



**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

RASTLANTISAL METRİK UZAYLARDA PARAMETRİK EĞRİLER

Hanife DİBEKÇİ

BURDUR, 2021

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**RASTLANTISAL METRİK UZAYLARDA
PARAMETRİK EĞRİLER**

Hanife DİBEKÇİ

Danışman: Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

BURDUR, 2021

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum **“Rastlantısal Metrik Uzaylarda Parametrik Eğriler”** başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

28/06/2021

Hanife DİBEKÇİ

TEŞEKKÜR

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN’e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen aileme sonsuz sevgi ve saygılarımı sunarım.

Haziran, 2021

Hanife DİBEKÇİ



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ŞEKİL DİZİNİ.....	iii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	iv
ÖZET	vi
SUMMARY	vii
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	3
2.1. Metrik Uzaylarda Yollar	3
2.2. Metrik Uzaylarda Yaylar	6
2.3. Uzunluk Yapıları ve Uzunluk Uzayları	8
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	13
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA.....	18
5. SONUÇ.....	25
KAYNAKLAR.....	26

ŞEKİL DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.3.1. A ile B noktaları arasındaki kuş uçuşu uzaklık.....	8
--	---



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$a. s.$	: Hemen kesinlikle (almost surely)
A	: Bir metrik uzayda yer alan bir yay
$\mathcal{C}([a, b])$	: $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, bir metrik uzayda değerler alan tüm yolların kümesi
$\mathcal{C}_r([a, b], \mathbf{S})$	: $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, $\mathbf{S}$ uzayında değerler alan ve hemen hemen rektifiye edilebilir tüm yolların kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$\hat{d}$	: Bir d metriğinin doğurduğu iç metrik
Δ	: Bir kapalı aralığın herhangi bir bölüntüsü
$ \Delta $	: Δ bölüntüsünün modülü
$\mathcal{D}(f)$	: f yolunun rastlantısal çapı
$F^*(p_0)$	: Bir F dönüşümünün, p_0 noktasındaki yayılımı
γ	: Bir metrik uzayda ya da genel bir topolojik uzayda bir yol
$\mathbb{K}$	: Cisim
$L_0^+(\Omega)$	: Hemen kesinlikle ($a. s.$) negatif olmayan, reel değerli rastgele değişkenlerin denklik sınıflarının kümesi
$L_0(\Omega, \mathbb{R})$	: Reel değerli rastgele değişkenlerin denklik sınıflarının kümesi
$L_0(\Omega, R)$	: Genişletilmiş reel sayı değerli rastgele değişkenlerin denklik sınıflarının kümesi
$L_d(\gamma)$	: γ yolunun, d metriğine göre uzunluğu
$l(A)$	: Bir A yayının uzunluğu
$\mathbf{L}_f$	: f yolunun rastlantısal uzunluğu
$(\mathbf{M}, d)$	: Metrik uzay
μ	: Ölçü
$\mu - a. e.$	: μ ölçüsüne göre hemen her yerde (μ –almost everywhere)
$\mathcal{N}_p(\varepsilon, \lambda)$	: p ' nin (ε, λ) –komşuluğu
$\mathbf{N}$	: Rastlantısal norm
$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$	: Ölçü uzayı
$(\Omega, \mathcal{A}, P)$	: Olasılık uzayı
P	: Olasılık ölçüsü
R	: Genişletilmiş reel sayılar kümesi

R^+	: Negatif olmayan, genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	: n boyutlu Öklid uzayı
$\mathfrak{R}(J)$	: J dönüşümünün görüntü kümesi
ρ_L	: Uzunluk metriği (iç metrik)
$(\mathbf{S}, \mathbf{N})$	: Rastlantısal normlu (RN) uzay
$(\mathbf{S}, \mathcal{X})$	: Rastlantısal metrik (RM) uzay
$(\mathbf{T}, \tau)$	: Topolojik uzay
Θ	: $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ uzayının sıfır elemanı
$(\mathbf{U}, L)$	: Uzunluk yapısı
$V_\Delta(\gamma)$	: γ yolunun, Δ bölüntüsüne göre toplam varyasyonu
V_f^Δ	: f yolunun, Δ bölüntüsüne göre rastlantısal toplam varyasyonu
$\mathcal{X}$	: Rastlantısal metrik
$X_{pq} = \mathcal{X}(p, q)$	: p ile q arasındaki rastlantısal uzaklık

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Rastlantısal Metrik Uzaylarda Parametrik Eğriler

Hanife DİBEKÇİ

**Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

Haziran, 2021

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, Metrik Geometri ve Rastlantısal Metrik (RM) Uzaylar teorilerinin tarihsel gelişimlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde, Metrik Geometride yer alan yol (parametrik eğri), yay, uzunluk yapısı ve uzunluk uzayı gibi bazı temel kavramlara ve bunlara ilişkin sonuçlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde; RM uzaylara ilişkin (ε, λ) –topolojisi, rastlantısal normlu uzay, bir RM uzayda yol (parametrik eğri), rastlantısal toplam varyasyon, rastlantısal uzunluk, hemen hemen rektifiye edilebilirlik ve rektifiye edilemezlik kavramlarına yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm, tezin özgün bölümü olup bu bölümde, bir RM uzayda yer alan yolların (parametrik eğrilerin) rastlantısal uzunluklarına ve rastlantısal çaplarına dair bazı temel sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu tip yolların oluşturduğu uzayların bazı özellikleri de incelenmiştir.

Beşinci bölüm tezin sonuç bölümü olup, bu bölümde tez çalışması özetlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: metrik uzay, yol (parametrik eğri), yay, uzunluk yapısı, uzunluk uzayı, rastlantısal metrik (RM) uzay, rastlantısal uzunluk

SUMMARY

M. Sc. Thesis

Parametric Curves in Random Metric Spaces

Hanife DİBEKÇİ

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Celaleddin ŞENÇİMEN

June, 2021

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the historical developments of the theories of Metric Geometry and Random Metric (RM) Spaces are presented.

In the second chapter, some basic concepts such as path (parametric curve), arc, length structure and length space, and results related to these concepts in Metric Geometry are presented.

In the third chapter; the concepts of (ε, λ) –topology related to RM spaces, random normed space, path (parametric curve) in an RM space, random total variation, random length, almost rectifiability and non-rectifiability are presented.

The fourth chapter is the original part of the thesis, and in this chapter; some basic results related to the random lengths and random diameters of paths (parametric curves) in RM spaces have been obtained. Furthermore, some properties of the spaces of these paths have been investigated.

The fifth chapter is the conclusion part of the thesis; and in this chapter, the thesis is summarized.

Keywords: metric space, path (parametric curve), arc, length structure, length space, random metric (RM) space, random length

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın çıkış noktaları; Cebir, Diferansiyel Geometri ve Topoloji gibi pek çok alanla yakından ilişkili Metrik Geometri Teorisi ile rastlantısal özellikler sergileyen uzaklıkların modellenmesinde başvurulmuş kavramlardan biri olan Rastlantısal Metrik (RM) Uzaylar Teorisidir.

Metrik Geometri, geometrik nesneleri genel olarak metrik ve topolojik metotlarla analiz eder. Teorinin temellerine ilişkin ilk çalışmalardan bazıları Menger (1928), Birkhoff (1941), Busemann (1942, 1964) ve Alexandrov (1944) tarafından ortaya konulmuştur. Konunun gelişimine ilişkin kapsamlı çalışmalardan bazıları Blumenthal (1970), Alexandrov ve Reshetnyak (1989), Burago vd. (2001), Gromov vd. (2001) ve Papadopoulos (2014)'un çalışmaları olarak sıralanabilir.

Günümüzde de Metrik Geometri Teorisi ile ilgili pek çok çalışma yayımlanmaktadır. Yakın zamanda ortaya konulan bazı çalışmalardan söz etmek gerekirse; örneğin, Ergodik Teorideki bazı uygulamalar için Bader vd. (2016)'nin çalışması incelenebilir. Cebirsel anlamda birtakım yaklaşımlar Larotonda (2019) ile Struve ve Struve (2019)'nin çalışmalarında bulunabilir. Geometri-Topoloji eksenindeki birtakım uygulamalara da Crasmareanu ve Bercu (2018), Di Nezza ve Lu (2019), Brady vd. (2020) ile Darvas vd. (2021) yer vermektedirler. Öte yandan, Gaussier ve Seshadri (2017), Hiperbolik Geometri-Kompleks Analiz ekseninde yer alan bazı çalışmaları derlemişlerdir. Bunların yanı sıra, teorinin Kuantum Mekaniğindeki birtakım uygulamaları için Bracken (2019)'in çalışması incelenebilir.

Öte yandan, Metrik Geometrinin öncülerinden biri olan K. Menger aynı zamanda soyut bir küme üzerinde istatistiksel uzaklık yaklaşımını öne süren ilk kişidir. Bu tip bir kümeyi “istatistiksel metrik uzay” olarak adlandırmıştır (bkz. Menger, 1942). Günümüzde bu tip kümeler “olasılıksal metrik (OM) uzay” olarak adlandırılmaktadır. Bir OM uzayda iki nokta arasındaki uzaklık rastlantısal olup bir olasılık dağılım fonksiyonu ile temsil edilir. OM Uzaylar Teorisine ilişkin pek çok çalışma olup bunların önemli bir kısmı Schweizer ve Sklar (1983), Constantin ve Istrăţescu (1989), Hadžic ve Pap (2001) ile Lafuerza-Guillén ve Harikrishnan (2014)'in çalışmalarında bulunabilir. OM uzayların fiziksel uygulamalarına ise Rosen (1947)'in, Blokhintsev (1973)'in ve Roy (1998)'un çalışmalarında yer verilmiştir.

Bu tezin konusunun bir parçasını oluşturan RM uzay kavramı ise Špaček (1956, 1960) tarafından tanımlanmış olup daha sonra pek çok araştırmacı tarafından ele alınmıştır (bkz. Simboan ve Theodorescu (1962), Onicescu (1964), Stevens (1968), Calabrese (1978), Sherwood (1969), Brown (1972), Schweizer ve Sklar (1983), Guo (1999, 2001a, 2001b)). OM uzaylar ve RM uzaylar yakından ilişkili olsa da bazı temel araçları yönünden birbirlerinden farklıdırlar. Örneğin, RM Uzaylar Teorisinde, olasılık dağılım fonksiyonlarının yerine, Olasılık Teorisinin ölçü-teorik araçları önemli bir rol oynar. Bir RM uzayın iki noktası arasındaki mesafe bir rastgele değişken veya σ –sonlu bir ölçü uzayı üzerinde tanımlı, daha genel bir μ –ölçülebilir fonksiyondur. RM uzayların tarihsel gelişimi Schweizer ve Sklar (1983) ile Guo (1999, 2001a, 2001b)’nun çalışmalarında bulunabilir. Bunun yanı sıra, RM uzayların bazı uygulama alanları da mevcuttur. Örneğin; Ölçü Teorisindeki uygulamalar için Guo (1996)’nın, Yaklaşım Teorisindeki uygulamalar için Guo ve You (1998)’nin, Fonksiyonel Analizdeki uygulamalar için Guo (2010)’nin ve koşullu risk ölçülerindeki uygulamalar için Guo vd. (2014)’nin makaleleri incelenebilir. Son olarak, bu uzaylara ilişkin güncel araştırmalar için Zhang ve Liu (2017)’nin, Thang vd. (2019)’nin ve Guo vd. (2020)’nin çalışmaları incelenebilir.

