

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

RASYONEL CEBİRSEL EĞRİLERİN BENZERLİK TESPİTİ İÇİN YENİ BİR YÖNTEM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kadir AYDIN

HAZİRAN 2024
TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünce

Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : / /

Tezin Savunma Tarihi : / /

Tez Danışmanı :

Trabzon

ÖNSÖZ

“Rasyonel Cebirsel Eğrilerin Benzerlik Tespiti İçin Yeni Bir Yöntem” isimli bu tez Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Tez Programı’nda hazırlanmıştır.

Tez çalışmam boyunca hiçbir desteğini esirgemeyen tecrübesiyle yolumu aydınlatan danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Hüsnü Anıl ÇOBAN ’a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez çalışması sürecinde fikirleri ve destekleri ile katkıda bulunan Arş. Gör. Dr. Rıdvan YAPRAK’ a teşekkürlerimi sunarım.

Son olarak, tüm kararlarda bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım ve her kararında arkamda olan, manevi desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen eşim Gamze AYDIN’ a, çocuklarım Yiğit AYDIN ve Fırat AYDIN’ a teşekkür eder, minnettarlığımı sunarım.

Bu tez çalışmasının bundan sonraki çalışmalara katkı sağlamasını temenni ederim.

Kadir AYDIN

Trabzon 2024

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Rasyonel Cebirsel Eğrilerin Benzerlik Tespiti İçin Yeni Bir Yöntem” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışman hocam Dr. Öğr. Üyesi Hüsni Anıl ÇOBAN’ nın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri/tablolari ilgili programlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 24/06/2024

Kadir AYDIN

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VIII
TABLolar DİZİNİ.....	IX
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	X
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Öklid Uzayında Benzerlikler ve İzometrilere	3
1.2. Rasyonel Uzay Eğrilerinin Benzerlikleri	5
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	7
2.1. İnvaryantlar	7
2.2. Benzerlik Tespiti	9
2.3. Algoritma.....	14
3. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	22
3.1. Helis Olmayan Rastgele Rasyonel Eğriler	23
3.2. Papatya Eğri Ailesi.....	23
3.3. İrrasyonel Oranlı Benzerlikler.....	25
3.4. Helis Eğrileri	26
4. SONUÇLAR.....	29
5. ÖNERİLER.....	30
6. KAYNAKLAR	31
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

RASYONEL CEBİRSEL EĞRİLERİN BENZERLİK TESPİTİ İÇİN YENİ BİR YÖNTEM

Kadir AYDIN

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Hüsnü Anıl ÇOBAN
2024, 32 Sayfa

Bu tez çalışmasında, üç boyutlu reel vektör uzayında verilen iki rasyonel cebirsel eğri arasındaki benzerlik ilişkisini belirleyen yeni bir yöntem geliştirilmiştir. Yöntem, iki eğri arasındaki benzerlik ilişkisinin bu eğrilerin parametrizasyonları arasındaki bir denkliğe indirgenmesiyle ortaya çıkan duruma diferansiyel invaryantlar yardımıyla çözüm üretilmesine dayanmaktadır. Bunun için elde edilen diferansiyel invaryantlar, hesaplamaları, çok bilinmeyenli rasyonel fonksiyonlar arasındaki işlemlerden iki bilinmeyenli polinomlar arasında en büyük ortak çarpanı bulmaya indirgemektedir. Girdi eğrilerinin benzer olması durumunda yöntem, bu eğriler arasındaki tüm benzerlik ilişkilerinin elde edilmesini sağlamaktadır. Hesaplama adımları bir algoritmaya dönüştürülüp Maple™ (2021) bilgisayar cebir sistemi yardımı ile bilgisayar ortamına aktarılmış ve geniş çaplı testlerle yöntemin etkililiği gösterilmeye çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Benzerlik, Diferansiyel invaryant, Rasyonel cebirsel eğri, Algoritma

Master Thesis

SUMMARY

A NEW METOD TO DETECT SIMILARTY OF RATIONAL ALGEBRAIC CURVES

Kadir AYDIN

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Asist. Prof. Hüsnü Anıl ÇOBAN
2024, 32 Pages

In this thesis, a new method for determining the similarity relationship between two rational algebraic curves given in a three-dimensional real vector space is developed. The method is based on the solution of the situation that arises when the similarity relation between two curves is reduced to an equivalence between the parametrizations of these curves with the help of differential invariants. The differential invariants generated for this purpose reduce the computations from operations between rational functions in multiple unknowns to the search for the greatest common factor between polynomials in two unknowns. The method considers all similarity relations between the input curves if they are similar. The computational steps are converted into an algorithm and computerized using the computer algebra system MapleTM (2021) and the effectiveness of the method is demonstrated through extensive testing.

Key Words: Similarity, Differential invariant, Rational algebraic curve, Algorithm

ŞEKİLLER DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Şekil 1. Örnek 11' de verilen benzer rasyonel helis eğrileri. Burada, $z(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri kırmızı renkte, $w(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri ise mavi renkte gösterilmiştir.....	19
Şekil 2. Örnek 14' de verilen benzer crunode eğrileri. Burada, $z(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri kırmızı renkte, $w(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri ise mavi renkte gösterilmiştir.....	21
Şekil 3. Tablo 2' de verilen derecesi 20 olan benzer papatya eğrileri. Burada, $z(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri kırmızı renkte, bu parametrizasyona (62) deki ifadeler uygulanarak elde edilen eğri mavi renkte gösterilmiştir	24
Şekil 4. Tablo 3' de verilen derecesi 15 olan benzer eğriler. Burada, $k = 5$ için z^k parametrizasyonu ile verilen eğri kırmızı renkte, w^k parametrizasyonu ile verilen eğri ise mavi renkte gösterilmiştir.....	26
Şekil 5. Tablo 4' de verilen derecesi 3 olan benzer polinom helis eğrileri.....	27

TABLÖLAR DİZİNİ

	<u>Sayfa No</u>
Tablo 1. Çeşitli m derecesine ve r bitsize değerine sahip rastgele rasyonel parametrizasyonların benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)	23
Tablo 2. Çeşitli m dereceli papatya eğri parametrizasyonlarının benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)	23
Tablo 3. Çeşitli irrasyonel oranlı eğri parametrizasyonlarının benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn).....	25
Tablo 4. Çeşitli m dereceli polinom helis eğri parametrizasyonlarının benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)	27
Tablo 5. Çeşitli m dereceli rasyonel helis eğri parametrizasyonlarının benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)	28

SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}^3$	: Üç boyutlu reel vektör uzayı
$\mathbb{R}^{3 \times 3}$	: 3×3 tipinde tüm kare matrislerinin oluşturduğu küme
Q^T	: Q matrisinin transpozu
$O(3)$	: 3×3 tipinde tüm ortogonal matrislerin oluşturduğu küme
$z(t), w(t)$	: Eğri parametrizasyonları
$\langle z, w \rangle$	: z ve w vektörlerinin iç çarpımı
S_i	: Benzerlik invariantları
$F(t, s)$	: Möbiüs çarpanı
$\gcd(f, g)$	: f ve g polinomlarının en büyük ortak böleni
$[v_1 \ v_2 \ v_3]$	: v_1, v_2, v_3 vektörlerinden oluşan matris
$[\dots]^{-1}$	: Matrisin tersi
CPU	: Merkezi işlem birimi
AFactor	: Maple TM (2021)' de bir çarpanlara ayırma komutu

1. GENEL BİLGİLER

Öklid (M.Ö. 330- M.Ö. 275), günümüzde Öklid geometrisi olarak adlandırılan düzlem geometrinin temellerini 13 ciltlik “The Elements” eserinde ortaya koymuştur. Bu eserde, düzlem geometriyi kendinden önce elde edilen matematik ve geometri çalışmalarını da kullanarak ispat ve aksiyomlara dayalı bir sistem olarak sunmuştur. Felix Klein’ in Erlangen Program olarak bilinen, geometrileri grup temelli sınıflandırmasına kadar, geometri denildiğinde ilk akla gelen Öklid geometrisi olmuştur. Her ne kadar Öklid dışı geometrilerden bahsedilse de Felix Klein’ e kadar bu geometrilerin aralarındaki ilişkiler tam olarak ortaya konulamamıştır.

Erlangen Program’ da Felix Klein, geometrileri grup temelli cebirsel bir yapıya oturtmuş ve her bir geometrinin, o geometriyi oluşturan temel özellikleri koruyan dönüşüm grubu tarafından nasıl temsil edilebileceğini göstermiştir. Bu da her bir geometrinin, onun temel özelliklerini koruyan dönüşüm grubunun invaryantları olarak tanımlanabilmesini sağlamaktadır.

İnvaryant teori, temelleri 1850-1870 yıllarına dayanan, grup etkilerini ve bu etkilerin fonksiyonlar üzerinde ortaya koyduğu sonuçları inceleyen cebirsel bir teoridir. Klasik teoride çözülmesi gereken ilk problem, G bir grup, V ise k cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı olmak üzere, $k[V]$ nin elemanları olan invaryant polinomlardan (yani, $k[V]$ halkasından seçilen herhangi bir h polinomu ve G den seçilen her g için $h(gx) = h(x)$) oluşan $k[V]^G$ cebirinin sonlu üretilip üretilmediğinin bulunmasıdır. Diğer bir deyişle, “ $k[V]^G$ nin her bir elemanı, onun sonlu sayıda invaryant polinomu yardımıyla elde edilebilir mi?” sorusuna yanıt aramaktır. Buradan gelen evet cevabı üzerine ikinci problem, “Elde edilen üreteç invaryant polinomlar, aralarındaki ilişkiler incelenerek daha da azaltılabilir mi?” sorusudur. Burada amaç hesaba katılacak invaryant polinom sayısını minimize ederek hesaplama basamaklarını azaltmaktır.

