = E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}, Var(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$$

2.2. Rastgele Değişkenin Beklenen Değerinin Temel Özellikleri

Rastgele değişkenlerin beklenen değerleri var ve sonlu ise beklenen değer şu özelliklere sahiptir:

1. $E(m) = m ; m \in \mathbb{R}$
2. $E(mX) = mE(X); m \in \mathbb{R}$
3. $E(mX + n) = mE(X) + n ; m, n \in \mathbb{R}$
4. $E(mX + nY) = mE(X) + nE(Y); m, n \in \mathbb{R}$
5. $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
6. X ve Y Bağımsız değişkenler olmak üzere $E(XY) = E(X)E(Y)$ dir.

2.3. Rastgele Değişkenin Varyansı

$E[X - E(X)]^2$ İfadesine yani rastgele değişkenin değerinin ortalamadan sapmalarının karelerinin beklenen değerine, rastgele değişkenin varyansı denir.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ olarak ifade edilir.

Varyansın pozitif karekökü standart sapmayı verir ve $sdtsapma(X)$ ile gösterilir.

$$sdtsapma(X) = \sqrt{Var(X)}$$

2.3.1. Rastgele Değişkenin Varyansının Temel Özellikleri

1. $Var(m) = 0 ; m \in \mathbb{R}$
2. $Var(mX) = m^2Var(X); m \in \mathbb{R}$
3. Her X rastgele değişkeni için $Var(X) \geq 0$
4. Eğer X ve Y iki bağımsız rastgele değişken ise;
 $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$ dır.
5. Eğer X ve Y iki bağımsız rastgele değişken ise;

$$Var(X - Y) = Var(X) + [Var((-1)Y)]$$

$$Var(X - Y) = Var(X) + (-1)^2Var(Y) = Var(X) + Var(Y)$$

$$Var(XY) = E((XY)^2) - (E(XY))^2$$

3. UYGULAMALAR

Örnek-3. 1.

$${}^{CF}D_t^\alpha y(t) = 2 + 5y(t), \quad y(0) = 1$$

Caputo-Fabrizio kesirli diferansiyel denklemini Aboodh dönüşümü yardımı ile çözüünüz.

Çözüm:

Denklemin her iki tarafının Aboodh dönüşümü alınır ve Teorem 2.5'den yararlanılırsa,

$$\mathcal{A}[{}^{CF}D_t^\alpha y(t)] = \mathcal{A}[2] + 5\mathcal{A}[y(t)]$$

$$\frac{s \mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} = \frac{2}{s^2} + 5\mathcal{A}(y(s))$$

denklemini elde edilir.

$$s \mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s} = \frac{2(\alpha + s(1 - \alpha))}{s^2} + 5(\alpha + s(1 - \alpha))\mathcal{A}(y(s))$$

$$\mathcal{A}(y(s))[s - 5(\alpha + s(1 - \alpha))] = \frac{1}{s} + \frac{2(\alpha + s(1 - \alpha))}{s^2}$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{1}{s((5\alpha - 4)s - 5\alpha)} + \frac{2(\alpha + s(1 - \alpha))}{s^2((5\alpha - 4)s - 5\alpha)}$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{1}{(5\alpha - 4)s \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} + \frac{2(\alpha + s(1 - \alpha))}{s^2((5\alpha - 4)s - 5\alpha)}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(y(s)) &= \frac{1}{(5\alpha - 4)s \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} + \frac{2\alpha}{(5\alpha - 4)s^2 \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} \\ &\quad + \frac{2s(1 - \alpha)}{(5\alpha - 4)s^2 \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} \end{aligned}$$

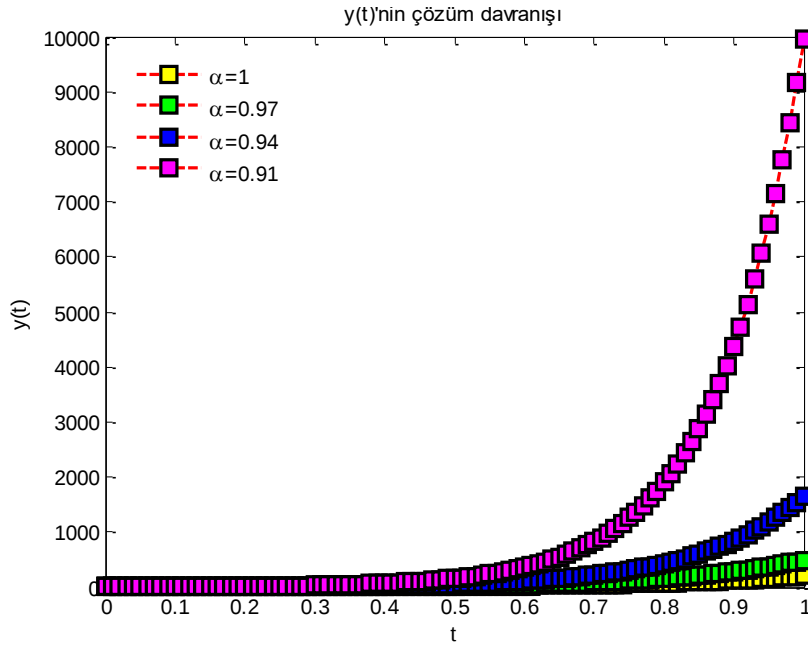
$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{1}{(5\alpha - 4)s \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} + \frac{2\alpha}{(5\alpha - 4)s^2 \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} + \frac{2(1 - \alpha)}{(5\alpha - 4)s \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)}$$

Denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşüm alınırsa;

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}(y(s))] &= \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{(5\alpha - 4)s \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{2\alpha}{(5\alpha - 4)s^2 \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} \right] \\ &+ \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{2(1 - \alpha)}{(5\alpha - 4)s \left(s - \frac{5\alpha}{5\alpha - 4} \right)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{5\alpha - 4} \cdot e^{\frac{5\alpha}{5\alpha - 4}t} + \frac{2\alpha}{5\alpha - 4} \cdot \left[\frac{-1}{-5\alpha} \cdot e^{\frac{5\alpha}{5\alpha - 4}t} + \frac{1}{-5\alpha} \right] + \frac{2(1 - \alpha)}{(5\alpha - 4)} \cdot e^{\frac{5\alpha}{5\alpha - 4}t} \\ y(t) &= \frac{3 - 2\alpha}{5\alpha - 4} \cdot e^{\frac{5\alpha}{5\alpha - 4}t} + \frac{2}{5} \cdot e^{\frac{5\alpha}{5\alpha - 4}t} - \frac{2}{5} \end{aligned} \quad (1)$$

genel çözümü elde edilir.



Şekil 1. $\alpha = 1, 0.97, 0.94$ ve 0.91 farklı değerleri için (1) denkleminin çözüm davranışı

Örnek-3.2.

${}^{CF}D_t^\alpha y(t) = 1 - y(t)$, $y(0) = B$, $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ normal dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, Caputo-Fabrizio kesirli rastgele diferansiyel denklemini Aboodh dönüşümü yardımı ile çözünüz.

Çözüm.

Denklemin her iki tarafının Aboodh dönüşümü alınırsa;

$$\mathcal{A}\{{}^{CF}D_t^\alpha y(t)\} = \mathcal{A}(1) - \mathcal{A}\{y(t)\}$$

$$\frac{s \mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} = \frac{1}{s^2} - \mathcal{A}(y(s))$$

$$s \mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s} = \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s^2} - (\alpha + s(1 - \alpha))\mathcal{A}(y(s))$$

$$\mathcal{A}(y(s))[s + \alpha + s(1 - \alpha)] = \frac{B}{s} + \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s^2}$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{B}{s((2 - \alpha)s + \alpha)} + \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s^2((2 - \alpha)s + \alpha)}$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{B}{(2 - \alpha)(s^2 + \frac{\alpha}{2 - \alpha}s)} + \frac{\alpha}{2 - \alpha} \cdot \frac{1}{s^2(s + \frac{\alpha}{2 - \alpha})} + \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha} \cdot \frac{1}{s(s + \frac{\alpha}{2 - \alpha})}$$

Denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşüm alınırsa;

$$\mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}(y(s))]$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{B}{(2 - \alpha)s \left(s + \frac{\alpha}{2 - \alpha} \right)} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{\alpha}{2 - \alpha} \cdot \frac{1}{s^2 \left(s + \frac{\alpha}{2 - \alpha} \right)} \right] \\ &+ \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1 - \alpha}{2 - \alpha} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{\alpha}{2 - \alpha} \right)} \right] \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{B}{2 - \alpha} \cdot e^{\frac{-\alpha}{2 - \alpha}t} + \frac{\alpha}{2 - \alpha} \cdot \left[\left(\frac{-1}{\frac{\alpha}{2 - \alpha}} \right) \cdot e^{\frac{-\alpha}{2 - \alpha}t} + \frac{1}{\frac{\alpha}{2 - \alpha}} \right] + \frac{1 - \alpha}{2 - \alpha} \cdot e^{\frac{-\alpha}{2 - \alpha}t}$$

$$y(t) = \left(\frac{B+1-\alpha}{2-\alpha} \right) \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} - e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + 1 \quad (2)$$

$\alpha = 1$ için ;

$y(t) = Be^{-t} - e^{-t} + 1$ elde edilir.

$$M'_x(0) = E[X] = \mu, \quad E[X^2] = \mu^2 + \sigma^2, \quad Var[X] = \sigma^2$$

$$E[y(t)] = E \left[\frac{B}{2-\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + \left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - 1 \right) \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + 1 \right]$$

$$E[y(t)] = E \left[\frac{B}{2-\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} \right] + E \left[\left(\frac{-1}{2-\alpha} \right) \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} \right] + E[1]$$

$$E[y(t)] = \frac{1}{2-\alpha} e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} E[B] + \frac{1}{\alpha-2} \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + 1$$

$$E[y(t)] = \frac{1}{2-\alpha} e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} \mu + \frac{1}{\alpha-2} \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + 1$$

$\mu = 5$ özel değeri için,

$$E[y(t)] = \frac{5}{2-\alpha} e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + \frac{1}{\alpha-2} \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + 1$$

olarak hesaplanır.

$$Var[y(t)] = Var \left[\left(\frac{B+1-\alpha}{2-\alpha} \right) \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} - e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + 1 \right]$$

$$Var[y(t)] = Var \left[\frac{B}{2-\alpha} \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} \right] + Var \left[\left(\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - 1 \right) \cdot e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} + 1 \right]$$

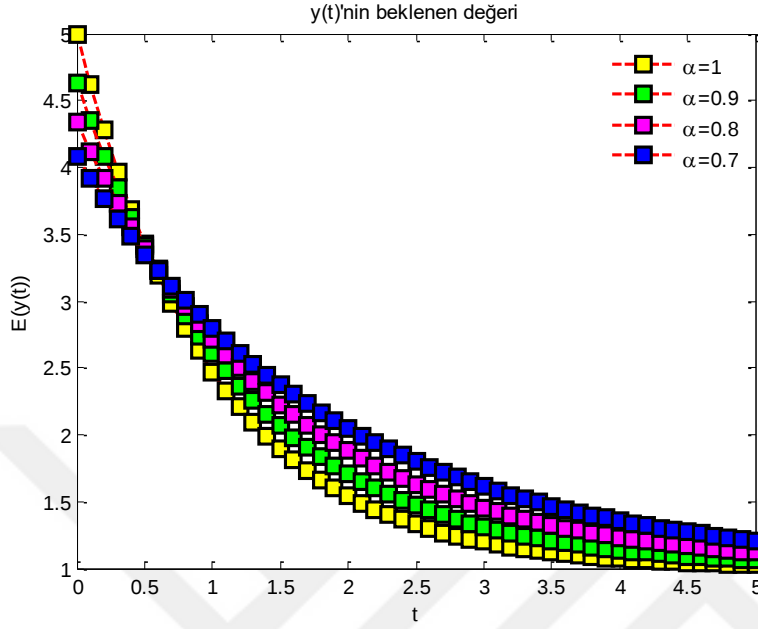
$$Var[y(t)] = \frac{1}{(2-\alpha)^2} \cdot e^{\frac{2\alpha}{\alpha-2}t} \cdot Var[B]$$

$$Var[y(t)] = \frac{1}{(2-\alpha)^2} \cdot e^{\frac{2\alpha}{\alpha-2}t} \cdot \sigma^2$$

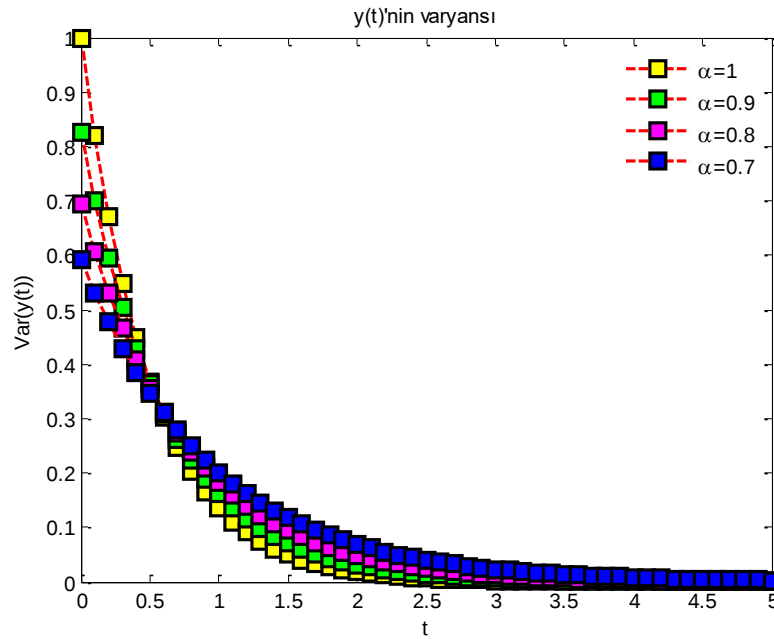
ve $\sigma^2 = 1$ özel değeri için,

$$Var[y(t)] = \frac{1}{(2-\alpha)^2} \cdot e^{\frac{2\alpha}{\alpha-2}t}$$

olarak hesaplanır.

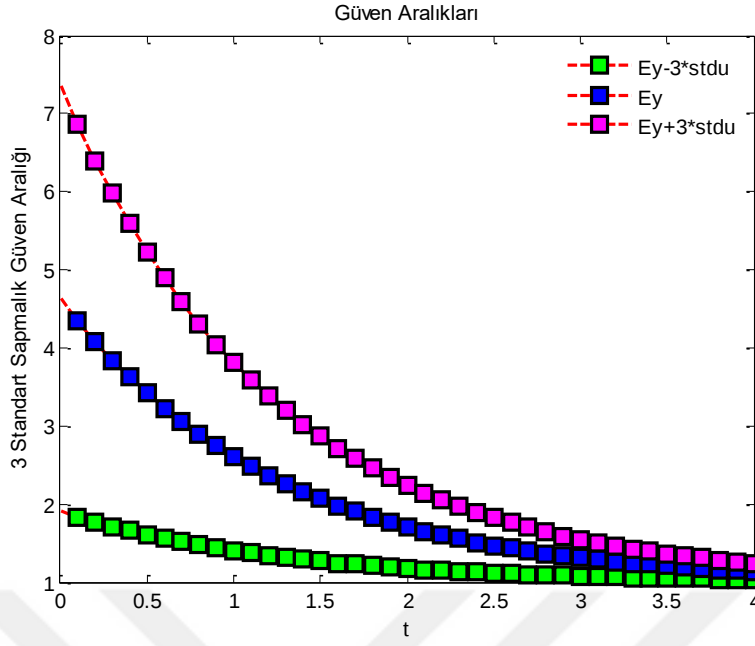


Şekil 2. $B \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 5$ özel değeri ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (2) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı



Şekil 3. $B \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1$ özel değeri ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (2) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$



Şekil 4. $B \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 1, \mu = 5, \alpha = 0.9$ özel değerleri için (2) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

4. LİNER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ABOODH-ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

4.1. Aboodh- Adomian Ayırıştırma Yöntemi

Doğrusal olmayan denklemlerin kesin çözümlerinin araştırılması, doğrusal olmayan fiziksel olayların(fizik bilimi, biyo-sistemler, yeni teknolojiler ve iktisat gibi birçok bilim disiplini doğrusal olmayan dinamik sistemlerin davranışlarına göre modeller oluşturmakta ve bu konularda çalışmalar yapmaktadırlar) incelenmesinde önemli bir rol oynamaktadır, ancak doğrusal olmayan diferansiyel denklemler, doğrusal diferansiyel denklemlerle karşılaştırıldığında çözümde en karmaşık olanıdır. Aboodh dönüşümü gibi integral dönüşümler doğrusal olmayan diferansiyel denklemleri çözmede yetersiz kalırlar. Bu nedenle, bazı araştırmacılar bu dönüşümlerin birçok yöntemle birleştirilmesi üzerinde çalışmışlardır. Bunların arasında Adomian ayırıştırma yöntemi etkili yöntemlerden birisidir. Bu yöntem 1980'lerde George Adomian (1923-1996) tarafından tanıtıldı ve birçok soruna uygulandı (Cherif ve Ziane, 2017).

Bu bölümde lineer olmayan kesirli diferansiyel denklemler, Aboodh dönüşümü ve Adomian Ayırıştırma Yöntemi birleştirilerek bu denklemlerin çözüm algoritması oluşturulup akabinde uygulamalar verilmiştir.

Kesirli adi diferansiyel denklem aşağıdaki gibi verildiğinde

$$D_t^\alpha y(t) = g(t) + Ny(t) + Ry(t) \quad (3)$$

ve $y(0) = c$ başlangıç koşulu, $D_t^\alpha \equiv {}^{CF}D_t^\alpha$ bir Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü $0 < \alpha \leq 1$, N lineer olmayan bir operatör, R lineer bir operatör, g diferansiyel denklemin homojenliğini gösteren bir fonksiyon ve y(t) denklemin çözümü olsun.

Denklem (3)'de eşitliğin her iki tarafına Aboodh dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{A}\{{}^{CF}D_t^\alpha y(t)\} = \mathcal{A}\{g(t)\} + \mathcal{A}\{Ny(t)\} + \mathcal{A}\{Ry(t)\}$$

$$\frac{s \mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} = \mathcal{A}\{g(t)\} + \mathcal{A}\{Ny(t)\} + \mathcal{A}\{Ry(t)\}$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{1}{s} \left(\frac{y(0)}{s} + (\alpha + s(1 - \alpha)) [\mathcal{A}\{g(t)\} + \mathcal{A}\{Ny(t)\} + \mathcal{A}\{Ry(t)\}] \right) \quad (4)$$

elde edilir.

Daha sonra (4) ifadesinin ters Aboodh dönüşümü alınır,

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}(y(s))] \\ &= \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{y(0)}{s^2} + \left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{g(s)\} + \left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{Ny(s)\} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{Ry(s)\} \right] \end{aligned} \quad (5)$$

olur.

Adomian ayrıştırma yöntemi y fonksiyonunun sonsuz bir seriye bölünebileceğini veya ayrıştırılabileceğini varsayar.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots \quad (6)$$

burada y_n yinelemeli olarak belirtilebilir. Bu yöntem aynı zamanda lineer olmayan operatör Ny 'nin sonsuz bir polinom serisine ayrıştırılabileceğini de varsayar.

$$Ny = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \quad (7)$$

burada $B_n = B_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n)$ tanımlı bir Adomian polinomudur,

$$B_n(y_0, y_1, y_2, \dots, y_n) = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[N \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k y_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

burada λ bir parametredir. Adomian polinomu B_n aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$B_0 = \frac{1}{0!} \frac{d^0}{d\lambda^0} \left[N \left(\sum_{k=0}^0 \lambda^k y_k \right) \right]_{\lambda=0} = N(y_0)$$

$$B_1 = \frac{1}{1!} \frac{d^1}{d\lambda^1} \left[N \left(\sum_{k=0}^1 \lambda^k y_k \right) \right]_{\lambda=0} = y_1 N'(y_0)$$

$$B_2 = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left[N \left(\sum_{k=0}^2 \lambda^k y_k \right) \right]_{\lambda=0} = y_2 N'(y_0) + \frac{y_1^2}{2!} N''(y_0)$$

$$B_3 = \frac{1}{3!} \frac{d^3}{d\lambda^3} \left[N \left(\sum_{k=0}^3 \lambda^k y_k \right) \right]_{\lambda=0} = y_3 N'(y_0) + y_1 y_2 N''(y_0) + \frac{y_1^3}{3!} N'''(y_0)$$

(6) ve (7) ifadesini (5)'te yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}(y(s))] \\ &= \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{y(0)}{s^2} + \left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{g(s)\} + \left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{Ry(s)\} \right] \\ \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) &= y(0) + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{g(s)\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\} \right] \\ & \quad + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t) \right\} \right] \end{aligned} \quad (8)$$

(8) denkleminin aynı mertebeli terimleri eşitlenirse;

$$y_0 = y(0) + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{g(s)\} \right]$$

$$y_1 = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{B_0\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{Ry_0\} \right]$$

$$y_2 = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{B_1\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{Ry_1\} \right]$$

$$y_3 = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{B_2\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{Ry_2\} \right],$$

⋮

böylece genel olarak Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak sıradan diferansiyel denklem çözümü (3)'ün yinelemeli ilişkisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$y_0 = y(0) + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1-\alpha) \right) \mathcal{A}\{g(s)\} \right] \quad (9)$$

$$y_{n+1} = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{B_n\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{Ry_n\} \right], n = 0, 1, 2, \dots$$

Örnek-4.2.

${}^{CF}D_t^\alpha y(t) = 2y(t) - y^2(t) + 1$, $0 < \alpha \leq 1$, $y(0) = 0$, Caputo-Fabrizio kesirli diferansiyel denklemini Aboodh dönüşümü yardımı ile çözünüz.

Çözüm:

Verilen denkleme Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y_0 &= y(0) + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{1\} \right] \\ y_{n+1} &= 2\mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{y_n\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{B_n\} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

$$y_0 = 0 + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{1\} \right] = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{\alpha}{s^3} + \frac{1 - \alpha}{s^2} \right]$$

$$y_0 = 1 - \alpha + \alpha t$$

(10) denkleminde $n = 0$ için;

$$y_1 = 2\mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{y_0\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{B_0\} \right]$$

$$B_0 = N(y_0) = -y_0^2 = -(1 - \alpha + \alpha t)^2$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{1 - \alpha + \alpha t\} \right] \\ &\quad + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{-(1 - \alpha + \alpha t)^2\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= 2\mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \left(\frac{1 - \alpha}{s^2} + \frac{\alpha}{s^3} \right) \right] \\ &\quad + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \left(\frac{-1 + 2\alpha - \alpha^2}{s^2} + \frac{-2\alpha + 2\alpha^2}{s^3} - \frac{2\alpha^2}{s^4} \right) \right] \end{aligned}$$

$$y_1 = 2\mathcal{A}^{-1} \left[\frac{2\alpha}{s^3} - \frac{2\alpha^2}{s^3} + \frac{\alpha^2}{s^4} + \frac{1}{s^2} - \frac{2\alpha}{s^2} + \frac{\alpha^2}{s^2} \right] \\ + \mathcal{A}^{-1} \left[-\frac{3\alpha}{s^3} + \frac{6\alpha^2}{s^3} - \frac{3\alpha^3}{s^3} - \frac{4\alpha^2}{s^4} + \frac{4\alpha^3}{s^4} - \frac{2\alpha^3}{s^5} - \frac{1}{s^2} + \frac{3\alpha}{s^2} - \frac{3\alpha^2}{s^2} \right. \\ \left. + \frac{\alpha^3}{s^2} \right]$$

$$y_1 = \alpha^2 t^2 + (4\alpha - 4\alpha^2)t + 2 + (2\alpha^2 - 4\alpha) - \frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - 2\alpha^2)t^2 \\ + (-3\alpha + 6\alpha^2 - 3\alpha^3)t + (\alpha - 1)^3$$

$$y_1 = -\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - \alpha^2)t^2 + (\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3)t + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1$$

bulunur.

(10) denkleminde $n = 1$ için;

$$y_2 = 2\mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}(y_1) \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{B_1\} \right]$$

$$B_1 = y_1 N'(y_0) = y_1(-2y_0)$$

$$y_2 = 2\mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A} \left\{ -\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - \alpha^2)t^2 + (\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3)t \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 \right\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}[y_1(-2y_0)] \right]$$

$$y_2 = 2\mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A} \left\{ -\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - \alpha^2)t^2 + (\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3)t \right. \right. \\ \left. \left. + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 \right\} \right] \\ + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A} \left\{ -2(1 - \alpha + \alpha t) \left(-\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - \alpha^2)t^2 \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + (\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3)t + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 \right) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
y_2 = & 2\mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \left(\frac{-2\alpha^3}{s^5} + \frac{4\alpha^3 - 2\alpha^2}{s^4} + \frac{\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3}{s^3} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1}{s^2} \right) \right] \\
& + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A} \left[\frac{2\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^2 - 4\alpha^3)t^2 \right. \right. \\
& + (6\alpha^3 - 4\alpha^2 - 2\alpha)t + (-2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha - 2) + \frac{-2\alpha^4 t^3}{3} \\
& + (4\alpha^4 - 2\alpha^3)t^2 + (2\alpha^2 + 4\alpha^3 - 6\alpha^4)t + (2\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha) \\
& + \frac{2\alpha^4 t^4}{3} + (2\alpha^3 - 4\alpha^4)t^3 + (-2\alpha^2 - 4\alpha^3 + 6\alpha^4)t^2 \\
& \left. \left. + (-2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha)t \right] \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 = & 2\mathcal{A}^{-1} \left[\frac{-2\alpha^4}{s^6} + \frac{4\alpha^4 - 2\alpha^3}{s^5} + \frac{\alpha^2 + 2\alpha^3 - 3\alpha^4}{s^4} + \frac{\alpha^4 - \alpha^3 - \alpha^2 + \alpha}{s^3} + \frac{-2\alpha^3}{s^5} \right. \\
& + \frac{4\alpha^3 - 2\alpha^2}{s^4} + \frac{\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3}{s^3} + \frac{\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1}{s^2} + \frac{2\alpha^4}{s^5} \\
& \left. + \frac{-4\alpha^4 + 2\alpha^3}{s^4} + \frac{-\alpha^2 - 2\alpha^3 + 3\alpha^4}{s^3} + \frac{-\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 - \alpha}{s^2} \right] \\
& + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \left(\frac{4\alpha^3}{s^5} + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha^3}{s^4} + \frac{6\alpha^3 - 4\alpha^2 - 2\alpha}{s^3} \right. \right. \\
& + \frac{-2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha - 2}{s^2} - \frac{4\alpha^4}{s^5} + \frac{8\alpha^4 - 4\alpha^3}{s^4} + \frac{2\alpha^2 + 4\alpha^3 - 6\alpha^4}{s^3} \\
& + \frac{2\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha}{s^2} + \frac{16\alpha^4}{s^6} + \frac{12\alpha^3 - 24\alpha^4}{s^5} \\
& \left. \left. + \frac{-4\alpha^2 - 8\alpha^3 + 12\alpha^4}{s^4} + \frac{-2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha}{s^3} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 = 2\mathcal{A}^{-1} & \left[\frac{-2\alpha^4}{s^6} + \frac{6\alpha^4 - 4\alpha^3}{s^5} + \frac{-7\alpha^4 + 7\alpha^3}{s^4} + \frac{4\alpha^4 - 6\alpha^3 + 2\alpha}{s^3} \right. \\
& \left. + \frac{-\alpha^4 + 2\alpha^3 - 2\alpha + 1}{s^2} \right] \\
& + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{4\alpha^4}{s^6} + \frac{4\alpha^3 - 8\alpha^4}{s^5} + \frac{6\alpha^4 - 4\alpha^3 - 2\alpha^2}{s^4} \right. \\
& + \frac{-2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha}{s^3} - \frac{4\alpha^5}{s^6} + \frac{8\alpha^5 - 4\alpha^4}{s^5} + \frac{2\alpha^3 + 4\alpha^4 - 6\alpha^5}{s^4} \\
& + \frac{2\alpha^5 - 2\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2}{s^3} + \frac{16\alpha^5}{s^7} + \frac{12\alpha^4 - 24\alpha^5}{s^6} \\
& + \frac{-4\alpha^3 - 8\alpha^4 + 12\alpha^5}{s^5} + \frac{-2\alpha^5 + 2\alpha^4 + 2\alpha^3 - 2\alpha^2}{s^4} + \frac{4\alpha^3}{s^5} \\
& + \frac{4\alpha^2 - 8\alpha^3}{s^4} + \frac{6\alpha^3 - 4\alpha^2 - 2\alpha}{s^3} + \frac{-2\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha - 2}{s^2} - \frac{4\alpha^4}{s^5} \\
& + \frac{8\alpha^4 - 4\alpha^3}{s^4} + \frac{2\alpha^2 + 4\alpha^3 - 6\alpha^4}{s^3} + \frac{2\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha}{s^2} + \frac{16\alpha^4}{s^6} \\
& + \frac{12\alpha^3 - 24\alpha^4}{s^5} + \frac{-4\alpha^2 - 8\alpha^3 + 12\alpha^4}{s^4} + \frac{-2\alpha^4 + 2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha}{s^3} \\
& - \frac{4\alpha^4}{s^5} + \frac{-4\alpha^3 + 8\alpha^4}{s^4} + \frac{-6\alpha^4 + 4\alpha^3 + 2\alpha^2}{s^3} + \frac{2\alpha^4 - 2\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha}{s^2} \\
& + \frac{4\alpha^5}{s^5} + \frac{-8\alpha^5 + 4\alpha^4}{s^4} + \frac{-2\alpha^3 - 4\alpha^4 + 6\alpha^5}{s^3} \\
& + \frac{-2\alpha^5 + 2\alpha^4 + 2\alpha^3 - 2\alpha^2}{s^2} - \frac{16\alpha^5}{s^6} + \frac{-12\alpha^4 + 24\alpha^5}{s^5} \\
& \left. + \frac{4\alpha^3 + 8\alpha^4 - 12\alpha^5}{s^4} + \frac{2\alpha^5 - 2\alpha^4 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2}{s^3} \right]
\end{aligned}$$

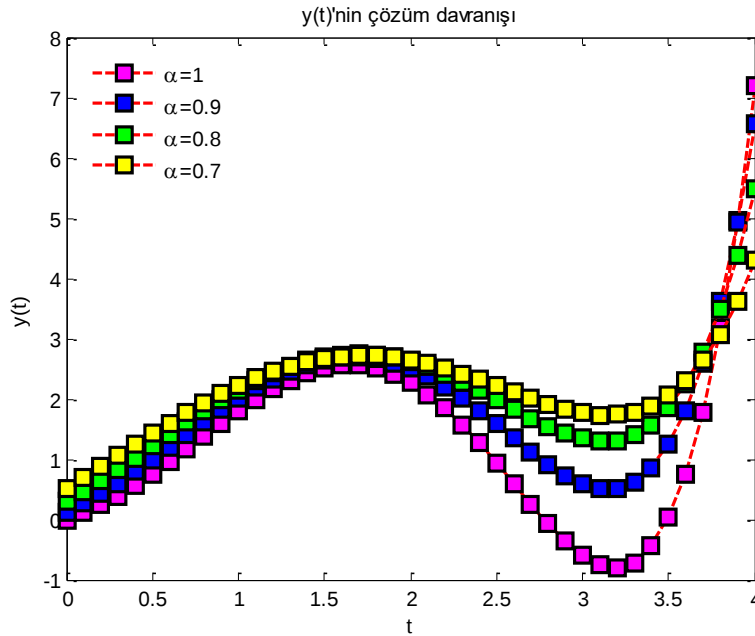
$$\begin{aligned}
y_2 = 2 & \left[\frac{-2\alpha^4 t^4}{24} + \frac{(6\alpha^4 - 4\alpha^3)t^3}{6} + \frac{(-7\alpha^4 + 7\alpha^3)t^2}{2} \right. \\
& \left. + (4\alpha^4 - 6\alpha^3 + 2\alpha)t - \alpha^4 + 2\alpha^3 - 2\alpha + 1 \right] \\
& + \left[\frac{16\alpha^5 t^5}{5!} + \frac{(-44\alpha^5 + 32\alpha^4)t^4}{4!} + \frac{(48\alpha^5 - 64\alpha^4 + 16\alpha^3)t^3}{3!} \right. \\
& + \frac{(-28\alpha^5 + 52\alpha^4 - 20\alpha^3 - 4\alpha^2)t^2}{2!} \\
& + (10\alpha^5 - 24\alpha^4 + 12\alpha^3 + 8\alpha^2 - 6\alpha)t + (-2\alpha^5 + 6\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha^2 \\
& \left. + 6\alpha - 2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_2 = & -\frac{\alpha^4 t^4}{6} + \frac{(6\alpha^4 - 4\alpha^3)t^3}{3} + (-7\alpha^4 + 7\alpha^3)t^2 + (8\alpha^4 - 12\alpha^3 + 4\alpha)t \\
& + (-2\alpha^4 + 4\alpha^3 - 4\alpha + 2) + \frac{2\alpha^5 t^5}{15} + \frac{(-11\alpha^5 + 8\alpha^4)t^4}{6} \\
& + \frac{(24\alpha^5 - 32\alpha^4 + 8\alpha^3)t^3}{3} + (-14\alpha^5 + 26\alpha^4 - 10\alpha^3 - 2\alpha^2)t^2 \\
& + (10\alpha^5 - 24\alpha^4 + 12\alpha^3 + 8\alpha^2 - 6\alpha)t + (-2\alpha^5 + 6\alpha^4 - 4\alpha^3 - 4\alpha^2 \\
& + 6\alpha - 2) \\
y_2 = & \frac{2\alpha^5 t^5}{15} + \frac{(7\alpha^4 - 11\alpha^5)t^4}{6} + \frac{(24\alpha^5 - 26\alpha^4 + 4\alpha^3)t^3}{3} \\
& + (-14\alpha^5 + 19\alpha^4 - 3\alpha^3 - 2\alpha^2)t^2 + (10\alpha^5 - 16\alpha^4 + 8\alpha^2 - 2\alpha)t \\
& + (-2\alpha^5 + 4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2\alpha)
\end{aligned}$$

bulunur.

