

TEMMUZ 2023

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

MUHAMMED PEKTAŞ

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL CEBİRSEL DÜZLEMSEL EĞRİLERİN TOPOLOJİSİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

MUHAMMED PEKTAŞ
TEMMUZ 2023

REEL CEBİRSEL DÜZLEMSEL EĞRİLERİN TOPOLOJİSİ

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Remziye Arzu ZABUN DEMİR

Muhammed PEKTAŞ

Temmuz 2023



©2023[Muhammed PEKTAŞ]

REEL CEBİRSEL DÜZLEMSEL EĞRİLERİN TOPOLOJİSİ

başlıklı bu çalışma, **Muhammed PEKTAŞ** tarafından hazırlanmış ve yapılan savunma sınavı sonucunda başarılı bulunarak jürimiz tarafından **Gaziantep Üniversitesi Matematik Bölümü'nde** Yüksek Lisans/Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Mehmet İshak YÜCE
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

.....

Prof. Dr. Memet ŞAHİN
Enstitü Anabilim Dalı Başkanı

.....

Dr. Öğr. Üyesi Remziye Arzu ZABUN DEMİR
Danışman

.....

Sınav Tarihi: 12.07.2023

Jüri Üyeleri:

Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT
Çukurova Üniversitesi

.....

Prof. Dr. Necati OLGUN
Gaziantep Üniversitesi

.....

Dr. Öğr. Üyesi Remziye Arzu ZABUN DEMİR
Gaziantep Üniversitesi

.....

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Muhammed PEKTAŞ

ABSTRACT

TOPOLOGY OF REAL ALGEBRAIC PLANE CURVES

PEKTAŞ, Muhammed

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Asst. Prof. Dr. Remziye Arzu ZABUN DEMİR

July 2023

45 pages

The topology of real algebraic curves studies the relation between the algebraic properties of a given equation and the geometric properties of the curve determined by this equation. In this thesis, two different topological classifications of non-singular real algebraic curves will be discussed. The first one is "Topological classification", that is, understanding what are the possible sets (up to homeomorphism) of real points of such curves. The other is "Isotopic classification", that is, understanding how such a curve can lie in the real projective plane. In other words, it is to examine the relative positions of components of the curve. The second problem is known in the literature as "Hilbert's 16th problem".

Our aim is to understand these problems according to the degree of such curves, and try to present the known results in a systematic way. To summarize in outline: In the first chapter, some basic definitions, theorems and examples of algebraic geometry related to affine/projective space, affine/projective algebraic varieties are given in order to understand the content of the thesis. In the second chapter, various topological properties of non-singular real algebraic plane curves, which are special cases of algebraic varieties, are presented systematically. In addition, some construction methods of such curves are mentioned. In the last chapter, the complex version of the results given in the previous one, that is the results derived from the complexification of real algebraic plane curves are presented.

Key Words: Affine/projective spaces, Affine/projective algebraic varieties, Real algebraic plane curves, The topology of real algebraic plane curves.

ÖZET

REEL CEBİRSEL DÜZLEMSEL EĞRİLERİN TOPOLOJİSİ

PEKTAŞ, Muhammed

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Remziye Arzu ZABUN DEMİR

Temmuz 2023

45 sayfa

Reel cebirsel eğrilerin topolojisi belirli bir denklemin cebirsel özellikleri ile bu denklem tarafından belirlenen eğrinin geometrik özellikleri arasındaki ilişkiyi inceler. Bu tezde tekilliği olmayan cebirsel eğrilerin iki farklı topolojik sınıflandırmalarından bahsedilecektir. Bunlardan birisi “Topolojik sınıflandırmadır”, yani bu tür eğrilerin reel noktalar kümesinin neye homeomorfik olduğunun anlaşılmasıdır. Diğeri ise “Isotopik sınıflandırmadır”, yani eğrilerin reel projektif düzlemde topolojik olarak kaç farklı şekilde var olabileceğini anlamaktır. Diğeri bir değışle eğrinin bileşenlerinin bir birine göre konumunu incelemektir. İkinci problem literatürde “Hilbert’in 16. problemi” olarak bilinir.

Bu tezde amacımız tekilliği olmayan reel cebirsel düzlemsel eğriler için yukarıda bahsedilen problemleri eğrilerin derecesine göre anlamaya, bu konudaki temel sonuçları sistematik olarak sunmaya çalışacağız. Ana hatlarıyla özetlemek gerekirse: Birinci bölümde tezin içeriğinin anlaşılması için gerekli olan cebirsel geometrinin afin/projektif uzay, afin/projektif cebirsel varyeteler ile ilgili temel bazı tanım, teorem ve örneklerine yer verilmiştir. İkinci bölümde cebirsel varyetelerin özel bir hali olan reel cebirsel düzlemsel eğriler ile ilgili elde edilmiş sonuçlar sunulmuş ve bu tür eğrileri üretme yöntemleri hakkında bilgi verilmiştir. Son bölümde, ikinci bölümde verilen sonuçların kompleks versiyonu ile ilgili bazı sonuçlar sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Afin uzay, Projektif uzay, Afin/projektif cebirsel varyeteler, Reel cebirsel düzlemsel eğriler, Reel cebirsel düzlemsel eğrilerin topolojisi.



"Canum aileme"

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın plan, proje ve araştırmasında değerli bilgi, yorum ve desteklerini her daim fedakarca esirgemeyen değerli hocam Gaziantep Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dr. Öğr. Üyesi Remziye Arzu Zabun Demir'e sonsuz teşekkürlerimi saygı ve minnetle arz ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	i
ÖZET	ii
İTHAF	iii
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
TABLolar LİSTESİ.....	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ.....	xii
SEMBOLLER LİSTESİ.....	xiii
KISALTMALAR LİSTESİ.....	xiv
BÖLÜM 1 CEBİRSEL VARYETELER	1
1.1 Afin Varyeteler.....	1
1.2 Projektif Varyeteler	5
1.2.1 Projektif Uzak	5
1.2.2 Projektif Varyeteler ve Zariski Topolojisi	6
1.2.3 Projektif Uzakın Açık Örtüsü	7
1.2.4 Homojenleştirme ve Projektif Kapanış	8
BÖLÜM 2 REEL CEBİRSEL EĞRİLERİN TOPOLOJİSİ.....	11
2.1 Reel Cebirsel Düzlemsel Eğriler	11
2.2 Projektif Düzlemin 1 –Boyutlu Alt Uzaylarının Topolojisi.....	12
2.3 Bezout Teoremi ve Harnack’ın Eşitsizliği	14
2.4 Derecesi $d \leq 5$ olan Düzlem Eğrileri	15
2.5 Non-singular Düzlem Eğrileri Oluşturmanın Klasik Yöntemi.....	17
2.6 Harnack’ın Eğrileri.....	19
2.7 Reel Projektif Düzlem Eğrilerinin Uzakı	22
2.7.1 Deformasyon (Rigid İzotopi) Sınıflandırma Problemi	23

2.8 Teorem 2.6.2'nin İspatının Tamamlanması	25
2.9 Harnack M -Eğrilerin İzotopi Sınıfları	26
2.10 Hilbert Eğrileri	27
2.11 Ragsdale'in Katkıları	29
2.12 Harnack ve Hilbert Yöntemlerinin Genelleştirilmesi.....	31
2.13 Gudkov'un Katkıları.....	34
BÖLÜM 3 REEL CEBİRSEL EĞRİLERE KOMPLEKS AÇIDAN BAKIŞ....	36
3.1 Reel Eğrilerin Kompleks Topolojisi.....	36
3.2 Kompleks Bakış Açısıyla Klasik Çözme Yöntemi	38
3.3 Eğrilerin Kompleks Gösterimi	41
3.4 Rokhlin'in Kompleks Yönlendirme Formülü	42
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ.....	45

TABLÖLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 2.1 Derecesi $d \leq 5$ olan non-singular düzlem eğrilerinin izotopi sınıfları.....	17
Tablo 2.2 Derecesi d olan Harnack M -eğrilerin izotopi sınıfları.....	27
Tablo 2.3 Derecesi d olan Hilbert M -eğrilerin izotopi sınıfları.....	29
Tablo 2.4 Altıncı derecesi reel düzlem eğrisinin 56 izotopi sınıfı	34



ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1.1 $A_{\mathbb{R}}^2$ 'de eliptik eğriler.....	2
Şekil 2.1 İki ovalin birbirine göre konumu.....	13
Şekil 2.2 Derecesi en az 15 olan bir düzlem eğrisi.....	14
Şekil 2.3 Tekilliği olan üçüncü dereceden bir eğrinin çözülmesi.....	15
Şekil 2.4 Tekilliği olan dördüncü dereceden bir eğrinin çözülmesi.....	16
Şekil 2.5 Tekilliği olan beşinci dereceden bir eğrinin çözülmesi.....	16
Şekil 2.6 Klasik çözme yöntemi ile elde edilen X eğrisi.....	18
Şekil 2.7 Beşinci dereceden non-singular M -eğrisinin elde edilmesi.....	20
Şekil 2.8 Yardımcı eğri B_d 'nin inşası.....	21
Şekil 2.9 Aynı deformasyon sınıfında bulunmayan 5. dereceden iki tane eğri.....	23
Şekil 2.10 Derecesi $d \leq 5$ olan M -eğriler.....	26
Şekil 2.11 Dereceleri 4 ve 6 olan eğrilerin Hilbert yöntemi ile inşası.....	28
Şekil 2.12 Dereceleri 3 ve 5 olan eğrilerin Hilbert yöntemi ile inşası.....	28
Şekil 2.13 Gudkov'un 5. dereceden yardımcı eğrisi.....	32
Şekil 2.14 Altıncı dereceden Harnak'ın M -eğri inşası.....	33
Şekil 2.15 Altıncı dereceden Hilbert'in M -eğrisi inşası (en alttaki).....	33
Şekil 3.1 Kompleks açıdan klasik çözme yöntemi.....	38
Şekil 3.2 Kesişen iki reel doğrunun $\mathbb{RP}^2$ ve $\mathbb{CP}^2$ 'de çözülmesi (soldan sağa).....	39
Şekil 3.3 Kompleks yönlendirmesi ile gösterilen kübik eğriler.....	40
Şekil 3.4 Kompleks yönlendirmesi ile gösterilen dördüncü dereceden eğri.....	41
Şekil 3.5 İnjektif ikililerin işareti.....	41
Şekil 3.6 Tek taraflı eğrinin ovallerinin işareti.....	41

SEMBOLLER LİSTESİ

A_k^n	k cismi üzerinde n -boyutlu afin uzay
$k[x_1, \dots, x_n]$	n değişkenli polinomlar halkası
$\overline{X}$	X kümenin kapanışı
$\mathbb{P}_k^n$	k cismi üzerinde n -boyutlu projektif uzay
$\mathbb{RP}^n$	n -boyutlu reel projektif uzay
$\mathbb{CP}^n$	n -boyutlu kompleks projektif uzay
$[x_0:x_1:\dots:x_n]$	n -boyutlu projektif uzayda bir eleman
$Gör(\theta)$	θ fonksiyonun görüntü kümesi
$\mathbb{R}C$	C eğrinin reel kısmı
$\mathbb{C}C$	C eğrinin kompleks kısmı
$H_1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}_2)$	$\mathbb{RP}^2$ nun $\mathbb{Z}_2$ katsayılı 1. homoloji grubu
∞	Sonsuzda bir nokta
l_∞	Sonsuzda bir doğru
$\mathbb{RP}_-^2$	$\mathbb{RP}^2$ da yönlendirilemez parça
$\mathbb{RP}_+^2$	$\mathbb{RP}^2$ da yönlendirilebilir parça
$\chi(A)$	A uzayın Euler karakteristiği
$conj$	$\mathbb{P}_k^n$ üzerindeki anti-holomorfik involisyon

