

T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

YÜKSEK LİSANS

Cihangir UKŞUL

GÜMÜŞHANE
2025



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

**SOLUTION OF RANDOM FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS BY VARIATIONAL ITERATION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Cihangir UKŞUL

HAZİRAN-2025

GÜMÜŞHANE



**T.C.
GÜMÜŞHANE ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANA BİLİM DALI

**RASTGELE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFERENSİYEL
DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ**

**SOLUTION OF RANDOM FRACTIONAL ORDER DIFFERENTIAL
EQUATIONS BY VARIATIONAL ITERATION METHOD**

YÜKSEK LİSANS

Cihangir UKŞUL

Danışman: Prof. Dr. Mehmet MERDAN

**HAZİRAN-2025
GÜMÜŞHANE**

BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI

Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlamış olduğum “**Rastgele Kesirli Mertebeden Diferensiyel Denklemlerin Varyasyonel İterasyon Yöntemi İle Çözümü**” isimli bu tezimin, tamamen kendi çalışmam olduğunu, her alıntıya kaynak gösterdiğimi, alıntı yaptığım tüm çalışmaları kaynakçada belirttiğimi ve Gümüşhane Üniversitesi’nin lisanslı kullanıcısı olduğu intihal yazılım programı ile Lisansüstü Eğitim Enstitüsü’nün belirlediği kıstaslara uygun olarak raporladığımı taahhüt ederim. Tezimin kâğıt ve elektronik kopyalarının Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü arşivinde saklanmasına izin verdiğimi onaylarım.

Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliği’nin ilgili maddeleri uyarınca gereğinin yapılmasını arz ederim.

13/06/2025

.....
Cihangir UKŞUL

TEŞEKKÜR

Öncelikli olarak bu çalışmanın her safhasında büyük bir ilgi ile beni takip eden engin bilgi birikimi ve geniş konu yelpazesi ile doğru tarafa yönelmemi sağlayan, her anlamda destek vererek gerek ders aşamasında gerek tez aşamasında birçok zorluğu aşmama yardımcı olan ve çalışmamın bu noktaya gelmesinde en büyük rolü üstlenen danışman hocam sayın Prof. Dr. Mehmet MERDAN' a sonsuz teşekkür ediyorum. Diğer yandan ders döneminde derslerini aldığım tüm hocalarıma anlayışları ve bana kattıkları için teşekkür ediyorum.

Ek olarak bugünlere gelmemin en önemli hazırlayıcıları olan başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme bunu borç bilerek sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Cihangir UKŞUL
2025 GÜMÜŞHANE

ÖZET

Bu çalışma varyasyonel iterasyon yöntemini ile rastgele diferensiyel denklemlerin çözümlerinin bulunmasını ve analiz edilmesini içermektedir. Bu bağlamda adi, kısmi ve kesirli diferensiyel denklem veya denklem sistemleri ele alınmış bu denklemler belirlenen olasılık dağılımları altında rastgele yapılarak çözümleri bulunmuştur. Çözümlerin beklenen değeri, varyansı, güven aralıkları ve bazı problemlerde değişim katsayısı da hesaplanmış; grafikleri MATLAB programında oluşturulmuştur.

Tezin başlangıcında literatür de yer alan çalışmalar kısaca listelenmiş devamında gerekli ön bilgiler verilmiştir. Çalışmanın ilk bölümünde rastgele adi diferensiyel denklemler ele alınmış LVIM ile çözümleri bulunarak, çözüm davranışları analiz edilmiştir. İkinci bölümde Caputo kesir türevli rastgele diferensiyel denklemlere LVIM uygulanmış, çözümleri bulunarak çözüm davranışları analiz edilmiştir. Üçüncü bölümde Atangana-Baleanu kesir türevli rastgele kısmi diferensiyel denklemlere klasik VIM uygulanarak çözümleri bulunmuş ve çözüm davranışları analiz edilmiştir. Son bölümde ise Rieman-Liouville kesir türevli rastgele diferensiyel denklemlerin çözümleri Adomian-VIM ile bulunmuş ve çözüm davranışları analiz edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Varyasyonel İterasyon Yöntemi, Laplace Varyasyonel İterasyon Yöntemi, Adomian-Varyasyonel İterasyon Yöntemi, Beklenen Değer, Varyans.

SUMMARY

This study aims to find and analyze the solutions of random differential equations using the Variational Iteration Method (VIM). In this context, ordinary, partial, and fractional differential equations, as well as systems of equations, are considered and solved under specified probability distributions by introducing randomness. The expected value, variance, confidence intervals, and, in some cases, the coefficient of variation of the solutions are also calculated, and their graphs are generated using MATLAB.

The thesis begins with a brief overview of relevant literature, followed by the necessary theoretical background. In the first section, random ordinary differential equations are addressed, and their solutions are obtained using the Variational Iteration Method (VIM), with an analysis of the solution behaviors. In the second section, the method is applied to random differential equations involving the Caputo fractional derivative, and the solutions are analyzed similarly. The third section focuses on random partial differential equations with the Atangana–Baleanu fractional derivative, where the classical VIM is used to obtain and analyze the solutions. Finally, in the fourth section, the Adomian–VIM approach is employed to solve random differential equations involving the Riemann–Liouville fractional derivative, with a corresponding analysis of solution behaviors.

This study demonstrates that VIM is an effective method for solving various types of differential equations and enables the accurate computation of expected values and other statistical properties when randomness is introduced.

Keywords: Variational Iteration Method, Laplace Variational Iteration Method, Adomian- Variational Iteration Method, Variance, Expected Value.

İÇİNDEKİLER

KABUL VE ONAY	III
BİLİMSEL ETİĞE UYGUNLUK BEYANI.....	IV
TEŞEKKÜR.....	V
ÖZET.....	VI
SUMMARY	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR	XIV
1. GİRİŞ	1
1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı	1
1.2. Literatür.....	2
1.3. Olasılık Dağılımları.....	3
2. RASTGELE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ ile ÇÖZÜMÜ ve OLASILIK KARAKTERİSTİKLERİ.....	7
2.1. Laplace Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Rastgele Diferensiyel Denklemlerin Çözümü	7
2.2. Laplace Varyasyonel İterasyon Yönteminin Rastgele Diferensiyel Denklemlere Uygulaması	10
3. CAPUTO KESİR TÜREVLİ RASTGELE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ ile ÇÖZÜMLERİ	36
3.1. Revize Edilmiş Genel Lagrange Çarpanı	36
3.2. Caputo Kesirli Rastgele Diferensiyel Denklemlerin Çözümü İçin Laplace Varyasyonel İterasyon Yöntemi.....	38
3.3. Laplace Varyasyonel İterasyon Yönteminin Caputo Kesir Türevli Diferensiyel Denklemlere Uygulaması.....	40
4. ATANGANA-BALEANU KESİR TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ ile ÇÖZÜMÜ	69
4.1. Atangana-Baleanu Kesir Türevi ile Varyasyonel İterasyon Yöntemi.....	70
4.2. Atangana-Baleanu Kesir Türevli Rastgele Diferensiyel Denklemlere Varyasyonel İterasyon Yönteminin Uygulaması	71
5. ADOMIAN-VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ ile RASTGELE KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİ ÇÖZÜMLERİ.....	86
5.1. Adomian Ayrışım Yöntemi.....	87

5.2. Adomian-Varyasyonel İterasyon Yönteminin Rieman-Liouville Kesir Türevli Rastgele Diferensiyel Denklemlere Uygulaması	89
6. SONUÇ ve DEĞERLENDİRME	119
7. İRDELEME	120
8. ÖNERİLER.....	121
KAYNAKÇA.....	122
ÖZGEÇMİŞ	124



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1. $\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (13) denkleminin çözümünün beklenen değeri.....	14
Şekil 2. $\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (13) denkleminin çözümünün varyansı	14
Şekil 3. $\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (13) denkleminin çözümünün güven aralıkları	15
Şekil 4. $\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (13) denkleminin çözümünün değişim katsayısı.....	16
Şekil 5. $\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri için (14) denkleminin çözümünün beklenen değeri	19
Şekil 6. $\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri için (14) denkleminin çözümünün varyansı	19
Şekil 7. $\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri için (14) denkleminin çözümünün güven aralıkları	20
Şekil 8. $\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri için (14) denkleminin çözümünün değişim katsayısı.....	21
Şekil 9. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri için (15) denkleminin çözümünün beklenen değeri	28
Şekil 10. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri için (15) denkleminin çözümünün varyansı	28
Şekil 11. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri için (15) denkleminin çözümünün güven aralıkları	29
Şekil 12. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri için (15) denkleminin çözümünün değişim katsayısı.....	30
Şekil 13. $\zeta = 3$ özel değerleri için (16) denkleminin çözümünün beklenen değeri	34
Şekil 14. $\zeta = 3$ özel değerleri için (16) denkleminin çözümünün varyansı	34
Şekil 15. $\zeta = 3$ özel değerleri için (16) denkleminin çözümünün güven aralıkları.....	35
Şekil 16. $\zeta = 3$ özel değerleri için (16) denkleminin çözümünün değişim katsayısı	36
Şekil 17. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $a = 2, b = 5, \mu = 3$ özel değerleri için (32) denkleminin çözümünün beklenen değeri	44
Şekil 18. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $a = 2, b = 5, \sigma^2 = 2$ özel değerleri için (32) denkleminin çözümünün varyansı	45
Şekil 19. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $a = 2, b = 5, \mu = 3, \sigma^2 = 2$ özel değerleri için (32) denkleminin çözümünün güven aralıkları.....	45

Şekil 20. $\alpha = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (33) denkleminin çözümünün beklenen değeri	48
Şekil 21. $\alpha = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (33) denkleminin çözümünün varyansı	49
Şekil 22. $\alpha = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (33) denkleminin çözümünün güven aralıkları	49
Şekil 23. $\alpha = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $u = 2, v = \frac{1}{2}$ özel değerleri için (34) denkleminin çözümünün beklenen değeri	52
Şekil 24. $\alpha = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $u = 2, v = \frac{1}{2}$ özel değerleri için (34) denkleminin çözümünün varyansı	54
Şekil 25. $\alpha = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $u = 2, v = \frac{1}{2}$ özel değerleri için (34) denkleminin çözümünün güven aralıkları.....	54
Şekil 26. $\xi = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için denklem (35, $u_{1,2}$)'in çözümünün beklenen değeri.....	60
Şekil 27. özel değerleri için denklem (35, $u_{1,2}$)'in çözümünün varyansı.....	61
Şekil 28. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri için denklem (35, $u_{1,2}$)'in çözümünün güven aralıkları.....	62
Şekil 29. $\xi = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için denklem (35, $u_{2,2}$)'in çözümünün beklenen değeri.....	63
Şekil 30. $\xi = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için denklem (35, $u_{2,2}$)'in çözümünün varyansı.....	64
Şekil 31. $\xi = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için denklem (35, $u_{2,2}$)'in çözümünün güven aralıkları.....	65
Şekil 32. $\xi = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için denklem (35, $u_{3,2}$)'in çözümünün beklenen değeri.....	67
Şekil 33. $\xi = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için denklem (35, $u_{3,2}$)'in çözümünün varyansı.....	68
Şekil 34. $\xi = 1,0.9,0.8,0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için denklem (35, $u_{3,2}$)'in çözümünün güven aralıkları.....	69
Şekil 35. $K \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (42) denkleminin çözümünün beklenen değeri	74
Şekil 36. $K \sim Beta(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (42) denkleminin çözümünün varyansı	74

Şekil 37. $K \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (42) denkleminin çözümünün güven aralıkları	75
Şekil 38. $K \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (42) denkleminin çözümünün değişim katsayısı.....	76
Şekil 39. $K \sim U(a = 3, b = 5)$ özel değerleri için (43) denkleminin çözümünün beklenen değeri.....	78
Şekil 40. $K \sim U(a = 3, b = 5)$ özel değerleri için (43) denkleminin çözümünün varyansı	79
Şekil 41. $K \sim U(a = 3, b = 5)$ özel değerleri için (43) denkleminin çözümünün güven aralıkları	79
Şekil 42. $K \sim U(a = 3, b = 5)$ özel değerleri için (43) denkleminin çözümünün değişim katsayısı.....	80
Şekil 43. $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için (44) denkleminin genel çözümünün beklenen değeri	84
Şekil 44. $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için (44) denkleminin çözümünün varyansı	85
Şekil 45. $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için (44) denkleminin çözümünün güven aralıkları	85
Şekil 46. $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için (44) denkleminin çözümünün değişim katsayısı.....	86
Şekil 47. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı	93
Şekil 48. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (53) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için çözüm davranışı.....	93
Şekil 49. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	94
Şekil 50. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (53) denkleminin varyansının $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için çözüm davranışı.....	95
Şekil 51. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	96
Şekil 52. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ özel değerleri için (53) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	96
Şekil 53. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 1$ özel değerleri için (53) denkleminin değişim katsayısının çözüm davranışı	97

Şekil 54. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (54) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	103
Şekil 55. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (54) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0, 2], t \in [0, 2]$ için çözüm davranışı...	103
Şekil 56. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (54) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	104
Şekil 57. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (54) denkleminin varyansının $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için çözüm davranışı.....	105
Şekil 58. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (54) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	106
Şekil 59. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ için (54) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	106
Şekil 60. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 1$ özel değerleri için (54) denkleminin değişim katsayı değeri.....	107
Şekil 61. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (55) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı.....	113
Şekil 62. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (55) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için çözüm davranışı.....	114
Şekil 63. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (55) denkleminin varyansının çözüm davranışı.....	116
Şekil 64. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (55) denkleminin varyansının $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için çözüm davranışı.....	117
Şekil 65. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (55) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı	118
Şekil 66. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve özel değerleri için (55) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı.....	118

SİMGELER VE KISALTMALAR

VIM	: Varyasyonel İterasyon Metodu
LVIM	: Laplace Varyasyonel İterasyon Metodu
ADM	: Adomian Ayrışım Yöntemi
$\mathcal{L}$	: Laplace Dönüşümü
$\mathcal{L}^{-1}$	: Ters Laplace Dönüşümü
$E[X]$	: X Rastgele Değişkeninin Beklenen Değeri
$Var(X)$	: X Rastgele Değişkeninin Varyansı
std	: Standart Sapma
$\Gamma(\alpha)$	: Gamma Fonksiyonu
${}^{AB}D_t^\alpha$	: Atangana-Baleanu Kesir Türevi
I^α	: İntegral Operatörü
A_n	: Adomian Polinomları
$B(\omega, \rho)$	: Beta Fonksiyonu
$M_x(t)$	: Moment Üreten Fonksiyon
L	: Lineer Operatör (Terim)
N	: Lineer Olmayan Operatör (Terim)

1. GİRİŞ

1.1. Tezin Amacı ve Kapsamı

Fizik ve mühendislik gibi alanlarda karşılaşılan problemlerin modellenmesinde diferensiyel denklemler önemli yere sahiptir. Bu sebepten diferensiyel denklemleri çözebilmek oldukça önemlidir. Buna yönelik birçok çözüm yöntemi geliştirilmiş ve uygulanmıştır. Özellikle lineer denklemler için çözümler çoğu zaman kolay bir şekilde bulunsa da lineer olmayan denklemler için aynı durum söz konusu değildir. Öyle ki lineer olmayan denklemlerin pek çoğunun tam çözümleri bulunamamıştır.

Lineer olmayan diferensiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunması için çeşitli sayısal ve analitik yaklaşımlar geliştirilmiştir. Buna karşın sayısal yöntemler çözüm adına beklenildiği gibi bilgi vermediği için analitik yaklaşımlar daha fazla tercih edilmiştir. Bununla birlikte birçok çözüm yöntemi geliştirilmiş ve yöntemlerin kısıtları, denklemlere uygulanabilirliği gibi kısıtlar dikkate alınarak yöntemler revize edilmiştir. Özellikle güçlü lineer olmayan denklemlerde hata oranını minimize etmek adına genel çözüme hızlıca yakınsayan yöntemler daha çok kullanılmıştır. Bu yöntemlerden birisi de “Varyasyonel İterasyon Yöntemi” dir.

Varyasyonel iterasyon yöntemi ilk olarak Çinli matematikçi He tarafından 90’lı yılların sonunda yeni bir analitik yaklaşım olarak ortaya koyulmuştur. Yöntem varyasyonel teori yoluyla tanımlanabilen genel Lagrange çarpanı ile birlikte oluşturulan düzeltme fonksiyonuyla uygulanmaktadır. Burada sınır koşullarının uygulanmasıyla tanımlanan olası bilinmeyen sabitlere sahip düzeltme fonksiyonu yardımıyla ardışık yineleme ile yaklaşık analitik çözüm elde edilir. Bu yöntemin zaman içerisinde farklı varyasyonları da kullanılmıştır. Bunlardan biri de Laplace varyasyonel iterasyon yöntemidir. Bu tezde her ikisi de kullanılmıştır.

Yapılan bu çalışmada belirlenen adi, kısmi ve kesirli deterministik diferensiyel denklemler istenilen olasılık dağılımları altında rastgele etki terimleri kullanılarak rastgele yapılmış bunların yaklaşık analitik çözümleri VIM, LVIM ve ADM-VIM ile bulunmuştur. Ek olarak bulunan çözümlerin olasılık karakteristiği ve çözüm davranışları irdelenmiştir. Bu bağlamda çözümlere ait beklenen değer, varyans, güven aralığı ve bir kısmında değişim katsayısı hesaplanarak grafikleri oluşturulmuştur. Oluşturulan bu grafikler MAPLE ve MATLAB programlarında çizilmiştir. Çizilen grafikler ile çözüm davranışlarını görselleştirerek analizin daha anlamlı yapılabilmesi hedeflenmiştir. Diğer yandan lisans düzeyinden aşına olduğumuz diferensiyel denklemlerin yanında Caputo,

Atangana-Baleanu ve Riemann-Liouville kesir türevi içeren daha genel diferensiyel denklem ve denklem sistemleri kullanılmış, yöntemin farklı türev içeren rastgele diferensiyel denklemlere uygulamasına da çalışmada yer verilmiştir. İlaveten literatürde VIM ile ilgili çok fazla çalışma olmasına rağmen bu yöntemi rastgele diferensiyel denklemlere uygulayan çalışma sayısının oldukça kısıtlı olduğu görülmüştür. Bu sebepten ötürü yapılan bu çalışma ile literatüre katkı yapmak ve farklı uygulamalarını geliştirmek amaçlanmıştır.

1.2.Literatür

Varyasyonel iterasyon yöntemi ilk olarak He tarafından 1997’ de önerilmiştir. Önerildiği günden bugüne değin literatürde birçok çalışma yapılmıştır. Diğer yandan rastgele diferensiyel denklemlere dair de literatürde bazı çalışmalar bulunmaktadır. Bu çalışmalardan bir kısmı aşağıda kronolojik olarak sıralanmıştır. Bu bağlamda:

He lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemleri çözmek için ilk olarak varyasyonel iterasyon yöntemini önermiştir (Ji-Huan, 1997). Yöntemi öneren He gecikmeli diferensiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerini bulmak için varyasyonel iterasyon yönteminin uygulanabilir olduğunu göstermiştir (Ji-Huan, 1997). He bazı iyi bilinen lineer olmayan problemler için yöntemi tanımlamış ve problemlerin yaklaşık analitik çözümünü bulmuştur (Ji-Huan, 1999). Takiben He yaptığı bir çalışmada otonom adi diferensiyel sistemler için varyasyonel iterasyon yöntemini önermiş ve uygulamıştır (Ji-Huan, 2000). M.A. Abdou A.A. Soliman birleşik Schrodinger-Korteweg-de Vries, genel Korteweg-de Vries ve sığ su denklemleri gibi üç tip lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemin çözümü için yöntemi kullanmışlardır (Abdou, A.A. ve Soliman, A.A., 2005). Z.M. Odibat ve S. Momani kesir türevli lineer olmayan diferensiyel denklemlere yöntemi uygulamışlardır (Odibat, Z.M. ve Momani, S., 2006). S. Momani ve S. Abuasad lineer Helmholtz kısmi diferensiyel denklemini çözmek için yöntemi kullanmışlardır (Momani, S. ve Salah, A., 2006). S. Abbasbandy Adomian polinomlarını kullanarak ikinci dereceden Riccati diferensiyel denklemini varyasyonel iterasyon yöntemi ile çözmüştür (Abbasbandy, S., 2006). N.H. Sweilam dördüncü dereceden integro-diferensiyel denklemler için hem lineer hem de lineer olmayan sınır değer problemlerini çözmek adına yöntemi uygulamıştır (Sweilam, N.H., 2007). M. Dehghan ve F. Shakeri yöntemi; matematiksel fiziğin birçok uygulamasında ortaya çıkan ve farklı alanlardaki sistemler için iyi bir model oluşturan, küresel simetrik politropik bir akışkanın çekim potansiyeli için Poisson denklemi olan Lane-Emden denklemine uygulamışlardır (Deleghan, M. ve Fatemeh, S., 2008). A.M.

Wazwaz lineer ve lineer olmayan Schrodinger denklemlerinin çözümlerini yapmıştır (Wazwaz, A.M., 2008). Zaid Odibat ve Shaher Momani Caputo kesir türevini içeren dalga denklemi, Klein-Gordon denklemi, Burger denklemi, Korteweg-de Vries denklemi ve Boussinesq benzeri denklemi içeren sayısal gösterimler tekniği incelemek için kullanmışlardır (Odibat, Z. ve Momani, S., 2009). S.A. Khuri ve A. Sayfy lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklem sınıfları için yöntemi Laplace dönüşümü ile birlikte yeniden tanıtmışlardır (Khuri, S.A. ve Sayfy, A., 2012). M. Merdan kesirli varyasyonel iterasyon yöntemini kullanarak modifiye Riemann-Liouville türevine sahip difüzyon denkleminin yaklaşık analitik çözümünü bulmuştur (Merdan, M., 2013). M. Merdan ve N. Atasoy rastgele kısmi diferensiyel denklemlerin yaklaşık analitik çözümlerini bulmak için Laplace Adomian Ayırıştırma Yöntemi ve Homotopy Analiz yöntemlerini kullanmışlardır (Merdan, M. ve Atasoy, N., 2023). M. Merdan, Merve Merdan, R. Şahin bu çalışmada iki boyutlu Sumudu yöntemini kullanarak rastgele kompleks kısmi diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulmuşlardır (Merdan, M., vd., 2024). M. Merdan, S. Öktem kesirli rastgele HIV/AIDS modelinin yaklaşık analitik çözümlerini diferensiyel dönüşüm yöntemi ile bulmuşlardır (Merdan, M. ve Öktem, S., 2024). Ş. Şişman ve M. Merdan diferensiyel dönüşüm yöntemini rastgele katsayılı lineer ve lineer olmayan fark denklemlerinin çözümlerini bulmak için kullanmışlardır (Şişman, Ş. ve Merdan, M., 2024).

1.3.Olasılık Dağılımları

Bu çalışmada kullanılacak sürekli bazı olasılık dağılımları aşağıda verilmiştir.

1.3.1. Düzgün Dağılım

Bir K rastgele değişkenin için,

$$f_K(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} , & a \leq x \leq b \\ 0 , & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

olacak şekilde bir f olasılık yoğunluk fonksiyonu tanımlansın. O takdirde K rastgele değişkeni için $[a, b]$ kapalı aralığında düzgün dağılıma sahiptir denir ve $K \sim U(a, b)$ biçiminde gösterilir (Khaniyev vd., 2017).

Düzgün dağılıma sahip K rastgele değişkeninin “Moment Üreten Fonksiyonu”

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = \begin{cases} \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} & , \quad t \neq 0 \\ 1 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Diğer yandan “Beklenen Değer ve Varyansı”

$$E[K^n] = \int_a^b \frac{x^n}{b-a} dx$$

$$E[K] = \frac{a+b}{2}, E[K^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

olarak tanımlanır. Öte yandan varyansı:

$$Var(K) = E[K^2] - (E[K])^2$$

olduğundan,

$$Var(K) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

şeklinde hesaplanır.

1.3.2. Normal Dağılım

K rastgele değişkeni için,

$$f_K(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; -\infty < x < \infty, \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$$

olasılık yoğunluk fonksiyonu biçiminde tanımlandığında K rastgele değişkeni (μ, σ^2) parametrelerini içeren normal (Gauss) dağılıma sahiptir denir. $K \sim N(\mu, \sigma^2)$ biçiminde gösterilir (Khaniyev vd., 2017). Ayrıca normal dağılıma sahip K rastgele değişkeninin “Moment Üreten Fonksiyonu”

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

şeklindedir. Diğer yandan “Beklenen Değer ve Varyansı”

$$E[K] = \mu, \quad E[K^2] = \sigma^2 + \mu^2, \text{Var}(K) = \sigma^2$$

biçimindedir.

1.3.3. Üstel Dağılım

$\lambda > 0$ için K rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$p(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyorsa K , λ parametrelili üstel dağılıma sahiptir denir ve $K \sim \text{Üstel}(\lambda)$ ile gösterilir. Diğer yandan kümülatif dağılım fonksiyonu:

$$F(K) = P(K \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt = 1 - e^{-\lambda x}$$
$$F(K) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 1, & x \rightarrow \infty \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır (Khaniyev vd., 2017). Öte yandan K rastgele değişkeninin “Moment Üreten Fonksiyonu”

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = \frac{\lambda}{\lambda - t}; t < \lambda$$

biçimindedir. Ayrıca “Beklenen Değer ve Varyansı”

$$E[K] = \frac{1}{\lambda}, E[K^2] = \frac{2}{\lambda^2}, \text{Var}(K) = \frac{1}{\lambda^2}$$

şeklinde hesaplanır.

1.3.4. Gamma Dağılımı

K rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$g_K(x) = g(x; \theta_1, \theta_2) = \begin{cases} \frac{x^{\theta_1-1} e^{-\frac{x}{\theta_2}}}{\theta_2^{\theta_1} \Gamma(\theta_1)} & , 0 \leq x < \infty \\ 0 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyorsa K rastgele değişkeni gamma dağılımına sahiptir denir ve $K \sim \Gamma(\theta_1, \theta_2)$ şeklinde gösterilir. Burada $\Gamma(\theta_1) = \int_0^\infty x^{\theta_1-1} e^{-x} dx$ olarak ifade edilir (Khaniyev vd., 2017). Diğer yandan K rastgele değişkeninin “Moment Üreten Fonksiyonu”

$$M_K(t) = E(e^{tK}) = \left(\frac{1}{1 - \theta_2 t} \right)^{\theta_1}$$

biçimindedir. “Beklenen Değer ve Varyansı”

$$E(K) = \theta_1 \cdot \theta_2, E(K^2) = (\theta_1^2 + \theta_1) \cdot \theta_2^2, Var(K) = \theta_1 \cdot \theta_2^2$$

1.3.5. Beta Dağılımı

K rastgele değişkeni beta dağılımına sahip olduğunda $K \sim B(\omega, \rho)$ dir.

Beta dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$g_K(x) = g(x; \omega, \rho) = \begin{cases} \frac{1}{B(\omega, \rho)} x^{\omega-1} (1-x)^{\rho-1} & , 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. Burada Beta fonksiyonu $B(\omega, \rho) = \frac{\Gamma(\omega)\Gamma(\rho)}{\Gamma(\omega+\rho)}$ biçiminde Gamma fonksiyonu ile verilir (Merdan, M., Anaç, H.vd.,2019).

K rastgele değişkeninin “Moment Üreten Fonksiyonu”

$$M_K(t) = E(e^{tK}) = \int_0^1 e^{tx} \frac{\Gamma(\omega + \rho)}{\Gamma(\omega)\Gamma(\rho)} x^{\omega-1} (1-x)^{\rho-1} dx$$

olarak verilir. Ayrıca “Beklenen Değer ve Varyansı”

$$E(K^n) = \frac{\Gamma(\omega + n)}{\Gamma(\omega + \rho + n)} \frac{\Gamma(\omega + \rho)}{\Gamma(\omega)},$$

$$E(K) = \frac{\omega}{\omega + \rho}, E(K^2) = \frac{\omega(\omega + 1)}{(\omega + \rho)(\omega + \rho + 1)}, Var(K) = \frac{\omega\rho}{(\omega + \rho + 1)(\omega + \rho)^2}$$

şeklinde ifade edilir.

1.3.6. Erlang Dağılımı

K rastgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu:

$$f_K(x) = \begin{cases} \frac{\gamma^i x^{i-1} e^{-\gamma x}}{(i-1)!}, & i = 1, 2, \dots, x \geq 0 \\ 0, & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanıyorsa K rastgele değişkeni Erlang dağılımına sahiptir denir ve $K \sim Erlang(i, \gamma)$ biçiminde gösterilir (Khaniyev vd., 2017).

K rastgele değişkeninin “Moment Üreten Fonksiyonu”

$$M_K(t) = E(e^{tK}) = \left(1 - \frac{t}{\gamma}\right)^{-i}, t < \gamma$$

şeklinde verilir. Ek olarak “Beklenen Değer ve Varyansı”

$$E[K] = \frac{i}{\gamma}, E[K^2] = \frac{i(i+1)}{\gamma^2}, Var(K) = \frac{i}{\gamma^2}$$

biçiminde tanımlanır.

2. RASTGELE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ ve OLASILIK KARAKTERİSTİKLERİ

2.1. Laplace Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile Rastgele Diferensiyel Denklemlerin Çözümü

Aşağıda verilen doğrusal olmayan diferensiyel denklemi ele alalım:

$$Ly(x) + Ny(x) = f(x) \tag{1}$$

Burada L lineer operatör, N lineer olmayan operatör olmak üzere $f(x)$ ise bilinen analitik bir fonksiyon olsun. (1) denklemini referans alarak varyasyonel iterasyon yöntemi için düzeltme fonksiyoneli aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$y_{n+1}(x) = y_n(x) + \int_0^x \lambda(\xi)[Ly_n(\xi) + N\tilde{y}_n(\xi) - f(\xi)]d\xi, \quad n = 0,1,2, \dots \quad (2)$$

Burada λ genel Lagrange çarpanı, alt simge n ' inci yaklaşımı belirtir. Ek olarak $\tilde{y}_n$ ise kısıtlı bir varyasyonu belirtir. ($\delta\tilde{y}_n = 0$) Diğer yandan literatürdeki birçok çalışmada genel Lagrange çarpanının şu formda olduğu görülmüştür:

$$\lambda = \gamma(x - \xi)$$

Bu çalışmada genel Lagrange çarpanı son ifade edilen haliyle kullanılacaktır. Böylece Laplace dönüşümü tanımlı ve kullanıma uygundur. O halde (2) denkleminin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa yeni denklem aşağıdaki gibi şekillenir:

$$\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}\left[\int_0^x \gamma(x - \xi)[Ly_n(\xi) + N\tilde{y}_n(\xi) - f(\xi)]d\xi\right], \quad (3)$$

Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}[\gamma(x) * (Ly_n(x) + N\tilde{y}_n(x) - f(x))] \\ &= \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}[\gamma(x)]\mathcal{L}[Ly_n(\xi) + N\tilde{y}_n(\xi) - f(\xi)] \end{aligned} \quad (4)$$

Burada $\gamma(x)$ 'in optimal değerini bulmak için $y_n(x)$ 'e bağlı varyasyon alınır,

$$\frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] = \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[y_n(x)] + \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[\gamma(x) * (Ly_n(x) + N\tilde{y}_n(x) - f(x))] \quad (5)$$

elde edilir. Bu varyasyon işlemi uygulandığında sonuç daha da basitleşir.

$$\mathcal{L}[\delta y_{n+1}] = \mathcal{L}[\delta y_n] + \delta \mathcal{L}[\gamma] \mathcal{L}[y_n] \quad (6)$$

Burada L 'nin sabit katsayılı ve lineer bir diferensiyel operatör olduğunu varsayalım.

$$L(y) \equiv a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y \quad (7)$$

Denklem (7) de a_n olarak verilen katsayılar sabitlerdir. Diğer yandan katsayıların yalnızca x biçiminde sabit olmayan terimler içermesi Laplace varyasyonel yaklaşımının hala geçerli olduğunu belirtmek adına önemlidir.

L operatörünün ilk teriminin Laplace dönüşümü aşağıdaki gibidir.

$$\mathcal{L}[a_n y^{(n)}] = a_n s^n \mathcal{L}[y] - a_n \sum_{k=1}^n s^{k-1} y^{(n-k)}(0) \quad (8)$$

(9) denkleminde y' ye bağlı varyasyon alındığında (10) elde edilir.

$$\delta \mathcal{L}[a_n y^{(n)}] = a_n s^n \mathcal{L}[\delta y] \quad (9)$$

L operatöründeki diğer terimlerde yani, $a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$ benzer sonuç verir. Diğer yandan (9) kullanılarak (6) denklemini indirgendiğinde:

$$\mathcal{L}[\delta y_{n+1}] = \mathcal{L}[\delta y_n] + \mathcal{L}[\gamma] \left(\sum_{k=0}^n a_k s^k \right) \mathcal{L}[\delta y_n] = \left[1 + \mathcal{L}[\gamma] \left(\sum_{k=0}^n a_k s^k \right) \right] \mathcal{L}[\delta y_n] \quad (10)$$

elde edilir. Bu denklemde y_{n+1} ekstremum koşulu $\delta y_{n+1} = 0$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla (10) denkleminin sağ tarafı sıfır olmalıdır. Bunun için eşitlik aşağıdaki gibi şekillenir.

$$\mathcal{L}[\gamma] = - \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} \quad (11)$$

Burada son denkleme ters Laplace dönüşümü uygulandığında γ 'nın en uygun değeri bulunur. Bu değer ile birlikte aşağıdaki iterasyon formülü oluşturulabilir.

$$\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L} \left[\int_0^x \gamma(x - \xi) [Ly_n(\xi) + Ny_n(\xi) - f(\xi)] d\xi \right], n \geq 0$$

2.2. Laplace Varyasyonel İterasyon Yönteminin Rastgele Diferensiyel Denklemlere Uygulaması

Bu bölümde başlangıç koşulları yada katsayıları rastgele etki terimli adi diferensiyel denklemlerin çözümleri için varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılarak dört adet örnek çözülmüştür.

Örnek 1

$$y'' + y' + y = -K\sin x + Tx + T \quad (13)$$

$$y(0) = K, \quad y'(0) = T$$

burada $K \sim \text{Gamma}(\alpha = 1, \beta = 3)$ Gamma ve $T \sim \text{Exp}(\mu = 2)$ üstel dağılıma sahip rastgele değişkenler olsun. (13) ile verilen rastgele diferensiyel denklemi LVIM yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiğini inceleyiniz.

