



T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ



RAYLEİGH ORANI VE ÖZDEĞERLER İÇİN
MİNİMALLEŞTİRME İLKESİ

MEHDİ BAŞARAN

Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. OKTAY MUHTAROĞLU
2021
Her hakkı saklıdır

T.C.
GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

RAYLEIGH ORANI VE ÖZDEĞERLER İÇİN
MİNİMALLEŞTİRME İLKESİ

MEHDİ BAŞARAN

TOKAT
2021

Her hakkı saklıdır

Prof. Dr. OKTAY MUHTAROĞLU danışmanlığında, MEHDİ BAŞARAN tarafından hazırlanan bu çalışma 29/01/2021 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oy birliği/oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi, olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof.Dr. Oktay MUHTAROĞLU

İmza:

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

İkinci Danışman: Dr.Öğr.Üyesi Hayati OLĞAR

İmza:

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Üye: Prof.Dr. Ali YAKAR

İmza:

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Üye : Doç.Dr. Kadriye AYDEMİR

İmza:

Amasya Üniversitesi

Üye : Doç.Dr. Serkan DEMİRİZ

İmza:

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Yukarıdaki sonucu onaylarım

(İmza)

Prof.Dr. MEHMET GÜNEŞ

Enstitü Müdürü

....../...../.....

TEZ BEYANI

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

MEHDİ BAŞARAN

29/01/2021

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RAYLEIGH ORANI VE ÖZDEĞERLER İÇİN MINİMALLEŞTİRME İLKESİ

MEHDİ BAŞARAN

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Prof. Dr. OKTAY MUHTAROĞLU

İkinci Danışman : Dr.Öğr.Üyesi Hayati OLĞAR

Bu tez çalışmasında; Rayleigh Oranı ve özdeğerler için minimalleştirme ilkesi araştırılmıştır. Tez dört bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde konunun teorik önemi ve bazı fiziksel uygulamaları açıklanmıştır. İkinci bölümde, araştırdığımız problemin tarihinden bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde tezde yararlanılan esas tanım ve sonuçlar verilmiştir. Sonuncu bölümde esas ayırıcı özelliği verilmiş sınır şartları olan yeni tipten bir Sturm-Liouville probleminin bazı önemli spektral özellikleri araştırılmıştır. Özel olarak Rayleigh oranı ve özdeğerler için minimalleştirme ilkesi hakkında teoremler ispatlanmıştır.

2021, 42 sayfa

ANAHTAR KELİMELER: Sturm-Liouville Problemleri, Özdeğerler, Özfonksiyonlar, Rayleigh Oranı.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

RAYLEIGH QUOTIENT AND MINIMAZATION PRINCIPLE FOR EIGENVALUES

MEHDİ BAŞARAN

Tokat Gaziosmanpasa University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. OKTAY MUHTAROĞLU

Co-Supervisor : Dr. Öğr. Üyesi HAYATİ OLĞAR

In this thesis we study the Rayleigh quotient and minimization principle for eigenvalues. The thesis consist of four sections. In the first section a brief explanation has been given about the theoretical importance and some physical applications of the thema. the second section devoted to the history of the problem under consideration . In the third section we give the basic definitions and results used in this thesis. The last section we investigate some important spectral properties of a new type Sturm-Liouville problems, the main feature of which is the nature of boundary conditions, imposed particularly, we prove theorems about Rayleigh quotient and minimization principle for the eigenvalues.

2021, 42 pages

KEYWORDS: Sturm-Liouville Problems, Eigenvalues, Eigenfunctions, Rayleigh Quotient

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	iv
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR ÖZETİ	4
3. GENEL BİLGİLER	9
3.1. Metrik Uzaylar	9
3.2. Normlu Uzaylar ve Banach Uzayları	9
3.3. İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları	10
3.4. $L_2[a, b]$ Uzayı	10
3.5. Lineer Operatörler ve Lineer Diferansiyel Operatörler	11
3.6. Langrange ve Green'in Özdeşlikleri	14
3.7. Sturm-Liouville Problemleri	15
3.8. Özdeğerlerin Reelliği Ve Özfonksiyonların Ortogonelliği	20
3.9. Rayleigh Oranı	22
3.10. Öz fonksiyon Açılım Metodu	24
4. BULGULAR VE SONUÇ	28
4.1. Problemin ifadesi	28
4.2. Özdeğerler ve Green Fonksiyonu	29
4.3. Özfonksiyonlar sistemi üzerine Fourier açılımı	34
4.4. Rayleigh Oranı	40
KAYNAKLAR	44

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan saygıdeğer danışman hocam Prof.Dr. Oktay MUHTAROĞLU' na minnettarlığımı sunarım. Yüksek lisans çalışmalarımda bana yardımcı olan yol gösteren ikinci danışmanım Dr.Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR hocama ve bölümümüzün değerli hocalarından Dr.Öğr. Üyesi Orhan ÖZDEMİR hocama özellikle teşekkür etmeyi kendime borç bilirim.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen bölümümüzün değerli hocalarına şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen kıymetli annem ,babam ve kardeşime teşekkür ederim.

MEHDİ BAŞARAN

Ocak2021

1. GİRİŞ

Doğada gerçekleşen fiziksel olayların incelenmesi, fizik alanında bilimsel araştırmalara yol açmıştır ve fizik alanındaki bu bilimsel çalışmalar matematik biliminin gelişmesinde büyük ölçüde etkili olmuştur. Matematiksel fiziğin ve mühendisliğin pek çok problemi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri biçiminde ifade edilmektedir. Farklı fiziksel özelliklere sahip olan maddeler arasındaki ısı ve madde iletimi problemleri sınır şartlarının yanısıra geçiş şartlarını da içeren sınırdeğer probleminin incelenmesini gerektirmektedir. İlk defa 1836 yılında Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ortaya konulan, literatürde Sturm-Liouville problemi olarak adlandırılan sınır değer problemi de bu problemlerden birisidir. Başlangıçta ısı iletimi problemlerine uygulanan Sturm-Liouville teorisi günümüzde birçok fiziksel problemin araştırılmasında en etkin yöntemlerden biri olarak bilinmektedir geçiş şartları eklenmiş sınır değer problemleri fiziksel problemlerde örneğin; ısı kütle aktarım probleminde, titreşim probleminde, çubuğun noktasal yüklerle yüklenmesi v.b. problemlerinde değişkenlerine ayırma yönteminin uygulanmasından sonra ortaya çıkmaktadır. Bu problemler Fourier yöntemi (değişkenlerine ayırma) ile incelendiğinde elde edilen denklemin sınır şartlarında da spektral parametre bulunduğu görülür. (Yakar ve Akdoğan, 2017) Bu nedenle literatürde sınır şartlarında spektral parametre bulunduran ve bulundurmayan Sturm- Liouville problemleri ile ilgili çok sayıda çalışmalar vardır (Allahverdiev, 2004 ve 2005; Eryılmaz, 2006; Shi and Chen, 1999; Fulton, 1977; Walter, 1973; Welstead 1982)

Birçok fiziksel süreç, örneğin tellerin titreşimi, gibi atomik parçacıkların etkileşimi, kompleks ortamın elektrodinamiği, aerodinamik polimer reolojisi veya dünyanın serbest salınımları incelenirken Sturm-Liouville özdeğer problemi elde edilir. (Yakar ve Akdoğan, 2019) Örneğin sabit çözülmüş tekmürlü akışta alt dövülmüş homojen , izotopik gözenekli ortamda tetiklenmeyen çözülmüş bir çözünür için birden fazla boyutlu formun bir boyutsal biçimi,

$$f_s + v f_x = C f_{xx} \quad x \in (0, K), s > 0$$

denklemini şeklinde elde edilir. Burada $f(x, s)$ çözünen maddenin konsantrasyonu olduğunda v ortalama doğrusal yeraltı suyu hızıdır , C hidrodinamik dağılma katsayısı

ve K aküferin uzunluğudur. Değişkenlerin ayrılması yöntemi kullanılarak bu problem aşağıdaki Sturm-Liouville özdeğer problemi şeklinde yazılabilir.

$$[p(x)u']' + \lambda r(x)u = 0, \quad x \in (0, K), \quad u(0) = 0, \quad u'(K) = 0$$

Burada $p(x) = r(x) = exp(-vx/C)$ biçimindedir. Genellikle Sturm-Liouville teorisinin birçok ilginç uygulaması kuantum mekaniğinde ortaya çıkmaktadır. Örneğin potansiyel $V(x)$ olan bir uzay boyutunda hareket eden tek bir kuantum-mekanik kütlesi m olan parçacığı için zamana bağlı Shrodinger denklemi

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi.$$

biçiminde ifade edilir. Çözüm $\psi(x, t) = \varphi e^{-iEt/\hbar}$, biçiminde aranırsa $\varphi(x)$ in aşağıdaki diferansiyel denklemi sağladığını görüyoruz

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\varphi'' + V(x)\varphi = E\varphi.$$

Bu denklem $u'' + qu = \lambda u$ formunda bir Sturm-Liouville denklemdir.

Rayleingh oranı, katıhal mekaniğin yanısıra kuantum mekaniğinde de kullanılan önemli bir yaklaşım yönteminin temelidir. Rayleingh oranı $R(u)$ olarak gösterilir ve

$$R(u) = \frac{\langle Lu, u \rangle_H}{\langle u, u \rangle_H}$$

eşitliği ile tanımlanır. L operatörü H Hilbert uzayında tanımlı bir diferansiyel operatör olsun. O halde özdeğer problemi $Lu = \lambda u$ biçiminde ifade edilir. Bu ifadeden L diferansiyel operatörünün herhangi bir özçifti (λ_i, u_i) için $\lambda_i = R(u_i)$ olduğu görülür. Herhangi bir özdeğer, Rayleingh oranı da özfonksiyonla ilişkili olsa da özfonksiyon bilinmediği için bu oran özdeğeri belirlemek için kullanılmaz. Bununla birlikte Rayleingh oranı yardımı ile diferansiyel denklemi çözmeden ilginç ve önemli sonuçlar elde edilebilir. Örneğin özdeğerin tahmininde oldukça yararlı olabilir.

Bu tezin amacı Sturm-Liouville problemleri için Rayleingh oranı, özfonksiyon açılımı, Parseval eşitliği ve Rayleingh-Ritz formülü (minimalleştirme prensibi) gibi önemli

spektral özellikleri incelemektir. 1950'den sonraki yıllarda Sturm-Liouville teorisinin gelişimi çeşitli kaynaklardan bulunabilir; özellikle Atkinson ,Levitan and Sargsjan ve Zettl kitaplarında bulunabilir.



2. LİTERATÜR ÖZETİ

C. Sturm ve J. Liouville'nin (Sturm ve Liouville, 1837), 19. yüzyılın ortalarında yaptıkları çok önemli çalışmalardan sonra bu konu birçok matematikçi ve fizikçinin dikkatini çekmiştir. Özellikle de kuantum mekanikinde ortaya çıkan ünlü Schrödinger denkleminin araştırılması ihtiyacı Sturm-Liouville teorisinin gelişmesinde önemli bir etken olmuştur. H. Weyl'in 1910'uncu yılda yaptığı çalışma ile Sturm-Liouville teorisinin yeni bir dalının singular (tekil) Sturm-Liouville problemleri teorisinin temeli atılmıştır.

20. Yüzyılın ilk yarısında (Dixon, 1912; Stone, 1932; Weyl, 1910; Titchmarsh, 1962) çalışmaları bu teorinin farklı yönlerde gelişmesinde etkili olmuştur. Bu teori sonraki yıllarda da yüzlerce matematikçi ve fizikçi tarafından yoğun bir biçimde geliştirilmiştir. Çünkü fizikte ve başka doğa bilimlerinde ortaya çıkan yeni problemlerin araştırılması neticesinde bu teoride yeni sonuç ve yöntemler elde edilir. Bu tür problemlerden tez çalışmamızla ilgili olan bazıları hakkında kısaca bilgi verelim. Birçok fizik problemlerinde zamana göre türev sadece diferensiyel denklemde değil, aynı zamanda sınır şartlarında da ortaya çıkmaktadır. Böyle problemlerle ilgili bir çok örneği (Fulton, 1977) çalışmada bulabiliriz. Böyle problemlere uygun olan Sturm-Liouville problemlerinde özdeğer parametresi sadece diferensiyel denklemde değil, hem de sınır şartlarında bulunur. Bu tür Sturm - Liouville problemleri farklı yöntemlerle (Binding ve ark., 1993; Binding ve Volkmer, 2001; Hinton and Shaw, 1990; Kandemir ve Mukhtarov, 2016; Kerimov ve Mirzoyev, 2003; Langer, 1932; Mukhtarov, 1994; Mukhtarov ve Kandemir, 2002; Mukhtarov ve ark., 2015; Mukhtarov ve Yakubov, 2002; Olğar ve Mukhtarov, 2017; Schneider, 1974; Shkalikov, 1982; Walter, 1973; Wang ve ark., 2009) araştırılarak önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Walter "Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in Boundary Condition, Math. Z. 133(1973), 301", künyeli çalışmada

$$TU := \frac{1}{r} \{ -(pu')' + qu \} = \lambda u, \text{ on } [a_1, a_2] \quad (2.0.1)$$

$$-(\beta_{i1}u(a_i)) = \lambda(\alpha_{i1}u(a_i) - \alpha_{i2}u'(a_i)) \quad (i = 1, 2) \quad (2.0.2)$$

Sturm Liouville probleminin bir operatör teorik formülasyonunu vermiştir. Yazar aynı zamanda

$$\rho = \beta'_1\beta_2 - \beta_1\beta'_2 > 0 \quad (2.0.3)$$

şartını sağlayan hem denkleminde hem de sınır şartlarının her ikisinde özdeğer parametresi bulunduran (2.0.1) – (2.0.2) sınır değer probleminin ürettiği uygun Hilbert uzayında tanımlı A operatörünün self-adjoint olduğunu göstermiştir.