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & (1 - \alpha + \alpha t) + \left[-\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - \alpha^2)t^2 + (\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3)t + \alpha^3 - \alpha^2 - \right. \\
& \left. \alpha + 1 \right] + \left[\frac{2\alpha^5 t^5}{15} + \frac{(7\alpha^4 - 11\alpha^5)t^4}{6} + \frac{(24\alpha^5 - 26\alpha^4 + 4\alpha^3)t^3}{3} + (-14\alpha^5 + 19\alpha^4 - 3\alpha^3 - \right. \\
& \left. 2\alpha^2)t^2 + (10\alpha^5 - 16\alpha^4 + 8\alpha^2 - 2\alpha)t + (-2\alpha^5 + 4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2\alpha) \right] + \\
& \dots
\end{aligned} \tag{11}$$



Şekil 5. $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (11) denkleminin çözüm davranışı özel olarak $\alpha = 1$ alınırsa;

$$y(t) = t + t^2 + \frac{2t^3}{3} - \frac{2t^4}{3} + \frac{2t^5}{15} + \dots$$

yaklaşık çözümü bulunur.

Yakınsaklığı incelersek, $t = 1, \alpha = 1$ için

$$r_0 = \frac{\|y_1\|}{\|y_0\|} = \frac{\left\| -\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - \alpha^2)t^2 + (\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3)t + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 \right\|}{\|1 - \alpha + \alpha t\|} = 0.6667$$

$$r_1 = \frac{\|y_2\|}{\|y_1\|} = \frac{\left\| \frac{2\alpha^5 t^5}{15} + \frac{(7\alpha^4 - 11\alpha^5)t^4}{6} + \frac{(24\alpha^5 - 26\alpha^4 + 4\alpha^3)t^3}{3} + (-14\alpha^5 + 19\alpha^4 - 3\alpha^3 - 2\alpha^2)t^2 + (10\alpha^5 - 16\alpha^4 + 8\alpha^2 - 2\alpha)t + (-2\alpha^5 + 4\alpha^4 - 4\alpha^2 + 2\alpha) \right\|}{\left\| -\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - \alpha^2)t^2 + (\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3)t + \alpha^3 - \alpha^2 - \alpha + 1 \right\|} = 0.2$$

⋮

değerlerinin 1'den küçük olduğu görülür (Kreyszig, 1978).

Örnek-4.3.

${}^{CF}D_t^\alpha y(t) = -y^2(t) + 1, 0 < \alpha \leq 1, y(0) = c, c \sim U(a, b)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, Caputo-Fabrizio kesirli rastgele diferansiyel denklemini Aboodh dönüşümü yardımı ile çözüyoruz.

Çözüm: (8) denkleminde oluşturduğumuz algoritmayı kullanırsak;

$$y_0 = y(0) + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{1\} \right]$$

$$y_0 = c + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{1\} \right] = c + \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \cdot \frac{1}{s^2} \right]$$

$$y_0 = c + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{\alpha}{s^3} + \frac{1 - \alpha}{s^2} \right]$$

$$y_0 = c + \alpha t + 1 - \alpha$$

$$B_0 = N(y_0) = -y_0^2 = -(1 - \alpha + c + \alpha t)^2$$

$$y_{n+1} = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{B_n\} \right]$$

$n = 0$ için

$$y_1 = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{B_0\} \right] = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{-(1 - \alpha + c + \alpha t)^2\} \right]$$

$$y_1 = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \mathcal{A}\{-c^2 - \alpha^2 - 1 - 2c + 2\alpha c + 2\alpha + (2\alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha c)t - \alpha^2 t^2\} \right]$$

$$y_1 = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{\alpha}{s} + (1 - \alpha) \right) \left\{ \frac{-c^2 - \alpha^2 - 2c + 2\alpha c + 2\alpha - 1}{s^2} + \frac{2\alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha c}{s^3} - \frac{2\alpha^2}{s^4} \right\} \right]$$

$$y_1 = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{-\alpha c^2 - \alpha^3 - 2\alpha c + 2\alpha^2 c + 2\alpha^2 - \alpha}{s^3} + \frac{2\alpha^3 - 2\alpha^2 - 2\alpha^2 c}{s^4} - \frac{2\alpha^3}{s^5} + \frac{2\alpha c + 2\alpha - \alpha^2 - c^2 - 2c - 1}{s^2} + \frac{2\alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha c}{s^3} - \frac{2\alpha^2}{s^4} + \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 2\alpha^2 c + 2\alpha c + \alpha c^2}{s^2} + \frac{2\alpha^2 - 2\alpha^3 + 2\alpha^2 c}{s^3} + \frac{2\alpha^3}{s^4} \right]$$

$$y_1 = \mathcal{A}^{-1} \left[-\frac{2\alpha^3}{s^5} + \frac{4\alpha^3 - 4\alpha^2 - 2\alpha^2 c}{s^4} + \frac{-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 c - 4\alpha c - \alpha c^2 - 3\alpha}{s^3} + \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 c + 4\alpha c + \alpha c^2 + 3\alpha - c^2 - 2c - 1}{s^2} \right]$$

$$y_1 = -\frac{2\alpha^3 t^3}{3!} + \frac{(4\alpha^3 - 4\alpha^2 - 2\alpha^2 c)t^2}{2!} + (-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 c - 4\alpha c - \alpha c^2 - 3\alpha)t + (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 c + 4\alpha c + \alpha c^2 + 3\alpha - c^2 - 2c - 1)$$

$$y_1 = -\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha^2 c)t^2 + (-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 c - 4\alpha c - \alpha c^2 - 3\alpha)t + (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 c + 4\alpha c + \alpha c^2 + 3\alpha - c^2 - 2c - 1)$$

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

$$\begin{aligned}
y(t) = & (\alpha t + c + 1 - \alpha) \\
& + \left[-\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - 2\alpha^2 - \alpha^2 c)t^2 \right. \\
& + (-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 c - 4\alpha c - \alpha c^2 - 3\alpha)t + (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 c \\
& \left. + 4\alpha c + \alpha c^2 + 3\alpha - c^2 - 2c - 1) \right] + \dots
\end{aligned} \tag{12}$$

$c \sim U(a, b)$ düzgün dağılımına sahip rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı

$$E[c] = \frac{a+b}{2}, \quad E[c^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, \quad E[c^4] = \frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{5}$$

$$Var[c] = \frac{(b-a)^2}{12}, \quad Var[c^2] = \frac{4a^4 - a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 + 4b^4}{45}$$

Bu momentleri kullanarak X ve Y bağımsız rastgele değişkeninin $E[XY] = E[X]E[Y]$ beklenen değerleri aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
E[y(t)] = E \left[& (\alpha t + c + 1 - \alpha) \right. \\
& + \left[-\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - 2\alpha - \alpha^2 c)t^2 \right. \\
& + (-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 c - 4\alpha c - \alpha c^2 - 3\alpha)t \\
& \left. \left. + (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 c + 4\alpha c + \alpha c^2 + 3\alpha - c^2 - 2c - 1) \right] \right]
\end{aligned}$$

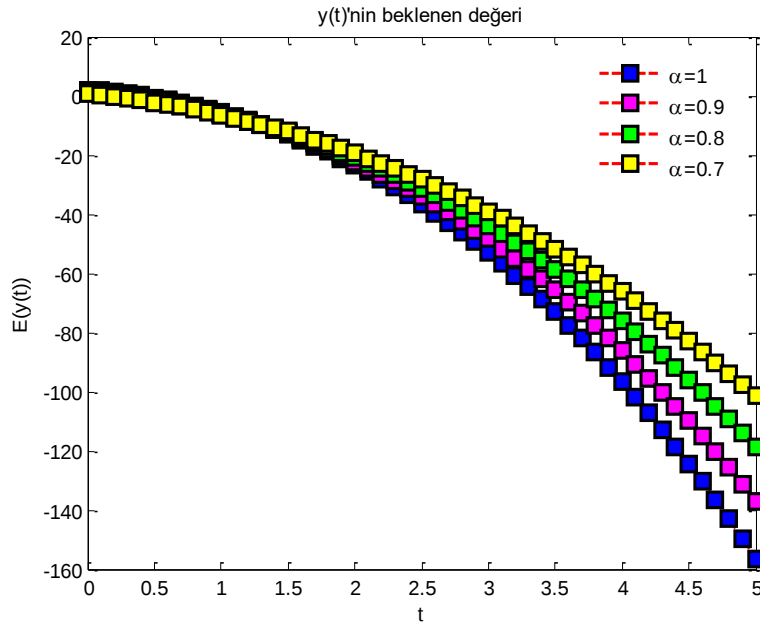
$$\begin{aligned}
E[y(t)] = & (\alpha t + 1 - \alpha) + E[c] - \frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - 2\alpha - \alpha^2 E[c])t^2 \\
& + (-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 E[c] - 4\alpha E[c] - \alpha E[c^2] - 3\alpha)t \\
& + (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 E[c] + 4\alpha E[c] + \alpha E[c^2] + 3\alpha - E[c^2] - 2E[c] - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[y(t)] &= (\alpha t + 1 - \alpha) + \frac{a+b}{2} - \frac{\alpha^3 t^3}{3} + \left(2\alpha^3 - 2\alpha - \alpha^2 \frac{a+b}{2}\right) t^2 \\
&+ \left(-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 \frac{a+b}{2} - 4\alpha \frac{a+b}{2} - \alpha \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - 3\alpha\right) t \\
&+ \left(\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 \frac{a+b}{2} + 4\alpha \frac{a+b}{2} + \alpha \frac{a^2 + ab + b^2}{3} + 3\alpha\right. \\
&\quad \left.- \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - 2 \frac{a+b}{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

$a = 1, b = 3$ özel değerleri için beklenen değer,

$$\begin{aligned}
E[y(t)] &= (\alpha t + 1 - \alpha) + \frac{1+3}{2} - \frac{\alpha^3 t^3}{3} + \left(2\alpha^3 - 2\alpha - \alpha^2 \frac{1+3}{2}\right) t^2 \\
&+ \left(-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 \frac{1+3}{2} - 4\alpha \frac{1+3}{2} - \alpha \frac{1^2 + 1.3 + 3^2}{3} - 3\alpha\right) t \\
&+ \left(\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 \frac{1+3}{2} + 4\alpha \frac{1+3}{2} + \alpha \frac{1^2 + 1.3 + 3^2}{3} + 3\alpha\right. \\
&\quad \left.- \frac{1^2 + 1.3 + 3^2}{3} - 2 \frac{1+3}{2} - 1\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[y(t)] &= -\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - 2\alpha - 4\alpha^2) t^2 + \left(-3\alpha^3 + 14\alpha^2 - \frac{43\alpha}{3}\right) t \\
&+ \left(\alpha^3 - 7\alpha^2 + \frac{43\alpha}{3} - \frac{19}{3}\right)
\end{aligned}$$



Şekil 6. $c \sim U(a, b)$, $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (12) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = Var & \left[(\alpha t + c + 1 - \alpha) \right. \\
& + \left[-\frac{\alpha^3 t^3}{3} + (2\alpha^3 - 2\alpha - \alpha^2 c)t^2 \right. \\
& + (-3\alpha^3 + 6\alpha^2 + 4\alpha^2 c - 4\alpha c - \alpha c^2 - 3\alpha)t \\
& \left. \left. + (\alpha^3 - 3\alpha^2 - 2\alpha^2 c + 4\alpha c + \alpha c^2 + 3\alpha - c^2 - 2c - 1) \right] \right]
\end{aligned}$$

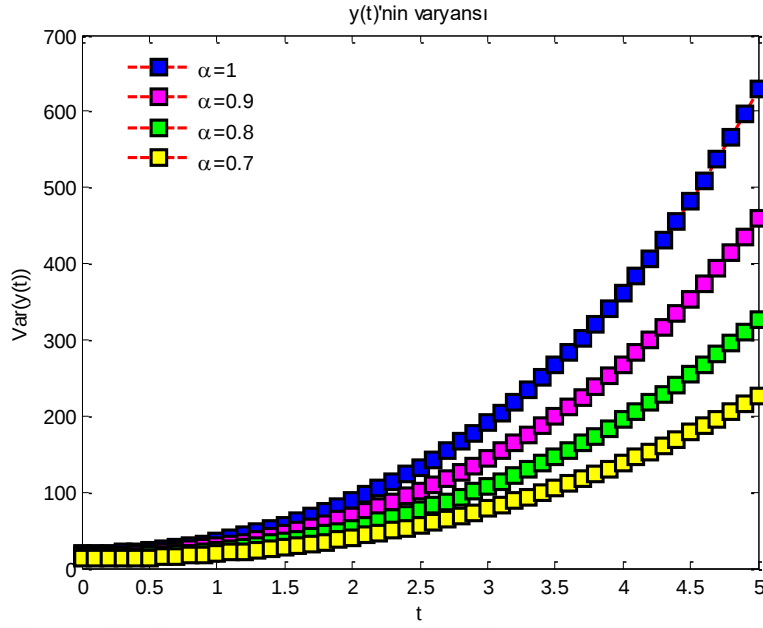
$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = Var[c] + \alpha^4 t^4 Var[c] + ((16\alpha^4 + 16\alpha^2)Var[c] + \alpha^2 Var[c^2])t^2 \\
+ ((4\alpha^4 + 16\alpha^2 + 4)Var[c] + (\alpha^2 + 1)Var[c^2])
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = \frac{(b-a)^2}{12} + \alpha^4 t^4 \frac{(b-a)^2}{12} \\
+ [(16\alpha^4 + 16\alpha^2) \frac{(b-a)^2}{12} + \alpha^2 \frac{4a^4 - a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 + 4b^4}{45}]t^2 \\
+ (4\alpha^4 + 16\alpha^2 + 4) \frac{(b-a)^2}{12} + (\alpha^2 \\
+ 1) \frac{4a^4 - a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 + 4b^4}{45}
\end{aligned}$$

$a = 1, b = 3$ özel değerleri için beklenen değer,

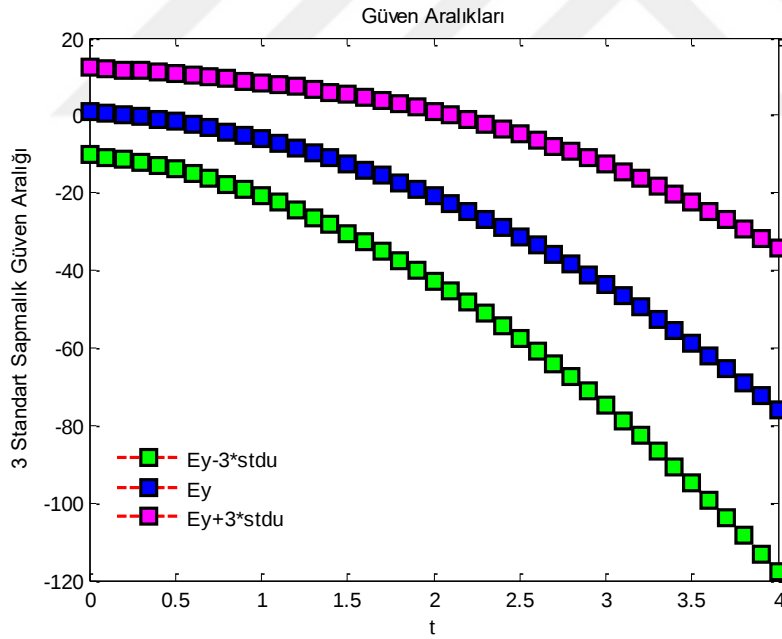
$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = \frac{(3-1)^2}{12} + \alpha^4 t^4 \frac{(3-1)^2}{12} \\
+ [(16\alpha^4 + 16\alpha^2) \frac{(3-1)^2}{12} + \alpha^2 \frac{4 \cdot 1^4 - 1^3 \cdot 3 - 6 \cdot 1^2 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4}{45}]t^2 \\
+ (4\alpha^4 + 16\alpha^2 + 4) \frac{(3-1)^2}{12} + (\alpha^2 \\
+ 1) \frac{4 \cdot 1^4 - 1^3 \cdot 3 - 6 \cdot 1^2 \cdot 3^2 - 1 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4}{45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[y(t)] = \frac{1}{3} + \frac{\alpha^4 t^4}{3} + \left(\frac{(16\alpha^4 + 16\alpha^2)}{3} + \frac{244\alpha^2}{45} \right) t^2 \\
+ \left(\frac{(4\alpha^4 + 16\alpha^2 + 4)}{3} + (\alpha^2 + 1) \frac{244}{45} \right)
\end{aligned}$$



Şekil 7. $c \sim U(a, b)$, $\alpha = 1, 0.9, 0.8$ ve 0.7 farklı değerleri için (12) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$



Şekil 8. $c \sim U(a, b)$, $a = 1, b = 3, \alpha = 0.8$ özel değerleri için (12) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

5. LINEER VE LINEER OLMAYAN DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ABOODH-ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ YARDIMI İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde lineer ve lineer olmayan kesirli diferansiyel denklem sistemlerinin Aboodh ve Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak çözümleri sunulmakta ayrıca Örnek 5.5 ve Örnek 5.6 da Lotka-Volterra Av-Avcı modelinin katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele hale getirilerek çözümleri yapılmıştır.

Lotka-Volterra denklemleri, biri yırtıcı, diğeri av olmak üzere iki türün etkileştiği biyolojik sistemlerin dinamiklerini tanımlamak için kullanılan bir çift birinci dereceden doğrusal olmayan diferansiyel denklemdir.

$$\begin{aligned} x' &= \alpha x - \beta xy \\ y' &= \sigma xy - \gamma y \end{aligned}$$
 denklemlerinde x av sayısı, y yırtıcı hayvan sayısı $\frac{dx}{dt}$ ve $\frac{dy}{dt}$ sırasıyla av ve avcılarının anlık hızları $\alpha, \beta, \sigma, \gamma$ pozitif reel sabitlerdir.

Avın sınırsız bir gıda kaynağına sahip olduğu ve avlanmaya maruz kalmadığı sürece üstel olarak çoğaldığı varsayılmaktadır; bu üstel büyüme yukarıdaki denklemde αx terimi ile temsil edilmektedir. Avın avlanma oranının yırtıcılarla avın karşılaşma hızıyla orantılı olduğu varsayılır; bu yukarıda βxy ile temsil edilmektedir. Eğer x ya da y sıfırsa, o zaman yırtıcılık olamaz. Bu iki terimle yukarıdaki av denklemi şu şekilde yorumlanabilir: Avın popülasyonundaki değişim oranı, avlanma hızının kendi büyüme oranından çıkarılmasıyla elde edilir. σxy terimi avcı popülasyonunun büyümesini temsil eder. γy terimi, avcılarının doğal ölüm ya da göç nedeniyle kayıp oranını temsil eder; avın yokluğunda üstel bir düşüşe yol açar. Dolayısıyla denklem, avcının popülasyonundaki değişim oranının, avını tüketme oranından kendi içsel ölüm oranının çıkarılmasına bağlı olduğunu ifade eder (Doust vd., 2014).

Örnek-5.1.

$$\begin{cases} i) {}^{CF}D_t^\alpha x(t) = 2y - 1 \\ ii) {}^{CF}D_t^\alpha y(t) = x + y + 5 \end{cases}$$

kesirli diferansiyel denklem sistemini $x(0) = 1$ ve $y(0) = -1$ başlangıç koşulları için Aboodh dönüşüm yardımıyla çözünüz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} i) \frac{s\mathcal{A}(x(s)) - \frac{x(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} &= 2\mathcal{A}(y(s)) - \mathcal{A}(1) \\ s\mathcal{A}(x(s)) - \frac{1}{s} &= 2(\alpha + s(1 - \alpha))\mathcal{A}(y(s)) - \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s^2} \\ \mathcal{A}(x(s)) - 2\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) &= \frac{1}{s^2} - \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s^3} \\ \mathcal{A}(x(s)) - 2\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) &= \frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha}{s^3} \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} ii) \frac{s\mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} &= \mathcal{A}(x(s)) + \mathcal{A}(y(s)) + \mathcal{A}(5) \\ s\mathcal{A}(y(s)) + \frac{1}{s} &= (\alpha + s(1 - \alpha))\mathcal{A}(x(s)) + (\alpha + s(1 - \alpha))\mathcal{A}(y(s)) \\ &\quad + \frac{5(\alpha + s(1 - \alpha))}{s^2} \\ \mathcal{A}(y(s)) &= -\frac{1}{s^2} + \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(x(s)) + \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) \\ &\quad + \frac{5(\alpha + s(1 - \alpha))}{s^3} \\ \left(\alpha - \frac{\alpha}{s}\right)\mathcal{A}(y(s)) - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(x(s)) &= \frac{5\alpha}{s^3} + \frac{4 - 5\alpha}{s^2} \end{aligned} \quad (14)$$

$\mathcal{A}(y(s))$ 'i bulmak için (13) denklemini $\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha$ ile çarpıp (14) ile toplayalım.

$$\begin{aligned} \left(\alpha - \frac{\alpha}{s}\right)\mathcal{A}(y(s)) - 2\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)^2 \mathcal{A}(y(s)) \\ = \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\left(\frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha}{s^3}\right) + \frac{5\alpha}{s^3} + \frac{4 - 5\alpha}{s^2} \end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(y(s)) & \left\{ \frac{(-2\alpha^2 + 5\alpha - 2)s^2 + (4\alpha^2 - 5\alpha)s - 2\alpha^2}{s^2} \right\} \\ & = \frac{(4 - 4\alpha - \alpha^2)s^2 + (2\alpha^2 + 4\alpha)s - \alpha^2}{s^4} \\ \mathcal{A}(y(s)) & = \frac{(4 - 4\alpha - \alpha^2)s^2 + (2\alpha^2 + 4\alpha)s - \alpha^2}{s^2[(-2\alpha^2 + 5\alpha - 2)s^2 + (4\alpha^2 - 5\alpha)s - 2\alpha^2]}\end{aligned}$$

elde edilir. Ve bu ifade basit kesirlerine ayrılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}& \frac{(4 - 4\alpha - \alpha^2)s^2 + (2\alpha^2 + 4\alpha)s - \alpha^2}{s^2[(-2\alpha^2 + 5\alpha - 2)s^2 + (4\alpha^2 - 5\alpha)s - 2\alpha^2]} \\ & = \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{-\frac{7}{6}}{s((-2\alpha + 1)s + 2\alpha)} + \frac{\frac{8}{3}}{s((\alpha - 2)s - \alpha)}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Dolayısıyla;

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{-\frac{7}{6}}{(-2\alpha + 1)s \left(s + \frac{2\alpha}{-2\alpha + 1} \right)} + \frac{\frac{8}{3}}{(\alpha - 2)s \left(s - \frac{\alpha}{\alpha - 2} \right)}$$

elde edilir.

Ve bu denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşümü alınırsa;

$$y(t) = \frac{1}{2} + \frac{-7}{6(-2\alpha + 1)} e^{\frac{-2\alpha}{-2\alpha + 1}t} + \frac{8}{3(\alpha - 2)} e^{\frac{\alpha}{\alpha - 2}t} \quad (15)$$

şeklinde hesaplanır.

$\mathcal{A}(x(s))$ 'i bulmak için (13) denklemini $(\alpha - \frac{\alpha}{s})$ ile (14) denklemini $2(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha)$ ile çarpıp toplayalım.

$$\begin{aligned}& \left(\alpha - \frac{\alpha}{s} \right) \mathcal{A}(x(s)) - 2 \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right)^2 \mathcal{A}(x(s)) \\ & = \left(\alpha - \frac{\alpha}{s} \right) \left(\frac{\alpha}{s^2} - \frac{\alpha}{s^3} \right) + 2 \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \left(\frac{5\alpha}{s^3} + \frac{4 - 5\alpha}{s^2} \right)\end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x(s)) & \left\{ \frac{(-2\alpha^2 + 5\alpha - 2)s^2 + (4\alpha^2 - 5\alpha)s - 2\alpha^2}{s^2} \right\} \\ & = \frac{(11\alpha^2 - 18\alpha + 8)s^2 + (-22\alpha^2 + 18\alpha)s + 11\alpha^2}{s^4}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(x(s)) = \frac{(11\alpha^2 - 18\alpha + 8)s^2 + (-22\alpha^2 + 18\alpha)s + 11\alpha^2}{s^2[(-2\alpha^2 + 5\alpha - 2)s^2 + (4\alpha^2 - 5\alpha)s - 2\alpha^2]}$$

elde edilir. Ve bu ifade basit kesirlerine ayrılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} & \frac{(11\alpha^2 - 18\alpha + 8)s^2 + (-22\alpha^2 + 18\alpha)s + 11\alpha^2}{s^2[(-2\alpha^2 + 5\alpha - 2)s^2 + (4\alpha^2 - 5\alpha)s - 2\alpha^2]} \\ &= \frac{-11}{s^2} + \frac{-7}{s((-2\alpha + 1)s + 2\alpha)} + \frac{-16}{s((\alpha - 2)s - \alpha)} \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

Ve bu denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşümü alınır;

$$x(t) = \frac{-11}{2} + \frac{-7}{6(-2\alpha + 1)} e^{\frac{-2\alpha}{-2\alpha+1}t} + \frac{-16}{3(\alpha - 2)} e^{\frac{\alpha}{\alpha-2}t} \quad (16)$$

şeklinde hesaplanır.