Çözüm:

Bu problem için Laplace VIM düzeltme fonksiyoneli $\lambda = \gamma(x - \xi)$ için aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y_{n+1}(x)) &= \mathcal{L}(y_n(x)) \\ &+ \mathcal{L}\left[\int_0^x \gamma(x - \xi)[y_n''(\xi) + y_n'(\xi) + y_n(\xi) + K\sin(\xi) - T\xi - T] d\xi\right] \end{aligned}$$

Burada Laplace dönüşüm özelliği uygulanırsa;

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}[\gamma(x) * (y_n''(x) + y_n'(x) + K\sin x - Tx - T)] \\ &= \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}[\gamma(x)]\mathcal{L}[y_n''(x) + y_n'(x) + y_n(x) + K\sin x - Tx - T] \\ &= \mathcal{L}[y_n(x)] \\ &+ \mathcal{L}[\gamma(x)]\left\{s^2\mathcal{L}[y_n(x)] - sy_n(0) - y_n'(0) + s\mathcal{L}[y_n(x)] - y_n(0)\right. \\ &\left.+ \mathcal{L}[y_n(x)] + \frac{K}{s^2 + 1} - \frac{T}{s^2} - \frac{T}{s}\right\} \end{aligned}$$

burada denklemin her iki tarafının $y_n(x)$ 'e bağı varyasyonu alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] \\ &= \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[y_n(x)] \\ &+ \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[\gamma(x)] \left[(s^2 + s + 1) \mathcal{L}[y_n(x)] - s y_n(0) - y_n'(0) + \frac{K}{s^2 + 1} - \frac{T}{s^2} - \frac{T}{s} \right] \end{aligned}$$

elde edilir. Daha sade bir şekilde:

$$\mathcal{L}[\delta y_{n+1}] = \mathcal{L}[\delta y_n] + \mathcal{L}[\gamma](s^2 + s + 1) \mathcal{L}[\delta y_n] = [1 + \mathcal{L}[\gamma](s^2 + s + 1)] \mathcal{L}[\delta y_n]$$

yazılabilir. Sınır koşulları y_{n+1} ' in varyasyonu yani, $\delta y_{n+1} = 0$ olduğundan eşitliğin sol tarafı 0 olur. Dolayısıyla,

$$1 + \mathcal{L}[\gamma](s^2 + s + 1) = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[\gamma] = -\frac{1}{s^2 + s + 1}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{s^2 + s + 1} &= -\frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + 1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \\ \gamma(x) &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \right] = -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} x\right) \end{aligned}$$

İfadesi denklemde yerine koyulursa,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] \\ &\quad - \mathcal{L} \left[\int_0^x \left[\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} (x - \xi) \right) [y_n''(\xi) + y_n'(\xi) + y_n(\xi) + K \sin \xi \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - T\xi - T] d\xi \right] \right]\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] \\ &\quad - \mathcal{L} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] [y_n''(x) + y_n'(x) + y_n(x) + K \sin x - Tx - T] \\ y_0 &= y(0) + y'(0)x = K + Tx\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}[y_0] - \mathcal{L} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] \mathcal{L}[y_0'' + y_0' + y_0 + K \sin x - Tx - T]$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y_1] &= \mathcal{L}[K + Tx] - \mathcal{L} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{x}{2}} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} x \right) \right] \mathcal{L}[T + K + Tx + K \sin x - Tx - T] \\ &= \frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{1}{s^2 + s + 1} \left(\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2 + 1} \right)\end{aligned}$$

elde edilir. İfadeye ters Laplace uygulanırsa,

$$y_1 = K \cos x + Tx$$

olarak bulunur. Bu aynı zamanda örnek 1’de verilen denklemin analitik çözümüdür.

α ve β parametrelili K rastgele değişkeni Gamma dağılımına sahip olduğunda $K \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ biçiminde yazılır. Gamma dağılımının moment üreten fonksiyonunu kullanarak

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = \left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$$

ifadesi bulunur. $K \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeni için birinci moment ve varyans;

$$E[K] = \frac{\alpha}{\beta}, \text{Var}[K] = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

biçimindedir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

$T \sim \text{Exp}(\mu)$ üstel dağılıma sahip rastgele değişken olsun, moment üreten fonksiyonu (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

$$M_T(t) = E[e^{tT}] = \frac{\mu}{\mu - t}$$

$T \sim \text{Exp}(\mu)$ rastgele değişkenin beklenen değer ve varyansı;

$$E[T] = \frac{1}{\mu}, \text{Var}[T] = \frac{1}{\mu^2}.$$

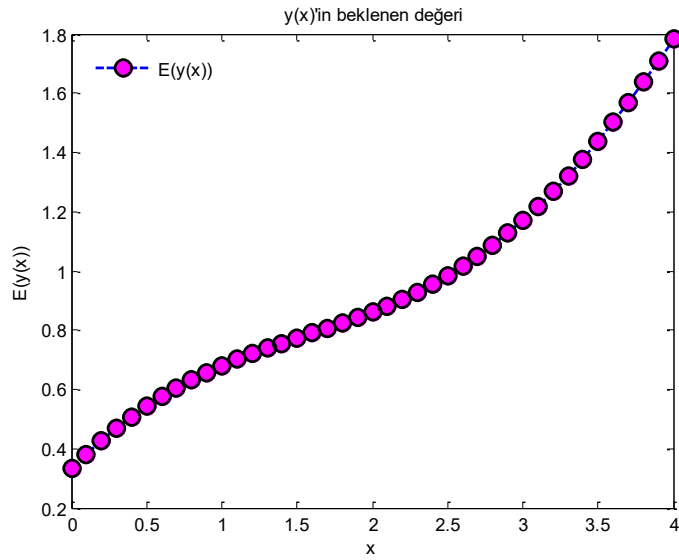
Bu bilgileri referans olarak K ve T bağımsız rastgele değişkenlerinin $E[KT] = E[K]E[T]$, beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$E(y_1) = E(K \cos x + Tx) = \cos x E(K) + x E(T) = \cos x \frac{\alpha}{\beta} + \frac{x}{\mu}$$

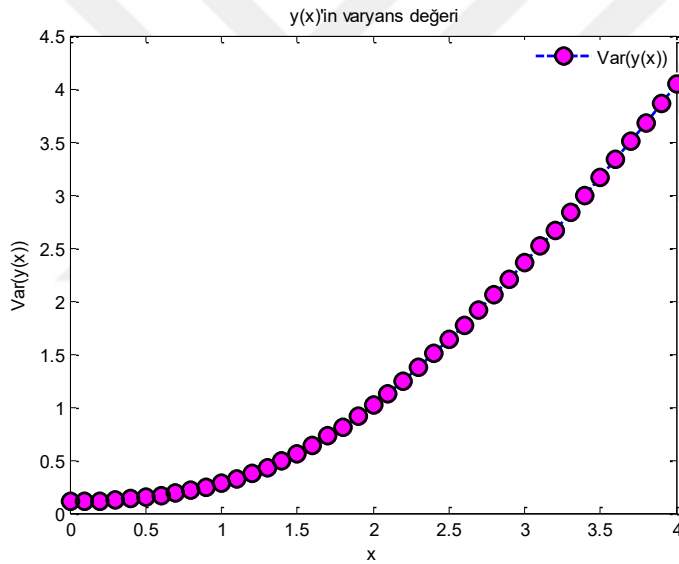
$$\text{Var}(y_1) = \text{Var}(K \cos x + Tx) = \cos^2 x \text{Var}(K) + x^2 \text{Var}(T) = \cos^2 x \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{x^2}{\mu^2}$$

$\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için beklenen değer ve varyans

$$E(y_1) = \frac{\cos x}{3} + \frac{x}{2} \text{ ve } \text{Var}(y_1) = \frac{\cos^2 x}{9} + \frac{x^2}{4},$$



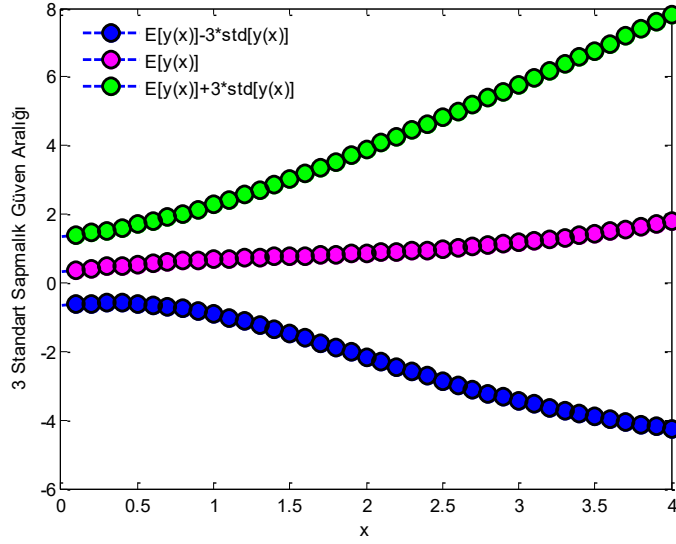
Şekil 1. $\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (13) denkleminin beklenen değeri



Şekil 2. $\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri (13) denkleminin varyansı

Güven aralıkları

$$[E(y(x)) - 3stdsapma(y(x)), E(y(x)) + 3stdsapma(y(x))]$$



Şekil 3. $\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri (13) denkleminin güven aralıkları

$y(x)$ 'in değişim katsayısı;

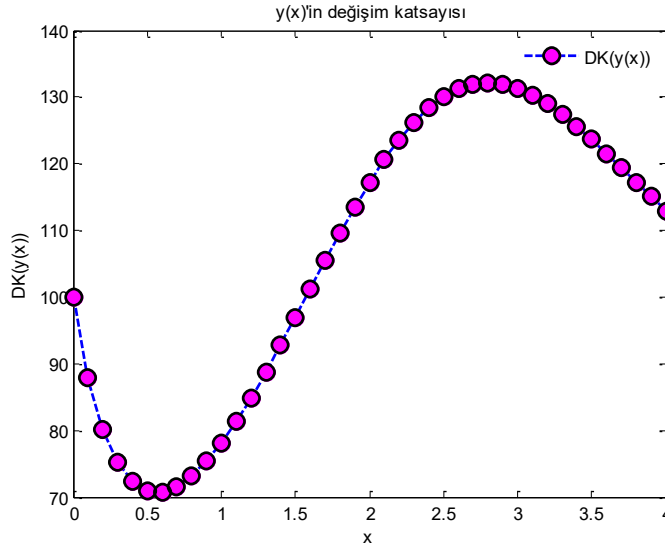
varyansın karekökü standart sapmayı verdiğiinden,

$$stdsapma[y(x)] = \sqrt{Var[y(x)]} = \sqrt{\frac{\cos^2 x}{9} + \frac{x^2}{4}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[y(x)]}{E[y(x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{\cos^2 x}{9} + \frac{x^2}{4}}}{\frac{\cos x}{3} + \frac{x}{2}} \times 100$$

$y(x)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 4. $\alpha = 1, \beta = 3$ ve $\mu = 2$ özel değerleri için (13) denkleminin değişim katsayısı

Örnek 2:

$$y'' - yy'' + y - y^2 = 0 \quad (14)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = K$$

burada $K \sim \text{Gamma}(\alpha = 1, \beta = 4)$ Gamma dağılımına sahip rastgele değişken olsun. Biçiminde verilen lineer olmayan rastgele diferensiyel denklemi Laplace VIM ile çözerek olasılık karakteristiğini inceleyiniz.

Çözüm:

Laplace VIM düzeltme fonksiyoneli $\lambda = \gamma(x - \xi)$ için aşığıdaki gibi oluşturulur.

$$\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L} \left[\int_0^x \gamma(x - \xi) [y_n''(\xi) - \tilde{y}_n(\xi) \tilde{y}_n''(\xi) + y_n(\xi) - \tilde{y}_n^2(\xi)] d\xi \right]$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}[\gamma(x) * [s^2 \mathcal{L}[y_n(x)] - s y_n(0) - y_n'(0) - \mathcal{L}[\tilde{y}_n(x) \tilde{y}_n''(x)] \\ + \mathcal{L}[y_n(x)] - \mathcal{L}[\tilde{y}_n^2(x)]]] \end{aligned}$$

Burada son denklemin $y_n(x)$ 'e bağlı varyasyonu alınırsa,

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] \\
&= \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[y_n(x)] + \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[\gamma(x)] [s^2 \mathcal{L}[y_n(x)] - s y_n(0) - y_n'(0) \\
&\quad - \mathcal{L}[\tilde{y}_n(x) \tilde{y}_n''(x)] + \mathcal{L}[y_n(x)] - \mathcal{L}[\tilde{y}_n^2(x)]]
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta y_{n+1}] &= \mathcal{L}[\delta y_n] + \mathcal{L}[\gamma](s^2 + 1) \mathcal{L}[\delta y_n] \\
\mathcal{L}[\delta y_n](1 + (s^2 + 1) \mathcal{L}[\gamma]) &= 0 \Rightarrow \mathcal{L}[\gamma] = -\frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow \gamma(x) = -\sin x
\end{aligned}$$

$\gamma(x) = -\sin x$ düzeltme fonksiyonelinde yerine koyulursa aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] \\
&\quad + \mathcal{L} \left[\int_0^x -\sin(x - \xi) [y_n''(\xi) - y_n(\xi) y_n''(\xi) + y_n(\xi) - y_n^2(\xi)] d\xi \right], \\
&= \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}[-\sin x] \mathcal{L}[y_n''(x) - y_n(x) y_n''(x) + y_n(x) - y_n^2(x)]
\end{aligned}$$

$$y_0 = y(0) + y'(0)x = Kx$$

Seçildiğinde $n = 0$ için denklem:

$$\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}[y_0] + \mathcal{L}[-\sin x] \mathcal{L}[y_0''(x) - y_0(x) y_0''(x) + y_0(x) - y_0^2(x)]$$

biçimindedir.

$$\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}[Kx] + \mathcal{L}[-\sin x] \mathcal{L}[Kx - K^2 x^2] = \frac{K}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1} \left(\frac{K}{s^2} - \frac{K^2 2}{s^3} \right)$$

Burada ters Laplace alındığında y_1 aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_1 = K^2(2\cos x + x^2 - 2) + K\sin x$$

$n = 1$ için denklem aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y_2] &= \mathcal{L}[y_1] + \mathcal{L}[-\sin x] \mathcal{L}[y_1''(x) - y_1(x)y_1''(x) + y_1(x) - y_1^2(x)], \\
&= \mathcal{L}[K^2(2\cos x + x^2 - 2) + K\sin x] \\
&\quad + \mathcal{L}[-\sin x] \mathcal{L}[2K^2(1 - \cos x) - K\sin x \\
&\quad - (K^2(2\cos x + x^2 - 2) + K\sin x)(2K^2(1 - \cos x) - K\sin x) \\
&\quad + K^2(2\cos x + x^2 - 2) + K\sin x - (K^2(2\cos x + x^2 - 2) + K\sin x)^2]
\end{aligned}$$

Burada ters Laplace alındığında y_2 aşağıdaki gibi bulunur.

$$\begin{aligned}
y_2 &= \frac{1}{12} [K^4(-336 \cos x + 6x^2 \cos x + 4x^3 \sin x - 6x \sin x + 336 + 12x^4 - 168x^2) \\
&\quad + K^3(3x \cos x - 2x^3 \cos x + 3x^2 \sin x - 3 \sin x) + 12K \sin x]
\end{aligned}$$

K rastgele değişkeni Gamma dağılımına sahip ise K rastgele değişkenin parametreleri, $K \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ olsun. Gamma dağılımının moment üreten fonksiyonu kullanılarak

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^\alpha$$

ifadesi elde edilir. $K \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeni için birinci moment ve varyans;

$$\begin{aligned}
E[K] &= \frac{\alpha}{\beta}, \quad E[K^2] = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad E[K^4] = \frac{\alpha^4}{\beta^4} + \frac{6\alpha^3}{\beta^4} + \frac{11\alpha^2}{\beta^4} + \frac{6\alpha}{\beta^4} \\
\text{Var}[K] &= \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad \text{Var}[K^2] = \frac{2\alpha(2\alpha^2 + 5\alpha + 3)}{\beta^4}
\end{aligned}$$

biçimindedir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

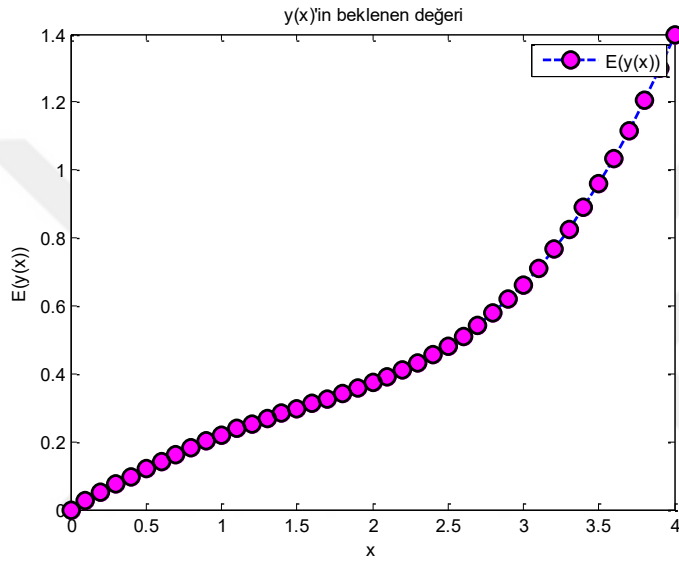
Bu momentleri kullanarak K ve T bağımsız rastgele değişkeninin $E[KT] = E[K]E[T]$, beklenen değer ve varyans aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$$\begin{aligned}
E(y_1) &= E(K^2(2\cos x + x^2 - 2) + K\sin x) = (2\cos x + x^2 - 2)E(K^2) + \sin x E(K) \\
&= (2\cos x + x^2 - 2) \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}\right) + \sin x \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)
\end{aligned}$$

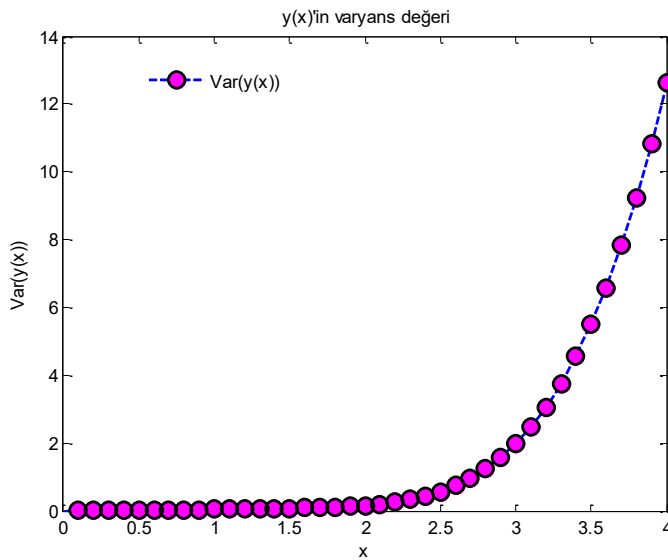
$$\begin{aligned}
Var(y_1) &= Var(K^2(2cosx + x^2 - 2) + Ksinx) \\
&= (2cosx + x^2 - 2)^2 Var(K^2) + \sin^2 x Var(K) \\
&= (2cosx + x^2 - 2)^2 \left(\frac{2\alpha(2\alpha^2 + 5\alpha + 3)}{\beta^4} \right) + \sin^2 x \left(\frac{\alpha}{\beta^2} \right)
\end{aligned}$$

$\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri için beklenen değer ve varyans

$$E(y_1) = \frac{1}{8}(2cosx + x^2 - 2) + \frac{1}{4}sinx \text{ ve } Var(y_1) = \frac{5}{64}(2cosx + x^2 - 2)^2 + \frac{1}{16}\sin^2 x,$$



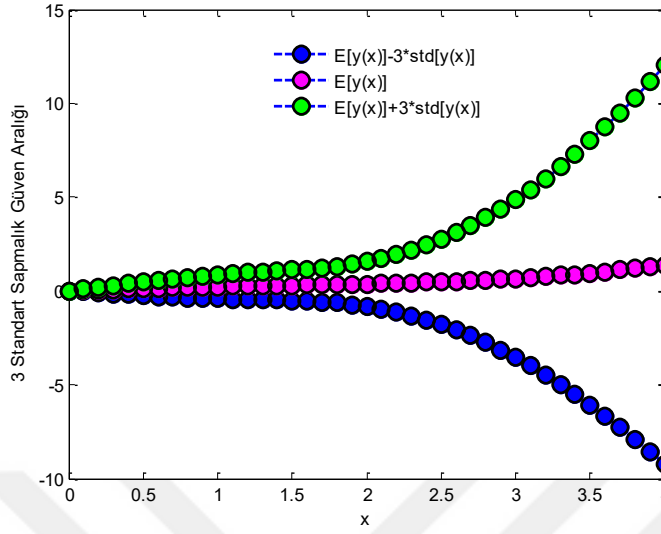
Şekil 5. $\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri (14) denkleminin çözümünün beklenen değeri



Şekil 6. $\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri (14) denkleminin çözümünün varyansı

Güven aralıkları;

$$[E(y(x)) - 3stdsapma(y(x)), E(y(x)) + 3stdsapma(y(x))]$$



Şekil 7. $\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri (14) denkleminin çözümünün güven aralıkları

$y(x)$ 'in değişim katsayısı;

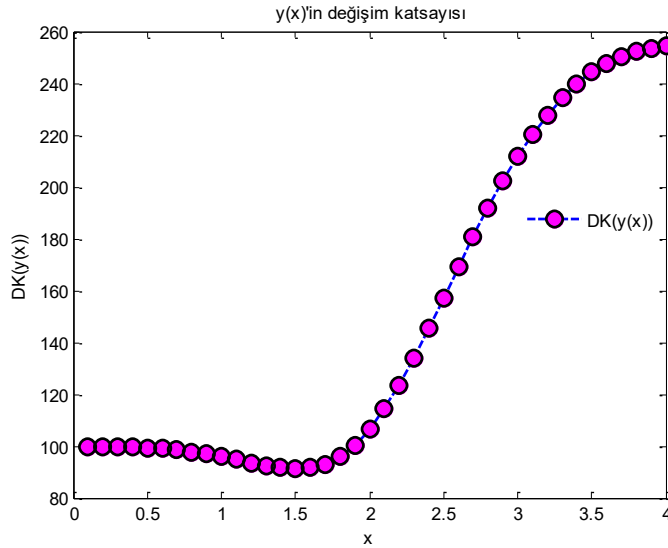
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$stdsapma[y(x)] = \sqrt{Var[y(x)]} = \sqrt{\frac{5}{64}(2\cos x + x^2 - 2)^2 + \frac{1}{16}\sin^2 x}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[y(x)]}{E[y(x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{5}{64}(2\cos x + x^2 - 2)^2 + \frac{1}{16}\sin^2 x}}{\frac{1}{8}(2\cos x + x^2 - 2) + \frac{1}{4}\sin x} \times 100$$

$y(x)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 8. $\alpha = 1$ ve $\beta = 4$ özel değerleri (14) denkleminin çözümlünün değişim katsayısı

Örnek 3.

$$y'' + 2(y')^2 - 2y' - 8y = 2K + 2T^2 + 8KTx + 8K^2x^2 - 8Tx - 8Kx^2 - 4Kx - 2T$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = K \quad (15)$$

$K \sim U(a = 1, b = 2)$ düzgün ve $T \sim Beta(\varphi = 2, \zeta = 3)$ beta dağılımına sahip rastgele değişkenler olsunlar. Biçiminde verilen rastgele etki terimli diferensiyel denklemi Laplace VIM ile çözerek olasılık karakteristiğini inceleyiniz.

Çözüm:

Bu problem özelinde Laplace VIM düzeltme fonksiyoneli $\lambda = \gamma(x - \xi)$ için aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] \\ &+ \mathcal{L} \left[\int_0^x [\gamma(x - \xi) [y_n''(\xi) + 2(\tilde{y}_n'(\xi))^2 - 8y_n(\xi) - 2y_n'(\xi) - 8y_n(\xi) \right. \\ &\quad \left. - 2K - 2T^2 - 8KTx - 8K^2x^2 + 8Tx + 8Kx^2 + 4Kx + 2T]] d\xi \right] \\ \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}[\gamma(x)] * [s^2\mathcal{L}[y_n(x)] - sy_n(0) - y_n'(0) + 2\mathcal{L}[(\tilde{y}_n'(x))^2] \\ &\quad - 8\mathcal{L}[y_n(x)] - 2[s\mathcal{L}[y_n(x)] - y_n(0)] - 2K - 2T^2 - 8KTx - 8K^2x^2 \\ &\quad + 8Tx + 8Kx^2 + 4Kx + 2T] \end{aligned}$$

Burada $y_n(x)$ 'e bağılı varyasyon alındığında denklem aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
& \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] \\
&= \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[y_n(x)] \\
&+ \frac{\delta}{\delta y_n} \mathcal{L}[\gamma(x)] \left[s^2 \mathcal{L}[y_n(x)] - s y_n(0) - y_n'(0) + 2 \mathcal{L}[(y_n'(x))^2] \right. \\
&- 8 \mathcal{L}[y_n(x)] - 2[s \mathcal{L}[y_n(x)] - y_n(0)] - 2K - 2T^2 - 8KTX - 8K^2x^2 \\
&+ 8Tx + 8Kx^2 + 4Kx + 2T], \\
&= \mathcal{L}[\delta y_n] + \mathcal{L}[\gamma](s^2 - 2s - 8) \mathcal{L}[\delta y_n], \\
&\Rightarrow \mathcal{L}[\delta y_n][1 + \mathcal{L}[\gamma](s^2 - 2s - 8)] = 0 \Rightarrow \mathcal{L}[\gamma] = -\frac{1}{s^2 - 2s - 8}
\end{aligned}$$

Burada ters Laplace alınırsa,

$$\gamma(x) = -\frac{1}{3}e^x \sinh(3x)$$

bulunur ve denklem düzeltme fonksiyoneline yerine yazılırsa yeni denklem aşağıdaki gibi şekillenir.

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}[y_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[y_n(x)] \\
&+ \mathcal{L} \left[\int_0^x -\frac{1}{3}e^x \sinh(3(x-\xi)) \left[y_n''(\xi) + 2(y_n'(\xi))^2 - 8y_n(\xi) - 2y_n'(\xi) \right. \right. \\
&- 2K - 2T^2 - 8KTX - 8K^2x^2 + 8Tx + 8Kx^2 + 4Kx + 2T \left. \left. \right] d\xi \right] \\
&\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[y_n(x)] \\
&+ \mathcal{L} \left[-\frac{1}{3}e^x \sinh(3x) \right] \mathcal{L} \left[y_n''(x) + 2(y_n'(x))^2 - y_n(x) - 2y_n'(x) - 2K \right. \\
&- 2T^2 - 8KTX - 8K^2x^2 + 8Tx + 8Kx^2 + 4Kx + 2T \left. \right]
\end{aligned}$$

$n = 0$ için

$$y_0 = y(0) + y'(0)x = Kx$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}[y_0] + \mathcal{L}\left[-\frac{1}{3}e^x \sinh(3x)\right] \mathcal{L}[y_0''(x) + 2(y_0'(x))^2 - y_0(x) - 2y_0'(x) - 2K \\ - 2T^2 - 8KTx - 8K^2x^2 + 8Tx + 8Kx^2 + 4Kx + 2T]\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}[Kx]$$

$$\begin{aligned}+ \mathcal{L}\left[-\frac{1}{3}e^x \sinh(3x)\right] \mathcal{L}[2K^2 - Kx - 4K - 2T^2 - 8KTx - 8K^2x^2 \\ + 8Tx + 8Kx^2 + 4Kx + 2T] \\ = \frac{K}{s^2} \\ + \left(-\frac{1}{s^2 - 2s - 8}\right) \left(\frac{2K^2}{s} - \frac{K}{s^2} - \frac{4K}{s} - \frac{2T^2}{s} - \frac{16K^2}{s^3} + \frac{8T}{s^2} + \frac{16K}{s^3} + \frac{4K}{s^2} \right. \\ \left. + \frac{2T}{s}\right)\end{aligned}$$

Burada ters Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned}y_1 = \frac{2K^2}{81} - \frac{2T^2}{9} - \frac{2}{81} \cosh(3x) K^2 + \frac{20}{81} \cosh(3x) K + \frac{2}{9} \cosh(3x) T^2 \\ - \frac{2}{9} \cosh(3x) T - \frac{1}{9} \sinh(3x) K - \frac{8}{27} \sinh(3x) T + \frac{8}{27} \sinh(3x) KT \\ + \frac{2T}{9} - \frac{8TKx}{9} + \frac{8Tx}{9} - \frac{20K}{81} + \frac{4Kx}{3} + \frac{8Kx^2}{9} - \frac{8K^2x^2}{9}\end{aligned}$$

elde edilir.

K rastgele değişkeni düzgün dağılıma sahip ise parametreleri, $K \sim U(a, b)$ ' dir.

Diğer yandan düzgün dağılım için moment üreten fonksiyon,

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

biçiminde verilir. Bu fonksiyon kullanılarak, $K \sim U(a, b)$ rastgele değişkeni için birinci moment ve varyans;

$$E[K] = \frac{a+b}{2}, E[K^2] = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}, E[K^n] = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n a^i b^{n-i}$$

$$Var[K] = \frac{(a-b)^2}{12}, Var[K^2] = \frac{(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)}{5} - \left(\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right)^2$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

$T \sim Beta(\varphi, \zeta)$ beta dağılımına sahip rastgele değişkeni içi beklenen değer ve varyans aşağıda verildiği gibidir (Khaniyev vd., 2017).

$$E(T) = \frac{\varphi}{\varphi+\zeta}, E(T^2) = \frac{\Gamma(\varphi+\zeta)\Gamma(2+\varphi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(2+\varphi+\zeta)}, E(T^4) = \frac{\Gamma(\varphi+\zeta)\Gamma(4+\varphi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(4+\varphi+\zeta)}$$

$$Var(T) = \frac{\varphi\zeta}{(\varphi+\zeta)^2(\varphi+\zeta+1)}, Var(T^2) = \frac{\Gamma(\varphi+\zeta)\Gamma(4+\varphi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(4+\varphi+\zeta)} - \frac{\Gamma(\varphi+\zeta)^2\Gamma(2+\varphi)^2}{\Gamma(\varphi)^2\Gamma(2+\varphi+\zeta)^2}$$

Bu bilgiler kullanılarak K ve T bağımsız rastgele değişkenlerinin $E[KT] = E[K]E[T]$, beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$Var[KT] = Var[K]Var[T] + Var[K](E[T])^2 + Var[T](E[K])^2$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} Var[KT] &= Var[K]Var[T] + Var[K](E[T])^2 + Var[T](E[K])^2 \\ &= \frac{(a-b)^2}{12} \frac{\varphi\zeta}{(\varphi+\zeta)^2(\varphi+\zeta+1)} + \frac{(a-b)^2}{12} \left(\frac{\varphi}{\varphi+\zeta}\right)^2 \\ &\quad + \frac{\varphi\zeta}{(\varphi+\zeta)^2(\varphi+\zeta+1)} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(y_1) &= E \left(\frac{2K^2}{81} - \frac{2T^2}{9} - \frac{2}{81} \cosh(3x) K^2 + \frac{20}{81} \cosh(3x) K + \frac{2}{9} \cosh(3x) T^2 \right. \\
&\quad - \frac{2}{9} \cosh(3x) T - \frac{1}{9} \sinh(3x) K - \frac{8}{27} \sin(3x) T + \frac{8}{27} \sinh(3x) KT \\
&\quad \left. + \frac{2T}{9} - \frac{8TKx}{9} + \frac{8Tx}{9} - \frac{20K}{81} + \frac{4Kx}{3} + \frac{8Kx^2}{9} - \frac{8K^2x^2}{9} \right) \\
&= \frac{2E[K^2]}{81} - \frac{2E[T^2]}{9} - \frac{2}{81} \cosh(3x) E[K^2] + \frac{20}{81} \cosh(3x) E[K] \\
&\quad + \frac{2}{9} \cosh(3x) E[T^2] - \frac{2}{9} \cosh(3x) E[T] - \frac{1}{9} \sinh(3x) E[K] \\
&\quad - \frac{8}{27} \sin(3x) E[T] + \frac{8}{27} \sinh(3x) E[K]E[T] + \frac{2E[T]}{9} - \frac{8E[T]E[K]x}{9} \\
&\quad + \frac{8E[T]x}{9} - \frac{20E[K]}{81} + \frac{4E[K]x}{3} + \frac{8E[K]x^2}{9} - \frac{8E[K^2]x^2}{9} \\
E(y_1) &= \frac{2}{81} \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right) - \frac{2}{9} \left(\frac{\Gamma(\varphi + \zeta)\Gamma(2 + \varphi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(2 + \varphi + \zeta)} \right) \\
&\quad - \frac{2}{81} \cosh(3x) \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right) + \frac{20}{81} \cosh(3x) \left(\frac{a + b}{2} \right) \\
&\quad + \frac{2}{9} \cosh(3x) \left(\frac{\Gamma(\varphi + \zeta)\Gamma(2 + \varphi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(2 + \varphi + \zeta)} \right) - \frac{2}{9} \cosh(3x) \left(\frac{\varphi}{\varphi + \zeta} \right) \\
&\quad - \frac{1}{9} \sinh(3x) \left(\frac{a + b}{2} \right) - \frac{8}{27} \sin(3x) \left(\frac{\varphi}{\varphi + \zeta} \right) \\
&\quad + \frac{8}{27} \sinh(3x) \left(\frac{a + b}{2} \right) \left(\frac{\varphi}{\varphi + \zeta} \right) + \frac{2}{9} \left(\frac{\varphi}{\varphi + \zeta} \right) - \frac{8}{9} \left(\frac{a + b}{2} \right) \left(\frac{\varphi}{\varphi + \zeta} \right) x \\
&\quad + \frac{8}{9} \left(\frac{\varphi}{\varphi + \zeta} \right) x - \frac{20}{81} \left(\frac{a + b}{2} \right) + \left(\frac{a + b}{2} \right) \frac{4x}{3} + \left(\frac{a + b}{2} \right) \frac{8x^2}{9} \\
&\quad - \frac{8}{9} \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3} \right) x^2
\end{aligned}$$

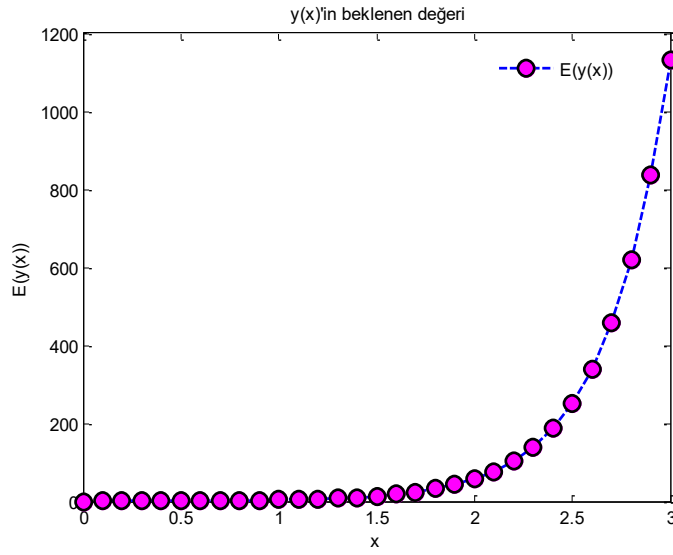
$$\begin{aligned}
Var(y_1) &= Var\left(\frac{2K^2}{81} - \frac{2T^2}{9} - \frac{2}{81}\cosh(3x)K^2 + \frac{20}{81}\cosh(3x)K + \frac{2}{9}\cosh(3x)T^2\right. \\
&\quad \left.- \frac{2}{9}\cosh(3x)T - \frac{1}{9}\sinh(3x)K - \frac{8}{27}\sin(3x)T + \frac{8}{27}\sinh(3x)KT\right. \\
&\quad \left.+ \frac{2T}{9} - \frac{8TKx}{9} + \frac{8Tx}{9} - \frac{20K}{81} + \frac{4Kx}{3} + \frac{8Kx^2}{9} - \frac{8K^2x^2}{9}\right) \\
&= \left(\frac{2}{81}\right)^2 Var(K^2) + \left(\frac{2}{9}\right)^2 Var(T^2) + \left(\frac{2}{81}\cosh(3x)\right)^2 Var(K^2) \\
&\quad + \left(\frac{20}{81}\cosh(3x)\right)^2 Var(K) + \left(\frac{2}{9}\cosh(3x)\right)^2 Var(T^2) \\
&\quad + \left(\frac{2}{9}\cosh(3x)\right)^2 Var(T) + \left(\frac{1}{9}\sinh(3x)\right)^2 Var(K) \\
&\quad + \left(\frac{8}{27}\sin(3x)\right)^2 Var(T) + \left(\frac{8}{27}\sinh(3x)\right)^2 Var(KT) + \left(\frac{2}{9}\right)^2 Var(T) \\
&\quad + \left(\frac{8x}{9}\right)^2 Var(KT) + \left(\frac{8x}{9}\right)^2 Var(T) + \left(\frac{20}{81}\right)^2 Var(K) + \left(\frac{4x}{3}\right)^2 Var(K) \\
&\quad + \left(\frac{8x^2}{9}\right)^2 Var(K) + \left(\frac{8x^2}{9}\right)^2 Var(K^2) \\
&= \left(\frac{2}{81}\right)^2 \left(\frac{(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)}{5} - \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\right)^2\right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{\Gamma(\varphi + \zeta)\Gamma(4 + \varphi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(4 + \varphi + \zeta)} - \frac{\Gamma(\varphi + \zeta)^2\Gamma(2 + \varphi)^2}{\Gamma(\varphi)^2\Gamma(2 + \varphi + \zeta)^2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{81}\cosh(3x)\right)^2 \left(\frac{(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)}{5}\right. \\
&\quad \left.- \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\right)^2\right) + \left(\frac{20}{81}\cosh(3x)\right)^2 \left(\frac{(a - b)^2}{12}\right) \\
&\quad + \left(\frac{2}{9}\cosh(3x)\right)^2 \left(\frac{\Gamma(\varphi + \zeta)\Gamma(4 + \varphi)}{\Gamma(\varphi)\Gamma(4 + \varphi + \zeta)} - \frac{\Gamma(\varphi + \zeta)^2\Gamma(2 + \varphi)^2}{\Gamma(\varphi)^2\Gamma(2 + \varphi + \zeta)^2}\right) + \dots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2}{9} \cosh(3x)\right)^2 \left(\frac{\varphi\zeta}{(\varphi + \zeta)^2(\varphi + \zeta + 1)}\right) + \left(\frac{1}{9} \sinh(3x)\right)^2 \left(\frac{(a-b)^2}{12}\right) \\
& + \left(\frac{8}{27} \sin(3x)\right)^2 \left(\frac{\varphi\zeta}{(\varphi + \zeta)^2(\varphi + \zeta + 1)}\right) \\
& + \left(\frac{8}{27} \sinh(3x)\right)^2 \left(\frac{(a-b)^2}{12} \frac{\varphi\zeta}{(\varphi + \zeta)^2(\varphi + \zeta + 1)}\right) \\
& + \frac{(a-b)^2}{12} \left(\frac{\varphi}{\varphi + \zeta}\right)^2 + \frac{\varphi\zeta}{(\varphi + \zeta)^2(\varphi + \zeta + 1)} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
& + \left(\frac{2}{9}\right)^2 \left(\frac{\varphi\zeta}{(\varphi + \zeta)^2(\varphi + \zeta + 1)}\right) \\
& + \left(\frac{8x}{9}\right)^2 \left(\frac{(a-b)^2}{12} \frac{\varphi\zeta}{(\varphi + \zeta)^2(\varphi + \zeta + 1)} + \frac{(a-b)^2}{12} \left(\frac{\varphi}{\varphi + \zeta}\right)^2\right. \\
& \left. + \frac{\varphi\zeta}{(\varphi + \zeta)^2(\varphi + \zeta + 1)} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) + \left(\frac{8x}{9}\right)^2 \left(\frac{\varphi\zeta}{(\varphi + \zeta)^2(\varphi + \zeta + 1)}\right) \\
& + \left(\frac{20}{81}\right)^2 \left(\frac{(a-b)^2}{12}\right) + \left(\frac{4x}{3}\right)^2 \left(\frac{(a-b)^2}{12}\right) + \left(\frac{8x^2}{9}\right)^2 \left(\frac{(a-b)^2}{12}\right) \\
& + \left(\frac{8x^2}{9}\right)^2 \left(\frac{(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)}{5} - \left(\frac{a^2 + ab + b^2}{3}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