Schneider "A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math. Z. 1974", isimli çalışmasında

$$-(pu')' + qu = \lambda ru \quad (2.0.4)$$

$$u(a) = 0 \quad (2.0.5)$$

$$-(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = \lambda(\alpha_1 u(b) - \alpha_2 u'(b)) \quad (2.0.6)$$

probleminin S – hermityan sınır-değer problemlerinin teorisi çerçevesinde kabul edilebileceğini göstermiştir. Aynı zamanda Schneider bu çalışmasında, özfonksiyonlar sistemi üzerine açılımın mutlak ve düzgün yakınsaklığı ile ilgili koşullar vermiştir.

Fulton "Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Roy. Soc. Edinburg 77a (1977),293-308",künyeli makalesinde ;

$$TU := -u'' + qu = \lambda u \quad (2.0.7)$$

$$\cos \alpha u(a) + \sin \alpha u'(a) = 0, \alpha \in [0, \pi) \quad (2.0.8)$$

$$-[\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)] = \lambda[\beta'_1 u(b) - \beta'_2 u'(b)] \quad (2.0.9)$$

biçiminde sınırdeğer problemini araştırmış ve Titchmarsh'ın 1962 yılında yayımlanmış olan "Eigen function Expansions Associated with Second-Order Differential Equations" adlı kitabındaki regüler Sturm-Liouville problemleri için yer alan incelemelerin (2.0.7)– (2.0.9) sınır-değer problemleri üzerine devam ettirilebileceğini göstermiştir. Ayrıca Fulton; Fourier tipi şartlar altında noktasal yakınsaklık şartlarını içeren bir takım yakınsaklık teoremleri elde etmiş, özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller

bulmuş ve aynı zamanda, problemin ele alınacağı aralığın sonsuz ve yarı sonsuz olması durumlarını da incelemiştir.

Hinton "An Expansion Theorem For An Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Quart J. Math. Oxford (2) (1979), 33-42", isimli çalışmasında

$$TU := \frac{1}{r} \{-(pu')' + qu\} = \lambda u \quad (2.0.10)$$

$$\cos \alpha u(a) + \sin \alpha (pu')(a) = 0, \alpha \in [0, \pi) \quad (2.0.11)$$

$$-[\beta_1 u(b) - \beta_2 (pu')(b)] = \lambda [\beta'_1 u(b) - \beta'_2 (pu')(b)] \quad (2.0.12)$$

biçiminde verilmiş Sturm-liouville problemi için daha önceki yazarlar (Fulton, 1977; Schneider, 1974) tarafından uygulanan Hilbert uzayı metodunu kullanarak dikkate aldıkları fonksiyonların daha geniş bir sınıfı için düzgün yakınsaklık teorisini elde etmiştir. Özdeğerlerin negatif olmaması durumunda bu sınıf, $A^{\frac{1}{2}}$ operatörünün tanım bölgesidir. Buradaki A operatörü, (2.0.10) – (2.0.12) problemi ile bağlantılı self-adjoint operatördür.

D. B. Hinton and J. K. Shaw'ın 1987 ve 1990 yıllarında yayımlamış oldukları makalelerinde (2.0.10) – (2.0.12) tipinde Sturm-Liouville problemini incelemiştirlerdir. Onlar, $M(\lambda)$ Titchmarsh-Weyl katsayısının varlığını kanıtlamışlar ve bu katsayıyı Green fonksiyonu ile Rezolvent operatörünü inşa etmek için kullanmışlardır.

Diğer taraftan fizikte sadece sürekli problemler değil, bazı süreksizliklere sahip olan sınır-değer problemleri de ortaya çıkmaktadır. Böyle durumlarda doğal olarak sürekli noktalarında geçiş şartları olarak adlandırılan ek şartlar da ortaya çıkmaktadır. Geçiş şartları ile verilen regular Sturm-Liouville problemleri O. Sh. Mukhtarov ve çalışma arkadaşları tarafından son yıllarda sistemli bir biçimde araştırılmış ve önemli sonuçlar bulunmuştur (bkz., örneğin, (Akdoğan ve ark., 2005; Aydemir ve Mukhtarov, 2016, 2017; Kandemir ve Mukhtarov, 2016; Mukhtarov, 1994; Mukhtarov ve Kandemir, 2002; Mukhtarov ve ark., 2015; Mukhtarov ve Yakubov, 2002; Olğar ve Mukhtarov, 2017; Olğar ve ark., 2018)). Bu çalışmalardan esinlenerek dünyadaki bir çok matematikçi de son yıllarda bu konuya yoğun ilgi göstermiş ve göstermektedir

(bkz., örneğin, (Allahverdiev ve ark., 2013; Ao, Sun ve Zhang 2012; Bairamov ve Uğurlu, 2011; Chanane, 2007; Lancia, 2004; Wang ve ark., 2009; ?) (ve onların kaynaklarına).

Periyodik Sturm-Liouville problemlerinin matematiksel fiziğin ve akışkanlar mekaniğinin birçok alanında ortaya çıktığı biliniyor. Örneğin klasik mekanik problemleri, elektro manyetik teori, kuantum fiziği, termodinamik problemleri ve özellikle dalga denklemlerinde bu problemlere sıkça rastlanmaktadır. İlk olarak 19. yüzyılın ortalarında Sturm tarafından ısı iletimi problemlerinin incelenmesiyle ortaya çıkan bu tipten problemler günümüzde güncelliğini daha da arttırarak yoğun bir şekilde incelenmektedir. Bu konuda çok sayıda kitap ve makale yayımlanmasına rağmen periyodik Sturm - Liouville problemleri hem diferansiyel denklemler teorisinin hem de uygulamalı matematiğin en önemli ve en güncel konusu olmaya devam etmektedir. Matematik fiziğin ortaya koyduğu yeni ve güncel problemlerin araştırılma ihtiyacı periyodik sınır-değer problemleri teorisinin daha da geliştirilmesi ihtiyacını ortaya koymaktadır. İncelenen bu tip problemlerin çözümleri birçok matematikçi tarafından incelenmiştir (Hermann,1985; Webb, 1980).

Yirminci yüzyılın başlarından itibaren pek çok çalışmaya konu olmuş farklı türden sınır-değer problemlerinin incelemeleri arasına periyodik sınır-değer problemleri de girmiştir ((Lin ve Jiang, 1987) , Lin ve Jiang, 1987; Cai, 2010; Amiraliyev ve Duru, 2003; Cen,2011). Zamana bağlı problemlerin incelenmesi ise Amiraliyev (1988) ve Güllü (1995) tarafın dan yapılmıştır. Amiraliyev ve Çakır'ın 2000 yılında yayımlanan çalışmalarında, konvektif terim ve sıfıncı mertbe indirgenmiş denklemlere sahip düzgün yakınsak fark metodu geliştirilerek singüler pertürbe periyodik sınır-değer problemi için fark şemaları verilmiş ve nümerik çözümleri incelenmiştir.

Genel olarak periyodik katsayılı diferensiyel operatörler Hill operatörü olarak bilinir. Bu operatörle ilgili çalışmaların büyük bir kısmı 1952 yılında Mangus ve Winkler tarafından özetlenmiş ve bu çalışmada denklemin karakteristik değerleri ve diskriminantı incelenmiş, kararlılık ve kararsızlık aralıkları tespit edilmiştir.

Yukarıda bahsettiğimiz bütün çalışmalarda sınır - değer problemleri, geçiş şartları içermeyen sınır - değer problemleri için incelenmiştir. Muhtarov ve arkadaşları

(Muhtarov, 1994; Muhtarov ve Kandemir, 2002; Muhtarov ve Aydemir, 2017; Muhtarov ve Aydemir, 2016; Muhtarov ,Olğar ve Aydemir, 2015) çalışmalarında ise süreksiz katsayılı adi ve kısmi türevli diferensiyel denklemler için Sturm - Liouville problemleri araştırmışlar. Bu çalışmalarda esasen diferensiyel ve özdeğer parametresine bağlı olan sınır - değer geçiş problemleri için izomorfluk, hem uzay değişkenine hem de özdeğer parametresine göre koersitivlik, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiklerinin bulunması, rezolvent operatörünün değerlendirilmesi, tamlık ve iki kat tamlık, Abel bazlığı v.s. hakkında teoremler ispatlanmış ve uygun parabolik tipten kısmi türevli diferensiyel denklemler için Sturm-Liouville problemleri incelenmiştir. Yaptığımız tez çalışmasında Muhtarov' un çalışmalarından ve kaynaklar kısmında verilen kitap ve makalelerden yararlanılmıştır.

3. GENEL BİLGİLER

Bu kısımda tez çalışmamızda istifade edeceğimiz temel kavram ve sonuçlar ile ilgili gerekli olan bilgilere yer verilmiştir.

3.1. Metrik Uzaylar

$\mathbb{H} \neq \emptyset$ kümesi ve $d : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$, $(f, g) \rightarrow d(f, g)$ dönüşümü için

$$1. \forall f, g \in \mathbb{H}, \quad d(f, g) \geq 0 \quad , \quad d(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$$

$$2. \forall f, g \in \mathbb{H}, \quad d(f, g) = d(g, f)$$

$$3. \forall f, g, h \in \mathbb{H}, \quad d(f, g) \leq d(f, h) + d(h, g)$$

özellikleri sağlanırsa $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ uzayı metrik uzay olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.1. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ metrik uzayında bir $\{f_n\}$ dizisi ve bir f_0 noktası verilsin.

Eğer $d(f_n, f_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) ise $\{f_n\}$ dizisi f_0 noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 3.1.2. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ metrik uzayında bir $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer $d(f_n, f_0) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) olacak biçimde $f_0 \in H$ mevcutsa $\{f_n\}$ dizisine yakınsak dizi denir.

Tanım 3.1.3. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ metrik uzayı ve bu uzayda $\{f_n\}$ dizisi verilsin. Eğer $d(f_n, f_m) \rightarrow 0$ ($n, m \rightarrow \infty$) ise bu durumda $\{f_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.4. $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, d)$ metrik uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya Tam Metrik Uzay denir.

(Yakubov, 1994)

3.2. Normlu Uzaylar ve Banach Uzayları

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ cismi (reel veya kompleks sayılar cismi) üzerinde tanımlı $\mathbb{H}$ reel veya kompleks lineer uzayı olsun. $\mathbb{H}$ lineer uzayı üzerinde tanımlı $\|\cdot\| : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{K}$ dönüşümünün aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim:

$$\text{i. } \forall f \in \mathbb{H} \text{ için } \|f\| \geq 0 \text{ ve } \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0 \quad (\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0)$$

$$\text{ii. } \forall f \in \mathbb{H}, \forall \alpha \in R, \quad \|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$$

$$\text{iii. } \forall f, g \in \mathbb{H}, \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$$

Bu durumda $\mathbb{H}$ lineer uzayında bir norm tanımlanmıştır denir, $\|f\|$ – ye f elemanın normu denir. $\mathbb{H}$ üzerinde (i) – (iii) koşullarıyla belirlenen norm ile birlikte $\mathbb{H}$ vektör (lineer) uzayına normlu lineer uzay denir. Lineer normlu uzayda $d(f, g) = \|f - g\|$ eşitliği bir metrik tanımlar. Bu nedenle her normlu uzay aynı zamanda bir metrik uzay kabul edilir. Eğer lineer normlu uzay tam ise (lineer normlu uzay $d(f, g) = \|f - g\|$ metriğine göre metrik uzay olarak kabul edildiği için metrik uzaylardaki bütün kavramlar lineer normlu uzaylar için de tanımlanmış olur) bu uzay Banach uzayı olarak adlandırılır (Yakubov, 1994).

3.3. İç Çarpım Uzayları ve Hilbert Uzayları

$\mathbb{H}$ kompleks vektör uzayı olsun. $\mathbb{H}$ uzayında $\forall f, g \in \mathbb{H}$ eleman çiftine $\langle f, g \rangle$ ile gösterilen bir tek kompleks sayı karşılık getirilmişse ve de

$$\text{i. } \forall f, g \in \mathbb{H}, \quad \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$$

$$\text{ii. } \forall f, g, h \in \mathbb{H}, \quad \langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle,$$

$$\text{iii. } \forall f, g \in \mathbb{H}, \forall \mu \in \mathbb{C}, \quad \langle \mu f, g \rangle = \mu \langle f, g \rangle,$$

$$\text{iv. } \forall f \in \mathbb{H}, \quad \langle f, f \rangle \geq 0,$$

$$\text{v. } \forall f \in \mathbb{H}, \quad \langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0.$$

koşulları sağlanırsa, $\mathbb{H}$ – da bir iç çarpım tanımlanmıştır denir, $\langle f, g \rangle$ sayısına f ve g elemanlarının iç çarpımı denir, $\mathbb{H} = (\mathbb{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ise iç çarpım uzayı olarak adlandırılır. $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$ formülü $\mathbb{H}$ iç çarpım uzayı üzerinde bir norm tanımlar. Bu nedenle her iç çarpım uzayı bir normlu uzay, dolayısıyla bir metrik uzay olarak kabul edilir. Eğer $\mathbb{H}$ iç çarpım uzayı bu norma göre tam ise ve de sonsuz boyutlu ise (yani sonlu boyutlu değilse) $\mathbb{H}$ uzayı bir Hilbert uzayı olarak adlandırılır (Yakubov, 1994).