Öte yandan; Xavier (1979) ve Oliveira (1987)’nin çalışmalarında, olasılık dağılım fonksiyonlarından yola çıkılarak, bir OM uzaydaki eğrilerin yay uzunluklarının incelendiği görülmektedir. Ayrıca, Şençimen (2020)’in çalışmasında bu tür geometrik kavramlar bir RM uzayda ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasının amacı ise; öncelikle Metrik Geometrinin bazı temel kavramlarını ve sonuçlarını özetleyerek incelemek, sonrasında da bu araçların bazılarını yola çıkarak, üzerinde (ε, λ) –topolojisi tanımlanmış bir RM uzayda yer alan yolların (parametrik eğrilerin) bazı temel özelliklerine dair birtakım sonuçlar elde etmektir.

Bir soyut uzayda yer alan herhangi bir eğrinin matematiksel özellikleri o uzayın geometrik analizi için bir temel oluşturduğundan, uzaklıkların olasılıksal belirsizliğini temel alan ve çeşitli uygulama alanları olan RM uzaylardaki yol kavramının ve buna ilişkin diğer araçların incelenmesinin bu tip uzayların geometrik özelliklerine bir ölçüde katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde bazı temel kaynaklardan yararlanılarak, genel itibariyle Metrik Geometrinin bazı temel kavramları ve sonuçları tanıtılmıştır.

2.1 Metrik Uzaylarda Yollar

Bu kesimde yer alan bilgiler için genel olarak Papadopoulos (2014)'un çalışmasından yararlanılmıştır.

Düzlemde ve üç boyutlu uzayda yer alan eğrilerin uzunluklarının hesabı oldukça eski bir uğraşı olup kökeni Arşimet'e kadar uzanır. Metrik uzaylardaki yolların (parametrik eğrilerin) incelenmesi ve temel özelliklerinin ortaya konulması ise Metrik Uzaylar Teorisine koştur olarak, 20. yüzyılın başına dayanır. Jordan, Fréchet, Lebesgue ve Menger gibi önde gelen matematikçilerin bu konuya katkıları büyüktür.

Bir metrik uzayda yer alan bir yolun uzunluğu, bu metrik uzayı tanımlayan uzaklık aksiyomları ve bir limit işlemi yardımıyla tanımlanır. Herhangi iki noktası, sonlu uzunluğa sahip bir yolla bağlanabilen (rektifiye edilebilir yollarla bağlantılı) metrik uzaylar Matematiksel Analizde ve Geometride önemli bir rol oynar.

Bu bağlamda; ilk olarak, bir metrik uzayda “yol” kavramı göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.1.1 $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a \leq b$ olsun. Bu durumda $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ biçiminde tanımlı, sürekli bir dönüşüme, $\mathbf{M}$ uzayında bir *yol* adı verilir. $\gamma(a) = p$ ve $\gamma(b) = q$ ise p ve q noktalarına, γ 'nın *uç noktaları* denir. Böyle bir durumda γ yolu p ve q noktalarını *birleştirir* denir.

Bazı kaynaklarda (örneğin; Alexandrov ve Reshetnyak, 1989) *yol* yerine, *parametrik eğri* ifadesi de kullanılmakta ve bir γ yolunun *görüntü kümesi* olan $\gamma([a, b])$ kümesi ise γ 'nın *dayanağı* olarak adlandırılmaktadır. Her ne kadar “yol” ve “parametrik eğri” kavramları birbirinin yerine kullanılabilir olsa da, bu tezde genel olarak; t parametresi $[a, b]$ üzerinde artarken $\gamma(t)$ noktalarının $\mathbf{M}$ uzayında oluşturduğu eğri (ki bu eğri, üzerindeki noktaların herhangi birinden birkaç kez geçebilir), γ yolunun *temsil ettiği eğri* biçiminde ifade edilecektir. Tersine, bir “eğrinin parametrik gösterimini” ifade eden dönüşüm de “yol” olarak değerlendirilecektir. Burada dikkat edilmesi gereken husus, γ yolunun *dayanağı* kavramı ile γ yolunun *temsil ettiği eğri* kavramı arasındaki ayırtıdır.

Tanım 2.1.2 Bir $[a, b]$ aralığının a ve b noktalarını da içeren sonlu bir Δ alt kümesine, $[a, b]$ aralığının bir *altbölümü* (*bölüntüsü*) adı verilir. Δ 'nın herhangi bir elemanına, Δ 'nın bir *köşesi* denir. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ koşulunu sağlayan, köşelerin artan bir sırada olduğu, sonlu bir $(t_i)_{i=0, \dots, n}$ reel dizisi için $\Delta = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ gösterimi; Δ 'nın bir bölüntü olduğu, t_i noktalarının Δ 'nın köşeleri olduğu, bu noktaların ikişerli farklı oldukları ve artan bir sırada dizildikleri anlamına gelir. Ayrıca, $|\Delta| = \max_{i=0, \dots, n-1} (t_{i+1} - t_i)$ ifadesine, Δ 'nın *modülü* denir.

Bundan sonraki tüm kısımlarda $a < b$ olduğu varsayılacak ve $(\mathbf{M}, d)$ metrik uzayı kısaca $\mathbf{M}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.3 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ bir yol olmak üzere $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü $\Delta = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ olsun. Bu durumda

$$V_\Delta(\gamma) = \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \quad (2.1.1)$$

sayısına; γ yolunun, Δ bölüntüsüne göre *toplam varyasyonu* denir. Bunun yardımıyla,

$$L_d(\gamma) = \sup_{\Delta} V_\Delta(\gamma) = \sup_{\Delta} \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})) \quad (2.1.2)$$

biçiminde tanımlanan $L_d(\gamma)$ sayısına ise γ 'nın *uzunluğu* denir. Buradaki supremum, $[a, b]$ aralığının tüm $\Delta = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ bölüntüleri üzerinden alınmakta olup bir yolun uzunluğu sonlu ise bu yola, *rektifiye edilebilir* (*yenilenebilir*) denir.

Genel olarak, $0 \leq L_d(\gamma) \leq \infty$ dur. $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü $\Delta = \{a, b\}$ olmak üzere $\gamma(a) = p$ ve $\gamma(b) = q$ olsun. Bu durumda $d(p, q) \leq L_d(\gamma)$ yazılabilir. Yani bir yolun uzunluğu, o yolun uç noktaları arasındaki uzaklık tarafından alttan sınırlandırılır.

(2.1.2) eşitliğinde genellikle kısalık bakımından $L_d(\gamma)$ yerine $L(\gamma)$ yazılır. Ancak bu çalışmada, herhangi bir gösterim karmaşasına neden olmamak için $L_d(\gamma)$ gösterimi kullanılacaktır.

Teorem 2.1.4 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ bir yol olmak üzere $L_d(\gamma) = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} V_\Delta(\gamma)$ dır.

Öte yandan, $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ bir yol olmak üzere $L_d(\gamma) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul; γ 'nın bir sabit yol olmasıdır, yani her $t \in [a, b]$ için $\gamma(t) = p_0$ olacak biçimde bir

$p_0 \in \mathbf{M}$ bulunmasıdır. Örneğin, $\mathbf{M}$ bir diskret metrik uzay olmak üzere $\mathbf{M}$ uzayındaki her nokta izole nokta olduğundan, $\mathbf{M}$ 'deki her yol sabittir ve bu tip bir yolun uzunluğu sıfırdır.

Bir yolun belirlediği eğrinin (metrik uzaydaki noktalar kümesinin), birden fazla parametrik gösterimi olabilir. Bu duruma ilişkin bir kavram aşağıda verilmiştir.

Tanım 2.1.5 $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ ve $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbf{M}$ biçiminde γ_1 ve γ_2 yolları verilsin. Eğer $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ olmak üzere monoton, örten ve $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \psi$ koşullarını sağlayan bir ψ dönüşümü bulunabiliyorsa γ_2 yolu, γ_1 yolundan, *parametre değişimi yardımıyla elde edilmiştir* denir. ψ dönüşümüne ise *parametre değişimi* adı verilir.

Yukarıdaki tanımda yer alan ψ dönüşümünün bir homeomorfizm olması gerekmez. Ayrıca, $\mathbb{R}$ 'nin herhangi iki aralığı arasında tanımlı, monoton ve örten bir dönüşüm sürekli olduğundan ψ dönüşümü de süreklidir.

Teorem 2.1.6 $\gamma_1: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ ve $\gamma_2: [c, d] \rightarrow \mathbf{M}$ olmak üzere γ_2 yolu, γ_1 yolundan, parametre değişimi yardımıyla elde edilmiş olsun. Bu durumda $L_d(\gamma_1) = L_d(\gamma_2)$ dir; yani uzunluk, parametre değişimi altında değişmezdir.

Şimdi de metrik uzaylardaki yolların uzunluklarına dair bazı temel sonuçlar incelenecektir.

Gösterim. I bir kapalı aralık olmak üzere I 'nin kapalı bir alt aralığı I_0 olsun. $\gamma: I \rightarrow \mathbf{M}$ bir yol olmak üzere γ 'nın I_0 üzerine kısıtlanmış biçimi, $\gamma|_{I_0}: I_0 \rightarrow \mathbf{M}$ şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, herhangi bir $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ yolu ve herhangi bir $t \in [a, b]$ için $\gamma|_{[a, t]}$ yolu kısaca γ_t ile ifade edilecektir.

Teorem 2.1.7 (Uzunluğun Toplamsal Olması) $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ bir yol olsun. Bu durumda her $c \in [a, b]$ için $L_d(\gamma) = L_d(\gamma|_{[a, c]}) + L_d(\gamma|_{[c, b]})$ dir.

Teorem 2.1.8 Rektifiye edilebilir her $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ yolu için $t \mapsto L_d(\gamma_t)$ biçiminde tanımlı dönüşüm, $[a, b]$ üzerinde artan ve süreklidir.

Şimdi de $\mathbf{M}$ uzayında yer alan ve bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı olan tüm yolların kümesi, $\mathcal{C}([a, b])$ ile gösterilsin. Ayrıca $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{C}([a, b])$ olmak üzere

$$g(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [a, b]} d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \quad (2.1.3)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{C}([a, b])$ kümesi g metriğine göre bir metrik uzay olur. Ayrıca, $L_d: \mathcal{C}([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^+$ biçiminde tanımlanan ve her bir γ yoluna, bu yolun uzunluğunu ($L_d(\gamma)$ sayısını) eşleyen L_d dönüşümüne, *uzunluk fonksiyonu* adı verilir.

2.2 Metrik Uzaylarda Yaylar

Bu kesimde, metrik uzaylardaki yolların temsil ettikleri eğrilerin önemli bir sınıfı olan yayların bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 2.2.1 $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ biçiminde tanımlı bir γ yolu verilsin. γ bir *homeomorfizm* ise $\gamma([a, b]) = A$ kümesine, $\mathbf{M}$ uzayında bir *yay* adı verilir. $\gamma(a) = p$ ve $\gamma(b) = q$ ise p ve q noktalarına, A 'nın *uç noktaları* denir. p noktasına, A 'nın *başlangıç noktası* ve q noktasına ise A 'nın *bitiş (varış) noktası* adı verilir. A yayının bu şekilde yönlendirilmesiyle elde edilen, A 'nın sıralı bir $Z = (p_1, \dots, p_n)$ alt kümesine, *normal olarak sıralanmıştır* denir (Blumenthal, 1970).

Tanım 2.2.2 A bir yay ve $Z = (p_1, \dots, p_n)$ olmak üzere $l(Z) = \sum_{i=1}^{n-1} d(p_i, p_{i+1})$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\sup_{Z \subset A} l(Z)$ ifadesine, A 'nın *uzunluğu* adı verilir ve $l(A)$ ile gösterilir. $l(A)$ sonlu ise A yayı *rektifiye edilebilir* denir (Blumenthal, 1970).