İnvaryant teoreminin çözümüne katkı sağlayacağı en önemli problemlerden biri denklik problemidir. Klein’ in ortaya koyduğu sonuçlar, her bir geometrinin onu temsil eden dönüşüm grubuna göre invaryantlar yardımı ile tanımlandığını belirtir. Eğer bir geometride iki nesne arasında o geometrinin dönüşüm grubu elemanları ile geçiş yapılabilirse bu iki nesneye denktir denir. Verilen iki nesnenin denk olması da o geometrideki aynı özelliklere

sahip olmaları anlamına gelir. Denklik probleminin çözümü ile o geometrideki nesnelerin sınıflandırılmaları sağlanmış olur. Bu özelliğinden dolayı denklik problemi, Bilgisayarlı Görü, Bilgisayar Grafikleri, Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarım ve Örüntü Tanıma gibi günümüzde ön plana çıkmış uygulama alanları için merkezi problemidir. Daha somut ifade etmek gerekirse, örneğin Örüntü Tanıma alanında, eğer çalışılmak istenen nesne bir eğri olarak verilirse, problem, bu eğriyi daha önce sınıflandırılmış ve bir veri tabanında depolanmış diğer eğrilerin tümüyle karşılaştırma problemine indirgenir. Burada eğri, veri tabanındakilerle birebir aynı (aynı konum ve boyutta) olmayabilir. Bundan dolayı geometrik olarak verilen eğriyi veri tabanındaki kayıtlı eğrilerden birine dönüştüren bir benzerlik dönüşümü olup olmadığını kontrol etmek gerekir. Benzer bir durum bilgisayar grafikleri alanında gözlemlenebilir. Burada simetri ve benzerlik tespiti, resim analizi, sıkıştırma, şekil düzenleme ve şekil tamamlama gibi işlemleri yerine getirebilmek için önemlidir.

Denklik problemi, cebirsel varyeteler olarak adlandırılan geometrik nesneler üzerinde cebirsel teknikler kullanarak çözümler arayan cebirsel geometri ile diferansiyel teknikler kullanarak çözümler arayan diferansiyel geometrinin ortak konusudur. Temelde her iki çalışma alanı da (incelenecekleri geometrilere) eğri ve yüzeylerin denkliklerinin tam ve açık bir ifadesine ihtiyaç duyarlar. Burada üstesinde gelinmesi gereken diğer bir durum da parametrelenişlerdir. İki eğrinin denkliği için parametrelenişlerin bu duruma etkisi Sendra vd. (2008) çalışmasında karakterize edilmiş ve bu geçiş dönüşümünün Möbiüs dönüşümü olduğu gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasında, üç boyutlu reel vektör uzayında iki rasyonel cebirsel eğri arasındaki benzerliği veren denklik problemi araştırılmıştır. Burada cebirsel eğriler üzerinde çalışmadaki temel tercih yukarıda bahsedilen uygulama alanları ile olan ilişkisi ve problemlerin modellenmesine olan yatkınlığıdır. Son yıllarda cebirsel eğrilerin simetrilerinin, aralarındaki benzerlik ilişkilerinin ve singülerliklerinin belirlenmesi konusu üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalardan bazıları, Perez-Diaz (2007), Lebmeir & Jürgen (2008), Chen vd. (2008), Shi vd. (2013), Alcazár vd. (2014a; 2014b; 2015; 2018; 2019a; 2019b), Khadjiev vd. (2018), Ören & İncesu (2020), Çoban (2024) olarak verilebilir. Bu referanslardan Alcazár vd. (2019a; 2019b), kapalı formda verilen eğriler üzerine yapılmış çalışmalardır. Lebmeir & Jürgen (2008), Alcazár vd. (2014a; 2014b; 2015; 2018) çalışmalarında cebirsel geometri teknikleri kullanılarak parametrik eğrilerin simetri ve benzerlik tespiti problemleri çözülmüş, elde edilen algoritma yardımıyla bu çözümler bilgisayar cebir sistemi aracılığıyla bilgisayar ortamına aktararak kapsamlı testler ile

algoritmanın etkililiği gösterilmiştir. Khadjiev vd. (2018), Ören & İncesu (2020) çalışmalarında benzerlik problemi, düzlem eğrileri için geliştirilen benzerlik invariantları aracılığı ile araştırılmıştır. Çoban (2024)' de ise düzlemde verilen iki cebirsel eğri parametrizasyonu arasındaki benzerlik tespiti için kompleks gösterim üzerinde üretilen invariantlar kullanılmış, geliştirilen algoritma yardımıyla çözümler bilgisayar cebir sistem aracılığıyla bilgisayar ortamına aktarılmıştır. Algoritmanın etkililiği benzer çalışmalarda elde edilen sonuçlar ile karşılaştırılarak gösterilmiştir.

Alcazár vd. (2015) çalışmasında, rasyonel uzay eğrilerinin simetri tespiti için iyi bilinen diferansiyel invariantlar olan eğrilik ve burulma invariantları kullanılmış ve simetri tespiti için yapılan önceki çalışmalara göre oldukça başarılı sonuçlar elde edilmiştir. Bununla birlikte bu invariantları kullanarak benzerlik tespiti problemi tekrar ele alınmıştır (Alcazár vd. 2018). Buradan elde edilen sonuçlar da önceki çalışmalarda sunulanlara göre hesaplamaların çok daha hızlı ve etkili yapılabildiğini göstermiştir.

Alcazár vd. (2015)' de ortaya konulan diferansiyel invariantları kullanma fikrinden esinlenilerek, Gözütok vd. (2023), Çoban (2024), Alcazár vd. (2024) çalışmalarında araştırılan denklik problemine, simetri problemine Alcazár vd. (2015)' de eğrilik ve burulma invariantlarının gösterdiği tepkiyi veren diferansiyel invariantlar geliştirilmiştir. Her bir çalışmada ortaya konan algoritmaların başarısı bu yaklaşımın benzerlik tespiti için de kullanılabileceğini göstermiştir. Tezde, cebirsel rasyonel uzay eğrileri arasındaki benzerlik ilişkilerini belirleme problemi, yine tezde elde edilen benzerlik invariantları ile araştırılmıştır.

1.1. Öklid Uzayında Benzerlikler ve İzometriler

Tanım 1. Öklid uzayının bir benzerliği, uzaklıkların oranını koruyan uzaydan kendine bir lineer afin dönüşümdür. Yani, $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir benzerlik dönüşümdür ancak ve ancak $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^3$ ve $Q \in O(3)$ bir ortogonal matris ($Q \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, $Q^T Q = I$) olmak üzere,

$$f(x) = \lambda Qx + b \quad (1)$$

dir. Burada, λ ya benzerlik oranı denir.

Başka bir açıdan benzerlik dönüşümü, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ olmak üzere,

$$d(f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})) = \lambda d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad (2)$$

şeklindedir. Burada, $\| \cdot \|$ Öklid normu olmak üzere, $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ Öklid uzaklığıdır. Ayrıca f birim dönüşüm ise sıradan benzerlik olarak adlandırılır.

Not 2. Eğer $\lambda = 1$ ise f bir (afin) izometridir. Sıradan olmayan izometrilere sınıflandırılması (düzlemde) yansımaları, dönmeleri, ötelemeleri içerirler ve bunlar değişmeli çiftler halinde birleşerek bükülmeleri, kayma ve dönme yansımalarını oluştururlar. Başka bir ifadeyle, bükülme, bir eksen etrafında dönme ve bu eksene paralel olan bir vektör yönünde bir ötelemenin birleşimidir. Bununla birlikte kayma yansıması ise düzlemde bir yansıma ve bu düzleme paralel olan bir vektör yönünde ötelemenin birleşimidir. Bir $\mathbf{x}$ noktası boyunca karşılıklı dik düzlemlerdeki üç yansımanın bileşimi $\mathbf{x}$ noktasına göre bir merkezi inversiyon verir. Eğer λ, Q nun bir öz vektörü değilse bu takdirde f , benzerlik merkezi olarak adlandırılan tek bir sabit $\mathbf{c} := (I - \lambda Q)^{-1} \mathbf{b}$ noktasına sahiptir. Özel olarak, izometri olmayan her simetrinin bir merkezi vardır. Çünkü Q ortogonal matrisi, modülü 1 e denk olan özdeğerlere sahiptir. Bir homoteti, herhangi bir doğruyu bir paralel doğruya götüren dönüşüm olarak tanımlanan benzerliğin özel bir halidir. Yani öteleme olmayan herhangi bir homoteti bir $\mathbf{x}$ noktasını $\mathbf{c} + \lambda(\mathbf{x} - \mathbf{c})$ noktasına götürür ve $f(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{c}$ şeklinde tanımlanır. Bir homotetik dönme, bir $\mathbf{c}$ merkezli homoteti dönüşümü ile $\mathbf{c}$ yi içeren bir l doğrusuna göre Q ortogonal matrisinin çarpımına eşittir ve

$$f(Q\mathbf{x}) = Qf(\mathbf{x}) = \lambda Q\mathbf{x} + (1 - \lambda)\mathbf{c}, Q\mathbf{c} = \mathbf{c} \quad (3)$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 3. Herhangi bir benzerlik ya bir izometridir ya da bir homotetik dönmedir (Coxeter, 1969, s. 103).

1.2. Rasyonel Uzay Eğrilerinin Benzerlikleri

Bu aşamadan itibaren tez boyunca, $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ eğrileri ne doğru ne de çember olan ve aksi belirtilmedikçe düzlemsel olmayan iki uzay eğrisi olarak ele alınacaktır. Böyle eğriler indirgenemezler ve

$$\mathbf{z}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{C}_1 \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{z}(t) = (z_1(t), z_2(t), z_3(t)) \quad (4)$$

$$\mathbf{w}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{C}_2 \subset \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t)) \quad (5)$$

şeklinde verilen rasyonel dönüşümler yardımı ile parametrize edilebilirler. Burada $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$, sırasıyla z_j ve w_j bileşenleri reel katsayılı t nin rasyonel fonksiyonlarıdır ve t nin sonlu sayıdaki değerleri hariç diğer tüm değerleri için tanımlıdır. Ayrıca (4) ve (5) de verilen parametrizasyonların uygun, yani t nin sonlu sayıda değeri haricinde diğer tüm değerleri için birebir olduğunu varsayalım. Ek olarak $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ nun bileşenlerinin pay ve paydalarının da aralarında asal olduğunu kabul edelim. Ayrıca, rasyonel cebirsel eğrilerin derecesi, her bir parametrizasyona ait tüm bileşenlerin pay ve payda dereceleri arasında en büyük olanıdır ($der(\mathbf{z}(t)) = \text{maksimum}\{der(z_{ij}(t))\}$, burada $1 \leq i \leq 3$ ve $1 \leq j \leq 2$ için $z_i(t) = \frac{z_{i1}(t)}{z_{i2}(t)}$ ve $der(\cdot)$, $\cdot$ nin derecesidir.).

Bu tez çalışmasında (4) ve (5) de verilen cebirsel uzay eğrilerinin benzerliği incelenecektir. Yani birinin, benzerlik dönüşümü altında diğerinin resmi olup olmadığı araştırılacaktır.