KISALTMALAR LİSTESİ

S^1	Çember
S^2	Küre
D^2	Daire
$f, g, h, \dots$	Bir polinom
$F, G, H, \dots$	Bir homojen polinom
$hom_i(F)$	f polinomun x_i değişkenine göre homojenleştirilmesi
$dehom_i(F)$	F homojen polinomun x_i değişkenine göre homojenleştirilmemesi
NC_d	Tekilliği olmayan d . dereceden eğrilerin uzayı
SC_d	Tekilliği olan d . dereceden eğrilerin uzayı
J	Tek taraflı bileşen

BÖLÜM 1

CEBİRSEL VARYETELER

1.1 Afin Varyeteler

Bu bölümde $k = \mathbb{R}$ veya $k = \mathbb{C}$ 'dir. Her bir bileşeni k 'nın elemanı olmak üzere, bütün sıralı n 'lilerden oluşan kümeye, yani $\{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in k\}$, k üzerinde n -boyutlu *afin uzay* denir, ve A_k^n ya da karışıklığa mahal vermeksizin kısaca A^n ile göstereceğiz. A^n 'nin bir elemanı $p = (x_1, \dots, x_n) \in A^n$ *nokta* olarak adlandırılırken x_i 'ler de p 'nin koordinatları olarak adlandırılır. A^n afin uzayın, $\mathbb{R}^n$ (ya da $\mathbb{C}^n$)'den farkı herhangi metrik veya vektör uzayı özelliklerini göz önünde bulundurmamaktır. Yani üzerinde herhangi bir cebirsel yapının tanımlı olmamasıdır. $k[x_1, \dots, x_n]$ notasyonu ile k cismi üzerindeki n değişkenli polinomlar halkasını gösterelim. Kolaylıkla görüldüğü gibi bir polinom $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ her zaman A_k^n 'den k 'ya bir fonksiyondur. Bu nedenle f 'nin sıfırlarının kümesi $Z(f)$ 'den bahsedebiliriz. Genel olarak $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ için

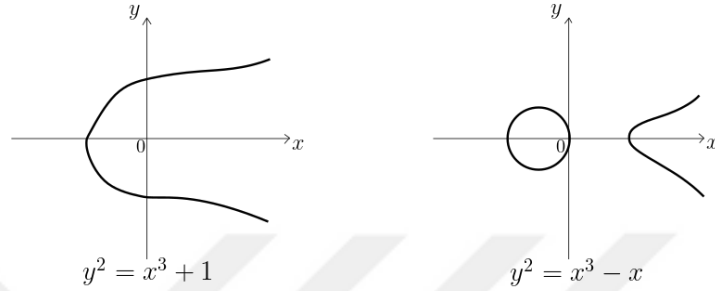
$$Z_k(S) = Z(S) = \{p \in A_k^n : \forall f \in S \text{ için } f(p) = 0\}$$

Şeklindeki bir kümeye *afin (reel veya kompleks) cebirsel küme* denir. Eğer $S = \{f_1, \dots, f_s\}$ sonlu ise $Z(f_1, \dots, f_s)$ notasyonunu kullanacağız. Özel olarak, herhangi bir d . dereceden $f \in k[x, y]$ polinomu için $Z(f)$ kümesine d . *dereceden afin (reel veya kompleks) cebirsel düzlem eğrisi* denir.

Örnek 1.1.1

- i. Her $p = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ için $Z(x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n) = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ olduğundan A^n 'de tek nokta kümesi cebirsel kümedir.
- ii. Bilindiği gibi $A_{\mathbb{R}}^2$ 'de geometrik olarak 4 farklı koni kesiti, yani bir çift taraflı koni ile bir düzlemin kesişimi, mevcuttur: çember, elips, parabol ve hiperbol. Bunların herbiri iki değişkenli 2. dereceden bir polinomu sağlayan reel noktalar kümesi olup birer (afin) reel cebirsel kümedir.

iii. $4a^3 + 27b \neq 0$ sağlayan her $a, b \in \mathbb{R}$ için $f = y^2 - x^3 - ax - b$ polinomunun sıfırlarının kümesi $Z(f) \subset A^2$ *eliptik eğri* olarak adlandırılır. $Z_{\mathbb{C}}(f)$ kümesi, üzerinden bir nokta çıkarılmış torustur (Yani $S^1 \times S^1 \setminus \{p\}$). Fakat $Z_{\mathbb{R}}(f)$ kümesi Şekil 1.1'de gösterilen eğrilerden bir tanesine homeomorfiktir.



Şekil 1.1 $A_{\mathbb{R}}^2$ 'de eliptik eğriler

iv. $C = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in k\} \subset A^3$ kümesi $Z(x^2 - y, x^3 - z)$ kümesine eşit olduğu için bir afin varyetedir ve bu varyete *twisted kübik eğri* olarak adlandırılır.

v. Girdileri k 'nin elemanı olan $n \times n$ lik matrisler kümesini $A_k^{n^2}$ ile gösterelim. O zaman $SL(n, k) = \{B \in A_k^{n^2} \mid \det B = 1\}$ kümesi $Z(\det - 1)$ 'ye eşit olduğundan cebirsel bir kümedir.

vi. $y = e^x$ eğrisi cebirsel bir eğri değildir; çünkü bu eğri $y = 1$ doğrusuyla sonsuz noktada kesişir. Bu noktalar, her $n \in \mathbb{Z}$ için $(2i\pi n, 1)$ 'dir. Benzer şekilde $y = \sin x$ eğrisi de cebirsel değildir; çünkü bu eğrinin $y = 0$ doğrusuyla kesişimi $\{(2\pi n, 0) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ kümesidir.

Teorem 1.1.1 $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ ve I , S 'nin elemanları tarafından üretilen ideal olsun. O zaman $Z(S) = Z(I)$ 'dir. ■

Polinomlar halkası Noetheriandır, yani her ideali sonlu sayıda üretece sahiptir. Bu bilgi ve Teorem 1.1.1 kullanılarak aşağıdaki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Teorem 1.1.2 A^n 'de herhangi bir X cebirsel kümesi sonlu sayıda polinomun sıfırların kümesidir. Yani, $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ için $X = Z(f_1, \dots, f_m)$ 'dir. ■

Teorem 1.1.3 $n \geq 0$ olsun. O zaman aşağıdakiler sağlanır.

- a) $\emptyset$ ve A^n cebirsel kümedir.
- b) İki afin cebirsel kümenin birleşimi de cebirsel kümedir.
- c) Herhangi bir afin cebirsel küme ailesi $\{X_\alpha \subset A^n : \alpha \in \Gamma\}$ için $\bigcap X_\alpha$ 'de cebirsel kümedir.

İspat. $Z(1) = \emptyset$ ve $Z(0) = A^n$ olduğundan a)'nın doğruluğu görülür. b) için X ve Y iki tane afin cebirsel küme olsun, yani $X = Z(I_1)$ ve $Y = Z(I_2)$ olacak şekilde $k[x_1, \dots, x_n]$ 'nin I_1 ve I_2 sonlu alt kümesi vardır. O zaman $X \cup Y = Z(I_1 I_2)$ olduğu kolaylıkla gösterilir. $\{X_\alpha = Z(S_\alpha) \mid \alpha \in \Gamma\}$ afin cebirsel kümelerin herhangi bir ailesi olsun. O zaman $\bigcap X_\alpha = Z(\bigcup S_\alpha)$ eşitliği gösterilerek c) sonucuna ulaşılır. ■

Teorem 1.1.4 $A_{\mathbb{R}}^2$ 'de bütün reel cebirsel kümeler cebirsel eğridir.

İspat. $X \subset A_{\mathbb{R}}^2$ reel cebirsel küme olsun. O halde $X = Z_{\mathbb{R}}(f_1, \dots, f_s)$ olacak şekilde $f_1, \dots, f_s \in \mathbb{R}[x, y]$ polinomları vardır. $X = Z_{\mathbb{R}}(f_1, \dots, f_s) = Z_{\mathbb{R}}(f_1) \cap \dots \cap Z_{\mathbb{R}}(f_s) = Z_{\mathbb{R}}(f_1^2 + \dots + f_s^2)$ olduğundan X bir cebirsel eğridir.

Tanım 1.1.1 Cebirsel kümelerin afin uzaydaki tümleyenlerini açık küme olarak kabul edersek, bu açık kümelerin oluşturduğu kümenin A^n üzerinde bir topoloji oluşturduğu Teorem 1.1.2'den yararlanılarak gösterilir. Bu topolojiye A^n üzerinde Zariski topolojisi denir. Zariski topolojisi cebirsel geometrinin amacı için daha uygundur, fakat bu topoloji Öklid topolojisinden oldukça farklıdır çünkü $n > 0$ için Zariski topolojisi Hausdorff değildir.

Uyarı 1.1.1 A^n 'nin Zariski topolojisine göre açık kümelerinin formatı aşağıdaki gibidir: $U^{a\text{çık}} \subseteq A^n$ olsun. O zaman $A^n \setminus U$ kapalı kümedir. O halde $A^n \setminus U = Z(f_1, \dots, f_m)$ olacak şekilde $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ vardır. O halde

$$A^n \setminus U = Z(f_1, \dots, f_m) = Z(f_1) \cap \dots \cap Z(f_m)$$

ve dolayısıyla $U = A^n \setminus Z(f_1) \cup \dots \cup A^n \setminus Z(f_m)$ olur.

Örnek 1.1.2 A^0 (yani tek nokta) üzerindeki Zariski topolojisi olabilecek yegane topolojidir. Afine doğru (A^1) üzerindeki Zariski topolojisi sonlu tümleyenler topolojisidir. Yani açık kümeleri $\emptyset$, A^1 ve sonlu kümelerin tümleyenidir.

Tanım 1.1.2 X bir topolojik uzay ve Y , X 'in boştan farklı alt kümesi olsun. Eğer Y , kendisinin kapalı iki öz alt kümesinin birleşimi olarak yazılamıyor ise Y kümesine *indirgenemez* küme denir. Boş kümeyi indirgenebilir olarak kabul ediyoruz. İndirgenemez afin cebirsel kümeye (alt uzay topolojisi ile düşünüldüğünde) *afin cebirsel varyete* (ya da kısaca *afin varyete*) denir.

Örnek 1.1.3 Eğer $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ indirgenemez polinom ise $X = Z(f)$ 'de indirgenemez olup bir cebirsel varyetedir.

Her $X \subset A^n$ için

$$I(X) = \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : \forall p \in X \text{ için } f(p) = 0\}$$

tanımlı kümeye X 'in *ideali* denir. Eğer X cebirsel küme ise $I(X)$ radikal idealdir.