$Z \subset A$ olmak üzere $1, \dots, n$ indislerinin her bir $(i(1), \dots, i(n))$ permütasyonuna bir $\sum_{j=1}^{n-1} d(p_{i(j)}, p_{i(j+1)})$ sayısı karşılık gelir. Bu yolla elde edilen sayıların en küçüğü $\lambda(Z)$ ile gösterilmek üzere, bu sayıya karşılık gelen herhangi bir permütasyon, Z kümesi boyunca bir en kısa yön seçer ve bu yöntemle elde edilen kümeye, Z 'nin *jeodezik sıralanışı* denir. Her Z için $\lambda(Z) \leq l(Z)$ olduğu açıktır. Eğer A yayı rektifiye edilebilir ise

$$\sup_{Z \subset A} \lambda(Z) = \sup_{Z \subset A} l(Z) = l(A) \quad (2.2.1)$$

dır (Blumenthal, 1970).

Şimdi ise reel değişkenli fonksiyonlardaki “türev” kavramına benzerlik gösteren bir kavram göz önüne alınacaktır.

Tanım 2.2.3 $(\mathbf{M}_1, d_1)$ ve $(\mathbf{M}_2, d_2)$ birer metrik uzay olmak üzere sürekli bir $F: \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ dönüşümü verilsin. Ayrıca, $\mathbf{M}_1$ uzayının bir yığılma noktası p_0 olmak üzere $p, q \in \mathbf{M}_1$ ve $p \neq q$ için

$$F^*(p_0) = \lim_{p,q \rightarrow p_0} \frac{d_2(F(p), F(q))}{d_1(p, q)} \quad (2.2.2)$$

biçiminde tanımlansın (burada $p = p_0$ ya da $q = p_0$ olabilir). Buna göre,

- (i) $F^*(p_0) \in \mathbb{R}$ ise F dönüşümü p_0 noktasında sonlu yayılıma sahiptir denir.
- (ii) $F^*(p_0) = \infty$ ise F dönüşümünün, p_0 noktasındaki yayılımı sonsuzdur denir.
- (iii) $F^*(p_0)$ mevcut değilse F dönüşümünün, p_0 noktasındaki yayılımı belirsizdir denir.

(Wilson, 1935)

Özel olarak, $\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_2 = \mathbb{R}$ olmak üzere $F: \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ fonksiyonu bir a noktasında türevlenebilir ise $F^*(a) \in \mathbb{R}$ olup $F^*(a) = |F'(a)|$ dir (Wilson, 1935).

Teorem 2.2.4 $(\mathbf{M}_1, d_1)$ ve $(\mathbf{M}_2, d_2)$ birer metrik uzay olmak üzere $\mathbf{M}_1$ uzayının bir yığılma noktası p_0 olsun. Buna göre;

- (i) $F: \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ dönüşümü bir homeomorfizm ve $F(p_0) = q_0$ olmak üzere $F^*(p_0) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ise $(F^{-1})^*(q_0) = \frac{1}{F^*(p_0)}$ dir. $F^*(p_0) = 0$ ise $(F^{-1})^*(q_0) = \infty$ olup, $F^*(p_0) = \infty$ ise $(F^{-1})^*(q_0) = 0$ dir.

- (ii) $\mathbf{M}_1$ kompakt olmak üzere sürekli bir $F: \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ dönüşümü, $\mathbf{M}_1$ uzayının her yığılma noktasında sonlu bir yayılıma sahipse $\frac{d_2(F(p), F(q))}{d_1(p, q)}$ ifadesi $\mathbf{M}_1$ üzerinde sınırlıdır.

- (iii) $\mathbf{M}_1$ kompakt olmak üzere sürekli bir $F: \mathbf{M}_1 \rightarrow \mathbf{M}_2$ dönüşümü verilsin. Her bir $p \in \mathbf{M}_1$ için $F^*(p) \in \mathbb{R}$ olmak üzere F^* dönüşümü $\mathbf{M}_1$ üzerinde sürekli ise $\frac{d_2(F(p), F(q))}{d_1(p, q)}$ ifadesi; $\mathbf{M}_1$ üzerinde, $F^*(p)$ ifadesine düzgün yakınsaktır.

(Wilson, 1935)

Gösterim. $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere $\mathbf{M}$ uzayında bir A yayı verilsin. Ayrıca, $f: [0,1] \rightarrow A$ dönüşümü bir homeomorfizm olsun. $a, b \in [0,1]$ olmak üzere A yayının, $f(a)$ noktasından başlayıp $f(b)$ noktasına uzanan alt yayı $A_f(a, b)$ ile gösterilsin (bkz. Gaddum, 1953). $A_f(a, b)$ rektifiye edilebilir ise uzunluğu $l_f(a, b)$ ile gösterilecektir.

Teorem 2.2.5 Her bir $t \in [a, b] \subset [0,1]$ için $f^*(t) = \lim_{u,v \rightarrow t} \frac{d(f(u), f(v))}{|u-v|} \in \mathbb{R}$ ise $A_f(a, b)$ rektifiye edilebilirdir (Wilson, 1935; Gaddum, 1953).

Teorem 2.2.6

(i) $E \subset [0,1]$ olmak üzere her bir $t \in E$ için $f^*(t) \in \mathbb{R}$ ise f^* fonksiyonu E üzerinde süreklidir.

(ii) Kapalı bir $E \subset [0,1]$ kümesi verildiğinde her bir $t \in E$ için $f^*(t) \in \mathbb{R}$ oluyorsa $\frac{d(f(u), f(v))}{|u-v|}$ ifadesi; E üzerinde, $f^*(t)$ ifadesine düzgün yakınsaktır.

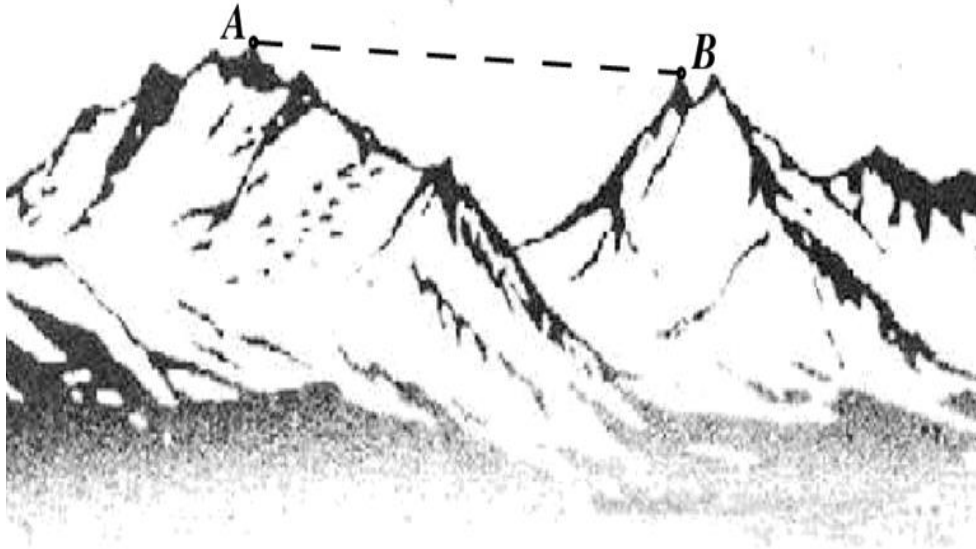
(Gaddum, 1953)

Teorem 2.2.7 Her bir $t \in [a, b] \subset [0,1]$ için $f^*(t) \in \mathbb{R}$ ise $l_f(a, b) = \int_a^b f^*(t) dt$ dir.

(Gaddum, 1953)

2.3 Uzunluk Yapıları ve Uzunluk Uzayları

Metrik uzaylardaki yollara ilişkin en önemli kavramlardan biri de “uzunluk uzayı”dır. Bu bağlamda; ilk olarak, genel bir topolojik uzayda yer alan yollara ilişkin bazı temel kavramlara ve sonuçlara değinilecektir. Bu kesimde yer alan bilgiler için Burago vd. (2001)’nin çalışmasından yararlanılmıştır.



Şekil 2.3.1 A ile B noktaları arasındaki kuş uçuşu uzaklık.

Öncelikle, konu hakkında bir fikir vermesi açısından Şekil 2.3.1 incelendiğinde, iki dağın zirveleri arasındaki kuş uçuşu mesafe ile yürüyüş mesafesinin aynı olmadığı görülecektir.

Metrik Geometride genellikle “yol uzunluğundan” hareket edilerek bir “metrik” kavramına ulaşılır. Örneğin, bir metrik uzayda yer alan herhangi iki nokta arasındaki uzaklığa alternatif olarak, bu noktaları birleştiren yolların uzunluklarının en büyük alt sınırı (infimum) göz önüne alınabilir. Uzunluğu ölçülebilen bir yol ise genellikle, *uygun yol* olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.1 $(\mathbf{T}, \tau)$ bir topolojik uzay olmak üzere $I \subset \mathbb{R}$ biçiminde bir I aralığı verilsin. Bu durumda $\gamma: I \rightarrow \mathbf{T}$ biçiminde verilen sürekli bir γ dönüşümüne, $\mathbf{T}$ uzayında bir yol adı verilir.

Burada I aralığı bir dejenere aralık (tek nokta kümesi) olarak da alınabilir.

Tanım 2.3.2 $(\mathbf{T}, \tau)$ bir topolojik uzay olmak üzere $\mathbf{T}$ uzayındaki *tüm yolların* içerisinde *uygun yol* olanlarının oluşturduğu sınıf, $\mathbf{U}$ ile gösterilsin. Ayrıca, $L: \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}^+$ biçiminde bir L fonksiyonu verilsin. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa $(\mathbf{U}, L)$ sıralı ikilisine, $\mathbf{T}$ uzayında bir *uzunluk yapısı* ve L fonksiyonuna ise bir *uzunluk fonksiyonu* adı verilir:

(i) $\mathbf{U}$ sınıfı kısıtlamalar altında kapalıdır: Eğer $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{T}$ dönüşümü bir uygun yol ve $a \leq c \leq d \leq b$ ise γ 'nın $[c, d]$ aralığına kısıtlanmış biçimi olan $\gamma|_{[c, d]}$ dönüşümü de bir uygun yoldur.

(ii) $\mathbf{U}$ sınıfı bağlamalar (eklemeler/çarpımlar) altında kapalıdır: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{T}$ dönüşümü bir yol olmak üzere $\gamma|_{[a, c]}$ ve $\gamma|_{[c, b]}$ dönüşümleri sırasıyla, γ_1 ve γ_2 olarak gösterilsin. Bu durumda γ yoluna, γ_1 ve γ_2 yollarının *bağlanması* adı verilir ve $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ biçiminde gösterilir. Eğer γ_1 ve γ_2 birer uygun yol ise γ dönüşümü de bir uygun yoldur.

(iii) $\mathbf{U}$ sınıfı en azından, doğrusal yeniden parametrikleştirmeler altında kapalıdır: $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{T}$ bir uygun yol ve $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ olmak üzere $\varphi(t) = at + \beta$ biçiminde tanımlanan bir homeomorfizm için $(\gamma \circ \varphi)(t) = \gamma(\varphi(t))$ biçiminde tanımlanan $\gamma \circ \varphi$ bileşkesi de bir uygun yoldur.

(iv) L fonksiyonu toplamsaldır: $c \in [a, b]$ olmak üzere, $L(\gamma|_{[a,b]}) = L(\gamma|_{[a,c]}) + L(\gamma|_{[c,b]})$ dir.