Tanım 4. f bir benzerlik dönüşümü olmak üzere, $f(\mathbf{C}_1) = \mathbf{C}_2$ ise $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ arasında bir benzerlik ilişkisi vardır veya $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ eğrileri benzerdir denir.

Doğru üzerinde tanımlanan rasyonel fonksiyonlar literatürde iyi bilinen Möbiüs dönüşümleridir. Bu rasyonel fonksiyonlar,

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \frac{at + b}{ct + d}, \quad ad - bc \neq 0 \quad (6)$$

şeklindedir. Aşağıda verilen sonuç, doğru üzerindeki bir Möbiüs dönüşümü ile uzayda verilen bir f benzerlik dönüşümünü ilişkilendirmektedir.

Teorem 5. $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^3$, $z, w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uygun parametrizasyonlu iki rasyonel uzay eğrisi olsun. Eğer C_1, C_2 bir f benzerlik dönüşümü ile ilişkili ise bu takdirde, aşağıdaki diyagramın değişmeli olduğu tek bir φ dönüşümü vardır. (Sendra vd., 2008)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f & & \\
 & C_1 & \longrightarrow & C_2 & \\
 z & \uparrow & & \uparrow & w \\
 & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\
 & & \varphi & &
 \end{array} \tag{7}$$

Bu teorem sayesinde,

$$f(z(t)) = w(\varphi(t)) \tag{8}$$

eşitliği ile dereceleri aynı iki eğri arasındaki benzerlik ilişkisi, onların parametrizasyonları arasındaki benzerlik ilişkisine indirgemiş olur. Bu eşitlikten görülmektedir ki eğriler arasındaki her bir f benzerlik dönüşümüne karşılık gelen tek bir φ dönüşümü vardır. Bundan dolayı benzerlik dönüşümünü elde etmek için Möbiüs dönüşümlerini bulmak yeterlidir. Ayrıca burada φ Möbiüs dönüşümünün, reel doğruyu kendisine dönüştürdüğü için gerekirse katsayıları ortak bir kompleks sayıya bölünerek reel yapılabilceği daima varsayılabilir (Alcazár vd., 2015, Lemma 3).

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. İnvaryantlar

Bu bölümde bir C eğrisinin benzerlik dönüşümüne göre invaryant fonksiyonlarından oluşan bir sistem elde edilecektir ($\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$). $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ ve $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$, $\mathbf{z}, \mathbf{w}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere, sırasıyla, C_1 ve C_2 eğrilerini tanımlayan parametrizasyonlar olsun. Burada, $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^3$, $Q \in O(3)$ olmak üzere $\lambda Q\mathbf{z}(t) + b = \mathbf{w}(\varphi(t))$ dir. Bu taktirde, Tanım 4' e göre C_1 ve C_2 eğrileri benzerdir. Burada $\mathbf{z}$ ve onun türevlerinin iç çarpımlarından oluşan rasyonel ve $I_i(\mathbf{z}) = I_i(\lambda Q\mathbf{z} + b)$ eşitliğini sağlayan I_i ifadelerini inşa edeceğiz. Bu I_i ifadeleri benzerlikler altında invaryanttır. Özel olarak $I_i(\mathbf{z}) = I_i(\mathbf{w})$ eşitliği $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ ile tanımlanan eğrilerin benzerliği için bir gerekli durumdur. Basitlik için $\mathbf{u} := \mathbf{z}(t)$, $\mathbf{v} := \mathbf{w}(\varphi(t))$ şeklinde işaretleyelim.

$\lambda Q\mathbf{u} + b = \mathbf{v}$ eşitliğinin her iki tarafının t ye göre türevi alınarak,

$$\lambda Q\mathbf{u}'(t) = \mathbf{v}'(t) \quad (9)$$

elde edilir. $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$, $\mathbf{x}$ ve $\mathbf{y}$ vektörlerinin iç çarpımı olmak üzere, (9) denkleminde,

$$\langle \lambda Q\mathbf{u}'(t), \lambda Q\mathbf{u}'(t) \rangle = \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}'(t) \rangle \quad (10)$$

eşitliğine ulaşılır. İç çarpımın ve ortogonal matrisin özelliklerinden,

$$\lambda^2 \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle = \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}'(t) \rangle \quad (11)$$

elde edilir. Benzer şekilde (9) denkleminin her iki tarafının t ye göre türevi alınarak,

$$\lambda Q\mathbf{u}''(t) = \mathbf{v}''(t) \quad (12)$$

buradan da

$$\langle \lambda Q \mathbf{u}'(t), \lambda Q \mathbf{u}''(t) \rangle = \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}''(t) \rangle \quad (13)$$

eşitliği yardımıyla,

$$\lambda^2 \langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''(t) \rangle = \langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}''(t) \rangle \quad (14)$$

elde edilir. (11) ve (14) eşitliklerinden,

$$\frac{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} = \frac{\langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}''(t) \rangle}{\langle \mathbf{v}'(t), \mathbf{v}'(t) \rangle} \quad (15)$$

rasyonel fonksiyonların eşitliğine ulaşılır. (15) denkleminin sol tarafındaki rasyonel ifadeyi

$$I_1(\mathbf{u}) := \frac{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} \quad (16)$$

gösterelim. $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^3$, $Q \in O(3)$ olmak üzere, $I_1(\mathbf{u}) = I_1(\lambda Q \mathbf{u} + b)$ olduğundan I_1 , benzerlik dönüşümü altında bir invaryant fonksiyondur. (12) denkleminin tekrar türevinin alınmasıyla ve benzer adımlar izlenerek aşağıdaki invaryant fonksiyonlar da elde edilir.

$$\begin{aligned} I_2(\mathbf{u}) &:= \frac{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'''(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} \\ I_3(\mathbf{u}) &:= \frac{\langle \mathbf{u}''(t), \mathbf{u}''(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} \\ I_4(\mathbf{u}) &:= \frac{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}''''(t) \rangle}{\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}'(t) \rangle} \end{aligned} \quad (17)$$

Böylece bölümün başlangıcında $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ parametrizasyonları ile verilen ve $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere $\lambda Q \mathbf{z} + b = \mathbf{w} \circ \varphi$ için, $I_i(\mathbf{z}) = I_i(\lambda Q \mathbf{z} + b)$ eşitliklerine sahibiz.

Önerme 6. C_1 , C_2 , sırasıyla $\mathbf{z}$, $\mathbf{w}$ parametrizasyonları ile verilen iki eğri olsun. Bu takdirde, $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^3$, $Q \in O(3)$ olmak üzere $\lambda Q \mathbf{z} + b = \mathbf{w} \circ \varphi$ dir ancak ve ancak bir φ Möbiüs dönüşümü vardır öyle ki $1 \leq i \leq 4$ için

$$I_i(\mathbf{z}) = I_i(\mathbf{w} \circ \varphi). \quad (18)$$

2.2. Benzerlik Tespiti

Sırasıyla $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ ve $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t)$ parametrizasyonları ile tanımlanan $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ eğrilerini alalım. Teorem 5 ve Önerme 6' dan, $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ eğrileri benzerdir ancak ve ancak bir φ Möbiüs dönüşümü için $1 \leq i \leq 4$ olmak üzere (18) eşitliği vardır.

Bu denklemlerden φ parametrelerinde bir polinom sistemi türetilebilir. Böylece bu polinom sistemini çözerek φ parametrelerine ulaşılır. Devamında $\lambda Q\mathbf{z} + b = \mathbf{w}(\varphi(t))$ denkleminde $\mathbf{C}_1$ ve $\mathbf{C}_2$ eğrileri arasındaki benzerlikler (eğer varsa) tespit edilir. Fakat, bu sistem yüksek mertebeden ve yüksek hesaplama sürelerine sebep olan çözüme sahip olabilir. Bunun yerine bizim yöntemimiz Gözütok vd. (2023) çalışmasından esinlenerek çarpanlara ayırma yardımıyla φ yi hesaplamayı amaçlamaktadır.

Bunu yapmak için I_i invariantları uygun değildir. Çünkü $1 \leq i \leq 4$ için

$$I_i(\mathbf{w} \circ \varphi) \neq I_i(\mathbf{w}) \circ \varphi \quad (20)$$

dir. Bunun üzerine $s := \varphi(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ yazarak ve zincir kuralını kullanarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$I_1(\mathbf{w} \circ \varphi) = \frac{s''}{s'} + s' I_1(\mathbf{w}) \circ \varphi, \quad (21)$$

$$I_2(\mathbf{w} \circ \varphi) = \frac{s'''}{s'} + 3s'' I_1(\mathbf{w}) \circ \varphi + (s')^2 I_2(\mathbf{w}) \circ \varphi, \quad (22)$$

$$I_3(\mathbf{w} \circ \varphi) = \frac{(s'')^2}{(s')^2} + 2s'' I_1(\mathbf{w}) \circ \varphi + (s')^2 I_3(\mathbf{w}) \circ \varphi, \quad (23)$$

$$I_4(\mathbf{w} \circ \varphi) = \frac{s''''}{s'} + s''' I_1(\mathbf{w}) \circ \varphi + 6s' s'' I_2(\mathbf{w}) \circ \varphi + (s')^3 I_4(\mathbf{w}) \circ \varphi. \quad (24)$$

Burada s', s'', s''', s'''' ler sırasıyla s nin birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevlerini göstermektedir. Ayrıca bu türevler, φ nin parametreleri olan $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ değişkenlerini içerir.

Şimdi, (21), (22), (23), (24) denklemlerinden yararlanarak, Möbiüs dönüşümünden etkilenmeyen, yeni S_1 ve S_2 invaryantlarını elde edebiliriz.