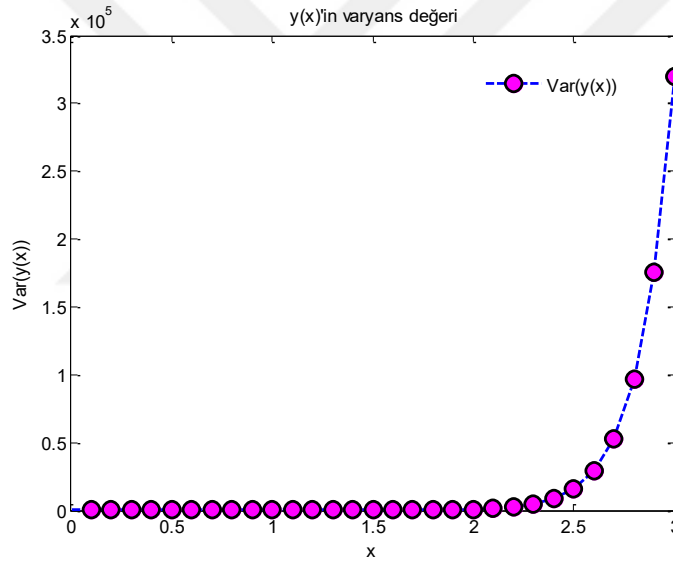
$a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri için beklenen değer ve varyans

$$E(y_1) = -\frac{326}{1215} + \frac{326}{1215} \cosh(3x) + \frac{1}{90} \sinh(3x) - \frac{16}{135} \sin(3x) + \frac{82}{45} x - \frac{20}{27} x^2$$

$$\begin{aligned}
Var(y_1) = & \frac{10289549923495963653569}{1134647698758828451430400} + \frac{18742}{2066715} \cosh(3x)^2 \\
& + \frac{2273}{218700} \sinh(3x)^2 + \frac{64}{18225} \sin(3x)^2 + \frac{1604}{6075} x^2 + \frac{2416}{3645} x^4
\end{aligned}$$



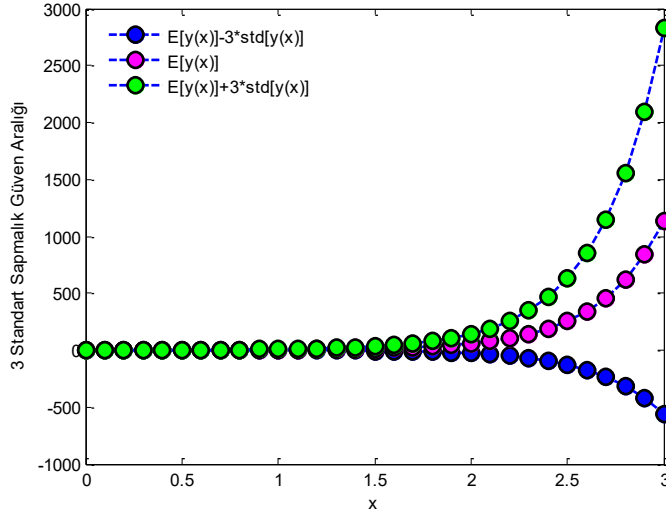
Şekil 9. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri (15) denkleminin çözümünün beklenen değeri



Şekil 10. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri (15) denkleminin çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$[E(y(x)) - 3stdsapma(y(x)), E(y(x)) + 3stdsapma(y(x))]$$



Şekil 11. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri (15) denkleminin çözümünün güven aralıkları

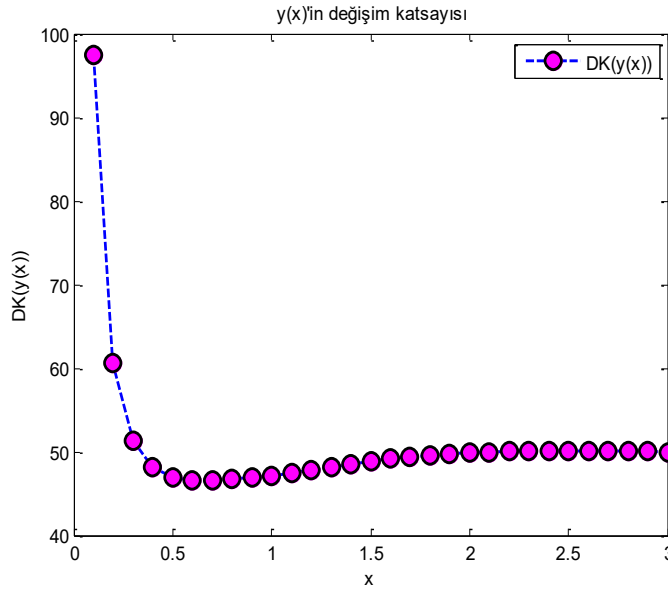
$y(x)$ 'in değişim katsayısı;
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$\begin{aligned} stdsapma[y(x)] &= \sqrt{Var[y(x)]} \\ &= \sqrt{\frac{10289549923495963653569}{1134647698758828451430400} + \frac{18742}{2066715} \cosh(3x)^2 + \frac{2273}{218700} \sinh(3x)^2} \\ &\quad + \frac{64}{18225} \sin(3x)^2 + \frac{1604}{6075} x^2 + \frac{2416}{3645} x^4 \end{aligned}$$

bulunur. Değişim katsayısı aşağıdaki işlem ile formüle edilir.

$$\begin{aligned} D.K &= \frac{stdsapma[y(x)]}{E[y(x)]} \times 100 = \\ &= \sqrt{\frac{10289549923495963653569}{1134647698758828451430400} + \frac{18742}{2066715} \cosh(3x)^2 + \frac{2273}{218700} \sinh(3x)^2 + \frac{64}{18225} \sin(3x)^2 + \frac{1604}{6075} x^2 + \frac{2416}{3645} x^4} \\ &\quad \times \frac{1}{-\frac{326}{1215} + \frac{326}{1215} \cosh(3x) + \frac{1}{90} \sinh(3x) - \frac{16}{135} \sin(3x) + \frac{82}{45} x - \frac{20}{27} x^2} \times 100 \end{aligned}$$

$y(x)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 12. $a = 1, b = 2, \varphi = 2$ ve $\zeta = 3$ özel değerleri (15) denkleminin çözümünün değişim katsayısı

Örnek 4.

$$y^{(4)}(x) = \frac{16}{K} e^{-2x} y^2(x) \quad (16)$$

$$y(0) = K, \quad y'(0) = 2K, \quad y^{(2)}(0) = 4K, \quad y^{(3)}(0) = 8K$$

Biçiminde verilen rastgele diferensiyel denklemde K rastgele etki terimi $K \sim \text{Üstel}(\zeta = 3)$ üstel dağılıma sahip olmak üzere denklemin çözümünü Laplace VIM ile bularak olasılık karakteristiğini inceleyiniz.

Çözüm :

Bu problemin Laplace VIM düzeltme fonksiyoneli $\lambda = \gamma(x - \xi)$ için aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] = \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L} \left[\int_0^x \gamma(x - \xi) \left[y^{(4)}(\xi) - \frac{16}{K} e^{-2\xi} \tilde{y}_n^2(\xi) \right] d\xi \right]$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] + \mathcal{L}\left[\gamma(x) * \left[y_n^{(4)}(x) - \frac{16}{K}e^{-2x}\tilde{y}_n^2(x)\right]\right] \\
&= \mathcal{L}[y_n(x)] \\
&\quad + \mathcal{L}[\gamma(x)] \left[s^4 \mathcal{L}[y_n(x)] - s^3 y_n(0) - s^2 y_n'(0) - s y_n''(0) - s y_n'''(0) \right. \\
&\quad \left. - \mathcal{L}\left[\frac{16}{K}e^{-2x}\tilde{y}_n^2(x)\right] \right]
\end{aligned}$$

Burada $y_n(x)$ e bağlı varyasyon alınırsa, yukarıdaki düzeltme fonksiyoneli aşağıdaki gibi şekillenir.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\delta y_{n+1}] &= \mathcal{L}[\delta y_n] + \mathcal{L}[\gamma](s^4 \mathcal{L}[\delta y_n]) = \mathcal{L}[\delta y_n](1 + s^4 \mathcal{L}[\gamma]) = 0 \\
\Rightarrow 1 + s^4 \mathcal{L}[\gamma] &= 0 \Rightarrow \mathcal{L}[\gamma] = -\frac{1}{s^4}
\end{aligned}$$

Burada ters laplace alındığında sonu,

$$\gamma(x) = -\frac{x^3}{6}$$

bulunur. Bu sonucu düzeltme fonksiyonelinde yerine yazdığımızda yeni bulunan sonu aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[y_{n+1}(x)] &= \mathcal{L}[y_n(x)] - \frac{1}{6} \mathcal{L}\left[\int_0^x (x-\xi)^3 \left[y_n^{(4)}(\xi) - \frac{16}{K}e^{-2\xi}y_n^2(\xi)\right] d\xi\right] \\
&= \mathcal{L}[y_n(x)] - \frac{1}{6} \mathcal{L}[x^3] \mathcal{L}\left[y_n^{(4)}(x) - \frac{16}{K}e^{-2x}y_n^2(x)\right] \\
y_0 &= y(0) + y'(0)x + \frac{1}{2}y''(0)x^2 + \frac{1}{6}y'''(0)x^3 = K + 2Kx + 2Kx^2 + \frac{4}{3}Kx^3
\end{aligned}$$

$n = 1$ alındığında,

$$\mathcal{L}[y_1] = \mathcal{L}\left[K + 2Kx + 2Kx^2 + \frac{4}{3}Kx^3\right] - \frac{1}{6}\mathcal{L}[x^3]\mathcal{L}\left[-\frac{16}{K}e^{-2x}\left(K + 2Kx + 2Kx^2 + \frac{4}{3}Kx^3\right)^2\right]$$

bulunur. Burada ters Laplace alındığında sonuç aşağıdaki gibi bulunur.

$$y_1 = \frac{1}{9}K(-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} + 16e^{-2x}x^6 + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2)$$

K rastgele değişkeni üstel dağılıma sahip ise parametreleri, $X \sim \text{Üstel}(\zeta)$ ' dır. Öte yandan üstel dağılımın moment üreten fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{\zeta}{\zeta - t}; \quad t < \zeta$$

Bu fonksiyon kullanılarak, $K \sim \text{Üstel}(\zeta)$ rastgele değişkenin birinci momenti ve varyansı;

$$E(K) = \frac{1}{\zeta} \quad \text{ve} \quad \text{Var}(K) = \frac{1}{\zeta^2}$$

biçimindedir (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Bu momentler kullanılarak K ve T bağımsız rastgele değişkenlerinin $E[KT] = E[K]E[T]$, beklenen değeri ve varyansı aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned}
E(y_1) &= E\left(\frac{1}{9}K(-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} + 16e^{-2x}x^6 \right. \\
&\quad \left. + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 + 39564e^{-2x}x \right. \\
&\quad \left. + 22968e^{-2x}x^2)\right) \\
&= \frac{1}{9}E[K](-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} \\
&\quad + 16e^{-2x}x^6 + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 \\
&\quad + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2) \\
&= \frac{1}{9\zeta}(-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} \\
&\quad + 16e^{-2x}x^6 + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 \\
&\quad + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2)
\end{aligned}$$

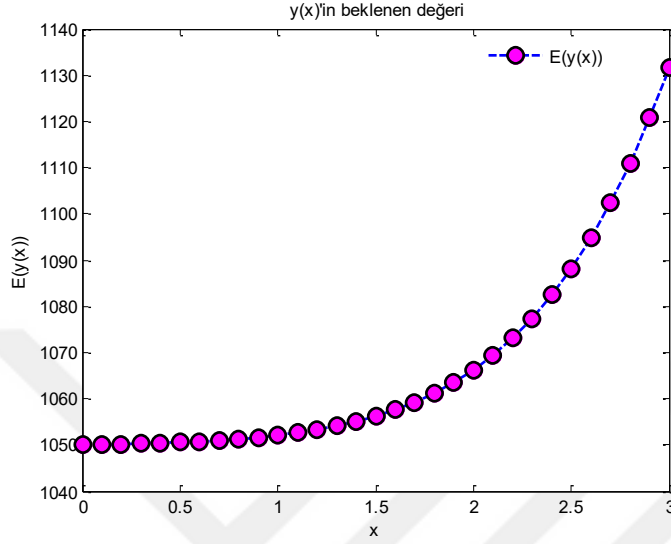
$$\begin{aligned}
Var(y_1) &= Var\left(\frac{1}{9}K(-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} \right. \\
&\quad \left. + 16e^{-2x}x^6 + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 \right. \\
&\quad \left. + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2)\right) \\
&= \frac{1}{81}Var[K](-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} \\
&\quad + 16e^{-2x}x^6 + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 \\
&\quad + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2)^2 \\
&= \frac{1}{81\zeta^2}(-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} \\
&\quad + 16e^{-2x}x^6 + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 \\
&\quad + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2)^2
\end{aligned}$$

$\zeta = 3$ özel değeri için beklenen değer ve varyans

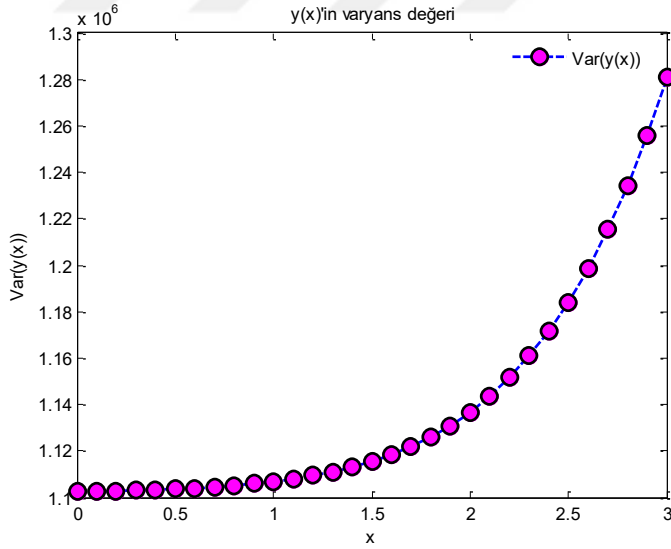
$$\begin{aligned}
E(y_1) &= \frac{1}{27}(-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} + 16e^{-2x}x^6 \\
&\quad + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 + 39564e^{-2x}x \\
&\quad + 22968e^{-2x}x^2)
\end{aligned}$$

ve

$$Var(y_1) = \frac{1}{729} (-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} + 16e^{-2x}x^6 + 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2)^2$$



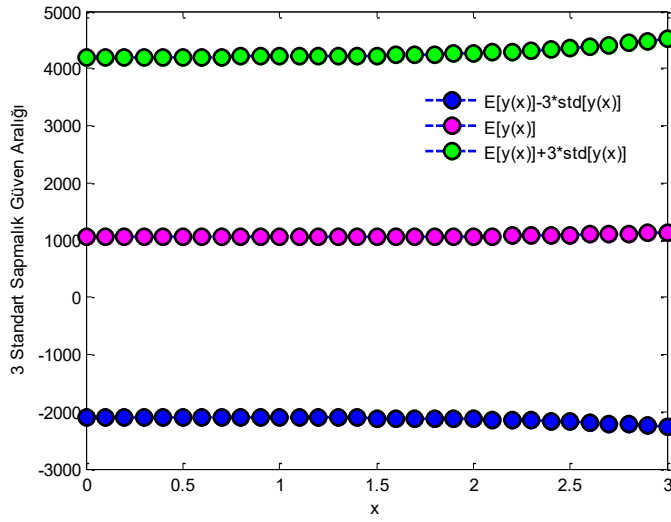
Şekil 13. $\zeta = 3$ özel değeri (16) denkleminin çözümünün beklenen değeri



Şekil 14. $\zeta = 3$ özel değeri (16) denkleminin çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$[E(y(x)) - 3stdsapma(y(x)), E(y(x)) + 3stdsapma(y(x))]$$



Şekil 15. $\zeta = 3$ özel değeri (16) denkleminin çözümünün güven aralıkları

$y(x)$ 'in değişim katsayısı;

varyansın karekökü standart sapmayı verdiğiinden,

$$stdsapma[y(x)] = \sqrt{Var[y(x)]}$$

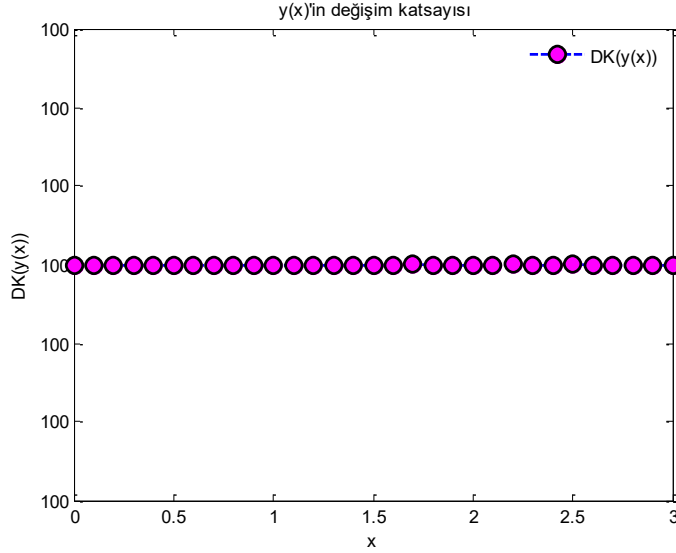
$$= \sqrt{\frac{1}{729} \left(\begin{aligned} &-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} + 16e^{-2x}x^6 \\ &+ 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2 \end{aligned} \right)^2}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise aşağıdaki gibi formüle edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[y(x)]}{E[y(x)]} x 100$$

$$= \frac{\sqrt{\frac{1}{729} \left(\begin{aligned} &-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} + 16e^{-2x}x^6 \\ &+ 7968e^{-2x}x^3 + 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2 \end{aligned} \right)^2}}{\frac{1}{27} \left(\begin{aligned} &-3142 + 23436x - 6804x^2 + 840x^3 + 31491e^{-2x} + 16e^{-2x}x^6 + 7968e^{-2x}x^3 \\ &+ 1764e^{-2x}x^4 + 240e^{-2x}x^5 + 39564e^{-2x}x + 22968e^{-2x}x^2 \end{aligned} \right)} x 100$$

$y(x)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 16. $\zeta = 3$ özel değeri (16) denkleminin çözümlerinin değişim katsayısı

3. CAPUTO KESİR TÜREVLİ RASTGELE DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN LAPLACE VİM İLE ÇÖZÜMLERİ

Tanım 3.0.1 (Caputo Diferensiyel İntegrali)

a, T, α reel sabitler ($\alpha < T$), $n_c = \max(0, -[-\alpha])$ ve $f(t)$, $n_c = 0$ durumunda $[a, T)$ üzerinde integrallenebilir ve $n_c > 0$ iken $[a, T)$ üzerinde n_c -kere türevlenebilir bir fonksiyon olsun. O takdirde Caputo diferensiyel integrali $[a, T)$ için aşağıdaki gibi tanımlanır (Bassi, N. M. ve Ismail, A., 2022).

$${}^c D_a^\alpha f(t) = I_a^{n_c - \alpha} \left[\frac{d^{n_c} f(t)}{dt^{n_c}} \right]$$

3.1. Revize Edilmiş Genel Lagrange Çarpanı

Bu bölümde iterasyon fonksiyonundaki Lagrange çarpanı revize edilmiş bir şekilde yeniden tanımlanmalıdır. Dolayısıyla ilk olarak cebirsel bir denklemdeki Lagrange çarpanının orijinal fikrine yoğunlaşalım.

$f(x) = 0$ cebirsel denkleminin çözümü için aşağıdaki yineleme formülü oluşturulabilir.

$$x_{n+1} = x_n + \lambda f(x_n) \quad (17)$$

Ekstrem durumlar için optimallik koşulu $\frac{\delta x_{n+1}}{\delta x_n} = 0$ şöyle açıklanabilir:

$$\lambda = -\frac{1}{f'(x_n)} \quad (18)$$

Burada δ klasik varyasyon operatörüdür. Diğer yandan (17) ve (18) denklemlerini kullanarak x_0 başlangıç koşullu bir başlangıç değer problemi oluşturmak mümkündür. Ek olarak bu problemde x_{n+1} in yaklaşık çözümü bulunabilir, yani

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad f'(x_n) \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (19)$$

Bu algoritma Newton-Raphson yöntemi olarak bilinir ve ikinci derece yakınsamaya sahiptir.

Bu fikir Lagrange çarpanını bulmak için genişletilebilir. İlk olarak aşağıda genel lineer olmayan bir diferensiyel denklem sistemi tanımlayalım.

$$\frac{d^m u(t)}{dt^m} + R[u(t)] + N[u(t)] = g(t) \quad (20)$$

Bu denklemde R lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(t)$ ise bilinen bir fonksiyondur. Şimdi (20) denklemine Laplace dönüşümü uygularsak, denklemin lineer kısmı aşağıdaki gibi cebirsel bir denkleme dönüştürülebilir.

$$s^m u(s) - u^{(m-1)}(0) - \dots - s^{(m-1)} u(0) + \mathcal{L}[R[u]] + \mathcal{L}[N[u]] - \mathcal{L}[g(t)] = 0 \quad (21)$$

Burada

$$u(s) = \mathcal{L}[u(t)] = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt$$

dir.

Denklem (21) in iterasyon formülü, Lagrange çarpanını içeren asıl iteratif denklemin oluşturulmasında kullanılabilir.

$$u_{n+1}(s) = u_n(s) + \lambda(s)[s^m u(s) - u^{(m-1)}(0) - \dots - s^{(m-1)} u(0) + \mathcal{L}[R[u_n]] + \mathcal{L}[N[u_n]] - \mathcal{L}[g(t)]] \quad (22)$$

$\mathcal{L}[R[u_n] + N[u_n]]$ terimlerini kısıtlı terim olarak varsayarsak Lagrange çarpanı şu şekilde türetilebilir:

$$\begin{aligned}\delta u_{n+1}(s) &= \delta u_n(s) + s^m \delta \lambda(s) u_n(s) \\ 0 &= 1 + s^m \lambda(s) \Rightarrow \lambda(s) = -\frac{1}{s^m}\end{aligned}\tag{23}$$

Denklem (23) ve ters Laplace dönüşümü ile (22) denklemindeki iterasyon formülü şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned}u_{n+1}(t) &= u_n(t) \\ &\quad - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^m} [s^m u_n(s) - u^{(m-1)}(0) - \dots - s^{(m-1)} u(0) \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}(R[u_n] + N[u_n] - g(t))] \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^m} u^{(m-1)}(0) + \dots + \frac{u(0)}{s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{s^m} \mathcal{L}[R[u_n] + N[u_n] - g(t)] \right]\end{aligned}\tag{24}$$

Burada $u_0(t)$ başlangıç iterasyonu şöyle belirlenebilir:

$$\begin{aligned}u_0(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^m} u^{(m-1)}(0) + \dots + \frac{u(0)}{s} \right] \\ &= u(0) + u'(0)t + \dots + \frac{u^{(m-1)}(0)t^{m-1}}{(m-1)!}\end{aligned}\tag{25}$$

Sonuç olarak $u(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(t)$ bulunur.

3.2. Caputo Kesirli Diferensiyel Denklemlerin Çözümü İçin Laplace Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Aşağıdaki kesirli diferensiyel denklemi ele alalım.

$$\frac{du}{dt} + {}^C_0D_t^\alpha u = g(t, u), \quad 0 < t, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (26)$$

Burada ${}^C_0D_t^\alpha$ Caputo diferensiyel integralini belirtir ve varyasyonel iterasyon formülü şu şekilde verilir:

$$u_{n+1}(t) = u_n + \int_0^t \lambda(t, \tau) \left(\frac{du_n}{d\tau} + {}^C_0D_\tau^\alpha u_n - g(\tau, u_n) \right) d\tau \quad (27)$$

Burada ${}^C_0D_t^\alpha u$ Caputo türevi ve $g(\tau, t)$ lineer olmayan terimi belirtmektedir.

$$\begin{aligned} & {}^C_0D_t^\alpha u + R[u] + N[u] = g(t) \\ u^{(k)}(0) &= a_k, \quad 0 < t, \quad 0 < \alpha, \quad m = \alpha + 1, \quad k = 0, 1, \dots, m-1 \end{aligned} \quad (28)$$

Takiben VIM' in değiştirilmiş bir varyasyonunu ele alalım. Ek olarak ${}^C_0D_t^\alpha u$ teriminin Laplace dönüşümü tanımlıdır, dolayısıyla

$$\mathcal{L}[{}^C_0D_t^\alpha u] = s^\alpha u(s) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) s^{\alpha-1-k}, \quad m-1 < \alpha \leq m \quad (29)$$

olur.

Yukarıdaki Laplace dönüşümünü tanım (28) in her iki tarafına uyguladığımızda, (28) in iterasyon formülü şu şekilde elde edilir:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(s) &= u_n(s) \\ &+ \lambda(s) \times \left[s^\alpha u_n(s) - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) s^{\alpha-1-k} + \mathcal{L}[R[u_n] + N[u_n] - g(t)] \right] \end{aligned}$$

Takiben daha önce tanımladığımız Lagrange çarpanı ile birlikte, $\lambda(s) = -\frac{1}{s^\alpha}$ için denklem aşağıdaki gibi şekillenir:

$$u_{n+1}(t) = u_n(t)$$

$$\begin{aligned} & - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} \left[s^\alpha u_n(s) \right. \right. \\ & \left. \left. - \sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) s^{\alpha-1-k} + \mathcal{L}[R[u_n] + N[u_n] - g(t)] \right] \right] \\ & = \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) s^{\alpha-1-k} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[R[u_n] + N[u_n] - g(t)] \right] \end{aligned}$$

$$m - 1 < \alpha \leq m \quad (30)$$

Buradan

$$\begin{aligned} u_0(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\sum_{k=0}^{m-1} u^{(k)}(0) s^{\alpha-1-k} \right] \\ &= u(0) + u'(0) + \dots + \frac{u^{(m-1)}(0) t^{m-1}}{(m-1)!} \end{aligned} \quad (31)$$

bulunur. Şimdi yukarıdaki VIM' i Caputo kesirli diferensiyel denklemlere uygulayalım.

3.3.Laplace Varyasyonel İterasyon Yönteminin Caputo Kesir Türevli Diferensiyel Denklemlere Uygulaması

Bu bölümde başlangıç koşulları yada katsayıları rastgele olan Caputo Kesir Türevli adi diferensiyel denklem ve diferensiyel denklem sisteminin çözümleri için Laplace varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılarak dört adet örnek çözülmüştür.

Örnek 5:

$$D^\alpha y + 4y = 0, \quad y(0) = K, \quad y'(0) = T, \quad 0 < \alpha < 2 \quad (32)$$

Lineer başlangıç değer problemi verilsin. $K \sim U(a = 2, b = 5)$, $T \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 2)$, K düzgün dağılıma ve T normal dağılıma sahip etki terimleri olmak üzere LVIM ile rastgele diferensiyel denklemin çözümünü bulup olasılık karakteristiğini inceleyiniz.

Çözüm:

Denkleme LVIM uygulanırsa,

$$y_{n+1}(s) = y_n(s) + \lambda(s^\alpha y_n(s) - y(0)s^{\alpha-1} - y'(0)s^{\alpha-2}) + 4\mathcal{L}[y_n(t)]$$

$\lambda(s) = -\frac{1}{s^\alpha}$ olmak üzere, bu denklemin yaklaşık çözümü aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= y_n(t) - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^\alpha}(s^\alpha y_n(s) - y(0)s^{\alpha-1} - y'(0)s^{\alpha-2}) + 4\mathcal{L}[y_n(t)]\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha}\mathcal{L}[y_n(t)]\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha}\mathcal{L}[y_n(t)]\right] \\ y_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha}\mathcal{L}[y_0(t)]\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4K}{s^{\alpha+1}}\right] = K + Tt - \frac{4Kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha}\mathcal{L}[y_1(t)]\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha}\mathcal{L}\left[K + Tt - \frac{4Kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right]\right] \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha}\left(\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4K}{\Gamma(\alpha+1)}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}\right)\right], \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4K}{s^{\alpha+1}} - \frac{4T}{s^{\alpha+2}} + \frac{16K}{s^{2\alpha+1}}\right], \\ y_2(t) &= K + Tt - \frac{4Kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{4Tt^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{16Kt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\ y_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha}\mathcal{L}[y_2(t)]\right] \\ y_3(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha}\mathcal{L}\left[K + Tt - \frac{4Kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{4Tt^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{16Kt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\right]\right] \end{aligned}$$

$$y_3(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4}{s^\alpha} \left(\frac{K}{s} + \frac{T}{s^2} - \frac{4K}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}} - \frac{4T\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+2)s^{\alpha+2}} + \frac{16K\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(2\alpha+1)s^{2\alpha+1}} \right) \right]$$

Burada gerekli sadeleştirmeler yapıp ters Laplace işlemi yapıldığında sonuç aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} y_3(t) &= K + Tt - \frac{4Kt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{4Tt^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{16Kt^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \frac{16Tt^{2\alpha+1}}{\Gamma(2\alpha+2)} - \frac{64Kt^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} , \\ &= K \left(1 - \frac{4t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{16t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{64t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} \right) \\ &\quad + Tt \left(1 - \frac{4t^\alpha}{\Gamma(\alpha+2)} + \frac{16t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+2)} \right) \end{aligned}$$

Burada $n \rightarrow \infty$ giderken $y_n(t)$ hızlı bir şekilde tam çözüme yaklaşır. Dolayısıyla bu limit sonucunda tam çözüm aşağıdaki gibi bulunur.

$$y(t) = KE_{\alpha,1}(-4t^\alpha) + TtE_{\alpha,2}(-4t^\alpha)$$

K rastgele değişkeni düzgün dağılıma sahip olduğunda parametreleri, $X \sim U(a, b)$ ' dir. Öte yandan düzgün dağılım için moment üreten fonksiyon aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$$

Moment üreten fonksiyon kullanılarak, $K \sim U(a, b)$ rastgele değişkenin birinci momenti ve varyansı;

$$E[K] = \frac{a+b}{2}, Var[K] = \frac{(a-b)^2}{12}$$

bulunur.

T rastgele değişkeni normal dağılıma sahip ise parametreleri $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımın

$$M_T(t) = E[e^{tT}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$$

moment üreten fonksiyonu kullanılarak $T \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeninin birinci, ikinci momentleri;

$$E[T] = \mu, E[T^2] = \mu^2 + \sigma^2$$

ve varyansı,

$$Var[T] = \sigma^2$$

bulunur.