3.4. $L_2[a, b]$ Uzayı

$[a, b]$ aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir bir $f(x)$ fonksiyonu olsun. Eğer $|f(x)|^2$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilir ise,

$f(x)$ fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir. (Naimark 1967) Karesi integrallenebilir fonksiyonların lineer uzayında

$$\langle f, g \rangle_{L_2[a,b]} = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx \quad (3.4.1)$$

eşitliği bir iç çarpım tanımlar (burada Lebesgue anlamında integral kastedilir) Bu iç-çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olduğu iyi bilinmektedir. Bu uzay $L_2[a, b]$ ile gösterilir. (Kreyszig, 1978)

Teorem 3.4.1. $L_2[a, b]$ uzayı tamdır ve sonsuz boyutludur. Yani $L_2[a, b]$ uzayı bir Hilbert uzayıdır (Kreyszig, 1978)

Teorem 3.4.2. $L_2[a, b]$ Hilbert uzayı ayrılabilir, yani bu uzayda her yerde yoğun olan en az bir sayılabilir sonsuz alt küme mevcuttur. (Kreyszig, 1978)

3.5. Lineer Operatörler ve Lineer Diferansiyel Operatörler

Bir T fonksiyonunun tanım ve görüntü kümeleri aynı cisim üzerinde lineer uzaylarsa ve cisimdeki her α ve T nin tanım uzayındaki her x, y vektör çifti için

$$T(x + y) = T(x) + T(y) \quad (3.5.1)$$

ve

$$T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad (3.5.2)$$

koşulları gerçekleşiyorsa T 'ye lineer operatör denir. Değer kümesi $\mathbb{R}$ reel sayılar veya $\mathbb{C}$ kompleks sayılar olan operatörlere fonksiyonel denir.

Tanım 3.5.1. N ve N' birer normlu uzay ve $A : N \rightarrow N'$ lineer bir operatör olsun . Eğer öyle bir $K > 0$ sayısı varsa ki her $x \in N$ için

$$\|A(x)\|' \leq K \|x\| \quad (3.5.3)$$

eşitsizliği sağlansın, o halde A ya sınırlı lineer operatör denir. Burada $\| \cdot \|'$, N' deki norm, $\| \cdot \|$ ise N deki normdur. (Bayraktar, 2006)

Tanım 3.5.2. $L, D(L)$ tanım bölgesinde lineer operatör olmak üzere;

$$Ly = \lambda y \quad (3.5.4)$$

eşitliğini sağlayan $y \neq 0$ elemanı mevcut ise λ parametresine L operatörünün özdeğeri $y \neq 0$ elemanına ise bu özdeğere uygun özfonksiyon denir.

Şimdi eşlenik operatörler kavramını tanıtaçaz ;

Tanım 3.5.3. Bir diferansiyel operatörün $D(L)$ tanım bölgesi belirli bir homojen sınır koşullarını sağlayan tüm $u \in L^2_\sigma[a, b]$ fonksiyonlarının oluşturduğu lineer alt uzaydır ve bu küme $D(L)$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.4. L ve L^* diferansiyel operatörleri verilsin eğer her $v \in D(L)$ ve her $u \in D(L^*)$ için

$$\langle u, Lv \rangle = \langle L^*u, v \rangle \quad (3.5.5)$$

eşitliği sağlanırsa L^* diferansiyel operatörüne L 'nin eşleniği denir. ($D(L^*)$ -ın tanımı (Naimark, 1967) kaynağında bulunur.)

Örnek 3.5.5. Bir örnek olarak ikinci dereceden

$$L = a_2(x) \frac{d^2}{dx^2} + a_1(x) \frac{d}{dx} + a_0(x) \quad (3.5.6)$$

lineer diferansiyel operatörünün eşleniğini bulalım. Eşlenik operatörü elde etmek için öyle $D(L^*)$ kümesi ve öyle L^* diferansiyel operatörü bulmamız gerekir ki

$$\langle u, Lv \rangle = \int_a^b u(a_2v'' + a_1v' + a_0v)dx \quad (3.5.7)$$

eşitliğini $\langle L^*u, v \rangle$ biçiminde yazılabilir. Kısmi integralleme ile

$$\int_a^b u(x)a_1(x)v'(x)dx = u(x)a_1(x)v(x)|_a^b - \int_a^b (u(x)a_1(x))'v(x)dx \quad (3.5.8)$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi iki defa kısmi integralleme yaparsak, aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\begin{aligned}
\int_a^b u(x)a_2(x)v''(x)dx &= u(x)a_2(x)v'(x)|_a^b - \int_a^b (u(x)a_2(x))'v'(x)dx \\
&= [a_2(x)u(x)v'(x) - (u(x)a_2(x))'v(x)]|_a^b \\
&\quad + \int_a^b (u(x)a_2(x))''v(x)dx
\end{aligned} \tag{3.5.9}$$

Bu sonuçların birleştirilmesi ile aşağıdaki eşitlik elde edilir ;

$$\begin{aligned}
\langle u, Lv \rangle &= \int_a^b u(a_2v'' + a_1v' + a_0v)dx \\
&= [a_1(x)u(x)v(x) + u(x)a_2(x)v'(x) - (u(x)a_2(x))'v(x)]|_a^b \\
&\quad + \int_a^b [(a_2u)'' - (a_1u)' + a_0u]vdx
\end{aligned} \tag{3.5.10}$$

L^* 'ın tanım bölgesini öyle tanımlamamız gerekiyor ki aşağıdaki eşitlik sağlanmış olsun;

$$[a_1(x)u(x)v(x) + u(x)a_2(x)v'(x) - (u(x)a_2(x))'v(x)]|_a^b = 0$$

bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$\langle u, Lv \rangle = \int_a^b [(a_2u)'' - (a_1u)' + a_0u]vdx = \langle L^*u, v \rangle$$

böylece;

$$L^*u = (a_2u)'' - (a_1u)' + a_0u \tag{3.5.11}$$

elde edilir. $L^* = L$ olduğunda operatör formal olarak kendine eşlenik adlandırılır. L 'nin tanım bölgesi L^* 'ın tanım bölgesi ile aynı olduğunda kendine eşlenik operatör elde edilir. Kendine eşleniğin kurulmasında tanım bölgesi önemli olduğundan dolayı, eşleniğin tanım bölgesinin bulunacağı bir örneğin yapılmasına ihtiyaç duyarız.

Örnek 3.5.6.

$$Lu = \frac{du}{dx} \tag{3.5.12}$$

operatörü için $[0, 1]$ aralığında $u(0) = 2u(1)$ sınır koşulunu tanımlayalım

$\langle v, Lu \rangle = \langle L^*v, u \rangle$ koşulunu sağlayan eşlenik operatörü bulmamız gerekiyor L^*

diferansiyel operatörünü ve $D(L^*)$ tanım bölgesini aşağıdaki gibi tanımlamamız gerekiyor

1.

$$L^* = -\frac{d}{dx} \quad (3.5.13)$$

2.

$$uv|_0^1 = 0 \implies 0 = u(1)[v(1) - 2v(0)] \implies v(1) = 2v(0) \quad (3.5.14)$$

3.6. Langrange ve Green'in Özdeşlikleri

Strum-Liouville probleminin özdeğerlerinin reel olduğunu ve uygun özfonksiyonların ortogonal olduğunu ispatlamak için iki önemli özdeşliği tanımlamalıyız. Strum-Liouville operatörü

$$L = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{d}{dx}\right) + q \quad (3.6.1)$$

biçiminde tanımlanır .Bu operatör için iki tane önemli özdeşlik bulunmaktadır.

Teorem 3.6.1. (Lagrange özdeşliği)

$$uLv - vLu = [p(uv' - vu')]' \quad (3.6.2)$$

İspat. Lagrange özdeşliğinin ispatı,operatörün basit işlemleriyle bulunabilir;

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= u\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx} + qv\right)\right] - v\left[\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx} + qu\right)\right] \\ &= u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) \\ &= u\frac{d}{dx}\left(p\frac{dv}{dx}\right) + p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} - v\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) - p\frac{du}{dx}\frac{dv}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}\left[pu\frac{dv}{dx} - pv\frac{du}{dx}\right]. \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

Teorem 3.6.2. (Green özdeşliği)

$$\int_a^b (uLv - vLu)dx = [p(uv' - vu')]\big|_a^b \quad (3.6.4)$$

Green özdeşliği ise Lagrange özdeşliğinin integrallenmesi ile kolayca elde edilir.

3.7. Sturm-Liouville Problemleri

$\mathbb{H}$ bir Hilbert uzayı ve L ise $L : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ biçiminde tanımlı olan bir lineer operatör olsun. Eğer her hangi $\mathbb{H}$ uzayının cisminden alınmış λ_0 skaleri için $Lf_0 = \lambda_0 f_0$ olacak biçimde $f_0 \in \mathbb{H}$, $f_0 \neq 0$ elemanı bulunursa, λ_0 sayısına L operatörünün özdeğeri, f_0 elemanına ise bu özdeğere uygun olan özvektör denir.

Uygulamalarda sık sık rastlanan diferansiyel operatörlerden biri de

$$L \equiv -\frac{d^2}{dx^2} + q(x) \quad (3.7.1)$$

biçiminde ifade edilen operatördür (bu operatör genelde $\mathbb{H} = L_2(a, b)$ biçimindeki Hilbert uzaylarında incelenmektedir). L operatörünün tanım bölgesi en sık olarak

$$f(a) \cos \alpha + f'(a) \sin \alpha = 0 \quad (3.7.2)$$

$$f(b) \cos \beta + f'(b) \sin \beta = 0 \quad (3.7.3)$$

$(\alpha, \beta \in [0, \pi))$ biçiminde veya

$$f(a) = f(b) \quad (3.7.4)$$

$$f'(a) = f'(b) \quad (3.7.5)$$

biçiminde verilmiş sınır şartları ile tanımlanır.

$$Lf(x) = -f''(x) + q(x)f(x) = \lambda f(x) \quad (3.7.6)$$

denkleminin (3.7.2) - (3.7.3) veya (3.7.4) - (3.7.5) tipindeki sınır şartlarını sağlayan çözümlerinin bulunması problemi klasik Sturm-Liouville problemleri olarak adlandırılır. Eğer (3.7.1) - (3.7.2) - (3.7.3) veya (3.7.1) - (3.7.4) - (3.7.5) Sturm-Liouville özdeğer probleminde;

1. $[a, b]$ aralığı sınırlı , $q(x)$ fonksiyonu integrallenebilir ise o halde (3.7.1) - (3.7.2) - (3.7.3) veya (3.7.1) - (3.7.4) - (3.7.5) problemleri Regüler Sturm-Liouville özdeğer problemleri olarak adlandırılır.

2. Regüler olmayan Sturm-Liouville problemine Singüler Sturm-Liouville özdeğer problemi denir.

Daha genel olan

$$f''(x) + p(x)f'(x) + (l(x) + \mu r(x))f(x) = 0 \quad x \in [a, b] \quad (3.7.7)$$

biçimindeki diferensiyel denklemler (burada $r(x)$ ikinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve $r(x) > 0$; $p(x)$ ise birinci mertebeden sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere)

$$u'' + q(t)u = -\lambda u \quad (3.7.8)$$

şeklindeki kanonik denkleme indirgenebilir. Bunun için x ve f değişkenlerinden

$$t = \frac{1}{c} \int_a^x \sqrt{r(s)} ds \quad t = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{r(s)} ds$$

$$u(t) = (r(x))^{\frac{1}{4}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_a^x p(s) ds \right\} f(x) \quad (3.7.9)$$

dönüşümü ile t ve u değişkenlerine geçilir. Ayrıca bu durumda $[a, b]$ aralığı da $[0, \pi]$ aralığına dönüşmüş olur. Bu dönüşüm literatürde Liouville dönüşümü olarak geçmektedir (Levitan ve Sargsyan, 1988).

Regular Sturm-Liouville özdeğer probleminin aşağıdaki özellikleri sağladığı ispat edilebilir. Ancak, hepsini burada ispatlamayacağız sadece bazı önemli özellikleri sıralayacağız ve özelliklerin bir kısmına odaklanacağız.

Aşağıda en genel biçimde verilmiş Sturm-Liouville problemini göz önüne alalım

$$Lu = -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda \sigma(x)u \quad (3.7.10)$$

$$\alpha_1 u(a) + \beta_1 u'(a) = 0, \quad (3.7.11)$$

$$\alpha_2 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \quad (3.7.12)$$

burada α_i, β_i ($i=1,2$) reel sabitlerdirler, $|\alpha_i| + |\beta_i| \neq 0$ dır. Bu sabitlerin farklı değerleri için farklı türden sınır şartları elde edilir. Eğer $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ise o halde (3.7.11), (3.7.12) sınır şartları

$$u(a) = u(b) = 0 \quad (3.7.13)$$

biçimine dönüşür. (3.7.13) biçimindeki sınır şartları literatürde Dirichklet sınır şartları olarak adlandırılır. Eğer $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ise o halde (3.7.11)(3.7.12) sınır şartları

$$u'(a) = u'(b) = 0 \quad (3.7.14)$$

biçimine dönüşür. Bu sınır şartları literatürde Neumann sınır şartları olarak adlandırılır.