(v) Bir yolun bir parçasının uzunluğu parçaya sürekli bir biçimde bağlıdır: Sonlu uzunluktaki bir $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{T}$ yolu için, $\gamma|_{[a,t]}$ kısıtlamasının uzunluğu $L(\gamma, a, t)$ ile gösterilmek üzere $L(\gamma, a, \cdot)$ sürekli bir fonksiyondur (Buradan $L(\gamma, a, a) = 0$ elde edilir).

(vi) L fonksiyonu yeniden parametrikleştirmeler altında değişmezdir: Lineer bir φ homeomorfizmi için $L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$ dir.

(vii) Uzunluk yapısı, τ topolojisi ile uyumludur: $p \in \mathbf{T}$ olmak üzere p noktasının bir U_p komşuluğu verildiğinde, p noktası ile U_p kümesinin tümleyeninin noktalarını birleştiren yolların uzunluğu için $\inf \{L(\gamma): \gamma(a) = p, \gamma(b) \in \mathbf{T} \setminus U_p\} > 0$ dir.

Öte yandan, d bir metrik olmak üzere d 'nin doğurduğu uzunluk yapısı şöyle tanımlanır: Kapalı aralıklar tarafından parametrikleştirilmiş tüm sürekli yollar uygun yollardır ve uzunluk ise Tanım 2.1.3'de olduğu gibi, $L(\gamma) = L_d(\gamma) = \sup_{\Delta} V_{\Delta}(\gamma)$ biçiminde verilen L_d fonksiyonu ile tanımlıdır.

Örnek 2.3.3 (Manhattan'da Araba Sürmek) Buradaki uzay Öklid düzlemi olup yolların uzunluğu Öklid metriğine göredir. Tek fark, uygun yollar sınıfı, koordinat eksenlerine paralel parçalar içeren kırık doğrularla sınırlandırılmıştır. Burada yolların her biri bir dönüşüm olup, kırık doğruların her biri ise bir kümedir. Bir başka ifadeyle, yolların görüntü kümeleri kırık doğrulardır.

Şimdi de uzunluk yapısı taşıyan bir $(\mathbf{T}, \tau)$ Hausdorff topolojik uzayı verilsin. Bu durumda, γ bir *uygun yol* belirtmek üzere herhangi $p, q \in \mathbf{T}$ için

$$\rho_L(p, q) = \inf \{L(\gamma) \mid \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{T}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\} \quad (2.3.1)$$

biçiminde tanımlanan ρ_L fonksiyonu bir metrik olup $(\mathbf{T}, \rho_L)$ ikilisi bir metrik uzay belirtir. Buradaki ρ_L fonksiyonu *uzunluk metriği* ya da *iç metrik* olarak adlandırılır.

Yukarıdaki tanımda minimum yerine infimum alınmasının nedeni, iki nokta arasında bir en kısa yol bulunamayabileceğidir. Örneğin, Öklid düzleminden uçları açık bir afin sekme (doğru parçası) çıkarılırsa sekmenin uç noktaları arasında bir en kısa yol bulunamaz.

Teorem 2.3.4 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{T}$ olmak üzere γ sonlu uzunluğa sahip, uygun bir yol ise γ yolu ρ_L metriğine göre süreklidir, yani $\gamma: [a, b] \rightarrow (\mathbf{T}, \rho_L)$ dönüşümü de bir yoldur.

Öte yandan; $p, q \in \mathbf{T}$ olmak üzere p ve q noktaları sonlu uzunluğa sahip bir yolla birbirlerine bağlanabiliyorsa bu noktalar *aynı ulaşılabilirlik bileşenine aittir* denir. Bu ulaşılabilirlik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Genel olarak, $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere d metriği, $(\mathbf{U}, L_d)$ ile gösterilen bir *uzunluk yapısı doğurur*. Bu *uzunluk yapısı* ise rektifiye edilebilir yollar yardımıyla, ulaşılabilirliğin her bir bileşeni üzerinde bir *iç metrik doğurur*. Yani $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}$ ve γ bir uygun yol belirtmek üzere herhangi iki $p, q \in \mathbf{M}$ için

$$\rho_{L_d}(p, q) = \inf \{L_d(\gamma) \mid \gamma: [a, b] \rightarrow \mathbf{M}, \gamma(a) = p, \gamma(b) = q\} \quad (2.3.2)$$

biçiminde tanımlanan ρ_{L_d} fonksiyonu bir iç metrik (uzunluk metriği) olup d metriğinin *doğurduğu iç metrik* olarak adlandırılır ve kısaca, $\rho_{L_d} = \hat{d}$ yazılır. Eğer özel olarak $\hat{d} = d$ oluyorsa $(\mathbf{M}, d)$ *metrik uzayına*, bir *uzunluk uzayı* adı verilir.

Öte yandan, her metrik bir iç metrik olmayabilir. Hatta $(\mathbf{M}, d)$ bir uzunluk uzayı ve $K \subset \mathbf{M}$ olmak üzere, d 'nin K üzerine kısıtlanması bile bir iç metrik olmayabilir. Düzlemde yer alan bir çember bu duruma bir örnektir. Öklid uzaklığının çember üzerine kısıtlanması yoluyla doğurulan iç metrik, açısallı metriktir. Ayrıca, herhangi bir metriklenebilir topolojinin, bir iç metrik tarafından doğurulması gerekmez.

Teorem 2.3.5 Uzunluk yapısı taşıyan bir $(\mathbf{T}, \tau)$ topolojik uzayı ve buna ilişkin $(\mathbf{T}, \rho_L)$ metrik uzayı verilsin. Bu durumda ρ_L metriğinin doğurduğu topoloji, τ topolojisinden daha incedir; yani $(\mathbf{T}, \tau)$ uzayında açık olan bir küme $(\mathbf{T}, \rho_L)$ metrik uzayında da açıktır. Genel olarak, bu iki topoloji denk değildir.

Örneğin, $(x, y), (u, v) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $[(x, y), (u, v)]$ ifadesi, (x, y) ile (u, v) noktalarını birleştiren doğru parçasını gösterebilir ve bir $B = [(0,1), (0,0)] \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} [(0,1), (1/n, 0)])$ kümesi verilsin. Bu durumda, $\mathbb{R}^2$ 'den alınan topolojiye göre, $((1/n, 0))$ noktalar dizisi $(0,0)$ noktasına yakınsar. Öte yandan, bu noktalardan, farklı herhangi ikisi arasındaki uzaklık, doğurulan iç metriğe göre en az 2 olup bu dizi, doğurulan iç metriğe göre ıraksaktır.

Teorem 2.3.6 $(\mathbf{M}, d)$ bir metrik uzay olmak üzere d 'nin doğurduğu iç metrik $\hat{d}$ olsun. Bu durumda

- (i) Eğer γ yolu $(\mathbf{M}, d)$ uzayında rektifiye edilebilir ise $L_{\hat{d}}(\gamma) = L_d(\gamma)$ dır.
- (ii) $\hat{d}$ iç metriğinin doğurduğu iç metrik yine $\hat{d}$ dir.



3. MATERİYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, 4. Bölümde araç olarak kullanılacak olan RM uzaylara ilişkin bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilmiştir.

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere Ω üzerinde tanımlı, hemen kesinlikle (*a. s.*) eşit olan fonksiyonlar aynı denklik sınıfının elemanı olarak kabul edilirler. Buna göre, bir denklik sınıfı aynı zamanda bir fonksiyon olarak ele alınmak üzere aşağıdaki fonksiyon uzayları verilsin:

(i) $L_0(\Omega, \mathbb{R})$: Ω üzerinde tanımlı, reel değerli rastgele değişkenlerin denklik sınıflarının kümesi,

(ii) $L_0^+(\Omega)$: $\xi \in L_0(\Omega, \mathbb{R})$ olmak üzere $\xi(\omega) \geq 0$ *a. s.* koşulunu sağlayan ξ fonksiyonlarının kümesi,

(iii) $L_0(\Omega, R)$: Ω üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel sayı değerli rastgele değişkenlerin denklik sınıflarının kümesi.

$L_0(\Omega, \mathbb{R})$ kümesi bir lineer uzay olup bu uzayın sıfır elemanı Θ ile gösterilecektir. Burada $\Theta(\omega) = 0$ *a. s.* biçiminde tanımlıdır.

Herhangi $v, \zeta \in L_0(\Omega, R)$ için $v \leq \zeta \Leftrightarrow v(\omega) \leq \zeta(\omega)$ *a. s.* biçiminde tanımlanır. $L_0(\Omega, R)$ kümesi bir tam kafes ve $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ kümesi ise bir Dedekind tam vektör kafesidir.

Yukarıdaki bilgiler için Guo (2010)'nun çalışmasından yararlanılmıştır. Öte yandan, $L_0(\Omega, \mathbb{R})$ kümesi olasılık ölçüsüne göre yakınsaklığın topolojisine sahip bir topolojik cebirdir (bkz. Vakhania vd., 1987). Bu kafeslerin daha detaylı özellikleri, Schechter (1997)'in ve Guo (2010)'nun çalışmalarında bulunabilir.

Tanım 3.1 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı, $\mathbf{S} \neq \emptyset$ ve $\mathcal{X}: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere herhangi $p, q \in \mathbf{S}$ için $\mathcal{X}(p, q) = X_{pq}$ biçiminde gösterilsin. Eğer her $p, q, r \in \mathbf{S}$ için

$$(RM\ 1) \quad X_{pq} = \Theta \Leftrightarrow p = q$$

$$(RM\ 2) \quad X_{pq} = X_{qp}$$

$$(RM\ 3) \quad X_{pr} \leq X_{pq} + X_{qr}$$

koşulları sağlanıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ sıralı ikilisine, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir *rastlantısal metrik (RM) uzay* denir. Ayrıca X_{pq} *rastgele değişkeni*, p ile q arasındaki *rastlantısal uzaklık* olarak adlandırılır. Eğer (RM 1) aksiyomu, “ $p = q \Rightarrow X_{pq} = \Theta$ ” biçiminde zayıflatılırsa $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ sıralı ikilisine, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir *rastlantısal sözde metrik (RSM) uzay* denir (Guo; 1999, 2001a).

Uyarı 3.2

(i) Tanım 3.1’de verilen $\mathcal{X}$ fonksiyonu, aynı zamanda E –*rastlantısal metrik* olarak da adlandırılır (bkz. Guo, 2001a). Fakat bu çalışmada $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ sıralı ikilisi ya da kısaca $\mathbf{S}$ kümesi, *rastlantısal metrik (RM) uzay* ve $\mathcal{X}$ fonksiyonu da Guo (1999)’un çalışmasında olduğu gibi, *rastlantısal metrik* olarak adlandırılacaktır. Gereksinimler $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ taban uzayından bahsedilmeyecektir.

(ii) $X_{pq}(\omega)$ ifadesi, p ve q arasındaki, ω anında veya ω gözlemcisi tarafından saptanan uzaklık olarak yorumlanabilir (bkz. Calabrese, 1978).

(iii) Guo (1999)’nun çalışmasında, bir RM uzay daha genel olarak şöyle tanımlanmaktadır: X_{pq} fonksiyonu, σ –sonlu bir $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ölçü uzayı üzerinde tanımlı, μ –ölçülebilir bir fonksiyonun denklik sınıfıdır ve $L_0^+(\Omega)$ yerine de, $0 \leq \xi(\omega) < \infty$ ($\mu - a. e.$) eşitsizliğini sağlayan μ –ölçülebilir tüm ξ fonksiyonlarının (aslında, denklik sınıflarının) kümesi alınır. Ancak, bu tez çalışmasında bir RM uzayın tabanı, Tanım 3.1’de olduğu gibi, bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı olarak alınacaktır.