Bu momentlerden faydalanarak K ve T bağımsız rastgele değişkenlerinin $E[KT] = E[K]E[T]$ beklenen değerleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E[y(t)] = E[KE_{\alpha,1}(-4t^\alpha) + tE_{\alpha,2}(-4t^\alpha)]$$

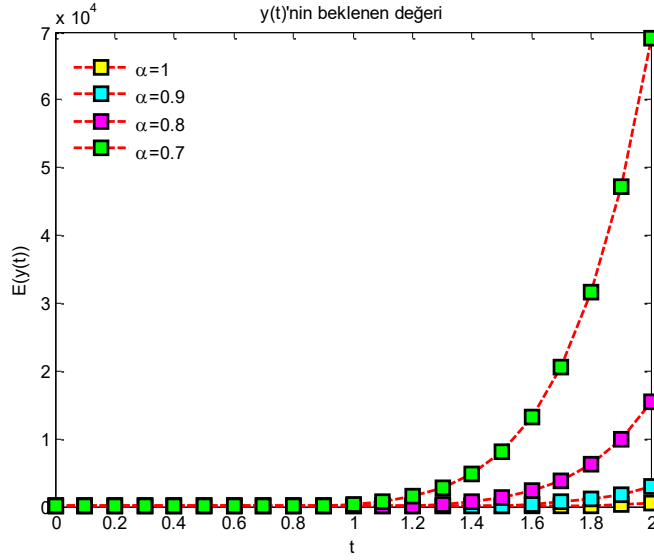
$$E[y(t)] = E_{\alpha,1}(-4t^\alpha)E(K) + tE_{\alpha,2}(-4t^\alpha)E(T)$$

$$E[y(t)] = \frac{E_{\alpha,1}(-4t^\alpha)(a+b)}{2} + tE_{\alpha,2}(-4t^\alpha)\mu$$

$a = 2, b = 5, \mu = 3$ özel değerleri için beklenen değer,

$$E[y(t)] = \frac{7E_{\alpha,1}(-4t^\alpha)}{2} + 3tE_{\alpha,2}(-4t^\alpha)$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 17. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $a = 2, b = 5, \mu = 3$ özel değerleri (32) denkleminin çözümünün beklenen değeri

$$Var[y(t)] = Var[KE_{\alpha}(-4t)^{\alpha} + TtE_{\alpha,2}(-4t^{\alpha})]$$

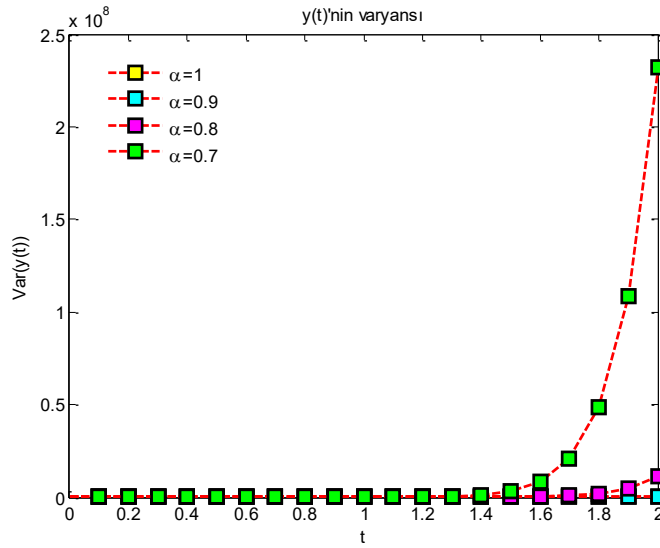
$$Var[y(t)] = (E_{\alpha,1}(-4t^{\alpha}))^2 Var[K] + [E_{\alpha,2}(-4t^{\alpha})]^2 Var[T]$$

$$Var[y(t)] = \frac{(E_{\alpha,1}(-4t^{\alpha}))^2 (a-b)^2}{12} + [E_{\alpha,2}(-4t^{\alpha})]^2 \sigma^2$$

$a = 2, b = 5, \sigma^2 = 2$ özel değerleri için varyans,

$$Var[y(t)] = \frac{(E_{\alpha,1}(-4t^{\alpha}))^2 3}{4} + 2[E_{\alpha,2}(-4t^{\alpha})]^2$$

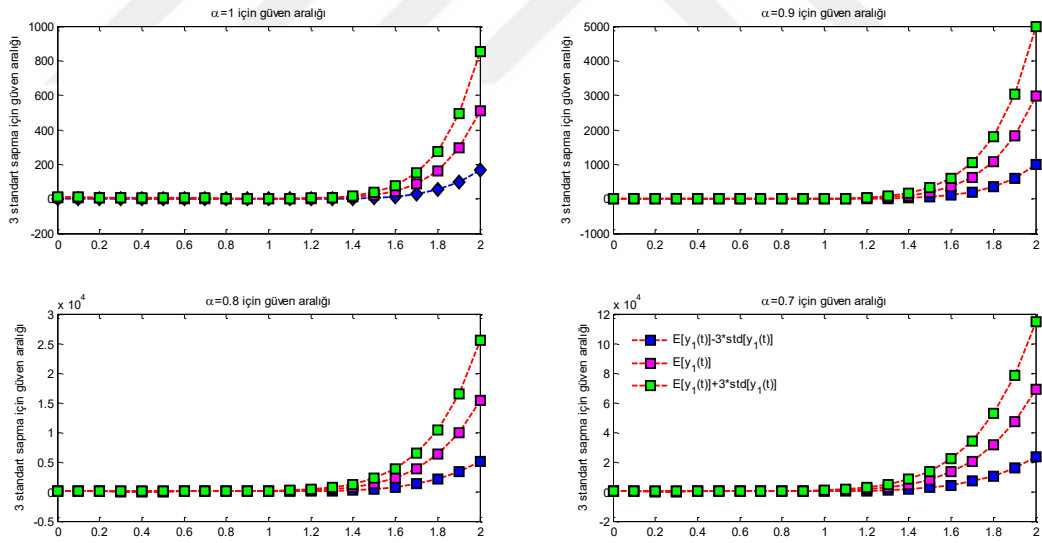
şeklinde hesaplanır.



Şekil 18. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $a = 2, b = 5, \sigma^2 = 2$ özel değerleri (32) denkleminin çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$[E(y(t)) - 3stdsapma(y(t)), E(y(t)) + 3stdsapma(y(t))]$$



Şekil 19. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $a = 2, b = 5, \mu = 3, \sigma^2 = 2$ özel değerleri (32) denkleminin çözümünün güven aralıkları

Örnek 6:

$$D^\alpha y + y^2 - 1 = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad y(0) = K \quad (33)$$

Biçiminde verilen kesir türevli rastgele diferensiyel denklemde K etki terimi üstel dağılıma sahip $K \sim \text{Üstel}(\mu = 2)$ olsun. Bu denklemin çözümünü LVIM kullanmak suretiyle bulup olasılık karakteristiğini inceleyiniz.

Çözüm:

Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$y_{n+1}(s) = y_n(s) + \lambda \left(s^\alpha y_n(s) - y(0)s^{\alpha-1} + \mathcal{L} \left[y_n^2(t) - \frac{1}{s} \right] \right), \quad \lambda(s) = -\frac{1}{s^\alpha}$$

bulunur.

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} (s^\alpha y_n(s) - y(0)s^{\alpha-1} + \mathcal{L}[y_n^2(t)] - \frac{1}{s}) \right], n = 1, 2, \dots$$

$$y(0) = K,$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[y_0^2(t)] + \frac{1}{s^{\alpha+1}} \right] = K + \frac{(1-K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)},$$

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[y_1^2(t)] + \frac{1}{s^{\alpha+1}} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L} \left[K^2 + \frac{2K(1-K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{(1-K^2)^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2} \right] + \frac{1}{s^{\alpha+1}} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{K^2}{s^{\alpha+1}} - \frac{2K(1-K^2)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{2\alpha+1}} - \frac{(1-K^2)^2}{\Gamma(\alpha+1)^2} \frac{\Gamma(2\alpha+1)}{s^{3\alpha+1}} + \frac{1}{s^{\alpha+1}} \right], \end{aligned}$$

$$y_2(t) = K + \frac{(1-K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} - \frac{2K(1-K^2)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{(1-K^2)^2 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}$$

olarak bulunur.

K rastgele değişkeni üstel dağılıma sahipse moment üreten fonksiyonu kullanılarak,

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = \frac{\mu}{\mu - t}; t < \lambda$$

$$\begin{aligned} E[K] &= \frac{1}{\mu}, E[K^2] = \frac{2}{\mu^2}, E[K^3] = \frac{6}{\mu^3}, E[K^4] = \frac{24}{\mu^4}, E[K^5] = \frac{120}{\mu^5}, E[K^6] \\ &= \frac{720}{\mu^6}, E[K^7] = \frac{7!}{\mu^7}, E[K^8] = \frac{8!}{\mu^8} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ eşitliğinden;

$$Var[K] = \frac{1}{\mu^2}, Var[K^2] = \frac{20}{\mu^4}, Var[K^3] = \frac{684}{\mu^6}, Var[K^4] = \frac{39744}{\mu^8}$$

olarak bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

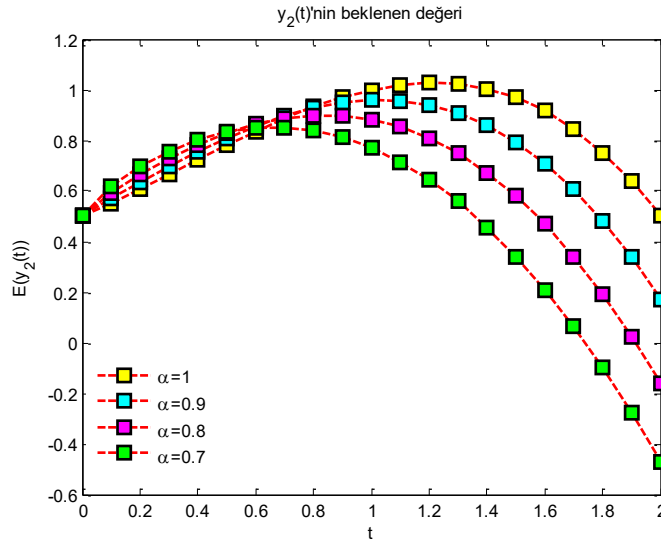
Bu değerlerden faydalanarak K ve T bağımsız rastgele değişkenlerinin $E[KT] = E[K]E[T]$ beklenen değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$\begin{aligned} E[y_2(t)] &= E \left[K + \frac{(1 - K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{2K(1 - K^2)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{(1 - K^2)^2 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right] \\ E[y_2(t)] &= E(K) + \frac{(1 - E(K^2))t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(2E(K) - 2E(K^3))t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ &\quad - \frac{(1 - 2E(K^2) + E(K^4))t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\ E[y_2(t)] &= \frac{1}{\mu} + \frac{\left(1 - \frac{2}{\mu^2}\right)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\left(\frac{2}{\mu} - \frac{12}{\mu^3}\right)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{\left(1 - \frac{4}{\mu^2} + \frac{24}{\mu^4}\right)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \end{aligned}$$

$\mu = 2$ özel değerleri için beklenen değer,

$$E[y_2(t)] = \frac{1}{2} + \frac{\left(1 - \frac{2}{2^2}\right)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{\left(\frac{2}{2} - \frac{12}{2^3}\right)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{\left(1 - \frac{4}{2^2} + \frac{24}{2^4}\right)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 20. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2$ özel değerleri (33) denkleminin çözümünün beklenen değeri

$$Var[y_2(t)] = Var \left[K + \frac{(1 - K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{2K(1 - K^2)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{(1 - K^2)^2 t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right]$$

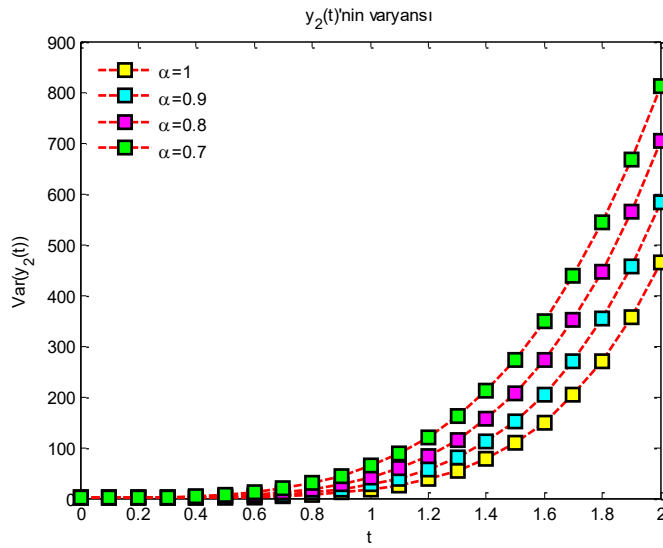
$$Var[y_2(t)] = Var(K) + \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 Var(K^2) + 4 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 (Var(K) + Var(K^3)) \\ + \left(\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right)^2 (4Var(K^2) + Var(K^4))$$

$$Var[y_2(t)] = \frac{1}{\mu^2} + \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 \frac{20}{\mu^4} + 4 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \left(\frac{1}{\mu^2} + \frac{684}{\mu^6} \right) \\ + \left(\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right)^2 \left(\frac{80}{\mu^4} + \frac{39744}{\mu^8} \right)$$

$\mu = 2$ özel değerleri için varyans,

$$Var[y_2(t)] = \frac{1}{2^2} + \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 \frac{20}{2^4} + 4 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \left(\frac{1}{2^2} + \frac{684}{2^6} \right) \\ + \left(\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right)^2 \left(\frac{80}{2^4} + \frac{39744}{2^8} \right)$$

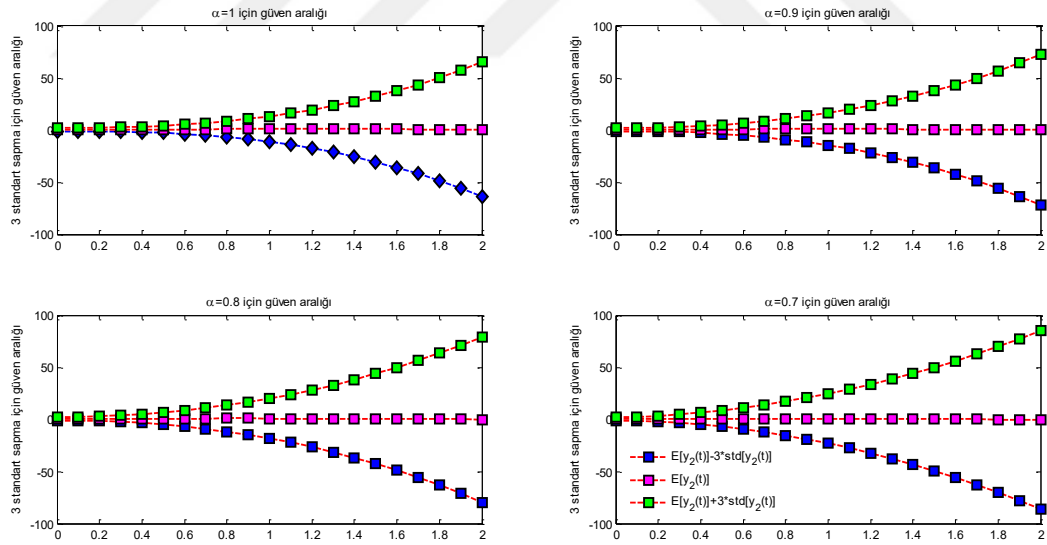
şeklinde hesaplanır.



Şekil 21. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2$ özel değerleri (33) denkleminin çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$[E(y_2(t)) - 3stdsapma(y_2(t)), E(y_2(t)) + 3stdsapma(y_2(t))]$$



Şekil 22. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\mu = 2$ özel değerleri (33) denkleminin çözümünün güven aralıkları

Örnek 7

$$D^\alpha y + y - y^2 = 0, \quad y(0) = K \quad (34)$$

Biçiminde verilen rastgele kesir türevli rastgele diferensiyel denklemde K rastgele etki terimi gamma dağılımına sahip $K \sim \text{Gamma}(u = 2, v = \frac{1}{2})$ olsun. Buna göre denklemin çözümünü LVIM yöntemi yardımıyla elde ederek, bulunan çözümün olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

Denklemin her iki tarafına laplace dönüşümü uygulandığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$y_{n+1}(s) = y_n(s) + \lambda(s^\alpha y_n(s) - y(0)s^{\alpha-1} + \mathcal{L}[y_n(t) - y_n^2(t)]), \quad \lambda(s) = -\frac{1}{s^\alpha}$$

Burada ters laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} y_{n+1}(t) &= y_n(t) - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\alpha} (s^\alpha y_n(s) - y(0)s^{\alpha-1} + \mathcal{L}[y_n(t) - y_n^2(t)]) \right], \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[y_n(t) - y_n^2(t)] \right], \quad y_0(t) = K, \end{aligned}$$

$$y_1(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[K - K^2] \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{1}{s^{\alpha+1}} (K - K^2) \right] = K - \frac{(K - K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[y_1(t) - y_1^2(t)] \right], \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{K}{s^{\alpha+1}} \mathcal{L} \left[K - \frac{(K - K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - K^2 + \frac{2K(K - K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} - \frac{(K - K^2)^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2} \right] \right] \\ y_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{K}{s} - \frac{K}{s^{\alpha+1}} + \frac{K - K^2}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{2\alpha+1}} + \frac{K^2}{s^{\alpha+1}} - \frac{2K(K - K^2)\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)s^{2\alpha+1}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(K - K^2)^2 \Gamma(2\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)^2 s^{3\alpha+1}} \right] \end{aligned}$$

Burada ters laplace dönüşümü uygulanıp gerekli işlemler yapıldığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$y_2(t) = K + \frac{(K - K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(K - K^2)(1 - 2K)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(K - K^2)^2\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)}$$

olarak bulunur.

K rastgele değişkeni gamma dağılımına sahip olduğunda parametreleri, $K \sim \text{Gamma}(u, v)$ dir. Gamma dağılımının moment üreten fonksiyonunu kullanarak

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = \left(\frac{v}{v-t}\right)^u$$

ifadesi elde edilir. $K \sim \text{Gamma}(u, v)$ rastgele değişkeni için birinci moment ve varyans;

$$E[K] = \frac{u}{v}, \quad E[K^2] = \frac{u^2}{v^2} + \frac{u}{v^2}, \quad E[K^3] = \frac{u^3}{v^3} + \frac{3u^2}{v^3} + \frac{2u}{v^3},$$

$$E[K^4] = \frac{u^4}{v^4} + \frac{6u^3}{v^4} + \frac{11u^2}{v^4} + \frac{6u}{v^4}$$

$$\text{Var}[K] = \frac{u}{v^2}, \quad \text{Var}[K^2] = \frac{2u(2u^2 + 5u + 3)}{v^4},$$

$$\text{Var}[K^3] = \frac{3u(3u^4 + 24u^3 + 71u^2 + 90u + 40)}{v^6}$$

$$\text{Var}[K^4] = \frac{8u(2u^6 + 33u^5 + 227u^4 + 822u^3 + 1625u^2 + 1629u + 630)}{v^8}$$

biçimindedir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

Bu bilgilerden faydalananarak K ve T bağımsız rastgele değişkenlerinin $E[KT] = E[K]E[T]$ beklenen değerleri aşağıdaki gibi bulunabilir.

$$E[y_2(t)] = E \left[K + \frac{(K - K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(K - K^2)(1 - 2K)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(K - K^2)^2\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)} \right]$$

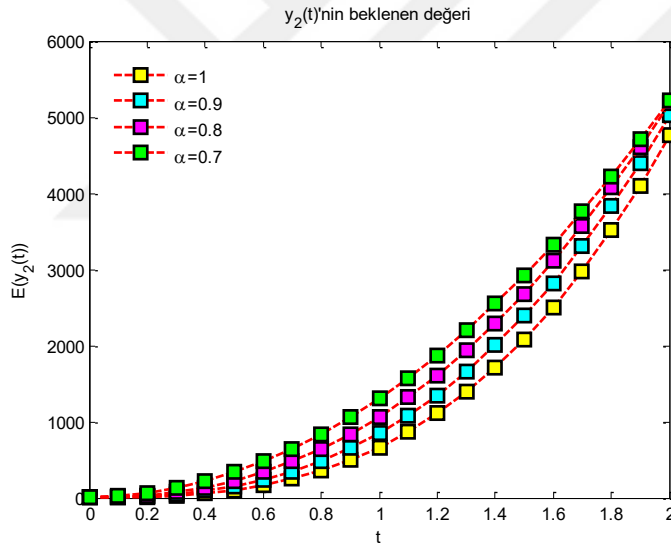
$$\begin{aligned} E[y_2(t)] = & E(K) + \frac{(E(K) - E(K^2))t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(E(K) - 3E(K^2) + 2E(K^3))t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ & + \frac{(E(K^2) - 2E(K^3) + E(K^4))\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E[y_2(t)] \\
&= \frac{u}{v} + \frac{\left(\frac{u}{v} - \left(\frac{u^2}{v^2} + \frac{u}{v^2}\right)\right)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\left(\frac{u}{v} - 3\left(\frac{u^2}{v^2} + \frac{u}{v^2}\right) + 2\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{3u^2}{v^3} + \frac{2u}{v^3}\right)\right)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\
&+ \frac{\left(\left(\frac{u^2}{v^2} + \frac{u}{v^2}\right) - 2\left(\frac{u^3}{v^3} + \frac{3u^2}{v^3} + \frac{2u}{v^3}\right) + \left(\frac{u^4}{v^4} + \frac{6u^3}{v^4} + \frac{11u^2}{v^4} + \frac{6u}{v^4}\right)\right)\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

$u = 2$ ve $v = \frac{1}{2}$ özel değerleri için beklenen değer,

$$E[y_2(t)] = 4 - \frac{20t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{316t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{1560\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)}$$

şeklinde hesaplanır.



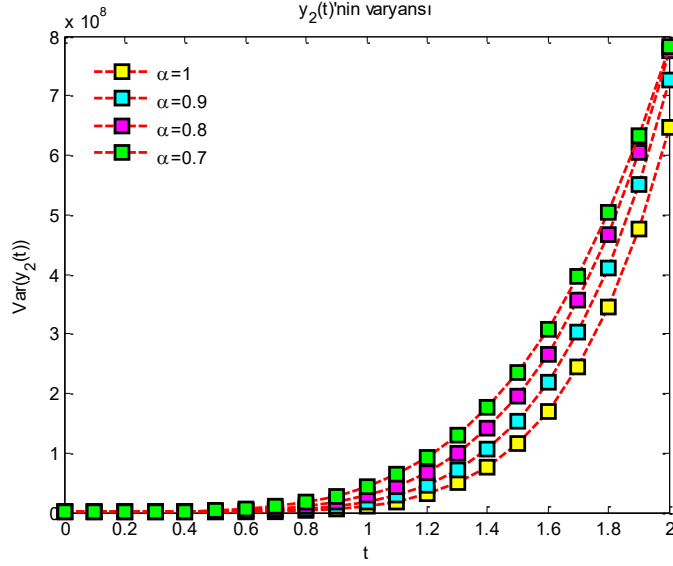
Şekil 23. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $u = 2, v = \frac{1}{2}$ özel değerleri (34) denkleminin çözümünün beklenen değeri

$$\begin{aligned}
& Var[y_2(t)] \\
&= Var \left[K + \frac{(K - K^2)t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{(K - K^2)(1 - 2K)t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} + \frac{(K - K^2)^2\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)} \right] \\
&= Var(K) + \left(Var(K) + Var(K^2) \right) \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 \\
&\quad + \left(Var(K) + 9Var(K^2) + 4Var(K^3) \right) \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \\
&\quad + \left(Var(K^2) + 4Var(K^3) + Var(K^4) \right) \left(\frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)} \right)^2 \\
&= \frac{u}{v^2} + \left(\frac{u}{v^2} + \frac{2u(2u^2 + 5u + 3)}{v^4} \right) \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{u}{v^2} + \frac{18u(2u^2 + 5u + 3)}{v^4} \right. \\
&\quad \left. + \frac{12u(3u^4 + 24u^3 + 71u^2 + 90u + 40)}{v^6} \right) \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{2u(2u^2 + 5u + 3)}{v^4} + \frac{12u(3u^4 + 24u^3 + 71u^2 + 90u + 40)}{v^6} \right. \\
&\quad \left. + \frac{8u(2u^6 + 33u^5 + 227u^4 + 822u^3 + 1625u^2 + 1629u + 630)}{v^8} \right) \left(\frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)} \right)^2
\end{aligned}$$

$u = 2, v = \frac{1}{2}$ özel değerleri için varyans,

$$\begin{aligned}
Var[y_2(t)] &= 8 + 1360 \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right)^2 + 1154960 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right)^2 \\
&\quad + 90355016 \left(\frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)} \right)^2
\end{aligned}$$

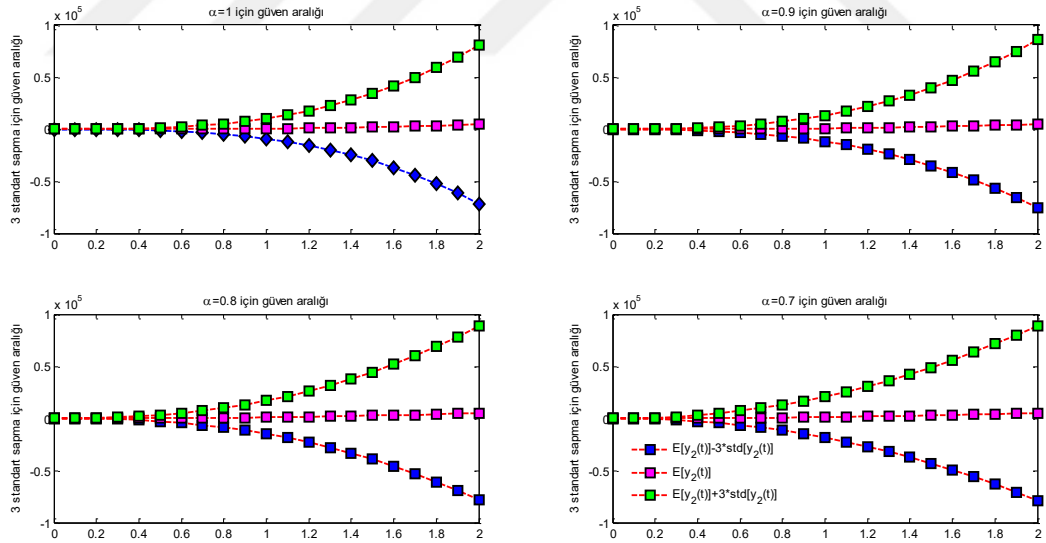
şeklinde hesaplanır.



Şekil 24. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $u = 2, v = \frac{1}{2}$ özel değerleri (34) denkleminin çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$[E(y_2(t)) - 3stdsapma(y_2(t)), E(y_2(t)) + 3stdsapma(y_2(t))]$$



Şekil 25. $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $u = 2, v = \frac{1}{2}$ özel değerleri (34) denkleminin çözümünün güven aralıkları

Örnek 8 Aşağıda rastgele Caputo kesirli homojen olmayan denklem sistemi veriliyor.

$$\begin{cases} D^\xi u_1 = 2u_3 - \sin(2t), u_1(0) = A \\ D^\xi u_2 = 2u_3 - 2Ae^{2t}, u_2(0) = 0, 0 < \xi \leq 1 \\ D^\xi u_3 = 2u_1 - 2u_2, u_3(0) = A + B \end{cases} \quad (35)$$

A ve B rastgele etki terimleri sırasıyla düzgün ve normal dağılımına sahip $A \sim U(\alpha = 2, \beta = 5)$ ve $B \sim N(\mu = 4, \sigma^2 = 1)$ rastgele değişkenler olsunlar. Buna göre denklemin çözümünü LVIM yöntemi yardımıyla elde ederek, bulunan çözümün olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

Denklemin her iki tarafına Laplace dönüşümü uygulandığında aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\begin{aligned} u_{1,n+1}(s) &= u_{1,n}(s) + \lambda(s^\xi u_{1,n}(s) - u_1(0)s^{\xi-1} + \mathcal{L}[u_{1,n}(t) - 2u_{3,n}(t) + \sin(2t)]), \\ u_{2,n+1}(s) &= u_{2,n}(s) + \lambda(s^\xi u_{2,n}(s) - u_2(0)s^{\xi-1} + \mathcal{L}[u_{2,n}(t) - 2u_{3,n}(t) + 2Ae^{2t}]), \\ u_{3,n+1}(s) &= u_{3,n}(s) + \lambda(s^\xi u_{3,n}(s) - u_3(0)s^{\xi-1} + \mathcal{L}[u_{3,n}(t) - 2u_{1,n}(t) + 2u_{2,n}(t)]), \\ \lambda(s) &= -\frac{1}{s^\xi} \end{aligned}$$

Burada ters laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\begin{aligned} u_{1,n+1}(t) &= u_{1,n}(t) \\ &\quad - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\xi} (s^\xi u_{1,n}(s) - u_1(0)s^{\xi-1} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}[u_{1,n}(t) - 2u_{3,n}(t) + \sin(2t)]) \right], \\ u_{2,n+1}(t) &= u_{2,n}(t) \\ &\quad - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\xi} (s^\xi u_{2,n}(s) - u_2(0)s^{\xi-1} + \mathcal{L}[u_{2,n}(t) - 2u_{3,n}(t) + 2Ae^{2t}]) \right], \\ u_{3,n+1}(t) &= u_{3,n}(t) \\ &\quad - \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^\xi} (s^\xi u_{3,n}(s) - u_3(0)s^{\xi-1} \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{L}[u_{3,n}(t) - 2u_{1,n}(t) + 2u_{2,n}(t)]) \right], \\ u_{1,n+1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} - \frac{1}{s^\xi} \mathcal{L}[u_{1,n}(t) - 2u_{3,n}(t) + \sin(2t)] \right], \quad u_{1,0}(t) = A, \\ u_{2,n+1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s^\xi} \mathcal{L}[u_{2,n}(t) - 2u_{3,n}(t) + 2Ae^{2t}] \right], \quad u_{2,0}(t) = 0, \end{aligned}$$

$$u_{3,n+1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A+B}{s} - \frac{1}{s^\xi} \mathcal{L}[u_{3,n}(t) - 2u_{1,n}(t) + 2u_{2,n}(t)] \right], \quad u_{3,0}(t) = A+B,$$

$n = 0$ için

$$\begin{aligned} u_{1,1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} - \frac{1}{s^\xi} \mathcal{L}[A - 2A - 2B + \sin(2t)] \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} - \frac{1}{s^{\xi+1}} (-A - 2B) - \frac{2}{s^\xi (s^2 + 4)} \right], \\ u_{1,1}(t) &= A + \frac{(A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + \left(-\frac{1}{2} + 2^{1-\xi} \right) \cos(2t) + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi} \right) \sin(2t) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

$$\begin{aligned} u_{2,1}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s^\xi} \mathcal{L}[-2(A+B) + 2Ae^{2t}] \right], \\ &= \frac{(2A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - 2A \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right), \end{aligned}$$

bulunur.

$$u_{3,1}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A+B}{s} - \frac{1}{s^\xi} \mathcal{L}[A+B-2A] \right] = A+B + \frac{(A-B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)}$$

$n = 1$ için,

$$\begin{aligned} u_{1,2}(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A}{s} \right. \\ &\quad - \frac{1}{s^\xi} \mathcal{L} \left[A + \frac{(A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + \left(-\frac{1}{2} + 2^{1-\xi} \right) \cos(2t) \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi} \right) \sin(2t) - 2 \left(A+B + \frac{(A-B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} \right) + \sin(2t) \right] \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{1,2}(t) = & A - \frac{At^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{(A+2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{1}{2} \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \frac{(2A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} + \frac{(2A-2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \\
& + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)(-1 + 2^{1-\xi})\cos(2t) + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi}\right)(1 - 2^{-\xi})\sin(2t) \\
& + \left(-\frac{3}{4} + 2^{-1-\xi}\right)\frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\
& - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi}\right)\left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)\cos(2t) - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi}\right)\left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi}\right)\sin(2t),
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
u_{2,2}(t) = & \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{s^\xi} \mathcal{L} \left[\frac{(2A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - 2A \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \left(A + B + \frac{(A-B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} \right) + 2Ae^{2t} \right] \right], \\
u_{2,2}(t) = & -\frac{(2A+2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} - \frac{At^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + 2A(2^{-\xi} - 1) \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right) \\
& + \frac{(2A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} + \frac{(2A-2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)},
\end{aligned}$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
u_{3,2}(t) = & \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A+B}{s} \right. \\
& - \frac{1}{s^\xi} \mathcal{L} \left[A + B + \frac{(A-B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} \right. \\
& - 2 \left(A + \frac{(A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + \left(-\frac{1}{2} + 2^{1-\xi} \right) \cos(2t) \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi} \right) \sin(2t) \right) \right. \\
& \left. + 2 \left(\frac{(2A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - 2A \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right) \right) \right] \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{3,2}(t) = & A + B - \frac{(A+B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{(A-B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{2At^\xi}{\Gamma(\xi+1)} + \frac{(2A+4B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} - \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} \\
& - \frac{(4A+4B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} - \frac{2At^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)(1 - 2^{1-\xi})\cos(2t) \\
& + \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi}\right)(1 - 2^{1-\xi})\sin(2t) + (1 - 2^{1-\xi})\frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\
& + (-1 + 2^{2-\xi})(-1 + 2^{1-\xi})\cos(2t) \\
& + (-1 + 2^{2-\xi})(1 - 2^{-\xi})\sin(2t) + A2^{2-\xi}\left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t}\right),
\end{aligned}$$

A rastgele değişkeni düzgün dağılıma sahip ise parametreleri, $A \sim U(\alpha, \beta)$ ' dir. Düzgün dağılımı için moment üreten fonksiyon,

$$M_A(t) = E[e^{tA}] = \frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{(\beta - \alpha)t}$$

biçimindedir. Bu fonksiyonu kullanarak $A \sim U(\alpha, \beta)$ rastgele değişkeni için birinci moment ve varyans;

$$E[A] = \frac{\alpha + \beta}{2}, Var[A] = \frac{(\alpha - \beta)^2}{12}$$

Şeklinde ifade edilir.

B rastgele değişkeni normal dağılıma sahip ise parametreleri $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılım için moment üreten fonksiyon

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$$

biçiminde ifade edilir. Bu fonksiyon kullanılarak $B \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkeni için birinci, ikinci momentler ve varyans;

$$E[B] = \mu, E[B^2] = \mu^2 + \sigma^2, Var[B] = \sigma^2$$

şeklindedir (Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017). Bu momentlerden faydalananarak A ve B bağımsız rastgele değişkenlerinin $E[AB] = E[A]E[B]$ beklenen değerleri aşağıdaki gibi elde edilebilir.

$$E[u_{1,2}(t)] = E \left[A - \frac{At^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{(A+2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{1}{2} \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \frac{(2A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} \right. \\ \left. + \frac{(2A-2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) (-1 + 2^{1-\xi}) \cos(2t) \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi} \right) (1 - 2^{-\xi}) \sin(2t) + \left(-\frac{3}{4} + 2^{-1-\xi} \right) \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \right. \\ \left. - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi} \right) \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) \cos(2t) - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi} \right) \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi} \right) \sin(2t) \right]$$

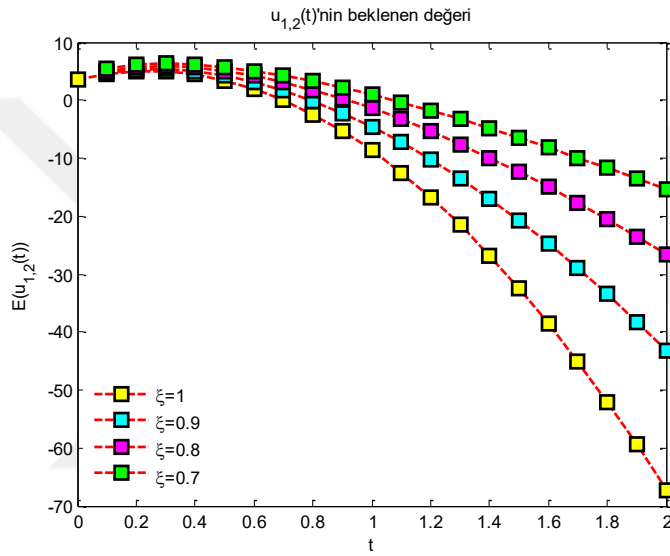
$$E[u_{1,2}(t)] = E(A) - \frac{E(A)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{(E(A)+2E(B))t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{1}{2} \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} \\ + \frac{(2E(A)+2E(B))t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} + \frac{(2E(A)-2E(B))t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \\ + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) (-1 + 2^{1-\xi}) \cos(2t) + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi} \right) (1 - 2^{-\xi}) \sin(2t) \\ + \left(-\frac{3}{4} + 2^{-1-\xi} \right) \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\ - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi} \right) \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) \cos(2t) - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi} \right) \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi} \right) \sin(2t)$$

$$E[u_{1,2}(t)] = \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) - \frac{\left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{\left(\left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) + 2\mu \right) t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{1}{2} \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} \\ + \frac{\left(2 \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) + 2\mu \right) t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} + \frac{\left(2 \left(\frac{\alpha+\beta}{2} \right) - 2\mu \right) t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \\ + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) (-1 + 2^{1-\xi}) \cos(2t) + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi} \right) (1 - 2^{-\xi}) \sin(2t) \\ + \left(-\frac{3}{4} + 2^{-1-\xi} \right) \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\ - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi} \right) \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) \cos(2t) - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi} \right) \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi} \right) \sin(2t)$$

$\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için beklenen değer,

$$\begin{aligned}
E[u_{1,2}(t)] = & \frac{7}{2} - \frac{7t^\xi}{2\Gamma(\xi+1)} - \frac{23t^{2\xi}}{2\Gamma(2\xi+1)} + \frac{1}{2} \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \frac{15t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \\
& + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)(-1 + 2^{1-\xi})\cos(2t) + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi}\right)(1 - 2^{-\xi})\sin(2t) \\
& + \left(-\frac{3}{4} + 2^{-1-\xi}\right)\frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\
& - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi}\right)\left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)\cos(2t) - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi}\right)\left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi}\right)\sin(2t)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 26. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem (35, $u_{1,2}$)'in çözümünün beklenen değeri

$$\begin{aligned}
Var[u_{1,2}(t)] = & Var \left[A - \frac{At^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{(A+2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{1}{2} \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \frac{(2A+2B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} \right. \\
& + \frac{(2A-2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)(-1 + 2^{1-\xi})\cos(2t) \\
& + \left(\frac{1}{2} - 2^{-\xi}\right)(1 - 2^{-\xi})\sin(2t) + \left(-\frac{3}{4} + 2^{-1-\xi}\right)\frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\
& \left. - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi}\right)\left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)\cos(2t) - \left(\frac{3}{2} - 2^{-\xi}\right)\left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi}\right)\sin(2t) \right]
\end{aligned}$$

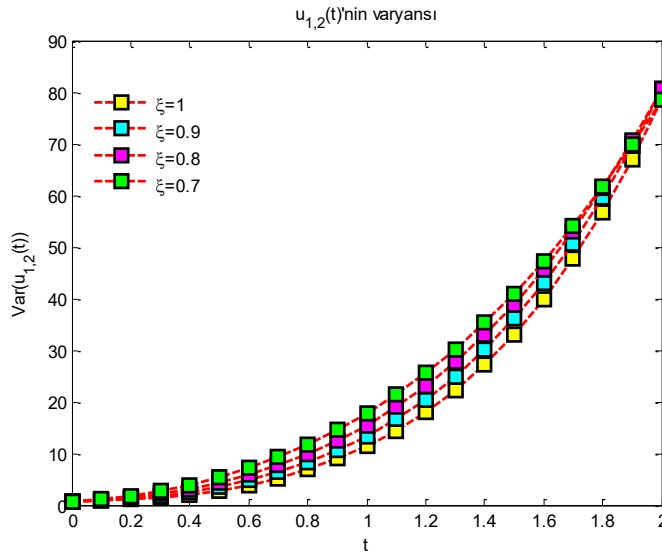
$$\begin{aligned}
Var[u_{1,2}(t)] &= Var(A) + \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)}\right)^2 Var(A) \\
&+ \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)}\right)^2 (Var(A) + 4Var(B)) \\
&+ \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)}\right)^2 (4Var(A) + 4Var(B)) \\
&+ \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)}\right)^2 (4Var(A) + 4Var(B))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[u_{1,2}(t)] &= \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} + \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)}\right)^2 \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \\
&+ \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)}\right)^2 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} + 4\sigma^2\right) + \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)}\right)^2 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{3} + 4\sigma^2\right) \\
&+ \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)}\right)^2 \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{3} + 4\sigma^2\right)
\end{aligned}$$

$\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için varyans,

$$\begin{aligned}
Var[u_{1,2}(t)] &= \frac{3}{4} + \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)}\right)^2 \frac{3}{4} + \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)}\right)^2 \left(\frac{19}{4}\right) + 7\left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)}\right)^2 \\
&+ 7\left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)}\right)^2
\end{aligned}$$

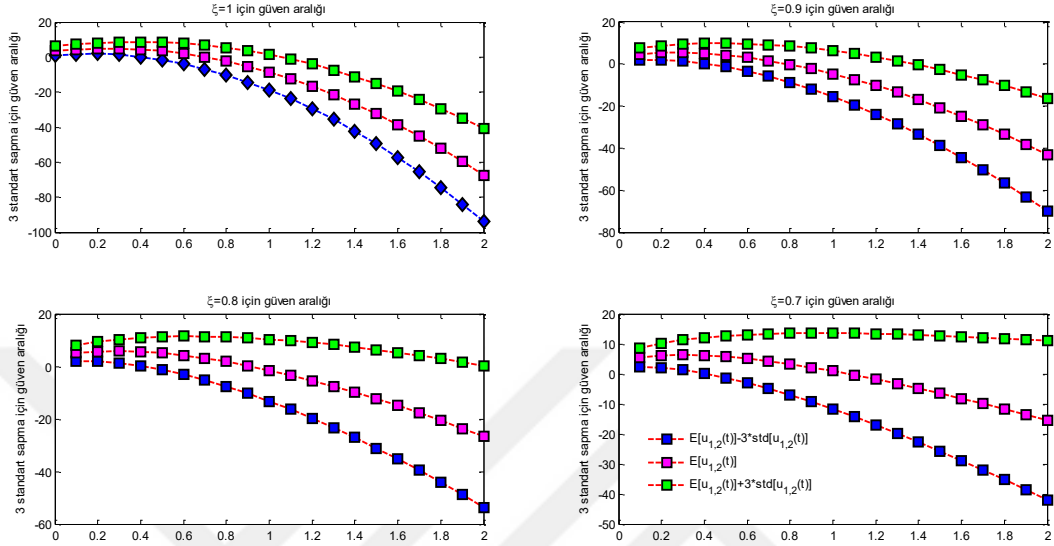
şeklinde hesaplanır.