Bunu yapmak için $s = \varphi(t)$ nin türevleri arasındaki ilişkiyi kullanacağız. s nin t ye göre türevleri aşağıdaki gibidir;

$$s' = \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{(\gamma t + \delta)^2}, \quad (25)$$

$$s'' = -\frac{2\gamma(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\gamma t + \delta)^3}, \quad (26)$$

$$s''' = \frac{6\gamma^2(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\gamma t + \delta)^4}, \quad (27)$$

$$s'''' = -\frac{24\gamma^3(\alpha\delta - \beta\gamma)}{(\gamma t + \delta)^5}. \quad (28)$$

Elde edilen bu türevlerden,

$$s's''' = \frac{3}{2}(s'')^2 \quad (29)$$

ve

$$(s')^2 s'''' = 3((s')^2 s'' - (s'')^3) \quad (30)$$

eşitlikleri elde edilir. Buradan s''' ve s'''' yalnız bırakılırsa,

$$s''' = \frac{3}{2} \frac{(s'')^2}{s'} \quad (31)$$

$$s'''' = 3 \frac{(s'')^3}{(s')^2} \quad (32)$$

elde edilir. Böylece (22) ve (24) denklemlerinde s''' , s'''' yerine (31) ve (32) denklemlerinde verilen s' ve s'' cinsinden eşitlikleri yazılırsa ve (18) denkleminde uygulanırsa $s = \varphi(t)$ için,

$$I_1(\mathbf{z})(t) = \frac{s''}{s'} + s' I_1(\mathbf{w})(s), \quad (33)$$

$$I_2(\mathbf{z})(t) = \frac{3(s'')^2}{2(s')^2} + 3s'' I_1(\mathbf{w})(s) + (s')^2 I_2(\mathbf{w})(s), \quad (34)$$

$$I_3(\mathbf{z})(t) = \frac{(s'')^2}{(s')^2} + 2s'' I_1(\mathbf{w})(s) + (s')^2 I_3(\mathbf{w})(s), \quad (35)$$

$$I_4(\mathbf{z})(t) = \frac{3(s'')^3}{(s')^3} + \frac{9(s'')^2}{s'} I_1(\mathbf{w})(s) + 6s' s'' I_2(\mathbf{w})(s) + (s')^3 I_4(\mathbf{w})(s) \quad (36)$$

elde edilir.

(33) denkleminde $s'' = s' I_1(\mathbf{z})(t) - (s')^2 I_1(\mathbf{w})(s)$ elde edilip, (34), (35) ve (36) denklemlerinde yerine yazıldığında,

$$I_2(\mathbf{z})(t) = \frac{3}{2} (I_1(\mathbf{z})(t))^2 + (s')^2 \left(I_2(\mathbf{w})(s) - \frac{3}{2} (I_1(\mathbf{w})(s))^2 \right), \quad (37)$$

$$I_3(\mathbf{z})(t) = (I_1(\mathbf{z})(t))^2 + (s')^2 \left(I_3(\mathbf{w})(s) - (I_1(\mathbf{w})(s))^2 \right), \quad (38)$$

$$I_4(\mathbf{z})(t) = 3(I_1(\mathbf{z})(t))^3 - (s')^2 (9I_1(\mathbf{z})(t)(I_1(\mathbf{w})(s))^2 + 6s'(I_1(\mathbf{w})(s))^3 + (6-6s')I_1(\mathbf{w})(s)I_2(\mathbf{w})(s) + s'I_4(\mathbf{w})(s)) \quad (39)$$

eşitliklerine ulaşılır. (37) ve (38) denklemlerinde $(s')^2$ yalnız bırakılırsa sırasıyla,

$$(s')^2 = \frac{I_2(\mathbf{z})(t) - \frac{3}{2} (I_1(\mathbf{z})(t))^2}{I_2(\mathbf{w})(s) - \frac{3}{2} (I_1(\mathbf{w})(s))^2}, \quad (40)$$

$$(s')^2 = \frac{I_3(\mathbf{z})(t) - (I_1(\mathbf{z})(t))^2}{I_3(\mathbf{w})(s) - (I_1(\mathbf{w})(s))^2}, \quad (41)$$

ifadeleri elde edilir. (40) ve (41) dan,

$$\frac{I_2(\mathbf{z})(t) - \frac{3}{2}(I_1(\mathbf{z})(t))^2}{I_3(\mathbf{z})(t) - (I_1(\mathbf{z})(t))^2} = \frac{I_2(\mathbf{w})(s) - \frac{3}{2}(I_1(\mathbf{w})(s))^2}{I_3(\mathbf{w})(s) - (I_1(\mathbf{w})(s))^2} \quad (42)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece, (42) de aynı fonksiyonun sol tarafta $\mathbf{z}$ parametrelenişinin t ye göre, sağ tarafta ise $\mathbf{w}$ parametrelenişinin s ye göre ifadesi yer almış olur. Bir başka deyişle

$$S_1 := \frac{I_2(\mathbf{z})(t) - \frac{3}{2}(I_1(\mathbf{z})(t))^2}{I_3(\mathbf{z})(t) - (I_1(\mathbf{z})(t))^2} \quad (43)$$

şeklinde tanımlanarak $S_1(\mathbf{z})(t) = S_1(\mathbf{w} \circ \varphi) = S_1(\mathbf{w}) \circ \varphi$ şartını sağlayan S_1 benzerlik invaryantı elde edilmiş olur.

(39) denkleminde ise $(s')^2$ yerine (40) daki eşiti yazılır ve yukardaki yaklaşım uygulanırsa,

$$(s')^3 = \frac{I_4(\mathbf{z})(t) + 6(I_1(\mathbf{z})(t))^3 - 6I_1(\mathbf{z})(t)I_2(\mathbf{z})(t)}{I_4(\mathbf{w})(s) + 6(I_1(\mathbf{w})(s))^3 - 6I_1(\mathbf{w})(s)I_2(\mathbf{w})(s)} \quad (44)$$

ifadesi elde edilir. (41) in her iki tarafının küpü, (43) ün ise her iki tarafının karesi alınarak elde edilen eşitlik bir taraf t ye diğer taraf s ye göre düzenlendiğinde,

$$\begin{aligned} & \frac{\left(I_4(\mathbf{z})(t) + 6(I_1(\mathbf{z})(t))^3 - 6I_1(\mathbf{z})(t)I_2(\mathbf{z})(t)\right)^2}{\left(I_3(\mathbf{z})(t) - (I_1(\mathbf{z})(t))^2\right)^3} \\ &= \frac{\left(I_4(\mathbf{w})(s) + 6(I_1(\mathbf{w})(s))^3 - 6I_1(\mathbf{w})(s)I_2(\mathbf{w})(s)\right)^2}{\left(I_3(\mathbf{w})(s) - (I_1(\mathbf{w})(s))^2\right)^3} \end{aligned} \quad (45)$$

eşitliği ve buradan da

$$S_2 := \frac{\left(I_4(\mathbf{z})(t) + 6(I_1(\mathbf{z})(t))^3 - 6I_1(\mathbf{z})(t)I_2(\mathbf{z})(t)\right)^2}{\left(I_3(\mathbf{z})(t) - (I_1(\mathbf{z})(t))^2\right)^3} \quad (46)$$

$S_2(\mathbf{z})(t) = S_2(\mathbf{w} \circ \varphi) = S_2(\mathbf{w}) \circ \varphi$ şartını sağlayan ikinci benzerlik invaryantı S_2 elde edilmiş olur.

Lemma 7. $\mathcal{C}$ eğrisini bir $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ parametrizasyonu ile uygun şekilde parametrelenmiş ve ne doğru ne de çember olan bir cebirsel uzay eğrisi olsun. Bu takdirde $i \in \{1,2\}$ için, S_i lerin paydaları özdeşçe sıfır değildir. Dolayısı ile, S_i benzerlik invaryantları iyi tanımlıdır.

İspat. $\mathcal{C}$ eğrisini bir $\mathbf{z} = \mathbf{z}(t)$ parametrizasyonu ile uygun şekilde parametrelenmiş bir cebirsel uzay eğrisi olarak alalım. Varsayalım S_i benzerlik invaryantlarının paydaları özdeşçe sıfır olsun. Bu takdirde, $I_3(\mathbf{z})(t) - (I_1(\mathbf{z})(t))^2 = 0$ dır. (16) ve (17) den,

$$\frac{\langle \mathbf{z}''(t), \mathbf{z}''(t) \rangle}{\langle \mathbf{z}'(t), \mathbf{z}'(t) \rangle} - \left(\frac{\langle \mathbf{z}'(t), \mathbf{z}''(t) \rangle}{\langle \mathbf{z}'(t), \mathbf{z}'(t) \rangle} \right)^2 = 0 \quad (47)$$

ve buradan da,

$$\langle \mathbf{z}''(t), \mathbf{z}''(t) \rangle \langle \mathbf{z}'(t), \mathbf{z}'(t) \rangle - (\langle \mathbf{z}'(t), \mathbf{z}''(t) \rangle)^2 = 0 \quad (48)$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$\langle \mathbf{z}''(t), \mathbf{z}''(t) \rangle \langle \mathbf{z}'(t), \mathbf{z}'(t) \rangle - (\langle \mathbf{z}'(t), \mathbf{z}''(t) \rangle)^2 = \|\mathbf{z}'(t) \times \mathbf{z}''(t)\|^2 \quad (49)$$

olduğundan, $\|\mathbf{z}'(t) \times \mathbf{z}''(t)\| = 0$ dır. Bu da $\mathcal{C}$ eğrisinin eğriliğinin sıfır olması demektir. Buradan, $\mathcal{C}$ eğrisinin bir doğru olduğu elde edilir. Bu ise kabulümüzle çelişir. ■

Lemma 8. $\mathcal{C}$ eğrisi bir $\mathbf{z}$ parametrizasyonu ile uygun şekilde parametrelenmiş ve ne doğru ne de çember olan bir cebirsel uzay eğrisi olsun. Bununla birlikte, $\varphi(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ Möbiüs dönüşümünü alalım. Bu takdirde, $i \in \{1,2\}$ için,

$$S_i(\mathbf{z} \circ \varphi) = S_i(\mathbf{z}) \circ \varphi \quad (50)$$

dir.