Örnek-5. 2.

$$\begin{cases} i) \frac{d^2y}{dt^2} - 3x + 2y = 0 \\ ii) \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{d^2y}{dt^2} + 3x - 5y = 0 \end{cases}$$

Diferansiyel denklem sistemini $x(0) = 0, y(0) = 0 ; x'(0) = 3, y'(0) = 2$ başlangıç koşulları için Aboodh dönüşüm yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm.

$$i) s^2 \mathcal{A}(y(s)) - \frac{y'(0)}{s} - y(0) - 3\mathcal{A}(x(s)) + 2\mathcal{A}(y(s)) = 0$$

$$s^2 \mathcal{A}(y(s)) - \frac{2}{s} - 0 - 3\mathcal{A}(x(s)) + 2\mathcal{A}(y(s)) = 0$$

$$(s^2 + 2)\mathcal{A}(y(s)) - 3\mathcal{A}(x(s)) = \frac{2}{s} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} ii) s^2 \mathcal{A}(x(s)) - \frac{x'(0)}{s} - x(0) + s^2 \mathcal{A}(y(s)) - \frac{y'(0)}{s} - y(0) + 3\mathcal{A}(x(s)) \\ - 5\mathcal{A}(y(s)) = 0 \end{aligned}$$

$$s^2 \mathcal{A}(x(s)) - \frac{3}{s} - 0 + s^2 \mathcal{A}(y(s)) - \frac{2}{s} - 0 + 3 \mathcal{A}(x(s)) - 5 \mathcal{A}(y(s)) = 0$$

$$(s^2 + 3) \mathcal{A}(x(s)) + (s^2 - 5) \mathcal{A}(y(s)) = \frac{5}{s} \quad (18)$$

$\mathcal{A}(y(s))$ 'i bulmak için (17) denklemini $(s^2 + 3)$ ile (18) denklemini 3 ile çarpıp toplarsak;

$$((s^2 + 3)(s^2 + 2) + 3(s^2 - 5)) \mathcal{A}(y(s)) = \frac{2(s^2 + 3)}{s} + \frac{15}{s}$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{2s^2 + 21}{s(s^4 + 8s^2 - 9)}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem basit kesirlerine ayrılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\mathcal{A}(y(s)) = -\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{s(s^2 + 9)} + \frac{23}{10} \cdot \frac{1}{s(s^2 - 1)}$$

denklemini elde edilir. Ve bu denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşümü alınır;

$$y(t) = -\frac{3}{10} \cdot \frac{\sin 3t}{3} + \frac{23}{10} \cdot \sin ht = -\frac{1}{10} \cdot \sin 3t + \frac{23}{10} \cdot \sin ht \quad (19)$$

denklemini bulunur.

$\mathcal{A}(x(s))$ 'i bulmak için (17) denklemini $-(s^2 - 5)$ ile (18) denklemini $(s^2 + 2)$ ile çarpıp toplarsak;

$$((s^2 + 3)(s^2 + 2) + 3(s^2 - 5)) \mathcal{A}(x(s)) = \frac{-2(s^2 - 5)}{s} + \frac{5(s^2 + 2)}{s}$$

$$\mathcal{A}(x(s)) = \frac{3s^2 + 20}{s(s^4 + 8s^2 - 9)}$$

denklemini elde edilir. Bu denklem basit kesirlerine ayrılır ve gerekli işlemler yapılırsa;

$$\mathcal{A}(x(s)) = \frac{7}{10} \cdot \frac{1}{s(s^2 + 9)} + \frac{23}{10} \cdot \frac{1}{s(s^2 - 1)}$$

bulunur. Ve bu denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşümü alınır;

$$x(t) = \frac{7}{10} \cdot \frac{\sin 3t}{3} + \frac{23}{10} \cdot \sin ht = \frac{7}{30} \cdot \sin 3t + \frac{23}{10} \cdot \sin ht \quad (20)$$

denklemini bulunur.

Örnek-5.3.

$$\begin{cases} i) {}^{CF}D_t^\alpha x(t) = -2x + 3y \\ ii) {}^{CF}D_t^\alpha y(t) = 3x - 2y \end{cases}, 0 < \alpha \leq 1$$

kesirli diferansiyel denklem sistemini $x(0) = B$ ve $y(0) = C$, $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$

üstel, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ üçgensel dağılıma sahip rastgele başlangıç koşulları için Aboodh dönüşüm yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} i) \frac{s\mathcal{A}(x(s)) - \frac{x(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} &= -2\mathcal{A}(x(s)) + 3\mathcal{A}(y(s)) \\ \mathcal{A}(x(s)) &= \frac{B}{s^2} - 2\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(x(s)) + 3\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) \\ \mathcal{A}(x(s)) + 2\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(x(s)) - 3\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) &= \frac{B}{s^2} \\ \left(\frac{2\alpha}{s} + 3 - 2\alpha\right)\mathcal{A}(x(s)) - 3\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) &= \frac{B}{s^2} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} ii) \frac{s\mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} &= 3\mathcal{A}(x(s)) - 2\mathcal{A}(y(s)) \\ \mathcal{A}(y(s)) &= \frac{C}{s} + 3\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(x(s)) - 2\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) \\ \mathcal{A}(y(s)) + 2\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) - 3\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(x(s)) &= \frac{C}{s} \\ \left(\frac{2\alpha}{s} + 3 - 2\alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) - 3\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(x(s)) &= \frac{C}{s^2} \end{aligned} \quad (22)$$

$\mathcal{A}(y(s))$ 'i bulmak için (21) denklemini $3\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)$ ile (22) denklemini

$\left(\frac{2\alpha}{s} + 3 - 2\alpha\right)$ çarpıp toplayalım.

$$\left(\frac{2\alpha}{s} + 3 - 2\alpha\right)^2 \mathcal{A}(y(s)) - 9\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)^2 \mathcal{A}(y(s)) = \frac{3B\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)}{s^2} + \frac{C\left(\frac{2\alpha}{s} + 3 - 2\alpha\right)}{s^2}$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(y(s)) & \left\{ \frac{(-5\alpha^2 + 6\alpha)s^2 + (10\alpha^2 - 6\alpha)s - 5\alpha^2}{s^2} \right\} \\ & = \frac{(3B - 3\alpha B + 3C - 2\alpha C)s + 3\alpha B + 2\alpha C}{s^3} \\ \mathcal{A}(y(s)) & = \frac{(3B - 3\alpha B + 3C - 2\alpha C)s + 3\alpha B + 2\alpha C}{s[(-5\alpha^2 + 6\alpha)s^2 + (10\alpha^2 - 6\alpha)s - 5\alpha^2]}\end{aligned}$$

elde edilir. Ve bu ifade basit kesirlerine ayrılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{(3B - 3\alpha B + 3C - 2\alpha C)s + 3\alpha B + 2\alpha C}{s[(-5\alpha^2 + 6\alpha)s^2 + (10\alpha^2 - 6\alpha)s - 5\alpha^2]} = \frac{\frac{C}{2} - \frac{B}{2}}{s((-5\alpha + 6)s + 5\alpha)} + \frac{\frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{s(\alpha s - \alpha)}$$

şeklinde bulunur.

Dolayısıyla;

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{\frac{C}{2} - \frac{B}{2}}{(-5\alpha + 6)s \left(s + \frac{5\alpha}{-5\alpha + 6} \right)} + \frac{\frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{\alpha s(s - 1)}$$

elde edilir.

Ve bu denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşümü alınırsa;

$$y(t) = \frac{1}{(-5\alpha + 6)} \left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2} \right) e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha + 6}t} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) e^t \quad (23)$$

şeklinde hesaplanır.

$\mathcal{A}(x(s))$ 'i bulmak için (21) denklemini $\left(\frac{2\alpha}{s} + 3 - 2\alpha\right)$ ile (22) denklemini

$3\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)$ ile çarpıp toplayalım.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\alpha}{s} + 3 - 2\alpha\right)^2 \mathcal{A}(x(s)) - 9\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)^2 \mathcal{A}(x(s)) \\ = \frac{B\left(\frac{2\alpha}{s} + 3 - 2\alpha\right)}{s^2} + \frac{3C\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)}{s^2}\end{aligned}$$

Gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(x(s)) & \left\{ \frac{(-5\alpha^2 + 6\alpha)s^2 + (10\alpha^2 - 6\alpha)s - 5\alpha^2}{s^2} \right\} \\ & = \frac{(3B - 2\alpha B + 3C - 3\alpha C)s + 2\alpha B + 3\alpha C}{s^3}\end{aligned}$$

$$\mathcal{A}(x(s)) = \frac{(3B - 2\alpha B + 3C - 3\alpha C)s + 2\alpha B + 3\alpha C}{s[(-5\alpha^2 + 6\alpha)s^2 + (10\alpha^2 - 6\alpha)s - 5\alpha^2]}$$

elde edilir. Ve bu ifade basit kesirlerine ayrılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\frac{(3B - 2\alpha B + 3C - 3\alpha C)s + 2\alpha B + 3\alpha C}{s[(-5\alpha^2 + 6\alpha)s^2 + (10\alpha^2 - 6\alpha)s - 5\alpha^2]} = \frac{\frac{B}{2} - \frac{C}{2}}{s((-5\alpha + 6)s + 5\alpha)} + \frac{\frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{s(\alpha s - \alpha)}$$

şeklinde bulunur.

Dolayısıyla;

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{\frac{B}{2} - \frac{C}{2}}{(-5\alpha + 6)s \left(s + \frac{5\alpha}{-5\alpha + 6} \right)} + \frac{\frac{B}{2} + \frac{C}{2}}{\alpha s(s - 1)}$$

elde edilir.

Ve bu denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşümü alınırsa;

$$x(t) = \frac{1}{(-5\alpha + 6)} \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha+6}t} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) e^t \quad (24)$$

şeklinde hesaplanır.

X rastgele değişkeni üstel dağılıma sahipse moment çıkaran fonksiyonundan faydalananarak,

$$E(B) = \frac{1}{\lambda}, Var(B) = \frac{1}{\lambda^2}$$

olarak hesaplanır.

X rastgele değişkeni üçgensel dağılıma sahipse moment çıkaran fonksiyonundan faydalananarak,

$$E(C) = \frac{(a + b + c)}{3}, Var(C) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

olarak hesaplanır.

$$\begin{aligned} E[x(t)] &= E \left[\frac{1}{(-5\alpha + 6)} \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha+6}t} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) e^t \right] \\ &= \frac{e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha+6}t}}{2(-5\alpha + 6)} (E[B] - E[C]) + \frac{e^t}{2\alpha} (E[B] + E[C]) \end{aligned}$$

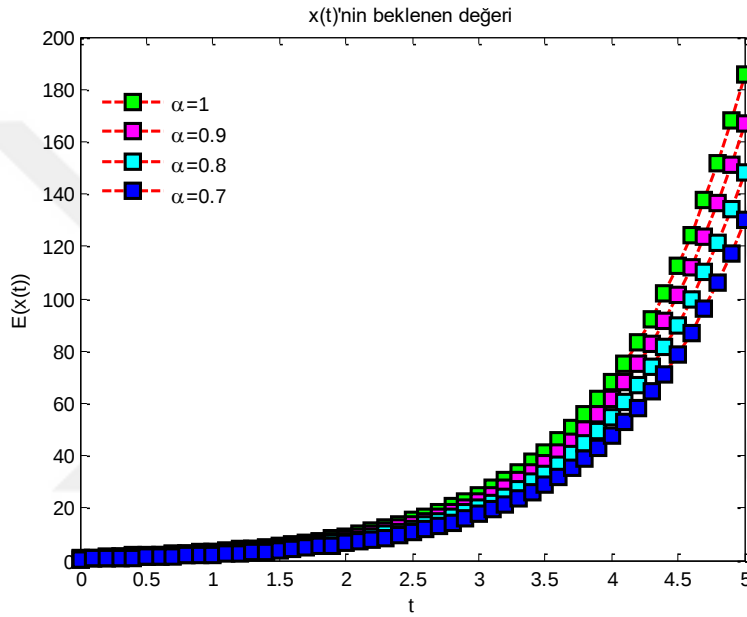
$$E[x(t)] = \frac{e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha+6}t}}{2(-5\alpha + 6)} \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{(a + b + c)}{3} \right) + \frac{e^t}{2\alpha} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{(a + b + c)}{3} \right)$$

$\lambda = 2$ ve $a = 1, b = 2, c = 3$ özel değerleri için;

$$E[x(t)] = \frac{e^{-5\alpha+6t}}{2(-5\alpha+6)} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) + \frac{e^t}{2\alpha} \left(\frac{1}{2} + 2 \right)$$

$$E[x(t)] = \frac{-3e^{-5\alpha+6t}}{4(-5\alpha+6)} + \frac{5e^t}{4\alpha}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 9. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ Özel değerleri için (24) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$\begin{aligned} E[y(t)] &= E \left[\frac{1}{(-5\alpha+6)} \left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2} \right) e^{-5\alpha+6t} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) e^t \right] \\ &= \frac{e^{-5\alpha+6t}}{2(-5\alpha+6)} (E[C] - E[B]) + \frac{e^t}{2\alpha} (E[B] + E[C]) \end{aligned}$$

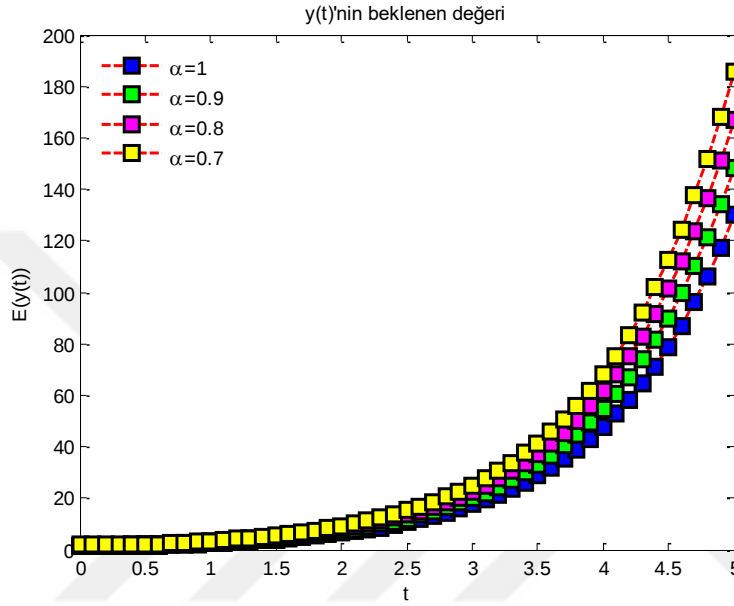
$$E[y(t)] = \frac{e^{-5\alpha+6t}}{2(-5\alpha+6)} \left(\frac{(a+b+c)}{3} - \frac{1}{\lambda} \right) + \frac{e^t}{2\alpha} \left(\frac{1}{\lambda} + \frac{(a+b+c)}{3} \right)$$

$\lambda = 2$ ve $a = 1, b = 2, c = 3$ özel değerleri için;

$$E[y(t)] = \frac{e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha+6}t}}{2(-5\alpha+6)} \left(2 - \frac{1}{2}\right) + \frac{e^t}{2\alpha} \left(\frac{1}{2} + 2\right)$$

$$E[y(t)] = \frac{3e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha+6}t}}{4(-5\alpha+6)} + \frac{5e^t}{4\alpha}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 10. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (23) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$\begin{aligned} \text{Var}[x(t)] &= \text{Var} \left[\frac{1}{(-5\alpha+6)} \left(\frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right) e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha+6}t} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) e^t \right] \\ &= \frac{e^{\frac{-10\alpha}{-5\alpha+6}t}}{4(-5\alpha+6)^2} (\text{Var}[B] + \text{Var}[C]) + \frac{e^{2t}}{4\alpha^2} (\text{Var}[B] + \text{Var}[C]) \end{aligned}$$

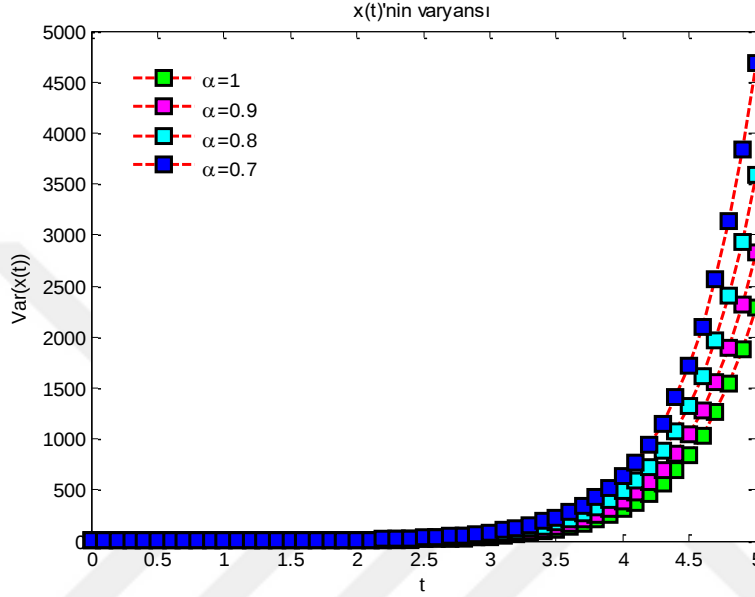
$$\begin{aligned} \text{Var}[x(t)] &= \frac{e^{\frac{-10\alpha}{-5\alpha+6}t}}{4(-5\alpha+6)^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \right) \\ &\quad + \frac{e^{2t}}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{\lambda^2} + \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \right) \end{aligned}$$

$\lambda = 2$ ve $a = 1, b = 2, c = 3$ özel değerleri için;

$$Var[x(t)] = \frac{e^{\frac{-10\alpha}{-5\alpha+6}t}}{4(-5\alpha+6)^2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 - 1.2 - 1.3 - 2.3}{18} \right) + \frac{e^{2t}}{4\alpha^2} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 - 1.2 - 1.3 - 2.3}{18} \right)$$

$$Var[x(t)] = \frac{5e^{\frac{-10\alpha}{-5\alpha+6}t}}{48(-5\alpha+6)^2} + \frac{5e^{2t}}{48\alpha^2}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 11. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (24) denkleminin varyansının çözüm davranışı

$$Var[y(t)] = Var \left[\frac{1}{(-5\alpha+6)} \left(\frac{C}{2} - \frac{B}{2} \right) e^{\frac{-5\alpha}{-5\alpha+6}t} + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2} \right) e^t \right]$$

$$= \frac{e^{\frac{-10\alpha}{-5\alpha+6}t}}{4(-5\alpha+6)^2} \{Var[C] + Var[B]\} + \frac{e^{2t}}{4\alpha^2} \{Var[B] + Var[C]\}$$

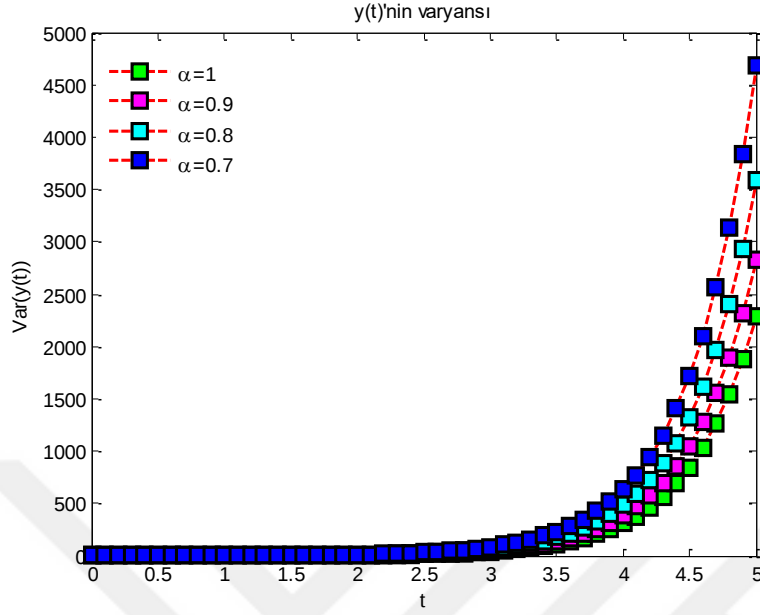
$$Var[y(t)] = \frac{e^{\frac{-10\alpha}{-5\alpha+6}t}}{4(-5\alpha+6)^2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} + \frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{e^{2t}}{4\alpha^2} \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} + \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

$\lambda = 2$ ve $a = 1, b = 2, c = 3$ özel değerleri için;

$$Var[y(t)] = \frac{e^{\frac{-10\alpha}{-5\alpha+6}t}}{4(-5\alpha+6)^2} \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 - 1.2 - 1.3 - 2.3}{18} + \frac{1}{2^2} \right) + \frac{e^{2t}}{4\alpha^2} \left(\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 - 1.2 - 1.3 - 2.3}{18} + \frac{1}{2^2} \right)$$

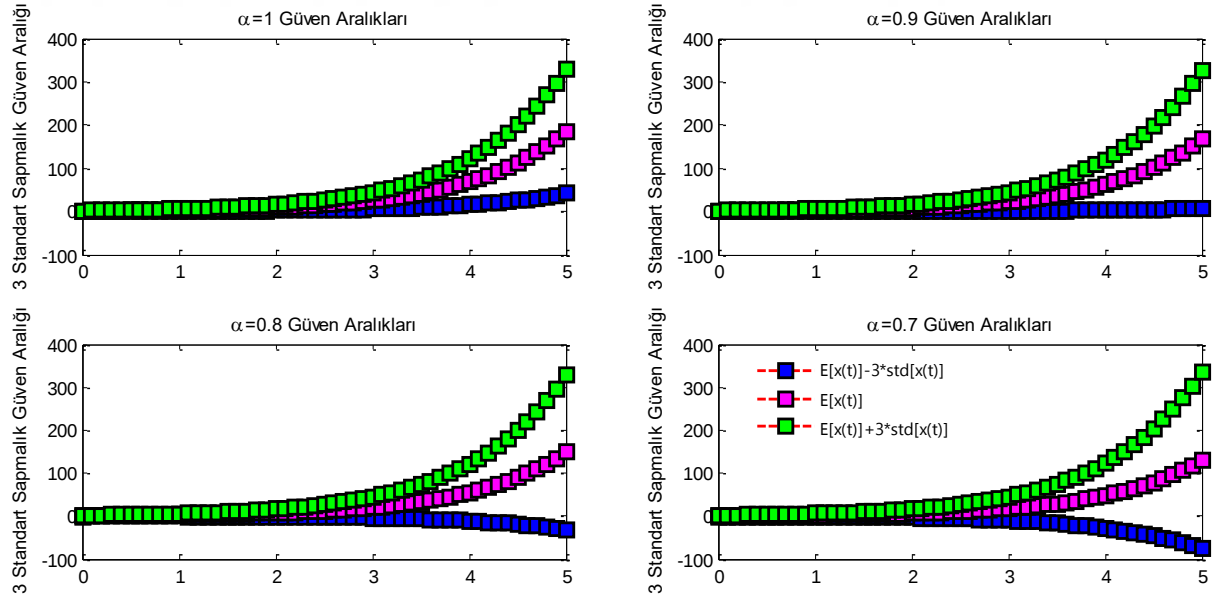
$$Var[y(t)] = \frac{5e^{\frac{-10\alpha}{-5\alpha+6}t}}{48(-5\alpha+6)^2} + \frac{5e^{2t}}{48\alpha^2}$$

şeklinde hesaplanır.



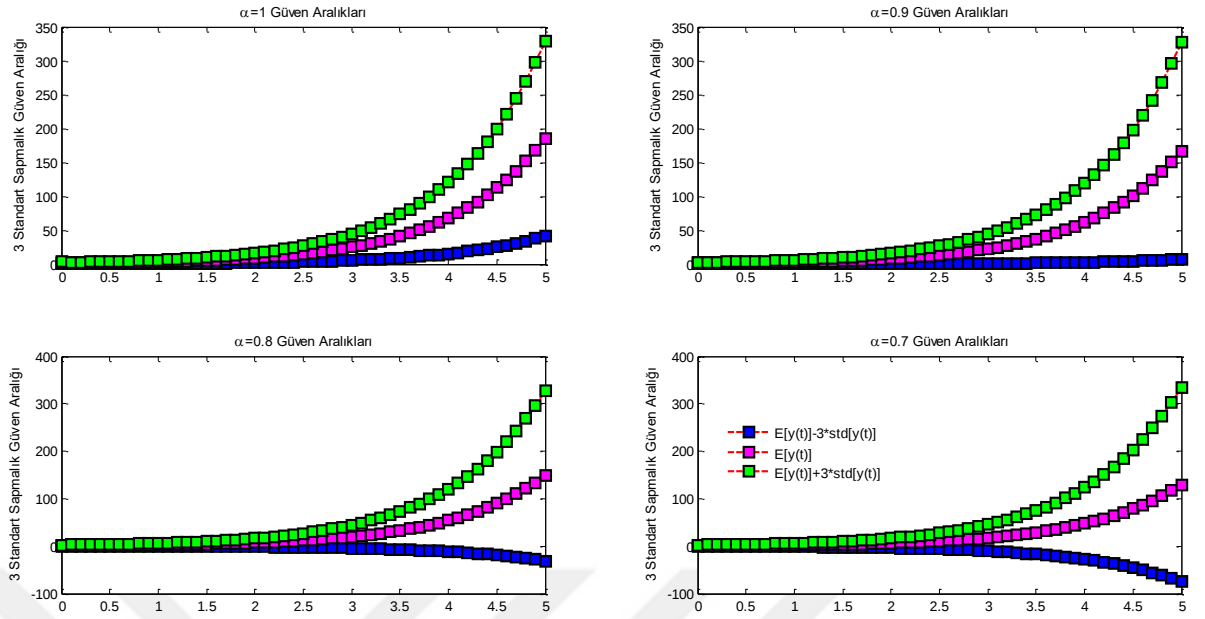
Şekil 12. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (23) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(x(t)) - 3stdsapma(x(t)), E(x(t)) + 3stdsapma(x(t))]$



Şekil 13. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (24) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$



Şekil 14. $B \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$, $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ özel değerleri için (23) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek 5.4

$$\begin{cases} i) {}^{CF}D_t^\alpha x(t) = (B - C)x + y \\ ii) {}^{CF}D_t^\alpha y(t) = x + (B - C)y \end{cases}$$

Kesirli diferansiyel denklem sistemini $x(0) = 1$ ve $y(0) = -1$ başlangıç koşulları ve $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ üstel dağılıma sahip rastgele katsayıları için Aboodh dönüşüm yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm.

$$i) \frac{s\mathcal{A}(x(s)) - \frac{x(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} = (B - C)\mathcal{A}(x(s)) + \mathcal{A}(y(s))$$

$$\mathcal{A}(x(s)) = \frac{1}{s^2} + \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)(B - C)\mathcal{A}(x(s)) + \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s))$$

$$\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)(B - C)\right)\mathcal{A}(x(s)) - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\mathcal{A}(y(s)) = \frac{1}{s^2} \quad (25)$$

$$ii) \frac{s\mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} = \mathcal{A}(x(s)) + (B - C)\mathcal{A}(y(s))$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(y(s)) &= \frac{-1}{s^2} + \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) \mathcal{A}(x(s)) + \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C) \mathcal{A}(y(s)) \\ \left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right) \mathcal{A}(y(s)) - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) \mathcal{A}(x(s)) &= \frac{-1}{s^2}\end{aligned}\quad (26)$$

$\mathcal{A}(y(s))$ 'i bulmak için (26) denklemini $\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right)$ ile (25) denklemini $\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)$ ile çarpıp toplarsak;

$$\begin{aligned}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right)^2 \mathcal{A}(y(s)) - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)^2 \mathcal{A}(y(s)) \\ = \frac{\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)}{s^2} - \frac{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right)}{s^2}\end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Gerekli düzenlemeler ve sadeleştirmeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}\left\{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)^2\right\} \mathcal{A}(y(s)) \\ = \frac{\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) - \left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right)}{s^2} \\ \left\{\left(\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right) - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\right)\left(\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right) + \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\right)\right\} \mathcal{A}(y(s)) \\ = \frac{\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) - \left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right)}{s^2}\end{aligned}$$

$$\left\{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) (B - C)\right) + \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)\right\} \mathcal{A}(y(s)) = \frac{-1}{s^2}$$

$$\left(\frac{s - (B - C)\alpha - (B - C)s + (B - C)\alpha s + \alpha + (1 - \alpha)s}{s}\right) \mathcal{A}(y(s)) = \frac{-1}{s^2}$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{-1}{s(s - (B - C)\alpha - (B - C)s + (B - C)\alpha s + \alpha + (1 - \alpha)s)}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(y(s)) &= \frac{-1}{s\{[(1 - (B - C) + (B - C)\alpha + (1 - \alpha)]s - (B - C)\alpha + \alpha\}} \\ \mathcal{A}(y(s)) &= \frac{-1}{((1 - (B - C) + (B - C)\alpha + (1 - \alpha))s \left\{ s - \frac{(B - C)\alpha - \alpha}{1 - (B - C) + (B - C)\alpha + (1 - \alpha)} \right\})}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Ve bu denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşümü alınır;

$$y(t) = \frac{-1}{1 - (B - C) + (B - C)\alpha + (1 - \alpha)} e^{\frac{(B - C)\alpha - \alpha}{1 - (B - C) + (B - C)\alpha + (1 - \alpha)} t}$$

bulunur.

$\alpha = 1$ özel değeri için;

$$y(t) = -e^{(B - C - 1)t} \quad (27)$$

şeklinde hesaplanır.

(27)denklemin $t = 0$ civarında Taylor serisi açılımı yapılırsa;

$$\begin{aligned}y(t) = - \left[1 + (B - C - 1)t + \frac{1}{2!}(B - C - 1)^2 t^2 + \frac{1}{3!}(B - C - 1)^3 t^3 \right. \\ \left. + O(t^4) \right] \quad (28)\end{aligned}$$

şeklinde olur.

$\mathcal{A}(x(s))$ 'i bulmak için (25) denklemini $\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)(B - C)\right)$ ile

(26) denklemini $\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)$ ile çarpıp toplarsak;

$$\begin{aligned}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)(B - C)\right)^2 \mathcal{A}(x(s)) - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)^2 \mathcal{A}(x(s)) \\ = \frac{\left(1 - \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)(B - C)\right)}{s^2} - \frac{\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right)}{s^2}\end{aligned}$$

denklemini elde edilir.

Bir önceki adımda yapılan işlemler yapılırsa;

$$\mathcal{A}(x(s))$$

$$= \frac{1}{((1 - (B - C) + (B - C)\alpha + (1 - \alpha))s \left\{ s - \frac{(B - C)\alpha - \alpha}{1 - (B - C) + (B - C)\alpha + (1 - \alpha)} \right\})}$$

şeklinde hesaplanır. Ve bu denklemin her iki tarafının ters Aboodh dönüşümü alınır;

$$x(t) = \frac{1}{1 - (B - C) + (B - C)\alpha + (1 - \alpha)} e^{\frac{(B-C)\alpha - \alpha}{1 - (B-C) + (B-C)\alpha + (1 - \alpha)} t}$$

bulunur.

$\alpha = 1$ özel değeri için;

$$x(t) = e^{(B-C-1)t} \quad (29)$$

şeklinde hesaplanır.