Teorem 1.1.5

- a) $\forall I_1, I_2 \subset k[x_1, \dots, x_n]$ için $I_1 \subseteq I_2$ ise $Z(I_2) \subseteq Z(I_1)$.
- b) $\forall X_1, X_2 \subset A^n$ için $X_1 \subseteq X_2$ ise $I(X_2) \subseteq I(X_1)$.
- c) $\forall X_1, X_2 \subset A^n$ için $I(X_1 \cup X_2) = I(X_1) \cap I(X_2)$.
- d) $\forall S \subset k[x_1, \dots, x_n]$ radikal ideali için $I(Z(S)) = S$ 'dir.
- e) $\forall X \subseteq A^n$ için $Z(I(X)) = \overline{X}$. Burada $\overline{X}$, X 'in Zariski topolojisine göre kapanışıdır. ■

Teorem 1.1.6 Afin cebirsel kümeler kompaktır. Yani X afin cebirsel kümesinin her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahiptir. ■

Teorem 1.1.7 $X \subset A^n$ 'in boyutu $n - 1$ olan cebirsel bir varyete olabilmesi için gerek ve yeter koşul X 'in sabit olmayan indirgenemez bir tek $f \in k[x_1, \dots, x_n]$ polinomun sıfırlarının kümesi, yani $X = Z(f)$, olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$) X bir cebirsel bir küme olduğu için sonlu bir $I \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ için $X = Z(I)$ 'dir. Varsayalım ki, I kümesi lineer bağımsız f, g gibi iki tane polinom içersin. O zaman $f = 0$ ve $g = 0$ eşitlikleri toplam değişken sayımızı 2 azaltır. Yani, X 'in boyutu en fazla $n - 2$ olur. Bu bizi çelişkiye götürür. O halde I sadece bir polinom içermelidir.

X varyete (yani indirgenemez) olduğundan bu polinom da indirgenemezdir. ($\Leftrightarrow$) Bu kısım aşıkardır. ■

1.2 Projektif Varyeteler

1.2.1 Projektif Uzak

A_k^{n+1} 'de 0 dan (orijinden) geçen doğrular kümesine k cismi üzerinde n -boyutlu projektif uzak denir ve $\mathbb{P}_k^n$ ile gösterilir. Eğer $k = \mathbb{R}$ ise $\mathbb{P}_k^n$ 'ye n -boyutlu reel projektif uzak denir ve $\mathbb{RP}^n$ ile gösterilir. Eğer $k = \mathbb{C}$ ise $\mathbb{P}_k^n$ 'ye n -boyutlu kompleks projektif uzak denir ve $\mathbb{CP}^n$ ile gösterilir. A_k^{n+1} 'de orijinden geçen her bir l doğrusu, üzerinde yaşayan sıfırdan farklı herhangi bir $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ noktası tarafından tek türlü belli olduğundan bu doğruyu $[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{P}^n$ ile göstereceğiz. Bu gösterime *homojen koordinatlar* denir. Dikkat edilirse; her $\lambda \in k \setminus \{0\}$ için $(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \in l$ 'dir. Dolayısıyla $[x_0 : \dots : x_n] = [\lambda x_0 : \dots : \lambda x_n]$ 'dir. $A_k^{n+1} \setminus \{0\}$ kümesi

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (y_0, \dots, y_n) \Leftrightarrow \text{Öyle bir } \lambda \in k \setminus \{0\} \text{ için } x_i = \lambda y_i$$

tanımlı $\sim$ denklik bağıntısı ile düşünüldüğünde

$$\mathbb{P}_k^n = (A_k^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim \text{'dir.}$$

Örnek 1.2.1.1 $\mathbb{RP}^1 = \{A_{\mathbb{R}}^2 \text{ de orijinden geçen doğrular} \}$ kümesi, yani reel projektif doğrusu, çembere homeomorfiktir; çünkü $l := \{y = 1\}$ doğrusunun noktaları ile $\mathbb{RP}^1 \setminus \{x - \text{ekseni}\}$ 'nin noktaları arasında birebir eşleme vardır. l ve x -ekseni birbirine paralel olduğu için $A_{\mathbb{R}}^2$ 'de keşismeleri mümkün değildir. Bunları keşim noktasına sonsuzda nokta diyelim ve ∞ ile gösterelim. O halde $\mathbb{RP}^1 = l \cup \{\infty\} \cong \mathbb{R}^1 \cup \{\infty\} \cong S^1$ olur. $\mathbb{CP}^1$, kompleks projektif doğrusu, küreye (S^2) homeomorfiktir. Bunu görmek için $\mathbb{CP}^1 = \{[z : w] \mid (z, w) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$ tanımını kullanalım. O halde

$$\mathbb{CP}^1 = \begin{cases} [1 : w/z] & \text{eğer } z \neq 0 \\ [0 : 1] & \text{eğer } z = 0 \end{cases} \cong \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

olur.

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ ile S^2 'nin birbirine homeomorfik olduğu stereografik izdüşümden kolaylıkla görülür.

Örnek 1.2.1.2 $\mathbb{RP}^2 = \{A_{\mathbb{R}}^3 \text{ de orijinden geçen doğrular} \}$ kümesini, yani reel projektif düzlemini, anlamaya çalışalım. $\pi := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 1\}$ düzleminin noktaları ile $\mathbb{RP}^2 \setminus \{xy - \text{düzlemindeki orijinden geçen doğrular} \}$ kümesinin noktaları arasında birebir eşleme vardır. xy -düzleminde yaşayan ve orijinden geçen her doğru π düzlemini sonsuzda bir noktada kestiği varsayalım. Dikkat edilirse bu sonsuzdaki noktaların hepsi bir doğru üzerinde yaşar. Bu doğruya sonsuzda doğru diyelim ve l_{∞} ile gösterelim. O halde $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup l_{\infty}$ olur.

1.2.2 Projektif Varyeteler ve Zariski Topolojisi

Derecesi d olan bir $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinomu eğer her $\lambda \in k^* = k \setminus \{0\}$ için

$$f(\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d f(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

eşitliğini sağlıyorsa f 'ye *homojen polinom* denir. Homojen polinomlar tarafından üretilen $k[x_0, \dots, x_n]$ 'nin bir idealine *homojen ideal* denir.

Örnek 1.2.2.1 $f(x, y) = x^5 + 2x^3y^2 - 9xy^4$ iki değişkenli 5. dereceden homojen bir polinomdur; fakat $g(x, y) = x^5 + 2x^4 - 9y^3 + xy + 6$ polinomu homojen değildir.

Notasyon 1.2.2.1 Bir $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ polinomunun homojen olduğunu vurgulamak için küçük harf yerine F gibi büyük harfler kullanacağız.

$S \subseteq k[x_0, \dots, x_n]$ homojen polinomlardan oluşan bir alt küme olsun.

$$Z_k(S) = Z(S) = \{p \in \mathbb{P}^n : \forall F \in S \text{ için } F(p) = 0\}$$

tanımlı kümeye *projektif cebirsel küme* denir. Eğer $S = \{F_1, \dots, F_s\}$ sonlu ise $Z(F_1, \dots, F_s)$ notasyonunu kullanacağız. Özel olarak, herhangi bir d 'inci dereceden homojen $F \in k[x, y]$ polinom için tanımlı $Z(F)$ kümesine *d. dereceden projektif cebirsel düzlem eğrisi* denir.

Uyarı 1.2.2.1 Projektif uzaylarda çalışırken homojen polinomlara ihtiyacımız var; aksi halde homojen olmayan bir $f(x, y) = y^2 - 4x$ polinomu ve $[1:2] = [2:4] \in \mathbb{RP}^2$ noktası düşünüldüğünde $f(1,2) = 0 \neq 8 = f(2,4)$ çelişkisi elde edilir.

Afin durumda olduğu gibi $\emptyset = Z(1)$ ve $\mathbb{P}^n = Z(0)$ projektif cebirsel kümedir, ve $k[x_0, \dots, x_n]$ Noetherian halkadır. Teorem 1.1.2 ve Teorem 1.1.3b)-c)'de verilen sonuçlar projektif cebirsel kümeler için de geçerlidir.

Tanım 1.2.2.1 Projektif cebirsel kümelerin projektif uzaydaki tümleyenlerini açık küme olarak kabul edersek, bu açık kümelerin oluşturduğu küme $\mathbb{P}^n$ üzerinde bir topolojidir, ve bu topolojiye $\mathbb{P}^n$ üzerinde Zariski topolojisi denir.

1.2.3 Projektif Uzayın Açık Örtüsü

$\mathbb{P}_k^n$ 'nin iki önemli alt uzayını tanıyalım: her i için

$$H_i = Z(x_i) = \{ [x_0 : \dots : x_n] \mid x_i = 0 \}$$

olsun. Burada H_i sonsuzdaki hiperyüzey olarak adlandırılır. $U_i = \mathbb{P}_k^n \setminus H_i$ kümesine i 'inci koordinat sistemi denir. Dikkat edilirse; her i için $U_i, \mathbb{P}_k^n$ 'nin açık kümesidir.

A_k^n 'den U_i 'ye $\psi_i: (x_1, \dots, x_n) \mapsto [x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_n]$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon Zariski topolojisine göre bir homeomorfizmadır. Bu fonksiyonun tersi $\psi_i^{-1}: [x_0 : \dots : x_n] \mapsto (\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i})$ 'dir. Böylece biz A_k^n 'yi $\mathbb{P}_k^n$ 'nin bir alt kümesi olarak düşünebiliriz. A_k^n 'ye $\mathbb{P}_k^n$ 'nin *afin parçası* denir.

Benzer şekilde $\phi_i: [x_0 : \dots : x_{i-1} : 0 : x_{i+1} : \dots : x_n] \mapsto [x_0 : \dots : x_{i-1} : x_{i+1} : \dots : x_n]$ tanımlı fonksiyon ile H_i 'in $\mathbb{P}_k^{n-1}$ 'e homeomorfik olduğu görülebilir. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Teorem 1.2.3.1 $\mathbb{P}_k^n = A_k^n \sqcup \mathbb{P}_k^{n-1}$ 'dir. ■

Sonuç 1.2.3.1 $\mathbb{P}_k^n$ afin uzaylarla örtülür. Yani $\mathbb{P}_k^n = A^n \cup A^{n-1} \cup \dots \cup A^0$ 'dir. (Burada $A^0 = \{[0 : 0 : \dots : 0 : 1]\}$ 'dir.) ■

Örnek 1.2.3.1 Daha önce afin düzlemde iki değişkenli ikinci dereceden bir polinomun reel çözüm kümesi için boştan farklı 4 olası durum olduğu belirtilmişti (Örnek 1.1.1-(ii)'ye bakınız.) Reel projektif düzlemde bu olasılıklar sadece bir tanedir ve o da topolojik olarak çemberdir çünkü ikinci dereceden üç değişkenli homojen bir polinom en genel olarak

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz$$

şeklinde ifade edilir. Uygun bir koordinat değişikliğiyle bu polinom

$$F(x, y, z) = \pm x^2 \pm y^2 \pm z^2$$

şeklinde yazılır. Genelliği bozmaksızın $F(x, y, z)$ için aşağıdaki dört durumu düşünebiliriz;

I. Durum: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Eğer $z \neq 0$ ise $\{F = 0\}$ çözüm kümesi reel afin uzayda boş kümedir. Yani $U_z \cap Z_{\mathbb{R}}(F) = \emptyset$. Eğer $z = 0$ ise $x^2 + y^2 = 0$ olup $x = y = 0$ 'dir. Fakat $[0:0:0] \notin \mathbb{P}^2$. O halde sonsuzdan nokta gelmez. Yani $Z_{\mathbb{R}}(F) = \emptyset$ 'dir.