1. Özdeğerler reel, sayılabilir ve sıralıdır ve en küçük bir özdeğer vardır. Böylece onları; $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ olarak yazabiliriz ancak en büyük özdeğer yoktur ve $n \rightarrow \infty, \lambda_n \rightarrow \infty$
2. Her λ_n özdeğerine uygun ϕ_n öz fonksiyonunun (a,b) açık aralığında yerleşen sıfır yerlerinin sayısı $n - 1$ dir
3. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar, $\sigma(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre dik (ortogonal) dir. Bu durumda iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\sigma(x)dx \quad (3.7.15)$$

biçiminde tanımlanır. O halde özfonksiyonların dikliği (ortogonallığı) aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{nm} \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (3.7.16)$$

yani $n \neq m$ ise $\langle \phi_n \phi_m \rangle = 0$ oluyor ;burada $\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \text{ ise} \\ 0, & m \neq n \text{ ise} \end{cases}$ kroneker deltasıdır.

4. Özfunksiyonlar sistemi tamdır; yani her parçalı differansiyellenebilir $f(x)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (3.7.17)$$

şeklinde genelleştirilmiş Fourier serisi biçiminde temsil edilebilir. Burada c_n katsayıları

$$c_n = \frac{\langle f, \phi_n \rangle}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle}$$

eşitliği ile tanımlanır .

Not 3.7.1. Aslında bu eşitliğin $L^2_\sigma[a, b] = \{f : \langle f, f \rangle < \infty\}$, σ ağırlık fonksiyonuna göre karesi integrallenebilir olan fonksiyonların Hilbert uzayında sağlandığı ispat edilir.

5. $L\phi_n = -\lambda_n \sigma(x) \phi_n$ eşitliğini ϕ_n ile iç çarpımı alınır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa, aşağıdaki Rayleigh oranı elde ederiz

$$\lambda_n = \frac{-p\phi_n \frac{d\phi_n}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b [p(\frac{d\phi_n}{dx})^2] dx}{\langle \phi_n, \phi_n \rangle} \quad (3.7.18)$$

Rayleigh oranı özdeğerlerinin bazı özelliklerini elde etmek için yararlı bir eşitliktir

Örnek 3.7.2. Şimdi aşağıdaki operatörün özdeğer ve öz fonksiyonlarını inceleyelim

$$Ly = (xy')' + \frac{2}{x}y = -\lambda \sigma y \quad x \in [1, 2] \quad (3.7.19)$$

$$y'(1) = 0, \quad y'(2) = 0 \quad (3.7.20)$$

şu an için $\sigma(x)$ 'ın ne olduğunu tanımlamıyoruz ancak çözümleri elde edebilmek için uygun bir fonksiyon seçeceğiz bu denklemi

$$xy'' + y' + \frac{2}{x}y = -\lambda \sigma y \quad (3.7.21)$$

biçiminde yazalım her iki tarafı x ile çarparsak

$$x^2 y'' + xy' + (2 + \lambda x \sigma) y = 0 \quad (3.7.22)$$

denklemini elde ederiz eğer ; $\sigma(x) = x^{-1}$ seçilirse ozaman bu denklem Cauchy-Euler denklemine indirgenir ve böylece ;

$$x^2 y'' + xy' + (2 + \lambda) y = 0 \quad (3.7.23)$$

Cauchy-Euler denklemi elde edilir o halde karakterislik denklem

$$r^2 + \lambda + 2 = 0 \quad (3.7.24)$$

biçiminde bulunur. Salınlımlı çözümler için $\lambda + 2 > 0$ olmasına gereksinim vardır; böylece $\lambda > -2$ için genel çözüm;

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda + 2} \ln |x|) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda + 2} \ln |x|) \quad (3.7.25)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi sınır koşullarını uygulayalım $y'(1) = 0$ sınır şartlarının sağlanması için $c_2 = 0$ olması gerekir. Böylece verilmiş denklemin $y'(1) = 0$ şartlarını sağlayan genel çözümü

$$y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda + 2} \ln |x|) \quad (3.7.26)$$

biçiminde elde edilir. İkinci $y'(2) = 0$ sınır şartınıda yerine yazarsak

$$\sin(\sqrt{\lambda + 2} \ln 2) = 0 \quad (3.7.27)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemin çözümleri için

$$\sqrt{\lambda + 2} \ln 2 = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, .. \quad (3.7.28)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece özdeğerler

$$\lambda_n = -2 + \left(\frac{n\pi}{\ln 2}\right)^2 \quad n = 0, 1, 2, .. \quad (3.7.29)$$

olarak bulunur. Uygun özfonksiyonlar

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi}{\ln 2} \ln x\right) \quad 1 \leq x \leq 2 \quad (3.7.30)$$

biçiminde elde edilir Bu somut örnek için özdeğerlerin reel sayılabilir ve sıralanabilir oldukları görülür en küçük özdeğer $\lambda = 2$ dir. Şimdi $[1, 2]$ aralığında her özfonksiyonun sıfır yerlerinin sayısını bulabiliriz. Eğer;

$$\cos\left(\frac{n\pi}{\ln 2} \ln x\right) = 0 \quad (3.7.31)$$

denklemini çözersek bu denklemin $[1, 2]$ aralığında tam olarak $n - 1$ tane sıfır yerinin olduğunu kolayca görebiliriz. Ortagonallik(diklik) de kolayca gösterilebilir. Gerçekten;

$$\begin{aligned} \langle y_n, y_m \rangle &= \int_1^2 \cos\left(\frac{n\pi}{\ln 2} \ln x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{\ln 2} \ln x\right) \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\ln 2}{\pi} \int_0^\pi \cos ny \cos my dy \\ &= \frac{\ln 2}{2} \delta_{n,m} \end{aligned} \quad (3.7.32)$$

Böylece regular Sturm-Liouville probleminin temel özelliklerinin bu somut örnek için sağlandığını göstermiş olduk.

3.8. Özdeğerlerin Reelliği Ve Özfonksiyonların Ortogonelliği

Bu kısımda Strum-Liouville probleminin özdeğerlerinin reel olduğunu ve buna karşılık gelen özfonksiyonların ortagonallığını ispat edeceğiz.

Teorem 3.8.1. (3.7.10)-(3.7.12) Sturm-Liouville probleminin tüm özdeğerleri reeldir.

İspat. Kabul edelim ki $\lambda = \lambda_n$ keyfi özdeğerler olsun uygun özfonksiyon ise $u = \phi_n(x)$ olsun. O halde

$$L\phi_n = -\lambda_n \sigma \phi_n \quad (3.8.1)$$

eşitliği sağlanacak; Bu denklemin kompleks eşleniği aşağıdaki şekildedir

$$L\overline{\phi_n} = -\overline{\lambda_n} \sigma \overline{\phi_n} \quad (3.8.2)$$

Şimdi ilk eşitliği $\overline{\phi_n}$ ile ve ikinci eşitliği ise ϕ_n ile çarparak sonucu taraf tarafa çıkardığımızda aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\overline{\phi_n}L\phi_n - \phi_nL\overline{\phi_n} = (\overline{\lambda_n} - \lambda_n)\sigma\phi_n\overline{\phi_n} \quad (3.8.3)$$

Bu eşitliğin her iki tarafının da integralini alalım

$$\int_a^b (\overline{\phi_n}L\phi_n - \phi_nL\overline{\phi_n})dx = (\overline{\lambda_n} - \lambda_n) \int_a^b \sigma\phi_n\overline{\phi_n}dx \quad (3.8.4)$$

Sol tarafa Green özdeşliği uygulayarak, aşağıdaki eşitliği buluruz

$$[p(\overline{\phi_n}\phi_n' - \phi_n\overline{\phi_n}')]_a^b = (\overline{\lambda_n} - \lambda_n) \int_a^b \sigma\phi_n\overline{\phi_n}dx \quad (3.8.5)$$

kendine eşlenik diferansiyel operatör için homojen sınır koşullarını kullandığımızda, eşleniğin sol tarafı sıfıra eşit olur ve aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$0 = (\overline{\lambda_n} - \lambda_n) \int_a^b \sigma\|\phi_n\|^2dx \quad (3.8.6)$$

İntegral sıfırdan farklı olduğu için $\overline{\lambda_n} - \lambda_n = 0$, yani;

$\overline{\lambda_n} = \lambda_n$ olmak zorundadır. Bu nedenle λ_n özdeğeri reeldir. İspat bitti.

Teorem 3.8.2. Sturm-Liouville probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar ortogonaldır.

İspat. $\lambda = \lambda_n$ bir özdeğer ve $u = \phi_n(x)$ bu özdeğere uygun olan özfonksiyon olsun. O halde

$$L\phi_n = -\lambda_n\sigma\phi_n \quad (3.8.7)$$

eşitliği sağlanır. λ_m ise λ_n 'den farklı olacak herhangi özdeğer olsun. Bu özdeğere uygun özfonksiyon ise $u = \phi_m(x)$ olsun o halde

$$L\phi_m = -\lambda_m\sigma\phi_m \quad (3.8.8)$$

eşitliği sağlanır. Şimdi ilk eşitliği ϕ_m ile ve ikinci eşitliği ϕ_n ile çarptıktan sonra taraf tarafa çıkarırsak aşağıdaki eşitlik elde edilir;

$$\phi_m L\phi_n - \phi_n L\phi_m = (\lambda_m - \lambda_n)\sigma\phi_n\phi_m \quad (3.8.9)$$

Bir önceki ispatta olduğuna benzer şekilde, eşitliğin her iki tarafının da integralini alalım ve Green özdeşliğini ve kendine eşlenik operatör için sınır şartlarını kullanalım. Bu durumda aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$0 = (\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b \sigma\phi_n\phi_m dx \quad (3.8.10)$$

Özdeğerler farklı olduğundan eşitliği $\lambda_m - \lambda_n$ ile böleriz ve aşağıdaki sonucu elde ederiz

$$\int_a^b \sigma\phi_n\phi_m dx = 0 \quad (3.8.11)$$

bu nedenle $\sigma(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre öz fonksiyonlar ortogonaldır yani;

$$n \neq m \Rightarrow \langle \phi_n, \phi_m \rangle = 0 \quad (3.8.12)$$

İspat bitti.

3.9. Rayleigh Oranı

Rayleigh oranı özdeğerlerin tahminlerini yapmak ve Sturm-Liouville özdeğer problemleri ile ilişkili bazı özelliklerin elde edilmesi için kullanışlıdır. $u = \phi_n(x)$ fonksiyonu $\lambda = \lambda_n$ özdeğerlerine uygun özfonksiyon olsun yani;

$$L\phi_n = -\lambda_n\sigma(x)\phi_n \quad (3.9.1)$$

eşitliği sağlansın. Bu eşitliğin her iki tarafını $\phi_n(x)$ ile çarptıktan sonra integrallersek aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_a^b [\phi_n \frac{d}{dx} (p \frac{d\phi_n}{dx}) + q\phi_n^2] dx = -\lambda_n \int_a^b \phi_n^2 \sigma(x) dx \quad (3.9.2)$$

Son eşitliği λ_n için çözebiliriz ve bu bize aşağıdaki eşitliği verecektir.

$$\lambda_n = \frac{-\int_a^b [\phi_n \frac{d}{dx}(p \frac{d\phi_n}{dx}) + q\phi_n^2] dx}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} \quad (3.9.3)$$

Ancak bu ifadeyi gerçekten değerlendiremeyiz, çünkü henüz $\phi_n(x)$ özfonksiyonlarını bilmiyoruz. Bu sonucu paydaki birinci terimi kısmi integralleme uygulayarak yeniden yazabiliriz yani; $u = \phi_n$ ve $dv = \frac{d}{dx}(p \frac{d\phi_n}{dx}) dx$ seçimini yapacağız. O halde aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$\int_a^b \phi_n \frac{d}{dx}(p \frac{d\phi_n}{dx}) dx = p\phi_n \frac{d\phi_n}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b [p(\frac{d\phi_n}{dx})^2 - q\phi_n^2] dx \quad (3.9.4)$$

Bu eşitliği bir önceki eşitlikte yerine yazarsak aşağıdaki Rayleigh oranını elde ederiz

$$\lambda_n = \frac{-p\phi_n \frac{d\phi_n}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b [p(\frac{d\phi_n}{dx})^2 - q\phi_n^2] dx}{\int_a^b \phi_n^2 \sigma dx} \quad (3.9.5)$$

Birçok uygulamada özdeğerin işareti önemlidir. Dolayısıyla, negatif olmayan özdeğerlere sahip olmak için (3.9.5)'de gördüğümüz gibi

a. $q(x) \leq 0$ ve

b. $-p\phi_n \frac{d\phi_n}{dx} \Big|_a^b \geq 0$ olmalıdır

Ayrıca eğer λ_n sıfır özdeğer ise o zaman homojen sınır koşullarında $q(x) = 0$ ve $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ olur. Homojen sınır şartları ile verilmiş Sturm-Liouville özdeğer problemlerinin özelliklerinden biri özdeğerlerin sıralanabilir olmasıdır yani;

$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ biçiminde sıralanabilmesidir. Böylece en küçük özdeğer vardır. Bu özellikten yararlanarak ispat edebiliriz ki;

$$\lambda_1 = \min_{y(x)} \frac{-py \frac{dy}{dx} \Big|_a^b + \int_a^b [p(\frac{dy}{dx})^2 - qy^2] dx}{\int_a^b y^2 \sigma dx} \quad (3.9.6)$$

eşitliği sağlanır. Burada minimum sınır şartlarını sağlayan tüm sürekli differansiyellenebilir $y(x)$ fonksiyonları üzerinden alınır ve bu minimum $y(x) = \phi_1(x)$ olduğunda elde edilir. Bu sonuç, sürekli olan ve sınır koşullarını sağlayan deneme fonksiyonlarını

minimum özdeğer tahminlerini elde etmek için kullanabiliriz. Deneme fonksiyonları Sturm-Liouville denklemini sağlamak zorunda değil.