(29)denklemin $t = 0$ civarında Taylor serisi açılımı yapılırsa;

$$x(t) = \left[1 + (B - C - 1)t + \frac{1}{2!} (B - C - 1)^2 t^2 + \frac{1}{3!} (B - C - 1)^3 t^3 + O(t^4) \right] \quad (30)$$

şeklinde olur.

X rastgele değişkeni üstel dağılıma sahipse moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}; t < \lambda$$

$$E[C] = \frac{1}{\lambda}, E[C^2] = \frac{2}{\lambda^2}, E[C^3] = \frac{6}{\lambda^3}, E[C^4] = \frac{24}{\lambda^4}, E[C^5] = \frac{120}{\lambda^5}, E[C^6] = \frac{720}{\lambda^6}$$

olarak hesaplanır.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliğinden;

$$Var[C] = \frac{1}{\lambda^2}, Var[C^2] = \frac{20}{\lambda^4}, Var[C^3] = \frac{684}{\lambda^6}$$

olarak hesaplanır.

X rastgele değişkeni düzgün dağılıma sahipse olasılık yoğunluk fonksiyonundan faydalanarak,

$$E(X^n) = \int_a^b x^n \cdot \frac{1}{b-a} dx$$

ifadesinden $B \sim \text{Düzgün}(a, b)$ rastgele değişkeninin 1,2,3,4,5 ve 6. momentleri,

$$E[B] = \frac{a+b}{2}, E[B^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, E[B^3] = \frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{4}$$

$$E[B^4] = \frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{5}$$

$$E[B^5] = \frac{a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5}{6}$$

$$E[B^6] = \frac{a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6}{7}$$

olarak hesaplanır.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliğinden;

$$Var[B] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$Var[B^2] = \frac{4a^4 - a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 + 4b^4}{45}$$

$$Var[B^3] = \frac{9a^6 + 2a^5b - 5a^4b^2 - 12a^3b^3 - 5a^2b^4 + 2ab^5 + 9b^6}{112}$$

olarak hesaplanır.

$$E[x(t)] = E \left[1 + (B - C - 1)t + \frac{1}{2!}(B - C - 1)^2t^2 + \frac{1}{3!}(B - C - 1)^3t^3 \right]$$

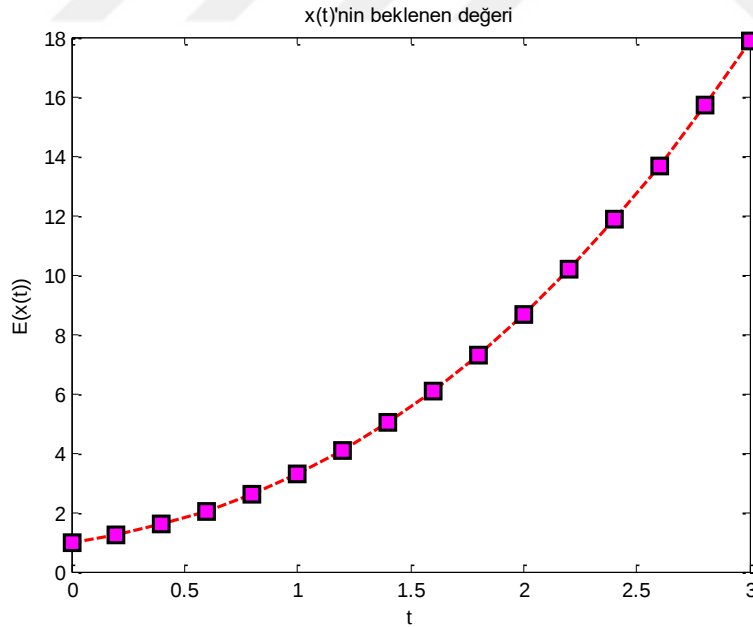
$$\begin{aligned} E[x(t)] = E \left[1 + (B - C - 1)t + \frac{1}{2!}(B^2 + C^2 + 1 - 2BC - 2B + 2C + 1)t^2 \right. \\ \left. + \frac{1}{3!}(B^3 - 3B^2C - 3B^2 + 3C^2B - 3C^2 + 6BC + 3B - 3C - C^3 \right. \\ \left. - 1)t^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[x(t)] = 1 + (E[B] - E[C] - 1)t \\ + \frac{1}{2!} \{E[B^2] + E[C^2] + 1 - 2E[B]E[C] - 2E[B] + 2E[C] + 1\}t^2 \\ + \frac{1}{3!} \{E[B^3] - 3E[B^2]E[C] - 3E[B^2] + 3E[C^2]E[B] - 3E[C^2] \\ + 6E[B]E[C] + 3E[B] - 3E[C] - E[C^3] - 1\}t^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[x(t)] &= 1 + \left(\frac{a+b}{2} - \frac{1}{\lambda} - 1 \right) t \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} + \frac{2}{\lambda^2} + 1 - 2 \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} - 2 \frac{a+b}{2} + 2 \frac{1}{\lambda} + 1 \right) t^2 \\
&+ \frac{1}{3!} \left(\frac{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}{4} - 3 \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} - 3 \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right. \\
&\left. + 3 \frac{2}{\lambda^2} \cdot \frac{a+b}{2} - 3 \frac{2}{\lambda^2} + 6 \frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} + 3 \frac{a+b}{2} - 3 \frac{1}{\lambda} - \frac{6}{\lambda^3} - 1 \right) t^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[x(t)] &= 1 + \left(\frac{2+3}{2} - \frac{1}{2} - 1 \right) t \\
&+ \frac{1}{2!} \left(\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} + \frac{2}{2^2} + 1 - 2 \cdot \frac{2+3}{2} \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{2+3}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 \right) t^2 \\
&+ \frac{1}{3!} \left(\frac{2^3 + 2^2 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 + 3^3}{4} - 3 \cdot \frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} - 3 \cdot \frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \right. \\
&\left. + 3 \cdot \frac{2}{2^2} \cdot \frac{2+3}{2} - 3 \cdot \frac{2}{2^2} + 6 \cdot \frac{2+3}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{2+3}{2} - 3 \cdot \frac{1}{2} - \frac{6}{2^3} - 1 \right) t^3
\end{aligned}$$

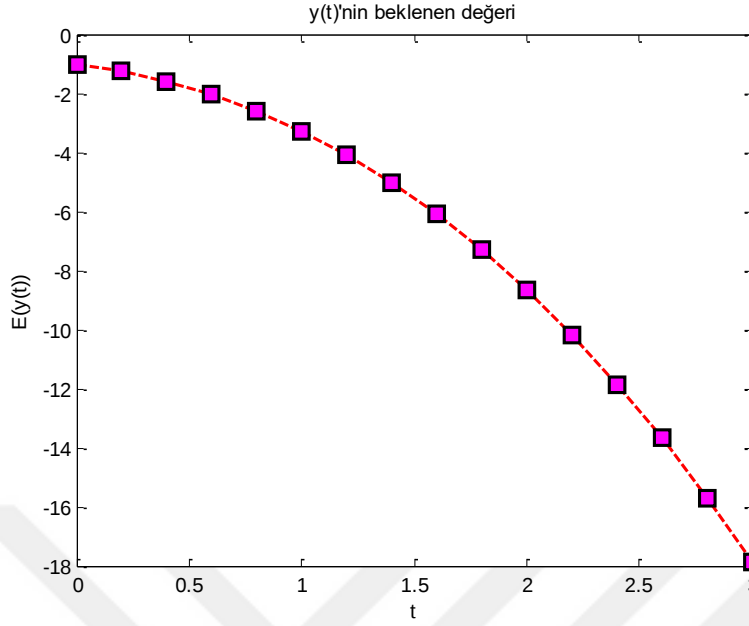
$$E[x(t)] = 1 + t + \frac{7}{6}t^2 + \frac{1}{8}t^3 \text{ bulunur.}$$



Şekil 15. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (30)denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$E[y(t)] = -E[x(t)] = -\left(1 + t + \frac{7}{6}t^2 + \frac{1}{8}t^3\right)$$

şeklinde olur.



Şekil 16. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (28) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$Var[x(t)] = Var\left[1 + (B - C - 1)t + \frac{1}{2!}(B - C - 1)^2t^2 + \frac{1}{3!}(B - C - 1)^3t^3\right]$$

$$Var[x(t)] = Var\left[1 + (B - C - 1)t + \frac{1}{2!}(B^2 + C^2 + 1 - 2BC - 2B + 2C + 1)t^2\right] \\ + Var\left[\frac{1}{3!}(B^3 - 3B^2C - 3B^2 + 3C^2B - 3C^2 + 6BC + 3B - 3C - C^3 - 1)t^3\right]$$

$$Var[x(t)] = (Var[B] + Var[C])t^2 \\ + \frac{1}{4}(Var[B^2] + Var[C^2] + 4Var[BC] + 4Var[B] + 4Var[C])t^4 \\ + \frac{1}{36}(Var[B^3] + 9Var[B^2C] + 9Var[B^2] + 9Var[C^2B] + 36Var[BC] \\ + 9Var[B] + 9Var[C] + Var[C^3])t^6$$

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliğinden;

$$Var[XY] = E[(XY)^2] - [E(XY)]^2 = E(X^2Y^2) - [E(X).E(Y)]^2$$

$$Var[XY] = E(X^2).E(Y^2) - [E(X)]^2.[E(Y)]^2$$

$$Var[X] = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ ise } E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2$$

$$\begin{aligned}
Var[XY] &= (Var(X) + [E(X)]^2) \cdot E(Y^2) - [E(X)]^2 \cdot [E(Y)]^2 \\
&= Var(X)E(Y^2) + [E(X)]^2 \cdot E(Y^2) - [E(X)]^2 \cdot [E(Y)]^2 \\
&= Var(X)E(Y^2) + [E(X)]^2 Var(Y) \\
&= Var(X)(Var(Y) + [E(Y)]^2) + E(X)^2 Var(Y) \\
&= Var(X)Var(Y) + Var(X)[E(Y)]^2 + Var(Y)[E(X)]^2
\end{aligned}$$

$$Var[XY] = Var[X]Var[Y] + Var[X](E[Y])^2 + Var[Y](E[X])^2$$

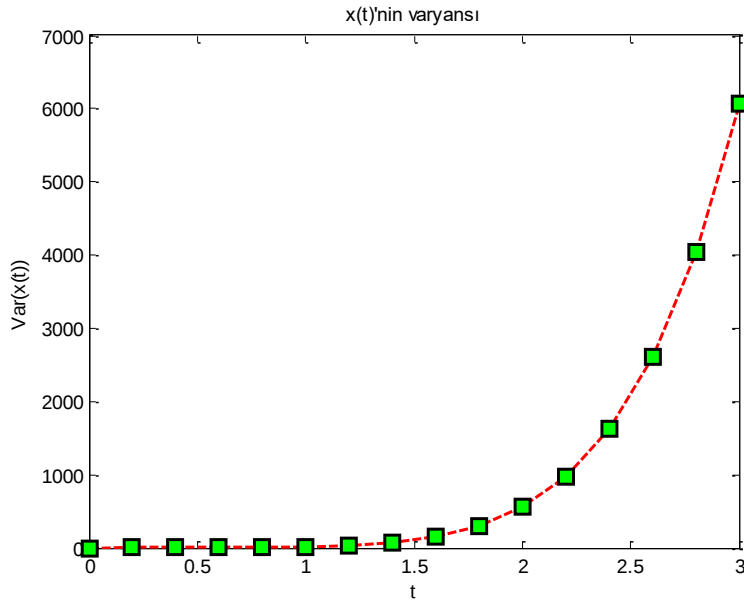
şeklinde bulunur.

$$\begin{aligned}
Var[x(t)] &= (Var[B] + Var[C])t^2 \\
&\quad + \frac{1}{4}(Var[B^2] + Var[C^2]) \\
&\quad + 4(Var[B]Var[C] + Var[B](E[C])^2 + Var[C](E[B])^2) + 4Var[B] \\
&\quad + 4Var[C])t^4 \\
&\quad + \frac{1}{36}(Var[B^3] + 9(Var[B^2]Var[C] + Var[B^2](E[C])^2 \\
&\quad + Var[C](E[B^2])^2) + 9Var[B^2] + 9(Var[C^2]Var[B] \\
&\quad + Var[C^2](E[B])^2 + Var[B](E[C^2])^2 + 36(Var[B]Var[C] \\
&\quad + Var[B](E[C])^2 + Var[C](E[B])^2) + 9Var[B] + 9Var[C] \\
&\quad + Var[C^3])t^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[x(t)] &= \left(\frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} + \frac{1}{\lambda^2} \right) t^2 \\
&\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{4a^4 - a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 + 4b^4}{45} + \frac{20}{\lambda^4} + 4 \left(\frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} \right) + 4 \cdot \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \right. \\
&\quad \left. + 4 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right) t^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{36} \left(\frac{9a^6 + 2a^5b - 5a^4b^2 - 12a^3b^3 - 5a^2b^4 + 2ab^5 + 9b^6}{112} \right. \\
& + 9 \left(\frac{4a^4 - a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 + 4b^4}{45} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right. \\
& + \frac{4a^4 - a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 + 4b^4}{45} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot \left(\frac{b^2 + ab + a^2}{3} \right)^2 \Big) \\
& + 9 \cdot \frac{4a^4 - a^3b - 6a^2b^2 - ab^3 + 4b^4}{45} + 9 \left(\frac{20}{\lambda^4} \cdot \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \right. \\
& + \frac{20}{\lambda^4} \cdot \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \cdot \frac{4}{\lambda^4} \Big) + 36 \left(\frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \cdot \frac{1}{\lambda^2} \right. \\
& + \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} \Big) + 9 \cdot \frac{b^2 - 2ab + a^2}{12} + 9 \cdot \frac{1}{\lambda^2} \\
& \left. + \frac{684}{\lambda^6} \right) t^6 \\
Var[x(t)] &= \left(\frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} + \frac{1}{2^2} \right) t^2 \\
& + \frac{1}{4} \left(\frac{4 \cdot 2^4 - 2^3 \cdot 3 - 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4}{45} + \frac{20}{2^4} \right. \\
& + 4 \left(\frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{4} \right) \\
& \left. + 4 \cdot \frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} + 4 \cdot \frac{1}{2^2} \right) t^4 \\
& + \frac{1}{36} \left(\frac{9 \cdot 2^6 + 2 \cdot 2^5 \cdot 3 - 5 \cdot 2^4 \cdot 3^2 - 12 \cdot 2^3 \cdot 3^3 - 5 \cdot 2^2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 2 \cdot 3^5 + 9 \cdot 3^6}{112} \right. \\
& + 9 \left(\frac{4 \cdot 2^4 - 2^3 \cdot 3 - 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4}{45} \cdot \frac{1}{2^2} \right. \\
& + \frac{4 \cdot 2^4 - 2^3 \cdot 3 - 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4}{45} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} \cdot \left(\frac{3^2 + 2 \cdot 3 + 2^2}{3} \right)^2 \Big) \\
& + 9 \cdot \frac{4 \cdot 2^4 - 2^3 \cdot 3 - 6 \cdot 2^2 \cdot 3^2 - 2 \cdot 3^3 + 4 \cdot 3^4}{45} + 9 \left(\frac{20}{2^4} \cdot \frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} + \frac{20}{2^4} \cdot \left(\frac{2+3}{2} \right)^2 \right. \\
& + \frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} \cdot \frac{4}{2^4} \Big) + 36 \left(\frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} \cdot \frac{1}{2^2} \right. \\
& + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{4} \Big) + 9 \cdot \frac{3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 + 2^2}{12} + 9 \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{684}{2^6} \Big) t^6 \\
Var[x(t)] &= \frac{1}{3} t^2 + \frac{499}{180} t^4 + \left(\frac{3533}{672} + \frac{1981}{720} \right) t^6
\end{aligned}$$

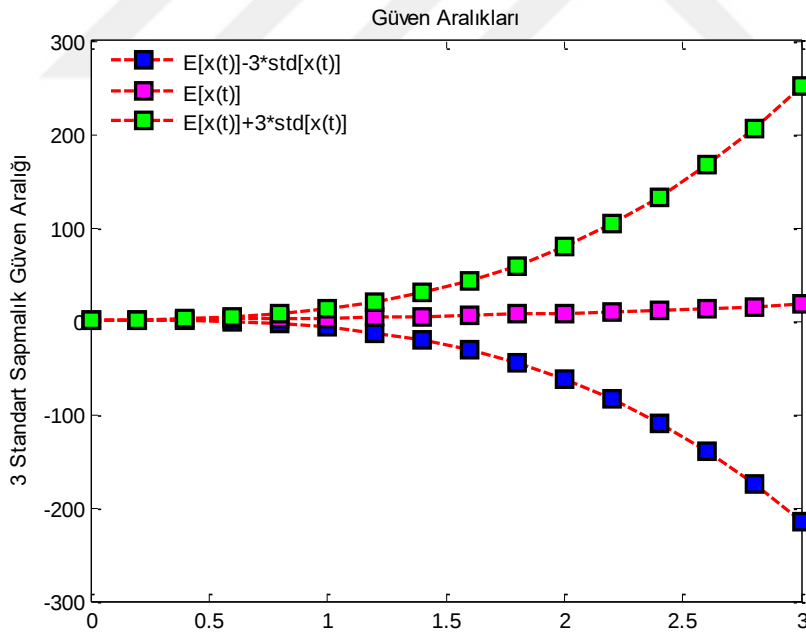
bulunur.



Şekil 17. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (30) denkleminin varyansının çözüm davranışı

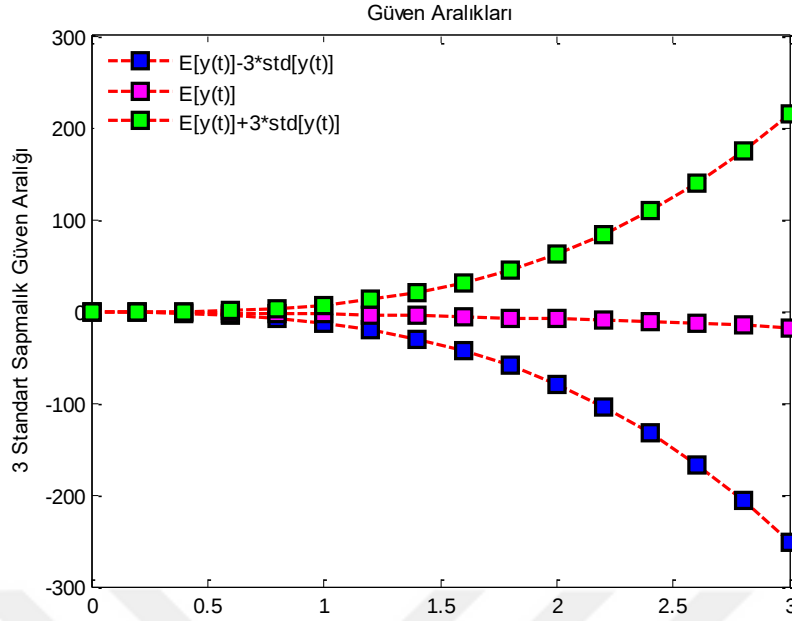
$y(t) = -x(t)$ olduğundan; $\text{Var}[y(t)] = \text{Var}[x(t)]$ dir.

Güven aralıkları $[E(x(t)) - 3\text{stdsapma}(x(t)), E(x(t)) + 3\text{stdsapma}(x(t))]$



Şekil 18. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (30) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$



Şekil 19. $B \sim Düzgün(a = 2, b = 3)$, $C \sim Üstel(\lambda = 2)$ özel değerleri için (28) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-5.5.

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta xy \\ y' = \sigma xy - \gamma y \end{cases}, \alpha = \frac{2}{3}, \beta = \frac{4}{3}, \sigma = \gamma = 1$$

Rastgele Lotka-Volterra Av-Avcı modelinin $x(0) = B$ ve $y(0) = C$ başlangıç koşulları ve $B \sim Düzgün(a = 2, b = 3)$, $C \sim Üstel(\lambda = 2)$ üstel dağılıma sahip rastgele katsayıları için Aboodh dönüşüm yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm.

$$\begin{cases} i) x' = \frac{2}{3}x - \frac{4}{3}xy \\ ii) y' = xy - y \end{cases}$$

i) numaralı denklem için Aboodh dönüşümü uygulanırsa;

$$s\mathcal{A}(x(s)) - \frac{x(0)}{s} = \frac{2}{3}\mathcal{A}(x(s)) - \frac{4}{3}\mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

$$\mathcal{A}(x(s))\left(s - \frac{2}{3}\right) = \frac{B}{s} - \frac{4}{3}\mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

$$\mathcal{A}(x(s)) = \frac{B}{s(s - \frac{2}{3})} - \frac{4}{3(s - \frac{2}{3})}\mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

her tarafın ters Aboodh dönüşüm alınırsa;

$$x(t) = B \cdot e^{\frac{2t}{3}} - \frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A}[x(t)y(t)] \right]$$

$$x_0(t) = B \cdot e^{\frac{2t}{3}}$$

$$C_n = x_n(t)y_n(t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{r=0}^n x_r y_{n-r}$$

$$x_{n+1}(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A} \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n \right] \right] \quad (31)$$

(31) denkleminde $n = 0$ yazılırsa;

$$x_1(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A}[x_0(t)y_0(t)] \right] \quad (32)$$

ii) numaralı denklem için Aboodh dönüşümü uygulanırsa;

$$s \mathcal{A}(y(s)) - \frac{y(0)}{s} = \mathcal{A}[x(t)y(t)] - \mathcal{A}(y(s))$$

$$(s + 1) \mathcal{A}(y(s)) = \frac{C}{s} + \mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{C}{s(s + 1)} + \frac{1}{s + 1} \mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

her tarafın ters Aboodh dönüşüm alınırsa;

$$y(t) = C \cdot e^{-t} + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s + 1} \mathcal{A}[x(t)y(t)] \right]$$

$$y_0(t) = C \cdot e^{-t}$$

$$y_{n+1}(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A} \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n \right] \right] \quad (33)$$

(33) denkleminde $n = 0$ yazılırsa;

$$y_1(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A}[x_0(t)y_0(t)] \right] \quad (34)$$

(32) denkleminde

$$x_0(t) = B \cdot e^{\frac{2t}{3}} \text{ ve } y_0(t) = C \cdot e^{-t}$$

değerleri yerine yazılırsa;

$$x_1(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A}[B \cdot e^{\frac{2t}{3}} \cdot C \cdot e^{-t}] \right] = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A}[B \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{3}}] \right]$$

$$x_1(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} B \cdot C \cdot \frac{1}{s(s + \frac{1}{3})} \right] = -\frac{4}{3} B \cdot C \cdot \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{(s - \frac{2}{3})} \cdot \frac{1}{s(s + \frac{1}{3})} \right]$$

$\frac{1}{(s - \frac{2}{3})} \cdot \frac{1}{s(s + \frac{1}{3})}$ ifadesi basit kesirlerine ayrılırsa;

$$\frac{1}{s(s - \frac{2}{3})(s + \frac{1}{3})} = \frac{1}{s(s - \frac{2}{3})} + \frac{-1}{s(s + \frac{1}{3})}$$

şeklinde olur.

$$x_1(t) = -\frac{4}{3} B \cdot C \cdot \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s(s - \frac{2}{3})} + \frac{-1}{s(s + \frac{1}{3})} \right] = \frac{4}{3} B \cdot C (e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}})$$

olarak bulunur.

(34) denkleminde

$$x_0(t) = B \cdot e^{\frac{2t}{3}} \text{ ve } y_0(t) = C \cdot e^{-t}$$

değerleri yerine yazılırsa;

$$y_1(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A}[B \cdot e^{\frac{2t}{3}} \cdot C \cdot e^{-t}] \right] = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A}[B \cdot C \cdot e^{-\frac{t}{3}}] \right]$$

$$y_1(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} B.C. \frac{1}{s(s+\frac{1}{3})} \right] = B.C \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s(s+\frac{1}{3})} \right]$$

$\frac{1}{(s+1)} \cdot \frac{1}{s(s+\frac{1}{3})}$ ifadesi basit kesirlerine ayrılırsa;

$$\frac{1}{s(s+1)(s+\frac{1}{3})} = \frac{-\frac{3}{2}}{s(s+1)} + \frac{\frac{3}{2}}{s(s+\frac{1}{3})}$$

şeklinde olur.

$$y_1(t) = B.C \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{-\frac{3}{2}}{s(s+1)} + \frac{\frac{3}{2}}{s(s+\frac{1}{3})} \right] = B.C \left(\frac{3}{2} e^{\frac{-t}{3}} - \frac{3}{2} e^{-t} \right) = \frac{3}{2} B.C \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right)$$

olarak bulunur.

(31) denkleminde $n = 1$ yazılırsa;

$$x_2(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s-\frac{2}{3}} \mathcal{A}[x_0(t)y_1(t) + x_1(t)y_0(t)] \right]$$

$$x_2(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s-\frac{2}{3}} \mathcal{A} \left[B.e^{\frac{2t}{3}} \cdot \frac{3}{2} B.C \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right) + \frac{4}{3} B.C \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right) C.e^{-t} \right] \right]$$

$$x_2(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s-\frac{2}{3}} \mathcal{A} \left(\frac{3}{2} B^2.C e^{\frac{t}{3}} - \frac{3}{2} B^2.C e^{\frac{-t}{3}} + \frac{4}{3} B.C^2 e^{-\frac{4t}{3}} - \frac{4}{3} B.C^2 e^{-\frac{t}{3}} \right) \right]$$

$$x_2(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s-\frac{2}{3}} \left(\frac{3}{2} B^2.C. \frac{1}{s(s-\frac{1}{3})} - \frac{3}{2} B^2.C. \frac{1}{s(s+\frac{1}{3})} + \frac{4}{3} B.C^2. \frac{1}{s(s+\frac{4}{3})} - \frac{4}{3} B.C^2. \frac{1}{s(s+\frac{1}{3})} \right) \right]$$

$$x_2(t) = -\frac{4}{3} \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{3}{2} B^2.C. \frac{1}{s(s-\frac{2}{3})(s-\frac{1}{3})} - \frac{3}{2} B^2.C. \frac{1}{s(s-\frac{2}{3})(s+\frac{1}{3})} + \frac{4}{3} B.C^2. \frac{1}{s(s-\frac{2}{3})(s+\frac{4}{3})} - \frac{4}{3} B.C^2. \frac{1}{s(s-\frac{2}{3})(s+\frac{1}{3})} \right]$$

siyah renkle yazılan ifadeler basit kesirlerine ayrılıp denklemde yerine yazılırsa;

$$x_2(t) = -\frac{4}{3}\mathcal{A}^{-1}\left[\frac{3}{2}B^2C\left(\frac{3}{s(s-\frac{2}{3})} + \frac{-3}{s(s-\frac{1}{3})}\right) - \frac{3}{2}B^2C\left(\frac{1}{s(s-\frac{2}{3})} + \frac{-1}{s(s+\frac{1}{3})}\right) + \frac{4}{3}BC^2\left(\frac{\frac{1}{2}}{s(s-\frac{2}{3})} + \frac{-\frac{1}{2}}{s(s+\frac{4}{3})}\right) - \frac{4}{3}BC^2\left(\frac{1}{s(s-\frac{2}{3})} + \frac{-1}{s(s+\frac{1}{3})}\right)\right]$$

$$x_2(t) = -\frac{4}{3}\left[\frac{3}{2}B^2C.\left(3e^{\frac{2t}{3}} - 3e^{\frac{t}{3}}\right) - \frac{3}{2}B^2C.\left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}}\right) + \frac{4}{3}BC^2.\left(\frac{1}{2}e^{\frac{2t}{3}} - \frac{1}{2}e^{\frac{-4t}{3}}\right) - \frac{4}{3}BC^2.\left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}}\right)\right]$$

$$x_2(t) = -6B^2C.\left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}}\right) + 2B^2C.\left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}}\right) - \frac{8}{9}BC^2.\left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-4t}{3}}\right) + \frac{16}{9}BC^2.\left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}}\right)$$

olarak bulunur.