II. Durum: $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$. Eğer $z \neq 0$ ise $\{F = 0\}$ çözüm kümesi afin uzayda bir çemberdir. Yani $U_z \cap Z_{\mathbb{R}}(F) = S^1$. Eğer $z = 0$ ise $x^2 + y^2 = 0$ olup $x = y = 0$ 'dir. Fakat $[0:0:0] \notin \mathbb{P}^2$. O halde sonsuzdan nokta gelmez. Yani $Z_{\mathbb{R}}(F)$ bir çemberdir.

III. Durum: $F(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2$. Eğer $z \neq 0$ ise $\{F = 0\}$ çözüm kümesi afin uzayda bir hiperboldur. Eğer $z = 0$ ise $x^2 - y^2 = 0$ olup $x = \pm y$ 'dir. O halde $[x:x:0] = [1:1:0]$ ve $[x:-x:0] = [1:-1:0]$ sonsuzda iki nokta mevcuttur. Yani $H_z \cap Z_{\mathbb{R}}(F) = \{[1:1:0], [1:-1:0]\}$. O halde $Z_{\mathbb{R}}(F)$ topolojik olarak bir çemberdir.

IV. Durum: $F(x, y, z) = -x^2 - y^2 - z^2$. Fakat bu durum I. Durum ile aynıdır.

1.2.4 Homojenleştirme ve Projektif Kapanış

Her $X \subset \mathbb{P}^n$ için

$$I(X) = \{f \in k[x_0, \dots, x_n] : f \text{ homojen ve } \forall p \in X \text{ için } f(p) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye X 'in *homojen ideali* denir. Eğer X cebirsel bir küme ise bu ideal homojen radikal idealdir.

Tanım 1.2.4.1 $f \in k[x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n]$ derecesi d olan bir polinom olsun. f 'den yararlanılarak elde edilen

$$F(x_0, \dots, x_i, \dots, x_n) = x_i^d f\left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right)$$

homojen polinoma f 'nin (x_i koordinatına göre) *homojenleştirilmesi* denir ve $hom_i(f) = F$ ile gösterilir.

Örnek 1.2.4.1 $f(x, y) = 2 + x + xy - x^3$ polinomu homojen olmayıp z 'ye göre homojenleştirilmesi $F(x, y, z) = 2z^3 + xz^2 + xyz - x^3$ 'dir.

Tanım 1.2.4.2 $F \in k[x_0, \dots, x_n]$ derecesi d olan homojen bir polinom olsun. Herhangi sabit bir $i \in \{0, \dots, n\}$ için F 'den yararlanılarak elde edilen

$$f(x_0/x_i, x_1/x_i, \dots, x_{i-1}/x_i, x_{i+1}/x_i, \dots, x_n/x_i) = \frac{1}{x_i^d} F(x_0, x_1, \dots, x_n)$$

homojen olmayan polinoma F 'nin (x_i koordinatına göre) *homojenleştirilmemesi* denir ve $dehom_i(F) = f_i$ ile gösterilir. Denk olarak herhangi bir $i \in \{0, \dots, n\}$ için

$$f(x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) = F(x_0, x_1, \dots, 1, \dots, x_n)$$

olarak tanımlanır.

Örnek 1.2.4.2 $F(x, y, z) = x^3 + xz^2 + xyz$ için

$$dehom_z(F) = f(x, y) = x^3 + x + xy \text{ dir.}$$

Teorem 1.2.4.1

- a) $F_1, \dots, F_r \in k[x_0, \dots, x_n]$ homojen polinomlar olmak üzere $X = Z(F_1, \dots, F_r) \subset \mathbb{P}^n$ ve her j için $f_j = dehom_i(F_j)$ olsun. O zaman $\psi_i^{-1}(X \cap U_i) = Z(f_1, \dots, f_r) \subset A^n$ 'dir.
- b) $S \subseteq k[x_1, \dots, x_n]$ alt kümesi için $Y = Z(S) \subseteq A^n$ ve $hom_0(S) = \{hom_0(f) \mid f \in S\}$ olsun. O zaman $\overline{\psi_0(Y)} = Z(hom(S))$. ■

$X \subset A^n$ afin cebirsel varyete olsun. Bölüm 1.2'den n -boyutlu afin uzayının $\mathbb{P}^n$ 'nin U_0 açık kümesine homeomorfik olduğunu biliyoruz. O halde X 'in $\mathbb{P}^n$ 'de ki kapanışı $\overline{X}$ 'dan bahsedebiliriz. Bu kapanışa X 'in *projektif kapanışı* denir.

Teorem 1.2.4.2 $X = Z(S) \subseteq A^n$ afin cebirsel varyete ve $\bar{X}$, X 'in projektif kapanışı olsun. O zaman $I(\bar{X})$ ideali $hom_0(I(X))$ kümesinin elemanları tarafından üretilir. Anlaşılacağı üzere, $I(X)$ 'in üreteçleri $f_1, \dots, f_k$ ise $I(\bar{X})$ 'in üreteçleri $hom_0(f_1), \dots, hom_0(f_k)$ olmak zorunda değildir (Örnek 1.2.4.3'e bakınız).

Örnek 1.2.4.3 $X = Z(x^2 - y, x^3 - z) \subset A^3$ twisted kübik eğri olsun (tanımı için Örnek 1.1.1-iv'e bakınız.) X 'in $\mathbb{P}^3$ 'teki projektif kapanışına *twisted kübik eğri* denir, ve $\bar{X} \neq Z(x^2 - yw, x^3 - zw^2) \subset \mathbb{P}^3$; çünkü bilindiği üzere twisted kübik eğri $\theta([x:y]) = [x^3:x^2y:xy^2:y^3]$ tanımlı $\theta:\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$ fonksiyonun görüntü kümesine, $Gör(\theta)$, eşittir. $\mathbb{P}^3$ uzayını $[a:b:c:d]$ homojen koordinatlar ile birlikte düşünelim. O zaman görüntü kümesinin $Z(ad - cb, b^2 - ac, c^2 - bd)$ 'ye eşit olduğu kolaylıkla görülür. A^3 uzayını $U_0 = \{[1:b:c:d]\} \subset \mathbb{P}^3$ ile eşleştirelim. O zaman $X \subset Gör(\theta) \subset \mathbb{P}^3$ ve $Gör(\theta) = X \cup \{[0:0:0:1]\}$ 'dir. $Gör(\theta)$ kümesi $\mathbb{P}^3$ 'te kapalı olduğundan ya $X = \bar{X}$ ya da $\bar{X} = Gör(\theta)$ 'dir. İlk durum için X 'in bütün noktalarında sıfırlanan, ama $[0:0:0:1]$ sonsuzdaki noktada sıfırlanmayan bir homojen polinomun var olması gereklidir. Fakat bu mümkün değildir: $f(x, y, z, w)$ d . dereceden homojen bir polinom olsun. Her $p = [1:t:t^2:t^3] \in X$ noktasında $f(p) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul f 'nin w^d terimine sahip olmamasıdır. O halde $f([0:0:0:1]) = 0$ olmak zorundadır. Sonuç olarak $\bar{X} = Gör(\theta)$

BÖLÜM 2

REEL CEBİRSEL EĞRİLERİN TOPOLOJİSİ

2.1 Reel Cebirsel Düzlemsel Eğriler

Üç değişkenli reel katsayılı d 'inci dereceden homojen bir polinomun sıfırlarının kümesine *d 'inci dereceden reel projektif cebirsel düzlem eğri* denir. Eğer C böyle bir f polinomunun belirlediği eğri ise o zaman $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ denklemini sağlayan reel noktalar kümesine *C 'nin reel kısmı* denir ve $\mathbb{R}C \subset \mathbb{RP}^2$ ile gösterilir. Benzer şekilde $f(x_0, x_1, x_2) = 0$ denklemini sağlayan kompleks noktalar kümesine *C 'nin kompleks kısmı* denir ve $\mathbb{C}C \subset \mathbb{CP}^2$ ile gösterilir.

Eğer $(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$ noktası f polinomun kritik noktası yani f 'nin kısmi türevlerini sıfır yapan nokta ise o zaman $[x_0 : x_1 : x_2] \in \mathbb{RP}^2$ noktasına C eğrisinin (*reel*) *tekil* (*singular*) *noktası* denir. Eğer C eğrisinin hiç tekil noktası yoksa C eğrisine *tekilliği olmayan* (*non-singular*) *eğri* denir.

Non-singular reel projektif cebirsel düzlem eğrilerin topolojisi dikkate alındığında iki problem karşımıza çıkar: *Topolojik problem* ve *İzotopik problem*. Topolojik problemden kastımız; $\mathbb{R}C$ kümesinin neye homeomorfik olduğunu belirlemektir. Bilindiği üzere tekilliği olmayan reel projektif düzlem eğrisinin reel noktalarının kümesi, yani reel kısmı, projektif düzlemin düzgün kapalı 1-boyutlu alt uzayıdır ve bu uzayın bileşenleri $\mathbb{RP}^2$ 'de topolojik olarak çemberdir (yani çembere homeomorfiktir). Bu nedenle $\mathbb{R}C$ 'nin topolojik sınıfı sahip olduğu parça sayısıyla belirlenir. A. Harnack [25], Teorem 2.6.1 ve Teorem 2.6.2 verilen önermeleri ispatlayarak tekilliği olmayan düzlemsel eğrilerin topolojik sınıflandırmasını tamamlamıştır. Yani ilk probleme cevap vermiştir.

İkinci problemden kastımız; $(\mathbb{RP}^2, \mathbb{R}C)$ ikilisinin topolojik olarak kaç farklı olasılığının olduğunu belirlemektir. Yani $\mathbb{R}C$ 'nin $\mathbb{RP}^2$ 'de topolojik olarak kaç farklı şekilde konumlanabileceğini belirlemektir.

Uyarı 2.1.1 Reel rojektif düzlemin herhangi bir homeomorfizması $\mathbb{RP}^2$ 'nin birim fonksiyonuna izotopik olduğu için ikinci problem gerçekten bir izotopi sınıflandırmasıdır.

Şu ana kadar bu izotopik probleme derecesi $d \leq 7$ olan eğriler için cevap verilmiştir. Bu problemlerin ispatı $d \leq 5$ dereceli eğriler için oldukça temel sonuçlara dayanmaktadır.