(iv) Tanım 3.1 ile verilen RM uzayda rastgele değişkenlerin denklik sınıfları temel alınmaktadır. Bunun yerine, rastgele değişkenlerin kendilerini temel alan bir RM uzay tanımı için Brown (1972) ile Schweizer ve Sklar (1983)’ün çalışmaları incelenebilir. Guo (1999)’ya göre her iki tanım birbirine denktir.

Şimdi de bir RM uzayın topolojik yapısına yer verilecektir. Tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RM uzay $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ olsun. $\varepsilon > 0$ ve $0 < \lambda < 1$ için

$$U(\varepsilon, \lambda) = \{(p, q) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}: P\{\omega \in \Omega: X_{pq}(\omega) < \varepsilon\} > 1 - \lambda\} \quad (3.1)$$

$$= \{(p, q) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S}: P(X_{pq} < \varepsilon) > 1 - \lambda\} \quad (3.2)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $\{U(\varepsilon, \lambda): \varepsilon > 0, 0 < \lambda < 1\}$ koleksiyonu $\mathbf{S}$ üzerinde tanımlı bir Hausdorff düzgünlüğü için bir taban oluşturur. Bu düzgünlüğün doğurduğu topolojiye, (ε, λ) –*topolojisi* denir (Guo, 1999). Böylelikle, $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ bir RM uzay ve $p \in \mathbf{S}$ olmak üzere

$$\mathcal{N}_p(\varepsilon, \lambda) = \{q \in \mathbf{S}: P(X_{pq} < \varepsilon) > 1 - \lambda\} \quad (3.3)$$

kümesi, p 'nin (ε, λ) –*komşuluğu* olarak adlandırılır (bkz. Schweizer ve Sklar, 1983).

Son olarak, RM uzayların özel bir sınıfı olan rastlantısal normlu uzaylardan söz edilecektir. Benzer bir tanım için, Haydon vd. (1991)'nin çalışması incelenebilir.

Tanım 3.3 $\mathbb{K}$ bir cisim ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) olmak üzere $\mathbb{K}$ üzerinde bir lineer uzay $\mathbf{S}$ olsun ve $\mathbf{S}$ 'nin sıfır vektörü θ ile gösterilsin. Ayrıca, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\mathcal{N}: \mathbf{S} \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere herhangi bir $p \in \mathbf{S}$ için $\mathcal{N}(p) = \mathcal{N}_p$ biçiminde gösterilsin. Eğer her $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $p, q \in \mathbf{S}$ için

$$(RN\ 1) \ \mathcal{N}_p = \theta \Leftrightarrow p = \theta$$

$$(RN\ 2) \ \mathcal{N}_{\alpha p} = |\alpha| \mathcal{N}_p$$

$$(RN\ 3) \ \mathcal{N}_{p+q} \leq \mathcal{N}_p + \mathcal{N}_q$$

koşulları sağlanıyorsa $(\mathbf{S}, \mathcal{N})$ sıralı ikilisine; $\mathbb{K}$ üzerinde, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir *rastlantısal normlu (RN) uzay* denir. Eğer (i) koşulu, “ $p = \theta \Rightarrow \mathcal{N}_p = \theta$ dir” olarak zayıflatılırsa $(\mathbf{S}, \mathcal{N})$ ikilisine, *rastlantısal yarı normlu uzay* denir (Guo, 2001a).

Ayrıca, her $p, q \in \mathbf{S}$ için $\mathcal{X}(p, q) = X_{pq} = \mathcal{N}_{p-q}$ şeklinde bir tanımlama yapılırsa her RN uzay bir RM uzay olur (Şençimen, 2020).

Örnek 3.4 $(\mathbf{S}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $I = [0, 1]$ olsun. I 'nin tüm Lebesgue ölçülebilir alt kümelerinin σ –cebr $\mathcal{A}$ ve m fonksiyonu Lebesgue ölçüsünü göstermek üzere $(I, \mathcal{A}, m)$ olasılık uzayı verilsin. Ayrıca, $\xi \in L_0^+(I) \setminus \theta$ olmak üzere sabit bir ξ rastgele değişkeni alınsın. $p \in \mathbf{S}$, $\omega \in I$ ve $\mathcal{N}: \mathbf{S} \rightarrow L_0^+(I)$ olmak üzere $\mathcal{N}_p(\omega) = \|p\| \xi(\omega)$ biçiminde tanımlanması durumunda $(\mathbf{S}, \mathcal{N})$ ikilisi, tabanı $(I, \mathcal{A}, m)$ olan bir RN uzay olur. Bu tip bir RN uzayın ve bunun doğurduğu genel bir RM uzayın inşası için Schweizer ve Sklar (1983)'in çalışması incelenebilir.

Tanım 3.5 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ biçiminde verilen sürekli bir f dönüşümüne, $\mathbf{S}$ uzayında bir *yol* denir (Şençimen, 2020).

Yukarıdaki tanıma göre, her bir $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in (0,1)$ için bir $\delta > 0$ bulunabiliyor öyle ki $|t_1 - t_2| < \delta$ iken $P(X_{f(t_1)f(t_2)} < \varepsilon) > 1 - \lambda$ oluyorsa f dönüşümü bir *yoldur*. Bu tezde, $t \in [a, b]$ bir *parametre* olmak üzere bu tip bir f yolu aynı zamanda, $\mathbf{S}$ uzayında bir *parametrik eğri* olarak adlandırılacaktır. t parametresi $[a, b]$ üzerinde artarken $f(t)$ noktalarının $\mathbf{S}$ uzayında oluşturduğu eğri (ki bu eğri, üzerindeki noktaların herhangi birinden birkaç kez geçebilir), f yolunun temsil ettiği eğri olarak adlandırılacak ve $\mathcal{C}(f)$ biçiminde gösterilecektir.

Örnek 3.6 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $(\mathbf{M}, d)$ ikilisi, üzerinde Borel σ -cebri tanımlanmış, ayrılabilir bir metrik uzay olsun. Ω 'nın yalnızca ihmal edilebilir alt kümeleri üzerinde farklılık gösteren dönüşümler özdeş kabul edilerek; Ω 'dan $\mathbf{M}$ içine tanımlı, ölçülebilir dönüşümlerin (rastgele elemanların) denklik sınıflarının kümesi, $\mathbf{S}$ ile gösterilsin. Şimdi $\mathcal{X}: \mathbf{S} \times \mathbf{S} \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere her $p, q \in \mathbf{S}$ ve $\omega \in \Omega$ için $[\mathcal{X}(p, q)](\omega) = X_{pq}(\omega) = d(p(\omega), q(\omega))$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RM uzaydır (Guo, 2001a). Öte yandan, Sherwood (1969)'un çalışmasında $\mathbf{S}$ kümesi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ve hedefi $(\mathbf{M}, d)$ olan bir E -uzay olarak adlandırılır. Bu uzay aynı zamanda bir OM uzaydır. Bu özel RM uzay için herhangi bir $f: [a, b] \rightarrow (\mathbf{S}, \mathcal{X})$ yolu bir rastlantısal fonksiyondur (bkz. Guo, 2001a; Şençimen, 2020).

Tanım 3.7 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RM uzay olmak üzere bir $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ yolu verilsin. Ayrıca, $[a, b]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü $\Delta = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ olsun. Bu durumda

(i) Ω üzerinde, $V_f^\Delta(\omega) = \sum_{i=0}^{n-1} X_{f(t_i)f(t_{i+1})}(\omega)$ biçiminde tanımlanan V_f^Δ (ya da $V(f, \Delta)$) dönüşümüne, f 'in Δ 'ya göre *rastlantısal toplam varyasyonu* denir. Burada her Δ bölüntüsü için $V_f^\Delta \in L_0^+(\Omega)$ dir.

(ii) Ω üzerinde, $\mathbf{L}_f(\omega) = \sup_{\Delta} [V_f^\Delta(\omega)]$ a. s. biçiminde tanımlanan $\mathbf{L}_f$ dönüşümüne, f 'in *rastlantısal uzunluğu* denir.

(Şençimen, 2020).

Örnek 3.6'nın hemen öncesindeki açıklamaya ve Tanım 3.7'ye dayanarak, $\mathbf{L}_{\mathcal{C}(f)} = \mathbf{L}_f$ olarak tanımlanabilir.

Not 3.8 Yukarıdaki tanıma göre $X_{f(a)f(b)} \preceq \mathbf{L}_f$ dir. Ayrıca, $\mathbf{L}_f(\omega) \geq 0$ a.s. olup $\mathbf{L}_f$ fonksiyonu “hemen kesinlikle sonlu” olmayabilir. Yani $\mathbf{L}_f \in [L_0(\Omega, R)] \setminus L_0^+(\Omega)$ olabilir. Eğer her Δ için $V_f^\Delta(\omega) \leq v(\omega)$ a.s. olacak biçimde bir $v \in L_0^+(\Omega)$ varsa f yolu $\mathcal{X}$ rastlantısal metriğine göre *hemen hemen rektifiye edilebilir* denir. Bu durumda $\mathbf{L}_f = \xi = \sup_{\Delta} V_f^\Delta$ olacak biçimde bir $\xi \in L_0^+(\Omega)$ vardır. Özel olarak, her Δ için $V_f^\Delta(\omega) \leq M$ a.s. olacak biçimde bir $M > 0$ varsa f yolu, $\mathcal{X}$ rastlantısal metriğine göre *hemen hemen düzgün rektifiye edilebilir* denir. Bu koşulların hiçbiri sağlanmadığı takdirde f yolu $\mathcal{X}$ rastlantısal metriğine göre *rektifiye edilemez* denir. Böyle bir durumda $\mathbf{L}_f = \zeta = \sup_{\Delta} V_f^\Delta$ olacak biçimde bir $\zeta \in [L_0(\Omega, R)] \setminus L_0^+(\Omega)$ vardır. Son olarak, $\mathbf{L}_f = \Theta$ olması için gerek ve yeter koşul, f yolunun sabit bir dönüşüm olmasıdır (Şençimen, 2020).

Teorem 3.9 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı olmak üzere, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan ve bir $\mathbb{K}$ cismi ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) üzerinde tanımlı bir RN uzay $(\mathbf{S}, \mathbf{N})$ olsun ve $\mathbf{S}$ 'nin sıfır vektörü θ ile gösterilsin. Ayrıca, her biri $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı olan ve $\mathbf{S}$ uzayında yer alan, hemen hemen rektifiye edilebilir tüm yolların kümesi $\mathcal{C}_r([a, b], \mathbf{S})$ ile gösterilsin. Bu durumda $\mathcal{C}_r([a, b], \mathbf{S})$ kümesi bir vektör uzayı olup bu uzayın sıfır vektörü $\hat{\theta}: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ olmak üzere her $t \in [a, b]$ için $\hat{\theta}(t) = \theta$ biçiminde tanımlıdır. Ayrıca, $\mathcal{L}: \mathcal{C}_r([a, b], \mathbf{S}) \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere $\mathcal{L}(f) = \mathbf{L}_f$ biçiminde tanımlanan $\mathcal{L}$ dönüşümü $\mathcal{C}_r([a, b], \mathbf{S})$ üzerinde bir rastlantısal yarı normdur (Şençimen, 2020).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde genel itibariyle, bir RM uzayda yer alan yolların temel özelliklerine dair bazı tanımlar verilmiş ve birtakım sonuçlar elde edilmiştir.

İlk olarak, Alexandrov (2006)'un ve Papadopoulos (2014)'un metrik uzaylardaki eğrilere ilişkin çalışmalarından yola çıkılarak, bir RM uzayda “eğri” tanımı yapılırken dikkat edilmesi gereken bazı hususlara yer verilecektir.