Şekil 27. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem (35, $u_{1,2}$)'in çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$\left[E\left(u_{1,2}(t)\right) - 3stdsapma\left(u_{1,2}(t)\right), E\left(u_{1,2}(t)\right) + 3stdsapma\left(u_{1,2}(t)\right) \right]$$



Şekil 28. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem (35, $u_{1,2}$)'in çözümünün güven aralıkları

$$E[u_{2,2}(t)] = E \left[-\frac{(2A + 2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} - \frac{At^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + 2A(2^{-\xi} - 1) \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t} \right) + \frac{(2A + 2B)t^{\xi}}{\Gamma(\xi + 1)} + \frac{(2A - 2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} \right]$$

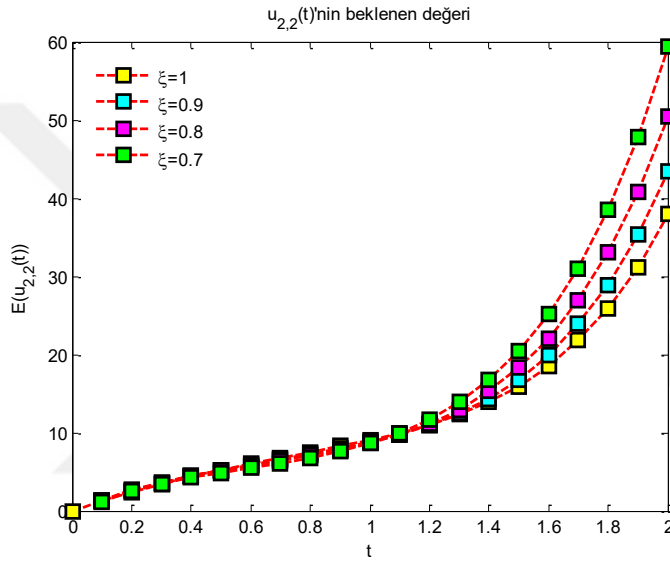
$$E[u_{2,2}(t)] = -\frac{(2E(A) + 2E(B))t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} - \frac{E(A)t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + 2E(A)(2^{-\xi} - 1) \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t} \right) + \frac{(2E(A) + 2E(B))t^{\xi}}{\Gamma(\xi + 1)} + \frac{(2E(A) - 2E(B))t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)}$$

$$E[u_{2,2}(t)] = -\frac{\left(2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 2\mu \right) t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} - \frac{\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + 2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)(2^{-\xi} - 1) \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t} \right) + \frac{\left(2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 2\mu \right) t^{\xi}}{\Gamma(\xi + 1)} + \frac{\left(2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) - 2\mu \right) t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)}$$

$\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için beklenen değer,

$$E[u_{2,2}(t)] = -\frac{15t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} - \frac{7t^{2\xi-1}}{2\Gamma(2\xi)} + 7(2^{-\xi} - 1)\left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t}\right) + \frac{15t^{\xi}}{\Gamma(\xi + 1)} - \frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 29. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem (35, $u_{2,2}$)'in çözümünün beklenen değeri

$$Var[u_{2,2}(t)] = Var\left[-\frac{(2A + 2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} - \frac{At^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + 2A(2^{-\xi} - 1)\left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t}\right) + \frac{(2A + 2B)t^{\xi}}{\Gamma(\xi + 1)} + \frac{(2A - 2B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)}\right]$$

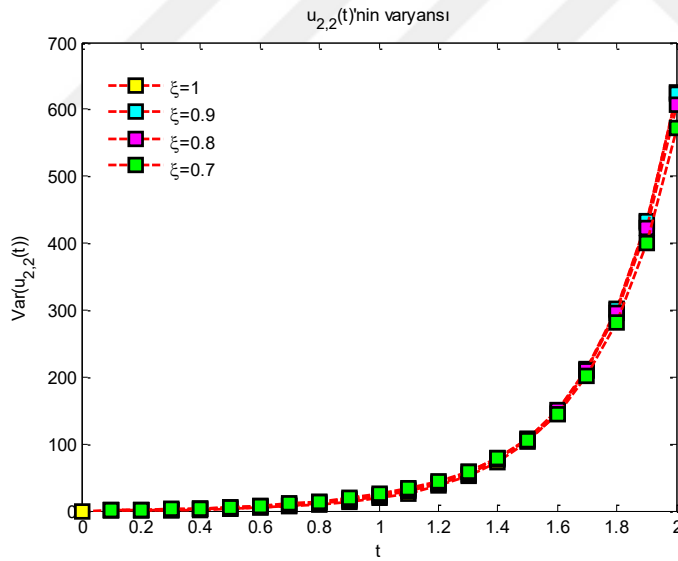
$$Var[u_{1,2}(t)] = (4Var(A) + 4Var(B))\frac{t^{4\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)^2} + \frac{Var(A)t^{4\xi-2}}{\Gamma(2\xi)^2} + 4Var(A)(2^{-\xi} - 1)^2\left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t}\right)^2 + (4Var(A) + 4Var(B))\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(\xi + 1)^2} + \frac{(4Var(A) + 4Var(B))t^{4\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)^2}$$

$$\begin{aligned}
Var[u_{2,2}(t)] = & \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{3} + 4\sigma^2 \right) \frac{t^{4\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)^2} + \frac{(\alpha - \beta)^2 t^{4\xi-2}}{12\Gamma(2\xi)^2} \\
& + \frac{(\alpha - \beta)^2}{3} (2^{-\xi} - 1)^2 \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right)^2 \\
& + \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{3} + 4\sigma^2 \right) \frac{t^{2\xi}}{\Gamma(\xi + 1)^2} + \frac{\left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{3} + 4\sigma^2 \right) t^{4\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)^2}
\end{aligned}$$

$\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için varyans,

$$\begin{aligned}
Var[u_{2,2}(t)] = & \frac{7t^{4\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)^2} + \frac{3t^{4\xi-2}}{4\Gamma(2\xi)^2} + 3(2^{-\xi} - 1)^2 \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right)^2 \\
& + \frac{7t^{2\xi}}{\Gamma(\xi + 1)^2} + \frac{7t^{4\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)^2}
\end{aligned}$$

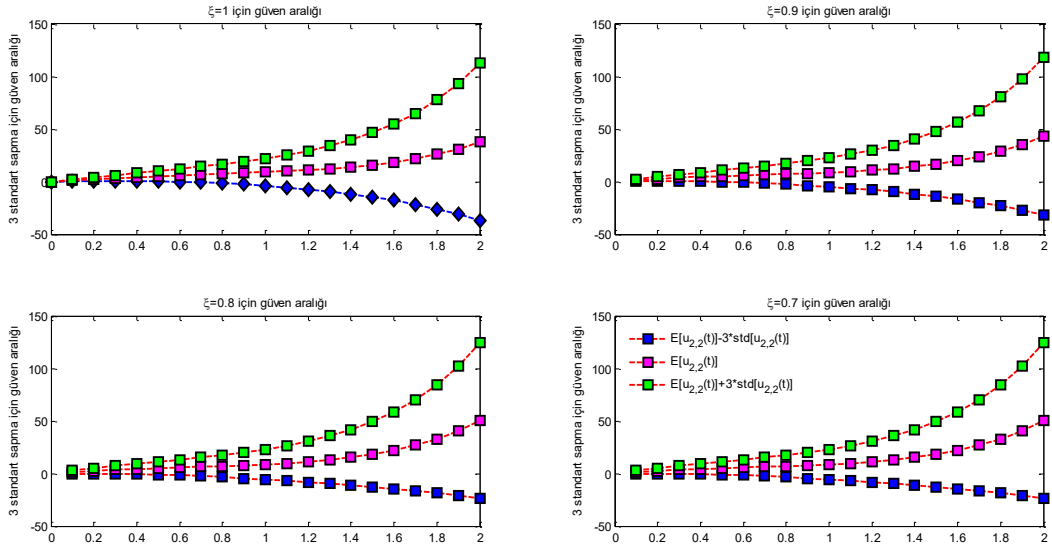
şeklinde hesaplanır.



Şekil 30. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem (35, $u_{2,2}$)'in çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$\left[E(u_{2,2}(t)) - 3stdsapma(u_{2,2}(t)), E(u_{2,2}(t)) + 3stdsapma(u_{2,2}(t)) \right]$$



Şekil 31. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem $(35, u_{2,2})$ 'in çözümünün güven aralıkları

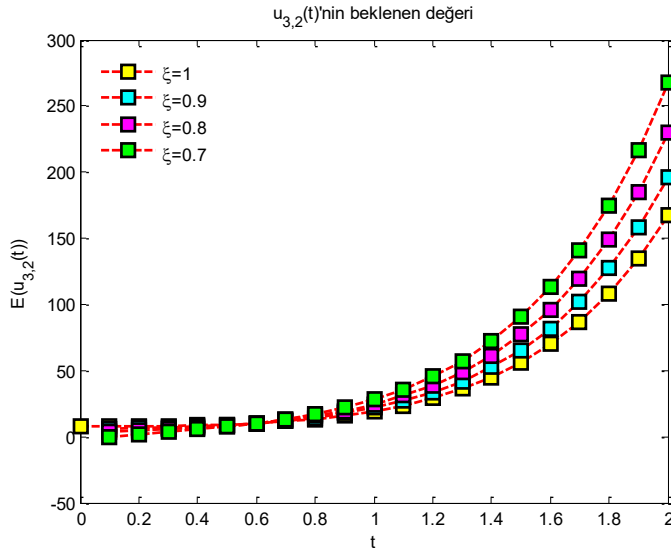
$$\begin{aligned}
 E[u_{3,2}(t)] &= E \left[A + B - \frac{(A+B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{(A-B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{2At^\xi}{\Gamma(\xi+1)} + \frac{(2A+4B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \right. \\
 &\quad - \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} - \frac{(4A+4B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} - \frac{2At^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) (1 - 2^{1-\xi}) \cos(2t) \\
 &\quad + \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi} \right) (1 - 2^{1-\xi}) \sin(2t) + (1 - 2^{1-\xi}) \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\
 &\quad + (-1 + 2^{2-\xi})(-1 + 2^{1-\xi}) \cos(2t) \\
 &\quad \left. + (-1 + 2^{2-\xi})(1 - 2^{-\xi}) \sin(2t) + A2^{2-\xi} \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right) \right] \\
 E[u_{3,2}(t)] &= E(A) + E(B) - \frac{E(A+B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{E(A-B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{2E(A)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} \\
 &\quad + \frac{(2E(A) + 4E(B))t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} - \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} - \frac{(4E(A) + 4E(B))t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} - \frac{2E(A)t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} \\
 &\quad + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) (1 - 2^{1-\xi}) \cos(2t) + \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi} \right) (1 - 2^{1-\xi}) \sin(2t) \\
 &\quad + (1 - 2^{1-\xi}) \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\
 &\quad + (-1 + 2^{2-\xi})(-1 + 2^{1-\xi}) \cos(2t) \\
 &\quad + (-1 + 2^{2-\xi})(1 - 2^{-\xi}) \sin(2t) + E(A)2^{2-\xi} \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[u_{3,2}(t)] = & \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + \mu - \frac{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \mu\right)t^\xi}{\Gamma(\xi + 1)} - \frac{\left(\frac{\alpha + \beta}{2} - \mu\right)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} + \frac{2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)t^\xi}{\Gamma(\xi + 1)} \\
& + \frac{\left(2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 4\mu\right)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} - \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} - \frac{\left(4\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) + 4\mu\right)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} \\
& - \frac{2\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)(1 - 2^{1-\xi})\cos(2t) \\
& + \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi}\right)(1 - 2^{1-\xi})\sin(2t) + (1 - 2^{1-\xi})\frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\
& + (-1 + 2^{2-\xi})(-1 + 2^{1-\xi})\cos(2t) \\
& + (-1 + 2^{2-\xi})(1 - 2^{-\xi})\sin(2t) + \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)2^{2-\xi}\left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t}\right)
\end{aligned}$$

$\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için beklenen değer,

$$\begin{aligned}
E[u_{3,2}(t)] = & \frac{15}{2} - \frac{15t^\xi}{2\Gamma(\xi + 1)} + \frac{t^{2\xi}}{2\Gamma(2\xi + 1)} + \frac{7t^\xi}{\Gamma(\xi + 1)} + \frac{23t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} - \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} \\
& - \frac{30t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} - \frac{7t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi}\right)(1 - 2^{1-\xi})\cos(2t) \\
& + \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi}\right)(1 - 2^{1-\xi})\sin(2t) + (1 - 2^{1-\xi})\frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\
& + (-1 + 2^{2-\xi})(-1 + 2^{1-\xi})\cos(2t) \\
& + (-1 + 2^{2-\xi})(1 - 2^{-\xi})\sin(2t) + \frac{7}{2}2^{2-\xi}\left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi}e^{2t}\right)
\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır.



Şekil 32. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem $(35, u_{3,2})$ 'in çözümünün beklenen değeri

$$\begin{aligned} Var[u_{3,2}(t)] = Var & \left[A + B - \frac{(A+B)t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} - \frac{(A-B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} + \frac{2At^\xi}{\Gamma(\xi+1)} + \frac{(2A+4B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \right. \\ & - \frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} - \frac{(4A+4B)t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} - \frac{2At^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} + \left(\frac{1}{2} - 2^{1-\xi} \right) (1 - 2^{1-\xi}) \cos(2t) \\ & + \left(-\frac{1}{2} + 2^{-\xi} \right) (1 - 2^{1-\xi}) \sin(2t) + (1 - 2^{1-\xi}) \frac{t^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} \\ & + (-1 + 2^{2-\xi})(-1 + 2^{1-\xi}) \cos(2t) \\ & \left. + (-1 + 2^{2-\xi})(1 - 2^{-\xi}) \sin(2t) + A2^{2-\xi} \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right) \right] \end{aligned}$$

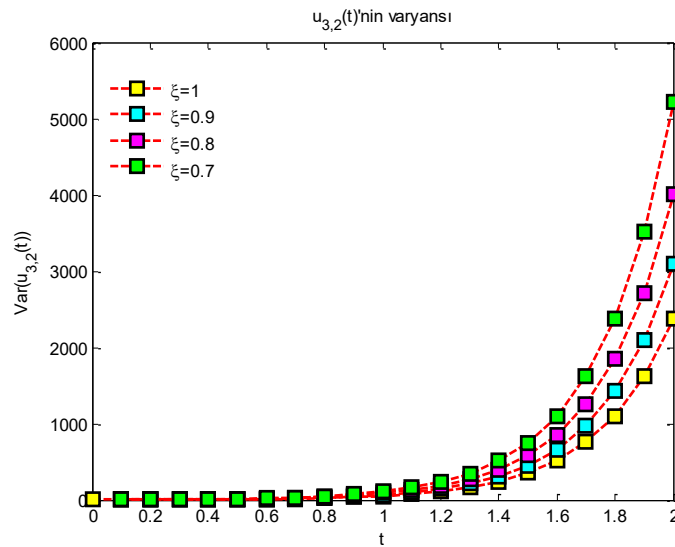
$$\begin{aligned} Var[u_{3,2}(t)] = Var(A) + Var(B) + (Var(A) + Var(B)) & \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} \right)^2 \\ + (Var(A) + Var(B)) & \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \right)^2 + 4Var(A) \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi+1)} \right)^2 \\ + (4Var(A) + 16Var(B)) & \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \right)^2 \\ + (16Var(A) + 16Var(B)) & \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi+1)} \right)^2 + 4Var(A) \left(\frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} \right)^2 \\ + Var(A) & \left[2^{2-\xi} \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right) \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Var[u_{3,2}(t)] &= \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} + \sigma^2 + \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} + \sigma^2 \right) \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi + 1)} \right)^2 \\
&+ \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{12} + \sigma^2 \right) \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} \right)^2 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{3} \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi + 1)} \right)^2 \\
&+ \left(\frac{(\alpha - \beta)^2}{3} + 16\sigma^2 \right) \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} \right)^2 \\
&+ \left(16 \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} + 16\sigma^2 \right) \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} \right)^2 + \frac{(\alpha - \beta)^2}{3} \left(\frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} \right)^2 \\
&+ \frac{(\alpha - \beta)^2}{12} \left[2^{2-\xi} \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

$\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri için varyans,

$$\begin{aligned}
Var[u_{3,2}(t)] &= \frac{7}{4} + \frac{7}{4} \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi + 1)} \right)^2 + \frac{7}{4} \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} \right)^2 + 3 \left(\frac{t^\xi}{\Gamma(\xi + 1)} \right)^2 \\
&+ 19 \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} \right)^2 + 28 \left(\frac{t^{2\xi}}{\Gamma(2\xi + 1)} \right)^2 + 3 \left(\frac{t^{2\xi-1}}{\Gamma(2\xi)} \right)^2 \\
&+ \frac{3}{4} \left[2^{2-\xi} \left(-\frac{t^{\xi-1}}{2\Gamma(\xi)} + 2^{-\xi} e^{2t} \right) \right]^2
\end{aligned}$$

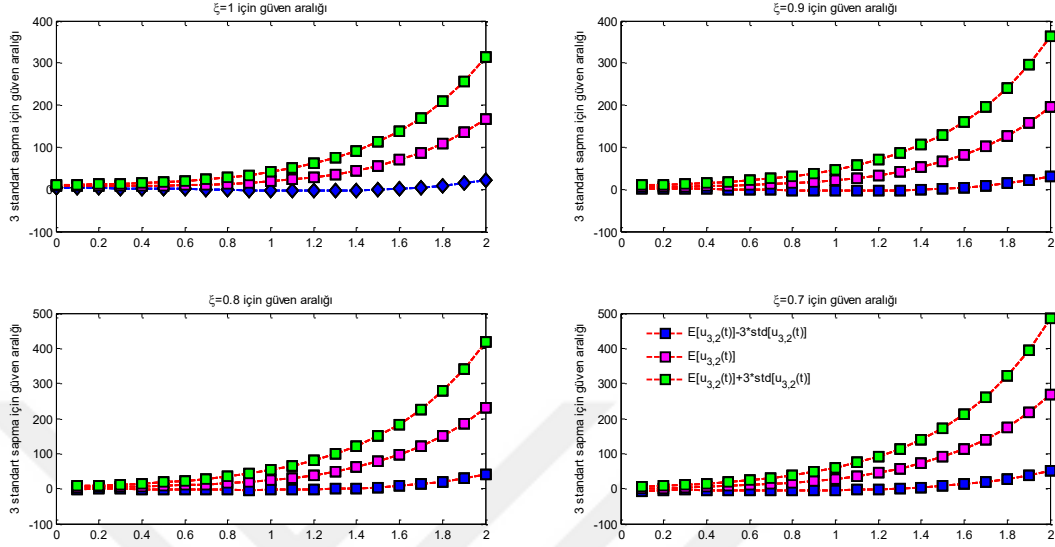
biçiminde bulunur.



Şekil 33. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem (35, $u_{3,2}$)'in çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$\left[E\left(u_{3,2}(t)\right) - 3stdsapma\left(u_{3,2}(t)\right), E\left(u_{3,2}(t)\right) + 3stdsapma\left(u_{3,2}(t)\right) \right]$$



Şekil 34. $\xi = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ ve $\alpha = 2, \beta = 5, \mu = 4$ ve $\sigma^2 = 1$ özel değerleri denklem $(35, u_{3,2})$ 'in çözümünün güven aralıkları

4. ATANGANA-BALEANU KESİR TÜREVLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ ile ÇÖZÜMÜ

Tanım 4.0.1 Mertebesi α olan Atangana-Baleanu kesirli türevi aşağıdaki gibi tanımlanır.

$${}^{AB}D_t^\alpha u(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t E_\alpha\left(-\frac{\alpha(t-x)^\alpha}{1-\alpha}\right) u'(x) dx$$

burada $0 < \alpha < 1$ olup $M(\alpha)$ ise normalizasyon fonksiyonudur ve $M(0) = M(1) = 1$ dir(Ahmad, H. ve Nasar, J. J., 2024).

Tanım 4.0.2 α mertebeden Atangana-Baleanu kesirli integrali aşağıdaki gibi tanımlanır.

$${}^{AB}I_t^\alpha u(t) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} u(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-x)^{\alpha-1} u(x) dx$$

Atangana-Baleanu kesirli integrali için:

- I. ${}^AB_t{}^\alpha {}^AB_t{}^\alpha u(t) = u(t)$
- II. ${}^AB_t{}^\alpha c = \frac{c}{M(\alpha)} \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$
- III. ${}^AB_t{}^\alpha t^k = \frac{t^k}{M(\alpha)} \left(1 - \alpha + \frac{\alpha \Gamma(k+1) t^\alpha}{\Gamma(\alpha+k+1)} \right)$

Yukarıdaki özellikler tanımlıdır(Ahmad, H. ve Nasar, J. J. ,2024).

4.1.Atangana-Baleanu Kesir Türevi ile Varyasyonel İterasyon Yöntemi

Aşağıdaki kesirli diferensiyel denklemi ele alalım:

$${}^AB_t{}^\alpha u(x, t) + Lu(x, t) + Nu(x, t) = g(x, t), \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (36)$$

Biçiminde tanımlı diferensiyel denklem için başlangıç koşulu,

$$u(x, 0) = f(x)$$

olsun.

Burada ${}^AB_t{}^\alpha u(x, t)$ Atangana-Baleanu kesirli türev, L lineer diferensiyel operatör, N lineer olmayan terim, $g(x, t)$ kaynak terim olmak üzere dönüştürülmüş iterasyon fonksiyoneli aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, t) = & u_n(x, t) \\ & + {}^AB_t{}^\alpha \left[\lambda(\xi) \left({}^AB_\xi{}^\alpha u_n(x, \xi) + Lv_n(x, \xi) + Nv_n(x, \xi) \right. \right. \\ & \left. \left. - g(x, \xi) \right) \right] \end{aligned} \quad (37)$$

Burada $\lambda(\xi)$ genel Lagrange çarpanı, v_n ve g kısıtlı varyasyonlar olarak kabul edilir. Diğer yandan $\delta v_n = 0$, $g = 0$ olarak alınır ve denklem delta operatörü ile genişletilirse yani:

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + {}^AB_t{}^\alpha \left[\delta \lambda(\xi) \left({}^AB_\xi{}^\alpha u_n(x, \xi) \right) \right] \quad (38)$$

Biçiminde yazılabilir. Takiben gerekli işlemler yapılırsa:

$$\delta u_{n+1}(x, t) = \delta u_n(x, t) + \lambda(\xi) \delta u_n(x, t) + {}^{AB}I_t^\alpha [\delta \lambda'(\xi)(u_n(x, \xi))] \quad (39)$$

Elde edilir. Buradan Lagrange çarpanı,

$$\begin{aligned} \lambda'(\xi) &= 0 \\ 1 + \lambda(\xi) &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri çözülerek $\lambda = -1$ olarak bulunur. Ardından varyasyonel iterasyon formülü:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, t) &= u_n(x, t) \\ &- {}^{AB}I_t^\alpha [{}^{AB}D_\xi^\alpha u_n(x, \xi) + Lu_n(x, \xi) + Nu_n(x, \xi) - g(x, \xi)] \end{aligned} \quad (40)$$

Burada $n = \{0, 1, 2, \dots\}$ değerleri için $u_1, u_2, u_3, \dots$ çözümleri bulunur. Ardından genel çözüm aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$u_n(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t) + \dots \quad (41)$$

4.2. Atangana-Baleanu Kesir Türevli Rastgele Diferensiyel Denklemlere Varyasyonel İterasyon Yönteminin Uygulaması

Bu bölümde başlangıç koşulları yada katsayıları rastgele olan Atangana-Baleanu kesirli Türevli kısmi diferensiyel denklem çözümleri için varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılarak üç adet örnek çözülmüştür.

Örnek 9.

Bir boyutlu rastgele Burger kesirli diferensiyel denklemi,

$${}^{ABC}D_t^\alpha v - \frac{1}{K} v v_x = v_{xxx} \quad , \quad v(x, 0) = Kx \quad (42)$$

verilsin, $K \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ beta dağılıma sahip rastgele etki ve başlangıç koşulu için Varyasyonel İterasyon Yöntemi ile çözümünü bularak olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

$$v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t) - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} v_n(x, t) - \frac{1}{K} v_n(x, t) \frac{\partial}{\partial x} v_n(x, t) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_n(x, t) \right] (d\tau)^\alpha$$

$$v_1(x, t) = v_0(x, 0) - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} v_0(x, 0) - \frac{1}{K} v_0(x, t) \frac{\partial}{\partial x} v_0(x, 0) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_0(x, 0) \right] (d\tau)^\alpha$$

$$= Kx - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} Kx - \frac{1}{K} Kx \frac{\partial}{\partial x} Kx - \frac{\partial^3}{\partial x^3} Kx \right] (d\tau)^\alpha$$

$$= Kx - Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

$$v_2(x, t) = v_1(x, 0) - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} v_1(x, 0) - \frac{1}{K} v_1(x, 0) \frac{\partial}{\partial x} v_1(x, 0) - \frac{\partial^3}{\partial x^3} v_1(x, 0) \right] (d\tau)^\alpha$$

$$= Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

$$- \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \left\{ Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{K} \left\{ Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right\} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right\} \right. \\ \left. - \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left\{ Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right\} \right] (d\tau)^\alpha$$

$$- \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left\{ Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right\} \right] (d\tau)^\alpha$$

$$= Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

$$- \int_0^t \left[Kx - \frac{1}{K} \left(Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \left(K + K \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \right] (d\tau)^\alpha$$

$$= Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

$$- \int_0^t \left[Kx - K \left(x + x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \left(1 + \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \right] (d\tau)^\alpha$$

$$= Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

$$- \int_0^t \left[Kx - K \left(x + 2x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) + x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)^2 \right] (d\tau)^\alpha$$

$$= Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

$$- \int_0^t \left[-2Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) - Kx \left((1 - \alpha)^2 - \frac{2(1 - \alpha)t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right. \\ \left. + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)^2} \right] (d\tau)^\alpha$$

$$+ \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)^2} \right] (d\tau)^\alpha$$

$$\begin{aligned}
&= Kx + Kx \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) + 2Kx(1 - \alpha) \left(1 - \alpha + \frac{2t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\alpha\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha + 2)} + \frac{t^\alpha(1 - \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right) \\
&\quad + \frac{2Kx\alpha\Gamma(\alpha + 1)t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha + 2)} + Kx(1 - \alpha)^3 + \frac{Kx(1 - \alpha)^2 t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} - Kx(1 - \alpha)t^{2\alpha} \\
&\quad - \frac{Kx\alpha\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

Burada $\alpha = 1$ alınırsa denklem:

$$v(x, t) = Kx(1 + t + t^2 + t^3 + \dots)$$

bulunur, dolayısıyla,

$v(x, t) = Kx(1 + t + t^2 + \dots) = \frac{Kx}{1-t}$ elde edilir. Aynı zamanda Beta dağılımı için 1.,2. momentleri ve varyansı;

$$E(K) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, E(K^2) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{(\alpha + \beta)(\alpha + \beta + 1)}, Var(K) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$$

şeklinde hesaplanır.

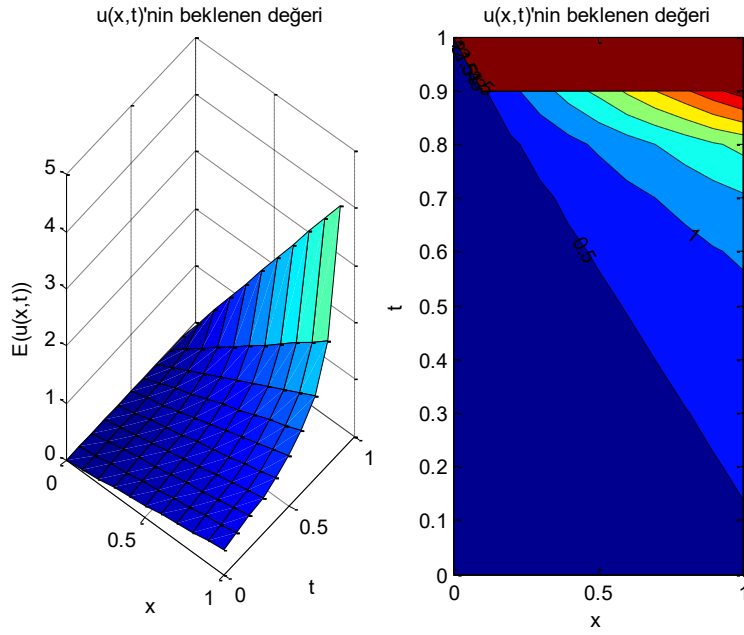
K ve T bağımsız rastgele değişkenleri için beklenen değerlerin temel özellikleri kullanılırsa $v(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[v(x, t)] = E \left[\frac{Kx}{1-t} \right] = \frac{x}{1-t} E[K] = \frac{x}{1-t} \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

$\alpha = 3, \beta = 4$, özel değerleri için,

$$E[v(x, t)] = \frac{3x}{7(1-t)}$$

bulunur.



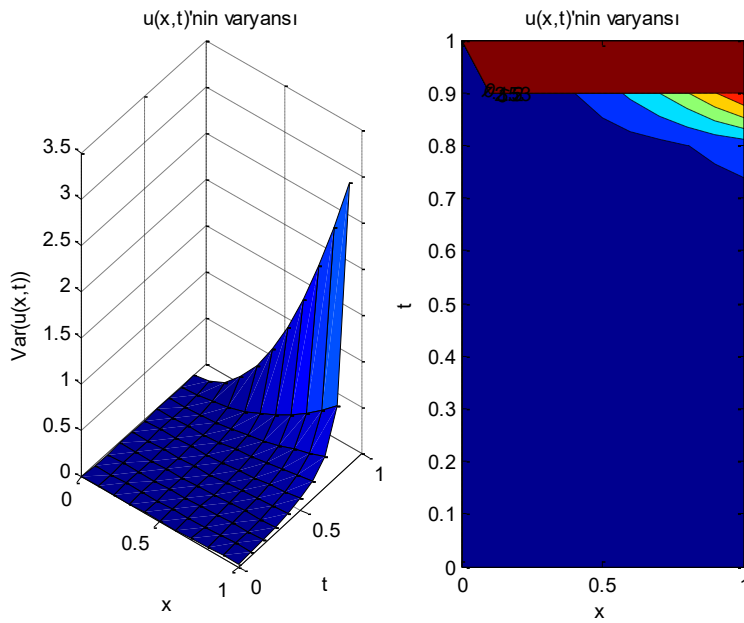
Şekil 35. $K \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (42) denkleminin çözümünün beklenen değeri

$$\text{Var}[v(x, t)] = \text{Var}\left[\frac{Kx}{1-t}\right] = \left(\frac{x}{1-t}\right)^2 \text{Var}[K] = \left(\frac{x}{1-t}\right)^2 \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta + 1)(\alpha + \beta)^2}$$

$\alpha = 3, \beta = 4$ özel değerleri için,

$$\text{Var}[v(x, t)] = \frac{3}{98} \left(\frac{x}{1-t}\right)^2$$

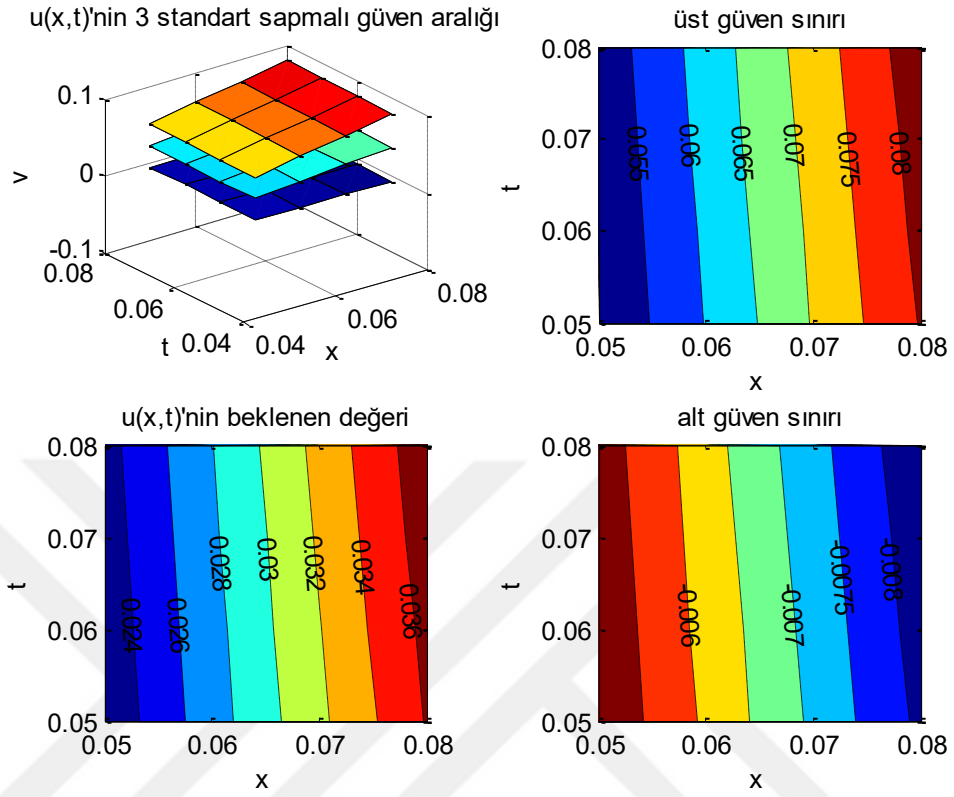
bulunur.