(33) denkleminde $n = 1$ yazılırsa;

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\mathcal{A}[x_0(t)y_1(t) + x_1(t)y_0(t)]\right]$$

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\mathcal{A}\left(B.e^{\frac{2t}{3}}.\frac{3}{2}B.C\left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t}\right) + \frac{4}{3}B.C\left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}}\right)C.e^{-t}\right)\right]$$

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\mathcal{A}\left(\frac{3}{2}B^2.Ce^{\frac{t}{3}} - \frac{3}{2}B^2.Ce^{\frac{-t}{3}} + \frac{4}{3}B.C^2e^{-\frac{4t}{3}} - \frac{4}{3}B.C^2e^{-\frac{t}{3}}\right)\right]$$

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\left(\frac{3}{2}B^2C.\frac{1}{s(s-\frac{1}{3})} - \frac{3}{2}B^2C.\frac{1}{s(s+\frac{1}{3})} + \frac{4}{3}BC^2.\frac{1}{s(s+\frac{4}{3})} - \frac{4}{3}BC^2.\frac{1}{s(s+\frac{1}{3})}\right)\right]$$

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{3}{2} B^2 C. \frac{1}{s(s+1) \left(s - \frac{1}{3}\right)} - \frac{3}{2} B^2 C. \frac{1}{s(s+1) \left(s + \frac{1}{3}\right)} \right. \\ \left. + \frac{4}{3} B C^2. \frac{1}{s(s+1) \left(s + \frac{4}{3}\right)} - \frac{4}{3} B C^2. \frac{1}{s(s+1) \left(s + \frac{1}{3}\right)} \right]$$

siyah renkle yazılan ifadeler basit kesirlerine ayrılıp denklemde yerine yazılırsa;

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{3}{2} B^2 C. \left(\frac{-\frac{3}{4}}{s(s+1)} + \frac{\frac{3}{4}}{s(s - \frac{1}{3})} \right) - \frac{3}{2} B^2 C. \left(\frac{-\frac{3}{2}}{s(s+1)} + \frac{\frac{3}{2}}{s(s + \frac{1}{3})} \right) \right. \\ \left. + \frac{4}{3} B C^2. \left(\frac{3}{s(s+1)} + \frac{-3}{s(s + \frac{4}{3})} \right) - \frac{4}{3} B C^2. \left(\frac{-\frac{3}{2}}{s(s+1)} + \frac{\frac{3}{2}}{s(s + \frac{1}{3})} \right) \right]$$

$$y_2(t) = \left[\frac{3}{2} B^2 C. \left(-\frac{3}{4} e^{-t} + \frac{3}{4} e^{\frac{t}{3}} \right) - \frac{3}{2} B^2 C. \left(-\frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{\frac{-t}{3}} \right) \right. \\ \left. + \frac{4}{3} B C^2. \left(3e^{-t} - 3e^{\frac{-4t}{3}} \right) - \frac{4}{3} B C^2. \left(-\frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{\frac{-t}{3}} \right) \right] \\ y_2(t) = \frac{9}{8} B^2 C. \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) + \frac{9}{4} B^2 C. \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right) + 4 B C^2. \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) \\ + 2 B C^2. \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)$$

olarak bulunur.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(t)$$

$$x(t) = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$$

$$x(t) = B. e^{\frac{2t}{3}} + \frac{4}{3} B. C \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right) - 6 B^2 C. \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right) + 2 B^2 C. \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right) \\ - \frac{8}{9} B C^2. \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) + \frac{16}{9} B C^2. \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right) + \dots \quad (35)$$

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

$$y(t) = C \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} B \cdot C \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right) + \frac{9}{8} B^2 C \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) + \frac{9}{4} B^2 C \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right) \\ + 4BC^2 \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) + 2BC^2 \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right) + \dots \quad (36)$$

denklemini elde edilir.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $x(t)$ ve $y(t)$ denklemlerinin beklenen değerleri;

$$E[x(t)] = E[B \cdot e^{\frac{2t}{3}} + \frac{4}{3} B \cdot C \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right) - 6B^2 C \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right) + 2B^2 C \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right) \\ - \frac{8}{9} BC^2 \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) + \frac{16}{9} BC^2 \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right)$$

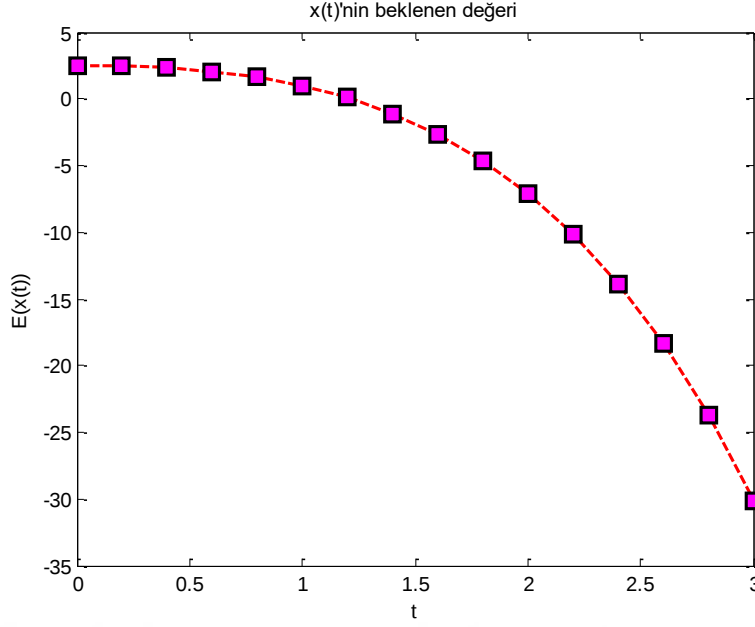
$$E[x(t)] = E[B] \cdot e^{\frac{2t}{3}} + \frac{4}{3} E[B] \cdot E[C] \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right) - 6E[B^2] \cdot E[C] \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right) \\ + 2E[B^2] \cdot E[C] \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right) - \frac{8}{9} E[B] \cdot E[C^2] \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) \\ + \frac{16}{9} E[B] \cdot E[C^2] \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right)$$

$$E[x(t)] = \frac{b+a}{2} \cdot e^{\frac{2t}{3}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{b+a}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right) - 6 \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right) \\ + 2 \cdot \frac{a^2+ab+b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right) - \frac{8}{9} \cdot \frac{b+a}{2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) \\ + \frac{16}{9} \cdot \frac{b+a}{2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right)$$

$$E[x(t)] = \frac{3+2}{2} \cdot e^{\frac{2t}{3}} + \frac{4}{3} \cdot \frac{3+2}{2} \cdot \frac{1}{2} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right) - 6 \cdot \frac{2^2+2 \cdot 3+3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right) \\ + 2 \cdot \frac{2^2+2 \cdot 3+3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right) - \frac{8}{9} \cdot \frac{3+2}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) \\ + \frac{16}{9} \cdot \frac{3+2}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right)$$

$$E[x(t)] = \frac{5}{2} e^{\frac{2t}{3}} + \frac{5}{3} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right) - 19 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right) + \frac{19}{3} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right) \\ - \frac{10}{9} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) + \frac{20}{9} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right)$$

bulunur.



Şekil 20. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (35) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$E[y(t)] = E\left[C \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} B \cdot C \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t}\right) + \frac{9}{8} B^2 C \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t}\right) + \frac{9}{4} B^2 C \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}}\right) + 4 B C^2 \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}}\right) + 2 B C^2 \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}}\right)\right]$$

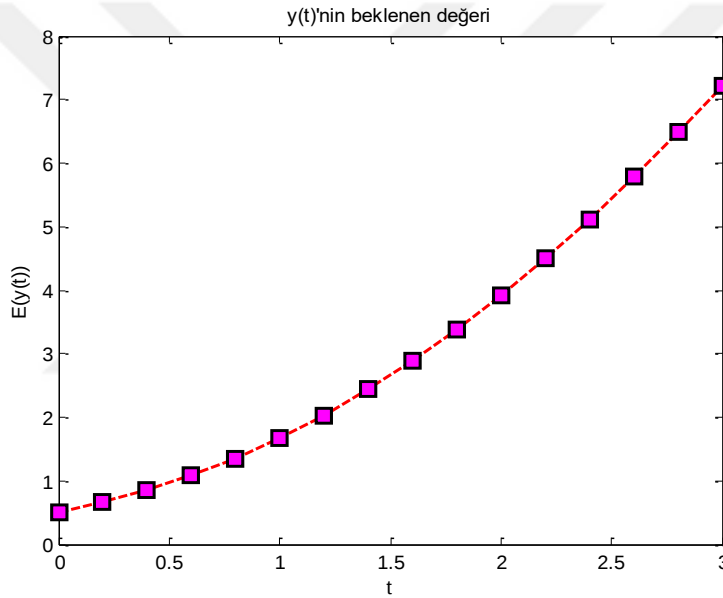
$$E[y(t)] = E[C] \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} \cdot E[B] \cdot E[C] \cdot \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t}\right) + \frac{9}{8} \cdot E[B^2] \cdot E[C] \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t}\right) + \frac{9}{4} \cdot E[B^2] \cdot E[C] \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}}\right) + 4 \cdot E[B] \cdot E[C^2] \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}}\right) + 2 \cdot E[B] \cdot E[C^2] \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}}\right)$$

$$E[y(t)] = \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} \cdot \frac{b+a}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t}\right) + \frac{9}{8} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t}\right) + \frac{9}{4} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}}\right) + 4 \cdot \frac{b+a}{2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}}\right) + 2 \cdot \frac{b+a}{2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}}\right)$$

$$\begin{aligned}
E[y(t)] = & \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3+2}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right) + \frac{9}{8} \cdot \frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) \\
& + \frac{9}{4} \cdot \frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right) + 4 \cdot \frac{3+2}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) \\
& + 2 \cdot \frac{3+2}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[y(t)] = & \frac{1}{2} e^{-t} + \frac{15}{8} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right) + \frac{171}{48} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) + \frac{171}{24} \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right) \\
& + 5 \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) + \frac{5}{2} \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)
\end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 21. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (36) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansının temel özellikleri kullanılırsa $x(t)$ ve $y(t)$ denklemlerinin varyansları;

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \text{ eşitliğinden;}$$

$$Var[B \cdot C] = E(B^2) \cdot E(C^2) - (E(B) \cdot E(C))^2$$

$$Var[B^2 \cdot C] = E(B^4) \cdot E(C^2) - (E(B^2) \cdot E(C))^2$$

şeklinde hesaplanır.

$$\begin{aligned} Var[x(t)] = Var & \left[B \cdot e^{\frac{2t}{3}} + \frac{4}{3} B \cdot C \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right) - 6B^2 C \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right) \right. \\ & \left. + 2B^2 C \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right) - \frac{8}{9} B C^2 \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{4t}{3}} \right) + \frac{16}{9} B C^2 \cdot \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[x(t)] = e^{\frac{4t}{3}} Var[B] & + \frac{16}{9} \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right)^2 Var[B \cdot C] + 36 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right)^2 Var[B^2 \cdot C] \\ & + 4 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 Var[B^2 \cdot C] + \frac{64}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2 Var[B \cdot C^2] \\ & + \frac{256}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 Var[B \cdot C^2] \end{aligned}$$

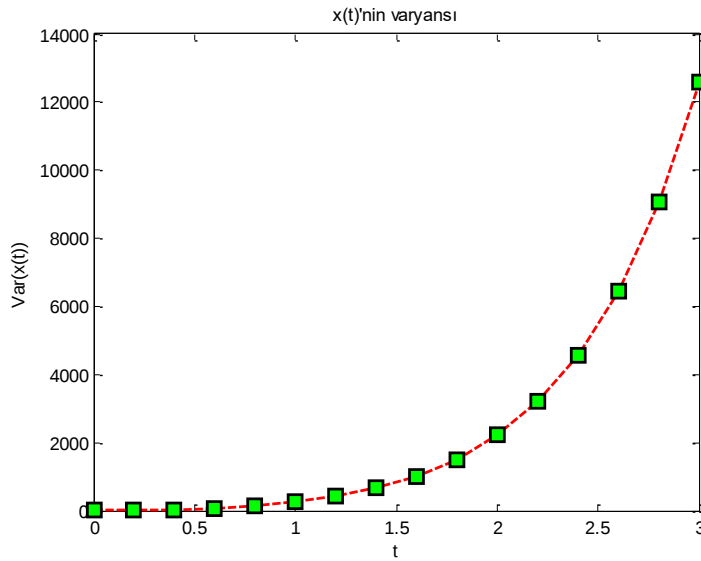
$$\begin{aligned} Var[x(t)] = e^{\frac{4t}{3}} Var[B] & + \frac{16}{9} \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right)^2 \left[E(B^2) \cdot E(C^2) - (E(B) \cdot E(C))^2 \right] \\ & + 36 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right)^2 \left[E(B^4) \cdot E(C^2) - (E(B^2) \cdot E(C))^2 \right] \\ & + 4 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \left[E(B^4) \cdot E(C^2) - (E(B^2) \cdot E(C))^2 \right] \\ & + \frac{64}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2 \left[E(B^2) \cdot E(C^4) - (E(B) \cdot E(C^2))^2 \right] \\ & + \frac{256}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \left[E(B^2) \cdot E(C^4) - (E(B) \cdot E(C^2))^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[x(t)] = e^{\frac{4t}{3}} \cdot \frac{(b-a)^2}{12} & + \frac{16}{9} \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right)^2 \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] \\ & + 36 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right)^2 \left[\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{5} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \right. \\ & \left. - \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] \\ & + 4 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \left[\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{5} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \right. \\ & \left. - \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] \\ & + \frac{64}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2 \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{24}{\lambda^4} - \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \right)^2 \right] \\ & + \frac{256}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{24}{\lambda^4} - \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[x(t)] = & e^{\frac{4t}{3}} \cdot \frac{(3-2)^2}{12} + \frac{16}{9} \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right)^2 \left[\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{2}{2^2} - \left(\frac{2+3}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \right] \\
& + 36 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right)^2 \left[\frac{2^4 + 2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3^4}{5} \cdot \frac{2}{2^2} \right. \\
& \left. - \left(\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \right] \\
& + 4 \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \left[\frac{2^4 + 2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3^4}{5} \cdot \frac{2}{2^2} \right. \\
& \left. - \left(\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \right] \\
& + \frac{64}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2 \left[\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{24}{2^4} - \left(\frac{2+3}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \right)^2 \right] \\
& + \frac{256}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 \left[\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{24}{2^4} - \left(\frac{2+3}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[x(t)] = & \frac{1}{12} e^{\frac{4t}{3}} + \frac{67}{27} \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{\frac{2t}{3}} \right)^2 + \frac{1993}{5} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{t}{3}} \right)^2 + \frac{1993}{45} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \\
& + \frac{508}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2 + \frac{2032}{81} \left(e^{\frac{2t}{3}} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 22. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (35) denkleminin varyansının çözüm davranışı

$$\begin{aligned} Var[y(t)] = Var \left[C \cdot e^{-t} + \frac{3}{2} B \cdot C \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right) + \frac{9}{8} B^2 C \cdot \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) \right. \\ \left. + \frac{9}{4} B^2 C \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right) + 4 B C^2 \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right) + 2 B C^2 \cdot \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right) \right] \end{aligned}$$

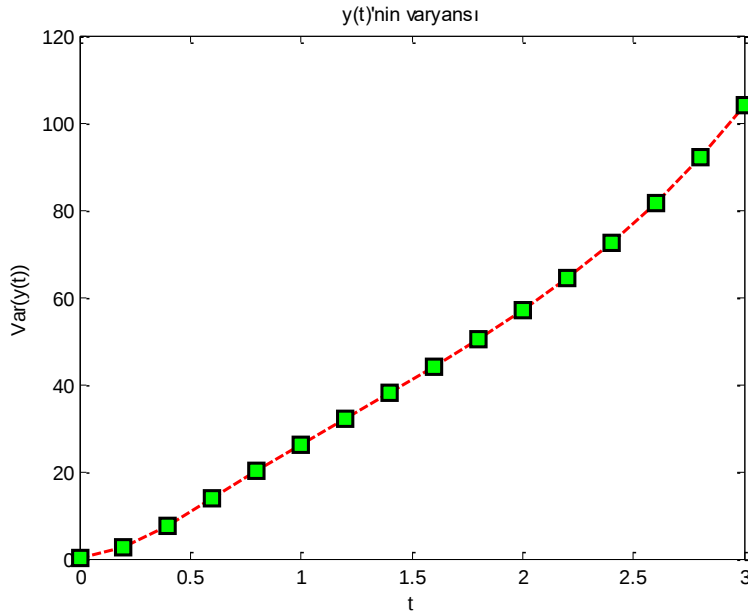
$$\begin{aligned} Var[y(t)] = e^{-2t} Var[C] + \frac{9}{4} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right)^2 Var[B \cdot C] + \frac{81}{64} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 Var[B^2 \cdot C] \\ + \frac{81}{16} \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 Var[B^2 \cdot C] + 16 \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right)^2 Var[B \cdot C^2] \\ + 4 \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 Var[B \cdot C^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[y(t)] = e^{-2t} Var[C] + \frac{9}{4} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right)^2 \left[E(B^2) \cdot E(C^2) - (E(B) \cdot E(C))^2 \right] \\ + \frac{81}{64} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 \left[E(B^4) \cdot E(C^2) - (E(B^2) \cdot E(C))^2 \right] \\ + \frac{81}{16} \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 \left[E(B^4) \cdot E(C^2) - (E(B^2) \cdot E(C))^2 \right] \\ + 16 \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right)^2 \left[E(B^2) \cdot E(C^4) - (E(B) \cdot E(C^2))^2 \right] \\ + 4 \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 \left[E(B^2) \cdot E(C^4) - (E(B) \cdot E(C^2))^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[y(t)] = e^{-2t} \cdot \frac{1}{\lambda^2} + \frac{9}{4} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right)^2 \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] \\ + \frac{81}{64} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 \left[\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{5} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \right. \\ \left. - \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] \\ + \frac{81}{16} \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 \left[\frac{a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4}{5} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \right. \\ \left. - \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{1}{\lambda} \right)^2 \right] \\ + 16 \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right)^2 \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{24}{\lambda^4} - \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \right)^2 \right] \\ + 4 \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 \left[\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \cdot \frac{24}{\lambda^4} - \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{2}{\lambda^2} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

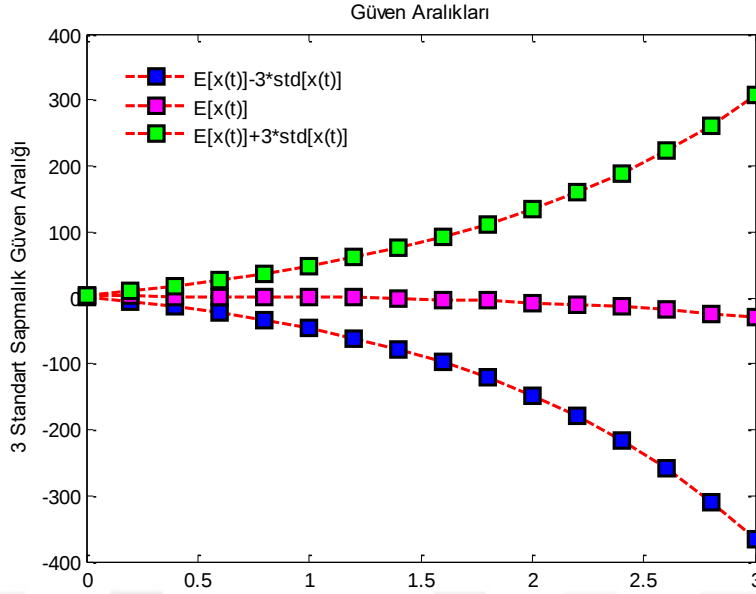
$$\begin{aligned}
Var[y(t)] &= e^{-2t} \cdot \frac{1}{2^2} + \frac{9}{4} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right)^2 \left[\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{2}{2^2} - \left(\frac{2+3}{2} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{81}{64} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 \left[\frac{2^4 + 2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3^4}{5} \cdot \frac{2}{2^2} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \right] \\
&\quad + \frac{81}{16} \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 \left[\frac{2^4 + 2^3 \cdot 3 + 2^2 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3^3 + 3^4}{5} \cdot \frac{2}{2^2} \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right)^2 \right] \\
&\quad + 16 \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right)^2 \left[\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{24}{2^4} - \left(\frac{2+3}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \right)^2 \right] \\
&\quad + 4 \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 \left[\frac{2^2 + 2 \cdot 3 + 3^2}{3} \cdot \frac{24}{2^4} - \left(\frac{2+3}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \right)^2 \right] \\
\\
Var[y(t)] &= \frac{1}{4} e^{-2t} + \frac{231}{64} \left(e^{\frac{-t}{3}} - e^{-t} \right)^2 + \frac{17037}{1280} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 + \frac{17037}{320} \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2 \\
&\quad + 127 \left(e^{-t} - e^{\frac{-4t}{3}} \right)^2 + \frac{127}{4} \left(e^{-t} - e^{\frac{-t}{3}} \right)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.



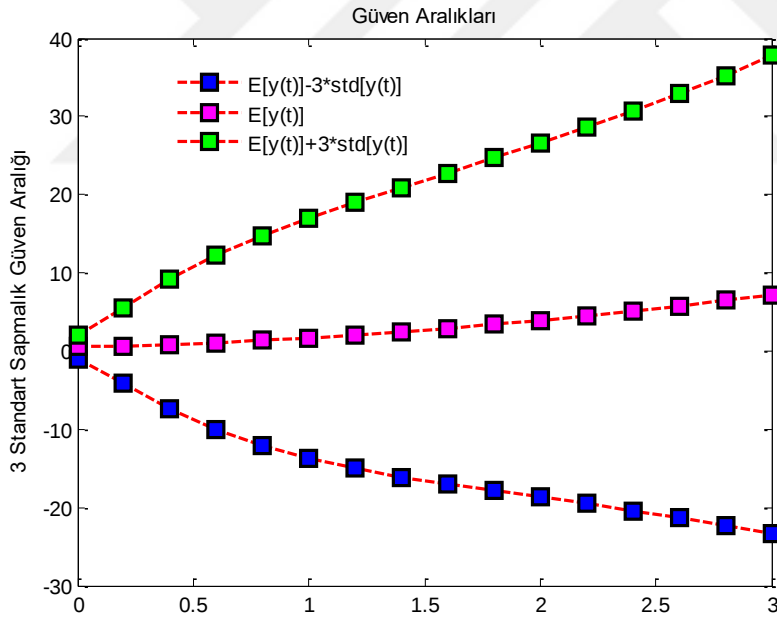
Şekil 23. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (36) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(x(t)) - 3stdsapma(x(t)), E(x(t)) + 3stdsapma(x(t))]$



Şekil 24. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (35) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$



Şekil 25. $B \sim \text{Düzgün}(a = 2, b = 3)$, $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ özel değerleri için (36) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-5.6.

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3}x - \beta xy \\ y' = xy - y \end{cases}$$

Rastgele Lotka-Volterra Av-Avcı modelinin $x(0) = 1$ ve $y(0) = -1$ başlangıç koşulları ve $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ gamma dağılıma sahip rastgele katsayıları için Aboodh dönüşüm yöntemi yardımı ile çözüünüz.

Çözüm.

i) numaralı denklem için Aboodh dönüşümü uygulanırsa;

$$s\mathcal{A}(x(s)) - \frac{1}{s} = \frac{2}{3}\mathcal{A}(x(s)) - \beta\mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

$$\mathcal{A}(x(s))\left(s - \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{s} - \beta\mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

$$\mathcal{A}(x(s)) = \frac{1}{s(s - \frac{2}{3})} - \frac{\beta}{s - \frac{2}{3}}\mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

her tarafın ters Aboodh dönüşüm alınır;

$$x(t) = e^{\frac{2}{3}t} - \beta\mathcal{A}^{-1}\left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}}\mathcal{A}[x(t)y(t)]\right]$$

$$x_0(t) = e^{\frac{2}{3}t}$$

$$C_n = x_n(t)y_n(t)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n = \sum_{r=0}^n x_r y_{n-r}$$

$$x_{n+1}(t) = -\beta\mathcal{A}^{-1}\left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}}\mathcal{A}\left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n\right]\right] \quad (37)$$

(37) denkleminde $n = 0$ yazılırsa;

$$x_1(t) = -\beta\mathcal{A}^{-1}\left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}}\mathcal{A}[x_0(t)y_0(t)]\right] \quad (38)$$

ii) numaralı denklem için Aboodh dönüşümü uygulanırsa;

$$s\mathcal{A}(y(s)) - \frac{-1}{s} = \mathcal{A}[x(t)y(t)] - \mathcal{A}(y(s))$$

$$(s+1)\mathcal{A}(y(s)) = \frac{-1}{s} + \mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

$$\mathcal{A}(y(s)) = \frac{-1}{s(s+1)} + \frac{1}{s+1} \mathcal{A}[x(t)y(t)]$$

her tarafın ters Aboodh dönüşüm alınır;

$$y(t) = -e^{-t} + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A}[x(t)y(t)] \right]$$

$$y_0(t) = -e^{-t}$$

$$y_{n+1}(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A} \left[\sum_{n=0}^{\infty} C_n \right] \right] \quad (39)$$

(39) denkleminde $n = 0$ yazılırsa;

$$y_1(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A}[x_0(t)y_0(t)] \right] \quad (40)$$

(38) denkleminde $x_0(t) = e^{\frac{2}{3}t}$ ve $y_0(t) = -e^{-t}$ değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -\beta \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A} \left[e^{\frac{2}{3}t} \cdot e^{-t} \right] \right] = \beta \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A} \left[e^{-\frac{t}{3}} \right] \right] \\ &= -\beta \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{3}} \right) = -\beta \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{1}{(s - \frac{2}{3})(s + \frac{1}{3})} \right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{(s - \frac{2}{3})(s + \frac{1}{3})}$ ifadesini $\frac{p}{s(s - \frac{2}{3})} + \frac{q}{s(s + \frac{1}{3})}$ şeklinde yazmak için, $\frac{1}{(s - \frac{2}{3})(s + \frac{1}{3})}$ kesrini s ile

genişletelim.

$\frac{s}{s(s - \frac{2}{3})(s + \frac{1}{3})} = \frac{p}{s(s - \frac{2}{3})} + \frac{q}{s(s + \frac{1}{3})}$ eşitliğinden $p = \frac{2}{3}$ ve $q = \frac{1}{3}$ bulunur. Dolayısı ile,

$$x_1(t) = -\beta \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{\frac{2}{3}}{s(s - \frac{2}{3})} + \frac{\frac{1}{3}}{s(s + \frac{1}{3})} \right) = -\beta \left[\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right]$$

olarak bulunur.

(40) denkleminde $x_0(t) = e^{\frac{2}{3}t}$ ve $y_0(t) = -e^{-t}$ değerleri yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A}[e^{\frac{2}{3}t} \cdot e^{-t}] \right] = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A} \left[e^{-\frac{t}{3}} \right] \right] = \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s + \frac{1}{3}} \right) \\ &= \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{1}{(s+1)(s + \frac{1}{3})} \right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{3})}$ ifadesini $\frac{p}{s(s+1)} + \frac{q}{s(s+\frac{1}{3})}$ şeklinde yazmak için, $\frac{1}{(s+1)(s+\frac{1}{3})}$ kesrini s ile genişletelim.

$\frac{s}{s(s+1)(s+\frac{1}{3})} = \frac{p}{s(s+1)} + \frac{q}{s(s+\frac{1}{3})}$ eşitliğinden $p = \frac{3}{2}$ ve $q = -\frac{1}{2}$ bulunur. Dolayısı ile,

$$y_1(t) = \mathcal{A}^{-1} \left(\frac{\frac{3}{2}}{s(s+1)} + \frac{-\frac{1}{2}}{s(s + \frac{1}{3})} \right) = \frac{3}{2} \left[e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right]$$

olarak bulunur.

(37) denkleminde $n = 1$ yazılırsa;

$$x_2(t) = -\beta \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A}[x_0(t)y_1(t) + x_1(t)y_0(t)] \right]$$

$$\begin{aligned} x_2(t) &= -\beta \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A} \left[e^{\frac{2}{3}t} \frac{3}{2} \left[e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right] - \beta e^{-t} \left[\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right] \right] \right] \\ &= -\beta \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \mathcal{A} \left[\frac{3}{2} e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{2} e^{\frac{t}{3}} - \frac{2}{3} \beta e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{3} \beta e^{-\frac{4t}{3}} \right] \right] \end{aligned}$$

$$x_2(t) = -\beta \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s - \frac{2}{3}} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s \left(s - \frac{1}{3} \right)} - \frac{2}{3} \beta \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{3} \right)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{3} \beta \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{4}{3} \right)} \right] \right]$$

$$x_2(t) = -\beta \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s \left(s - \frac{2}{3} \right) \left(s + \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s \left(s - \frac{2}{3} \right) \left(s - \frac{1}{3} \right)} \right. \\ \left. - \frac{2}{3} \beta \cdot \frac{1}{s \left(s - \frac{2}{3} \right) \left(s + \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{3} \beta \cdot \frac{1}{s \left(s - \frac{2}{3} \right) \left(s + \frac{4}{3} \right)} \right]$$

siyah renkle yazılan ifadeler basit kesirlerine ayrılıp denklemde yerine yazılırsa;

$$x_2(t) = -\beta \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \beta \right) \left(\frac{1}{s \left(s - \frac{2}{3} \right)} - \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{3} \right)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{s \left(s - \frac{2}{3} \right)} - \frac{3}{s \left(s + \frac{1}{3} \right)} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \beta \left(\frac{\frac{1}{2}}{s \left(s - \frac{2}{3} \right)} - \frac{\frac{1}{2}}{s \left(s + \frac{4}{3} \right)} \right) \right]$$

$$x_2(t) = -\beta \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \beta \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) - \frac{3}{2} \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) - \frac{1}{6} \beta \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right) \right]$$

$$x_2(t) = \left(\frac{2}{3} \beta^2 - \frac{3}{2} \beta \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{3}{2} \beta \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{1}{6} \beta^2 \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

şeklinde bulunur.

(39) denkleminde $n = 1$ yazılırsa;

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s + 1} \mathcal{A} [x_0(t)y_1(t) + x_1(t)y_0(t)] \right]$$

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s + 1} \mathcal{A} \left[e^{\frac{2}{3}t} \frac{3}{2} \left[e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right] - \beta e^{-t} \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) \right] \right]$$

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \mathcal{A} \left[\frac{3}{2} e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{2} e^{\frac{t}{3}} - \frac{2}{3} \beta e^{-\frac{t}{3}} - \frac{1}{3} \beta e^{-\frac{4t}{3}} \right] \right]$$

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s+1} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s \left(s - \frac{1}{3} \right)} - \frac{2}{3} \beta \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{3} \beta \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{4}{3} \right)} \right] \right]$$

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{s(s+1) \left(s + \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s(s+1) \left(s - \frac{1}{3} \right)} - \frac{2}{3} \beta \cdot \frac{1}{s(s+1) \left(s + \frac{1}{3} \right)} - \frac{1}{3} \beta \cdot \frac{1}{s(s+1) \left(s + \frac{4}{3} \right)} \right]$$

siyah renkle yazılan ifadeler basit kesirlerine ayrılıp denklemde yerine yazılırsa;

$$y_2(t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \beta \right) \left(\frac{-\frac{3}{2}}{s(s+1)} + \frac{\frac{3}{2}}{s \left(s + \frac{1}{3} \right)} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{-\frac{3}{4}}{s(s+1)} + \frac{\frac{3}{4}}{s \left(s - \frac{1}{3} \right)} \right) - \frac{1}{3} \beta \left(\frac{3}{s(s+1)} - \frac{3}{s \left(s + \frac{4}{3} \right)} \right) \right]$$

$$y_2(t) = \left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} \beta \right) \left(-\frac{3}{2} e^{-t} + \frac{3}{2} e^{-\frac{t}{3}} \right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4} e^{-t} + \frac{3}{4} e^{\frac{t}{3}} \right) - \beta \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

$$y_2(t) = \left(\frac{9}{4} - \beta \right) \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \frac{3}{8} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \beta \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

şeklinde bulunur.

$$x(t) = x_0 + x_1 + x_2 + \dots$$

$$x(t) = e^{\frac{2}{3}t} - \beta \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{2}{3} \beta^2 - \frac{3}{2} \beta \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{3}{2} \beta \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{1}{6} \beta^2 \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right) + \dots \quad (41)$$

denklemini elde edilir.

$$y(t) = y_0 + y_1 + y_2 + \dots$$

$$y(t) = -e^{-t} + \frac{3}{2} \left(e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{9}{4} - \beta \right) \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \frac{3}{8} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \beta \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right) + \dots \quad (42)$$

denklemini elde edilir.