Örneğin, bir kapalı aralığın sürekli bir görüntüsü olan ve bir RM uzayda yer alan noktalar kümesinin doğrudan, “*RM uzayda bir eğri*” olarak tanımlanması uygun bir yöntem değildir çünkü rastlantısal uzunluk tanımlanırken bir eğrinin belli bir parametrik gösterimi kullanılmaktadır. Örneğin, bir eğri üzerinde önce bir yönde sonra da bunun tersi yönünde ilerlenmesi durumunda elde edilen rastlantısal uzunluk ile bu eğri üzerinde bir yönde ilerlenmesi ile elde edilen rastlantısal uzunluk aynı değildir. Her ne kadar her iki durumda da, ziyaret edilen (üzerinden geçilen) noktaların kümesi aynı olsa da, eğer bir eğri üzerinde iki defa yol alınmış ise böyle bir durumda, kastettiğimiz eğriyi buna uygun olarak tanımlamak gerekir. Öte yandan, bir eğriyi, “belli bir $f(t)$ parametrikleştirmesi yardımıyla elde edilen noktaların kümesi” olarak tanımlamak da uygun olmayacaktır, çünkü eğri üzerinde farklı hızlarla mesafe alınmış olabilir. Bu karışıklık aşağıdaki tanımla aşılabilir.

Tanım 4.1 (Parametrelerin Değişimi) $(S, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay, $f_1: [a, b] \rightarrow S$ ve $f_2: [c, d] \rightarrow S$ iki yol olsun. Eğer $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ olmak üzere monoton, örten ve $f_2 = f_1 \circ \psi$ koşullarını sağlayan bir ψ dönüşümü bulunabiliyorsa f_2 yolu, f_1 yolundan *parametre değişimi yardımıyla elde edilmiştir* ya da f_1 yolu ile f_2 yolu *aynı eğriyi temsil eder* denir. ψ dönüşümüne ise *parametre değişimi* adı verilir.

Yukarıdaki tanımda verilen ψ dönüşümü yardımıyla, RM uzaylarda *yolların denklik sınıfları* elde edilir. $t \in [a, b]$ olmak üzere t parametresi a 'dan b 'ye doğru artarken $f_1(t)$ noktaları sürekli bir biçimde bir $\mathcal{C}(f_1)$ eğrisi (ya da kısaca, bir $\mathcal{C}$ eğrisi) oluşturur. Parametrenin monoton bir dönüşümü olan ψ yardımıyla, $f_1(t)$ noktalarından aynı sırada ya da ters yönde geçilmesi sağlanır. Burada hareketin hızı rastgele seçilmiş olabilir, hattâ duraklamalar bile kabul edilebilir (parametre değişirken uzaydaki nokta sabit kalabilir) fakat herhangi bir yerde geri dönüş kabul edilmez. Dolayısıyla, $\mathcal{C}$ eğrisinin parametrik gösterimlerinden biri f_1 yolu, diğeri de f_2 yolu olur.

Örnek 4.2 $\mathbf{S} = \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbf{S}$ üzerinde Öklid normu tanımlansın ve bunun yardımıyla, Örnek 3.4’de verilen $(\mathbf{S}, \mathbf{N})$ uzayını göz önüne alalım. $f_1: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{S}$ olmak üzere $f_1(t) = (\cos t, \sin t)$ biçiminde tanımlı bir f_1 yolu verilsin. Ayrıca, $\psi: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$ olmak üzere $\psi(s) = \arccos(-s)$ biçiminde bir ψ dönüşümü ve $s \in [-1, 1]$ olmak üzere $f_2(s) = (f_1 \circ \psi)(s)$ biçiminde bir f_2 dönüşümü tanımlansın. Bu durumda ψ dönüşümü monoton ve örten olup $f_2(s) = (-s, \sqrt{1-s^2})$ yolu, f_1 yolundan, parametre değişimi yardımıyla elde edilmiştir.

Şimdi ise bir RM uzayda yer alan bir f yolunun rastlantısal uzunluğuna ve bu yolun temsil ettiği eğriye dair bazı temel sonuçlar verilecektir. İlk olarak; Papadopoulos (2014)’un çalışmasında yer alan, metrik uzaylardaki yollara ilişkin temel bir teorem, RM uzaylarda ele alınacaktır.

Teorem 4.3 (Rastlantısal Uzunluğun Parametre Değişimi Altında Değişmezliği) $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay, $f_1: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ ve $f_2: [c, d] \rightarrow \mathbf{S}$ olmak üzere f_2 yolu, f_1 yolundan, parametre değişimi yardımıyla elde edilmiş olsun. Bu durumda $\mathbf{L}_{f_1} = \mathbf{L}_{f_2}$ dir; yani rastlantısal uzunluk, parametre değişimi altında değişmezdir.

İspat. Öncelikle $\mathbf{L}_{f_1} \leq \mathbf{L}_{f_2}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için $\psi: [c, d] \rightarrow [a, b]$ biçiminde bir parametre değişimi verilsin. $[a, b]$ aralığının herhangi bir $\Delta = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ bölüntüsüne karşılık, $[c, d]$ aralığının bir $\Delta' = (t'_i)_{i=0, \dots, n}$ bölüntüsü eşlenecektir. Bu, her bir $i = 0, \dots, n$ için $\psi^{-1}(t_i)$ kümesinde herhangi bir nokta seçilerek ve gerekirse bu noktalar yeniden sıralanarak yapılabilir. Bu durumda $V(f_1, \Delta) = V(f_2, \Delta')$ olur. Eğer $[c, d]$ aralığının tüm bölüntüleri üzerinden supremum alınırsa $V(f_1, \Delta) \leq \mathbf{L}_{f_2}$ elde edilir. Şimdi de $[a, b]$ aralığının tüm bölüntüleri üzerinden supremum alınırsa $\mathbf{L}_{f_1} \leq \mathbf{L}_{f_2}$ elde edilir. Son olarak, $\mathbf{L}_{f_2} \leq \mathbf{L}_{f_1}$ olduğu gösterilecektir. Bunun için, $[c, d]$ aralığının herhangi bir Δ' bölüntüsü verilsin. ψ dönüşümü monoton olduğundan, $\psi(\Delta') = \Delta$ olmak üzere Δ kümesi, $[a, b]$ aralığının bir bölüntüsü olup $V(f_1, \Delta) = V(f_2, \Delta')$ yazılabilir. $[a, b]$ aralığının tüm bölüntüleri üzerinden supremum alınırsa $V(f_2, \Delta') \leq \mathbf{L}_{f_1}$ elde edilir. Şimdi de $[c, d]$ aralığının tüm bölüntüleri üzerinden supremum alınırsa $\mathbf{L}_{f_2} \leq \mathbf{L}_{f_1}$ bulunur. Sonuç olarak, $\mathbf{L}_{f_1} = \mathbf{L}_{f_2}$ olur. ■

Metrik Geometriye ilişkin temel kaynaklardan biri olan, Alexandrov ve Reshetnyak (1989)’ın çalışmasında; metrik uzaylar arasında tanımlı bir izometrinin, eğrilerin

uzunluklarını da koruduğu kanıtlanmıştır. Benzer bir durum RM uzaylarda, aşağıdaki önerme yardımıyla incelenecektir.

Önerme 4.4 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ve $(\mathbf{U}, \mathcal{Y})$ ikilileri aynı olasılık uzayı üzerinde tanımlı iki RM uzay olsunlar. Ayrıca, $J: \mathbf{S} \rightarrow \mathbf{U}$ biçiminde verilen bir J dönüşümü rastlantısal uzaklıkları korusun, yani her $p, q \in \mathbf{S}$ için $\mathcal{Y}(J(p), J(q)) = Y_{J(p)J(q)} = \mathcal{X}(p, q) = X_{pq}$ koşulunu sağlasın. Buna göre, $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ bir yol olmak üzere $\mathbf{L}_{J[\mathcal{C}(f)]} = \mathbf{L}_{\mathcal{C}(f)}$ dir.

İspat. $[a, b]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü $\Delta = (t_i)_{i=0, \dots, n}$ olmak üzere,

$$V_f^\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} X_{f(t_i)f(t_{i+1})} = \sum_{i=0}^{n-1} Y_{J(f(t_i))J(f(t_{i+1}))} \leq \mathbf{L}_{J[\mathcal{C}(f)]} \quad (4.1)$$

yazılabilir. Şimdi de $[a, b]$ aralığının tüm bölüntüleri üzerinden supremum alınırsa $\mathbf{L}_{\mathcal{C}(f)} \leq \mathbf{L}_{J[\mathcal{C}(f)]}$ elde edilir. Öte yandan, J dönüşümü rastlantısal uzaklıkları koruduğu için $1 - 1$ dir. Buna göre, $\mathfrak{R}(J) = Q$ olmak üzere $J^{-1}: Q \rightarrow \mathbf{S}$ dönüşümü göz önüne alındığında, J^{-1} dönüşümünün de rastlantısal uzaklıkları koruduğu görülebilir. O halde J^{-1} dönüşümü ve $J[\mathcal{C}(f)]$ eğrisi, (4.1) bağıntısındaki yöntemle benzer biçimde ele alınırsa, $\mathbf{L}_{J[\mathcal{C}(f)]} \leq \mathbf{L}_{\mathcal{C}(f)}$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Bunun yanı sıra; Alexandrov ve Reshetnyak (1989)'ın çalışmasında, bir metrik uzayda yer alan bir parametrik eğrinin çapı da tanımlanmıştır. Benzer bir kavram, RM uzaylarda aşağıdaki gibi tanımlanacaktır.

Tanım 4.5 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ biçiminde bir yol verilsin. Bu durumda $\mathcal{D}(f) = \sup_{t, u \in [a, b]} X_{f(t)f(u)}$ biçiminde tanımlanan $\mathcal{D}(f)$ ifadesine, f 'in *rastlantısal çapı* denir.

Şimdi de Apostol (1981)'un çalışmasında yer alan, sonlu boyutlu Öklid uzaylarındaki yollara ilişkin bazı temel teoremler RM uzaylarda ele alınacaktır.

Teorem 4.6 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay olmak üzere $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ yolu, $\mathcal{X}$ rastlantısal metriğine göre hemen hemen rektifiye edilebilir olsun. Bu durumda f 'in rastlantısal çapı, olasılık ölçüsüne göre sınırlıdır.

İspat. $[a, b]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü Δ olsun. Kabul gereği, $\sup_{\Delta} V_f^\Delta = \mathbf{L}_f \in L_0^+(\Omega)$ yazılabilir. Şimdi $t \in (a, b)$ olmak üzere $\Delta = \{a, t, b\}$ bölüntüsü verilsin. Bu durumda

$X_{f(a)f(t)} + X_{f(t)f(b)} \leq \mathbf{L}_f$ olup $X_{f(a)f(t)} \leq \mathbf{L}_f$ yazılabilir. Benzer biçimde her $t, u \in [a, b]$ için $X_{f(t)f(u)} \leq X_{f(t)f(a)} + X_{f(a)f(u)} \leq 2\mathbf{L}_f$ elde edilir. Buradan,

$$\Theta \leq \mathcal{D}(f) = \sup_{t, u \in [a, b]} X_{f(t)f(u)} \leq 2\mathbf{L}_f \in L_0^+(\Omega) \quad (4.2)$$

yazılabilir. O halde $\mathcal{D}(f) \in L_0^+(\Omega)$ olup $\mathcal{D}(f)$ ifadesi hemen hemen sonludur. Dolayısıyla, olasılık ölçüsüne göre sınırlıdır (bkz. Chung, 2001); yani her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $M(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ bulunabilir öyle ki $P(\mathcal{D}(f) \leq M(\varepsilon)) \geq 1 - \varepsilon$ yazılabilir. ■

Gösterim. $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay olmak üzere bir $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ yolu verildiğinde, herhangi bir $t \in [a, b]$ için $f|_{[a, t]}$ kısıtlanmış yolunun rastlantısal uzunluğu $\mathcal{I}(t)$ ile gösterilecektir.