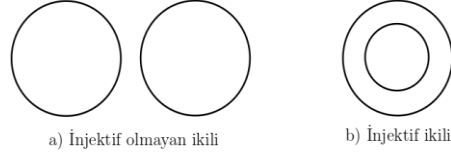
2.2 Projektif Düzlemin 1 –Boyutlu Alt Uzaylarının Topolojisi

Bu bölümde projektif düzlemin kapalı 1-boyutlu alt uzaylarına *topolojik düzlem eğrileri* ya da sadece *eğri* diyeceğiz. Daha önce bahsettiğimiz gibi bir eğrinin bileşenleri topolojik olarak çemberdir. Fakat $\mathbb{RP}^2$ 'de bir çember topolojik olarak *iki taraflı* ve *tek taraflı* olmak üzere ikiye ayrılır. İlk durumda çember $\mathbb{RP}^2$ 'de bir dairenin sınırıdır ve bu çembere *oval* denir. Bir ovalin $\mathbb{RP}^2$ 'deki tümleyeni biri daire ve diğeri Möbius şeridine homeomorfik olan iki bileşene sahiptir. Birincisine *ovalin içi* ikincisine *ovalin dışı* denir. Tek taraflı çember projektif doğruya homeomorfiktir ve $\mathbb{RP}^2$ 'den çıkarıldığında elimizde sadece daire kalır. Tek taraflı bileşen içeren topolojik eğriye *tek taraflı eğri* denir. Aksi halde *iki taraflı eğri* olarak adlandırılır.

Teorem 2.2.1 ([1]) Bir düzlem eğrisinde tek taraflı bileşenin var olması için gerek ve yeter koşul eğrinin $H_1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}_2)$ homoloji grubunun sıfırdan farklı elemanına karşılık gelmesidir. ■

Uyarı 2.2.1 Tek taraflı çember $H_1(\mathbb{RP}^2, \mathbb{Z}_2)$ homoloji grubunun sıfırdan farklı (self-kesişimi sıfır olmayan) elemanına karşılık geldiği için herhangi iki tek taraflı çember her zaman kesişir. Böylece non-singular bir düzlem eğrisi en fazla 1 tane tek taraflı bileşene sahip olabilir.

$\mathbb{RP}^2$ 'de ayrık iki oval Şekil 2.1'de görüldüğü gibi topolojik olarak iki farklı şekilde konumlanabilir: ovalerden biri diğerrinin dışında yaşayabilir (yani o oval diğerrinin tümleyeninin dış bileşenindedir) veya bunlardan biri diğerrinin tümleyeninin iç bileşenindedir. İkinci durumdaki ovalere *injektif ikili* denir.



Şekil 2.1 İki ovalin birbirine göre konumu

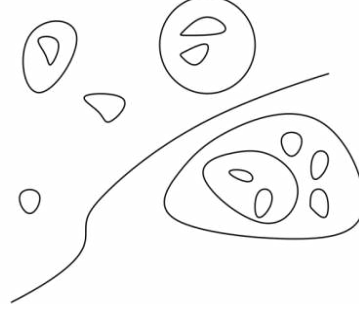
Tanım 2.2.1 Bir eğrinin ikişer ikişer injektif ikili olan h tane ovalerin kümesine *derinliği h olan yuva* denir.

X non-singular topolojik düzlem eğrisi olsun. $(\mathbb{RP}^2, X)$ ikilisinin topolojisi (yani X 'in izotopik sınıfı), X 'in tek taraflı bir bileşene sahip olup olmadığına ve her bir oval çiftinin birbirine göre konumuna göre belirlenir. Farklı topolojik $(\mathbb{RP}^2, X)$ çiftleri tanımlamak için O. Viro[1]'nın sunduğu aşağıdaki semboller kullanılacaktır.

- 1) Sadece tek bir ovalden oluşan eğri $\langle 1 \rangle$ sembolü ile gösterilirken, boş eğri $\langle 0 \rangle$ ile ve tek taraflı bağlantılı bir eğri $\langle J \rangle$ ile gösterilir.
- 2) $\langle A \rangle$ iki taraflı bir eğri olsun. O zaman bu eğrinin tüm ovaleri kapsayan yeni bir ovalin eklenmesiyle elde edilen eğri $\langle 1\langle A \rangle \rangle$ ile gösterilir.
- 3) $\langle A \rangle$ ve $\langle B \rangle$ ayrık iki eğri olsun. Varsayalım ki bu eğrilerden birinin ovalerinden hiç biri diğer eğrinin ovaleri içinde olmasın. O zaman bu iki eğrinin birleşimi olan eğri $\langle A \sqcup B \rangle$ ile gösterilir.
- 4) $\langle A \rangle$ bir eğri olsun. A 'nın n kere bir araya getirilerek elde edilen eğri $\langle A \sqcup A \sqcup \dots \sqcup A \rangle$ ya da $n \times A$ ile gösterilir, ayrıca $n \times 1$ 'i basitçe n olarak yazarız.

Bir topolojik düzlem eğrisi tasvir edilirken genellikle reel projektif düzlemin ya disk modelini kullanırız (yani bir diskin sınırındaki karşıt noktaları aynı görme) ya da projektif düzlemi $\mathbb{R}^2$ 'nin kompaktlaması olarak görürüz (yani $\mathbb{RP}^2 = \mathbb{R}^2 \cup l_\infty$). Bu tezde ikinci modele göre eğri tasviri yapılmaktadır.

Örnek 2.2.1 $\langle J \sqcup 2 \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 2 \rangle \sqcup 1\langle 3 \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle \rangle$ sembolüyle ifade edilen eğri Şekil 2.2'de verilmiştir.



Şekil 2.2 Derecesi en az 15 olan bir düzlem eğrisi

2.3 Bezout Teoremi ve Harnack'ın Eşitsizliği

Bu bölümde Bezout teoreminin en temel topolojik sonuçlarından Bezout'un kısıtlamaları ve Harnack'ın eşitsizliğinden bahsedilmektedir.

Teoremi 2.3.1 (Bezout'un teoremi) C_1 ve C_2 derecesi sırasıyla d_1 ve d_2 olan non-singular iki düzlem eğri olsun. Eğer $\mathbb{R}C_1 \cap \mathbb{R}C_2$ sonlu ise bu kesişimde en fazla $d_1 d_2$ tane nokta vardır. Ek olarak eğer $\mathbb{R}C_1$ ve $\mathbb{R}C_2$ transversal kesişiyorlarsa bu kesimdeki nokta sayısı ile $d_1 d_2$ sayısı 2 modülüne göre denktir, yani

$$\mathbb{R}C_1 \cap \mathbb{R}C_2 = d_1 d_2 \mod 2 \text{ dir. } \blacksquare$$

Sonuç 2.3.1([1]) Tekilliği olmayan d . dereceden düzlem eğrisinin tek taraflı olması için gerek ve yeter koşul d 'nin tek sayı olmasıdır. Ek olarak tek dereceli bir eğri her zaman boştan farklıdır.

İspat. Tekilliği olmayan d 'inci dereceden düzlem C eğrisinin iki taraflı olması için gerek ve yeter koşul $[C] \in H_1(\mathbb{R}P^2, \mathbb{Z}_2)$ sıfır olmasıdır. O halde $[C] \cap [J] = 0 \mod 2$. O halde C ile J eğrisinin ortak nokta sayısı çifttir. Burdan d çift sayı olmalıdır sonucuna ulaşırız. $\blacksquare$

Sonuç 2.3.2 ([1]) Tekilliği olmayan d . dereceden bir düzlem eğrisinin iki yuvasının birleşimindeki oval sayısı en fazla $\frac{d}{2}$ 'dir. Özel olarak, böyle bir eğrinin yuva derinliği en fazla $\frac{d}{2}$ 'dir ve eğer böyle bir eğri derinliği $\frac{d}{2}$ olan bir yuvaya sahipse yuva içinde olmayan bir ovale sahip olamaz.

İspat. Bunu ispatlamak için Bezout'un teoremini eğrimize ve yuvalardaki en içteki ovalerin içinden geçen bir doğruya uygulamak yeterlidir. ■

Sonuç 2.3.3 ([1]) C tekilliği olmayan d .dereceden bir düzlem eğrisi ve A aşağıdaki iki koşulu sağlayan C 'nin ovalerinden oluşan bir küme olsun:

- 1) A , 5 veya 5'ten daha az sayıdaki C 'nin yuvalarının birleşimindeki ovaleri içerir.
- 2) A , diğer bütün ovalerini içinde barındıran bir oval içermez.

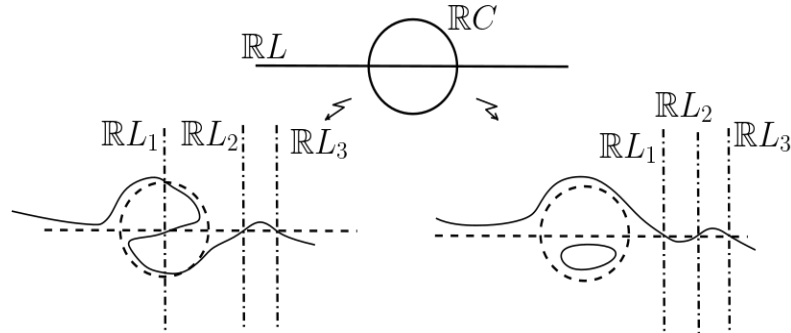
O zaman A kümesi en fazla d tane oval içerir.

İspat. Bu sonucu kanıtlamak için Bezout'un teoremini eğrimize ve yuvalardaki en içteki ovalerin içlerinden geçen bir koniğe uygulamak yeterlidir. ■

Sonuç 2.3.4 (Harnack'ın eşitsizliği [25]) Tekilliği olmayan d .dereceden bir düzlem eğrisinin bileşen sayısı en fazla $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ kadardır. ■

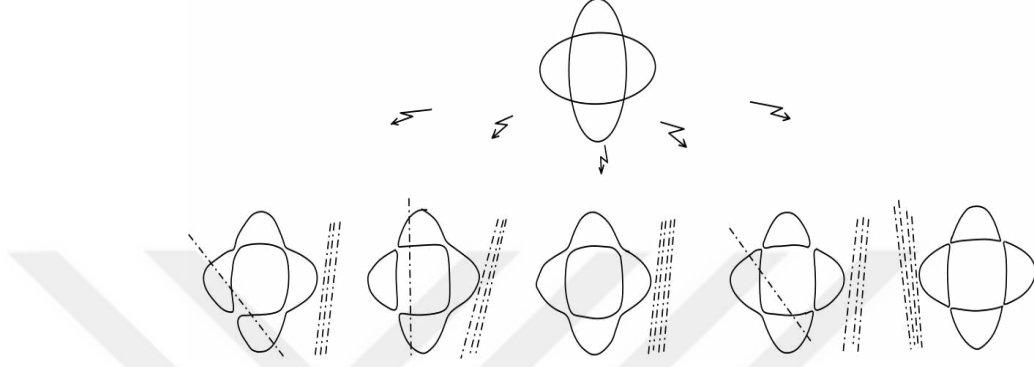
2.4 Derecesi $d \leq 5$ olan Düzlem Eğrileri

Derecesi iki ve ikiden küçük non-singular eğrilerin izotopi sınıfları kolaylıkla elde edilir. Üçüncü dereceden eğrilerin izotopi sınıfları; Şekil 2.3'te görüldüğü gibi bir konik ve bir doğrunun kesişmesiyle oluşan üçüncü dereceden eğrinin mevcut iki tekil noktasının çözülmesiyle elde edilir (tekillik çözme yöntemi 5. Bölüm'de ayrıntılı olarak incelenmiştir). Bu koniğin $C = 0$ ve doğrunun da $L = 0$ denklemiyle verildiği varsayıldığında $CL = 0$ denkleminin belirlediği eğrinin iki tekil noktasını çözebilmek için eşitliğin sağ tarafına $\epsilon L_1 L_2 L_3$ üçüncü dereceden polinomun eklenir. Burada ϵ yeterince küçük pozitif bir reel sayı iken $L_i = 0, i = 1, 2, 3$, bir doğru denklemdir.