Gamma dağılımı için 1.,2.,3. ve 4. momentleri ve varyansı;

$$\mu = E(\beta) = u.v, \quad Var(\beta) = u.v^2, \quad E(\beta^2) = u.v^2(u+1),$$

$$E(\beta^3) = u.v^3(u+1).(u+2), \quad E(\beta^4) = u.v^4(u+1).(u+2).(u+3)$$

şeklindedir.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa

$x(t)$ ve $y(t)$ denklemlerinin beklenen değerleri;

$$E[x(t)] = E \left[e^{\frac{2}{3}t} - \beta \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{2}{3} \beta^2 - \frac{3}{2} \beta \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{3}{2} \beta \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{1}{6} \beta^2 \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right) \right]$$

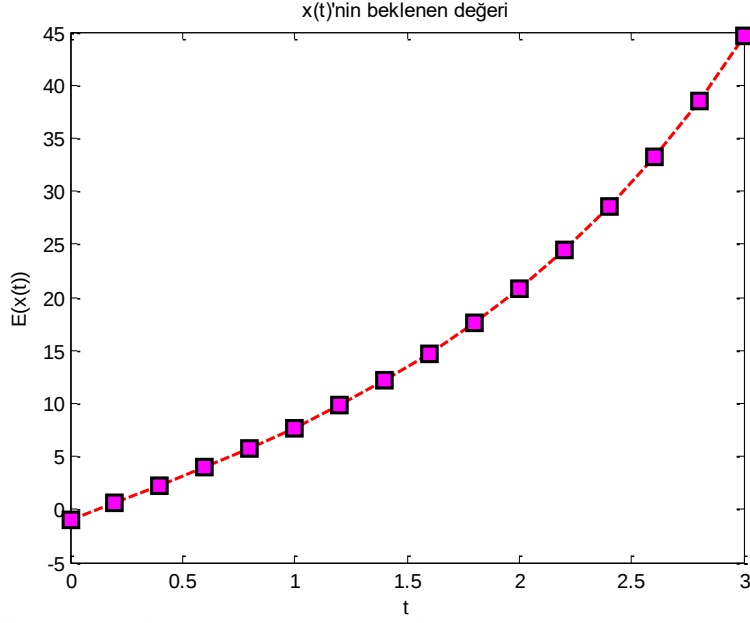
$$E[x(t)] = e^{\frac{2}{3}t} - E[\beta] \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{2}{3} E[\beta^2] - \frac{3}{2} E[\beta] \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{3}{2} E[\beta] \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{1}{6} E[\beta^2] \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

$$E[x(t)] = e^{\frac{2}{3}t} - u.v \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{2}{3} [(u^2 + u).v^2] - \frac{3}{2} (u.v) \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{3}{2} (u.v) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{1}{6} [(u^2 + u).v^2] \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

$$E[x(t)] = e^{\frac{2}{3}t} - 1.2 \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{2}{3} [(1^2 + 1).2^2] - \frac{3}{2} (1.2) \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{3}{2} (1.2) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right) + \frac{1}{6} [(1^2 + 1).2^2] \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

$$E[x(t)] = \frac{19}{3} e^{\frac{2}{3}t} - 6e^{-\frac{t}{3}} - \frac{4}{3} e^{-\frac{4t}{3}}$$

bulunur.



Şekil 26. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (41) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

$$E[y(t)] = E \left[-e^{-t} + \frac{3}{2} \left(e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{9}{4} - \beta \right) \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \frac{3}{8} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \beta \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right) \right]$$

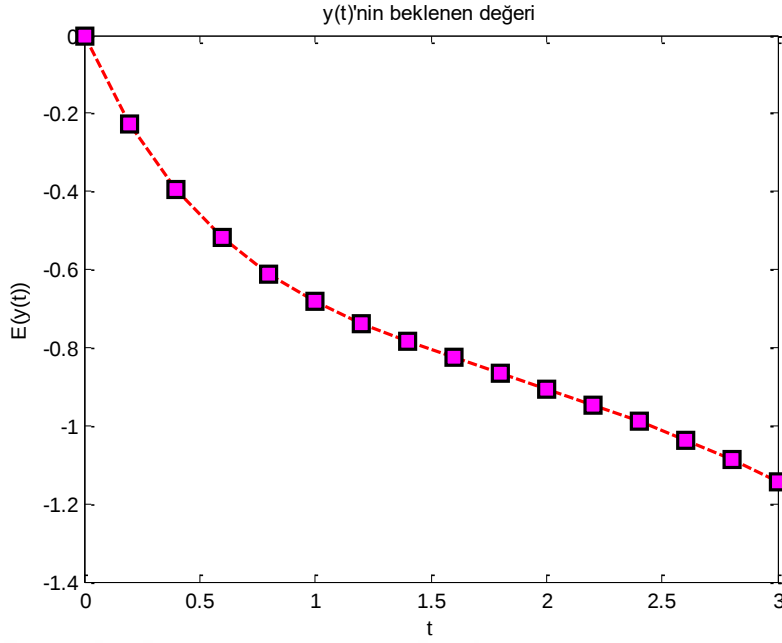
$$E[y(t)] = -e^{-t} + \frac{3}{2} \left(e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{9}{4} - E[\beta] \right) \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \frac{3}{8} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - E[\beta] \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

$$E[y(t)] = -e^{-t} + \frac{3}{2} \left(e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{9}{4} - u \cdot v \right) \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \frac{3}{8} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - u \cdot v \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

$$E[y(t)] = -e^{-t} + \frac{3}{2} \left(e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{9}{4} - 1.2 \right) \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \frac{3}{8} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - 1.2 \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)$$

$$E[y(t)] = -\frac{11}{8} e^{-t} - \frac{1}{4} e^{-\frac{t}{3}} - \frac{3}{8} e^{\frac{t}{3}} + 2e^{-\frac{4t}{3}}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 27. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (42) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

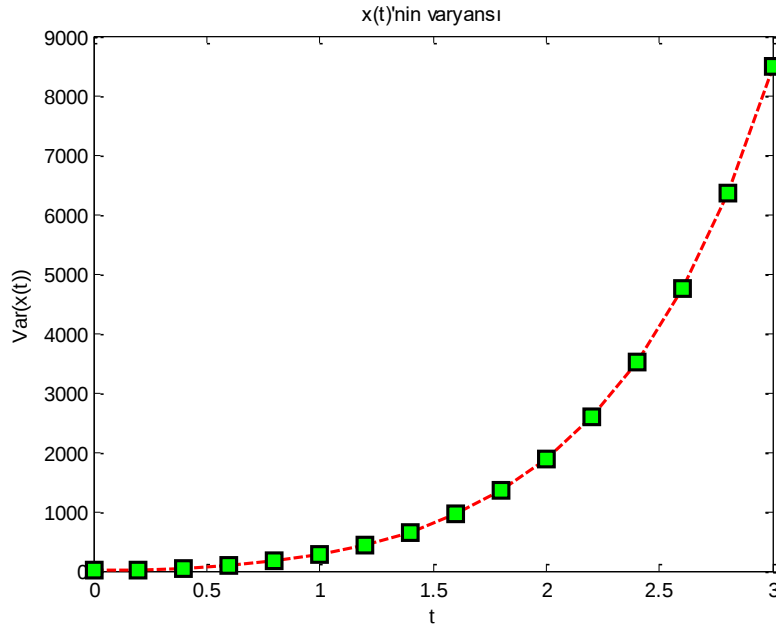
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansın temel özellikleri kullanılırsa $x(t)$ ve $y(t)$ denklemlerinin varyansları;

$$\begin{aligned} \text{Var}[x(t)] = & \text{Var}\left[e^{\frac{2}{3}t} - \beta \left(\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\right) + \left(\frac{2}{3}\beta^2 - \frac{3}{2}\beta\right)\left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}}\right) \right. \\ & \left. + \frac{3}{2}\beta\left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}}\right) + \frac{1}{6}\beta^2(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}})\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[x(t)] = & \text{Var}[\beta] \left(\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}\right)^2 + \left(\frac{4}{9}\text{Var}[\beta^2] + \frac{9}{4}\text{Var}[\beta]\right)\left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}}\right)^2 \\ & + \frac{9}{4}\text{Var}[\beta]\left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}}\right)^2 + \frac{1}{36}\text{Var}[\beta^2]\left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[x(t)] &= u \cdot v^2 \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{4}{9} \left[u \cdot v^4 (u+1) \cdot (u+2) \cdot (u+3) - (u \cdot v^2 (u+1))^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{4} u \cdot v^2 \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 + \frac{9}{4} u \cdot v^2 \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{36} \left[u \cdot v^4 (u+1) \cdot (u+2) \cdot (u+3) - (u \cdot v^2 (u+1))^2 \right] \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2 \\
Var[x(t)] &= 1 \cdot 2^2 \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{4}{9} \left[1 \cdot 2^4 (1+1) \cdot (1+2) \cdot (1+3) - (1 \cdot 2^2 (1+1))^2 \right] \right. \\
&\quad \left. + \frac{9}{4} \cdot 1 \cdot 2^2 \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 + \frac{9}{4} \cdot 1 \cdot 2^2 \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{36} \left[1 \cdot 2^4 (1+1) \cdot (1+2) \cdot (1+3) - (1 \cdot 2^2 (1+1))^2 \right] \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2 \\
Var[x(t)] &= 4 \left(\frac{2}{3} e^{\frac{2}{3}t} + \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 + \left(\frac{1361}{9} \right) \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 + 9 \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{t}{3}} \right)^2 \\
&\quad + \frac{80}{9} \left(e^{\frac{2}{3}t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2
\end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 28. $\beta \sim Gamma(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (41) denkleminin varyansının çözüm davranışı

$$Var[y(t)] = Var[-e^{-t} + \frac{3}{2} \left(e^{-t} - \frac{1}{3} e^{-\frac{t}{3}} \right) + \left(\frac{9}{4} - \beta \right) \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \frac{3}{8} \left(e^{\frac{t}{3}} - e^{-t} \right) - \beta \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)]$$

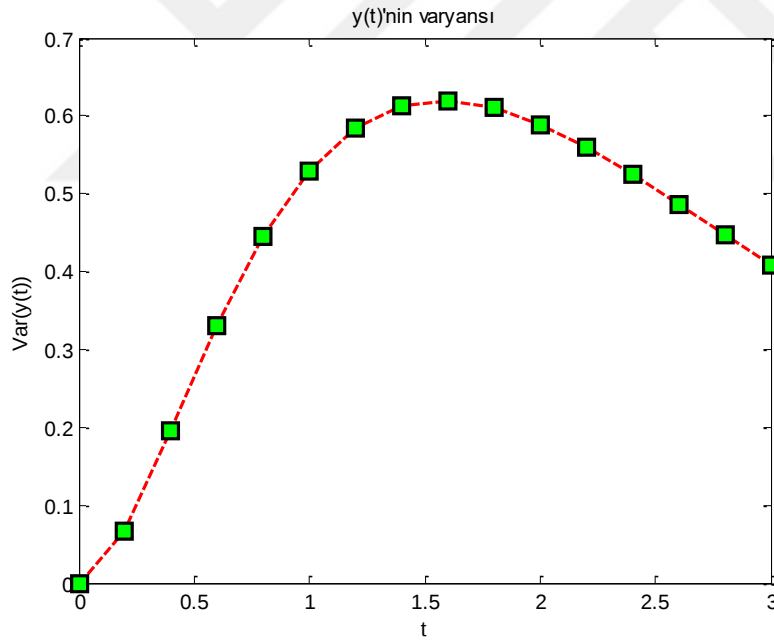
$$Var[y(t)] = Var(\beta) \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 + Var[\beta] \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2$$

$$Var[y(t)] = u.v^2 \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 + u.v^2 \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2$$

$$Var[y(t)] = 1.2^2 \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 + 1.2^2 \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2$$

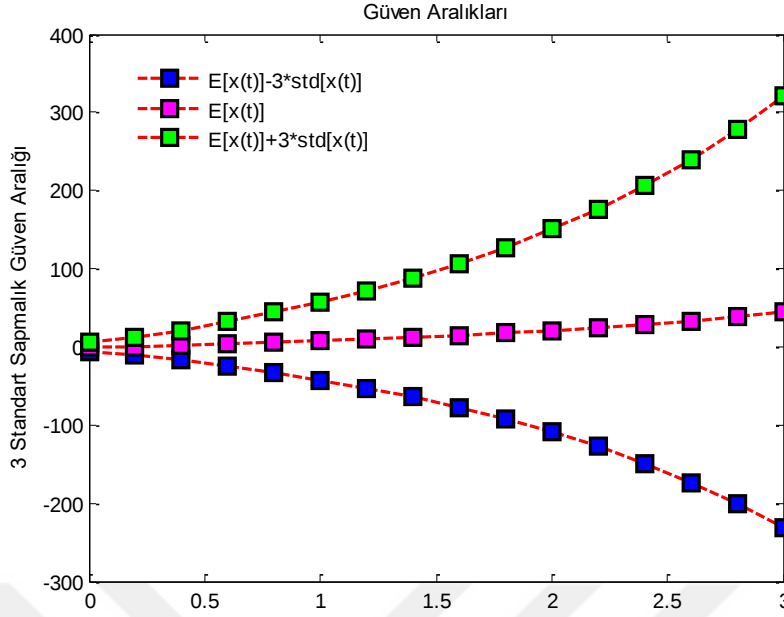
$$Var[y(t)] = 4 \left(e^{-\frac{t}{3}} - e^{-t} \right)^2 + 4 \left(e^{-t} - e^{-\frac{4t}{3}} \right)^2$$

şeklinde hesaplanır.



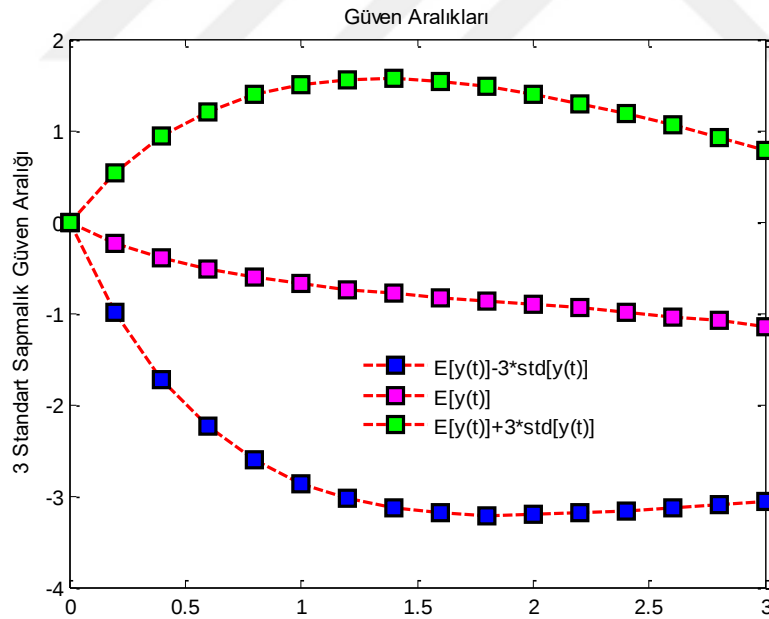
Şekil 29. $\beta \sim Gamma(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (42) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(x(t)) - 3stdsapma(x(t)), E(x(t)) + 3stdsapma(x(t))]$



Şekil 30. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (41) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$



Şekil 31. $\beta \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (42) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

6. KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN ABOODH-ADOMIAN AYRIŞTIRMA YÖNTEMİ YARDIMI İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemler başlangıç koşulları ve katsayıları rastgele hale getirilerek bu denklemlerin Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi kullanılarak çözümü sunulmaktadır.

Kısmi türevli diferansiyel denklemler, birden fazla bağımsız değişkeni olan fonksiyonlar ve bu fonksiyonların kısmi türevleri arasındaki ilişkileri ifade eden matematiksel denklemlerdir. Bu tür denklemler, genellikle fizik, mühendislik, finansal ve diğer birçok alanda karşılaşılan karmaşık sistemleri modellemek için kullanılır.

Örneğin, ısı dağılımı, ses dalgaları, elektromanyetik dalgalar veya finansal opsiyonların fiyatlandırılması gibi çok boyutlu süreçlerin analizi için kısmi türevli diferansiyel denklemler kullanılır. Bu denklemler, sistemin zaman içindeki ve uzaydaki değişimini anlamak için önemlidir.

$$\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} = g(x, t) + Nu(x, t) + Ru(x, t) \quad (43)$$

$$\frac{\partial^{n-1} u(x, t)}{\partial t^{n-1}} \Big|_{t=0} = f_{n-1}(x)$$

başlangıç koşulu verilsin. $n = 1, 2, 3 \dots$

$$\mathcal{A} \left[\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} \right] = s^n \mathcal{A}(u(x, t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s^{2-n+k}} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} \quad (44)$$

N lineer olmayan bir operatör, R lineer bir operatör, g diferansiyel denklemin homojenliğini gösteren bir fonksiyon ve $u(x, t)$ denklemin çözümü olsun. Denklem (43)'te eşitliğin her iki tarafına Aboodh dönüşümü uygulanırsa;

$$\mathcal{A} \left[\frac{\partial^n u(x, t)}{\partial t^n} \right] = \mathcal{A}[g(x, t) + Nu(x, t) + Ru(x, t)] \quad (45)$$

(44) denklemi (45) de yerine yazılışa;

$$s^n \mathcal{A}(u(x, t)) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s^{2-n+k}} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} = \mathcal{A}[g(x, t) + Nu(x, t) + Ru(x, t)]$$

$$\mathcal{A}(u(x, t)) = \frac{1}{s^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s^{2-n+k}} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} + \frac{1}{s^n} \mathcal{A}[g(x, t)] + \frac{1}{s^n} \mathcal{A}[Nu(x, t)]$$

$$+ \frac{1}{s^n} \mathcal{A}[Ru(x, t)] \quad (46)$$

(46) denkleminde her iki tarafın ters Aboodh dönüşümü alınırsa;

$$\mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}(u(x, t))]$$

$$= \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s^{2-n+k}} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} + \frac{1}{s^n} \mathcal{A}[g(x, t)] + \frac{1}{s^n} \mathcal{A}[Nu(x, t)] \right.$$

$$\left. + \frac{1}{s^n} \mathcal{A}[Ru(x, t)] \right]$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s^{2+k}} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} + \frac{1}{s^n} \mathcal{A}[g(x, t)] \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\} \right]$$

$$+ \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} \mathcal{A} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right\} \right]$$

B_n 'ler Adomian polinomları.

$$u_1 = \mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}\{B_0\}] + \mathcal{A}^{-1}[\mathcal{A}\{Ru_0\}]$$

$$u_2 = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{A}\{B_1\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s} \mathcal{A}\{Ru_1\} \right]$$

$$u_3 = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{A}\{B_2\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \mathcal{A}\{Ru_2\} \right]$$

$\vdots$

şeklinde olur. Böylece genel olarak Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemini kullanarak kısmi türevli diferansiyel denklem çözümü (43)'ün yinelemeli ilişkisi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0; u_0(x, t) = u(x, 0) = \mathcal{A}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{s^{2+k}} \frac{\partial^k u(x, 0)}{\partial t^k} + \frac{1}{s^n} \mathcal{A}[g(x, t)] \right] \end{array} \right. \quad (47)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n \geq 0; u_{n+1}(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\} \right] + \mathcal{A}^{-1} \left[\frac{1}{s^n} \mathcal{A} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right\} \right] \end{array} \right. \quad (48)$$

Örnek-6.1.

$${}^{CF}_0 D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx} \quad (49)$$

Caputo-Fabrizio kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemini $u(x, 0) = C \cdot e^{kx}$, $C \sim B(\alpha = 1, \beta = 2)$ beta dağılıma sahip rastgele başlangıç koşulu için Aboodh dönüşüm yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm. (49) denkleminin her iki tarafının Aboodh dönüşümü alınırsa;

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\{{}^{CF}_0 D_t^\alpha u(x, t)\} &= \mathcal{A}\{u_{xx}\} \\ \frac{s\mathcal{A}\{u(x, t)\} - \frac{u(x, 0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} &= \mathcal{A}\{u_{xx}\} \\ \mathcal{A}\{u(x, t)\} &= \frac{u(x, 0)}{s^2} + \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \mathcal{A}\{u_{xx}\} \end{aligned} \quad (50)$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad \text{ve} \quad u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx}$$

(50) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\mathcal{A}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)\right\} = \frac{u(x, 0)}{s^2} + \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \cdot \mathcal{A}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx}\right\} \quad (51)$$

(51) denkleminin ters Aboodh dönüşümü alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u(x, 0) + \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \cdot \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} \right\} \right\}$$

$$\begin{cases} n = 0; u_0(x, t) = u(x, 0) = C \cdot e^{kx} \\ n \geq 0; u_{n+1}(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \cdot \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_{n_{xx}} \right\} \right\} \end{cases} \quad (52)$$

(52) denkleminde $n = 0, 1, 2, \dots$ değerleri kullanılarak

$$u_1(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ u_{0_{xx}} \} \right\}, \quad u_{0_{xx}} = C k^2 e^{kx}$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ C k^2 e^{kx} \} \right\} = C k^2 e^{kx} \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \cdot \mathcal{A} \{ 1 \} \right\} \\ &= C k^2 e^{kx} \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s^3} + \frac{1 - \alpha}{s^2} \right\} = C k^2 e^{kx} (\alpha t + 1 - \alpha) \end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = \alpha C k^2 e^{kx} t + (1 - \alpha) C k^2 e^{kx}$$

$$u_2(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ u_{1_{xx}} \} \right\}, \quad u_{1_{xx}} = \alpha C k^4 e^{kx} t + (1 - \alpha) C k^4 e^{kx}$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ \alpha C k^4 e^{kx} t + (1 - \alpha) C k^4 e^{kx} \} \right\} \\ &= C k^4 e^{kx} \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ \alpha t + (1 - \alpha) \} \right\} \\ &= C k^4 e^{kx} \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \left(\frac{\alpha}{s^3} + \frac{1 - \alpha}{s^2} \right) \right\} \\ &= C k^4 e^{kx} \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha^2}{s^4} + \frac{2\alpha(1 - \alpha)}{s^3} + \frac{(1 - \alpha)^2}{s^2} \right\} \\ &= C k^4 e^{kx} \left\{ \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha)t + (1 - \alpha)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$u_2(x, t) = \alpha^2 C k^4 e^{kx} \frac{t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha) C k^4 e^{kx} t + (1 - \alpha)^2 C k^4 e^{kx}$$

$$u_3(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ u_{2_{xx}} \} \right\},$$

$$u_{2_{xx}} = \alpha^2 C k^6 e^{kx} \frac{t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha) C k^6 e^{kx} t + (1 - \alpha)^2 C k^6 e^{kx}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \left\{ \alpha^2 C k^6 e^{kx} \frac{t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha) C k^6 e^{kx} t \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + (1 - \alpha)^2 C k^6 e^{kx} \right\} \right\} \\
&= C k^6 e^{kx} \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \left\{ \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha)t + (1 - \alpha)^2 \right\} \right\} \\
&= C k^6 e^{kx} \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \left(\frac{\alpha^2}{s^4} + \frac{2\alpha(1 - \alpha)}{s^3} + \frac{(1 - \alpha)^2}{s^2} \right) \right\} \\
&= C k^6 e^{kx} \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha^3}{s^5} + \frac{3\alpha^2(1 - \alpha)}{s^4} + \frac{3\alpha(1 - \alpha)^2}{s^3} + \frac{(1 - \alpha)^2}{s^2} \right) \right\} \\
&= C k^6 e^{kx} \left\{ \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right\} \\
u_3(x, t) &= \alpha^3 C k^6 e^{kx} \frac{t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) C k^6 e^{kx} \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 C k^6 e^{kx} t \\
&\quad + (1 - \alpha)^3 C k^6 e^{kx}
\end{aligned}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \alpha C k^2 e^{kx} t + (1 - \alpha) C k^2 e^{kx} + \alpha^2 C k^4 e^{kx} \frac{t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha) C k^4 e^{kx} t \\
&\quad + (1 - \alpha)^2 C k^4 e^{kx} + \alpha^3 C k^6 e^{kx} \frac{t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) C k^6 e^{kx} \frac{t^2}{2!} \\
&\quad + 3\alpha(1 - \alpha)^2 C k^6 e^{kx} t + (1 - \alpha)^3 C k^6 e^{kx} \\
&\quad + \dots
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemelerden sonra;

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= ((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2 k^4 + (1 - \alpha)^3 k^6) C e^{kx} \\
&\quad + (\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 + 3\alpha(1 - \alpha)^2 k^6) C e^{kx} t \\
&\quad + \frac{1}{2} (\alpha^2 k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6) C e^{kx} t^2 + \frac{1}{6} \alpha k^6 C e^{kx} t^3 + \dots \quad (53)
\end{aligned}$$

Aynı zamanda Beta dağılımı için 1.,2. momentleri ve varyansı;

$$\begin{aligned}
\mu = E(X) &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, E(X^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}, Var(X) \\
&= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}
\end{aligned}$$

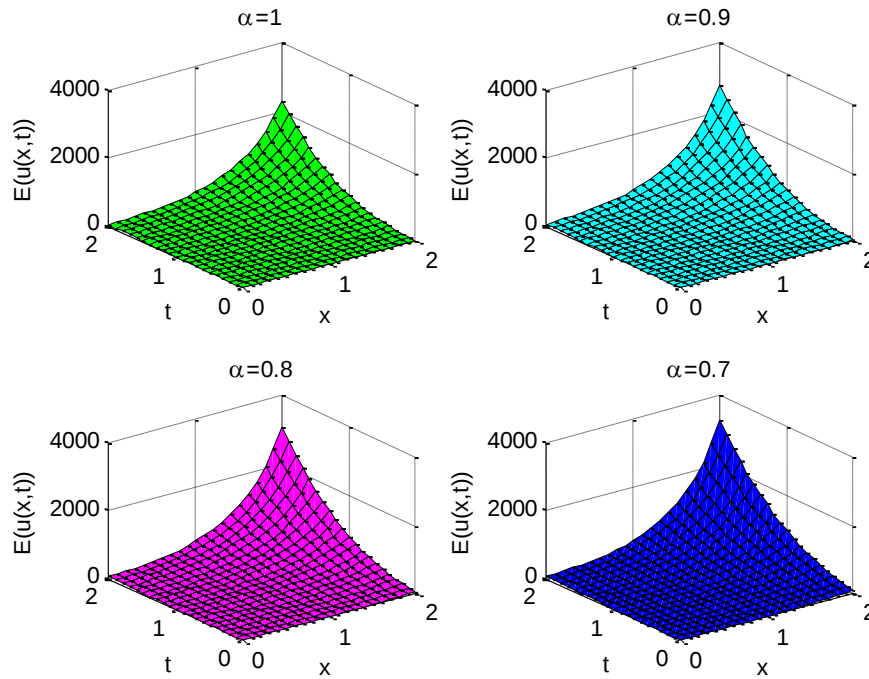
şeklinde hesaplanır.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= E \left[((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2k^4 + (1 - \alpha)^3k^6)Ce^{kx} \right. \\ &\quad + (\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 + 3\alpha(1 - \alpha)^2k^6)Ce^{kx}t \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(\alpha^2k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6)Ce^{kx}t^2 + \frac{1}{6}\alpha k^6Ce^{kx}t^3 \right] \\ &= ((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2k^4 + (1 - \alpha)^3k^6)e^{kx}E[C] \\ &\quad + (\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 + 3\alpha(1 - \alpha)^2k^6)e^{kx}tE[C] \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha^2k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6)e^{kx}t^2E[C] + \frac{1}{6}\alpha k^6e^{kx}t^3E[C] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= ((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2k^4 + (1 - \alpha)^3k^6)e^{kx} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ &\quad + (\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 + 3\alpha(1 - \alpha)^2k^6)e^{kx}t \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ &\quad + \frac{1}{2}(\alpha^2k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6)e^{kx}t^2 \frac{\alpha}{\alpha + \beta} + \frac{1}{6}\alpha k^6e^{kx}t^3 \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= \frac{1}{3}((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2k^4 + (1 - \alpha)^3k^6)e^{kx} \\ &\quad + \frac{1}{3}(\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 + 3\alpha(1 - \alpha)^2k^6)e^{kx}t \\ &\quad + \frac{1}{6}(\alpha^2k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6)e^{kx}t^2 + \frac{1}{18}\alpha k^6e^{kx}t^3 \end{aligned}$$



Şekil 32. $C \sim B(\alpha = 1, \beta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