Önerme 4.7 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ bir olasılık uzayı ve $\mathcal{X}: L_0(\Omega, \mathbb{R}) \times L_0(\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere her $p, q \in L_0(\Omega, \mathbb{R})$ ve $\omega \in \Omega$ için $[\mathcal{X}(p, q)](\omega) = X_{pq}(\omega) = |p(\omega) - q(\omega)|$ biçiminde tanımlansın. Ayrıca, $f: [a, b] \rightarrow L_0(\Omega, \mathbb{R})$ biçiminde, hemen hemen rektifiye edilebilir bir f yolu verilsin. Bu durumda $\mathcal{I} - f$ rastlantısal fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde artandır.

İspat. Örnek 3.6'dan bilindiği üzere $(L_0(\Omega, \mathbb{R}), \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RM uzaydır. Gösterimlerde kısalık bakımından, $\mathcal{I} - f = \Phi$ yazılsın. Bu durumda $a \leq t < u \leq b$ olmak üzere $\Phi(u) - \Phi(t) = \mathcal{I}(u) - \mathcal{I}(t) - [f(u) - f(t)]$ yazılabilir. Öte yandan, rastlantısal uzunluk toplamsal olduğundan (bkz. Şençimen, 2020), $X_{f(u)f(t)} = |f(u) - f(t)| \leq \mathcal{I}(u) - \mathcal{I}(t)$ ve buradan da $f(u) - f(t) \leq \mathcal{I}(u) - \mathcal{I}(t)$ elde edilir. O halde $\Theta \leq \Phi(u) - \Phi(t)$, yani $\Phi(t) \leq \Phi(u)$ olup ispat tamamlanır. ■

Aşağıda, Teorem 3.9'da sözü edilen $\mathcal{C}_r([a, b], \mathbf{S})$ vektör uzayına ilişkin bir başka özellik verilecektir. Bunun için, Leoni (2009)'nin çalışmasında yer alan; reel değerli, sınırlı salınımlı fonksiyonlara ilişkin bir özellik, RM uzaylarda incelenecektir. Kısalık bakımından, $\mathcal{C}_r([a, b], \mathbf{S})$ yerine $\mathcal{C}_r$ yazılacaktır.

Önerme 4.8 $c \in [a, b]$ ve c sabit olsun. Herhangi bir $f \in \mathcal{C}_r$ için, $N: \mathcal{C}_r \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere $N(f) = N_{f(c)} + \mathbf{L}_f$ biçiminde tanımlanırsa $(\mathcal{C}_r, N)$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı olan bir RN uzay belirtir.

İspat.

(RN 1) $f = \hat{\theta}$ olması durumunda $N(f) = N(\hat{\theta}) = N_{\hat{\theta}(c)} + L_{\hat{\theta}} = \Theta$ elde edilir. Tersine, $N(f) = N_{f(c)} + L_f = \Theta$ ise $N_{f(c)} = L_f = \Theta$ olup $f(c) = \theta$ dir. Ayrıca, $L_f = \Theta$ olduğundan; f yolu, sabit bir dönüşümdür. Bu durumda $f = \hat{\theta}$ elde edilir.

(RN 2) Herhangi bir $\alpha \in \mathbb{K}$ ve $f \in \mathcal{C}_r$ için $N(\alpha f) = N_{(\alpha f)(c)} + L_{\alpha f}$ olup; Teorem 3.9 yardımıyla, $N(\alpha f) = N_{\alpha f(c)} + |\alpha| L_f = |\alpha| [N_{f(c)} + L_f] = |\alpha| N(f)$ elde edilir.

(RN 3) Herhangi $f, g \in \mathcal{C}_r$ için $N(f + g) = N_{(f+g)(c)} + L_{f+g}$ olup; Teorem 3.9 yardımıyla,

$N(f + g) = N_{f(c)+g(c)} + L_{f+g} \leq N_{f(c)} + N_{g(c)} + L_f + L_g = N(f) + N(g)$ elde edilir. ■

Şimdi ise Choquet (1966)'in çalışmasında yer alan, metrik uzaylara ve bu uzaylardaki yollara ilişkin bazı temel teoremler RM uzaylarda ele alınacaktır.

Önerme 4.9 $(S, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı bir $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olasılık uzayı olan bir RM uzay olmak üzere, S uzayında yer alan ve bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı tüm yolların kümesi kısaca, $\mathcal{C}$ ile gösterilsin. Bu durumda, her bir $t \in [a, b]$ için $D_t: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow L_0^+(\Omega)$ olmak üzere her $f, g \in \mathcal{C}$ ve her bir $\omega \in \Omega$ için $[D_t(f, g)](\omega) = X_{f(t)g(t)}(\omega)$ biçiminde tanımlanması durumunda D_t dönüşümü $\mathcal{C}$ üzerinde bir sözde rastlantısal metriktir.

İspat. Herhangi bir sabit $t \in [a, b]$ ve herhangi $f, g, h \in \mathcal{C}$ verilsin. $f = g$ ise $[D_t(f, g)](\omega) = X_{f(t)f(t)}(\omega) = 0$ a. s. olup $D_t(f, g) = \Theta$ dir. Ancak, bunun tersinin doğru olmak zorunda olmadığı açıktır. Benzer biçimde $D_t(f, g) = D_t(g, f)$ ve $D_t(f, h) \leq D_t(f, g) + D_t(g, h)$ olduğu gösterilebilir. ■

Yukarıdaki önermede sözü edilen $D_t(f, g)$ ifadesi, t anında (ya da parametrenin t değerini aldığı durumda) f ile g yolları arasındaki rastlantısal uzaklık olarak yorumlanabilir. Öte yandan; $f, g \in \mathcal{C}$ olmak üzere $\{D_t(f, g): t \in [a, b]\}$ ailesi rastgele değişkenlerin bir koleksiyonu olduğundan, bir stokastik süreç olarak ele alınabilir.

Önerme 4.10 $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ belli bir olasılık uzayı olmak üzere her bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $(S_k, \mathcal{X}_k)$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RM uzay belirtsin. Ayrıca, $S = S_1 \times \dots \times S_n$ olmak üzere $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in S$ için

$$\mathcal{X}(p, q) = X_{pq} = \sup_{1 \leq k \leq n} \mathcal{X}_k(p_k, q_k) \quad (4.3)$$

biçiminde tanımlanması durumunda $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi, tabanı $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ olan bir RM uzaydır.

İspat.

(RM 1) $p = q$ ise $X_{pq} = \Theta$ olduğu açıktır. Tersine, $X_{pq} = \Theta$ ise her bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $\mathcal{X}_k(p_k, q_k) = \Theta$ olup buradan her bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $p_k = q_k$, yani $p = q$ elde edilir.

(RM 2) Herhangi $p, q \in \mathbf{S}$ için $X_{pq} = X_{qp}$ olduğu açıktır.

(RM 3) $p, q, r \in \mathbf{S}$ olmak üzere her bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\mathcal{X}_k(p_k, r_k) \leq \mathcal{X}_k(p_k, q_k) + \mathcal{X}_k(q_k, r_k) \leq X_{pq} + X_{qr} \quad (4.4)$$

yazılabilir. Buradan $X_{pr} \leq X_{pq} + X_{qr}$ elde edilir. ■

Teorem 4.11 Önerme 4.10'da verilen $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ rastlantısal metrik uzayında bir f yolu; her bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $f_k: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}_k$ dönüşümü bir yol olacak biçimde, herhangi bir $t \in [a, b]$ için $f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$ biçiminde tanımlansın. Bu durumda f yolunun, $\mathcal{X}$ rastlantısal metriğine göre hemen hemen rektifiye edilebilir olması için gerek ve yeter koşul; her bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için f_k yolunun, $\mathbf{S}_k$ uzayı üzerindeki $\mathcal{X}_k$ rastlantısal metriğine göre hemen hemen rektifiye edilebilir olmasıdır.

İspat. $p, q \in \mathbf{S}$ olmak üzere her bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\mathcal{X}_k(p_k, q_k) \leq \mathcal{X}(p, q) \leq \sum_{k=1}^n \mathcal{X}_k(p_k, q_k) \quad (4.5)$$

yazılabilir. Bunun yardımıyla, $[a, b]$ aralığının her bir $\Delta = (t_i)_{i=0, \dots, m}$ bölüntüsü ve herhangi bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\begin{aligned} V(f_k, \Delta) &= \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{X}_k(f_k(t_i), f_k(t_{i+1})) \leq V(f, \Delta) = \sum_{i=0}^{m-1} \mathcal{X}_{f(t_i)f(t_{i+1})} \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^n \mathcal{X}_j(f_j(t_i), f_j(t_{i+1})) \end{aligned} \quad (4.6)$$

elde edilir. Son olarak, $[a, b]$ aralığının tüm Δ bölüntüleri üzerinden supremum alınırsa, herhangi bir $k \in \{1, \dots, n\}$ için $\mathbf{L}_{f_k} \leq \mathbf{L}_f \leq \sum_{j=1}^n \mathbf{L}_{f_j}$ sonucuna ulaşılır. Bu da ispatı tamamlar. ■

Son olarak; Friz ve Victoir (2010)'in çalışmasında yer alan, metrik uzaylardaki kontrol fonksiyonunun ve bu kavrama dair bazı sonuçların RM uzaylardaki karşılıkları incelenecektir.

Tanım 4.12 $\mathfrak{I}_T = \{(s, t): 0 \leq s \leq t \leq T\}$ olmak üzere $\mathfrak{C}: \mathfrak{I}_T \rightarrow L_0^+(\Omega)$ biçiminde tanımlı bir $\mathfrak{C}$ dönüşümü verilsin. Eğer $s \leq t \leq u$ olmak üzere her $s, t \in [0, T]$ için $\mathfrak{C}(s, t) + \mathfrak{C}(t, u) \leq \mathfrak{C}(s, u)$ oluyorsa $\mathfrak{C}$ dönüşümü *üst toplamsaldır* denir. Bunun yanı sıra,

(i) $\mathfrak{C}$ dönüşümü süreklidir,

(ii) $0 \leq s \leq T$ için $\mathfrak{C}(s, s) = \emptyset$ dır

koşulları da sağlıyorsa, $\mathfrak{C}$ dönüşümü $[0, T]$ üzerinde bir *rastlantısal kontrol fonksiyonudur* denir.

Örnek 4.13 $\beta \geq 1$ ve $\xi \in L_0^+(\Omega)$ olmak üzere $s, t \in [0, T]$ için $\mathfrak{C}(s, t) = |s - t|^\beta \xi$ biçiminde tanımlanan $\mathfrak{C}$ dönüşümü bir rastlantısal kontrol fonksiyonudur.

Tanım 4.14 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay olmak üzere bir $f: [0, T] \rightarrow \mathbf{S}$ yolu ve bir $\mathfrak{C}: \mathfrak{I}_T \rightarrow L_0^+(\Omega)$ rastlantısal kontrol fonksiyonu verilsin. Eğer $s < t$ koşulunu sağlayan her $s, t \in [0, T]$ için $X_{f(s)f(t)} \leq \mathfrak{C}(s, t)$ olacak biçimde bir $\mathfrak{V} \in L_0^+(\Omega)$ bulunabiliyorsa f 'in *rastlantısal uzunluğu*, $\mathfrak{C}$ fonksiyonu tarafından (üstten) kontrol ediliyor denir.