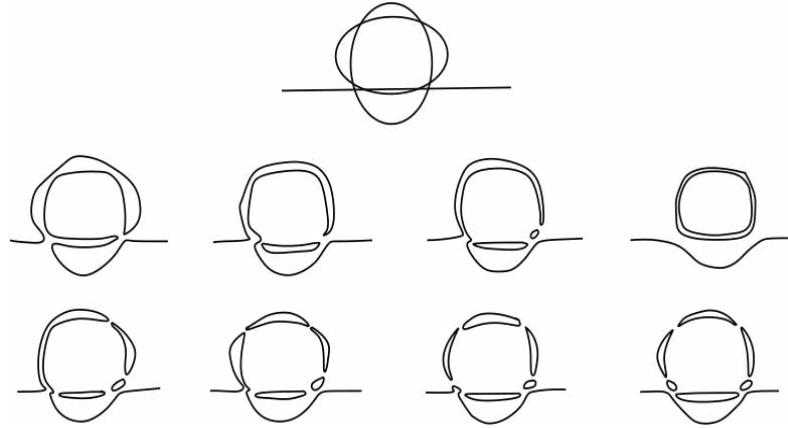
Şekil 2.3 Tekilliği olan üçüncü dereceden bir eğrinin çözülmesi

Tekilliği olmayan dördüncü dereceden eğrilerin boştan farklı izotopi sınıfları; Şekil 2.4'te görüldüğü gibi dört reel noktada kesişen iki koniğin birleşiminin çözülmesiyle benzer şekilde elde edilir. Boş küme olan izotopi sınıfı $x^4 + y^4 + z^4 = 0$ denkleminin belirlediği eğri ile tanımlanabilir.



Şekil 2.4 Tekilliği olan dördüncü dereceden bir eğrinin çözülmesi

Tekilliği olmayan beşinci dereceden eğrilerin tüm izotopi sınıfları Şekil 2.5'te gösterildiği gibi iki konik ve bir doğrunun birleşiminden oluşan eğrinin var olan 6 tekil noktasının çözülmesiyle elde edilebilir.



Şekil 2.5 Tekilliği olan beşinci dereceden bir eğrinin çözülmesi

Derecesi $d \leq 3$ olan eğrilerin başka izotopi sınıfının var olamayacağı Sonuç 2.3.1 ve 2.3.2'den elde edilirken; derecesi $d = 4$ olan eğriler için başka izotopi sınıfının var olamayacağı Sonuç 2.3.1, 2.3.2 ve 2.3.3'ten elde edilir. Derecesi $d = 5$ olan eğriler için başka izotopi sınıfının var olamayacağı Sonuç 2.3.2, 2.3.3 ve 2.3.4'ten gösterilir. Bu bilgiler ışığında aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 2.4.1 Derecesi $d \leq 5$ olan bir non-singular düzlem eğrisi Tablo 2.1'in d 'inci satırında gösterilen eğrilerden birisine izotopiktir.

Tablo 2.1 Derecesi $d \leq 5$ olan non-singular düzlem eğrilerinin izotopi sınıfları

d	Non-singular düzlem eğrilerinin izotopi sınıflarını
1	$\langle J \rangle$
2	$\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle$
3	$\langle J \rangle, \langle J \sqcup 1 \rangle$
4	$\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 2 \rangle, \langle 1\langle 1 \rangle \rangle, \langle 3 \rangle, \langle 4 \rangle$
5	$\langle J \rangle, \langle J \sqcup 1 \rangle, \langle J \sqcup 2 \rangle, \langle J \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle, \langle J \sqcup 3 \rangle, \langle J \sqcup 4 \rangle, \langle J \sqcup 5 \rangle, \langle J \sqcup 6 \rangle$

■

Uyarı 2.4.1 Tekilliği olmayan 6 ve 6'dan büyük dereceli eğrilerin izotopik sınıflandırması için çözme yöntemi artık yeterli değildir.

2.5 Non-singular Düzlem Eğrileri Oluşturmanın Klasik Yöntemi

$C \subset \mathbb{P}^2$ bir reel cebirsel eğri ve $p = [x_0 : y_0 : z_0] \in C$ reel nokta olsun. Eğer bu eğriyi tanımlayan polinomun bu noktadaki Hessian matrisi bir pozitif ve bir negatif öz değere sahipse p 'ye C 'nin *nodal tekil noktası* (veya *iki transversal parçanın kesişim noktası*) denir. Morse Lemma'dan (detaylı bilgi için [20]'ya bakınız), C eğrimiz p noktasının komşuluğunda iki doğrunun birleşimi olarak görünür. Tersine, $\mathbb{R}C_1, \dots, \mathbb{R}C_n$ tekilliği olmayan ikişer ikişer transversal olan eğriler olsun. Eğer bu eğrilerin hiç bir üç tanesi aynı noktadan geçmiyor ise bu eğrilerin birleşiminin, $\mathbb{R}C_1 \cup \dots \cup \mathbb{R}C_n$, bütün tekil noktası nodal tekilliğine sahiptir.

Teorem 2.5.1 (Klasik Cözme Yöntemi [1]) C tüm tekil noktaları nodal olan d . dereceden bir düzlem eğrisi ve B 'de C 'nin tekil noktalarından geçmeyen d . dereceden

başka bir düzlem eğri olsun. U_0 , C 'nin tekil noktalarının kümesinin bir komşuluğu ve U_1 ile $\mathbb{R}C \setminus U_0 \subset \mathbb{R}P^2 \setminus U_0$ alt uzayının tüp komşuluğunu (tubular neighborhood) gösterelim. $U = U_0 \cup U_1$ yani $\mathbb{R}C$ 'nin $\mathbb{R}P^2$ 'deki komşuluğu olsun. O zaman aşağıdaki koşulları sağlayan d . dereceden tekilliği olmayan bir X düzlem eğrisi vardır (Şekil 2.6'da bu yöntemin bir doğru ve bir çemberin birleşiminden oluşan C kübik eğrisi ile üç doğru birleşiminden oluşan B kübik eğrisi için örnekleme verilmiştir):

(1) $\mathbb{R}X \subset U$

(2) U_0 'ın bağlantılı her V parçası için

$$f(\mathbb{R}C \cap V) = D^1 \times \{0\} \cup \{0\} \times D^1 \text{ ve } f(\mathbb{R}X \cap V) = \{(x, y) \in D^1 \times D^1 : xy = \frac{1}{2}\}$$

sağlayan $f: V \rightarrow D^1 \times D^1$ homeomorfizması vardır.

(3) $\mathbb{R}X \setminus U_0, U_1 \rightarrow \mathbb{R}C \setminus U_0$ tüp komşuluğunun bir kesitidir.

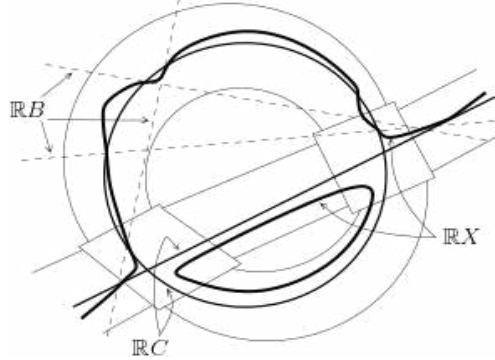
(4) C ve B eğrileri sırasıyla g ve h polinomları tarafından belirlendiği varsayıldığında

$$\mathbb{R}X \subset \{(x: y: z) \in \mathbb{R}P^2 \mid g(x, y, z)h(x, y, z) \leq 0\}'\text{dir.}$$

(5) $\mathbb{R}X \cap \mathbb{R}C = \mathbb{R}X \cap \mathbb{R}B = \mathbb{R}C \cap \mathbb{R}B$

(6) Eğer $p \in \mathbb{R}C \cap \mathbb{R}B$, B ve $\mathbb{R}B$ 'nin tekil noktası ve $\mathbb{R}B, \mathbb{R}C$ 'ye bu noktada transversal ise o zaman $\mathbb{R}X$ de $\mathbb{R}C$ 'ye bu noktada transversaldır.

Öyle bir pozitif $\epsilon > 0$ sayısı bulabiliriz ki her $t \in (0, \epsilon]$ için $g + th$ polinomu X 'e dayatılan yukarıdaki tüm koşulları sağlar.



Şekil 2.6 Klasik çözme yöntemi ile elde edilen X eğrisi

İspat. $C = Z(g)$ ve $B = Z(h)$ olsun. $x_t = g + th$ olarak alalım. Her $t \neq 0$ için x_t 'nin belirlediği X_t eğrisinin (5) ve (6) koşullarını sağladığı kolaylıkla görülür. Ek olarak $t > 0$ içinde X_t eğrisi (4)'üncü koşulu sağlar. Yeterince küçük $|t|$ için $\mathbb{R}X_t \subset U$ olduğu aşikardır. Dahası x_t 'nin gradyanı ile g 'nin gradyanı arasındaki değişim farkı çok küçük

olduğu için $\mathbb{R}X_t$ eğrisinin $\mathbb{R}X_t \cap \mathbb{R}B = \mathbb{R}C \cap \mathbb{R}B$ kesişim noktalarında tekilliği yoktur. Ek olarak B , C 'nin tekil noktalarından geçmesin kabulümüzden dolayı g 'nin gradyanı $\mathbb{R}C \cap \mathbb{R}B$ üzerinde sıfırdan farklıdır. $\mathbb{R}B$ 'nin dışında $\mathbb{R}X_t$, $\frac{g}{h}$ fonksiyonunun seviye eğrisidir. $\mathbb{R}C \setminus \mathbb{R}B$ üzerinde bu seviye eğrisinin kritik noktaları $\mathbb{R}C$ 'nin tekil noktalarıdır, ve bu kritik noktalar dejenere değildir (yani Hessian matrisinin determinantı bu noktalarda sıfırdan farklıdır). Böylece yeterince küçük $t \neq 0$ için bu eğri non-singular olup (2) ve (3)'teki koşulu sağlar. Sonuç olarak, öyle bir pozitif $\epsilon > 0$ sayısı bulabiliriz ki her $t \in (0, \epsilon]$ için $\mathbb{R}X_t$ non-singular olup (1)'den (6)'ya tüm koşulları sağlar. ■

Uyarı 2.5.1 Dikkat edilirse (1)-(3)'den sabit bir C eğrisi için $\mathbb{R}X$ eğrisinin izotopi sınıfının C eğrisinin tekil noktalarının her birinin komşuluğunun davranışına bağlı olduğu görülür. Bu davranış (4). koşul tarafından belirlendiği için $\mathbb{R}X$ 'in izotopi sınıfını (1)-(4) koşulları belirler. $\mathbb{R}X$ 'in $\mathbb{R}C$ 'ye göre konumu (4)-(6) koşulları tarafından belirlenir.