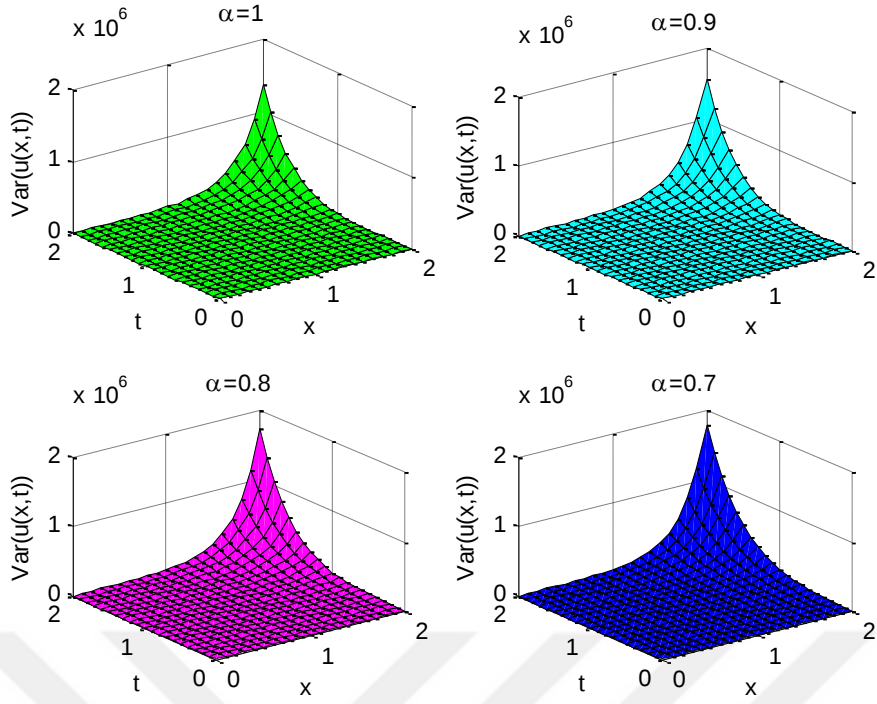
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansın temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin varyansı;

$$\begin{aligned} Var[u(x, t)] &= Var \left[\left[((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2k^4 + (1 - \alpha)^3k^6)Ce^{kx} \right. \right. \\ &\quad + (\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 + 3\alpha(1 - \alpha)^2k^6)Ce^{kx}t \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(\alpha^2k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6)Ce^{kx}t^2 + \frac{1}{6}\alpha k^6Ce^{kx}t^3 \right] \right] \\ &= ((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2k^4 + (1 - \alpha)^3k^6)^2 e^{2kx} Var[C] \\ &\quad + (\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 + 3\alpha(1 - \alpha)^2k^6)^2 e^{2kx}t^2 Var[C] \\ &\quad + \frac{1}{4}(\alpha^2k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6)^2 e^{2kx}t^4 Var[C] + \frac{1}{36}\alpha^2k^{12}e^{2kx}t^6 Var[C] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var[u(x, t)] &= ((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2k^4 + (1 - \alpha)^3k^6)^2 e^{2kx} \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \\ &\quad + (\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 \\ &\quad + 3\alpha(1 - \alpha)^2k^6)^2 e^{2kx}t^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{4}(\alpha^2k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6)^2 e^{2kx}t^4 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \\ &\quad + \frac{1}{36}\alpha^2k^{12}e^{2kx}t^6 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2} \end{aligned}$$

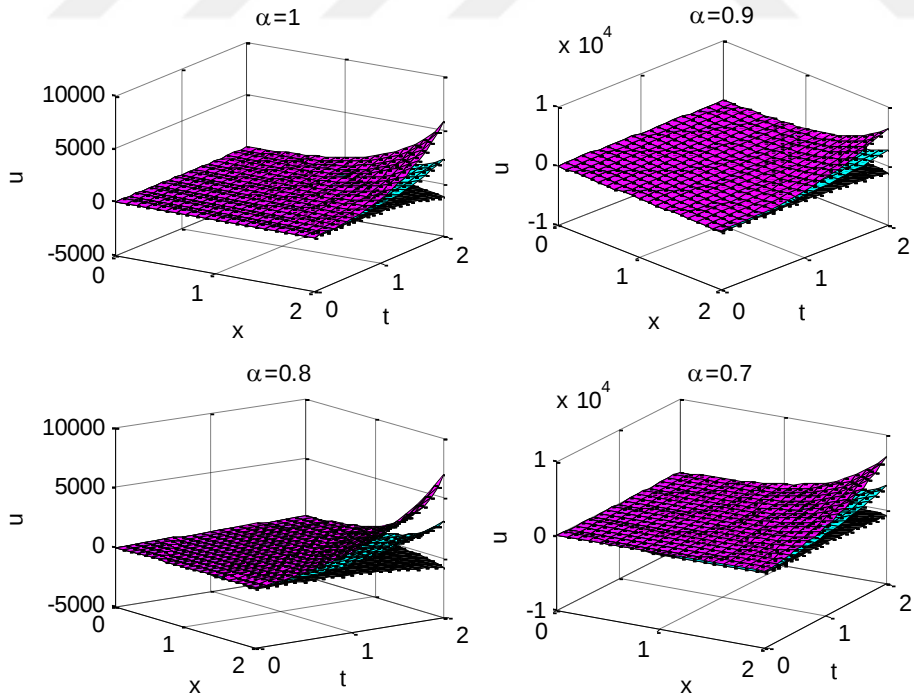
$$\begin{aligned} Var[u(x, t)] &= \frac{1}{18}((1 - \alpha)k^2 + (1 - \alpha)^2k^4 + (1 - \alpha)^3k^6)^2 e^{2kx} \\ &\quad + \frac{1}{18}(\alpha k^2 + 2\alpha(1 - \alpha)k^4 + 3\alpha(1 - \alpha)^2k^6)^2 e^{2kx}t^2 \\ &\quad + \frac{1}{72}(\alpha^2k^4 + 3\alpha^2(1 - \alpha)k^6)^2 e^{2kx}t^4 + \frac{1}{648}\alpha^2k^{12}e^{2kx}t^6 \end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 33. $C \sim B(\alpha = 1, \beta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(u(x,t)) - 3stdsapma(u(x,t)), E(u(x,t)) + 3stdsapma(u(x,t))]$



Şekil 34. $C \sim B(\alpha = 1, \beta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-6.2.

$${}^CF_0D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{2}x^2 u_{xx} \quad (54)$$

Caputo-Fabrizio kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemini $u(x, 0) = Cx^2$

$C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ üçgensel dağılıma sahip rastgele başlangıç koşulu için Aboodh dönüşüm yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm. (54) denkleminin her iki tarafının Aboodh dönüşümü alınır;

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\{{}^CF_0D_t^\alpha u(x, t)\} &= \mathcal{A}\left\{\frac{1}{2}x^2 u_{xx}\right\} \\ \frac{s\mathcal{A}\{u(x, t)\} - \frac{u(x, 0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} &= \mathcal{A}\left\{\frac{1}{2}x^2 u_{xx}\right\} \\ \mathcal{A}\{u(x, t)\} &= \frac{u(x, 0)}{s^2} + \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \mathcal{A}\left\{\frac{1}{2}x^2 u_{xx}\right\} \end{aligned} \quad (55)$$

elde edilir.

$$u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,xx}$$

(55) denkleminde her tarafın ters Aboodh dönüşümünü alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) &= u(x, 0) + \mathcal{A}^{-1}\left\{\frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \mathcal{A}\left\{\frac{1}{2}x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,xx}\right\}\right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} n = 0; \quad u_0(x, t) = u(x, 0) = Cx^2 \\ n \geq 0; \quad u_{n+1}(x, t) = \mathcal{A}^{-1}\left\{\frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \mathcal{A}\left\{\frac{1}{2}x^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_{n,xx}\right\}\right\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (56)$$

(56) denkleminde $n = 0, 1, 2, \dots$ değerleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \mathcal{A}^{-1}\left\{\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) \mathcal{A}\left\{\frac{1}{2}x^2 u_{0,xx}\right\}\right\}, \quad u_{0,xx} = 2C \\ u_1(x, t) &= \mathcal{A}^{-1}\left\{\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) \mathcal{A}\left\{\frac{1}{2}x^2 \cdot 2C\right\}\right\} = Cx^2 \mathcal{A}^{-1}\left\{\left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha\right) \cdot \mathcal{A}\{1\}\right\} \\ &= Cx^2 \mathcal{A}^{-1}\left\{\frac{\alpha}{s^3} + \frac{1 - \alpha}{s^2}\right\} = Cx^2(\alpha t + 1 - \alpha) \\ u_1(x, t) &= \alpha Cx^2 t + (1 - \alpha)Cx^2 \end{aligned}$$

$$u_2(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \left\{ \frac{1}{2} x^2 u_{1_{xx}} \right\} \right\}, \quad u_{1_{xx}} = 2\alpha C t + 2(1 - \alpha)C$$

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ \alpha C x^2 t + (1 - \alpha) C x^2 \} \right\} \\ &= C x^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ \alpha t + (1 - \alpha) \} \right\} \\ &= C x^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \left(\frac{\alpha}{s^3} + \frac{1 - \alpha}{s^2} \right) \right\} \\ &= C x^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha^2}{s^4} + \frac{2\alpha(1 - \alpha)}{s^3} + \frac{(1 - \alpha)^2}{s^2} \right\} \\ &= C x^2 \left\{ \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha)t + (1 - \alpha)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$u_2(x, t) = \alpha^2 C x^2 \frac{t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha) C x^2 t + (1 - \alpha)^2 C x^2$$

$$\begin{aligned} u_3(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \left\{ \frac{1}{2} x^2 u_{2_{xx}} \right\} \right\}, \quad u_{2_{xx}} \\ &= \alpha^2 C t^2 + 4\alpha(1 - \alpha) C t + 2(1 - \alpha)^2 C \\ u_3(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \left\{ \frac{1}{2} x^2 (\alpha^2 C t^2 + 4\alpha(1 - \alpha) C t + 2(1 - \alpha)^2 C) \right\} \right\} \\ &= C x^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \left\{ \frac{\alpha^2 t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha)t + (1 - \alpha)^2 \right\} \right\} \\ &= C x^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \left(\frac{\alpha^2}{s^4} + \frac{2\alpha(1 - \alpha)}{s^3} + \frac{(1 - \alpha)^2}{s^2} \right) \right\} \\ &= C x^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha^3}{s^5} + \frac{3\alpha^2(1 - \alpha)}{s^4} + \frac{3\alpha(1 - \alpha)^2}{s^3} + \frac{(1 - \alpha)^3}{s^2} \right\} \\ &= C x^2 \left\{ \frac{\alpha^3 t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 t + (1 - \alpha)^3 \right\} \end{aligned}$$

$$u_3(x, t) = \alpha^3 C x^2 \frac{t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha) C x^2 \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 C x^2 t + (1 - \alpha)^3 C x^2$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & Cx^2 + \alpha Cx^2 t + (1 - \alpha)Cx^2 + \alpha^2 Cx^2 \frac{t^2}{2!} + 2\alpha(1 - \alpha)Cx^2 t \\
& + (1 - \alpha)^2 Cx^2 + \alpha^3 Cx^2 \frac{t^3}{3!} + 3\alpha^2(1 - \alpha)Cx^2 \frac{t^2}{2!} + 3\alpha(1 - \alpha)^2 Cx^2 t \\
& + (1 - \alpha)^3 Cx^2 \\
& + \dots
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemelerden sonra;

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & (-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)Cx^2 + (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)Cx^2 t \\
& + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)Cx^2 \frac{t^2}{2!} + \alpha^3 Cx^2 \frac{t^3}{3!} + \dots
\end{aligned} \tag{57}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & (-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)Cx^2 + (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)Cx^2 t + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)Cx^2 \frac{t^2}{2!} \\
& + \alpha^3 Cx^2 \frac{t^3}{3!} + O(t^4)
\end{aligned}$$

Üçgensel dağılım için beklenen değer ve varyans;

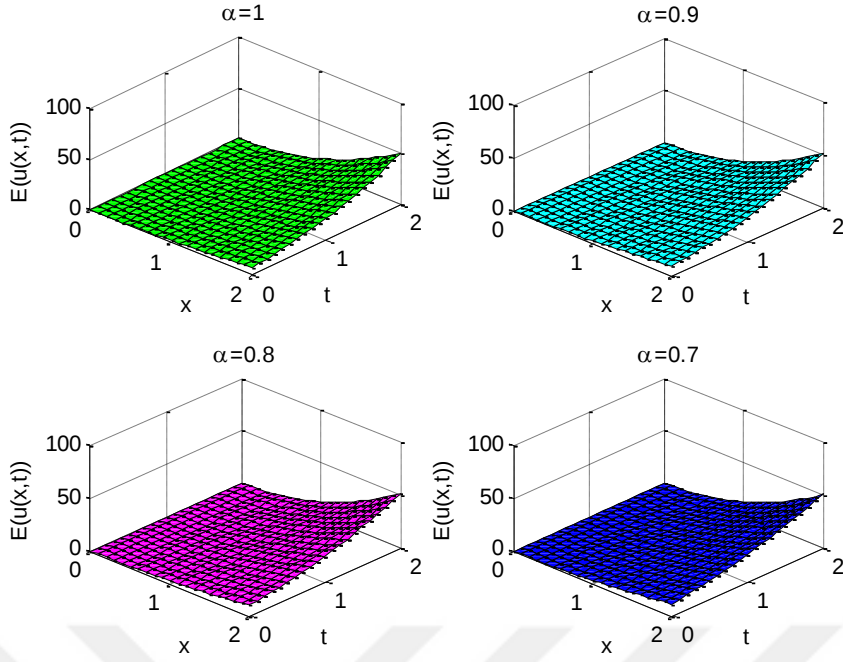
$$E(X) = \frac{(a + b + c)}{3}, Var(X) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18}$$

şeklindedir.

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerın temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] &= E \left[(-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)Cx^2 + (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)Cx^2 t \right. \\
&\quad \left. + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)Cx^2 \frac{t^2}{2!} + \alpha^3 Cx^2 \frac{t^3}{3!} \right] \\
&= (-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)x^2 E[C] + (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)x^2 t E[C] \\
&\quad + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)x^2 \frac{t^2}{2!} E[C] + \alpha^3 x^2 \frac{t^3}{3!} E[C] \\
&= (-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)x^2 \frac{(a + b + c)}{3} \\
&\quad + (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)x^2 t \frac{(a + b + c)}{3} + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)x^2 \frac{t^2}{2!} \frac{(a + b + c)}{3} \\
&\quad + \alpha^3 x^2 \frac{t^3}{3!} \frac{(a + b + c)}{3} \\
E[u(x, t)] &= 2(-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)x^2 + 2(3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)x^2 t + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)x^2 t^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\alpha^3 x^2 t^3
\end{aligned}$$

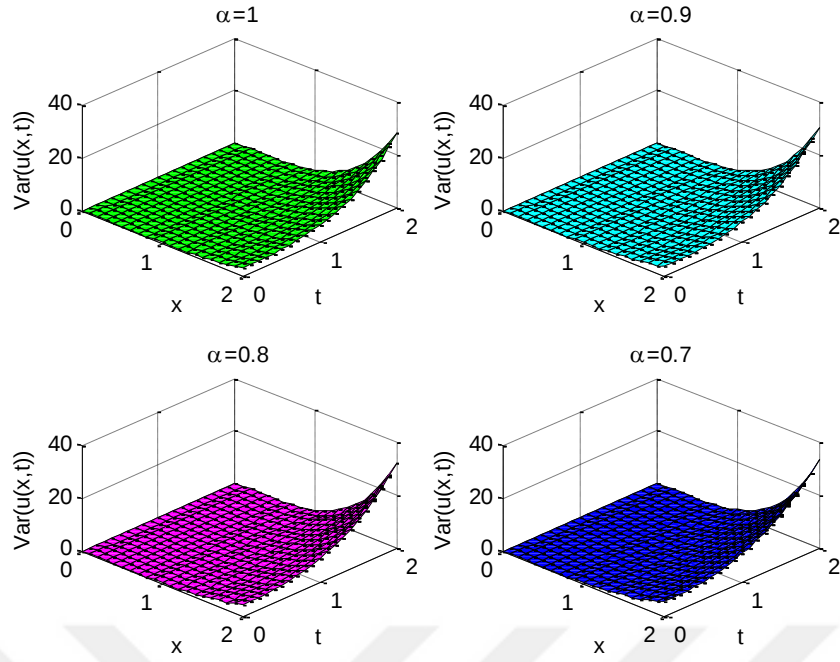
bulunur.



Şekil 35. $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (57) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

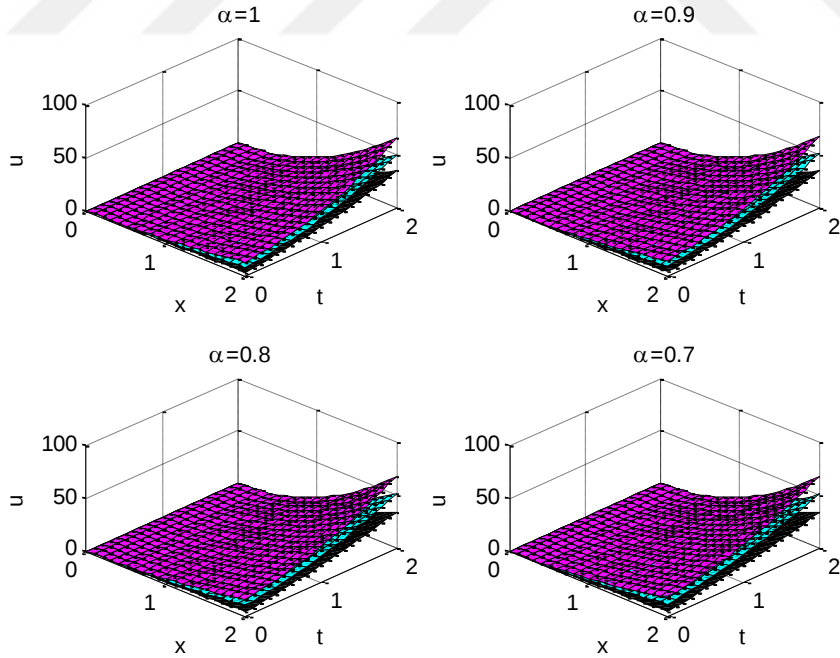
$$\begin{aligned}
 Var[u(x, t)] &= Var \left[(-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)Cx^2 + (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)Cx^2t \right. \\
 &\quad \left. + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)Cx^2 \frac{t^2}{2!} + \alpha^3 Cx^2 \frac{t^3}{3!} \right] \\
 &= (-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)^2 x^4 Var[C] + (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)^2 x^4 t^2 Var[C] \\
 &\quad + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)^2 x^4 \frac{t^4}{4} Var[C] + \alpha^6 x^4 \frac{t^6}{36} Var[C] \\
 &= (-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)^2 x^4 \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \\
 &\quad + (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)^2 x^4 t^2 \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \\
 &\quad + (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)^2 x^4 \frac{t^4}{4} \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \\
 &\quad + \alpha^6 x^4 \frac{t^6}{36} \frac{a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc}{18} \\
 Var[u(x, t)] &= \frac{1}{6} (-\alpha^3 + 4\alpha^2 - 6\alpha + 4)^2 x^4 + \frac{1}{6} (3\alpha^3 - 8\alpha^2 + 6\alpha)^2 x^4 t^2 \\
 &\quad + \frac{1}{24} (-3\alpha^3 + 4\alpha^2)^2 x^4 t^4 + \frac{1}{216} \alpha^6 x^4 t^6
 \end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 36. $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (57) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(u(x, t)) - 3stdsapma(u(x, t)), E(u(x, t)) + 3stdsapma(u(x, t))]$



Şekil 37. $C \sim \text{Üçgensel}(a = 1, b = 2, c = 3)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (57) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-6.3.

$${}^C D_t^\alpha u(x, t) = u_{xx} - uu_x \quad (58)$$

Caputo-Fabrizio kesirli kısmi türevli diferansiyel denklemini $u(x, 0) = 2Cx$,

$C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ üstel dağılıma sahip rastgele başlangıç koşulu için Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi yardımı ile çözüünüz.

Çözüm. (58) denkleminin her iki tarafının Aboodh dönüşümünü alalım.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}\{{}^C D_t^\alpha u(x, t)\} &= \mathcal{A}\{u_{xx} - uu_x\} \\ \frac{s\mathcal{A}\{u(x, t)\} - \frac{u(x, 0)}{s}}{\alpha + s(1 - \alpha)} &= \mathcal{A}\{u_{xx} - uu_x\} \\ \mathcal{A}\{u(x, t)\} &= \frac{u(x, 0)}{s^2} + \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \mathcal{A}\{u_{xx} - uu_x\} \end{aligned} \quad (59)$$

$$u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n_{xx}}, \quad uu_x = \sum_{n=0}^{\infty} u_n u_{n_x}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} u_n u_{n_x} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{r=0}^n u_r u_{n-r_x}$$

B_n 'ler Adomian polinomları

$$B_0 = u_0 u_{0_x}, B_1 = u_0 u_{1_x} + u_1 u_{0_x}, B_2 = u_0 u_{2_x} + u_1 u_{1_x} + u_2 u_{0_x}$$

(58) denkleminde her tarafın ters Aboodh dönüşümünü alalım.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) &= u(x, 0) + \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_{n_{xx}} - \sum_{n=0}^{\infty} u_n u_{n_x} \right\} \right\} \\ \left\{ \begin{array}{l} n = 0; \quad u_0(x, t) = u(x, 0) = 2Cx \\ n \geq 0; \quad u_{n+1}(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha + s(1 - \alpha)}{s} \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_{n_{xx}} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\} \right\} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (60)$$

(59) denkleminde $n = 0, 1, 2, \dots$ değerleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A}\{u_{0_{xx}} - B_0\} \right\}, \quad u_{0_{xx}} = 0, B_0 = u_0 u_{0_x} = 2Cx \cdot 2C \\ &= 4C^2 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A}\{0 - 4C^2 x\} \right\} = -4C^2 x \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A}\{1\} \right\} \\ &= -4C^2 x \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s^3} + \frac{1 - \alpha}{s^2} \right\} = -4C^2 x (t + 1 - \alpha) \end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = -4C^2 xt - 4C^2 (1 - \alpha)x$$

$$u_2(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ u_{1_{xx}} - B_1 \} \right\}, u_{1_x} = -4C^2t - 4C^2(1 - \alpha), u_{1_{xx}} = 0$$

$$B_1 = u_0 u_{1_x} + u_1 u_{0_x} = 2Cx(-4C^2t - 4C^2(1 - \alpha)) + (-4C^2xt - 4C^2(1 - \alpha)x)2C$$

$$B_1 = -16C^3xt - 16C^3(1 - \alpha)x$$

$$u_2(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ 0 - (-16C^3xt - 16C^3(1 - \alpha)x) \} \right\}$$

$$= 16C^3x \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ t + 1 - \alpha \} \right\}$$

$$= 16C^3x \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \left(\frac{1}{s^3} + \frac{1 - \alpha}{s^2} \right) \right\}$$

$$= 16C^3x \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{s^4} + \frac{(1 - \alpha^2)}{s^3} + \frac{(1 - \alpha)^2}{s^2} \right\}$$

$$= 16C^3x \left\{ \frac{\alpha t^2}{2!} + (1 - \alpha^2)t + (1 - \alpha)^2 \right\}$$

$$u_2(x, t) = 8C^3\alpha x t^2 + 16C^3(1 - \alpha^2)xt + 16C^3(1 - \alpha)^2x$$

$$u_3(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ u_{2_{xx}} - B_2 \} \right\},$$

$$u_{2_x} = 8C^3\alpha t^2 + 16C^3(1 - \alpha^2)t + 16C^3(1 - \alpha)^2, u_{2_{xx}} = 0$$

$$B_2 = u_0 u_{2_x} + u_1 u_{1_x} + u_2 u_{0_x}$$

$$= 2Cx(8C^3\alpha t^2 + 16C^3(1 - \alpha^2)t + 16C^3(1 - \alpha)^2)$$

$$+ (-4C^2xt - 4C^2(1 - \alpha)x)(-4C^2t - 4C^2(1 - \alpha))$$

$$+ (8C^3\alpha x t^2 + 16C^3(1 - \alpha^2)xt + 16C^3(1 - \alpha)^2x)(2C)$$

$$B_2 = (32C^4\alpha x + 16C^4x)t^2 + (64C^4(1 - \alpha^2)x + 32C^4(1 - \alpha)x)t + 80C^4(1 - \alpha)^2x$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ 0 - [(32C^4\alpha x + 16C^4x)t^2 \right. \\
&\quad \left. + (64C^4(1 - \alpha^2)x + 32C^4(1 - \alpha)x)t + 80C^4(1 - \alpha)^2x] \} \right\} \\
&= -16C^4x \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \mathcal{A} \{ (2\alpha + 1)t^2 \right. \\
&\quad \left. + (4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha))t + 5(1 - \alpha)^2 \} \right\} \\
&= -16C^4x \mathcal{A}^{-1} \left\{ \left(\frac{\alpha}{s} + 1 - \alpha \right) \left(\frac{4\alpha + 2}{s^4} + \frac{(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha))}{s^3} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{5(1 - \alpha)^2}{s^2} \right) \right\} \\
&= -16C^4x \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{4\alpha^2 + 2\alpha}{s^5} + \frac{\alpha(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha))}{s^4} + \frac{5\alpha(1 - \alpha)^2}{s^3} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(4\alpha + 2)(1 - \alpha)}{s^4} + \frac{(1 - \alpha)(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha))}{s^3} + \frac{5(1 - \alpha)^3}{s^2} \right\} \\
&= -16C^4x \left\{ \frac{(4\alpha^2 + 2\alpha)t^3}{3!} + \frac{\alpha(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha))t^2}{2!} \right. \\
&\quad \left. + 5\alpha(1 - \alpha)^2t + \frac{(4\alpha + 2)(1 - \alpha)t^2}{2!} \right. \\
&\quad \left. + (1 - \alpha)(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha))t + 5(1 - \alpha)^3 \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= -16C^4x \frac{(4\alpha^2 + 2\alpha)t^3}{3!} \\
&\quad - 16C^4x \frac{\{\alpha(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha)) + ((4\alpha + 2)(1 - \alpha))\}t^2}{2!} \\
&\quad - 16C^4x \{(5\alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha)))\}t \\
&\quad - 16C^4x(5(1 - \alpha)^3)
\end{aligned}$$

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots$$

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & 2Cx - 4C^2xt - 4C^2(1 - \alpha)x + 8C^3\alpha xt^2 + 16C^3(1 - \alpha^2)xt \\
& + 16C^3(1 - \alpha)^2x - 16C^4x \frac{(4\alpha^2 + 2\alpha)t^3}{3!} \\
& - 16C^4x \frac{\{\alpha(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha)) + ((4\alpha + 2)(1 - \alpha))\}t^2}{2!} \\
& - 16C^4x\{(5\alpha(1 - \alpha)^2 + (1 - \alpha)(4(1 - \alpha^2) + 2(1 - \alpha))\}t \\
& - 16C^4x(5(1 - \alpha)^3) + \dots
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & (2C - 4C^2(1 - \alpha) + 16C^3(1 - \alpha^2) - 80C^4((1 - \alpha)^3)x \\
& + (-4C^2 + 16C^3(1 - \alpha)^2 - 16C^4(9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha + 6))xt \\
& + (8C^3\alpha - 8C^4(-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8))xt^2 - \frac{16}{3}C^4(2\alpha^2 + \alpha)xt^3 \\
& + \dots
\end{aligned} \tag{61}$$

elde edilir.

X rastgele değişkeni üstel dağılıma sahipse moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}; t < \lambda$$

1.,2.,3.,4.,5.,6.,7.,8. momentleri ve varyansı;

$$\begin{aligned}
E[C] = \frac{1}{\lambda}, E[C^2] = \frac{2}{\lambda^2}, E[C^3] = \frac{6}{\lambda^3}, E[C^4] = \frac{24}{\lambda^4}, E[C^5] = \frac{120}{\lambda^5}, E[C^6] = \frac{720}{\lambda^6}, \\
E[C^7] = \frac{7!}{\lambda^7}, E[C^8] = \frac{8!}{\lambda^8}
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliğinden;

$$Var[C] = \frac{1}{\lambda^2}, Var[C^2] = \frac{20}{\lambda^4}, Var[C^3] = \frac{684}{\lambda^6}, Var[C^4] = \frac{39744}{\lambda^8}$$

olarak hesaplanır.