Teorem 9. C_1, C_2 eğrileri $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ parametrizasyonları ile uygun şekilde parametrelenmiş ve ne doğru ne de çember olan iki cebirsel uzay eğrisi olsun. Bu takdirde, $0 < \lambda \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^3$, $Q \in O(3)$ olmak üzere, C_1, C_2 eğrileri bir $\mathbf{w} = f(\mathbf{z}) = \lambda Q\mathbf{z} + b$ benzerlik dönüşümü ile ilişkilidir ancak ve ancak $i \in \{1, 2\}$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir

$s = \varphi(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$, $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ Möbiüs dönüşümü vardır.

$$S_i(\mathbf{z})(t) = S_i(\mathbf{w})(s) \quad (51)$$

2.3. Algoritma

Benzerliği tespit etmek için Teorem 9' daki sonuçları kullanarak bir algoritma geliştireceğiz. Bunu yapmak için denklem (43) ve (46) de tanımlanan invaryantların sabit olmadığını kabul edeceğiz. İlk olarak S_1 ve S_2 invaryantlarının rasyonel olmasından dolayı,

$$S_1(\mathbf{z})(t) = \frac{U(t)}{V(t)}, \quad S_2(\mathbf{z})(t) = \frac{Y(t)}{Z(t)}, \quad (52)$$

$$S_1(\mathbf{w})(t) = \frac{\check{U}(t)}{\check{V}(t)}, \quad S_2(\mathbf{w})(t) = \frac{\check{Y}(t)}{\check{Z}(t)} \quad (53)$$

şeklinde yazılabilir. Buradan da, $s = \varphi(t)$ için

$$E_1(t, s) := U(t)\check{V}(s) - V(t)\check{U}(s), \quad (54)$$

$$E_2(t, s) := Y(t)\check{Z}(s) - Z(t)\check{Y}(s) \quad (55)$$

şeklinde E_1 ve E_2 polinomlarını tanımlayalım. Bu polinomlar bir ortak çarpana sahip olmalıdır. Bu çarpanı,

$$G(t, s) := \gcd(E_1(t, s), E_2(t, s)) \quad (56)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $\gcd$ (en büyük ortak bölen), E_1 ve E_2 polinomlarının en büyük ortak bölenidir. Son olarak bir keyfi $s = \varphi(t) = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ Möbiüs dönüşümü için,

$$F(t, s) := s(\gamma t + \delta) - (\alpha t + \beta) \quad (57)$$

şeklinde F Möbiüs çarpanını tanımlayalım. Böylece aşağıdaki sonuca sahip oluruz.

Teorem 10. C_1, C_2 eğrileri sırasıyla $\mathbf{z}, \mathbf{w}$ parametrizasyonları ile uygun şekilde parametrelenmiş ve ne doğru ne de çember olan iki cebirsel uzay eğrisi, G ise denklem (56) deki gibi olsun. Eğer C_1 ve C_2 benzer ise F böler G olacak şekilde bir F Möbiüs çarpanı vardır.

İspat. Teorem 9 ve (54), (55) denklemlerinden $i = 1, 2$ için $E_i(t, s) = 0$ olacak şekilde bir $s = \varphi(t)$ Möbiüs dönüşümü vardır. Bu Möbiüs dönüşümüne karşılık gelen Möbiüs çarpanı $F(t, s)$ olsun. Bu takdirde, $F(t, s)$ polinomunun sıfır yerleri, $G(t, s)$ polinomunun sıfır yerlerinde içerilirler. Diğer taraftan $F(t, s)$ indirgenemez olduğundan Bezaut Teoremi' ne göre, $F(t, s), G(t, s)$ nin bir böleni olmak zorundadır. ■

Buradan artık φ Möbiüs dönüşümlerini hesaplayabiliriz. Bunun için (56) da verilen $G(t, s)$ polinomunda $F(t, s)$ Möbiüs çarpanlarını bulmalıyız. Bunu da $G(t, s)$ polinomunu çarpanlarına ayırıp, çarpanlarından hem t ye hem de s ye göre lineer olanlarını seçerek başarabiliriz. Burada $G(t, s)$ polinomunun çarpanlarına ayrılması işlemini etkili bir şekilde yapabilmek için *Maple*TM(2021)' daki *AFactor* komutunu kullanacağız. Seçilen her bir çarpandan s yi izole ederek Möbiüs dönüşümlerini hesaplarız. Daha sonra elde edilen her bir φ Möbiüs dönüşümü (11) denkleminde yerine yazılarak λ benzerlik oranı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\lambda = \sqrt{\frac{\langle (\mathbf{w}(\varphi(t)))', (\mathbf{w}(\varphi(t)))' \rangle}{\langle (\mathbf{z}(t))', (\mathbf{z}(t))' \rangle}}. \quad (58)$$

Devamında, (9), (12) ve $\lambda Qu'''(t) = v'''(t)$ eşitlikleri kullanılarak elde edilen

$$[\lambda Qu'(t) \lambda Qu''(t) \lambda Qu'''(t)] = [v'(t) v''(t) v'''(t)] \quad (59)$$

matris eşitliğinde

$$[\lambda Qu'(t) \ \lambda Qu''(t) \ \lambda Qu'''(t)] = \lambda Q[u'(t) \ u''(t) \ u'''(t)] \quad (60)$$

şeklinde yazılabildiğinden, Q ortogonal matrisi

$$Q = \frac{1}{\lambda} [v'(t) \ v''(t) \ v'''(t)][u'(t) \ u''(t) \ u'''(t)]^{-1} \quad (61)$$

olarak elde edilir. Burada, $[u'(t) \ u''(t) \ u'''(t)]^{-1}$, $[u'(t) \ u''(t) \ u'''(t)]$ matrisinin tersidir. Son olarak da elde edilenler $\lambda Qz + b = w(\varphi(t))$ eşitliğinde yerine yazılarak b öteleme vektörü bulunur. Böylece, iki rasyonel eğri parametrizasyonu arasındaki tüm benzerlik dönüşümleri tespit edilmiş olur.

Algoritma Sim3D

Girdi: S_1 ve S_2 benzerlik invaryantlarını sabit yapmayan ve Bölüm 1.2 de verilen hipotezleri sağlayan $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ eğri parametrizasyonları.

Çıktı: Hem Möbiüs hem de benzerlik dönüşümlerinin listesi. Eğer benzerlik yok ise uyarı yazısı “Eğriler benzer değildir.”

1. Adım: $\mathbf{z}$ ve $\mathbf{w}$ parametrizasyonları için ayrı ayrı I_1, I_2, I_3, I_4 temel benzerlik diferansiyel invaryantları hesapla.
2. Adım: (54) ve (55) dan $E_1(t, s)$ ve $E_2(t, s)$ polinomlarını hesapla.
3. Adım: (56) den $G(t, s)$ polinomunu hesapla.
4. Adım: $AFactor$ fonksiyonu uygulanarak, G polinomunun FS çarpanlarını hesapla.
5. Adım: FS çarpanlarından hem t ye hem de s ye göre birinci derece olanları seçilerek Möbiüs çarpanlarının MF kümesini oluştur.
6. Adım: MF kümesinin her bir elemanından s izole edilerek Möbiüs dönüşümlerinin MBS kümesini oluştur.
7. Adım: (58) dan λ benzerlik oranını hesapla.
8. Adım: 6. ve 7. adımda elde edilen bilgiler (61)’ de yerine yazılarak her bir Möbiüs dönüşümüne karşılık gelen Q ortogonal matrisi hesapla.
9. Adım: Bundan önceki adımlarda elde edilenler $\lambda Qz + b = w(\varphi(t))$ denkleminde yerlerine yazılarak benzerlik dönüşümünün b öteleme vektörünü bul.

Örnek 11. (Helis eğrileri arasındaki benzerlikler) Rasyonel parametrizasyonları aşağıdaki gibi olan iki helis eğrisini alalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= -\frac{1}{2t^3}(22 - 99t + 39t^3, 33 + 33t - 13t^3, 3(33 + 33t + 143t^2 + 13t^3)), \\ \mathbf{w}(t) &= -\frac{1}{5(t+1)^3}(310 + 6t + 39t^2 + 13t^3, -2(-235 + 54t + 351t^2 + 117t^3), \\ &\quad 5(664 + 1068t + 540t^2 + 37t^3)). \end{aligned}$$

Yukarıda verilen parametrizasyonlara ait temel invaryantlar,

$$\begin{aligned} I_1(\mathbf{z})(t) &= -\frac{2(13t^2 + 9t + 22)}{t(13t^2 + 6t + 11)}, \\ I_2(\mathbf{z})(t) &= \frac{2(507t^4 + 702t^3 + 2049t^2 + 1056t + 1210)}{t^2(13t^2 + 6t + 11)^2}, \\ I_3(\mathbf{z})(t) &= \frac{4(169t^4 + 234t^3 + 666t^2 + 396t + 484)}{t^2(13t^2 + 6t + 11)^2}, \\ I_4(\mathbf{z})(t) &= -\frac{24(169t^4 + 273t^3 + 922t^2 + 495t + 605)}{t^3(13t^2 + 6t + 11)^2}, \\ I_1(\mathbf{w})(t) &= -\frac{2(13t^2 + 35t + 44)}{(t+1)(13t^2 + 32t + 30)}, \\ I_2(\mathbf{w})(t) &= \frac{2(507t^4 + 2730t^3 + 7197t^2 + 9288t + 5524)}{(t+1)^2(13t^2 + 32t + 30)^2}, \\ I_3(\mathbf{w})(t) &= \frac{4(169t^4 + 910t^3 + 2382t^2 + 3106t + 1949)}{(t+1)^2(13t^2 + 32t + 30)^2}, \\ I_4(\mathbf{w})(t) &= -\frac{24(169t^4 + 949t^3 + 2755t^2 + 3834t + 2464)}{(t+1)^3(13t^2 + 32t + 30)^2}, \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu invaryantlar yardımıyla aşağıdaki benzerlik invaryantları elde edilir.

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{z})(t) &= \frac{45t^2 - 66t - 121}{13t^2}, \\ S_2(\mathbf{z})(t) &= \frac{1089(27t^3 + 81t^2 - 99t - 121)^2}{2197t^6}, \\ S_1(\mathbf{w})(t) &= \frac{45t^2 + 24t - 142}{13(t^2 + 2t + 1)}, \end{aligned}$$

$$S_2(\mathbf{w})(t) = \frac{1089(27t^3 + 81t^2 - 99t - 121)^2}{2197(t^2 + 2t + 1)^3}.$$

Buradan da (54), (55) da ifade edildiği gibi $E_1(t, s)$, $E_2(t, s)$ polinomlarını hesaplar ve (56) daki gibi bu polinomların en büyük ortak bölenini (gcd) bulursak,

$$G(t, s) = s^2t - st^2 + \frac{11}{6}s^2 + 2st - \frac{17}{6}t^2 + \frac{11}{3}s + t + \frac{11}{6}$$

polinomuna ulaşırız. Daha sonra elde edilen bu polinom çarpanlarına ayrılarak,

$$\begin{aligned} FS[1] &= st + \frac{11}{6}s + \frac{17}{6}t + \frac{11}{6}, \\ FS[2] &= -t + s + 1 \end{aligned}$$

çarpanları elde edilir. Bu çarpanlardan hem t ye hem de s ye göre birinci dereceden polinom olanlardan s izole edilerek $\{\varphi_1(t) = -\frac{17t+11}{6t+11}, \varphi_2(t) = t - 1\}$ Möbiüs dönüşümleri MBS kümesi elde edilir.