Tanım 2.5.1 C ve B sırasıyla g ve h polinomlarının belirlediği eğriler olsun. Her $t \in (0, \epsilon]$ için $x_t = g + th$ polinomların belirlediği eğrilere *C eğrisinin B eğrisi yardımıyla çözülmesiyle elde edilen eğri* denir. Burada dikkat edilmesi gereken husus C ve B eğrileri çözülen eğrilerin izotopi sınıfını belirlemez çünkü h ve $-h$ polinomlarının her ikisinde B eğrisini belirler ve böylece yeterince küçük $t > 0$ değerleri için $g - th$ polinomu C eğrisinin B eğrisi yardımıyla çözülmesiyle elde edilen eğridir fakat eğer C tekil noktasına sahipse bu eğriler $g + th$ polinomun belirlediği eğriye izotopik değildir.

2.6 Harnack'ın Eğrileri

Tekilliği olmayan d 'inci dereceden reel projektif cebirsel düzlemsel eğrilerin bileşen sayısının en fazla $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ olduğu Sonuç 2.3.4' te belirtilmişti. Aşağıdaki teoremle birlikte Harnack bu eğriler için topolojik sınıflandırma probleminin çözümünü tamamlamıştır.

Teorem 2.6.1 (Harnack [25]) Her d doğal sayısı ve L tamsayısı için aşağıdaki eşitsizliği

$$\frac{1-(-1)^d}{2} \leq L \leq \frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 \quad (2.1)$$

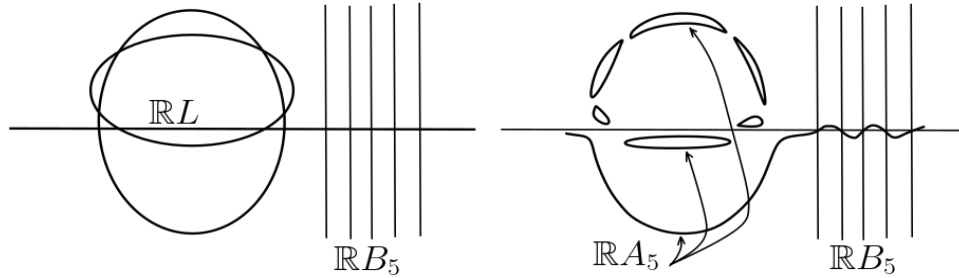
sağlayan tekliği olmayan d 'inci dereceden L bileşen sayılı reel projektif cebirsel düzlem eğrisi vardır. ■

Uyarı 2.6.1 (2.1) eşitsizliğinin solundaki eşitsizlik Bezout teoreminin bir sonucudur (Sonuç 2.3.2'ye bakınız).

Tanım 2.6.1 Maksimum bileşene sahip eğriler (yani, $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1$ bileşenli) M -eğrisi olarak adlandırılırken, $\frac{(d-1)(d-2)}{2} + 1 - a$ bileşenli eğriler ise $(M - a)$ -eğrisi olarak adlandırılır.

Teorem 2.6.2 ([1]) Herhangi bir d doğal sayısı için d . dereceden bir M -eğrisi vardır.

İspat. Burada M -eğri dizisi oluşturacağız. Bu eğrileri üretme aşamasının her adımında önceden bilinen bir M -eğrisini bir doğru ile kesiştirip, elde edilen eğrinin tekil noktalarını çözeceğiz. Bölüm 4'te $d \leq 5$ dereceli eğriler için M -eğrileri oluşturmuştuk. Orada iki konik ve bir L doğrusunun birleşimini çözerek derecesi 5 olan bir M -eğrisi elde ettiğimiz hatırlayalım. Aslında bu çözme yöntemi çeşitli eğriler kullanılarak yapılabilir. Burada önemli olan konu yardımcı eğrinin iki çember dışında L ile beş noktada kesişmesidir. Örneğin, yardımcı eğriyi Şekil 2.7'de görüldüğü gibi beş doğrunun birleşimi olarak alalım. Bu birleşimi B_5 ve yardımcı eğri yardımıyla elde edilen tekliği olmayan M -eğrisini de A_5 ile gösterelim.



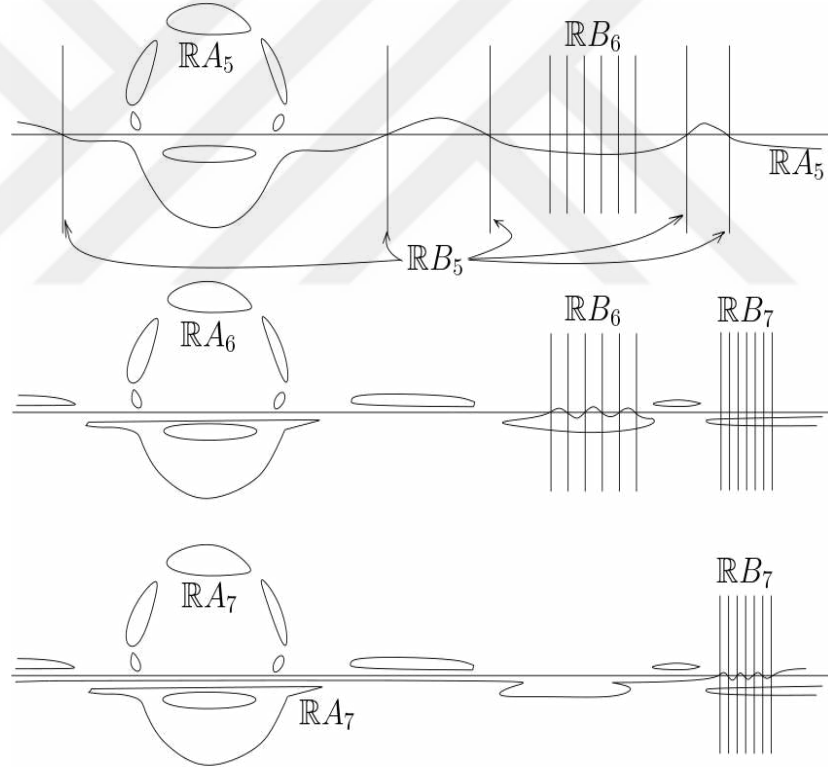
Şekil 2.7 Beşinci dereceden non-singular M -eğrisinin elde edilmesi

B_d yardımcı eğri dizisini söyle oluşturacağız: Her $d > 5$ için B_d 'yi L ile d farklı noktada kesen d tane doğrunun birleşimi olarak alalım öyle ki d çift olduğunda bu noktalar $RL \setminus RB_{d-1}$ 'in herhangi bir bağlantılı parçasında yaşar iken; d tek olduğunda bu

noktalar $\mathbb{R}L \setminus \mathbb{R}B_{d-1}$ 'in $\mathbb{R}L \cap \mathbb{R}B_{d-2}$ 'yi içeren parçasında yaşar. Varsayalım ki $\mathbb{R}A_{d-1}$ eğrisi ve $\mathbb{R}L$ doğrusu $d - 1$ noktada transversal olarak $\mathbb{R}L$ üzerindeki sıraya göre kesişsin öyle ki bu noktalar $\mathbb{R}L \cap \mathbb{R}B_{d-1}$ ile $\mathbb{R}A_{d-1}$ eğrisinin aynı parçasında yaşasın. O zaman A_d eğrisi oluşturulurken mevcut olan iki çözme olasılığının her biri için, $\mathbb{R}L$ doğrusu ve $\mathbb{R}A_{d-1}$ 'nin bu parçası $\mathbb{R}A_d$ için $d - 1$ parça verirken; $\mathbb{R}A_{d-1}$ 'nin

$$\frac{(d-1)^2 - 3(d-1) + 4}{2} - 1 = \frac{d^2 - 5d + 6}{2}$$

tane olan diğer parçaları hafifçe deforme edilerek $\mathbb{R}A_d$ 'nin parça sayısı $\frac{(d^2-5d+6)}{2}$ olarak kalır. Böylece d dereceden bir M -eğrisi elde edilmiş oldu. Bu eğri $\mathbb{R}L$ ile transversal kesiştiği gibi bu kesişim $\mathbb{R}L \cap \mathbb{R}B_d$ 'ye eşit olur. (Teorem 2.5.1'e bakınız.)



Şekil 2.8 Yardımcı eğri B_d 'nin inşası

Ek olarak $\mathbb{R}L \cap \mathbb{R}B_d$, $\mathbb{R}L \setminus \mathbb{R}B_{d-1}$ 'in bağlantılı bir parçasının alt kümesi olduğundan Şekil 2.8'de görüldüğü gibi eğrimizle $\mathbb{R}L$ doğrusunun kesişim noktaları bu eğrinin aynı parçasında, aynı sırada yer almaktadır. ■

Uyarı 2.6.2 Teorem 2.6.4'in ispatında M -eğrilerin inşasında, B_d yardımcı eğrilerimizi farklı şekilde seçerek diğer parça sayılı eğrileri üretmemiz mümkündür. Teorem 2.6.2'de

ki en küçük parça sayılı eğri iddiamız oldukça aşıkardır. Eğrimizin $x^d + y^d + z^d = 0$ denkleminle verildiği kabul edildiğinde d çift (tek) olduğunda bu eşitliği sağlayan reel noktalar kümesi boş kümedir ($\mathbb{RP}^1$ 'e homeomorfiktir). İkinci durum için, $[0:0:1]$ noktasından izdüşüm yaparak böyle bir homeomorfizma elde edebiliriz.

2.7 Reel Projektif Düzlem Eğrilerinin Uzayı

Derecesi d olan reel projektif cebirsel düzlem eğrilerinin kümesi $\frac{d(d+3)}{2}$ -boyutlu bir projektif uzaydır. Bu uzayı $\mathbb{RC}_d$ sembolü ile göstereceğiz. Bu uzayın homojen koordinatları, eğrileri tanımlayan polinomların katsayılarıdır. $\mathbb{RC}_d$ 'nin standart reel projektif uzaydan $\mathbb{RP}^{d(d+3)/2}$ tek farkı homojen koordinatların alışılmadık numaralandırılmasıdır. Mesele şu ki; aşağıda görüldüğü gibi üç değişkenli homojen bir polinomun katsayıları doğal bir çift indekslemeye sahiptir.

$$f(x, y, z) = \sum_{i,j \geq 0, i+j \leq d} a_{ij} x^i y^j z^{d-i-j}$$

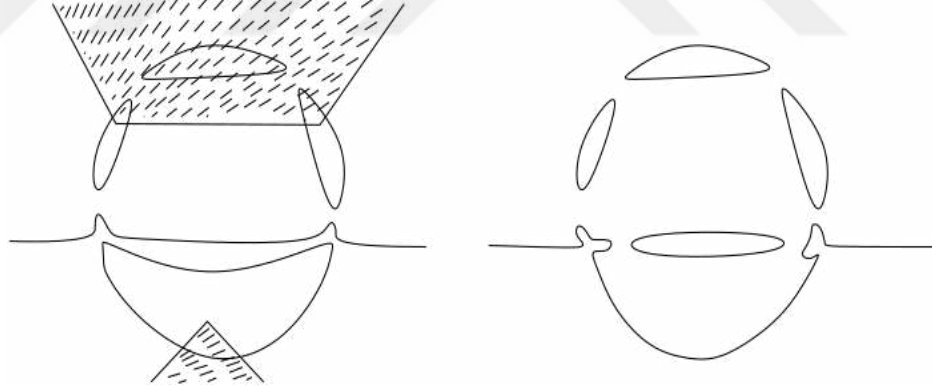
Tekilliği olmayan eğrilerin oluşturduğu $\mathbb{RC}_d$ 'nin alt kümesini $\mathbb{RNC}_d$ ile göstereceğiz. $\mathbb{RNC}_d$, $\mathbb{RC}_d$ 'nin açık alt kümesi olduğu kolaylıkla görülebilir. Dahası, tekilliği olmayan her reel projektif cebirsel düzlem eğrisi C , $\mathbb{RNC}_d$ 'de kendisine izotopik olan tekilliği olmayan eğrilerden oluşan bir komşuluğa sahiptir. Başka bir deyişle, C 'yi belirleyen polinomun katsayılarında yapılan küçük değişiklikler sonucu elde edilen polinomlar, C 'nin tüp komşuluğunun pürüzsüz (smooth) bir kısmında bulunur. Bu kapalı fonksiyon teoremin en aşık sonuçudur (Teorem 2.5.1 koşul (3) ile karşılaştırınız).