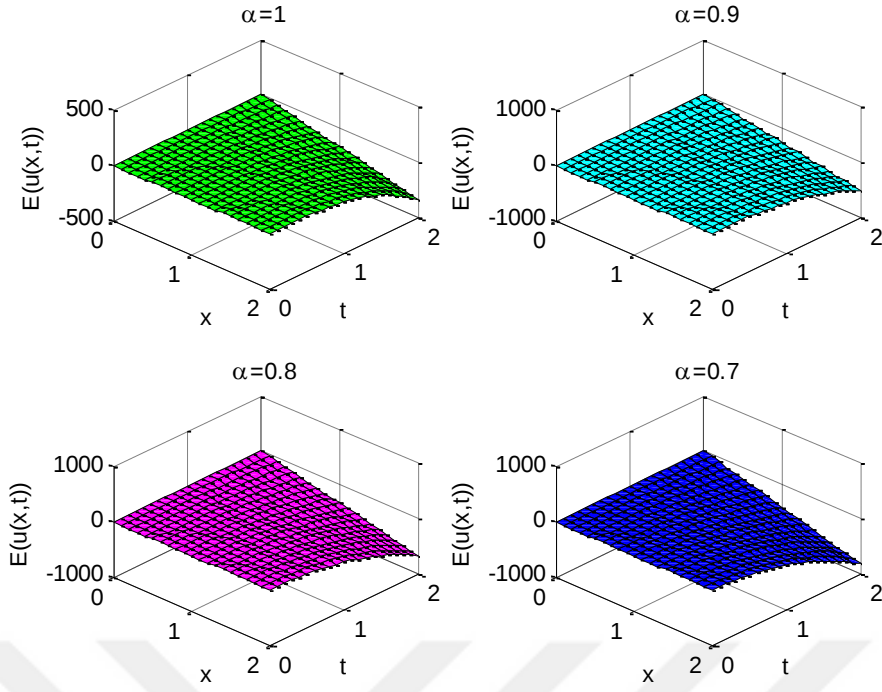
X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] &= E \left[(2C - 4C^2(1 - \alpha) + 16C^3(1 - \alpha^2) - 80C^4(1 - \alpha)^3)x \right. \\
&\quad + (-4C^2 + 16C^3(1 - \alpha)^2 - 16C^4(9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha + 6))xt \\
&\quad \left. + (8C^3\alpha - 8C^4(-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8))xt^2 - \frac{16}{3}C^4(2\alpha^2 + \alpha)xt^3 \right] \\
&= (2E[C] - 4E[C^2](1 - \alpha) + 16E[C^3](1 - \alpha^2) \\
&\quad - 80E[C^4](1 - \alpha)^3)x \\
&\quad + (-4E[C^2] + 16E[C^3](1 - \alpha)^2 - 16E[C^4](9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha \\
&\quad + 6))xt + (8E[C^3]\alpha - 8E[C^4](-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8))xt^2 \\
&\quad - \frac{16}{3}E[C^4](2\alpha^2 + \alpha)xt^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] &= \left(2 \cdot \frac{1}{\lambda} - 4 \cdot \frac{2}{\lambda^2}(1 - \alpha) + 16 \cdot \frac{6}{\lambda^3}(1 - \alpha^2) - 80 \cdot \frac{24}{\lambda^4}(1 - \alpha)^3 \right)x \\
&\quad + \left(-4 \cdot \frac{2}{\lambda^2} + 16 \cdot \frac{6}{\lambda^3}(1 - \alpha)^2 - 16 \cdot \frac{24}{\lambda^4}(9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha + 6) \right)xt \\
&\quad + \left(8 \cdot \frac{6}{\lambda^3}\alpha - 8 \cdot \frac{24}{\lambda^4}(-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8) \right)xt^2 \\
&\quad - \frac{16}{3} \cdot \frac{24}{\lambda^4}(2\alpha^2 + \alpha)xt^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] &= (1 - 2(1 - \alpha) + 12(1 - \alpha^2) - 120(1 - \alpha)^3)x \\
&\quad + (-2 + 12(1 - \alpha)^2 - 24(9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha + 6))xt \\
&\quad + (6\alpha - 12(-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8))xt^2 - 8(2\alpha^2 + \alpha)xt^3
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 38. $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (61) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansın temel özellikleri kullanılırsa

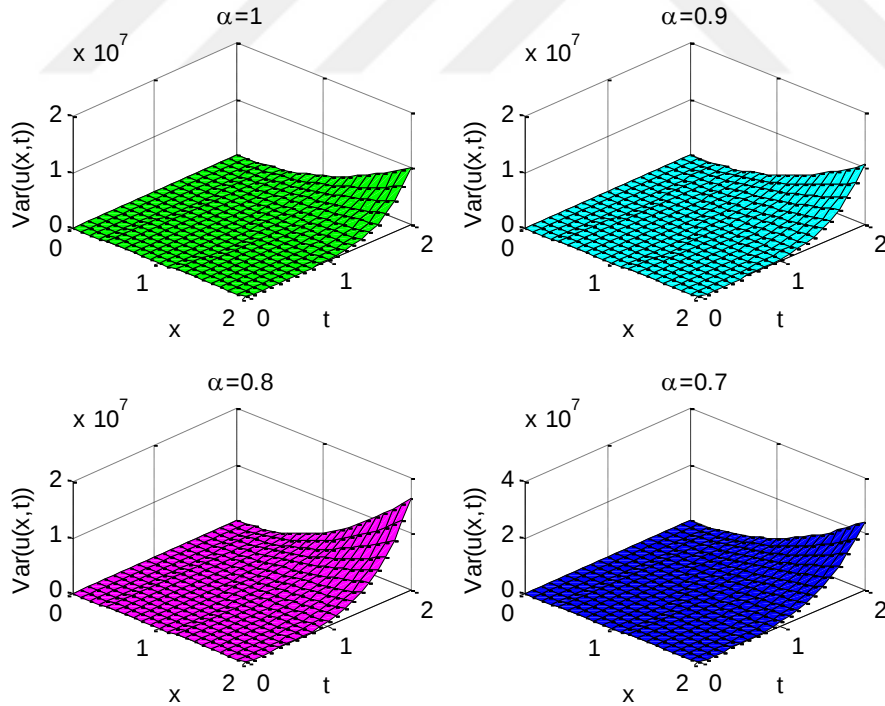
$u(x, t)$ denkleminin varyansı;

$$\begin{aligned} \text{Var}[u(x, t)] = \text{Var} \left[(2C - 4C^2(1 - \alpha) + 16C^3(1 - \alpha^2) - 80C^4(1 - \alpha)^3)x \right. \\ \left. + (-4C^2 + 16C^3(1 - \alpha)^2 - 16C^4(9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha + 6))xt \right. \\ \left. + (8C^3\alpha - 8C^4(-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8))xt^2 - \frac{16}{3}C^4(2\alpha^2 + \alpha)xt^3 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}[u(x, t)] = (4\text{Var}[C] + 16(1 - \alpha)^2\text{Var}[C^2] + 256(1 - \alpha^2)^2\text{Var}[C^3] \\ + 6400(1 - \alpha)^6\text{Var}[C^4])x^2 \\ + (16\text{Var}[C^2] + 256(1 - \alpha)^4\text{Var}[C^3] \\ + 256(9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha + 6)^2\text{Var}[C^4])x^2t^2 \\ + (64\alpha^2\text{Var}[C^3] + 64(-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8)^2\text{Var}[C^4])x^2t^4 \\ + \frac{256}{9}(2\alpha^2 + \alpha)^2\text{Var}[C^4]x^2t^6 \end{aligned}$$

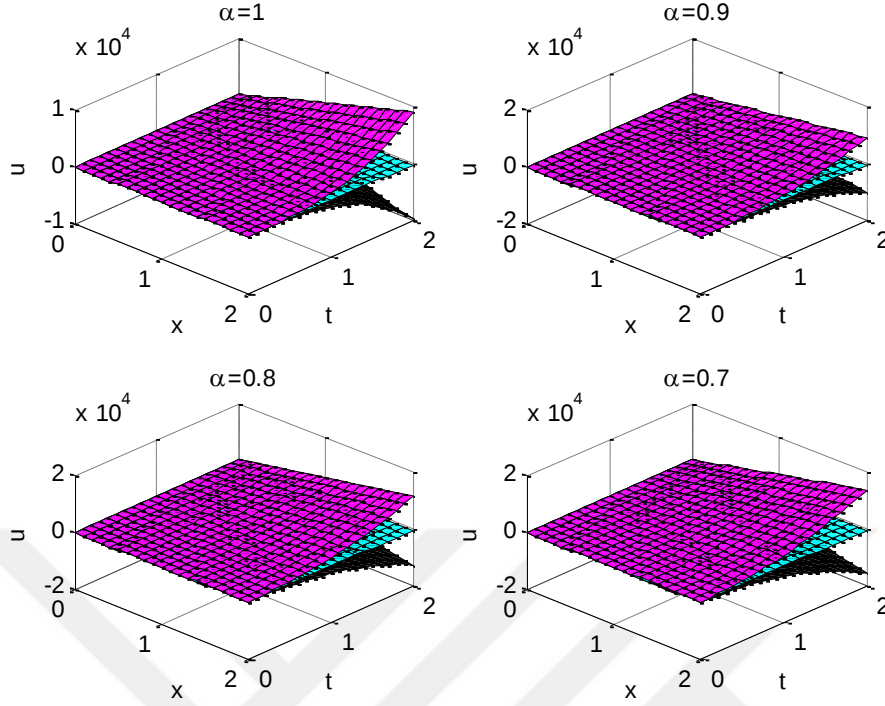
$$\begin{aligned}
Var[u(x,t)] = & \left(4 \cdot \frac{1}{\lambda^2} + 16(1-\alpha)^2 \cdot \frac{20}{\lambda^4} + 256(1-\alpha^2)^2 \cdot \frac{684}{\lambda^6} \right. \\
& + 6400(1-\alpha)^6 \cdot \frac{39744}{\lambda^8} \Big) x^2 \\
& + \left(16 \cdot \frac{20}{\lambda^4} + 256(1-\alpha)^4 \cdot \frac{684}{\lambda^6} \right. \\
& + 256(9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha + 6)^2 \cdot \frac{39744}{\lambda^8} \Big) x^2 t^2 \\
& + \left(64\alpha^2 \cdot \frac{684}{\lambda^6} + 64(-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8)^2 \cdot \frac{39744}{\lambda^8} \right) x^2 t^4 \\
& + \frac{256}{9} (2\alpha^2 + \alpha)^2 \cdot \frac{39744}{\lambda^8} x^2 t^6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[u(x,t)] = & (1 + 20(1-\alpha)^2 + 2736(1-\alpha^2)^2 + 993600(1-\alpha)^6)x^2 \\
& + (20 + 2736(1-\alpha)^4 + 39744(9\alpha^3 - 12\alpha^2 - 3\alpha + 6)^2)x^2 t^2 \\
& + (684\alpha^2 + 9936(-8\alpha^3 - 2\alpha^2 + 2\alpha + 8)^2)x^2 t^4 \\
& + 4416(2\alpha^2 + \alpha)^2 x^2 t^6
\end{aligned}$$



Şekil 39. $C \sim \ddot{U}stel(\lambda = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (61) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(u(x,t)) - 3stdsapma(u(x,t)), E(u(x,t)) + 3stdsapma(u(x,t))]$



Şekil 40. $C \sim \text{Üstel}(\lambda = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (61) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

Örnek-6.4.

$${}^CF_0 D_t^\alpha u(x,t) = u_{xx} + u(1-u) \quad (62)$$

$u(x,0) = \lambda$, $\lambda \sim \text{Gamma}(u=1, v=2)$ gamma dağılıma sahip rastgele başlangıç koşulu ile verilen Fisher denklemini $\alpha = 1$ özel koşulu için Aboodh-Adomian ayrıştırma yöntemi yardımı ile çözünüz.

Çözüm. (63) denkleminin her iki tarafının Aboodh dönüşümünü alalım.

$$\mathcal{A}\{u(x,t)\} = \frac{u(x,0)}{s^2} + \frac{1}{s} \mathcal{A}\{u_{xx} + u - u^2\} \quad (63)$$

$$u_{xx} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx}, \quad u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

(64) denkleminin ters Aboodh dönüşümü alınırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = u(x,0) + \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_{nxx} + \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\} \right\}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n = \sum_{r=0}^n u_r u_{n-r}$$

B_n 'ler Adomian polinomları olmak üzere

$$B_0 = u_0 u_0 = \lambda^2, B_1 = u_0 u_1 + u_1 u_0 = 2u_0 u_1, B_2 = u_0 u_2 + u_1 u_1 + u_2 u_0 \\ = 2u_0 u_2 + u_1^2$$

$$\left\{ \begin{array}{l} n = 0; u_0(x, t) = u(x, 0) = \lambda \\ n \geq 0; u_{n+1}(x, t) = \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_{n_{xx}} + \sum_{n=0}^{\infty} u_n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \right\} \right\} \end{array} \right\} \quad (64)$$

(65) denkleminde $n = 0, 1, 2, \dots$ değerleri kullanılarak;

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \{ u_{0_{xx}} + u_0 - B_0 \} \right\}, \quad u_{0_{xx}} = 0, B_0 = \lambda^2 \\ u_1(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \{ 0 + \lambda - \lambda^2 \} \right\} = (\lambda - \lambda^2) \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \{ 1 \} \right\} = (\lambda - \lambda^2) t \\ u_2(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \{ u_{1_{xx}} + u_1 - B_1 \} \right\}, \quad u_{1_{xx}} = 0, B_1 = 2\lambda(\lambda - \lambda^2) t \\ u_2(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \{ 0 + (\lambda - \lambda^2) t - 2\lambda(\lambda - \lambda^2) t \} \right\} \\ u_2(x, t) &= (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda) \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \{ t \} \right\} = (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda) \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4} \right\} \\ &= (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda) \frac{t^2}{2!} \\ u_3(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \{ u_{2_{xx}} + u_2 - B_2 \} \right\} \\ u_{2_{xx}} &= 0, B_2 = 2\lambda(\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda) \frac{t^2}{2!} + \{ (\lambda - \lambda^2) t \}^2 \\ u_3(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \left\{ 0 + (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda) \frac{t^2}{2!} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left\{ 2\lambda(\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda) \frac{t^2}{2!} + \{ (\lambda - \lambda^2) t \}^2 \right\} \right\} \right\} \\ u_3(x, t) &= \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \left\{ (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda)^2 \frac{t^2}{2!} - (\lambda - \lambda^2)^2 2 \frac{t^2}{2!} \right\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda)^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \left(\frac{t^2}{2!} \right) \right\} - 2(\lambda - \lambda^2)^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \mathcal{A} \left(\frac{t^2}{2!} \right) \right\} \\
u_3(x, t) &= (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda)^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^5} \right\} - 2(\lambda - \lambda^2)^2 \mathcal{A}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^5} \right\} \\
u_3(x, t) &= \frac{(\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda)^2 t^3}{3!} - \frac{2(\lambda - \lambda^2)^2 t^3}{3!} \\
u_3(x, t) &= (\lambda - \lambda^2)(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \frac{t^3}{3!} \\
u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots \\
u(x, t) &= \lambda + (\lambda - \lambda^2)t + (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda) \frac{t^2}{2!} + (\lambda - \lambda^2)(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \frac{t^3}{3!} + \dots \\
u(x, t) &= \frac{\lambda e^t}{1 - \lambda + \lambda e^t} \tag{65}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \left[\lambda + (\lambda - \lambda^2)t + (\lambda - \lambda^2)(1 - 2\lambda) \frac{t^2}{2!} + (\lambda - \lambda^2)(6\lambda^2 - 6\lambda + 1) \frac{t^3}{3!} \right. \\
&\quad \left. + O(t^4) \right] \tag{66}
\end{aligned}$$

X rastgele değişkeni gamma dağılıma sahipse moment çıkaran fonksiyonundan faydalanarak,

1.,2.,3.,4.,5. ve 6. momentleri aşağıdaki gibidir.

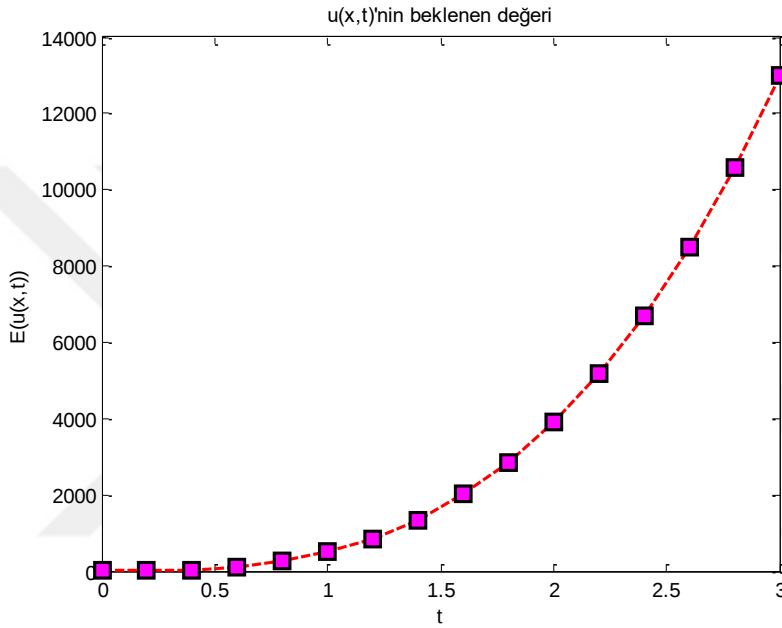
$$\begin{aligned}
\mu &= E(X) = u.v, \quad E(X^2) = u.v^2(u+1), \quad E(X^3) = u.v^3(u+1).(u+2) \\
E(X^4) &= u.v^4(u+1).(u+2).(u+3), \\
E(X^6) &= u.v^6(u+1).(u+2).(u+3).(u+4).(u+5) \\
E(X^8) &= u.v^6(u+1).(u+2).(u+3).(u+4).(u+5).(u+6).(u+7) \\
Var(X) &= u.v^2, \quad Var(X^2) = E(X^4) - E(X^2)^2, \dots
\end{aligned}$$

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

$$\begin{aligned}
E[u(x, t)] &= E \left[\lambda + (\lambda - \lambda^2)t + (2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda) \frac{t^2}{2!} + (-6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda) \frac{t^3}{3!} \right] \\
&= E[\lambda] + t\{E[\lambda] - E[\lambda^2]\} + \frac{t^2}{2!} \{2E[\lambda^3] - 4E[\lambda^2] + E[\lambda]\} \\
&\quad + \frac{t^3}{3!} \{-6E[\lambda^4] + 12E[\lambda^3] - 7E[\lambda^2] + E[\lambda]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[u(x,t)] &= 1.2 + t\{1.2 - 1.2^2 \cdot (1 + 1)\} \\
&\quad + \frac{t^2}{2!} \{2(1.2^3(1 + 1) \cdot (1 + 2)) - 4(1.2^2 \cdot (1 + 1) + 1.2)\} \\
&\quad + \frac{t^3}{3!} \{-6(1.2^4(1 + 1) \cdot (1 + 2) \cdot (1 + 3)) + 12(1.2^3(1 + 1) \cdot (1 + 2)) \\
&\quad - 7(1.2^2 \cdot (1 + 1)) + 1.2\} \\
E[u(x,t)] &= 471t^3 + 33t^2 - 6t + 2
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.



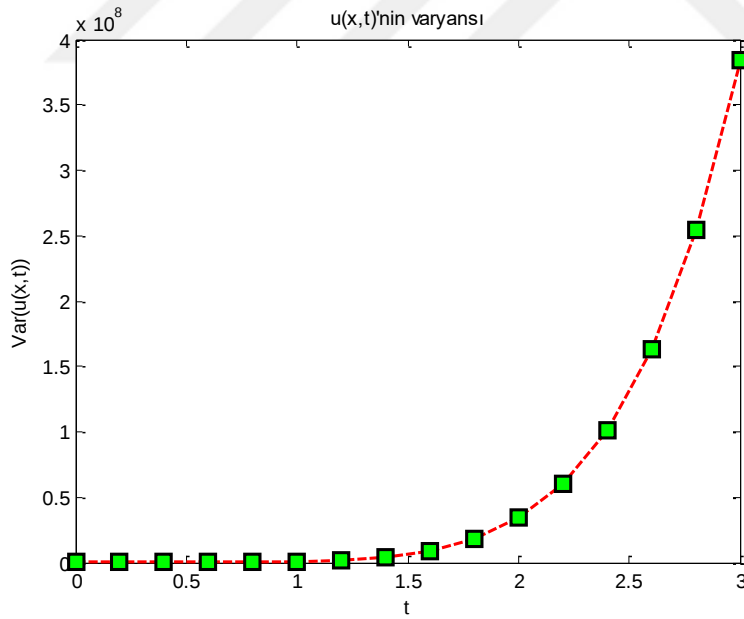
Şekil41. $\lambda \sim \text{Gamma}(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (66) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

X ve Y bağımsız rastgele değişkenleri için varyansın temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin varyansı;

$$\begin{aligned}
\text{Var}[u(x, t)] &= \text{Var} \left[\lambda + (\lambda - \lambda^2)t + (2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda) \frac{t^2}{2!} \right. \\
&\quad \left. + (-6\lambda^4 + 12\lambda^3 - 7\lambda^2 + \lambda) \frac{t^3}{3!} \right] \\
\text{Var}[u(x, t)] &= \text{Var}[\lambda] + t^2\{\text{Var}[\lambda] + \text{Var}[\lambda^2]\} \\
&\quad + \frac{t^4}{4} \{4\text{Var}[\lambda^3] + 16\text{Var}[\lambda^2] + \text{Var}[\lambda]\} \\
&\quad + \frac{t^6}{36} \{36\text{Var}[\lambda^4] + 144\text{Var}[\lambda^3] + 49\text{Var}[\lambda^2] + \text{Var}[\lambda]\}
\end{aligned}$$

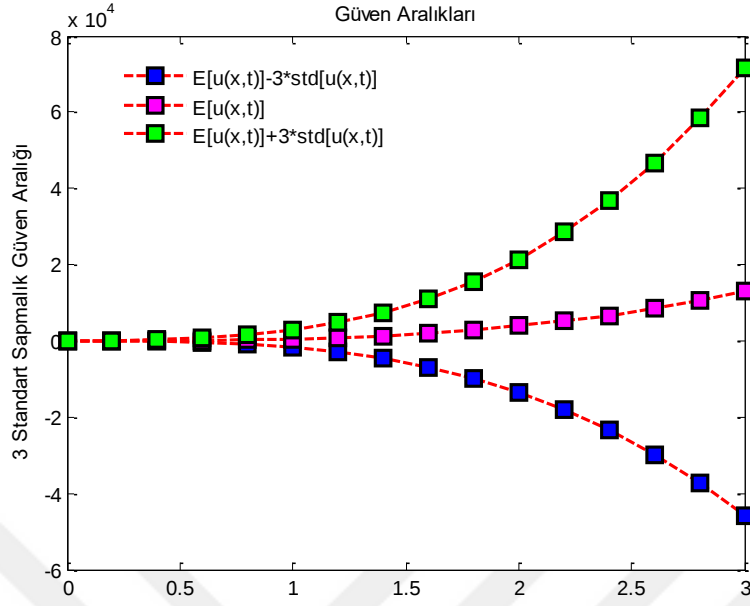
$$\begin{aligned}
Var[u(x,t)] &= 1.2^2 + t^2 \left\{ 1.2^2 + \left\{ 1.2^4(1+1).(1+2).(1+3) - (1.2^2.(1+1))^2 \right\} \right. \\
&\quad + \frac{t^4}{4} \left\{ 4 \left\{ 1.2^6(1+1).(1+2).(1+3).(1+4).(1+5) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - (1.2^3(1+1).(1+2))^2 \right\} \right. \\
&\quad + 16 \left\{ 1.2^4(1+1).(1+2).(1+3) - (1.2^2.(1+1))^2 \right\} + 1.2^2 \left. \right\} \\
&\quad + \frac{t^6}{36} \left\{ 36 \left\{ 1.2^6(1+1).(1+2).(1+3).(1+4).(1+5).(1+6).(1 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 7) - \left\{ (1.2^4(1+1).(1+2).(1+3))^2 \right\} \right\} \right. \\
&\quad + 144 \left\{ 1.2^6(1+1).(1+2).(1+3).(1+4).(1+5) \right. \\
&\quad \left. \left. - (1.2^3(1+1).(1+2))^2 \right\} \right. \\
&\quad + 49 \left\{ 1.2^4(1+1).(1+2).(1+3) - (1.2^2.(1+1))^2 \right\} + 1.2^2 \left. \right\} \\
Var[u(x,t)] &= \frac{93908292}{36} t^6 + 45057 t^4 + 324 t^2 + 4
\end{aligned}$$

olarak hesaplanır.



Şekil 42. $\lambda \sim Gamma(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (66) denkleminin varyansının çözüm davranışı

Güven aralıkları $[E(u(x,t)) - 3stdsapma(u(x,t)), E(u(x,t)) + 3stdsapma(u(x,t))]$



Şekil 43. $\lambda \sim Gamma(u = 1, v = 2)$ özel değerleri için (66) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

7. İRDELEME

Bu tez çalışmasından elde edilen bulgulardan çıkarılan sonuca göre, Aboodh Dönüşüm Yöntemi ve Aboodh-Adomian Ayrıştırma Yöntemi kullanılarak rastgele kesirli mertebeden adi ve kısmî diferansiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerine daha doğru ve hızlı bir şekilde ulaşıldığı görülmektedir. Adi ve kısmî diferansiyel denklemler ile ilgili Türk ve uluslararası literatürde kaynaklar mevcut olup, rastgele kesirli mertebeden adi ve kısmî diferansiyel denklemler ile ilgili çalışmalar az ve bu çalışmaların daha çok teorik olduğu görülmektedir. Bu tez çalışması ile bu boşluk bir nebze de olsa doldurulacaktır. Bu çalışmadan elde edilen sonuçların bu alanda çalışmak isteyen araştırmacılar için yol gösterici olacağı düşünülmektedir.

8. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları, sürekli olasılık dağılımları olan, düzgün, üçgensel, beta, üstel, normal, gamma dağılımlarından herhangi biri seçilerek denklemler rastgele hâle dönüştürülmüştür. Bu dönüştürülen denklemlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güven aralığı hesaplanmıştır. Kesirli mertebeden diferansiyel denklemleri çözmek için yaklaşık analitik çözüm yöntemlerinden literatürde kullanılan Aboodh Dönüşümü ve Lineer olmayan diferansiyel denklemler için Aboodh- Adomian Ayrıştırma Yöntemi kullanılmıştır. Elde edilen çözümlerin olasılık karakteristiklerinden beklenen değer, varyans ve güven aralığı MATLAB ve MAPLE programları yardımıyla çizdirilmiştir.

9. ÖNERİLER

Bu çalışmada, Aboodh Dönüşüm Yöntemi ve Aboodh-Adomian Ayrıştırma Yöntemi ile ilgili literatür özeti verilmiş olup yöntemin uygulanışı açıklanmıştır. Diferansiyel denklemlerin katsayıları ve başlangıç koşulları rastgele değişken seçilerek kesirli mertebeden diferansiyel denklemler rastgele hâle getirilmiştir. Ayrıca, elde edilen rastgele diferansiyel denklemlerin çözümleri bulunarak, çözümlerin olasılık karakterleri incelenmiştir. Parametreler farklı olasılık dağılımlarından seçilerek çözümlerin beklenen değer, varyans ve güven aralıkları hesaplanmış, çözüm davranışları grafiksel olarak MATLAB ve MAPLE programları kullanılarak incelenmiştir. Aboodh Dönüşümünün ve Aboodh-Adomian Ayrıştırma Yönteminin, rastgele integral denklemlerine, stokastik denklemlere ve gecikmeli diferansiyel denklemlere uygulaması yapılabilir.

KAYNAKÇA

- Aboodh, K.S. (2013). The New Integral Transform "Aboodh Transform". *Global Journal of Pure and Applied, Mathematics*, 9(1), 35-43.
- Almardy, I.A., Farah, R.A., Alkeer, M. A., Aboodh, K. S., Osman, A. K. ve Mohammed, M. A. (2023a). Aboodh Adomian Decomposition Method Applied To Logistic Differential Model. *Journal of Positive School Psychology*, 7(2), 482-488.
- Almardy, A., Belkhamsa, M., Farah, R. A., Saadouli, H., Alkeer, M. A., Mohammed, M. A. ve Osman., A.K. (2023b). Analytical Solutions Of Some Special Nonlinear Partial Differential Equations Using Aboodh-Adomian Decomposition Method. *Journal of Positive School Psychology*, 7(2), 474-481.
- Anaç, H. (2020). Rastgele Kısmi Diferansiyel Denklemler ve Rastgele Kesirli Mertebeden Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Analizi. Doktora tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Trabzon.
- Aruldoss, R. ve Devi R.A. (2020). Aboodh Transform for Solving Fractional Differential Equations. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 16(2), 145-153.
- Atasoy, N. (2022). Rastgele Kesir Mertebeden Adi ve Kısmî Diferansiyel Denklemlerin Adomian Ayırıştırma Yöntemi İle Çözümleri. Yüksek lisans tezi, Gümüşhane Üniversitesi, Gümüşhane.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M. ve Kesemen, T. (2018). Generalized beta parameters for a - type random model of Polio transmission. *AIP Conference Proceedings*, 2037(1), 020004.
- Bekiryazici, Z., Kesemen, T. ve Merdan, M. (2017). Stochastic and random models of Malaria disease with vertical transmission. *New Trends in Mathematical Sciences*, 5(1), 269-277.
- Bekiryazici, Z., Merdan, M., Kesemen, T. ve Najmuldeen, M. (2016). Mathematical modeling of Dengue disease under random effects. *Mathematical Sciences and Applications E-Notes*, 4(2). 58-70.
- Benattia, M.E., Belghaba, K. (2020). Application of the Aboodh Transform for Solving Fractional Delay Differential Equations. *Universal Journal of Mathematics and Applications*, 3(3), 93-101.
- Benattia, M.E. ve Belghaba, K. (2019). A Variational Iteration Method for Solving Ordinary Differential Equation Using the Aboodh Transform. *Global Journal Of Pure And Applied Sciences*, 25, 55-61.

- Bildik, N. (2017). General Convergence Analysis for the Perturbation Iteration Technique, *Turk. J. Math. Comput. Sci.* 6, 1–9.
- Cherif, M. H. ve Ziane, D. (2017). A New Numerical Technique for Solving Systems of Nonlinear Fractional Partial Differential Equations. *International Journal of Analysis and Applications*, 15(2), 188-197.
- Doust, M. H. R., Holizade, S.G. (2014). The Lotka-Volterra Predator-Prey Equations. *Caspian Journal of Mathematical Sciences (CJMS)*, 3(2), 221-225.
- Jadhav, C. P., Dale, T. ve Chinchane, V.L. (2023). A Method to Solve Ordinary Fractional Differential Equations Using Elzaki and Sumudu Transform. *Journal of Fractional Calculus and Nonlinear Systems*, 4(1), 8-16.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z., ve Kesemen T. (2017). Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler, Nobel Akademik Yayıncılık.
- Kotan, Ö. (2021). Aboodh Dönüşümü ile Lineer Gecikmeli Diferensiyel Denklemlerin Çözümü. Doktora tezi, Atatürk Üniversitesi, Erzurum
- Kreyszig, E. (1978). *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley-Sons, Newyork.
- Merdan, M., Anaç, H., Bekiryazıcı, Z., Kesemen, T., (2018). Solving of Some Random Partial Differential Equations by Using Differential Transformation Method and Laplace- Padé Method. *Güfbed/Gustij*, (2019) 9 (1), 108-118
- Merdan, M. ve Khaniyev, T. (2008). On the behaviour of solutions under the influence of stochastic effect of avian-human influenza epidemic model. *International Journal of Biotechnology & Biochemistry*, 4(1), 75-100.
- Merdan, M., Bekiryazıcı, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T. (2017). Deterministic stability and random behavior of a Hepatitis C model. *PloS One*, 12(7), e0181571.
- Merdan, M., Bekiryazıcı, Z., Kesemen, T. ve Khaniyev, T. (2018). Analyzing the dynamics of Ebola transmission with random effects. *Communications in Mathematical Biology and Neuroscience*, 22.
- Mahgoub, M. M. A., Sedeeg, A. K. H. (2017). An Efficient Method for Solving Linear and Nonlinear System of Partial Differential Equations. *British Journal of Mathematics & Computer Science*, 20(1), 1-10.
- Nuruddeen, R. İ., Nass, A. M. (2017). Exact Solutions of Wave-Type Equations by the Aboodh Decomposition Method. *2000 Mathematics Subject Classification*, 26A33, 44A10, 44A85

Ziane, D., Belgacem, R. ve Bokhari, A. (2019). A new modified Adomian Decomposition Method For Nonlinear Partial Differential Equations. *Open of Journal Mathematical Analysis*, 3(2), 81-90.



ÖZGEÇMİŞ

Lise öğrenimini Gümüşhane İmam-Hatip Lisesi'nde tamamladı. 2003 yılında İstanbul Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden mezun oldu. 2003-2007 yılları arasında Bitlis Mutki'de matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2007 yılında Gümüşhane'de çeşitli Liselerde göreve başladı ve halen Gümüşhane Ali Fuat Kadirbeyoğlu Anadolu Lisesinde bu görevini sürdürmektedir.