Şekil 36. $K \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (42) denkleminin çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$[E(v(x,t)) - 3stdsapma(v(x,t)), E(v(x,t)) + 3stdsapma(u(x,t))]$$



Şekil 37. $K \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (42) denkleminin çözümünün güven aralıkları

$v(x, t)$ değişim katsayısı;

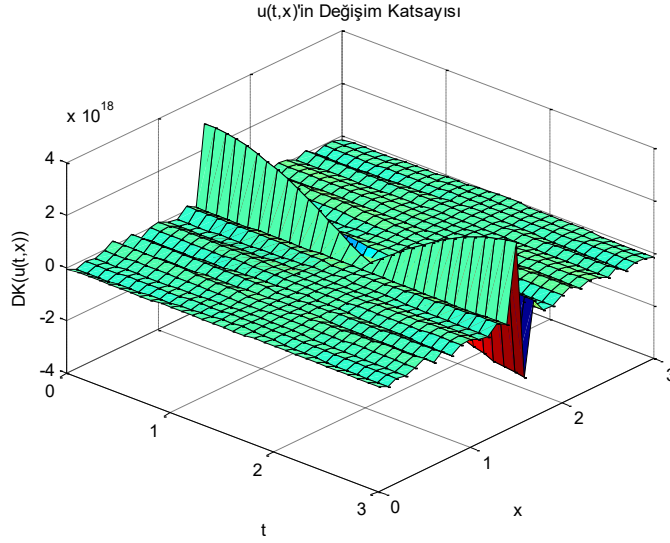
standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

$$stdsapma[v(x, t)] = \sqrt{\text{Var}[v(x, t)]} = \sqrt{\frac{3}{98} \left(\frac{x}{1-t} \right)^2}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(t, x)]}{E[u(t, x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{3}{98} \left(\frac{x}{1-t} \right)^2}}{\frac{3x}{7(1-t)}} \times 100$$

$v(x, t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 38. $K \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (42) denkleminin çözümünün değişim katsayısı

Örnek 10.

$${}^{AB}D_t^\alpha u = K - 2 + u_{xx} + \frac{1}{x}u_x, \quad 0 < \alpha \leq 1 \quad (43)$$

$$u(x, 0) = 1 + x^2$$

Burada $K \sim U(a = 3, b = 5)$ düzgün dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, Başlangıç koşulları ile verilen Atangana-Baleanu Kesirli Navier-Stokes denklemini VIM yöntemi ile çözerek, olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

$${}^{AB}D_t^\alpha u_n(x, t) - K + 2 - u_{xx}(x, t) - \frac{1}{x}u_x = 0$$

Şeklinde yazılabilir, $\lambda = -1$ olduğundan dönüştürülmüş iterasyon fonksiyoneli aşağıdaki gibidir.

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - {}^{AB}I^\alpha \left[{}^{AB}D_t^\alpha u_n(x, t) - K + 2 - u_{nxx}(x, t) - \frac{1}{x}u_{nx} \right]$$

Burada ardışık yaklaşımlar uygularsak;

$$u_0 = 1 + x^2$$

$$\begin{aligned}
u_1 &= u_0 - {}^{AB}I^\alpha \left[{}^{AB}D_t^\alpha u_0 - K + 2 - u_{0_{xx}} - \frac{1}{x} u_{0_x} \right] \\
&= 1 \\
&\quad + x^2 - {}^{AB}I^\alpha \left[{}^{AB}D_t^\alpha (1 + x^2) - K + 2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (1 + x^2) - \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (1 + x^2) \right] \\
&= 1 + x^2 - {}^{AB}I^\alpha [-K - 2] = 1 + x^2 + (K + 2) \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \\
u_2 &= u_1 - {}^{AB}I^\alpha \left[{}^{AB}D_t^\alpha u_1 - K + 2 - u_{1_{xx}} - \frac{1}{x} u_{1_x} \right], \\
&= u_1 - {}^{AB}I^\alpha [{}^{AB}D_t^\alpha u_1 - K + 2 - u_{1_{xx}} - \frac{1}{x} u_{1_x}], \\
&= 1 + x^2 + (K + 2) \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)
\end{aligned}$$

...

Biçiminde ardışık olarak devam edilirse:

$$u_n(x, t) = 1 + x^2 + (K + 2) \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

bulunur. O halde denklemin genel çözümü:

$$u(x, t) = 1 + x^2 + (K + 2) \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

olur. Burada $\alpha = 1$ alınırsa genel çözüm:

$$u(x, t) = 1 + x^2 + (K + 2)t$$

bulunur.

Düzgün dağılım altında K rastgele değişkenin parametreleri, $K \sim U(a, b)$ ' dir. Düzgün dağılım için moment üreten fonksiyon,

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b - a)t}$$

biçiminde ifade edilir. Bu fonksiyon kullanılarak, $K \sim U(a, b)$ rastgele değişkeni için birinci moment ve varyans;

$$E[K] = \frac{a+b}{2}, Var[K] = \frac{(a-b)^2}{12}$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

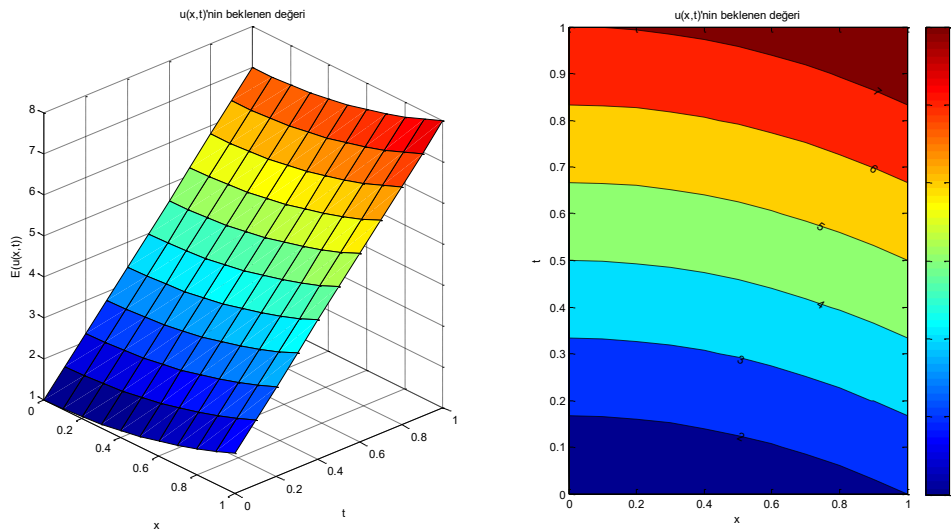
K ve T bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $v(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= E[1 + x^2 + (K + 2)t] = 1 + x^2 + 2t + tE[K] \\ &= 1 + x^2 + 2t + \frac{t(a+b)}{2} \end{aligned}$$

$a = 3, b = 5$, özel değerleri için,

$$E[u(x, t)] = 1 + x^2 + 2t + \frac{t(3+5)}{2} = 1 + x^2 + 6t$$

bulunur.



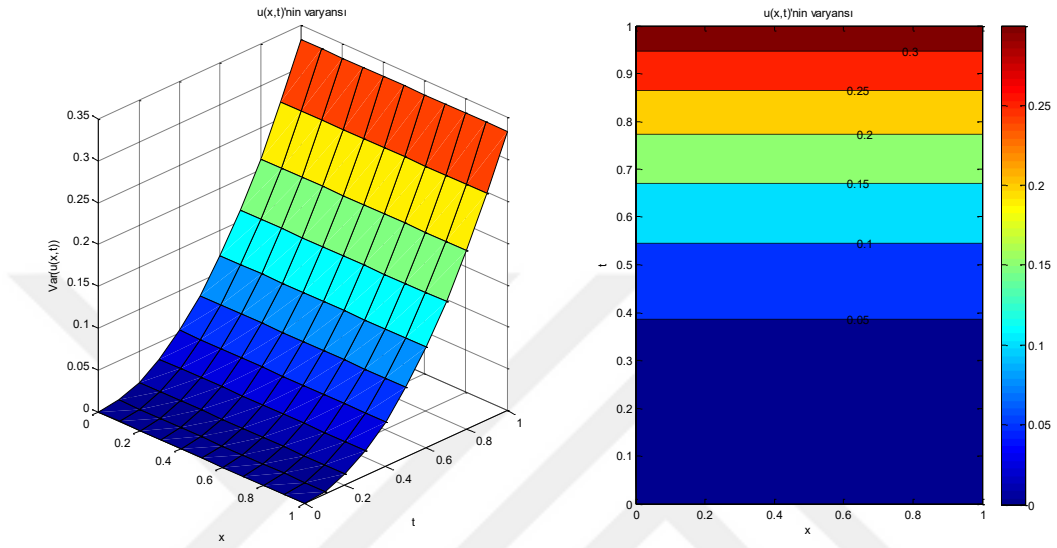
Şekil 39. $K \sim U(a = 3, b = 5)$ özel değerleri için (43) denkleminin çözümünün beklenen değeri

$$Var[u(x, t)] = Var[1 + x^2 + (K + 2)t] = t^2 Var[K] = t^2 \frac{(a-b)^2}{12}$$

$a = 3, b = 5$ özel değerleri için,

$$Var[v(x, t)] = \frac{t^2}{3}$$

bulunur.

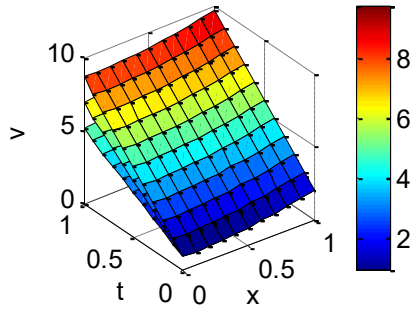


Şekil 40. $K \sim U(a = 3, b = 5)$ özel değerleri için (43) denkleminin çözümünün varyansı

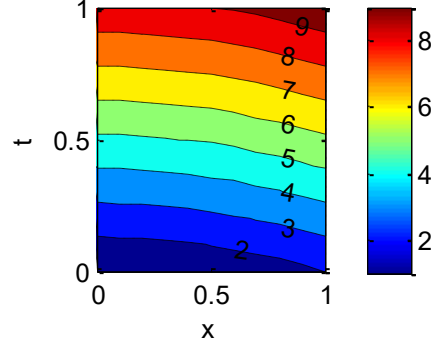
Güven aralıkları

$$[E(u(x, t)) - 3stdsapma(u(x, t)), E(u(x, t)) + 3stdsapma(u(x, t))]$$

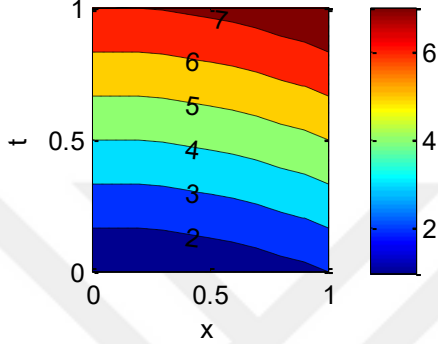
$u(x,t)$ 'nin 3 standart sapmalı güven aralığı



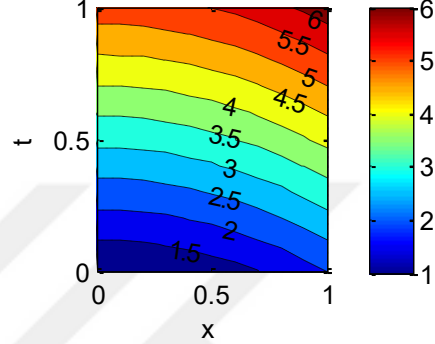
üst güven sınırı



$u(x,t)$ 'nin beklenen değeri



alt güven sınırı



Şekil 41. $K \sim U(a = 3, b = 5)$ özel değerleri için (43) denkleminin çözümünün güven aralıkları

$u(x, t)$ değişim katsayısı;

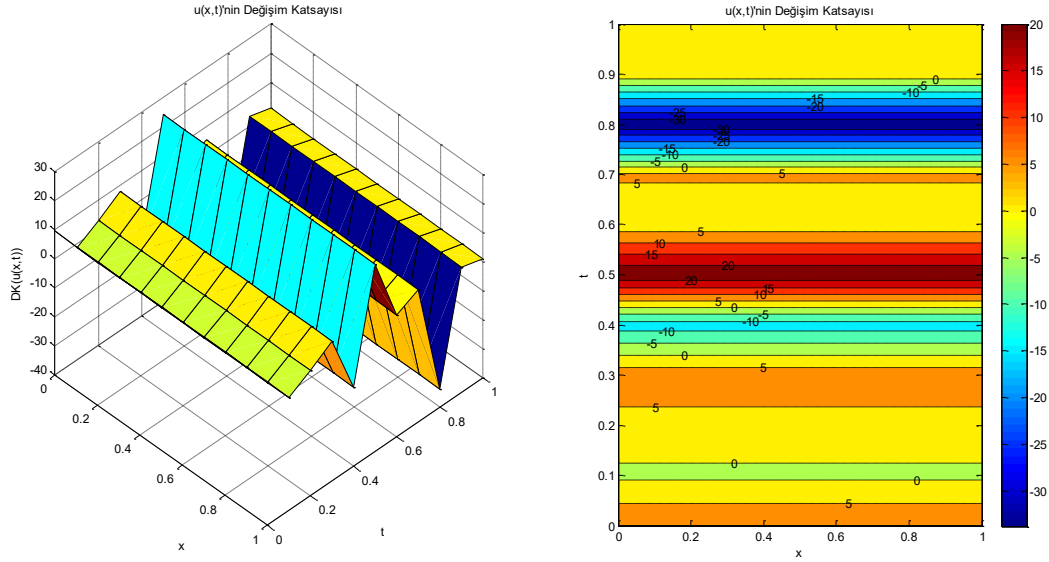
varyansın karekökü standart sapmayı verdiğiinden,

$$stdsapma[u(x, t)] = \sqrt{Var[u(x, t)]} = \sqrt{\frac{t^2}{3}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise aşağıdaki ifade ile formüle edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(t,x)]}{E[u(t,x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{t^2}{3}}}{1+x^2+6t} \times 100$$

$u(x, t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 42. $K \sim \text{Beta}(\alpha = 3, \beta = 4)$ özel değerleri için (43) denkleminin çözümünün değişim katsayısı

Örnek 11.

$${}^{AB}D_t^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t) - 2u(x, t)u_x(x, t) + (u(x, t)v(x, t))_x - 2u(x, t) = 0 \quad (44)$$

$${}^{AB}D_t^\alpha v(x, t) - v_{xx}(x, t) - 2v(x, t)v_x(x, t) + (u(x, t)v(x, t))_x - 2v(x, t) = 0$$

$$u(x, 0) = K \cos x, \quad v(x, 0) = K \cos x$$

Burada $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ normal dağılıma sahip rastgele değişken olmak üzere, başlangıç koşulları ile verilen Atangana-Baleanu kesirli diferensiyel denklem sistemini VİM ile çözümünü elde ederek olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t)$$

$$- \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} u_n(x, t) - 2u_{nxx}(x, t) - 2u_n(x, t)u_{nx}(x, t) + (u_n(x, t)v_n(x, t))_x - 2u_n(x, t) \right] (d\tau)^\alpha$$

$$v_{n+1}(x, t) = v_n(x, t)$$

$$- \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} v_n(x, t) - v_{nxx}(x, t) - 2v_n(x, t)v_{nx}(x, t) + (u_n(x, t)v_n(x, t))_x - 2v_n(x, t) \right] (d\tau)^\alpha$$

$$u_1(x, t) = u_0(x, t)$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} u_0(x, t) - 2u_{0_{xx}}(x, t) + 2u_0(x, t)u_{0_x}(x, t) \right. \\
& \left. + (u_0(x, t)v_0(x, t))_x - 2u_0(x, t) \right] (d\tau)^\alpha \\
& = K \cos x \\
& - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} K \cos x - 2(K \cos x)_{xx} - K \cos x (K \cos x)_x + (K^2 \cos^2 x)_x \right. \\
& \left. - 2K \cos x \right] (d\tau)^\alpha \\
& = K \cos x \\
& - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} K \cos x + 2K \cos x + 2K^2 \cos x \sin x - 2K^2 \cos x \sin x \right. \\
& \left. - 2K \cos x \right] (d\tau)^\alpha
\end{aligned}$$

$$u_1(x, t) = K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

Benzer şekilde;

$$v_1(x, t) = K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \\
& - \int_0^t \left[\frac{\partial^\alpha}{\partial \tau^\alpha} \left(K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \right. \\
& - 2 \left(K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right)_{xx} \\
& + 2 \left(K \cos x \right. \\
& \left. - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \left(K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right)_x \\
& + \left[\left(K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \left(K \cos x \right. \right. \\
& \left. \left. - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \right]_x \\
& \left. - 2 \left(K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \right] (d\tau)^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& - \int_0^t \left[\left(-K \cos x \left(\alpha - \alpha^2 + \frac{\alpha t^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \right) \right) \right. \\
& + 2 \left(K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \right) \\
& + 2 \left(K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \right) \left(-K \sin x \right. \\
& + K \sin x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& + \left(-K \sin x + K \sin x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \right) \left(K \cos x \right. \\
& - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& + \left(-K \sin x + K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \right) \left(K \cos x \right. \\
& - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& \left. \left. - 2 \left(K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \right) \right] (d\tau)^\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & K \cos x - K \cos x \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) \\
& + \alpha K \cos x \left[\left(1 - \alpha\right) \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) + t^\alpha \left(1 - \alpha + \frac{\alpha \Gamma(\alpha + 1) t^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1) \Gamma(\alpha)}\right) \right] \\
& - 2 K \cos x \left[\alpha \left(1 - \alpha + \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right) - t^\alpha \left(1 - \alpha + \frac{\alpha \Gamma(\alpha + 1) t^\alpha}{\Gamma(2\alpha + 1) \Gamma(\alpha)}\right) \right] + \dots
\end{aligned}$$

Burada $\alpha = 1$ bir alındığında bulunan seri çözümün hızlı bir şekilde aşağıdaki tam çözüme yakınsadığı görülebilir. Öte yandan benzer şekilde bu çözüm $v(x, t)$ için de doğrudur.

$$u(x, t) = K \cos(x) e^t$$

K rastgele değişkeni normal dağılıma sahip ise parametreleri $K \sim N(\mu, \sigma^2)$ dir. Normal dağılımı için moment üreten fonksiyon

$$M_K(t) = E[e^{tK}] = e^{(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2)}$$

ile ifade edilir. Bunu kullanarak $K \sim N(\mu, \sigma^2)$ rastgele değişkenini için birinci ve ikinci momentleri;

$$E[K] = \mu, E[K^2] = \mu^2 + \sigma^2 \text{ ve varyansı } Var[K] = \sigma^2$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

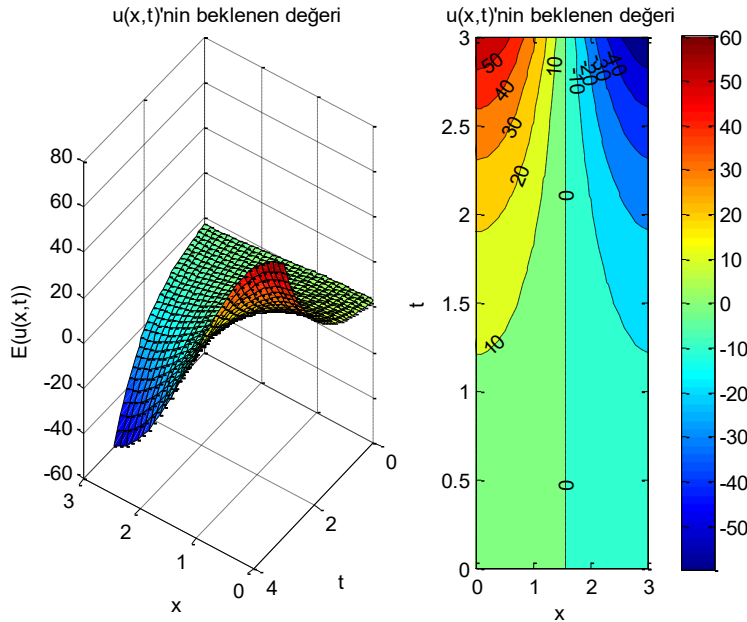
K ve T bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ denkleminin beklenen değeri;

$$E[u(x, t)] = E[K \cos(x) e^t] = \cos(x) e^t E[K] = \mu \cos(x) e^t$$

$\mu = 3$ özel değeri için,

$$E[u(x, t)] = 3 \cos(x) e^t$$

bulunur.

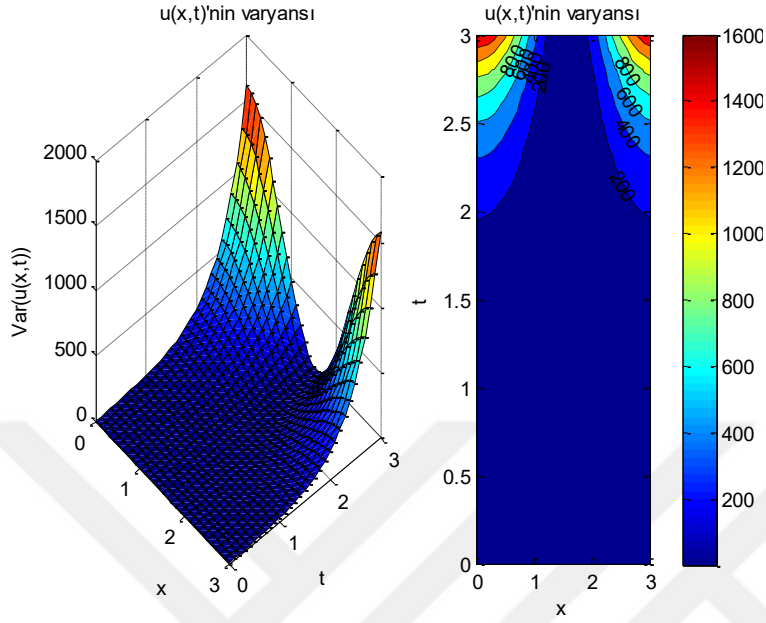


Şekil 43. $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için (44) denkleminin çözümünün beklenen değeri

$$Var[u(x, t)] = Var[K \cos(x) e^t] = \cos(x)^2 e^{2t} Var[K] = \cos(x)^2 e^{2t} \sigma^2$$

$\sigma^2 = 4$ özel değerleri için,

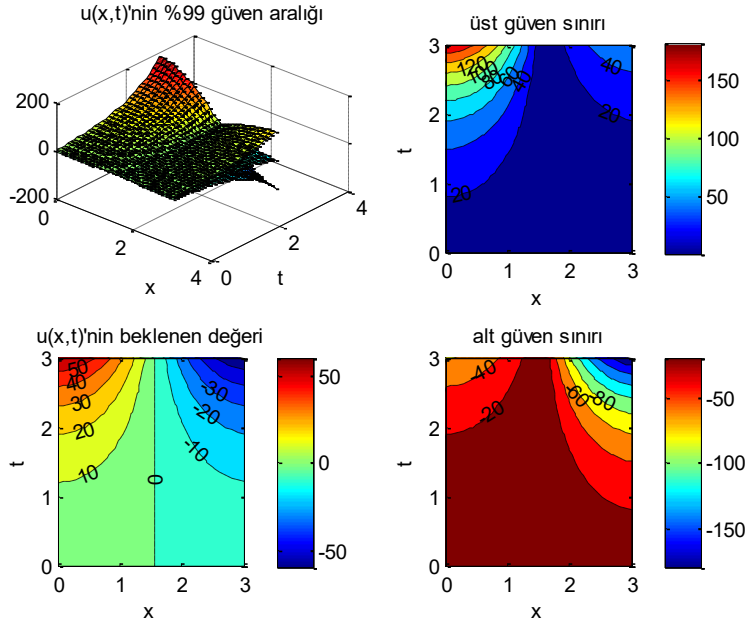
$Var[u(x, t)] = 4\cos(x)^2 e^{2t}$ bulunur.



Şekil 44. $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için (44) denkleminin çözümünün varyansı

Güven aralıkları

$$[E(u(x, t)) - 3stdsapma(u(x, t)), E(u(x, t)) + 3stdsapma(u(x, t))]$$



Şekil 45. $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için (44) denkleminin çözümünün güven aralıkları

$u(x, t)$ değişim katsayısı;

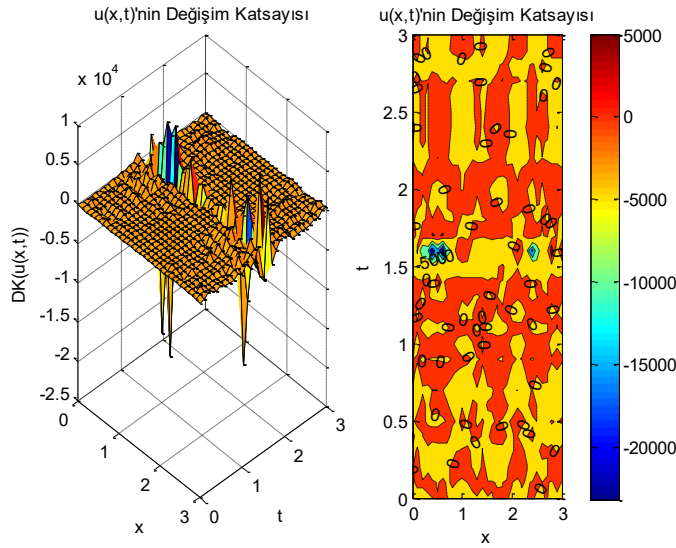
varyansın karekökü standart sapmayı verdiğinden

$$stdsapma[u(x, t)] = \sqrt{Var[u(x, t)]} = \sqrt{4\cos(x)^2 e^{2t}}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(t, x)]}{E[u(t, x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{4\cos(x)^2 e^{2t}}}{3\cos(x)e^t} \times 100$$

$u(x, t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 46. $K \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 4)$ özel değerleri için (44) denkleminin çözümünün değişim katsayısı

5. ADOMİAN-VARYASYONEL İTERASYON YÖNTEMİ İLE RASTGELE KESİRLİ DİFERENSİYEL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİ

Tanım 5.0.1 Bir $f(x)$ fonksiyonunun Caputo anlamında kesirli türevi aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$D_x^\alpha f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(r)}(\tau)}{(x-\tau)^{\alpha-r+1}} d\tau, & \alpha > 0, \quad r-1 < \alpha < r \\ \frac{\partial^{(r)} f(x)}{\partial x^r}, & \alpha = r \end{cases}$$

Burada $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow f(x)$ sürekli ancak türevlenebilir olmayan bir fonksiyonu belirtmektedir.

Diğer yandan aşağıda modifiye Riemann-Liouville türevine dair bilgiler aşağıda listelenmiştir(Song, J., Yin, F., Cao, X. ve Lu, F. ,2013):

$$D_x^\alpha c = 0, \quad \alpha > 0, \quad c: \text{sabit}$$

$$D_x^\alpha c f(x) = c D_x^\alpha f(x),$$

$$D_x^\alpha x^\xi = \frac{\Gamma(1+\xi)}{\Gamma(1+\xi-\alpha)} x^{\xi-\alpha}, \quad \xi > \alpha > 0$$

Tanım 5.0.2 $\alpha \geq 0$, $f \in C_\varepsilon$ ve $\varepsilon \geq -1$ için Riemann-Liouville integral operatörü I^α olmak üzere bu operatör aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$I^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x - \xi)^{\alpha-1} f(\xi) d\xi, \quad x > 0,$$

$$I^0 f(x) = f(x)$$

Diğer yandan bu integral işlemine dair bazı yararlı işlemler aşağıdaki gibidir.

$$I^\alpha I^\beta f(x) = I^{\alpha+\beta} f(x),$$

$$I^\alpha I^\beta f(x) = I^\beta I^\alpha f(x),$$

$$I^\alpha x^\xi = \frac{\Gamma(\xi + 1)}{\Gamma(\xi + \alpha + 1)} x^{\xi+\alpha}$$

Burada $\alpha, \beta \geq 0$, $\xi > -1$ dir(Song, J., Yin, F., Cao, X. ve Lu, F. ,2013).

Lemma 5.0.3 $t > 0$ için tanımlı bir gerçektek fonksiyon $\psi(t)$ için eğer $\rho > \varepsilon$ olacak şekilde bir $\rho \in \mathbb{R}$ varsa ve $\psi_1(t) = t^\rho \psi(t)$ biçiminde yazılabiliyorsa, (burada $\psi_1(t) \in C(0, \infty)$) o takdirde bu fonksiyon C_ε uzayında yer alır, denir. Ek olarak $\psi^{(k)} \in C_\varepsilon, k \in \mathbb{N}$ olması durumunda $\psi(t)$ fonksiyonu C_ε^k uzayındadır, denir.

5.1.Adomian Ayrışım Yöntemi

Riemann-Liouville kesir türevine sahip bir başlangıç değeri problemini aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$D_t^\alpha u(x, t) + N[u(x, t)] + L[u(x, t)] = g(x, t), \quad t > 0 \quad (45)$$

Burada L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x, t)$ bilinen bir fonksiyondur.

(45) denkleminin her iki tarafına I^α operatörü ve D_t^α operatörünün tersi uygulanırsa aşağıdaki ifade elde edilir:

$$u(x, t) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^r u}{\partial t^r}(x, 0^+) \frac{t^r}{r!} + I^\alpha g(x, t) - I^\alpha [Lu(x, t) + Nu(x, t)] \quad (46)$$

Bu yöntem $u(x, t)$ çözümünün sonsuz bileşenlerine ayrıştırılması gerektiğini önermektedir. Yani;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (47)$$

biçimindedir ve (45) denkleminde lineer olmayan kısım:

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (48)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Burada A_n Adomian polinomları olarak adlandırılır. (47) ve (48) denklemleri (46) denkleminde kullanıldığında (46) denklemi aşağıdaki gibi şekillenir.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^r u}{\partial t^r}(x, 0^+) \frac{t^r}{r!} + I^\alpha g(x, t) - I^\alpha \left[L \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \right] \quad (49)$$

Bu denklemden, yineleme yoluyla aşağıdaki ifadeler elde edilebilir.

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= \sum_{r=0}^{k-1} \frac{\partial^r u}{\partial t^r}(x, 0^+) \frac{t^r}{r!} + I^\alpha g(x, t), \\ u_1(x, t) &= -I^\alpha (Lu_0 + A_0), \\ u_2(x, t) &= -I^\alpha (Lu_1 + A_1), \\ &\vdots \\ u_{n+1}(x, t) &= -I^\alpha (Lu_n + A_n). \end{aligned} \quad (50)$$

Adomian polinomu olarak adlandırılan A_n belirli algoritmalarla tüm lineer olmayan durumlar için hesaplanması mümkündür. Ek olarak bu polinomları hesaplamak için genel formülasyon aşağıdaki gibi oluşturulabilir.

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k u_k \right) \right] \quad (51)$$

Bu formül sayısal yöntemlerle çözülebileceği gibi bilgisayar yardımıyla da çözülebilir. Son olarak $u(x, t)$ 'nin çözümüne aşağıdaki seriler ile yaklaşabiliriz.

$$\Psi_N(x, t) = \sum_{n=0}^{N-1} u_n(x, t), \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \Psi_N(x, t) = u(x, t) \quad (52)$$

5.2. Adomian-VIM Yönteminin Riemann-Liouville Kesirli Rastgele Kısmi Diferensiyel Denklemlere Uygulaması

Bu bölümde başlangıç koşulları yada katsayıları rastgele etki terimli Riemann-Liouville Kesirli türevli kısmi diferensiyel denklemlerin çözümleri için Adomian varyasyonel iterasyon yöntemi kullanılarak üç adet örnek çözülmüştür.

Örnek 12.

$$\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = B \cos x \quad (53)$$

Burada $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ Erlang dağılıma sahip rastgele etki terimidir. Verilen rastgele kesirli mertebeden kısmi diferensiyel denklemi Adomian-VIM yöntemi ile çözerek olasılık karakteristiklerini inceleyiniz.

Çözüm:

Bu problem içim düzeltme fonksiyoneli aşağıdaki gibi oluşturulur.