Örnek 3.9.1. Yukarıda; $\phi'' + \lambda\phi = 0$, $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 0$ biçiminde verilmiş özdeğer problemini çözmüştük. Bu durumda en küçük özdeğer $\lambda_1 = \pi^2$ idi şimdi sınır koşullarını sağlayan $y(x) = x - x^2$ basit fonksiyonunu deneme fonksiyonu olarak

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_0^1 (1 - 2x)^2 dx}{\int_0^1 (x - x^2)^2 dx} = 10 \quad (3.9.7)$$

tahminini elde ederiz. Gerçekten de $\pi^2 \leq 10$ olur.

3.10. Öz fonksiyon Açılım Metodu

Bu bölümde belirli bir homojen olmayan sınır değer problemini çözmek için öz fonksiyon açılımı yöntemini uygulayacağız. Homojen olmayan bir

$$Ly = f(x) \quad (3.10.1)$$

diferansiyel denkleminin çözümünü araştıralım. Burada $y(x)$ verilen homojen sınır koşullarını sağlayan fonksiyondur. Bu homojen olmayan diferansiyel denklemin $y(x)$ çözümünü

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (3.10.2)$$

biçiminde arayacağız (3.10.2)-yi (3.10.1) de yerine koyarsak

$$f(x) = L\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x)\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \sigma(x) \phi_n(x) \quad (3.10.3)$$

eşitliği elde edilir. Şimdi bu açılımdaki katsayıları öz fonksiyonların ortogonalitelerinden yararlanarak bulacağız. Son denklemi $\phi_m(x)$ ile çarpıp integralini alırsak bu işlemden sonra aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_a^b f(x) \phi_m(x) dx = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) \sigma(x) dx \quad (3.10.4)$$

Ortogonallikten yararlanırsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx = -c_m\lambda_m \int_a^b \phi_m^2(x)\sigma(x)dx \quad (3.10.5)$$

Burada c_m katsayılarını aşağıdaki gibi elde ederiz

$$c_m = -\frac{\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx}{\lambda_m \int_a^b \phi_m^2(x)\sigma(x)dx} \quad (3.10.6)$$

bunları (3.10.2) de yerine yazarak (3.10.1) homojen olmayan diferansiyel denklemin çözümünü elde ederiz.

Örnek 3.10.1. Bir örnek olarak aşağıdaki sınır değer probleminin çözümünü bulmaya çalışalım

$$(xy')' + \frac{y}{x} = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, e] \quad (3.10.7)$$

$$y(1) = 0 = y(e) \quad (3.10.8)$$

$$y(e) = 0 \quad (3.10.9)$$

Bu diferansiyel denklem kendine eşlenik formundadır, bu nedenle ilişkili Sturm-liouville özdeğer probleminin ortogonal bir özfonksiyon sistemine sahip olduğunu biliyoruz. İlk önce bu özfonksiyonları bulalım; Yani aşağıdaki problemi çözmemiz gerekir

$$(x\phi')' + \frac{\phi}{x} = -\lambda\sigma\phi, \quad \phi(1) = 0 = \phi(e) \quad (3.10.10)$$

Terimleri yeniden düzenleyip her tarafı x ile çarptığımızda aşağıdaki denklemi elde ederiz;

$$x^2\phi'' + x\phi' + (1 + \lambda\sigma x)\phi = 0 \quad (3.10.11)$$

$\sigma(x)$ ' i seçmekle denklemi Couchy Euler tipi bir denkleme indirgeyebiliriz. Ağırlık fonksiyonunu $\sigma(x) = \frac{1}{x}$ olarak seçtiğimizde aşağıdaki eşitliği elde ederiz

$$x^2\phi'' + x\phi' + (1 + \lambda)\phi = 0 \quad (3.10.12)$$

Bu Couchy-Euler tipi denklemdir ve kolayca çözülür. Karakteristik denklemi aşağıdaki gibidir;

$$r^2 + (1 + \lambda) = 0 \quad (3.10.13)$$

$\lambda > -1$ olduğunda sınır koşullarını sağlayan özdeğer probleminin aşıkâr olmayan çözümleri elde edilir. Çözümler aşağıdaki gibidir;

$$\phi_n(x) = A \sin(n\pi \ln x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.10.14)$$

Bu özfonksiyonlara uygun özdeğerler ise ,

$$\lambda_n = n^2 \pi^2 - 1 \quad (3.10.15)$$

biçimindedir. Özfonksiyonların normalleştirilmesi genellikle faydalıdır yani eğer A özel olarak seçilirse her özfonksiyonun norm değeri bir olur böylece aşağıdaki eşitlikler elde edilir

$$\begin{aligned} & \int_1^e \phi_n^2(x) \sigma(x) dx \\ &= A^2 \int_1^e \sin(n\pi \ln x) \frac{1}{x} dx \\ &= A^2 \int_1^e \sin(n\pi y) dy = \frac{1}{2} A^2 = 1 \end{aligned} \quad (3.10.16)$$

Böylece $A = \sqrt{2}$ olur. Şimdi biz homojen olmayan $Ly = \frac{1}{x}$ probleminin çözümüne dönelim. İlk önce bilinmeyen çözümü özdeğer fonksiyonlarının serisine açalım

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sqrt{2} \sin(n\pi \ln x) \quad (3.10.17)$$

Bu çözümü diferansiyel denklemde yerine koyarsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz;

$$\frac{1}{x} = L_y = - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \lambda_n \sqrt{2} \sin(n\pi \ln x) \frac{1}{x} \quad (3.10.18)$$

Şimdi özfonksiyonların ortogonallığını kullanacağız. Eşitliğin her iki yanını da $\phi_m(x) = \sqrt{2} \sin(m\pi \ln x)$ ile çarpalım ve integralini alalım. Bu bize aşağıdaki eşitliği verecektir;

$$\lambda_n c_m = \int_1^e \sqrt{2} \sin(m\pi \ln x) \frac{1}{x} dx = \frac{\sqrt{2}}{m\pi} [(-1)^m - 1] \quad (3.10.19)$$

Bu eşitliği c_m için çözdüğümüzde aşağıdaki eşitlik elde edilir

$$c_m = \frac{\sqrt{2}}{m\pi} \frac{[(-1)^m - 1]}{m^2 \pi^2 - 1} \quad (3.10.20)$$

Nihayet c_m katsayılarımızı $y(x)$ 'in seri açılımında yerine yazarak aşağıdaki formülü elde edeceğiz.

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \frac{[(-1)^n - 1]}{n^2 \pi^2 - 1} \sin(n\pi \ln x) \quad (3.10.21)$$

Böylece (3.10.7)-(3.10.9) homojen olmayan sınır değer probleminin (bu problemin özdeğer problemi olmadığına dikkat edelim!)(3.10.21) çözümünü (3.10.10) homojen özdeğer probleminin, yani Sturm-Liouville özdeğer probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları yardımı ile bulmuş olduk.

4. BULGULAR VE SONUÇ

4.1. Problemin ifadesi

Bu kesimde süreksiz ağırlık fonksiyonunu içeren iki-aralıklı

$$L(u) := -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda\omega(x)u(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (4.1.1)$$

Sturm-Liouville denkleminde, sınır noktalarında verilmiş

$$u(-1) = 0, \quad (4.1.2)$$

$$u(1) = 0, \quad (4.1.3)$$

sınır koşullarından ve aralıkların ortak sınırı olan $x = 0$ noktasında verilmiş

$$u(0+0) - u(0-0) = 0 \quad (4.1.4)$$

$$u'(0+0) - \delta u'(0-0) = 0 \quad (4.1.5)$$

iletişim(geçiş) şartlarından oluşmuş iki-aralıklı Sturm-Liouville probleminin spektral özelliklerini araştıracağız; burada $q(x)$ potansiyeli $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarında sürekli olan ve $x=0$ tekil noktasında

$$q(0 \pm 0) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} q(x)$$

sonlu limit değerine sahip olan reel değerli fonksiyondur; $\omega(x)$ ağırlık fonksiyonu parçalı-sabit fonksiyondur ve

$$\omega(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [-1, 0) \\ \omega & , \quad x \in (0, 1] \end{cases} \quad (4.1.6)$$

eşitliği ile tanımlıdır; $\omega > 0$, $\delta > 0$ pozitif reel sayılardır; λ ise kompleks spektral parametredir.

4.2. Özdeğerler ve Green Fonksiyonu

Bu kesimde (4.1.1) - (4.1.5) Sturm-Liouville probleminin Green fonksiyonunu bulacağız. Bunun için (4.1.1) denkleminin $[-1, 0)$ sol aralığında iki tane $v_1(x, \lambda), \gamma_1(x, \lambda)$, çözümünü (bu çözümleri sol çözümler olarak adlandıracakız), $(0, 1]$ sağ aralığında ise iki tane $v_2(x, \lambda), \gamma_2(x, \lambda)$ çözümünü (bu çözümlere sağ çözümler diyeceğiz) tanımlayacağız. Bu çözümleri aşağıdaki yöntem ile tanımlayacağız. Kabul edelim ki, $v_1(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.1.1) diferansiyel denkleminin $[-1, 0)$ aralığında

$$v_1(-1, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial v_1(-1, \lambda)}{\partial x} = 1 \quad (4.2.1)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olsun. $v_2(x, \lambda)$ fonksiyonu ise aynı 4.1.1 denkleminin

$$v_2(0+0, \lambda) = v_1(0-0), \quad \frac{\partial v_2(0+0, \lambda)}{\partial x} = \delta \frac{\partial v_1(0-0, \lambda)}{\partial x} \quad (4.2.2)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olsun. Dikkat edilirse görülür ki,

$$v(x, \lambda) = \begin{cases} v_1(x, \lambda) & , \quad x \in [-1, 0) \\ v_2(x, \lambda) & , \quad x \in (0, 1] \end{cases} \quad (4.2.3)$$

eşitliği ile tanımlı $v(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.1.1) diferansiyel denklemini tüm $[-1, 0) \cup (0, 1]$ tanım bölgesinde sağlıyor ve de bu çözüm (4.1.4) - (4.1.5) geçiş şartlarının her ikisini sağlıyor. Şimdi benzer yöntemle (4.1.1) denkleminin başka bir

$$\gamma(x, \lambda) = \begin{cases} \gamma_1(x, \lambda) & , \quad x \in [-1, 0) \\ \gamma_2(x, \lambda) & , \quad x \in (0, 1] \end{cases} \quad (4.2.4)$$

çözümünü öyle tanımlayacağız ki, $v(x, \lambda), \gamma(x, \lambda)$ çözümleri hem $[-1, 0)$ aralığında hem de $(0, 1]$ aralığında lineer bağımsız olsunlar. Ayrıca $\gamma(x, \lambda)$ fonksiyonu da (4.1.4) - (4.1.5) geçiş şartlarının her ikisini sağlasın. Bunun için önce $\gamma_2(x, \lambda)$ fonksiyonunu tanımlayacağız, daha sonra ise bu sağ çözümden yararlanarak $\gamma_1(x, \lambda)$ sol çözümünü tanımlayacağız. Kabul edelim ki, $\gamma_2(x, \lambda)$ fonksiyonu (4.1.1) diferansiyel denklemin $(0, 1]$ aralığında

$$\gamma_2(1, \lambda) = 0, \quad \frac{\partial \gamma_2(1, \lambda)}{\partial x} = 1 \quad (4.2.5)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümü olsun. $\gamma_1(x, \lambda)$ ise (4.1.1) diferansiyel denklemin

$$\gamma_1(0 - 0, \lambda) = \gamma_2(0 + 0, \lambda), \quad \frac{\partial \gamma_1(0 - 0, \lambda)}{\partial x} = \frac{1}{\delta} \quad \frac{\partial \gamma_2(0 + 0, \lambda)}{\partial x} \quad (4.2.6)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümleri olur.

Teorem 4.2.1. $v_1(x, \lambda)$, $\gamma_1(x, \lambda)$ fonksiyonları $[-1, 0)$ aralığında, $v_2(x, \lambda), \gamma_2(x, \lambda)$ fonksiyonları ise $(0, 1]$ aralığında lineer bağımsızdırlar. $v(x, \lambda)$ çözümü (4.1.1) sınır şartını ve (4.1.4) - (4.1.5) geçiş şartlarını $\gamma(x, \lambda)$ çözümü ise (4.1.2) sınır şartını ve (4.1.4) - (4.1.5) geçiş şartlarını sağlar.

İspat. Bu çözümlerin varlığı lineer diferansiyel denklemler teorisinin iyi bilinen çözümün varlığı ve tekliği hakkında Cauchy teoremi gereği açıktır. (Naimark, 1967) $v_2(x, \lambda)$ -nın (4.1.1) sınır şartlarını sağlaması (4.2.1) gereği (4.1.4) - (4.1.5) geçiş şartlarını sağlaması ise (4.2.2) gereği açıktır. $\gamma(x, \lambda)$ hakkındaki hükümler ise (4.2.5) ve (4.2.6) gereği açıktır.

Teorem 4.2.2. $v_1(x, \lambda)$, $\gamma_1(x, \lambda)$ çözümleri $\forall x \in [-1, 0)$ için, $v_2(x, \lambda)$, $\gamma_2(x, \lambda)$ çözümleri ise $\forall x \in (0, 1)$ için $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks parametresinin tam fonksiyonudur. Yani tüm kompleks $\mathbb{C}$ düzleminde analitik fonksiyonlardır.