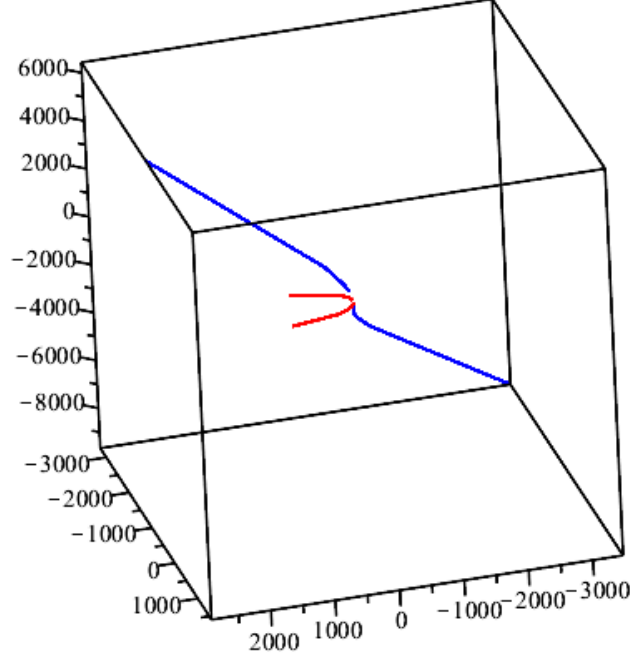
(57) den benzerlik oranı $\lambda = 2$ olarak hesaplanır. Elde edilen benzerlik oranı ve her bir $\varphi_i(t)$ Möbiüs dönüşümü için (61)' den sırasıyla,

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \frac{243}{605} & -\frac{1420}{1573} & -\frac{1212}{7865} \\ -\frac{524}{605} & -\frac{675}{1573} & \frac{2016}{7865} \\ -\frac{36}{121} & \frac{48}{1573} & -\frac{1501}{1573} \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

benzerlik dönüşümünün ortogonal matrisleri elde edilir. Son olarak bütün bu elde edilenler $\lambda Qz + b = \mathbf{w}(\varphi(t))$ eşitliğinde yerine yazılarak benzerlik dönüşümünün ötelemesi olan

$$b_1 = \begin{bmatrix} \frac{216}{5} \\ \frac{12}{5} \\ \frac{5}{134} \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vektörleri bulunur. Bu örneğe ait hesaplamaların tamamı 0.078 saniye sürmüştür.



Şekil 1. Örnek 11’ de verilen benzer rasyonel helis eğrileri. Burada, $\mathbf{z}(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri kırmızı renkte, $\mathbf{w}(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri ise mavi renkte gösterilmiştir.

Not 12. Bundan sonraki örneklerde işlem adımları Örnek 11’ deki kadar ayrıntılı verilmeyecektir.

Örnek 13. (Helis eğrileri arasındaki benzerlikler) Parametrizasyonları aşağıdaki gibi olan iki helis eğrisini alalım:

$$\mathbf{z}(t) = \left(\frac{3}{4}t^5 + \frac{3}{8}t^4 + \frac{1}{4}t^3, \frac{4}{5}t^5 + t^4, -\frac{3}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 \right),$$

$$\mathbf{w}(t) = \left(\frac{3}{2}t^5 + \frac{3}{4}t^4 + t^3, \frac{6}{5}t^5 + 3t^4, -\frac{8}{5}t^5 + t^4 + \frac{4}{3}t^3 \right).$$

Burada $G(t, s) = 1$ olduğundan bu iki helis polinom eğrisi arasında benzerlik ilişkisi yoktur. Hesaplamaların tamamı 0.031 saniye sürmüştür.

Örnek 14. (Crunode eğrileri arasındaki benzerlikler) Parametrizasyonları aşağıdaki gibi olan iki crunode eğrisini alalım:

$$\mathbf{z}(t) = \left(\frac{t}{t^4 + 1}, \frac{t^2}{t^4 + 1}, \frac{t^3}{t^4 + 1} \right),$$

$$\mathbf{w}(t) = \left(\frac{2(t+1)(4t+7)}{5((t+1)^4+1)}, \frac{2(t+1)(3t-1)}{5((t+1)^4+1)}, \frac{2(t+1)^3}{((t+1)^4+1)} + 2 \right).$$

Burada,

$$G(t, s) = s^4 t^2 - s^2 t^4 + 4s^3 t^2 - 2st^4 + 6s^2 t^2 - t^4 + 4st^2 - s^2 + 2t^2 - 2s - 1$$

polinomu elde edilir. Bu polinomun çarpanlara ayrılmasıyla,

$$FS[1] = st + t + 1,$$

$$FS[2] = st + t - 1,$$

$$FS[3] = s + t + 1,$$

$$FS[4] = s - t + 1,$$

çarpanları elde edilir. Buradan da,

$$\varphi_1(t) = -\frac{t-1}{t}, \quad \varphi_2(t) = -\frac{t+1}{t}, \quad \varphi_3(t) = -t-1, \quad \varphi_4(t) = t-1$$

Möbiüs dönüşümleri bulunur. (58) kullanılarak benzerlik oranı $\lambda = 2$ olarak hesaplanır. Her bir $\varphi_i(t)$ Möbiüs dönüşümü için sırasıyla benzerlik dönüşümünün ortogonal matrisi ve ötelemesi aşağıdaki gibi elde edilir;

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

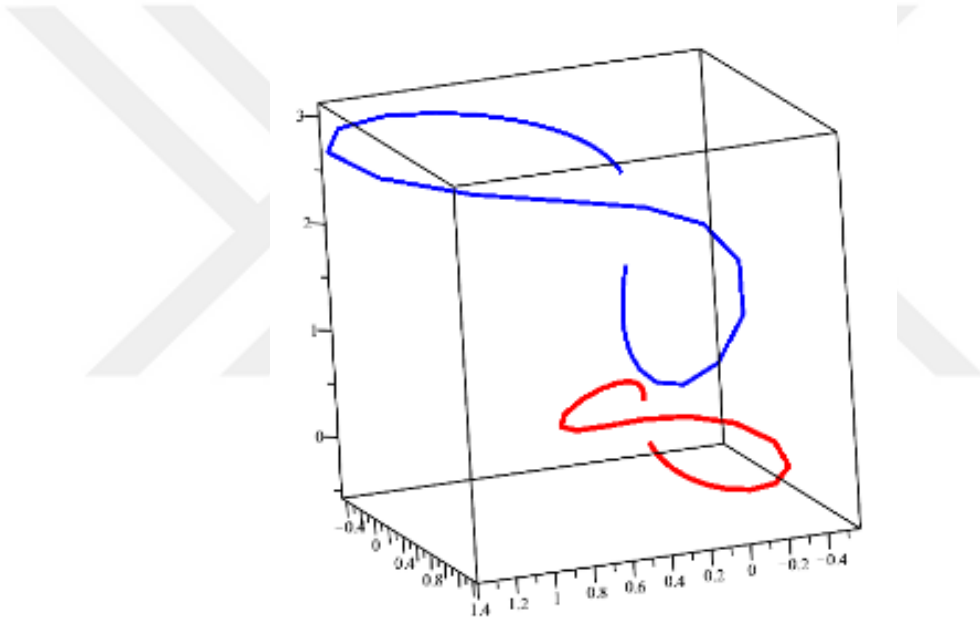
$$Q_3 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$Q_4 = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Bu örnek için hesaplamaların tamamı 0.172 saniye sürmüştür.



Şekil 2. Örnek 14’ de verilen benzer crunode eğrileri. Burada, $\mathbf{z}(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri kırmızı renkte, $\mathbf{w}(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri ise mavi renkte gösterilmiştir.

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölümde, *Sim3D* algoritması, bilgisayar cebir sistemi Maple™ (2021) kullanılarak geniş çaplı örnekler üzerinde test edilmiştir. Algoritmanın performansı hakkında daha iyi karar verebilmek adına Alcazár vd. (2018) çalışmasında kullanılan örnekler üzerinde testler yürütülmüştür. Bu sayede elde edilen hesaplama süreleri karşılaştırılarak tezde tanıtılan yöntemin etkililiği ve başarısı ortaya konulmaya çalışılmıştır. Bunun için 2.4 GHz Intel Core i5 işlemciye ve 8 GB belleğe sahip bir bilgisayar kullanılmıştır. Hesaplama detaylarına (örnekler ve kaynak kodlarına) Kadir (2024) internet sayfasından ulaşılabilir.

Bu bölüm boyunca benzerliği garanti etmek için benzerlik ilişkisi incelenecek eğrilerden, her bir C_1 eğrisinin bir $z(t)$ parametrizasyonuna,

$$\varphi(t) = t + 1, \quad \lambda = 2, \quad Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (62)$$

uygulanarak, C_2 eğrisinin bir $w(t) := (\lambda Qz(t) + b) \circ \varphi(t)$ parametrizasyonu elde edilmiştir (Alcazár vd. (2018) çalışmasında olduğu gibi). Eğri parametrizasyonları arasındaki bu genelleme ilişkisi sadece, 3.3. İrrasyonel Oranlı Benzerlikler alt bölümündeki tüm örneklerde ve 3.4. Helis Eğrileri alt bölümünde $m = 3$ durumu için verilen örnekte farklıdır. Bölüm boyunca uygulanan bütün bu tercihler *Sim3D* algoritması ile Alcazár vd. (2018) çalışmasında geliştirilen *Similar3D* algoritmasının etkililik karşılaştırılmasının sağlıklı bir şekilde yapılabilmesi içindir.

Alt bölümlerde verilen tablolarda t_a ile Alcazár vd. (2018) çalışmasında geliştirilen *Similar3D* algoritmasının hesaplama süreleri, t_b ile de bu çalışmada tanıtılan *Sim3D* algoritmasının hesaplama süreleri gösterilmiştir. Ayrıca, tablolarda mavi renk ile yazılanlar, hesaplamada elde edilen CPU sürelerinden daha iyi olanlarıdır. Bütün bunların yanında, eğrinin derecesi, eğri parametrizasyonundaki rasyonel bileşenlerin paylarındaki ve paydalarındaki en yüksek dereceyi; bitsize değeri ise eğri parametrizasyonundaki bileşenlerin paylarının ve paydalarının katsayılarının en büyük bitsize değerini belirtmektedir.