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_k(x, \xi) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(x, \xi) \right) d\xi, \quad u_0(x, t) = B \cos x$$

$k = 0$, için

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_0(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} B \cos x - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B \cos x \right) d\xi = B \cos x - \int_0^t B \cos x d\xi \\ &= B \cos x - B \cos x \cdot t = (1 - t) B \cos x \end{aligned}$$

$k = 1$, için

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= u_1(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_1(x, \xi) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1(x, \xi) \right) d\xi \\
&= (1-t)B\cos x \\
&\quad - \int_0^t \left(-B\cos x \frac{\Gamma(2)\xi^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + (1-\xi)B\cos x \right) d\xi, \\
&= (1-t)B\cos x + B\cos x \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(2-\alpha)} \frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(3-\alpha)} t^{2\alpha} - B\cos x \cdot \left(t - \frac{t^2}{2} \right), \\
&= B\cos x \cdot \left(1 - 2t + \frac{t^2}{2} + \frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right)
\end{aligned}$$

$k = 1$, için

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= u_2(x, t) - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} u_2(x, \xi) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_2(x, \xi) \right) d\xi, \\
&= B\cos x \cdot \left(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \\
&\quad - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} B\cos x \cdot \left(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B\cos x \cdot \left(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \right) d\xi \\
&= B\cos x \cdot \left(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \\
&\quad - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} B\cos x \cdot \left(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial^2}{\partial x^2} B\cos x \cdot \left(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \right) d\xi \\
u_3(x, t) &= B\cos x \cdot \left(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \\
&\quad - \int_0^t \left(B\cos x \cdot \left(\frac{2}{\Gamma(2-\alpha)} \xi^{1-\alpha} + \frac{1}{\Gamma(3-\alpha)} \xi^{2-\alpha} + \frac{2}{\Gamma(3-2\alpha)} \xi^{2-2\alpha} \right) \right. \\
&\quad \left. + B\cos x \cdot \left(1 - 2\xi + \frac{\xi^2}{2} + \frac{2\xi^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \right) \right) d\xi
\end{aligned}$$

Bu integralin sonucunda $u_3(x, t)$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$u_3(x, t) = B \cos x \left(1 - \frac{t^{3-2\alpha}}{\Gamma(4-2\alpha)} + \frac{3t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} - \frac{2t^{3-\alpha}}{\Gamma(4-\alpha)} - 3t + \frac{3}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 \right)$$

Diğer yandan aynı problem için ADM yöntemini uygulayalım, bunun için başlangıç koşulu ve gelen formülasyon aşağıdaki gibidir.

$$u_0(x, t) = u(x, 0) = B \cos x t,$$

$$u_{j+1}(x, t) = I^\alpha (L_{2x} u_j(x, t)), \quad j \geq 0.$$

$$u_0(x, t) = B \cos x,$$

$$u_1(x, t) = I^\alpha (L_{2x} u_0(x, t)) = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} B \cos x$$

$$u_2(x, t) = I^\alpha (L_{2x} u_1(x, t)) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} B \cos x,$$

$$u_3(x, t) = I^\alpha (L_{2x} u_2(x, t)) = -\frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} B \cos x,$$

⋮

Buradan problemin genel çözümü seri şeklinde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned} u(x, t) &= B \cos x \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \\ &= B \cos x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha + 1)} \end{aligned}$$

$\alpha = 1$ özel değeri için tam çözüm,

$$u(x, t) = B \cos(x) e^{-t}$$

bulunur. Erlang dağılıma sahip B rastgele değişkenin parametreleri $B \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ dir. Erlang dağılımının moment üreten fonksiyon aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$M_x(t) = E[e^{tX}] = \left(1 - \frac{t}{\lambda} \right)^{-n}$$

Bu hesap kullanılarak $B \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ rastgele değişkeninin birinci ve ikinci momentleri

$$E[B] = \frac{n}{\lambda}, E[B^2] = \frac{n(n+1)}{\lambda^2} \text{ ve varyansı } Var[B] = \frac{n}{\lambda^2}$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

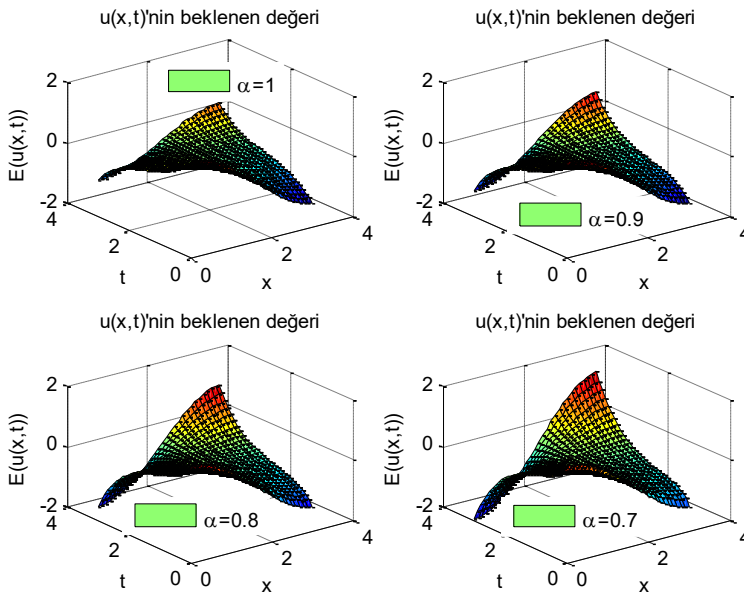
K ve T bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ çözümünün beklenen değeri;

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= E \left[B \cos x \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \right] \\ &= \cos x \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) E[B] \\ &= \frac{\cos x \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) n}{\lambda} \end{aligned}$$

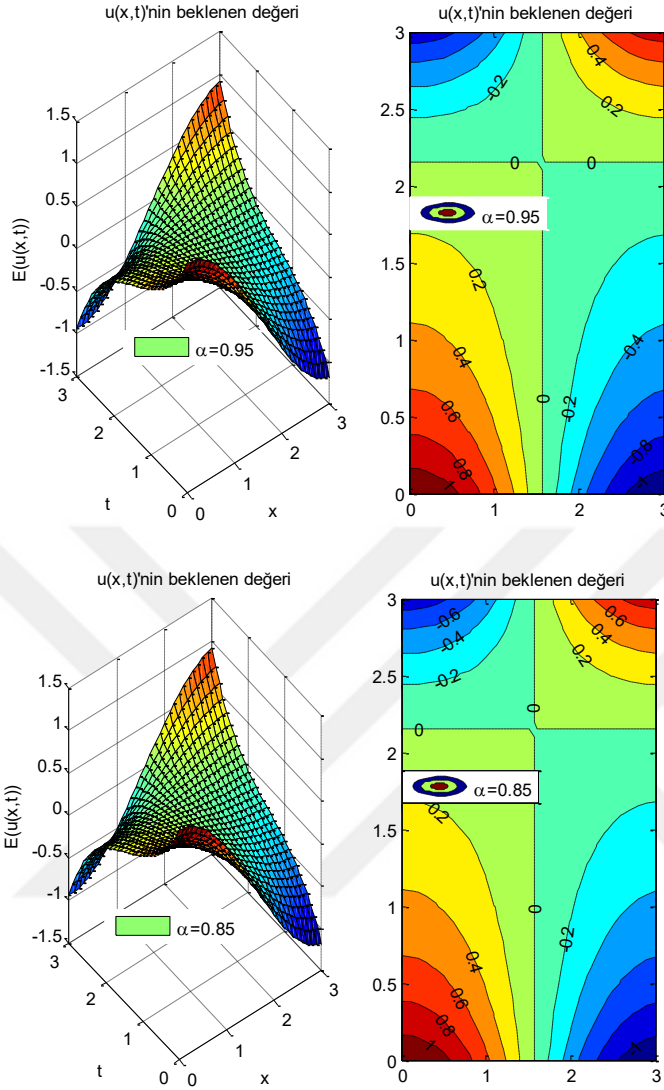
$n = 3, \lambda = 2.5$ özel değerleri için,

$$E[u(x, t)] = \frac{6 \cos x}{5} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right)$$

bulunur.



Şekil 47. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

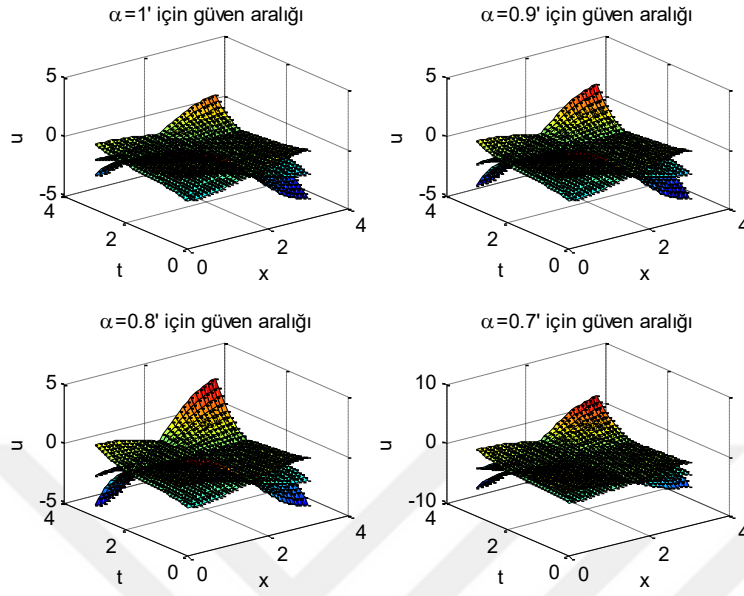


Şekil 48. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (53) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için çözüm davranışı

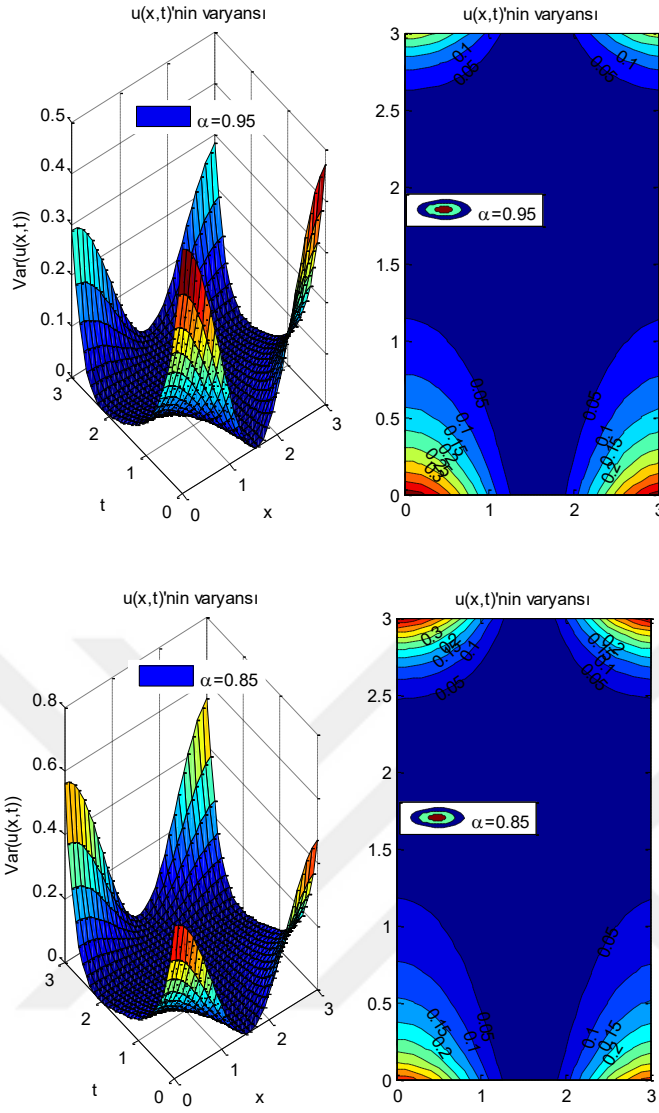
$$\begin{aligned}
 \text{Var}[u(x, t)] &= \text{Var} \left[B \cos x \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right) \right] \\
 &= \cos^2 x \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right)^2 \text{Var}[B] \\
 &= \frac{n \cos^2 x}{\lambda^2} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right)^2
 \end{aligned}$$

$n = 3, \lambda = 2.5$ özel değerleri için,

$$Var[u(x, t)] = \frac{12\cos^2 x}{25} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right)^2 \text{ bulunur.}$$



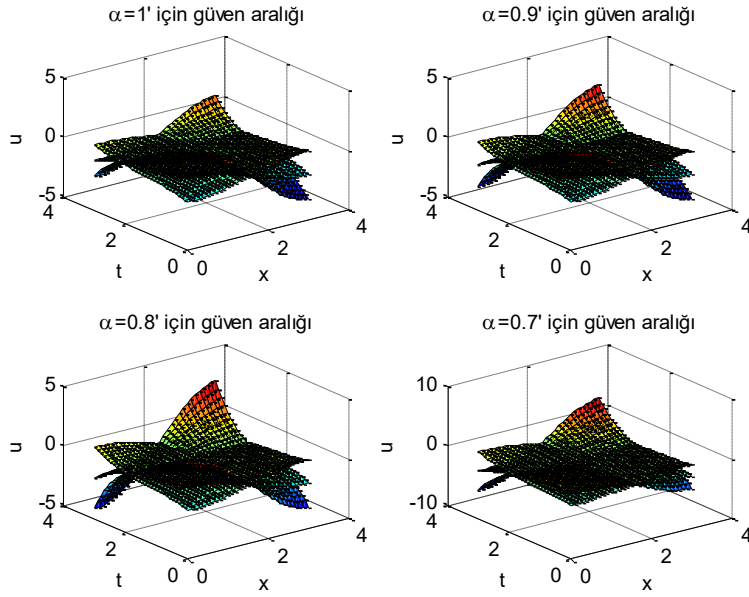
Şekil 49. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin varyansının çözüm davranışı



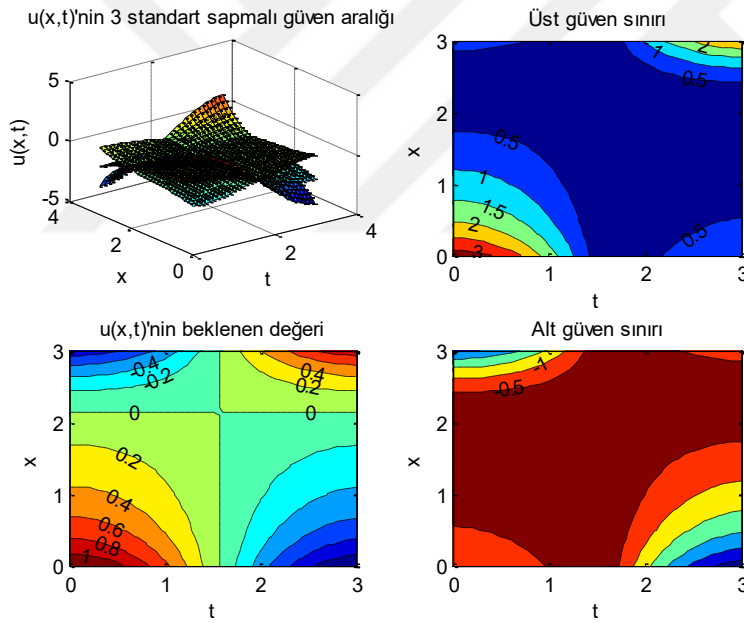
Şekil 50. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (53) denkleminin varyansının $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için çözüm davranışı

Güven aralıkları

$$[E(u(x,t)) - 3\text{stdsapma}(u(x,t)), E(u(x,t)) + 3\text{stdsapma}(u(x,t))]$$



Şekil 51. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (53) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı



Şekil 52. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ özel değerleri için (53) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

$u(x, t)$ değişim katsayısı;

varyansın karekökü standart sapmayı verdiğinden,

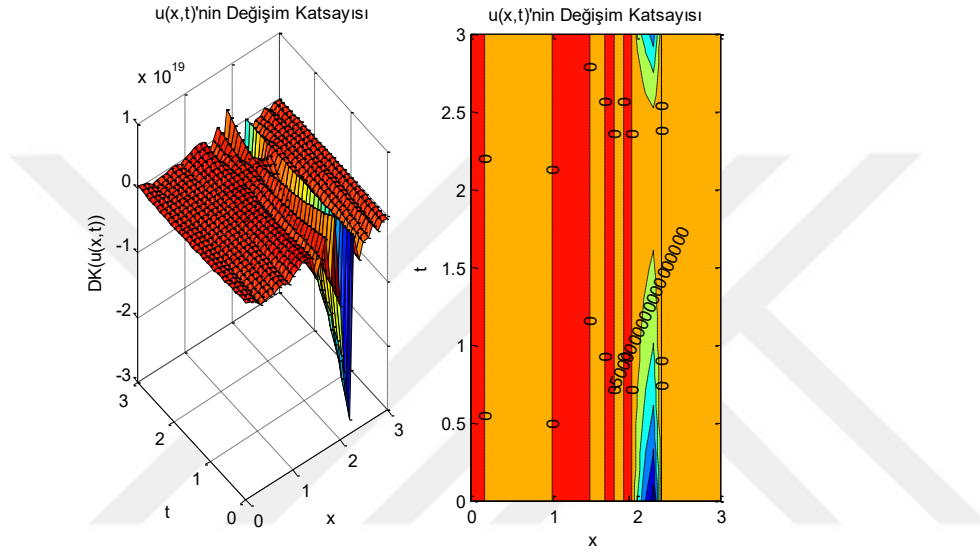
$$\text{stdsapma}[u(x, t)] = \sqrt{\text{Var}[u(x, t)]}$$

$$= \sqrt{\frac{12\cos^2 x}{25} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right)^2}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$D.K = \frac{\text{stdsapma}[u(t,x)]}{E[u(t,x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{12 \cos^2 x}{25} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right)^2}}{\frac{6 \cos x}{5} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots \right)} \times 100$$

$u(x, t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 53. $B \sim \text{Erlang}(n = 3, \lambda = 2.5)$ ve $\alpha = 1$ özel değerleri için (53) denkleminin değişim katsayısı değeri

Örnek 13

$$D_t^\alpha u(x, t) + u(x, t)u_x(x, t) - u(x, t) + u^2(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = Be^{-x}, \quad t > 0, \\ 0 < \alpha \leq 1 \quad (54)$$

Başlangıç değer probleminde , $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ üstel dağılıma sahip rastgele etki terimi olmak üzere problemin çözümünü Adomian-VIM ile elde ederek olasılık karakteristiğini inceleyiniz.

Çözüm:

Problemin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü için aşağıdaki rekürans ilişkisi elde edilir:

$$u_0(x, t) = u(x, 0) = Be^{-x},$$

$$u_{j+1}(x, t) = -I^\alpha(-LU_j + A_j + B_j), \quad j \geq 0$$

$$A_0(u_0) = N_1(u_0) = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x},$$

$$B_0(u_0) = N_2(u_0) = u_0^2$$

Burada u_0 terimi yerini yazılır ve türev alınır aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$A_0 = B^2 e^{-2x}, B_0 = B^2 e^{-2x}$$

$j = 0$ için

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= -I^\alpha(-u_0 + A_0 + B_0) \\ &= -I^\alpha(-B e^{-x} + B^2 e^{-2x} + B^2 e^{-2x}) \\ &= (B e^{-x} - 2B^2 e^{-2x}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} (N_1(u_0 + \lambda u_1))_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left((u_0 + \lambda u_1) \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + \lambda u_1) \right)_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left((u_0 + \lambda u_1) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) \right)_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda^2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} \right)_{\lambda=0}$$

$$A_1 = u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x},$$

$$A_1 = (-2B^2 e^{-2x} + 6B^3 e^{-3x}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$$B_1 = \frac{d}{d\lambda} (N_2(u_0 + \lambda u_1))_{\lambda=0}$$

$$B_1 = \frac{d}{d\lambda} ((u_0 + \lambda u_1)^2)_{\lambda=0}$$

$$B_1 = \frac{d}{d\lambda} (u_0^2 + 2\lambda u_0 u_1 + \lambda^2 u_1^2)_{\lambda=0}$$

$$B_1 = 2u_0 u_1$$

$$B_1 = (2B^2 e^{-2x} - 4B^3 e^{-3x}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$j = 1$ için

$$u_2(x, t) = -I^\alpha(-u_1 + A_1 + B_1)$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) &= -I^\alpha(-u_1 + A_1 + B_1) \\
&= -I^\alpha \left((-Be^{-x} + 2B^2e^{-2x} + 2B^3e^{-3x}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \\
&= (Be^{-x} - 2B^2e^{-2x} - 2B^3e^{-3x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} (N_1(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2))|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left((u_0 + \lambda u_1) \frac{\partial}{\partial x} (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2) \right) |_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left((u_0 + \lambda u_1) \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^2 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right) |_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} \left(u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^2 u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + \lambda u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} + \lambda^2 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + \lambda^3 u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) |_{\lambda=0} \\
&= \left(u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= (-B^2e^{-2x} + 6B^3e^{-3x} - 8B^4e^{-4x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \\
&\quad + (-B^2e^{-2x} + 4B^3e^{-3x} + 6B^4e^{-4x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} (N_2(u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2))|_{\lambda=0} \\
&= \frac{1}{2!} \frac{d^2}{d\lambda^2} (u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2)^2 |_{\lambda=0} \\
&= 2u_0 u_2 + u_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_2 &= (B^2e^{-2x} - 4B^3e^{-3x} + 4B^4e^{-4x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \\
&\quad + (2B^2e^{-2x} - 4B^3e^{-3x} - 4B^4e^{-4x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

$j = 2$ için

$$\begin{aligned}
u_3(x, t) &= -I^\alpha(-u_2 + A_2 + B_2) \\
&= -I^\alpha \left((2B^3e^{-3x} - 4B^4e^{-4x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \right. \\
&\quad \left. + (-Be^{-x} + 3B^2e^{-2x} + 2B^3e^{-3x} + 2B^4e^{-4x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \right) \\
&= (-2B^3e^{-3x} + 4B^4e^{-4x}) \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \\
&\quad + (Be^{-x} - 3B^2e^{-2x} - 2B^3e^{-3x} - 2B^4e^{-4x}) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Genel çözüm:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$$

olduğundan

$$\begin{aligned} u(x, t) = & Be^{-x} + (Be^{-x} - 2B^2e^{-2x}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ & + (Be^{-x} - 2B^2e^{-2x} - 2B^3e^{-3x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ & + (-2B^3e^{-3x} + 4B^4e^{-4x}) \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \\ & + (Be^{-x} - 3B^2e^{-2x} - 2B^3e^{-3x} - 2B^4e^{-4x}) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \end{aligned}$$

bulunur. Erlang dağılıma sahip B rastgele değişkenin parametreleri $B \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ dir. Erlang dağılımı için moment üreten fonksiyon,

$$M_B(t) = E[e^{tB}] = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-n}$$

biçiminde ifade edilir. Bu fonksiyonu kullanarak $B \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$ rastgele değişkeninin birinci ve ikinci momentleri;

$$\begin{aligned} E[B] &= \frac{n}{\lambda}, \quad E[B^2] = \frac{n(n+1)}{\lambda^2}, \quad E[B^3] = \frac{n(n+1)(n+2)}{\lambda^3} \\ E[B^4] &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{\lambda^4} \end{aligned}$$

ve varyansı

$$\begin{aligned} \text{Var}[B] &= \frac{n}{\lambda^2}, \quad \text{Var}[B^2] = \frac{2n(2n^2 + 5n + 3)}{\lambda^4} \\ \text{Var}[B^3] &= \frac{3n(3n^4 + 24n^3 + 71n^2 + 90n + 40)}{\lambda^6} \end{aligned}$$

$$Var[B^4] = \frac{8n(2n^6 + 33n^5 + 227n^4 + 822n^3 + 1625n^2 + 1629n + 630)}{\lambda^8}$$

bulunur (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

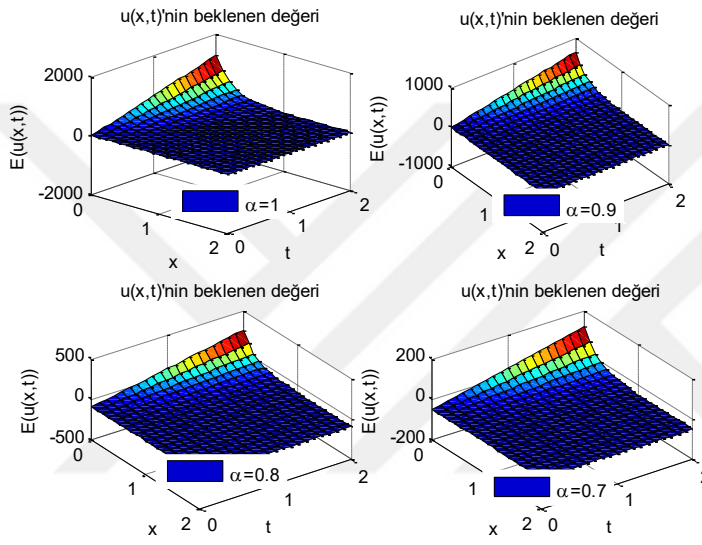
K ve T bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ çözümünün beklenen değeri;

$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= E \left[Be^{-x} + (Be^{-x} - 2B^2e^{-2x}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right. \\ &\quad + (Be^{-x} - 2B^2e^{-2x} - 2B^3e^{-3x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ &\quad + (-2B^3e^{-3x} + 4B^4e^{-4x}) \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &\quad \left. + (Be^{-x} - 3B^2e^{-2x} - 2B^3e^{-3x} - 2B^4e^{-4x}) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right] \\ &= E[B]e^{-x} + (E[B]e^{-x} - 2E[B^2]e^{-2x}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &\quad + (E[B]e^{-x} - 2E[B^2]e^{-2x} - 2E[B^3]e^{-3x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ &\quad + (-2E[B^3]e^{-3x} + 4E[B^4]e^{-4x}) \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &\quad + (E[B]e^{-x} - 3E[B^2]e^{-2x} - 2E[B^3]e^{-3x} - 2E[B^4]e^{-4x}) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &= \frac{ne^{-x}}{\lambda} + \left(\frac{ne^{-x}}{\lambda} - \frac{2n(n+1)e^{-2x}}{\lambda^2} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \\ &\quad + \left(\frac{ne^{-x}}{\lambda} - \frac{2n(n+1)e^{-2x}}{\lambda^2} - \frac{2n(n+1)(n+2)e^{-3x}}{\lambda^3} \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\ &\quad + \left(-\frac{2n(n+1)(n+2)e^{-3x}}{\lambda^3} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4n(n+1)(n+2)(n+3)e^{-4x}}{\lambda^4} \right) \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \\ &\quad + \left(\frac{ne^{-x}}{\lambda} - \frac{3n(n+1)e^{-2x}}{\lambda^2} - \frac{2n(n+1)(n+2)e^{-3x}}{\lambda^3} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2n(n+1)(n+2)(n+3)e^{-4x}}{\lambda^4} \right) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \end{aligned}$$

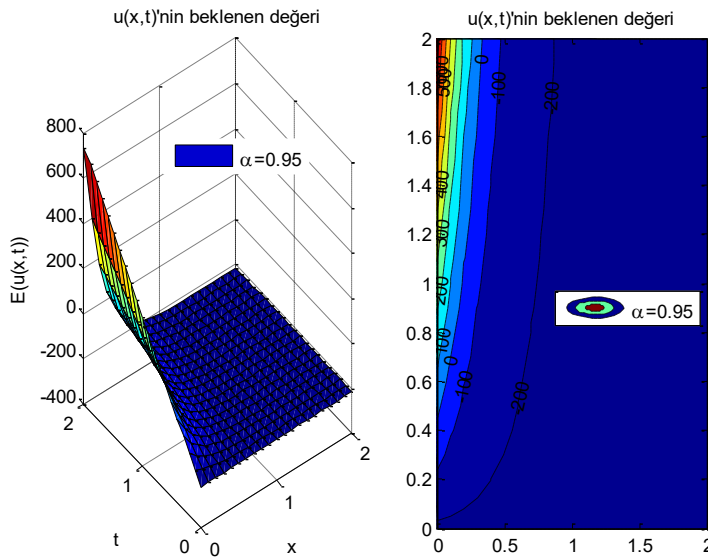
$n = 1, \lambda = 2$ özel değerleri için,

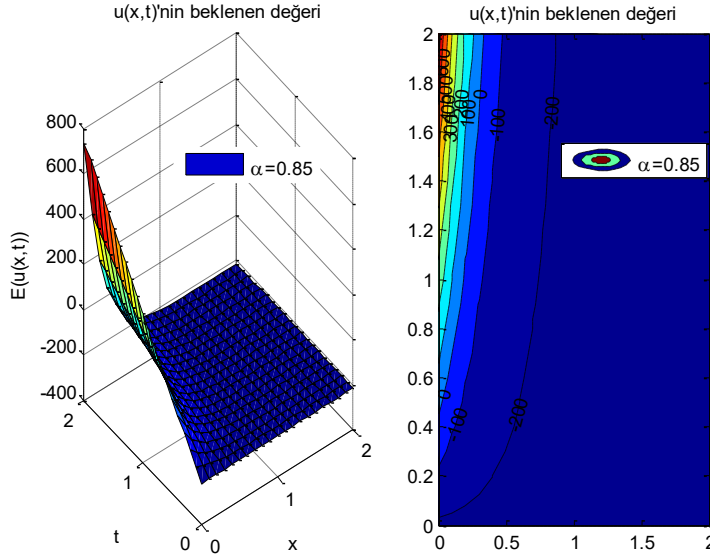
$$\begin{aligned}
E[u(x,t)] = & \frac{e^{-x}}{2} + \left(\frac{e^{-x}}{2} - \frac{4e^{-2x}}{4} \right) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \left(\frac{e^{-x}}{2} - \frac{4e^{-2x}}{4} - \frac{12e^{-3x}}{8} \right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} \\
& + \left(-\frac{12e^{-3x}}{8} + \frac{96e^{-4x}}{16} \right) \frac{\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+1)} \\
& + \left(\frac{e^{-x}}{2} - \frac{6e^{-2x}}{4} - \frac{12e^{-3x}}{8} - \frac{48e^{-4x}}{16} \right) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)}
\end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 54. $B \sim \text{Erlang}(n=1, \lambda=2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (54) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı





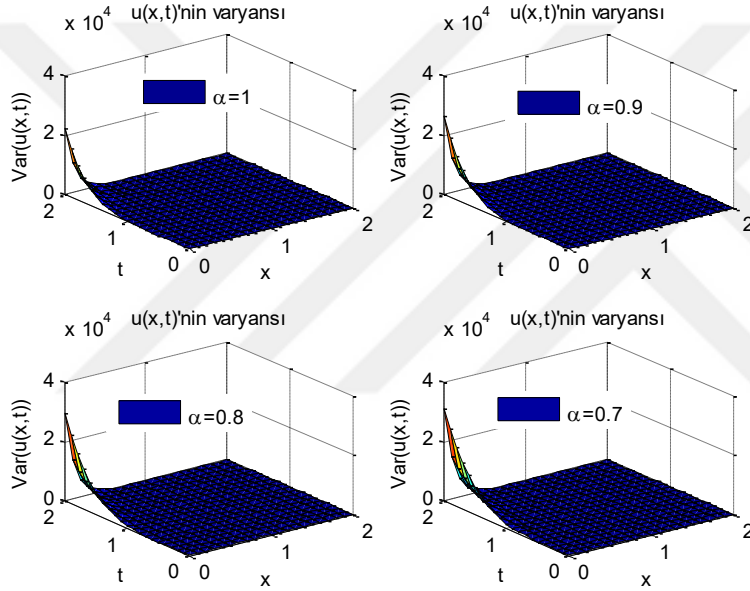
Şekil 55. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (54) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0, 2], t \in [0, 2]$ için çözüm davranışı

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[u(x, t)] &= \text{Var} \left[Be^{-x} + (Be^{-x} - 2B^2e^{-2x}) \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} \right. \\
 &\quad + (Be^{-x} - 2B^2e^{-2x} - 2B^3e^{-3x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} \\
 &\quad + (-2B^3e^{-3x} + 4B^4e^{-4x}) \frac{\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 1)} \\
 &\quad \left. + (Be^{-x} - 3B^2e^{-2x} - 2B^3e^{-3x} - 2B^4e^{-4x}) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} \right] \\
 &= \text{Var}[B]e^{-2x} + (\text{Var}[B]e^{-2x} + 4\text{Var}[B^2]e^{-4x}) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha + 1)} \\
 &\quad + (\text{Var}[B]e^{-2x} + 4\text{Var}[B^2]e^{-4x} + 4\text{Var}[B^3]e^{-6x}) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma^2(2\alpha + 1)} \\
 &\quad + (4\text{Var}[B^3]e^{-6x} + 16\text{Var}[B^4]e^{-8x}) \frac{\Gamma^2(2\alpha + 1)t^{6\alpha}}{\Gamma^4(\alpha + 1)\Gamma^2(3\alpha + 1)} \\
 &\quad + (\text{Var}[B]e^{-2x} + 9\text{Var}[B^2]e^{-4x} + 4\text{Var}[B^3]e^{-6x} \\
 &\quad + 16\text{Var}[B^4]e^{-8x}) \frac{t^{6\alpha}}{\Gamma^2(3\alpha + 1)}
 \end{aligned}$$

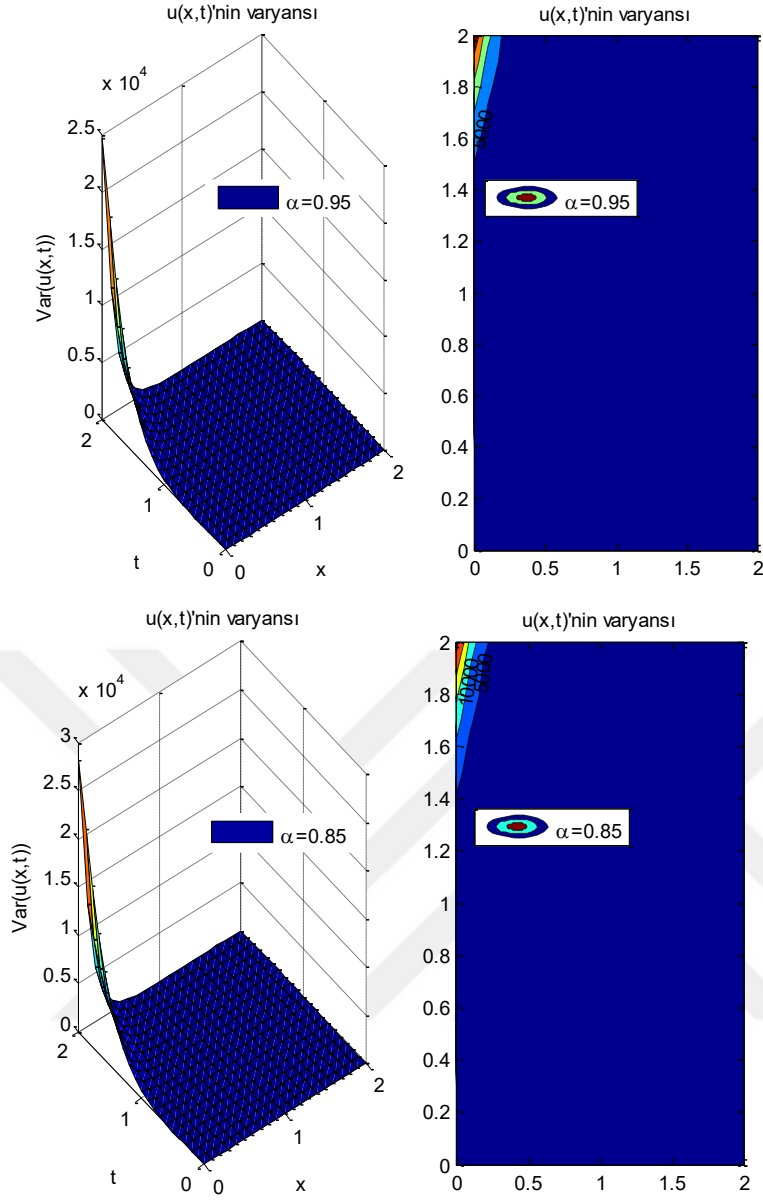
$n = 1, \lambda = 2$ özel değerleri için,

$$\begin{aligned}
Var[u(x,t)] &= \frac{1}{4}e^{-2x} + \left(\frac{1}{4}e^{-2x} + 5e^{-4x}\right) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma^2(\alpha+1)} \\
&+ \left(\frac{1}{4}e^{-2x} + 5e^{-4x} + \frac{2736}{64}e^{-6x}\right) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma^2(2\alpha+1)} \\
&+ \left(\frac{2736}{64}e^{-6x} + 2484e^{-8x}\right) \frac{\Gamma^2(2\alpha+1)t^{6\alpha}}{\Gamma^4(\alpha+1)\Gamma^2(3\alpha+1)} \\
&+ \left(\frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{180}{16}e^{-4x} + \frac{2736}{64}e^{-6x} + 2484e^{-8x}\right) \frac{t^{6\alpha}}{\Gamma^2(3\alpha+1)}
\end{aligned}$$

bulunur.