İspat. Bu teoremin ispatı (Mukhtarov ve ark., 2015) makalesinde basit sonuç olarak ifade edilir.

Sonuç 4.2.3. $W[v_1(x, \lambda), \gamma_1(x, \lambda)]$ ve $W[v_2(x, \lambda), \gamma_2(x, \lambda)]$ Wronskianlarının her biri x değişkeninden bağımsızdırlar ve her biri λ kompleks parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

Sonuç 4.2.3 gereği aşağıdaki karakteristik fonksiyonları tanımlayabiliriz:

$$\begin{aligned} \Delta_i(\lambda) &:= W[v_i(x, \lambda), \gamma_i(x, \lambda)] = \\ &= \begin{vmatrix} v_i(x, \lambda) & \gamma_i(x, \lambda) \\ \frac{\partial v_i(x, \lambda)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_i(x, \lambda)}{\partial x} \end{vmatrix} \quad x \in I_i \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

burada $I_1 = [-1, 0)$, $I_2 = (0, 1]$ gösteriminden yararlandık.

Teorem 4.2.4. $\Delta_1(\lambda)$ ve $\Delta_2(\lambda)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır ve

$$\Delta_2(\lambda) = \delta \Delta_1(\lambda) \quad (4.2.8)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $W[v_1(x, \lambda), \gamma_1(x, \lambda)]$ Wronskianı $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarının her birinde x -den bağımsız olduğu için aşağıdaki biçimde ifade edilebilir:

$$\Delta(x, \lambda) := W[v(x, \lambda), \gamma(x, \lambda)] = \begin{cases} \Delta_1(\lambda) & , \quad x \in [-1, 0) \\ \Delta_2(\lambda) & , \quad x \in (0, 1] \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Diğer taraftan (4.2.2) ve (4.2.6) gereği

$$\Delta_2(\lambda) := W[v_2(x, \lambda), \gamma_2(x, \lambda)]$$

$$= W[v_2(0+0, \lambda), \gamma_2(0+0, \lambda)]$$

$$= \begin{vmatrix} v_2(0+0, \lambda) & \gamma_2(0+0, \lambda) \\ \frac{\partial v_2(0+0, \lambda)}{\partial x} & \frac{\partial \gamma_2(0+0, \lambda)}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} v_1(0-0, \lambda) & \gamma_1(0-0, \lambda) \\ \delta \frac{\partial v_1(0-0, \lambda)}{\partial x} & \delta \frac{\partial \gamma_1(0-0, \lambda)}{\partial x} \end{vmatrix}$$

$$= \delta W[v_1(0-0, \lambda), \gamma_1(0-0, \lambda)]$$

$$= \delta \Delta_1(\lambda)$$

böylece (4.2.8) eşitliği ispat edildi.

$v_i(x, \lambda)$ $\gamma_i(x, \lambda)$ fonksiyonları $\forall x \in I_i$ için ($i = 1, 2$) λ -nın tam fonksiyonları olduğu için $\Delta_i(\lambda), i = 1, 2$, fonksiyonları da λ -nın tam fonksiyonlarıdır. İspat bitti.

Tanım 4.2.5. $\Delta(\lambda) := \Delta_2(\lambda) = \delta\Delta_1(\lambda)$ eşitliği ile tanımlı $\Delta(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tam fonksiyonuna (4.1.1) - (4.1.5) iki aralıklı Sturm-Liouville probleminin karakteristik fonksiyonu veya sınır-geçiş fonksiyonu diyeceğiz.

Teorem 4.2.6. $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ kompleks sayısının (4.1.4) - (4.1.5) iki aralıklı Sturm-Liouville probleminin özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $\Delta(\lambda_0) = 0$ olmasıdır.

İspat. ($\implies$) $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ kompleks sayısı (4.1.4) - (4.1.5) iki aralıklı Sturm-Liouville probleminin (İASLP) özdeğeri olsun. O halde $v_i(x, \lambda)$ $\gamma_i(x, \lambda)$ çözümleri I_i aralığında ($i = 1, 2$) lineer bağımlı olacak. Lineer bağımlı fonksiyonların Wronskiyanı sıfıra eşit olduğu için

$$\Delta_1(\lambda_0) = 0 = \Delta_2(\lambda_0) \quad (4.2.10)$$

eşitliği sağlanır. Buradan Tanım 4.2.5 gereği $\Delta(\lambda_0) = 0$ elde edilir. Gerekliliğin ispatı bitti.

($\impliedby$) $\Delta(\lambda_0) = 0$ olsun. O halde Tanım 4.2.5 gereği $\Delta_1(\lambda_0) = 0$ ve $\Delta_2(\lambda_0) = 0$ olur. $\Delta_i(\lambda_0) = 0$ olduğu için lineer diferansiyel denklemler teorisinin çok iyi bilinen teoremi gereği $v_i(x, \lambda_0)$, $\gamma_i(x, \lambda_0)$ fonksiyonları I_i aralığında ($i = 1, 2$) lineer bağımlı olacak. O halde hem $v_2(x, \lambda_0)$ hem de $\gamma_2(x, \lambda_0)$ çözümleri her iki (4.1.2) ve (4.1.3) sınır şartlarını sağlayacaklar. Bu çözümlerin (4.1.4) ve (4.1.5) geçiş şartlarını da sağladıklarını Teorem 4.2.1 - den biliyoruz. Dolayısı ile bu fonksiyonların her ikisi (4.1.1) - (4.1.5) İASLP-nin çözümleridir. Yani bu problemin özfonksiyonlarıdır. O halde özdeğerin tanımı gereği λ_0 kompleks sayısı (4.1.1) - (4.1.5) İASLP-nin özdeğeridir. Yeterliliğin de ispatı bitti. Teoremin ispatı tamamlandı.

Teorem 4.2.7. $\Delta(\lambda)$ tam fonksiyonunun sıfır yerleri sayılabilir sonsuz sayıda sıralı $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ reel dizi biçiminde gösterilebilir.

İspat. ispatı (Levitan ve Sargsyan, 1988) kaynağına bakınız

Sonuç 4.2.8. $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunun (λ_n) sıfır yerleri $n \longrightarrow \infty$ olduğu zaman sonsuza yakınsar; yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = \infty \quad (4.2.11)$$

olur.

İspat. Bunun sonucunun ispatı kompleks fonksiyonlar teorisinin bölgede analitik olan fonksiyonların tekliği hakkında iyi bilinen teoremden direkt olarak elde edilir.

Sonuç 4.2.9. (4.1.1) – (4.1.5) İASLP-nin özdeğerleri sayılabilir sonsuz sayıda $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ biçiminde sıralanabilir reel dizi oluşturur ve $n \rightarrow \infty$ iken $\lambda_n \rightarrow \infty$ olur.

İspat. Teorem 4.2.6 ve Sonuç 4.2.8 - den direkt olarak elde edilir.

Not 4.2.10. (4.1.1)-(4.1.5) İASLP- nin tüm özdeğerleri reel olduğu için uygun özfonksiyonları da reel değerli fonksiyonlar olarak kabul edebiliriz. Bundan sonra tüm özfonksiyonların reel değerli olduğunu kabul edeceğiz.

Şimdi homojen olmayan

$$L(u) = \lambda \omega u + f, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (4.2.12)$$

diferansiyel denklemini gözönüne alalım; burada $f(x)$ fonksiyonu $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarının her birinde sürekli olup $f(0 \pm 0)$ sonlu limit değerleri vardır.

Tanım 4.2.11. Aşağıdaki eşitlikle tanımlı $G(x, \xi; \lambda)$ fonksiyonuna (4.1.1)-(4.1.5) İASLP-nin Green fonksiyonu denir.

$$G(x, \xi; \lambda) = -\frac{\omega(x)}{\Delta(\lambda)} H(x, \xi; \lambda) \quad x, \xi \in [-1, 0) \cup (0, 1], \quad \lambda \in \mathbb{C} \quad (4.2.13)$$

burada $H(x, \xi; \lambda)$ fonksiyonu

$$H(x, \xi; \lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} v_1(x, \lambda) \gamma_1(\xi, \lambda), & -1 \leq x \leq \xi < 0 \\ \frac{1}{\delta} v_1(\xi, \lambda) \gamma_1(x, \lambda), & -1 \leq \xi \leq x < 0 \\ \frac{1}{\delta} v_1(x, \lambda) \gamma_2(\xi, \lambda), & -1 \leq x < 0 < \xi \leq 1 \\ \frac{1}{\delta} v_1(\xi, \lambda) \gamma_2(x, \lambda), & -1 \leq \xi < 0 < x \leq 1 \\ \frac{1}{\delta} v_2(x, \lambda) \gamma_2(\xi, \lambda), & 0 < x \leq \xi \leq 1 \\ \frac{1}{\delta} v_2(\xi, \lambda) \gamma_2(x, \lambda), & 0 < \xi \leq x \leq 1 \end{cases}. \quad (4.2.14)$$

eşitliği ile tanımlanır.

4.3. Özfonksiyonlar sistemi üzerine Fourier açılımı

Bu kesimde genelliği bozmadan $\lambda = 0$ sayısının (4.1.1)-(4.1.5) İASLP-nin özdeğeri olmadığını kabul edeceğiz. Aksi durumda aşağıdaki yöntemi uygulayabiliriz. Kabul edelim ki $\lambda_{n_0} = 0$ olsun. O halde $0 < a < \lambda_{n_0+1} - \lambda_{n_0}$, yani $0 < a < \lambda_{n_0+1}$ olmak üzere $\lambda = \mu + a$ dönüşümü ile λ özdeğer parametresinden yeni μ özdeğer parametresine geçiş yapmak sureti ile $\mu = 0$ sayısının özdeğer olmadığını elde ederiz. Bu nedenle bu kesimde $\lambda = 0$ sayısının özdeğer olmadığını kabul edeceğiz ve bu kabulümüz genelliği bozmaz. Bu durumda

$$L(u) := -u''(x) + q(x)u(x) = 0, \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (4.3.1)$$

denkleminin (4.1.2)-(4.1.5) sınır geçiş şartlarını sağlayan bir tek $u(x) = 0$ aşıkâr çözümü bulunacak.

$$L(u) := -u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in [-1, 0) \cup (0, 1] \quad (4.3.2)$$

denklemini gözönüne alalım; burada $f(x)$ fonksiyonu $[-1, 0)$ ve $(0, 1]$ aralıklarında sürekli ve sonlu $f(0 \pm 0)$ limit değerlerine sahip olan keyfi fonksiyondur.

Tanım 4.3.1. $-\infty < a < c < b < +\infty$ olmak üzere $[a, c) \cup (c, b]$ kümesinde tanımlı ve sürekli olan, ayrıca $f(c \pm 0)$ limit değerlerine sahip olan tüm $f(x)$ fonksiyonları uzayını $C[a, c) \oplus C(c, b]$ ile gösterelim.

Teorem 4.3.2. $C[a, c) \oplus C(c, b]$ lineer uzayında tanımlı

$$\|f\|^* := \sup_{x \in [a, c) \cup (c, b]} |f(x)| \quad (4.3.3)$$

eşitliği bir norm tanımlar. Bu normlu uzay tamdır, yani Banach uzayıdır.

İspat. $C[a, c)$ ve $C(c, b]$ lineer normlu uzaylarının her birinin Banach uzayı olduğu litaretürden bilinmektedir. Ayrıca (4.3.3) eşitliğinin $C[a, c) \oplus C(c, b]$ lineer uzayında bir norm tanımladığı kolayca gösterilebilir. Şimdi bu bilgilerden yararlanarak $C[a, c) \cup C(c, b]$ -nin bir Banach uzayı olduğunu ispat edeceğiz. Bunun için bu uzayda Cauchy dizisi olan keyfi bir $(f_n(x))$ fonksiyonlar dizisini alalım sırası ile $[a, c]$ ve $[c, b]$

kapalı aralıklarında tanımlı olan $(f_{e,n}(x))$ ve $(f_{r,n}(x))$ fonksiyonlar dizisini aşağıdaki eşitliklerle tanımlayalım :

$$f_{e,n}(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \in [a, c) \\ f_n(c-0) & x = c \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.4)$$

$$f_{r,n}(x) = \begin{cases} f_n(c+0), & x = c \\ f_n(x) & x \in (c, b] \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.5)$$

Aşık aralıklarda tanımlı olan

$$\|f_{e,n} - f_{e,m}\|_{C[a,c]} \leq \|f_n - f_m\|^* \quad (4.3.6)$$

$$\|f_{r,n} - f_{r,m}\|_{C[c,b]} \leq \|f_n - f_m\|^* \quad (4.3.7)$$

eşitlikleri gereği $(f_{e,n})$ dizisi $C[a, c]$ Banach uzayında, $(f_{r,n})$ dizisi ise $C[c, b]$ Banach uzayında birer Cauchy dizileridirler. Bu nedenle her ikisi yakınsaktır. Bu dizilerin limitlerini sırası ile $f_e(x)$ ve $f_r(x)$ ile gösterelim ve

$$f(x) = \begin{cases} f_e(x) & , x \in [a, c) \\ f_r(x) & , x \in (c, b] \end{cases} \quad (4.3.8)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Kolayca gösterilebilir ki $f \in C[a, c) \oplus C(c, b]$ ve

$$\|f_n - f\|^* = \max \left\{ \|f_{e,n}(x) - f_e(x)\|_{C[a,c]}, \|f_{r,n}(x) - f_r(x)\|_{C(c,b]} \right\} \quad (4.3.9)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik gereği ve de

$$\|f_{e,n}(x) - f_e\|_{C[a,c]} \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0, \|f_{r,n} - f_r\|_{C(c,b]} \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \quad (4.3.10)$$

olduğu için

$$\|f_n - f\|^* \longrightarrow_{n \rightarrow \infty} 0 \quad (4.3.11)$$

elde edilir. İspat bitti.