Gösterim. $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay olmak üzere bir $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{S}$ yolu verildiğinde, herhangi $s, t \in [a, b]$ için $f|_{[s, t]}$ kısıtlanmış yolunun rastlantısal uzunluğu $\mathbf{L}(f|_{[s, t]})$ ile gösterilecektir (bkz. Şençimen, 2020).

Önerme 4.15 $(\mathbf{S}, \mathcal{X})$ ikilisi bir RM uzay olmak üzere bir $f: [0, T] \rightarrow \mathbf{S}$ yolu ve $s < t$ koşulunu sağlayan her $s, t \in [0, T]$ için üst toplamsal bir $\mathfrak{C}: \mathfrak{I}_T \rightarrow L_0^+(\Omega)$ dönüşümü verilsin. $s < t$ iken $X_{f(s)f(t)} \leq \mathfrak{C}(s, t)$ oluyorsa $\mathbf{L}(f|_{[s, t]}) \leq \mathfrak{C}(s, t)$ dir.

İspat. $[s, t]$ aralığının herhangi bir bölüntüsü $\Delta = (t_i)_{0 \leq i \leq n}$ olsun. Bu durumda

$$V_f^\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} X_{f(t_i)f(t_{i+1})} \leq \sum_{i=0}^{n-1} \mathfrak{C}(t_i, t_{i+1}) \leq \mathfrak{C}(s, t) \quad (4.7)$$

olup, $[s, t]$ aralığının tüm bölüntüleri üzerinden supremum alınırsa ispat tamamlanır. ■

5. SONUÇ

Metrik Geometri, geometrik nesneleri genel olarak metrik ve topolojik metotlarla analiz etmekle birlikte, matematiğin pek çok alanı ile yakından ilgili bir teoridir. RM Uzaylar Teorisi ise rastlantısal özellikler içeren uzaklıkların modellenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Her iki teorinin de pek çok uygulama alanları olduğu bilinmektedir.

Bu tez çalışmasına başlanmadan önce; bir metrik uzayda “yol (parametrik eğri)” ve “eğri uzunluğu” kavramlarının o uzayın geometrik analizi için temel nitelikte olduğu göz önünde bulundurularak, bu tip kavramlara ilişkin pek çok uluslararası bilimsel çalışmalar gözden geçirilmiş ve üzerinde (ε, λ) –topolojisi tanımlı bir RM uzayda yolların (parametrik eğrilerin) temel özelliklerine ilişkin birtakım yeni sonuçlar elde etmenin, RM uzayların analizine bir ölçüde katkıda bulunabileceği düşünülmüştür.

Bu bağlamda; 4. Bölümde de görüldüğü üzere, Şençimen (2020)’in çalışmasından ve diğer ilgili kaynaklardan yola çıkılarak, bir RM uzayda yer alan yolların (parametrik eğrilerin) rastlantısal uzunluklarına ve rastlantısal çaplarına dair bazı temel sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu tip yolların oluşturduğu uzayların bazı özellikleri de incelenmiştir.

KAYNAKLAR

- Alexandrov, A.D., 1944. The inner metric of a convex surface in a space of constant curvature. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 45, 3-6.
- Alexandrov, A.D., Reshetnyak Y.G., 1989. *General Theory of Irregular Curves*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 288 s.
- Alexandrov, A.D., 2006. *Selected Works, Part II: Intrinsic Geometry of Convex Surfaces*. Chapman&Hall/CRC, USA, 424 s.
- Apostol, T.M., 1981. *Mathematical Analysis*, Fifth Printing. Addison-Wesley, USA, 492 s.
- Bader, U., Duchesne, B., Lécureux, J., 2016. Furstenberg maps for CAT(0) targets of finite telescopic dimension. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 36, 1723-1742.
- Birkhoff, G., 1941. Metric foundations of geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 27, 402-406.
- Blokhintsev, D.I., 1973. *Space and Time in the Microworld*. D. Reidel, Dordrecht, 330 s.
- Blumenthal, L.M., 1970. *Theory and Applications of Distance Geometry*, Second Edition. Chelsea, New York, 347 s.
- Bracken, P., 2019. Metric geometry and the determination of the Bohmian quantum potential. *Journal of Physics Communications*, 3, 065006, doi: 10.1088/2399-6528/ab2820.
- Brady, Z., Guth, L., Manin, F., 2020. A hardness of approximation result in metric geometry. *Selecta Mathematica*, 26, Article number: 54, doi: 10.1007/s00029-020-00585-3.
- Brown, J.B., 1972. Stochastic metrics. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 24, 49-62.
- Burago, D., Burago, Y., Ivanov, S., 2001. *A Course in Metric Geometry*. American Mathematical Society, USA, 415 s.
- Busemann, H., 1942. *Metric Methods in Finsler Spaces and in the Foundations of Geometry*. Princeton University Press, Michigan, 243 s.
- Busemann, H., 1964. Length-preserving maps. *Pacific Journal of Mathematics*, 14, 457-477.
- Calabrese, P., 1978. The probability of the triangle inequality in probabilistic metric squares. *Aequationes Mathematicae*, 18, 187-205.
- Choquet, G., 1966. *Topology (Vol. XIX)*. Academic Press, New York, 337 s.
- Chung, K.L., 2001. *A Course in Probability Theory*, Third Edition. Academic Press, USA, 419 s.

- Constantin, G., Istrăţescu, I., 1989. *Elements of Probabilistic Analysis with Applications*. Editura Academiei, Bucharest, 476 s.
- Crasmareanu, M., Bercu, G., 2018. Semi-invariant submanifolds in metric geometry of endomorphisms. *Proceedings of the National Academy of Sciences, India Section A: Physical Sciences*, 90, 87-92.
- Darvas, T., Di Nezza, E., Lu, H.-C., 2021. The metric geometry of singularity types. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 771, 137-170.
- Di Nezza, E., Lu, C.-H., 2019. L^p metric geometry of big and nef cohomology classes. *Acta Mathematica Vietnamica*, 45, 53-69.
- Friz, P.K., Victoir, N.B., 2010. *Multidimensional Stochastic Processes as Rough Paths: Theory and Applications*. Cambridge University Press, New York, 656 s.
- Gaddum, J.W., 1953. Metric methods in integral and differential geometry. *American Journal of Mathematics*, 75, 30-42.
- Gaussier, H., Seshadri, H., 2017. Metric geometry of the Kobayashi metric. *European Journal of Mathematics*, 3, 1030-1044.
- Gromov, M., Katz, M., Pansu, P., Semmes, S., 2001. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*, Second Edition. Birkhäuser, USA, 585 s.
- Guo, T.-X., 1996. Radon-Nikodým property of conjugate Banach spaces and w^* -equivalence theorems of $w^* - \mu$ -measurable functions. *Science in China, Series A*, 39, 10, 1034-1041.
- Guo, T.-X., You, Z.-Y., 1998. A note on pointwise best approximation. *Journal of Approximation Theory*, 93, 2, 344-347.
- Guo, T.-X., 1999. Some basic theories of random normed linear spaces and random inner product spaces. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 1, 2, 160-184.
- Guo, T.-X., 2001a. Survey of recent developments of random metric theory and its applications in China I. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 3, 2, 129-158.
- Guo, T.-X., 2001b. Survey of recent developments of random metric theory and its applications in China II. *Acta Analysis Functionalis Applicata*, 3, 3, 208-230.
- Guo, T.-X., 2010. Relations between some basic results derived from two kinds of topologies for a random locally convex module. *Journal of Functional Analysis*, 258, 3024-3047.
- Guo, T.-X., Zhao, S.-E., Zeng, X.-L., 2014. The relations among the three kinds of conditional risk measures. *Science China: Mathematics*, 57, 1753-1764.
- Guo, T.-X., Zhang, E., Wang, Y., Wu, M., 2020. L_0 -convex compactness and its applications to random convex optimization and random variational inequalities. *Optimization*, doi: 10.1080/02331934.2020.1727901.

- Hadžić, O., Pap, E., 2001. *Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 273 s.
- Haydon, R., Levy, M., Raynaud, Y., 1991. *Randomly Normed Spaces*. Hermann, Paris, 138 s.
- Lafuerza-Guillén, B., Harikrishnan, P., 2014. *Probabilistic Normed Spaces*. Imperial College Press, Singapore, 220 s.
- Larotonda, G., 2019. Metric geometry of infinite-dimensional Lie groups and their homogeneous spaces. *Forum Mathematicum*, 31, 1567-1605.
- Leoni, G., 2009. *A First Course in Sobolev Spaces*. American Mathematical Society, USA, 607 s.
- Menger, K., 1928. Untersuchungen über allgemeine metrik. *Mathematische Annalen*, 100, 75-163.
- Menger, K., 1942. Statistical metrics. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 28, 535-537.
- Oliveira, I.A., 1987. Geometria Métrica Aleatória, M.Sc. Dissertation. Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Onicescu, O., 1964. *Nombres et Systèmes Aléatoires*. Éditions de l'Académie de la R.P. Roumaine, Bucharest, 280 s.
- Papadopoulos, A., 2014. *Metric Spaces, Convexity and Non-positive Curvature*, Second Edition. European Mathematical Society, Germany, 309 s.
- Rosen, N., 1947. Statistical geometry and fundamental particles. *Physical Review*, 72, 298-303.
- Roy, S., 1998. *Statistical Geometry and Applications to Microphysics and Cosmology*. Springer Science+Business Media, Dordrecht, 246 s.
- Schechter, E., 1997. *Handbook of Analysis and Its Foundations*. Academic Press, USA, 883 s.
- Schweizer, B., Sklar, A., 1983. *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York, 275s. (Yeni baskı: Schweizer, B., Sklar, A., 2005. *Probabilistic Metric Spaces*. Dover Publications, New York, 336 s.)
- Sherwood, H., 1969. On E -spaces and their relation to other classes of probabilistic metric spaces. *Journal of the London Mathematical Society*, 44, 441-448.
- Simboan, G., Theodorescu, R., 1962. Statistical spaces. *Revue Roumaine de Mathématiques Pures et Appliquées*. 7, 699-703.

- Špaček, A., 1956. Note on K. Menger's probabilistic geometry. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 6, 72-74.
- Špaček, A., 1960. Random Metric Spaces, *Transactions of the Second Prague Conference on Information Theory, Statistical Decision Functions and Random Processes*, Prague, 627-638.
- Stevens, R., 1968. Metrically generated probabilistic metric spaces. *Fundamenta Mathematicae*, 61, 259-269.
- Struve, R., Struve, H., 2019. The Thomsen-Bachmann correspondence in metric geometry I. *Journal of Geometry*, 110, Article number: 9, doi: 10.1007/s00022-018-0465-8.
- Şençimen, C., 2020. A study on paths in random metric spaces (yayına sunulmuş çalışma).
- Thang, D.H., Son, T.C., Thinh, N., 2019. Semigroups of continuous module homomorphisms on complex complete random normed modules. *Lithuanian Mathematical Journal*, 59, 229-250.
- Vakhania, N.N., Tarieladze, V.I., Chobanyan, S.A., 1987. *Probability Distributions on Banach Spaces*. D. Reidel, Dordrecht, 482 s.
- Wilson, W.A., 1935. On certain types of continuous transformations of metric spaces. *American Journal of Mathematics*, 57, 62-68.
- Xavier, A.F.S., 1979. *Comprimento Aleatório de Arcos nos Espaços Métricos Probabilísticos*. UFC, Fortaleza, 58 s.
- Zhang, X., Liu, M., 2017. A characterization for a complete random normed module to be mean ergodic. *Acta Mathematica Sinica (English Series)*, 33, 899- 910.