3.1. Helis Olmayan Rastgele Rasyonel Eğriler

Tablo 1, çeşitli m derecelerde ve katsayı bitsize değeri en çok τ olan helis olmayan rastgele rasyonel parametrizasyona sahip eğrilerin benzerlik ilişkilerini hesaplama sürelerini vermektedir. Burada, tablodan da görüleceği üzere, sadece $m = 3$, $\tau = 4$ ve $m = 3$, $\tau = 8$ durumları dışında kalan tüm durumlarda *Sim3D* algoritmasının *Similar3D* algoritmasına göre belirgin bir şekilde daha iyi sonuçlar ortaya koyduğu gözlemlenmektedir.

Tablo 1. Çeşitli m derecesine ve τ bitsize değerine sahip rastgele rasyonel parametrizasyonların benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

t_a/t_b	$\tau = 4$	$\tau = 8$	$\tau = 16$	$\tau = 32$
$m = 3$	0.327/0.328	0.375/0.594	0.577/0.266	0.842/0.281
$m = 4$	0.655/0.281	1.170/0.422	1.497/0.344	3.120/0.407
$m = 5$	1.263/0.469	1.700/0.406	3.292/0.797	7.098/0.953
$m = 6$	1.716/0.594	3.900/0.750	6.880/0.687	15.288/0.672
$m = 7$	4.336/0.688	6.896/0.625	14.290/1.078	27.659/1.187
$m = 8$	8.253/0.875	12.683/1.140	22.168/1.453	35.927/1.547
$m = 9$	11.762/1.109	10.998/1.250	21.466/1.500	57.424/2.156
$m = 10$	12.340/1.500	23.509/1.828	46.519/2.313	90.746/2.844

3.2. Papatya Eğri Ailesi

Papatya eğri ailesi, parametrik olarak $\mu = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ve $\rho = \frac{2t}{1+t^2}$ olmak üzere,

$$\mathbf{z}(t) = \left(\mu \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{2j}{2i} \mu^{2j-2i} \rho^{2i}, \rho \sum_{i=0}^j (-1)^i \binom{2j}{2i} \mu^{2j-2i} \rho^{2i}, \frac{1-t^{4j+4}}{1+t^{4j+4}} \right) \quad (63)$$

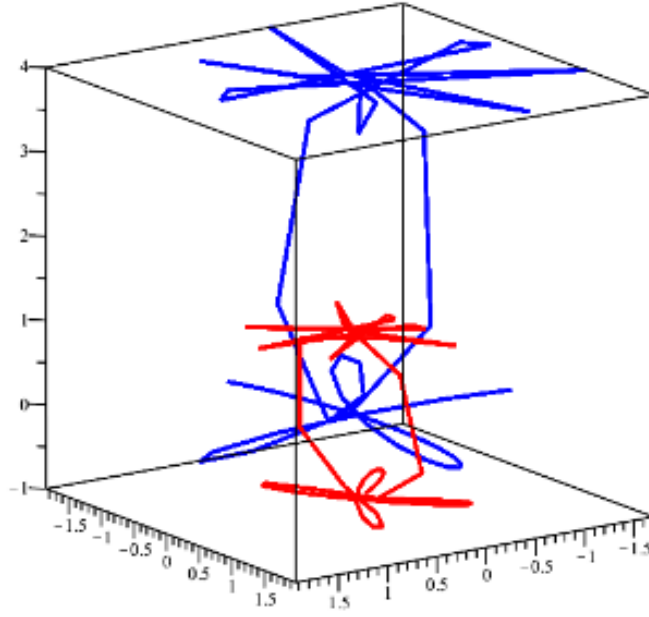
şeklinde ifade edilir. Burada $j \geq 0$ dır.

Aşağıda verilen tablo $0 \leq j \leq 4$ olmak üzere $m = 4j + 4$ dereceli papatya ailesi için benzerliklerin hesaplama sürelerini listelemektedir.

Tablo 2. Çeşitli m dereceli papatya eğri parametrizasyonlarının benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

Derece	$m = 4$	$m = 8$	$m = 12$	$m = 16$	$m = 20$
t_a/t_b	0.858	3.182	19.603	72.166	209.541
	/0.453	/1.105	/3.266	/6.875	/15.094

Tablo 2’ de ortaya konulan sonuçlar, papatya eğrileri için tüm derecelerde *Sim3D* algoritmasının daha etkili olduğunu göstermektedir.



Şekil 3. Tablo 2’ de verilen derecesi 20 olan benzer papatya eğrileri. Burada, $\mathbf{z}(t)$ parametrizasyonu ile verilen eğri kırmızı renkte, bu parametrizasyona (62) deki ifadeler uygulanarak elde edilen eğri mavi renkte gösterilmiştir.

3.3. İrrasyonel Oranlı Benzerlikler

Burada,

$$\mathbf{z}^k(t) = \left(\frac{t^{2k+1}}{t^{2k} + 1}, \frac{t^{2k+3}}{t^{2k} + 1}, \frac{t^{2k+5}}{t^{2k} + 1} \right) \quad (64)$$

parametrelenişi ile verilen eğri ailesine diğer bölümlerden farklı olarak benzerliği garanti etmek için uygulanan dönüşümde, $\lambda = \sqrt{2}$ ve $\varphi(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}$ uygulanarak

$$\mathbf{w}^k(t) = \left(\frac{(2t)^{2k+1}}{(2t)^{2k} + 2^k}, \frac{(2t)^{2k+3}}{2((2t)^{2k} + 2^k)}, \frac{(2t)^{2k+5}}{4((2t)^{2k} + 2^k)} \right) \quad (65)$$

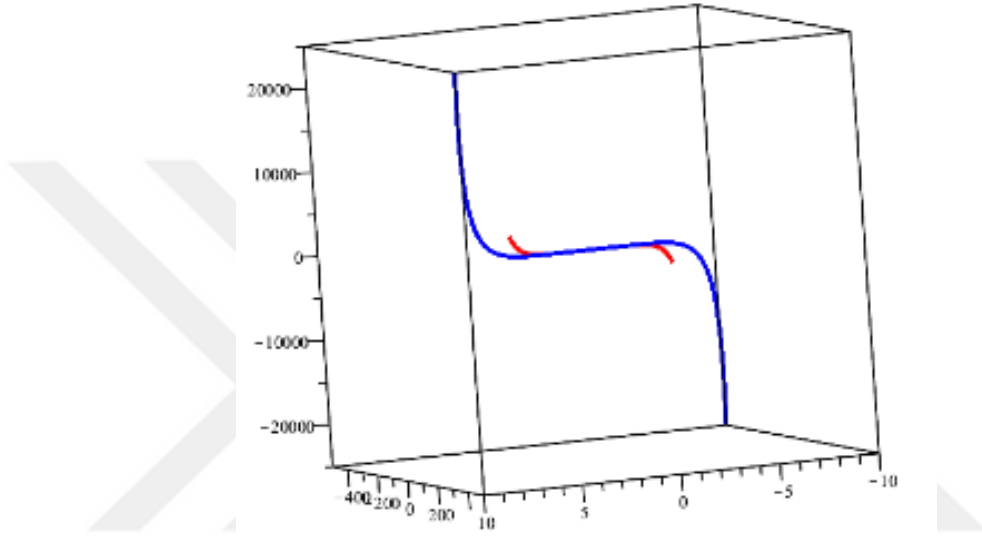
elde edilmiştir ($\mathbf{w}^k(t) := \sqrt{2} \mathbf{z}^k(\frac{t}{\sqrt{2}})$). Burada $k = 1, 2, \dots$ dır. Amaç, irrasyonel girdilerde algoritmanın başarı durumunun incelenmesidir.

Alcazár vd. (2018) çalışmasında yapılan testlerde, beklenin aksine, hesaplama süresini artıran durumun irrasyonel benzerlik oranının doğru hesaplanmaya çalışılmasından kaynaklanmadığı, hesaplamada ortaya çıkan, benzerlikle ilgili olmayan hesaplamalardan kaynaklandığı gözlemlenmiştir. Bunu gösterebilmek için de Alcazár vd. (2018)' de Tablo 3' de verilen hesaplama süreleri, benzerlik oranının hesaplanmasına, daha sonra da Möbiüs dönüşümünün elde edilmesine kadar geçen süreler olarak ayrı ayrı t_λ , t_φ ve toplamaları $t_\lambda + t_\varphi$ şeklinde verilmiştir.

Tezde ortaya konulan yöntem ile önce (varsa) benzerlik ilişkisine ait Möbiüs dönüşümü bulunmakta ve ardından bu dönüşüme ait benzerlik oranı elde edilmektedir. Bununla birlikte, incelenen örneklerde *Sim3D* algoritması, Möbiüs dönüşümünün elde edilmesinden çok az bir süre sonra yani neredeyse hemen sonra benzerlik oranını hesaplayabildiği için aşağıdaki tabloda süreler, her iki çalışmada da elde edilen $t_\lambda + t_\varphi$ şeklinde listelenmiştir.

Tablo 3. Çeşitli $m = 2k + 5$ dereceli $(\mathbf{z}^k, \mathbf{w}^k)$ eğri çiftlerinin benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn), burada $1 \leq k \leq 5$

Derece	$m = 7$	$m = 9$	$m = 11$	$m = 13$	$m = 15$
t_a/t_b	2.152	1.528	2.839	3.978	9.968
	/0.375	/0.297	/0.547	/0.375	/0.516



Şekil 4. Tablo 3’ de verilen derecesi 15 olan benzer eğriler. Burada, $k = 5$ için $\mathbf{z}^k$ parametrizasyonu ile verilen eğri kırmızı renkte, $\mathbf{w}^k$ parametrizasyonu ile verilen eğri ise mavi renkte gösterilmiştir.