Teorem 4.3.3. Kabul edelim ki , $\lambda = 0$ sayısı (4.1.1) - (4.1.5) İASLP-nin özdeğeri olmasın. O halde $\forall f \in C[-1, 0) \oplus C(0, 1]$ için (4.3.2) homojen olmayan diferansiyel denklemin (4.1.2) - (4.1.5) sınır-geçiş şartlarını sağlayan bir tek $u = u(x)$ çözümü bulunur ve bu çözüm için aşağıdaki formül sağlanır

$$u(x) = \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} G(x, \xi) f(\xi) d\xi + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 G(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (4.3.12)$$

burada $G(x, \xi)$ çekirdek fonksiyonu

$$G(x, \xi) := G(x, \xi; 0) \quad (4.3.13)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

İspat. (4.2.13), (4.2.14) ve (4.2.13) eşitliklerini dikkate alarak ve de $v_i(x, \lambda), \gamma_i(x, \lambda)$ (i=1,2) ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonlarının tanımlarından yararlanarak (4.2.12) eşitliği ile tanımlı $u = u(x)$ fonksiyonunu (4.3.2)- de yerine yazarsak bu denklemin sağladığını kolayca görebiliriz. Ayrıca bu fonksiyonu (4.1.2) - (4.1.5) sınır-geçiş şartlarında yerine yazarsak, bu şartları da sağladığını gösterebiliriz. Yani, (4.3.12) ile tanımlı fonksiyonun (4.3.2) denklemini ve (4.1.2) - (4.1.5) sınır-geçiş şartlarını sağladığını yerine yazmakla kolayca gösterebiliriz.

Teorem 4.3.4. (4.1.1) - (4.1.5) İASLP-nin her λ_n , $n = 1, 2, 3, \dots$ özdeğerine uygun olan $u_n(x) = u(x, \lambda_n)$ özfonksiyonu için aşağıdaki integral denklem sağlanır:

$$u_n(x) = \frac{\lambda_n}{\omega} \int_{-1}^{0-0} G(x, \xi) u_n(\xi) d\xi + \frac{\lambda_n}{\delta} \int_{0+0}^1 G(x, \xi) u_n(\xi) d\xi \quad (4.3.14)$$

İspat. Eğer (4.3.2) homojen olmayan Sturm-Liouville denkleminde $f(x)$ fonksiyonu yerine $\lambda_n u_n(x)$ yazarsak o halde (4.3.14) eşitliği (4.3.12) - den direkt olarak elde edilir. İspat bitti.

Şimdi (4.1.1) - (4.1.5) İASLP-i için önemli olan yeni bir integral operatör tanımlayacağız:

$$T\psi(x) := \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} G(x, \xi) \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 G(x, \xi) \psi(\xi) d\xi \quad (4.3.15)$$

Sonuç 4.3.5. Eğer $(\lambda_n, u_n(x))$ çifti (4.1.1) - (4.1.5)) İASLP-nin bir özfonksiyon çifti ise o halde

$$\lambda_n T u_n(x) = u_n(x) \quad (4.3.16)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. (4.3.14) ve (4.3.15) ve (4.3.15)-den direkt olarak (4.3.16) elde edilir . İspat bitti.

Sonuç 4.3.6. $(\lambda_n, u_n(x))$ çiftinin İASLP-nin özdeğer-özfonksiyon çifti olması için gerek ve yeter şart $(\frac{1}{\lambda_n}, u_n(x))$ çiftinin T operatörü için özdeğer-özfonksiyon çifti olmasıdır. Şimdi $L_2[-1, 0] \oplus L_2[0, 1]$ direkt toplam uzayında yeni bir iç-çarpım tanımlayacağız.

Teorem 4.3.7.

$$\langle u, v \rangle_{\oplus L} := \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} u(x) \bar{v}(x) dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 u(x) \bar{v}(x) dx \quad (4.3.17)$$

eşitliği $L_2[-1, 0] \oplus L_2[0, 1]$ direkt toplam uzayında bir iç-çarpım tanımlar (bu iç-çarpım uzayını $\oplus L_2$ ile göstereceğiz)

İspat. $\omega > 0$ ve $\delta > 0$ olduğu için ispat açıktır.

Teorem 4.3.8. (4.3.17)-nin ürettiği norm ile $L_2[-1, 0] \oplus L_2[0, 1]$ - deki klasik iç-çarpımın, yani

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &:= \int_{-1}^0 u(x) \bar{v}(x) dx + \int_0^1 u(x) \bar{v}(x) dx \\ &= \int_{-1}^1 u(x) \bar{v}(x) dx \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

iç-çarpımının ürettiği normlar denktir.

İspat. (4.3.18) iç-çarpımının ürettiği normu $\|\cdot\|_{L_2}$ ile gösterelim

$$m := \min\left\{\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}\right\}, \quad M := \max\left\{\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\delta}\right\} \quad (4.3.19)$$

gösterirsek $\forall u \in L_2[-1, 0] \oplus L_2[0, 1]$ için

$$m \|u\|_{L_2} \leq \|u\|_{\oplus L_2} \leq M \|u\|_{L_2} \quad (4.3.20)$$

elde edilir.İspat bitti.

Teorem 4.3.9. T integral operatörünün sayılabilir sonsuz sayıda (μ_n) özdeğerleri mevcuttur;bu özdeğerler $\mu_1 > \mu_2 > \dots$, biçiminde sıralanabilir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = 0$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.3.10. T integral operatörünün $\mu_n \neq \mu_m$ farklı özdeğerlerine uygun $\varphi_n(x), \varphi_m(x)$ özfonksiyonları $\oplus L_2$ Hilbert uzayınada ortogonaldır.

Teorem 4.3.9 ve Teorem 4.3.10 -un ispatı integral operatörler teorisinin bilinen teoremlerinden direkt olarak elde edilir.

Not 4.3.11. $(\varphi_n(x))$ özfonksiyonlar sistemini

$$\psi_n(x) := \frac{\varphi_n(x)}{\|\varphi_n\|_{\oplus L_2}}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.3.20)$$

biçiminde ortonormalleştirebiliriz.

Teorem 4.3.12. $\forall f \in C[-1, 0] \oplus C(0, 1]$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle Tf, \psi_n \rangle_{\oplus L_2} \psi_n(x) \quad (4.3.21)$$

serisi $C[-1, 0] \oplus C(0, 1]$ Banach uzayında yakınsaktır ve toplamı $g(x) = Tf$ fonksiyonudur yani $g = Tf$ fonksiyonu $C[-1, 0] \oplus C(0, 1]$ Banach uzayında

$$Tf = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Tf, \psi_n \rangle_{\oplus L_2} \psi_n(x) \quad (4.3.22)$$

Fourier serisine açılabilir. Yani (4.3.21) serisi Tf fonksiyonuna $[-1, 0) \cup (0, 1]$ kümesinde düzgün yakınsaktır.

İspat. $(f_n(x))$ fonksiyonlar dizisini aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$f_n(x) = f(x) - \sum_{i=1}^n \langle f, \psi_i \rangle_{\oplus L_2} \psi_i(x) \quad (4.3.23)$$

$\forall i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\langle f_n, \psi_i \rangle_{\oplus L_2} = 0 \quad (4.3.24)$$

olduğu açıktır. İntegral operatörler teorisinin extremal ilkesi gereği $\forall n$ için

$$\|Tf_n\|_{\oplus L_2} \leq \mu_{n+1} \|f_n\|_{\oplus L_2} \quad (4.3.25)$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca $T\psi_i = \mu_i \psi_i$, $i = 1, 2, \dots$ olduğu için

$$\begin{aligned} u = Tf &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \psi_i \rangle_{\oplus L_2} T\psi_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, T\psi_i \rangle_{\oplus L_2} \psi_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle Tf, \psi_i \rangle_{\oplus L_2} \psi_i \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

elde edilir; burada seri $\oplus L_2$ Hilbert uzayında yakınsaktır. Kolayca gösterebiliriz ki, öyle $K > 0$ sayısı vardır ki, $\forall f \in C[-1, 0) \oplus (0, 1]$ için

$$|Tf| \leq K \|f\|_{\oplus C} \quad (4.3.27)$$

eşitsizliği sağlanır. O halde $\forall n, m$ ($n < m$) için

$$\left| \sum_{i=n}^m \mu_i \langle f, \psi_i \rangle_{\oplus L_2} \psi_i(x) \right| \leq K \left(\sum_{i=n}^m \langle f, \psi_i \rangle_{\oplus L_2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.3.28)$$

elde edilir. Bessel eşitsizliği gereği (4.3.28) eşitsizliğin sağ tarafı $m, n \rightarrow \infty$ iken sifıra yakınsaktır. O halde (4.3.22) ve (4.3.28) gereği

$$(Tf)(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle Tf, \psi_i \rangle_{\oplus L_2} \psi_i(x) \quad (4.3.29)$$

eşitliği $C[-1, 0) \oplus C(0, 1]$ Banach uzayında geçerlidir.

Teorem 4.3.13. $\forall f \in C[-1, 0) \oplus C(0, 1]$ fonksiyonu verilsin ve bu fonksiyon (4.1.2)-(4.1.5) sınır-geçiş şartlarını sağlasın. O halde $C[-1, 0) \oplus C(0, 1]$ Banach uzayında f fonksiyonu (ψ_i) özdonksiyonlar sisteminin ;

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \psi_i \rangle_{\oplus L_2} \psi_i(x) \quad (4.3.30)$$

biçimde seriye açılabilir:

İspat. $u = L(f)$ gösterirsek ve bir önceki teoremi (Teorem 4.3.12) bu fonksiyona uygularsak (4.3.30) elde edilir. İspat bitti.

Sonuç 4.3.14. $(\psi_i(x))$ özfonksiyonlar sistemi $\oplus L_2$ Hilbert uzayında ortonormal baz oluşturuyor.

Sonuç 4.3.15. (Genelleştirilmiş Parseval eşitliği)

$\forall f \in \oplus L_2$ için

$$\|f\|_{\oplus L_2}^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} f(x) \psi_n(x) dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 f(x) \psi_n(x) dx \right|^2 \quad (4.3.31)$$

genelleşmiş parseval eşitliği sağlanır.

4.4. Rayleigh Oranı

Bu kesimde Rayleigh oranı yardımı ile (4.1.1) - (4.1.5) İASLP-nin özdeğerleri ile arasındaki bağıntı incelenecektir. Bu problemin özdeğerlerinin Rayleigh oranı yöntemi ile nasıl elde edilebileceği gösterilecektir. İlk önce aşağıdaki tanımı verelim

Tanım 4.4.1. Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri artı sonsuza yakınsak ise yani $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ biçiminde sıralanabilirse ilk özdeğere, yani en küçük özdeğer olan λ_1 -e verilmiş problemin esas özdeğeri denir. Bu özdeğere uygun olan $\psi_1(x)$ özfonksiyonuna ise esas özfonksiyon denir.

Teorem 4.4.2. (4.1.1) - (4.1.5) İASLP-nin esas özdeğeri

$$R(u) = \frac{\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} (u'^2 + qu^2) dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 (u'^2 + qu^2) dx}{\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} u^2 dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 u^2 dx} \quad (4.4.1)$$

fonksiyonelinin $\oplus C^2 = C^2[-1, 0] \oplus C^2[0, 1]$ Banach uzayındaki infimum değerine eşittir. Ayrıca bu fonksiyonel infimum değerini alır (yani bu fonksiyonelin minimumu mevcuttur) ve $\min R(u) = R(\psi_1) = \lambda_1$ eşitliği sağlanır.