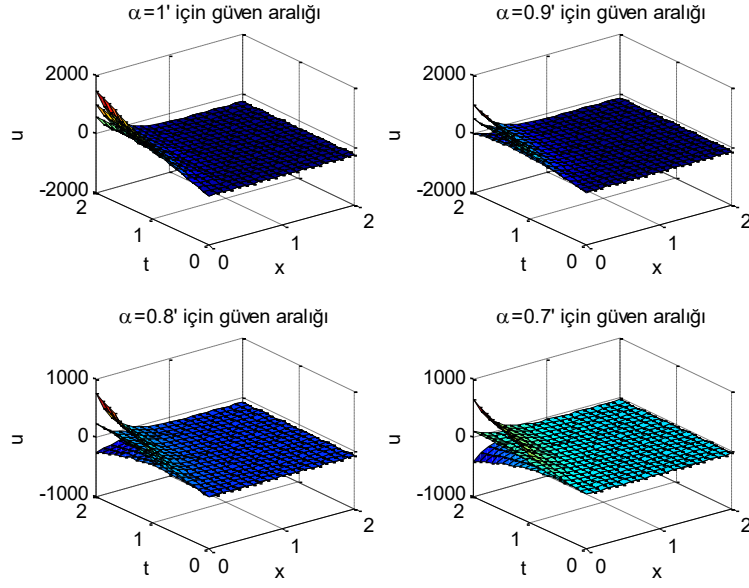
Şekil 56. $B \sim Erlang(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (54) denkleminin varyansının çözüm davranışı



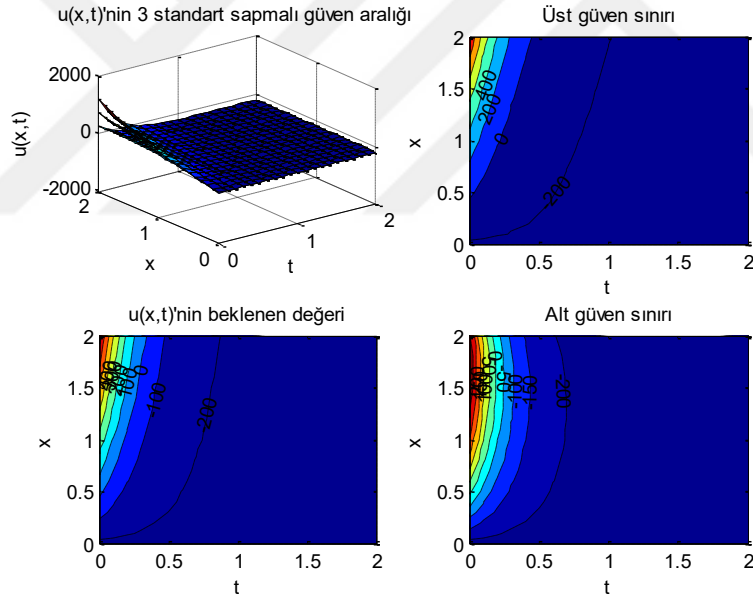
Şekil 57. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (54) denkleminin varyansının $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için çözüm davranışı

Güven aralıkları

$$[E(u(x, t)) - 3\text{stdsapma}(u(x, t)), E(u(x, t)) + 3\text{stdsapma}(u(x, t))]$$



Şekil 58. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (54) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı



Şekil 59. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ özel değerleri için (54) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

$u(x, t)$ için değişim katsayısı;

standart sapma varyansın karekökü olduğundan,

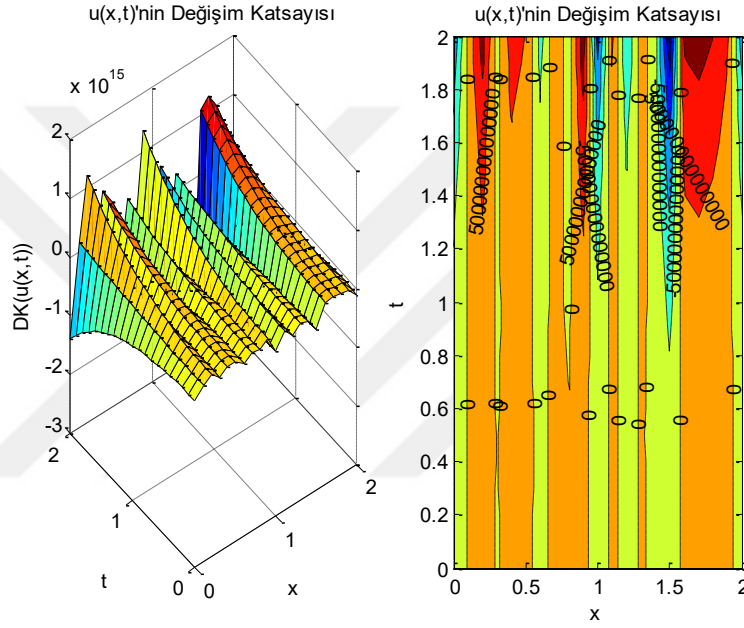
$$stdsapma[u(x, t)] = \sqrt{Var[u(x, t)]}$$

$$= \sqrt{\frac{12\cos^2 x}{25} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha + 1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha + 1)} + \dots \right)^2}$$

bulunur. Değişim katsayısı ise standart sapmanın beklenen değere bölümünün yüz ile çarpılmasından elde edilir.

$$D.K = \frac{stdsapma[u(t,x)]}{E[u(t,x)]} \times 100 = \frac{\sqrt{\frac{12\cos^2 x}{25} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots\right)^2}}{\frac{6\cos x}{5} \left(1 - \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(3\alpha+1)} + \dots\right)} \times 100$$

$u(x, t)$ için değişim katsayısı grafiği:



Şekil 60. $B \sim \text{Erlang}(n = 1, \lambda = 2)$ ve $\alpha = 1$ özel değerleri için (54) denkleminin değişim katsayısı değeri

Örnek 14

$$D_t^\alpha u(x, t) + u(x, t) + u_{xx}(x, t) = Bx^2 + 2B^2x^2t^2, \quad u(x, 0) = 0, t > 0, \\ 0 < \alpha \leq 1 \quad (55)$$

Başlangıç değer probleminde , $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ üstel dağılıma sahip rastgele etki terimi olmak üzere problemin çözümünü Adomian-VIM ile elde ederek olasılık karakteristiğini inceleyiniz.

Çözüm:

Problemin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü için aşağıdaki rekürans ilişkisi elde edilir:

$$\begin{aligned}
u_0(x, t) &= u(x, 0) + I^\alpha(Bx^2 + 2B^2x^2t^2), \\
&= Bx^2I^\alpha(t^0) + 2B^2x^2I^\alpha(t^2), \\
&= Bx^2 \frac{\Gamma(1)t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + 2B^2x^2 \frac{\Gamma(3)t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}, \\
&= \frac{Bx^2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4B^2x^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}
\end{aligned}$$

$$u_{j+1}(x, t) = -I^\alpha(A_j), \quad j \geq 0$$

$$A_0(u_0) = N(u_0) = u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

Burada u_0 terimi yerini yazılır ve türev alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\begin{aligned}
A_0 &= \left(\frac{Bx^2t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2B^2x^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right) \left(\frac{2Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{8B^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right), \\
&= \frac{2B^2x^2t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2} + \frac{16B^3x^2t^{2\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{32B^4x^2t^{2\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2}
\end{aligned}$$

$j = 0$ için

$$\begin{aligned}
u_1(x, t) &= -I^\alpha(A_0), \\
&= -I^\alpha \left(\frac{2B^2x^2t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2} + \frac{16B^3x^2t^{2\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)} + \frac{32B^4x^2t^{2\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2} \right), \\
&= - \left(\frac{2B^2x^2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{16B^3x^2\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{32B^4x^2\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \right), \\
&= -x^2 \left(\frac{2B^2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{16B^3\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} \right. \\
&\quad \left. + \frac{32B^4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \right)
\end{aligned}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} (N_1(u_0 + \lambda u_1))_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left((u_0 + \lambda u_1) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_0 + \lambda u_1) \right)_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left((u_0 + \lambda u_1) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right) \right)_{\lambda=0}$$

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} \left(u_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \lambda^2 u_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} \right)_{\lambda=0}$$

$$A_1 = u_0 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} A_1 &= x^2 \left(\frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4B^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right) (-2) \left(\frac{2B^2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16B^3\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} + \frac{32B^4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \right) \\ &\quad - x^2 \left(\frac{2B^2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{16B^3\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{32B^4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \right) (-2) \left(\frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4B^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right), \\ &= -4x^2 \left(\frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4B^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right) \left(\frac{2B^2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{16B^3\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} + \frac{32B^4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \right), \\ &= -4x^2 \left(\frac{2B^3\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)} + \frac{16B^4\Gamma(2\alpha+3)t^{4\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{32B^5\Gamma(2\alpha+5)t^{4\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} + \frac{8B^4\Gamma(2\alpha+1)t^{4\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{64B^5\Gamma(2\alpha+3)t^{4\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)} + \frac{128B^6\Gamma(2\alpha+5)t^{4\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)} \right) \end{aligned}$$

$j = 1$ için

$$u_2(x, t) = -I^\alpha(A_1)$$

$$\begin{aligned}
u_2(x, t) = & 4x^2 \left(\frac{2B^3\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \right. \\
& + \frac{16B^4\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+3)} \\
& + \frac{32B^5\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+5)} \\
& + \frac{8B^4\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+3)} \\
& + \frac{64B^5\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+5)} \\
& \left. + \frac{128B^6\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+4)} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Genel çözüm:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
u(x, t) = & x^2 \left(\frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4B^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - \frac{2B^2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right. \\
& - \frac{16B^3\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} - \frac{32B^4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \\
& + \frac{2B^3\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \\
& + \frac{16B^4\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+3)} \\
& + \frac{32B^5\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+5)} \\
& + \frac{8B^4\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+3)} \\
& + \frac{64B^5\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+5)} \\
& \left. + \frac{128B^6\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+4)} \right)
\end{aligned}$$

bulunur.

Öte yandan K rastgele değişkeninin moment üreten fonksiyonu

$$M_B(t) = E[e^{tB}] = \frac{\zeta}{\zeta - t}; t < \lambda$$

biçimindedir. Ayrıca beklenen değer ve varyansı”

$$\begin{aligned} E[B] &= \frac{1}{\zeta}, & E[B^2] &= \frac{2!}{\zeta^2}, & E[B^n] &= \frac{n!}{\zeta^n}, \\ \text{Var}(B) &= \frac{1}{\zeta^2}, & \text{Var}(B^2) &= \frac{20}{\zeta^4}, & \text{Var}(B^3) &= \frac{684}{\zeta^6}, & \text{Var}(B^4) &= \frac{39744}{\zeta^8}, \\ & & \text{Var}(B^5) &= \frac{3614400}{\zeta^{10}}, & \text{Var}(B^6) &= \frac{478483200}{\zeta^{12}} \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır (Feller, 1968; Akdeniz, 2014; Khaniyev vd., 2017).

K ve T bağımsız rastgele değişkenler olmak üzere beklenen değerin temel özellikleri kullanılırsa $u(x, t)$ çözümünün beklenen değeri;

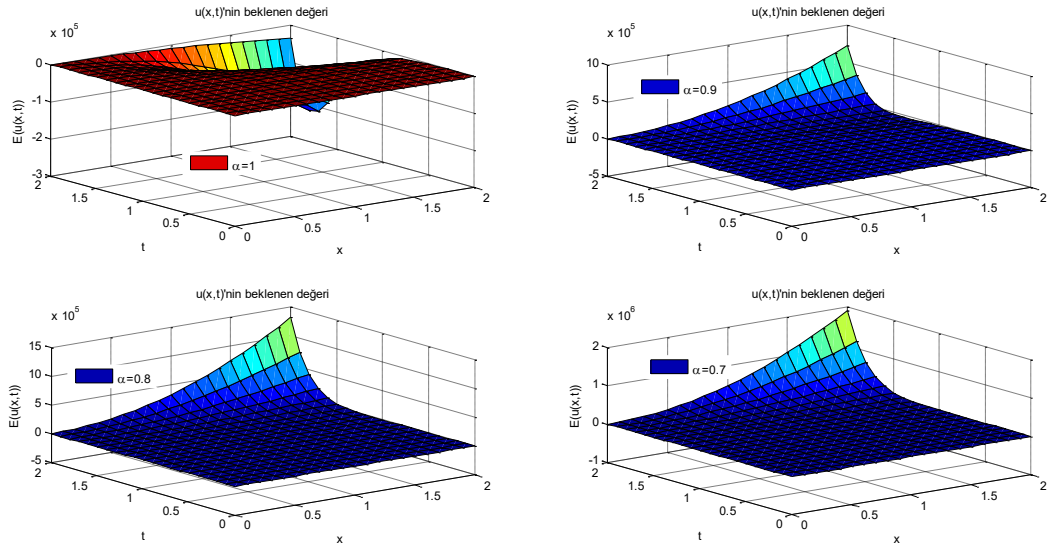
$$\begin{aligned} E[u(x, t)] &= E \left[x^2 \left(\frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{4B^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 3)} - \frac{2B^2\Gamma(2\alpha + 1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 1)} \right. \right. \\ &\quad - \frac{16B^3\Gamma(2\alpha + 3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(3\alpha + 3)} - \frac{32B^4\Gamma(2\alpha + 5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha + 3)^2\Gamma(3\alpha + 5)} \\ &\quad + \frac{2B^3\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha + 1)^3\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 1)} \\ &\quad + \frac{16B^4\Gamma(2\alpha + 3)\Gamma(4\alpha + 3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(3\alpha + 3)\Gamma(5\alpha + 3)} \\ &\quad + \frac{32B^5\Gamma(2\alpha + 5)\Gamma(4\alpha + 5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 3)^2\Gamma(3\alpha + 5)\Gamma(5\alpha + 5)} \\ &\quad + \frac{8B^4\Gamma(2\alpha + 1)\Gamma(4\alpha + 3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha + 1)^2\Gamma(\alpha + 3)\Gamma(3\alpha + 1)\Gamma(5\alpha + 3)} \\ &\quad + \frac{64B^5\Gamma(2\alpha + 3)\Gamma(4\alpha + 5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 3)^2\Gamma(3\alpha + 3)\Gamma(5\alpha + 5)} \\ &\quad \left. \left. + \frac{128B^6\Gamma(2\alpha + 5)\Gamma(4\alpha + 7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha + 3)^3\Gamma(3\alpha + 5)\Gamma(5\alpha + 4)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= x^2 \left(\frac{E[B]t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4E[B^2]t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - \frac{2E[B^2]\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right. \\
&\quad - \frac{16E[B^3]\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} - \frac{32E[B^4]\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \\
&\quad + \frac{2E[B^3]\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{16E[B^4]\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+3)} \\
&\quad + \frac{32E[B^5]\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+5)} \\
&\quad + \frac{8E[B^4]\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+3)} \\
&\quad + \frac{64E[B^5]\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+5)} \\
&\quad \left. + \frac{128E[B^6]\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+4)} \right) \\
&= x^2 \left(\frac{t^\alpha}{\zeta\Gamma(\alpha+1)} + \frac{8t^{\alpha+2}}{\zeta^2\Gamma(\alpha+3)} - \frac{8\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\zeta^2\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right. \\
&\quad - \frac{96\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\zeta^3\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} - \frac{768\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\zeta^4\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \\
&\quad + \frac{12\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\zeta^3\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \\
&\quad + \frac{384\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\zeta^4\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+3)} \\
&\quad + \frac{3840\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\zeta^5\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+5)} \\
&\quad + \frac{192\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\zeta^4\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+3)} \\
&\quad + \frac{7680\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\zeta^5\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+5)} \\
&\quad \left. + \frac{92160\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\zeta^6\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+4)} \right)
\end{aligned}$$

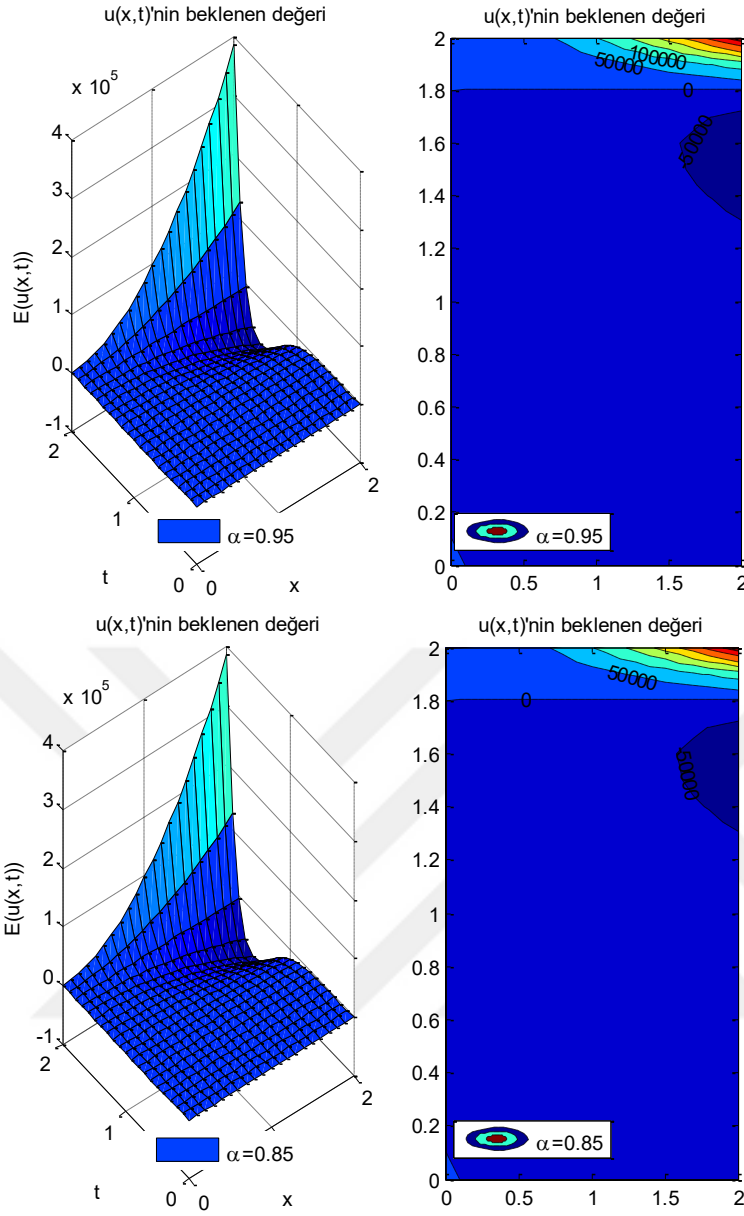
$\zeta = 2$ özel değeri için,

$$\begin{aligned}
E[u(x,t)] = x^2 & \left(\frac{t^\alpha}{2\Gamma(\alpha+1)} + \frac{2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - \frac{2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right. \\
& - \frac{12\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} - \frac{48\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \\
& + \frac{3\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{2\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \\
& + \frac{24\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+3)} \\
& + \frac{120\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+5)} \\
& + \frac{12\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+3)} \\
& + \frac{240\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+5)} \\
& \left. + \frac{1440\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+4)} \right)
\end{aligned}$$

bulunur.



Şekil 61. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (55) denkleminin beklenen değerinin çözüm davranışı

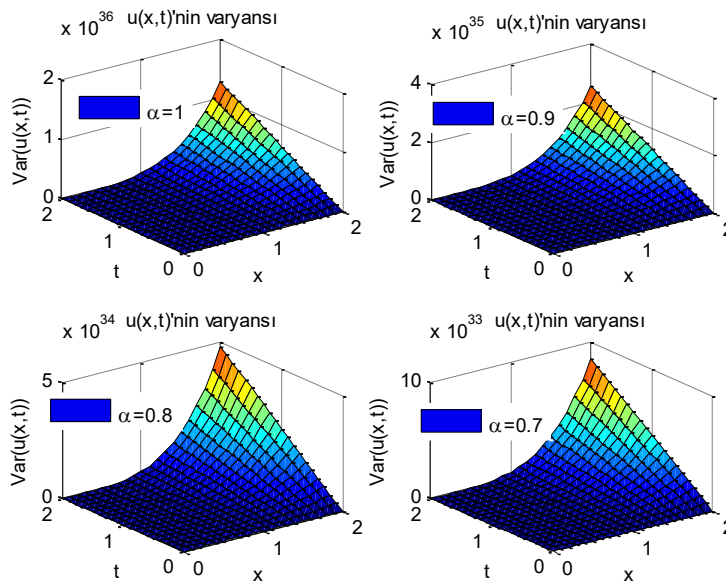


Şekil 62. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (55) denkleminin beklenen değerinin $x \in [0,3], t \in [0,3]$ için çözüm davranışı

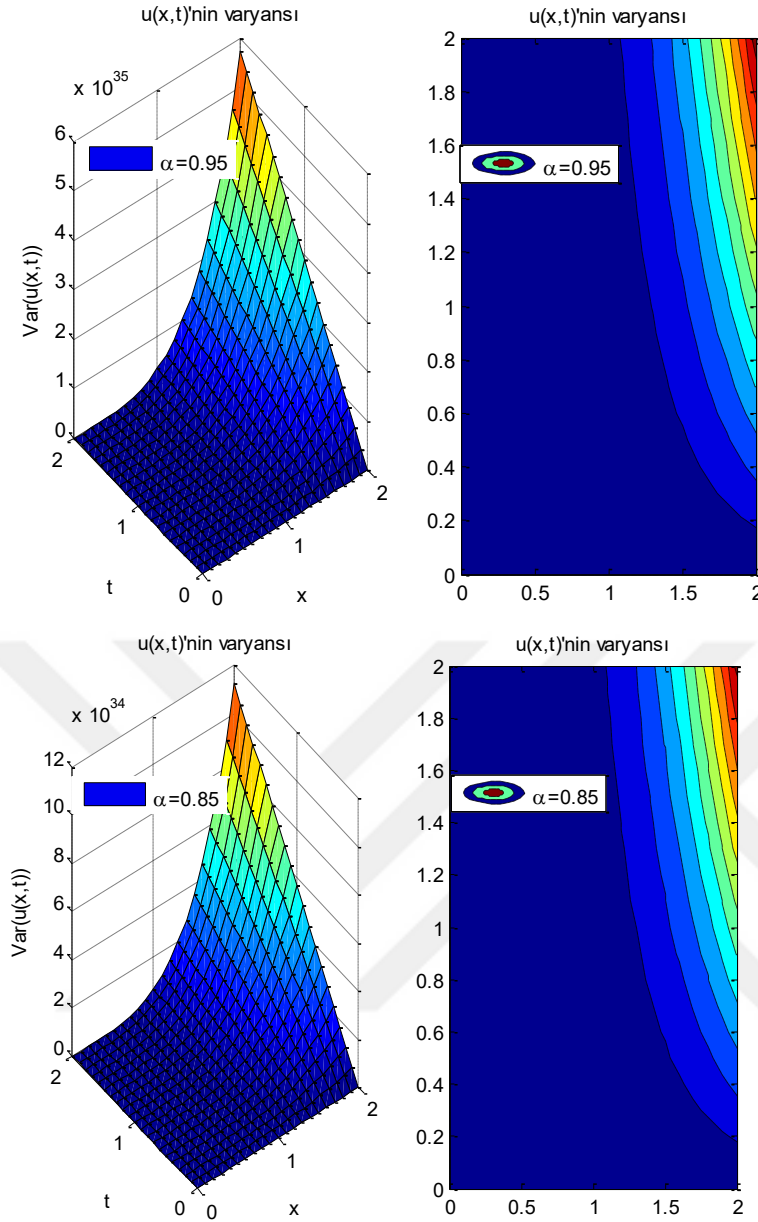
$$\begin{aligned}
Var[u(x, t)] = Var & \left[x^2 \left(\frac{Bt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{4B^2t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} - \frac{2B^2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right. \right. \\
& - \frac{16B^3\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} - \frac{32B^4\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \\
& + \frac{2B^3\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \\
& + \frac{16B^4\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+3)} \\
& + \frac{32B^5\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+5)} \\
& + \frac{8B^4\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+3)} \\
& + \frac{64B^5\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+5)} \\
& \left. + \frac{128B^6\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+4)} \right) \Big] \\
= x^4 & \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2} \frac{1}{\zeta^2} + \left(\frac{4t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right)^2 \frac{20}{\zeta^4} + \left(\frac{2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right)^2 \frac{20}{\zeta^4} \right. \\
& + \left(\frac{16\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} \right)^3 \frac{684}{\zeta^6} \\
& + \left(\frac{32\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \right)^2 \frac{39744}{\zeta^8} \\
& + \left(\frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \right)^2 \frac{684}{\zeta^6} \\
& + \left(\frac{16\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+3)} \right)^2 \frac{39744}{\zeta^8} \\
& + \left(\frac{32\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+5)} \right)^2 \frac{3614400}{\zeta^{10}} \Big) \\
& + x^4 \left(\left(\frac{8\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+3)} \right)^2 \frac{39744}{\zeta^8} \right. \\
& + \left(\frac{64\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+5)} \right)^2 \frac{3614400}{\zeta^{10}} \\
& \left. + \left(\frac{128\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+4)} \right)^2 \frac{478483200}{\zeta^{12}} \right)
\end{aligned}$$

$\zeta = 2$ özel değeri için,

$$\begin{aligned}
 Var[u(x,t)] = & x^4 \left(\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2} \frac{1}{2^2} + \left(\frac{4t^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)} \right)^2 \frac{20}{2^4} + \left(\frac{2\Gamma(2\alpha+1)t^{3\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+1)} \right)^2 \frac{20}{2^4} \right. \\
 & + \left(\frac{16\Gamma(2\alpha+3)t^{3\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(3\alpha+3)} \right)^3 \frac{684}{2^6} \\
 & + \left(\frac{32\Gamma(2\alpha+5)t^{3\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)} \right)^2 \frac{39744}{2^8} \\
 & + \left(\frac{2\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+1)t^{5\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)^3\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+1)} \right)^2 \frac{684}{2^6} \\
 & + \left(\frac{16\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+3)} \right)^2 \frac{39744}{2^8} \\
 & + \left(\frac{32\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+5)} \right)^2 \frac{3614400}{2^{10}} \\
 & + \left(\frac{8\Gamma(2\alpha+1)\Gamma(4\alpha+3)t^{5\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+1)^2\Gamma(\alpha+3)\Gamma(3\alpha+1)\Gamma(5\alpha+3)} \right)^2 \frac{39744}{2^8} \\
 & + \left(\frac{64\Gamma(2\alpha+3)\Gamma(4\alpha+5)t^{5\alpha+4}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+3)^2\Gamma(3\alpha+3)\Gamma(5\alpha+5)} \right)^2 \frac{3614400}{2^{10}} \\
 & \left. + \left(\frac{128\Gamma(2\alpha+5)\Gamma(4\alpha+7)t^{5\alpha+6}}{\Gamma(\alpha+3)^3\Gamma(3\alpha+5)\Gamma(5\alpha+4)} \right)^2 \frac{478483200}{2^{12}} \right)
 \end{aligned}$$



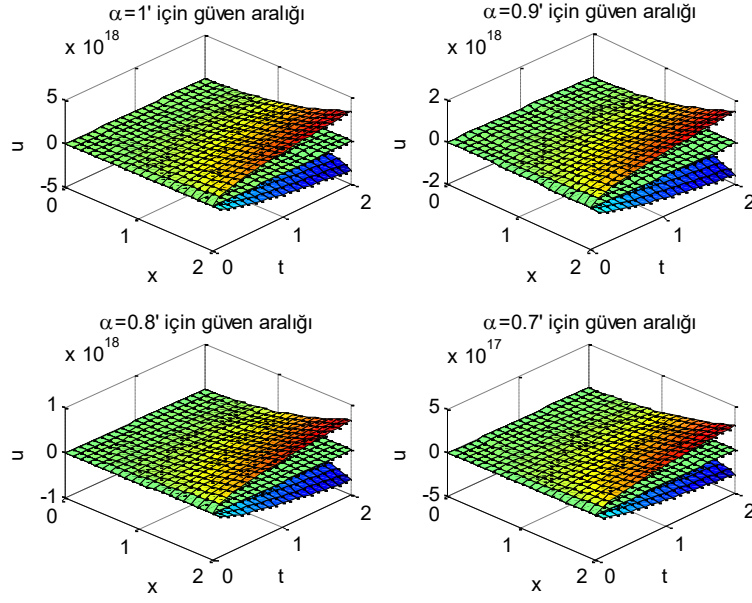
Şekil 63. $B \sim Exp(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (55) denkleminin varyansının çözüm davranışı



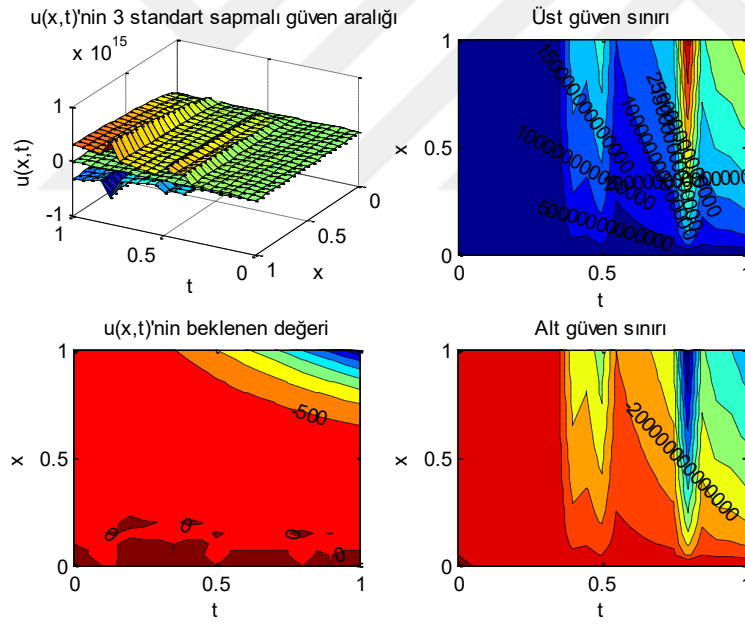
Şekil 64. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 0.95, 0.85$ özel değerleri için (55) denkleminin varyansının $x \in [0, 3], t \in [0, 3]$ için çözüm davranışı

Güven aralıkları

$$[E(u(x, t)) - 3\text{stdsapma}(u(x, t)), E(u(x, t)) + 3\text{stdsapma}(u(x, t))]$$



Şekil 65. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ ve $\alpha = 1, 0.9, 0.8, 0.7$ özel değerleri için (55) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı



Şekil 66. $B \sim \text{Exp}(\zeta = 2)$ özel değerleri için (55) denkleminin güven aralığının çözüm davranışı

6. İRDELEME

Bu çalışmadan elde edilen veriler ışığında lineer olmayan problemlerin çözümü için kullanılan bazı yöntemlerin aksine VIM küçük parametrelere bağlı olmadığından genel çözüme daha hızlı yakınsadığı görülmüştür. Öte yandan kullanım kolaylığı da yöntemi daha cazip hale getirmiştir. Tüm bunlara ek olarak diferensiyel denklemlerin çözümlerini bulurken hata payının istenilen düzeylerde olduğu anlaşılmıştır.

Literatürde yapılan detaylı araştırmalar sonucunda lineer veya lineer olmayan diferensiyel denklemlere VIM, LVIM ve Adomian-VIM yöntemlerinin çokça uygulamasına rastlanmıştır. Ancak yöntemi rastgele diferensiyel denklemlerin çözümü için kullanan çalışma sayısının oldukça kısıtlı olduğu görülmüştür. Bu sebepten yapılan bu çalışma literatürdeki bu boşluk sebebiyle yapılmış faydalı olması amaçlanmıştır.



7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada Varyasyonel İterasyon Yöntemi, Laplace Varyasyonel İterasyon Yöntemi ve Adomian-Varyasyonel İterasyon Yöntemi kullanılarak rastgele diferensiyel denklemlerin çözüm davranışları incelenmiştir. Buna bağlı olarak adi, kısmi, kesirli diferensiyel denklem ve denklem sistemleri alınarak öncelikle belirlenen olasılık dağılımları altında rastgele yapılmış takiben genel çözümleri (tam veya seri formunda) bulunmuştur. Genel çözümlerin daha detaylı analizi için beklenen değeri, varyansı ve güven aralıkları (bazı sorularda değişim katsayısı da hesaplanmıştır) hesaplanmış MAPPLE ve MATLAB programları ile grafikleri oluşturulmuştur. Ek olarak tezin son kısmında VIM ile Adomian Ayrıştırma yöntemi birlikte kullanılarak çözümler üretilmiştir. Bulunan çözümler değerlendirilmiş ve nihai olarak yöntemin çoğu lineer veya lineer olmayan problemde iyi sonuçlar verdiği görülmüştür.

8. ÖNERİLER

Lineer olmayan diferansiyel denklemlerin çözümlerinin bulunabilmesi adına birçok yöntem geliştirilmiştir. Varyasyonel iterasyon yöntemi de bunlardan bir tanesidir. Bu yöntem ve diğer yöntemler verdiği sonuçlarda hatayı minimize etmek adına sürekli geliştirilmiş ve farklı versiyonları üretilmiştir.

Bu çalışmada VIM, LVIM ve Adomian-VIM yöntemleri uygulanmıştır. Bu uygulamalara ek olarak Optimal VIM, Modifiye VIM gibi yöntemin farklı versiyonları bulunmaktadır. Bu versiyonlarla da lineer olmayan rastgele diferansiyel denklemler ele alınıp çözülebilir. Bulunan çözümlerin hata analizi yapılmak suretiyle yöntemler kıyaslanarak hangisinin daha kullanışlı olduğu tespit edilebilir.



KAYNAKÇA

- Abdou, M. A. ve Soliman, A.A. (2005). New applications of variational iteration method. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 211(1-2), 1-8.
- Abbasbandy, S. (2007). A new application of He's variational iteration method for quadratic Riccati differential equation by using Adomian's polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(1), 59-63.
- Akdeniz, F. (2014). *Olasılık ve İstatistik*, Akedemisyen Kitabevi, Ankara, 602s.
- Ahmad, H. ve Nasar, J. J. (2024). Atangana-Baleanu Fractional Variational Iteration Method for Solving Fractional Order Burger's Equations. *Journal of Education for Pure Science-University of Thi-Qar*, 14(2).
- Bassi, N. M. ve Ismail, A. (2022). The modified Variational iteration method to solve linear fractional differential equations. *J. Adv. Math. Comput. Sci.*, 37(8), 57-64.
- Dehghan, M. ve Fatemeh, S. (2008). Approximate solution of a differential equation arising in astrophysics using the variational iteration method. *New Astronomy*, 13(1), 53-59.
- Ji-Huan, H. (1997). A new approach to nonlinear partial differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2(4), 230-235.
- Ji-Huan, H. (1997). Variational iteration method for delay differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2(4), 235-236.
- Ji-Huan, H. (1999). Variational iteration method—a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International journal of non-linear mechanics*, 34(4), 699-708.
- Ji-Huan, H. (2000). Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. *Applied mathematics and computation*, 114(2-3), 115-123.
- Khuri, S. A. ve Sayfy, A. (2012). A Laplace variational iteration strategy for the solution of differential equations. *Applied Mathematics Letters*, 25(12), 2298-2305.
- Odibat, Z. M. ve Momani, S. (2006). Application of variational iteration method to nonlinear differential equations of fractional order. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7(1), 27-34.
- Khaniyev, T., Ünver, İ., Küçük, Z., ve Kesemen T. (2017). *Olasılık Kuramında Çözümlü Problemler*, Nobel Akademik Yayıncılık.
- Momani, S. ve Salah, A. (2006). Application of He's variational iteration method to Helmholtz equation. *Chaos, Solitons & Fractals*, 27(5), 1119-1123.

- Merdan, M. (2013). Analytical approximate solutions of fractionel convection-diffusion equation with modified Riemann-Liouville derivative by means of fractional variational iteration method. *Iranian Journal of Science*, 37(1), 83-92.
- Merdan, M. ve Atasoy, N. (2023). On Solutions Of Random Partial Differential Equations With Laplace Adomian Decomposition Method. *Cumhuriyet Science Journal*, 44(1), 160-169.
- Merdan, M., Merve, M. ve Şahin. R. (2024). Investigation of solution behavior of Differential Equations by Sumudu methods of random complex Partial Differential Equations. *Cumhuriyet Science Journal*, 45(3), 562-570.
- Merdan, M. ve Öktem, S. (2024). On solutions of time fractional order random HIV/AIDS modelling. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 42(6), 1899-1906.
- Odibat, Z. ve Momani, S. (2009). The variational iteration method: an efficient scheme for handling fractional partial differential equations in fluid mechanics. *Computers & Mathematics with Applications*, 58(11-12), 2199-2208.
- Sweilam, N. H. (2007). Fourth order integro-differential equations using variational iteration method. *Computers & Mathematics with Applications*, 54(7-8), 1086-1091.
- Song, J., Yin, F., Cao, X. ve Lu, F. (2013). Fractional variational iteration method versus Adomian's decomposition method in some fractional partial differential equations. *Journal of Applied Mathematics*, 2013(1), 392567.
- Şişman, Ş. ve Merdan, M. (2024). Analysis of Random Difference Equations Using the Differential Transformation Method. *Journal of Applied Mathematics* 2024(1), 2424880.
- Wazwaz, A. M. (2008). A study on linear and nonlinear Schrodinger equations by the variational iteration method. *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(4), 1136-1142.

ÖZGEÇMİŞ

2013 yılında Şiran Anadolu Öğretmen Lisesine girdi. 2017 yılında buradan mezun oldu. 2018 yılında Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümünü kazandı. 2022 yılında üniversite öğrenimini tamamladı. 2023 yılı bahar döneminde Gümüşhane Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Matematik Mühendisliği ABD yüksek lisans programında eğitimine başladı. Hali hazırda Gümüşhane’de ikamet etmektedir.