3.4. Helis Eğrileri

Sim3D algoritması helis eğrileri arasındaki benzerlik ilişkisi için polinomsal ve rasyonel helis eğrileri olarak ayrı ayrı test edilmiştir. Bu eğriler için Alcazár vd. (2018) çalışmasında bazı zorluklar ortaya çıkmıştır. Bunun sebebi, eğrilik ve burulma invariantlarının Alcazár vd. (2015) çalışmasındaki simetri tespitinde olduğu gibi benzerlik tespitine cevap verememesinden kaynaklanmaktadır. Çünkü bu invariantlar kullanıldığında benzerlik oranına bağlı ifadeler ortaya çıkmakta bu da helis eğrilerinin benzerlik tespitinde benzer olamamalarına rağmen benzermiş gibi sonuç vermelerine yol açmaktadır. Tezde

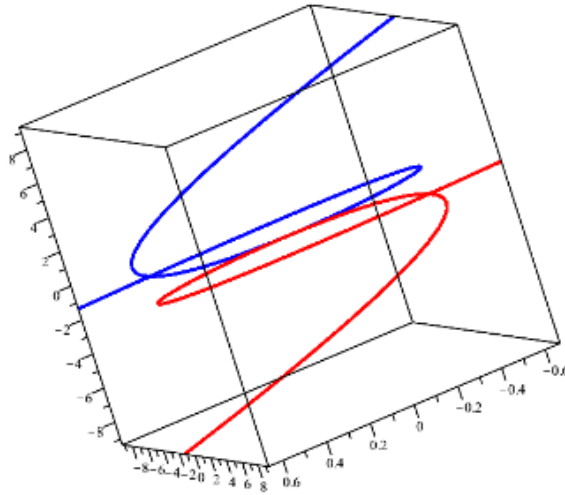
verilen Örnek 13’ de verilen eğrilerin Alcazár vd. (2018)’ de ilk önce benzer olmamalarına rağmen benzer olarak tespit edildikleri görülmektedir. Bundan dolayı, helis eğrileri için özel bir yöntem geliştirilmiştir. Tezde ise elde edilen benzerlik invaryantları sayesinde benzerlik oranı da elendiği için, ek bir yönteme ihtiyaç kalmadan aynı işlem adımlarıyla diğer eğrilerde olduğu gibi helis eğrileri için de benzerlik tespiti yapılabilmektedir.

Tablo 4’ de polinomsal helis eğrileri arasındaki ilişkiye ait hesaplama süreleri, Alcazár vd. (2018)’ de elde edilen süreler ile sunulmuştur. Burada incelenen polinomsal helis eğriler, Farouki (2008) çalışmasında üçüncü ve beşinci dereceden polinom helis eğrilerinin üretilmesine ilişkin sonuçlardan, diğer derecelerdeki ise Şengüler-Çiftçi (2014) çalışmasında sunulan rasyonel helis eğrilerin üretilmesi için verilen algoritma kullanılarak elde edilmiştir.

Tablo 4. Çeşitli m dereceli polinom helis eğri parametrizasyonlarının benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

Derece	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
t_a/t_b	0.390	0.655	0.312	15.460	63.228
	/0.047	/0.078	/0.062	/0.063	/0.078

Diğer eğri yapılarında olduğu gibi polinom helis eğrilerinin benzerlik ilişkisinin incelenmesinde de *Sim3D*’ nin daha etkili olduğu gözlemlenmiştir.



Şekil 5. Tablo 4’ de verilen derecesi 3 olan benzer polinom helis eğrileri.

Bununla birlikte, *Similar3D* algoritması rasyonel helis eğrileri arasındaki benzerlik hesaplamalarını basit örneklerde bile uzun sürede tamamladığı için Alcazár vd. (2018)' de bu örneklere değinilmemiştir. Şengüler-Çiftçi (2014) çalışmasında verilen algorithmadan üretilen çeşitli derecelerdeki rasyonel helis eğrileri için benzerlik tespitine ait süreler Tablo 5' te verilmiştir.

Tablo 5. Çeşitli m dereceli rasyonel helis eğri parametrizasyonlarının benzerliklerinin hesaplanmasında harcanan CPU süreleri (sn)

Derece	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
t_b	0.313	0.125	0.140	0.156	0.219

Tabloda listelenen süreler *Sim3D* algoritmasının rasyonel helis eğrilerinin benzerlik tespitinde de başarılı olduğunu gözler önüne sermektedir. Ayrıca *Sim3D*' nin uygulandığı aynı dereceli iki polinom helis eğrisinin benzerlik tespiti ile iki rasyonel helis eğrisinin benzerlik tespiti hesaplamalarında geçen süreler arasında büyük farklılıklara rastlanmamıştır.

4. SONUÇLAR

Tezde aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1. Alcazár vd. (2015)' de simetri probleminin çözümünde literatürde iyi bilinen eğrilik ve burulma invaryantlarını kullanmıştır. Problemin çözümünde bu invaryant fonksiyonların hem simetri dönüşümüne göre invaryant hem de Möbiüs dönüşümünden etkilenmeyen yapısından yararlanılmıştır. Tezde ise benzerlik problemi için aynı özellikleri sağlayan S_1, S_2 benzerlik invaryant fonksiyonları elde edilmiştir.
2. İki eğrinin uygun parametrisasyonlarına benzerlik invaryantları uygulanarak elde edilen eşitlikler aracılığı ile iki cebirsel rasyonel uzay eğrisi arasındaki tüm benzerlik ilişkilerini tespit eden yeni bir yöntem tanıtılmıştır.
3. Elde edilen yöntemin hesaplama adımları kullanılarak *Sim3D* adında bir algoritma oluşturulmuştur.
4. *Sim3D* algoritması MapleTM (2021) kullanılarak bilgisayar ortamına bir MapleTM (2021) prosedürü olarak aktarılmış ve çeşitli örnekler üzerinde testler yürütülmüştür. Yöntemin etkililiğini daha iyi ortaya koyabilmek adına bu konu ile doğrudan ilişkili ve bu konuda hazırlanmış bildiğimiz kadarıyla en son çalışma olan Alcazár vd. (2018) makalesindeki örnekler kullanılmıştır. Testlerin sonucunda ortaya çıkan tablolar ile tanıtılan yöntemin başarısı ortaya konulmuştur.
5. Testlerde kullanılan örnekler karşılaştırma amacıyla sınırlı derece ve bitsize değerlerine sahip eğrilerden oluşsa da elde edilen hesaplama süreleri tezde sunulan yöntemin daha yüksek dereceli ve bitsize değerlerine sahip eğriler için de rahatlıkla hesaplama yapabileceğini ortaya koymaktadır.

5. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasının devamı olarak gelecekte aşağıdaki konular araştırılabilir:

1. Tezde ortaya konulan yöntem keyfi boyuta verilen iki rasyonel cebirsel eğrinin benzerlik ilişkisinin tespitine genelleştirilebilir.
2. Literatürde eğrilerin simetri tespiti üzerine hazırlanmış çalışmalar ile karşılaştırılarak yöntemin simetri tespitinde de etkili olup olmadığı araştırılabilir.
3. Yüzeylerin benzerliğini araştırmak için Gauss eğriliği ve Ortalama eğrilik gibi invariant yapılarına benzer cebirsel yüzey parametrelenişlerinin benzerlik invariantları bulunabilir.

6. KAYNAKLAR

- Alcazár, J. G., Hermoso, C., & Muntingh, G. (2014a). Detecting symmetries of rational plane and space curves. *Computer Aided Geometric Design*, 31(3-4), 199-209.
- Alcazár, J. G., Hermoso, C., & Muntingh, G. (2014b). Detecting similarity of rational plane curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 269, 1-13.
- Alcazár, J. G., Hermoso, C., & Muntingh, G. (2015). Symmetry detection of rational space curves from their curvature and torsion. *Computer Aided Geometric Design*, 33, 51-65.
- Alcazár, J. G., Hermoso, C., & Muntingh, G. (2018). Similarity detection of rational space curves. *Journal of Symbolic Computation*, 85, 4-24.
- Alcazár, J. G., Diaz Toca, G. M., & Hermoso, C. (2019a). On the problem of detecting when two implicit plane algebraic curves are similar. *International Journal of Algebra and Computation*, 29(5), 775-793.
- Alcazár, J. G., Lavicka, M., & Versek, J. (2019b). Symmetries and similarities of planar algebraic curves using harmonic polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 357, 302-318.
- Alcazár, J. G., Çoban, H. A., & Gözütok, U. (2024). Detecting affine equivalences between certain types of parametric curves, in any dimension. *AIMS Mathematics*, 9(6), 13750-13769.
- Chen, F., Wang, W., & Liu, Y. (2008). Computing singular points of plane rational curves. *Journal of Symbolic Computation*, 43, 92-117.
- Çoban, H. A. (2024). Detecting similarities of rational plane curves using complex differential invariants. *International Journal of Algebra and Computation*, 34(1), 35-53.
- Coxeter, H. S. M. (1969). *Introduction to Geometry (2nd Edition)*, New York, London, John Wiley & Sons, Inc.
- Faruki, R. T. (2008). *Pythagorean-Hodograph Curves: Algebra and Geometry Inseparable*. Berlin, Springer.
- Gözütok, U., Çoban, H. A., Sağiroğlu, Y., & Alcazár, J. G. (2023). A new method to detect projective equivalences and symmetries of rational 3D curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 419, 1-21.
- Kadir, A. (2024, Mayıs 27). Rasyonel Cebirsel Eğrilerin Benzerlik Tespiti İçin Yeni Bir Yöntem. <https://avesis.ktu.edu.tr/hacoban/dokumanlar/adresinden/alınmiştir>.

- Khadjiev, D., Ören, İ., & Pekşen, Ö. (2018). Global invariants of paths and curves for the group of all linear similarities in the two dimensional Euclidean space. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics*, 15(6), 1-28.
- Lebmeir, P., & Jürgen, R. G. (2008). Rotations, translations and symmetry detection for complexified curves. *Computer Aided Geometric Design*, 25(9), 707-719.
- Maple™, 2021. Maplesoft, A division of Waterloo Maple Inc. Waterloo, Ontario.
- Ören, İ., & İncesu, M. (2020). Recognition of complex polynomial Bezier curves under similarity transformations. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1377-1388.
- Perez-Diaz, S. (2007). Computation of the singularities of parametric plane curves. *Journal of Symbolic Computation*, 42, 835-857.
- Shi, X., Jia, X., & Goldman, R. N. (2013). Using a bihomogeneous resultant to find the singularities of rational space curves. *Journal of Symbolic Computation*, 53, 1-25.
- Şengüler-Çiftçi, F. (2004). Geometry of rational helices and its applications. <https://arxiv.org/abs/1306.3689>.

ÖZGEÇMİŞ

Kadir AYDIN, İlkokulu Ortaköy İlkokulunda, ortaokulu Kağızman Yatılı İlköğretim Bölge Okulunda bitirdikten sonra lise eğitimini 1992 yılında Kars Cumhuriyet Lisesinde tamamladı. 1993 yılında Erzurum Atatürk Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde lisans eğitimine başladı. 1997 yılında bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl Kars Kağızman Yatılı İlköğretim Bölge Okulunda Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı. 2009 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim dalında yüksek lisans eğitimine başladı. MEB bünyesindeki farklı liselerde öğretmenlik ve yöneticilik görevlerinde bulundu. 2020 yılından itibaren Trabzon Yavuz Sultan Selim Anadolu Lisesinde Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Orta derece İngilizce bilmektedir.