İspat. (4.1.2) - (4.1.5) sınır geçiş şartlarını sağlayan keyfi $\varphi \in \oplus C^2$ fonksiyonunu gözönüne alalım. O halde Teorem 4.3.11 gereği $\varphi(x)$ fonksiyonu aşağıdaki seriye açılabilir:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \varphi(s) \psi_n(s) ds + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \varphi(s) \psi_n(s) ds \right) \psi_n(x) \quad (4.4.2)$$

Ayrıca bu seri $C[-1, 0) \oplus C(0, 1]$ Banach uzayında yakınsaktır. şimdi kısmi integrasyon yardımı ile aşağıdaki eşitliği elde edebiliriz:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} L[\varphi] \psi_n dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 L[\varphi] \psi_n dx \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \varphi L[\psi_n] dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \varphi L[\psi_n] dx \\ &= \lambda_n \left(\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \varphi \psi_n dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \varphi \psi_n dx \right) \\ &= \lambda_n \langle \varphi, \psi_n \rangle_{\oplus L_2} = \lambda_n C_n(\varphi) \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

burada $C_n(\varphi), n = 1, 2, \dots$ ile $\langle \varphi, \psi_n \rangle_{\oplus L_2}$ iç-çarpımı ,yani φ fonksiyonunun (ψ_n) özfonksiyonlar sistemine göre Fourier katsayıları gösterilmiştir. O halde Sonu (4.3.14) - (4.3.15) gereği,yani genelleştirilmiş Parseval eşitliği gereği

$$\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \varphi^2(x) dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \varphi^2(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2(\varphi)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} (\varphi'^2 + q\varphi^2) dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 (\varphi'^2 + q\varphi^2) dx \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \varphi L[\varphi] dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \varphi L[\varphi] dx \\ &= \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi) \psi_n \right\} L[\varphi] dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi) \psi_n \right\} L[\varphi] dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi) \left(\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \psi_n L[\varphi] dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \psi_n L[\varphi] dx \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi) \left(\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \psi_n L[\varphi] dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \psi_n L[\varphi] dx \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi) \left(\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} L[\psi_n] \varphi dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 L[\psi_n] \varphi dx \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\varphi) \lambda_n \left(\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \psi_n \varphi dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \psi_n \varphi dx \right) \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n C_n^2(\varphi) \geq \lambda_1 \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2(\varphi) \\
&= \lambda_1 \left(\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \varphi^2 dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \varphi^2 dx \right) \tag{4.4.4}
\end{aligned}$$

Bu nedenle (4.1.2) - (4.1.5) sınır-geçiş şartlarını sağlayan $\forall u \in \oplus C^2$ için

$$\lambda_1 \leq R(u) \tag{4.4.5}$$

elde edilir.(4.4.5)-den direkt olarak

$$\lambda_1 \leq \inf R(u) \tag{4.4.6}$$

bulunur. Diğer taraftan $\varphi = \psi_1$ için

$$C_n(\psi_1) = \delta_{n1} = \begin{cases} 1 & , \quad n = 1 \\ 0 & , \quad n > 1 \end{cases} \tag{4.4.7}$$

olduğundan (4.4.1) gereği

$$\lambda_1 = R(\psi_1) \tag{4.4.8}$$

eşitliği bulunur.(4.4.6) ve (4.4.8)-den

$$\lambda_1 = \min\{R(u)/u \in \oplus C^2\} \tag{4.4.9}$$

(u fonksiyonu (4.1.2) - (4.1.5) sınır şartlarını sağlıyor) eşitliği bulunur. Teoremin ispatı bitti.

Şimdi bu kesimin esas teoremini ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 4.4.3. (4.1.1) - (4.1.5) İASLP- nin n . özdeğeri olan $\lambda_n, (n = 2, 3, \dots)$ sayısı (4.4.1) eşitliği ile tanımlı $R(u)$ Rayleigh oranının (4.1.2) - (4.1.5) sınır-geçiş şartlarını sağlayan ve $\oplus \mathbb{C}^2 \cap (\text{span}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}))^\perp$ lineer uzayının elemanı olan tüm fonksiyonlar kümesi üzerinden alınan infimumuna eşittir. Ayrıca bu fonksiyonel bu lineer altuzay üzerinde infimum değerini alır (yani minimumu mevcuttur) ve bu infimum $R(u)$ -nun $\varphi = \psi_n$ noktasındaki değerine eşittir. Yani $\lambda_n = R(\psi_n)$ eşitliği sağlanır.

İspat. φ fonksiyonu bu teoremin ifadesindeki $R(u)$ -nun tanım bölgesinin elemanı olsun, yani (4.1.2) - (4.1.5) sınır geçiş şartlarını sağlasın ve $\varphi \in \oplus \mathbb{C}^2 \cap (\text{span}(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}))^\perp$ olsun. O halde (4.4.4) gereği

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} (\varphi'^2 + q\varphi^2) dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 (\varphi'^2 + q\varphi^2) dx &= \sum_{K=n}^{\infty} \lambda_K C_K^2(\varphi) \\ &\geq \lambda_n \sum_{K=n}^{\infty} C_K^2(\varphi) \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

elde edilir diğer taraftan Sonuç 4.3.15 (genelleşmiş Parseval eşitliği) gereği

$$\frac{1}{\omega} \int_{-1}^{0-0} \varphi'^2 dx + \frac{1}{\delta} \int_{0+0}^1 \varphi'^2 dx = \sum_{K=n}^{\infty} C_K^2(\varphi) \quad (4.4.11)$$

eşitliği elde edilir. O halde bir önceki teoremin ispatına tamamen benzer biçimde

$$\lambda_n = \min R(u) = R(\psi_n) \quad (4.4.12)$$

eşitliği elde edilir; burada minimum (4.1.2) - (4.1.5) sınır-geçiş şartlarını sağlayan tüm

$\varphi \in \oplus \mathbb{C}^2 \cap (\text{span}(\psi_1, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}))^\perp$ fonksiyonları üzerinden alınır. İspat bitti.

KAYNAKLAR

- Akdoğan, Z., Demirci, M. and Mukhtrov, O. Sh., 2005. Sturm-Liouville Problem with eigenparameter-Dependent Boundary and Transmission conditions, *Acta Appliancandae Mathematicae* 86, 329 - 344.
- Allahverdiev, B. P., Bairamov, E. ve Ugurlu, E., 2013. Eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems in boudary conditions with transmission conditions, *J. Math. Anal. Appl.* 401, 388-396.
- Amiraliyev, G. ve Cakir, M., 2000. A uniformly convergent finite difference scheme for a singularly perturbed problem with convective term and zeroth order reduced equation. *Int. J. Appl. Math.*, 2(12): 1407-1419.
- Amiraliyev, G., 1988. Towards the numerical solition of the periodical on time problem for pseudo-parabolic equation. *Numerical Methods of Analysis BAKU State University*, 3-8.
- Amiraliyev, G., Duru, H., 2003. A uniformly convergent difference method for the periodical boundary value problem. *Comput. Math. Appl.*, 46:695- 703.
- Ao, J., Sun, J. ve Zhang, M., 2012. Matrix representations of Sturm-Liouville problems with transmission conditions, *Comput. Appl. Math*, 63, 1335-1348.
- Atkinson, F. V., 1964. Discrete and continous boundary problems, Academic pres New York London.
- Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh. , 2016. Variational principles for spectral analysis of one Sturm-Liouville problem with transmission conditions, *Advances in Difference Equations* 2016:76 DOI 10.1186/s13662-016-0800-z.
- Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., 2017. On the zeros of eigen functions of discontinuous Sturm-Liouville problems, *Journal of Computational Analysis and Applications*, Vol. 23, Issue 1, pp. 417-423.
- Bairamov, E. ve Uğurlu, E., 2011. The determinants of dissipative Sturm-Liouville operators with transmission conditions, *Math. Comput. Modelling*, Vol. 53, Nr. 5-6, 805-813.
- Boyce, W. E. ve DiPrima, R. C., 1969. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, John Willey and Sons, New York.
- Belinsky, B. P. ve Dauer, J. P, 1997. On a Regular Sturm-Liouville Problem on a Finite Interval with the Eigenvalue Parameter Appearing Linearly in the Boundary Conditions, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Spectral Theory and Computational Methods of Sturm-Liouville Problems*, 183-196.

- Binding, P. A., Browne, P. J. ve Seddighi, K., 1993. Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions, Proc. Edinburgh Math. Soc., 2(37), 57-72.
- Binding, P. A. ve Volkmer, H., 2001. Oscillation theory for Sturm-Liouville problems with indefinite coefficients, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 131A, 989-1002.
- Birkhoff, G. D., 1908a. On the Asymptotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations Containing Parameter, Strans. Amer. Math. Soc., 9, pp. 219-231.
- Birkhoff, G.D., 1908b. Boundary Value and Expansion Problems of Ordinary Linear Differential Equations, Trans. Amer. Math. Soc., p.373-399.
- Cai, X., 2010. An Effective computational method for periodical model with small parametre. 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control Conference, 27- 29 March 2010, Shenyang- China, 2nd IEEE International Conference on Advanced Computer Control (ICACC 2010) (Editor: Xu,H.). Vol.3: 414-417pp.
- Cen,Z., 2011. Uniformly convergent second- order difference scheme for a singularly periodical boundary value problem. International Journal of Computer Mathematics. 88(1):196-206.
- Chanane, B., 2007. Eigenvalues Of Sturm-Liouville Problems With Discontinuity Conditions Inside A Finite Interval, Applied Mathematics and computation 188, 1725-1732.
- Dixon, A., 1912. On the series of Sturm and Liouville as derived from a pair of fundamental integral equations instead of a differential equation, Phil. Trans. Royal Soc. London Ser. A 211, 411-432
- Eastham, M.S.P., 1973. The Spectral Theory of Periodic Differential Equations, Edinburgh-London: Scottish Academic Press.
- Fulton, C.T., 1977. Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Roy. Soc. Edinburg 77a .
- Fulton, C.T., 1980. Singular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions, Proc. Roy. Soc. Edinburg 87A .
- Hermann, L., 1985. Periodic solitions to a one-dimentional strongly none linear wave equation with strong dissipation. Czechosl. Math. J. V. 35, 110; 278-293.
- Hinton, D.B., 1977. On The Eigen function Expansion of Singular Ordinary Differential Equations, Jour. Dif. Eqs. 24, 282-308.

- Hinton, D.B., 1979. An Expansion Theorem For An Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Quart J. Math. Oxford (2), 282-308.
- Hinton, D. B. and Shaw, J. K., 1987. Spectrum of a Hamiltonian system with spectral parameter in a boundary condition, Canad. Math. Soc. Proc.
- Hinton, D. B. and Shaw, J. K., 1990. Differential operators with spectral parameter in completely in the boundary conditions, Funkcial. Ekvac.
- Kandemir, M. and Mukhtarov, O. Sh., 2016. Nonlocal Sturm-Liouville Problems with Integral Terms in the Boundary Conditions, Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2017 (2017), No. 11, pp. 1-12.
- Kerimov N.B., Mirzoyev V.S., 2003. On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition, (Russian) Sibirsk. Mat. Zh. 44, no.5, pp. 1041-1045.
- Kreyszig, E., 1978. Introductory Functional Analysis With Application, New-York.
- Lancia, M. R., 2004. On Some Second Order Transmission Problems, The Arabian Journal for Science and Engineering, Volume 29, Number 2C, p. 85-100.
- Langer, R. E., 1932. A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid, Japan. Tohoku Math. J. 35, 360-375.
- Levitan and Sargsyan, 1988. Sturm-Liouville and Dirac Operators [in Russian], Nauka, Moscow.
- Lin, P., Jiang, B., 1987. A. Singular perturbation problem for periodic boundary differential equations. Appl. Math. And Mech., 8(10):929-937.
- Magnus, W. ve Winkler, S., 1996. Hill's Equation, New York : Dover Publications.
- Mukhtarov, O.Sh., 1994. Discontinuous Boundary Value Problem with Spectral Parameter in Boundary Condition, Tr.J. of Mathematics, 18, 183-192..
- Mukhtarov, O. Sh. ve Kandemir, M., 2002. Asymptotic behaviour of eigenvalues for the discontinuous boundary-value problem with Functional-Transmission conditions, Acta Mathematica Scientia vol 22 B(3), pp. 335-345.
- Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. and Aydemir, K., 2015. Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems, Filomat, 29:7, 1671-1680.
- Mukhtarov, O. Sh. ve Yakubov, S., 2002. Problems for ordinary Differential Equations with Transmission Conditions, Applicable Analysis, 81, 1033-1064.

- Olğar, H., Mukhtarov, O. Sh., 2017. Weak Eigenfunctions Of Two-Interval Sturm-Liouville Problems Together With Interaction Conditions, Journal of Mathematical Physics, 58, 042201 DOI: 10.1063/1.4979615.
- Olğar, H., Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H. and Aydemir, K., 2018. Some properties of eigenvalues and generalized eigenvectors of one boundary value problem, Filomat, 32:3, 911-920.
- Naimark, M.A., 1967. Linear Differential Operators , Ungar, New York.
- Rasulov, M. L., 1967. Methods of Contour integration, Amsterdam, North Holland Publishing Company.
- Rodman, L., 1989. An Introduction to Operator Polynomials, Birkhauser Verlag, Boston, Massachusetts.
- Schneider, A., 1974. A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions, Math. Z.
- Shkalikov, A. A., 1982. Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions, Functional Analysis and Its Applications, Volume 16, Issue 4, pp. 324 - 326.
- Stone, M. H., 1932. Linear transformations in Hilbert space, American Mathematical Society Colloquium Publications 15, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island.
- Sturm, C. ve Liouville, J., 1837. Extract from a brief on the development of functions in the different terms are subject to the same differing equation. Linear, containing a variable parameter, Appl. flight. 2, p. 220-233.
- Walter, J., 1973. Regular Eigenvalue Problems With Eigenvalue Parameter In The Boundary Conditions, Math. Z., 133, 301-312.
- Wang, A., Sun, J., Hao, X. ve Yao, S., 2009. Completeness of eigenfunctions of Sturm - Liouville problems with transmission conditions, Methods and Application of Analysis, 16(3) , 299-312.
- Weyl, H., 1910. On ordinary differential equations with singularities and the associated expansions of arbitrary functions, Math. Ann. 68, 220-269.
- Titchmarsh, E. C., 1962. Eigenfunction expansions associated with second order differential equations I, (2nd edn) London:Oxford Univ. Press.
- Akdoğan, Z., Yakar A., Demirci M., 2019. Discontinuous Fractional Sturm-liouville Problems With Transmission Conditions, Applied Mathematics And Computation, 3501-10., Doi: 10.1016/j.amc.2018.12.049.

Yakar, A., Akdoğan, Z., 2017. On the fundamental solutions of a discontinuous fractional boundary value problem, *Advances in Difference Equations* (2017) 2017:378 DOI 10.1186/s13662-017-1433-6.

Yakubov, S. Y., 1994. *Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators*, Longman, Scientific and Technical.