$\mathbb{RNC}_d$ 'nin aynı bağlantılı parçasında yaşayan tekilliği olmayan eğrilere *izotopik eğriler* denir. $\mathbb{RNC}_d$ uzaydaki bir yol bir eğrinin reel noktalar kümesi için $\mathbb{RP}^2$ 'de izotopi tanımlar. Böyle bir izotopi, derecesi d olan reel projektif cebirsel düzlem eğrilerin reel noktalarının kümesidir. Böyle bir izotopiye *deformasyon* diyeceğiz. (Bazı kaynaklar bunun için rigid izotopi terminolojisini kullanmaktadır). Bu tanım, doğal olarak topolojik ve izotopik sınıflandırma problemleri kadar klasik olan aşağıdaki sınıflandırma problemine yol açar.

2.7.1 Deformasyon (Rigid İzotopi) Sınıflandırma Problemi

Bu bölümde deformasyon sınıflandırma problemi (yani derecesi d olan tekilliği olmayan düzlem eğrilerin deformasyon sınıflarını belirlemek, denk olarak $\mathbb{R}NC_d$ uzayın kaç parçadan oluştuğunu anlamak) ile ilgili elimizde var olan yakın tarihli sonuçları sunacağız.

Eğer $d \leq 2$ ise, bu problem, izotopik sınıflandırma problemi ile aynıdır. Üçüncü ve dördüncü dereceli eğriler için izotopi kavramı deformasyondan daha geneldir. Yani izotopinin varlığı deformasyonun varlığını garanti eder ama tersi doğru değildir. Deformasyon sınıflandırma problemi, $d \leq 6$ dereceli eğriler için çözülmüştür. 1978'de V.A. Rokhlin (bkz. [11]), derecesi $d \geq 5$ olan tekilliği olmayan eğriler için izotopinin varlığının artık deformasyonun varlığını garanti etmediğini göstermiştir. Şekil 2.9' da birbirine izotopik olan fakat aynı deformasyon sınıfında bulunmayan 5. dereceden tekilliği olmayan iki eğri örneği verilmiştir. Bunlar iki konik ve bir doğrunun çözülmesiyle elde edilir.



Şekil 2.9 Aynı deformasyon sınıfında bulunmayan 5. dereceden iki tane eğri

Rokhlin'in orijinal kanıtı, bu eğrilerin kompleks noktalar kümesi üzerinde Bölüm 2'de verilen argümana dayanır. Fakat şu an bu eğrilerin aynı deformasyon sınıfında olmadığını kanıtlamak için temel argümanlar kullanacağız. Şekil 2.9'da görüldüğü gibi ilk eğri J bileşeni (yani eğrinin tek taraflı parçası) ile kesişmeyen üçgen içinde yaşayan bir ovale sahiptir. Dikkat edilirse bu üçgenin köşeleri diğer üç ovalin içinde yer almaktadır. İkinci eğrinin böyle bir ovali yoktur. Herhangi bir deformasyon ovali bu üçgenden ayıramaz. Aksi halde bu Bezout'un teoreminin ihlali anlamına gelir. Şimdi, $\mathbb{R}NC_d$ 'nin tekilliği olan reel düzlem eğrilerden oluşan bir alt kümesini inceleyeceğiz.

Derecesi d olan bir eğrinin $[1:0:0]$ noktasında bir tekilliğe sahip olması için gerek ve yeter koşul bu eğriyi veren polinomda $x^d, x^{d-1}y, x^{d-1}z$ terimlerin olmamasıdır. O zaman tek bir tekil noktasına sahip d .dereceden düzlem eğrilerin kümesi $\mathbb{RC}_d$ 'nin $d(d+3)/2 - 3$ boyutlu bir alt uzayıdır.

$$S = \{(p, C): p \in \mathbb{RP}^2, C \in \mathbb{RC}_d \text{ ve } p \in C \text{ tekil noktası}\} \subset \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RC}_d$$

kümesini düşünelim. S 'nin $\mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RC}_d$ uzayının cebirsel bir alt uzayı olduğu aşıkardır. $\pi_1: \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RC}_d \rightarrow \mathbb{RP}^2$ izdüşümün S 'ye kısıtlamasının her bir lifi (yani $p \in \mathbb{RP}^2$ için $\pi_1^{-1}(p)$), p 'de tekilliği olan d . dereceden eğriler kümesidir. Yani, her bir lif (fiber) $\frac{d(d+3)}{2} - 3$ boyutlu düzgün altmanifold'dur. Böylece S de $\frac{d(d+3)}{2} - 1$ boyutlu düzgün manifolddur. $\pi_2: \mathbb{RP}^2 \times \mathbb{RC}_d \rightarrow \mathbb{RC}_d$ izdüşümün S 'ye kısıtlamasının görüntüsü d . dereceden tekilliği olan eğrilerden oluşur, yani bu görüntü kümesi $\mathbb{RC}_d \setminus \mathbb{RNC}_d$ olup bu kümeyi $\mathbb{RSC}_d$ ile gösterelim. $\mathbb{RSC}_d$ kümesi $\frac{d(d+3)}{2} - 1$ boyutlu bir kümenin düzgün bir fonksiyon altındaki görüntüsü olduğu için, boyutu en fazla $\frac{d(d+3)}{2} - 1$. Ayrıca boyutu en az $\frac{d(d+3)}{2} - 1$ olmalı çünkü aksi halde, $\mathbb{RC}_d \setminus \mathbb{RSC}_d$ uzayı bağlantılı olur yani d . dereceden tekilliği olmayan bütün eğriler birbirine izotopik olurdu. $\text{Boyut}(\mathbb{RSC}_d) \leq \frac{d(d+3)}{2} - 1$ ispatına benzer bir argüman kullanılarak iki tekil noktasına sahip d . dereceden eğriler kümesinin (benzer şekilde bir tekil noktasına sahip ve Hessian matrisinin rankı bir ve birden küçük olan d . dereceden eğriler kümesinin) boyutunun en fazla $\frac{d(d+3)}{2} - 2$ olduğu gösterilebilir. Böylece sadece bir tekil noktasına sahip ve o noktadaki Hessian matrisinin rankı 2 olan d . dereceden eğrilerin oluşturduğu X kümesi $\mathbb{RSC}_d$ 'nin açık ve her yerde yoğun bir alt kümesidir. Bu kümeye $\mathbb{RSC}_d$ 'nin *temel parçası* denir. Aslında, $Y = \pi_2^{-1}(X)$, S 'nin açık ve her yerde yoğun bir alt kümesidir ve $Y \rightarrow \mathbb{RC}_d$ kısıtlaması pürüzsüz gömme fonksiyonudur.

Bir düzlem C eğrisinde iki tür dejenere olmayan reel nokta vardır. Eğer C 'yi belirleyen polinomun Hessian matrisi bir $p \in C$ noktasında iki negatif olmayan veya iki pozitif olmayan özdeğere sahipse, bu noktaya C 'nin *solitary* noktası denir. C 'nin dejenere olmayan solitary noktası, $\mathbb{RC}$ 'nin izole noktasıdır. Genel olarak, $\mathbb{RC}$ 'de izole olan C 'nin

tekil noktasına *solitary reel tekil noktası* denir. Diğer dejenere olmayan C 'nin reel noktalarına *nodal tekil nokta* (ya da *crossing*) denir (Bölüm 2.5'e bakınız). Dejenere olmayan noktalar üzerindeki bu ayrım $\mathbb{RSC}_d$ kümesini iki açık kümeden oluşan doğal bir parçalanışını verir.

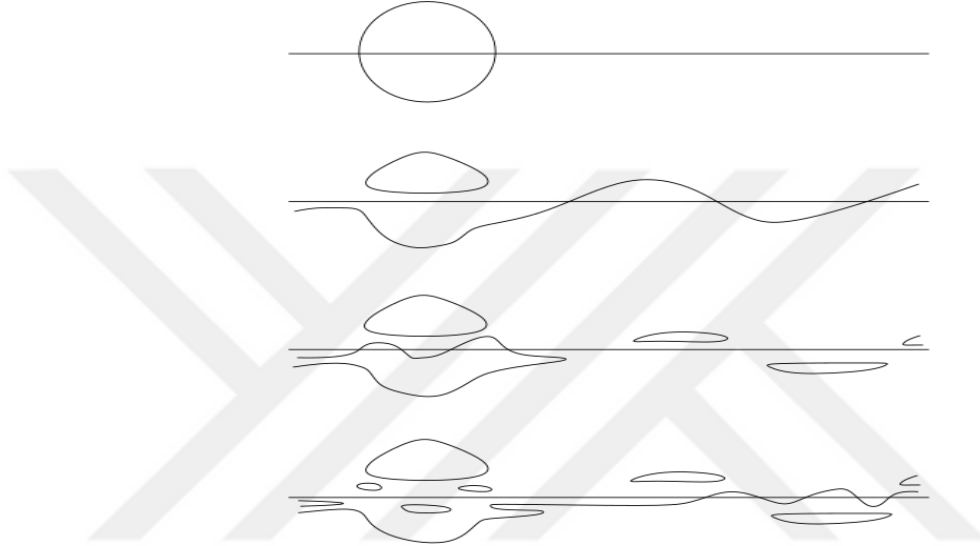
Eğer bir C eğrisi solitary tekilliğe sahip reel eğrilerin kümesinin temel parçasının yarısı ile transversal olarak kesilen bir yay parçası üzerinde hareket eden $\mathbb{RC}_d$ 'nin bir nokta olarak görülürse o zaman bu eğri üzerindeki reel nokta kümesinin Morse değişim indeksi 0 veya 2 olur. Yani, eğri ya solitary tekilliğe sahiptir ve sonra bu bir oval'e dönüşür ya da ovalerden biri noktaya (solitary) dönüşür ve sonra yok olur. Crossing olduğu durumda Morse indeksi 1'dir. $\mathbb{RC}_d$ uzayında bir doğru d dereceli eğriler demeti olarak adlandırılır. Eğer f ve g bu demette iki eğri tanımlarsa o zaman bu demette ki diğer eğriler, $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ olmak üzere $\lambda f + \mu g$ formundaki polinomlar tarafından belirlenir. Transversality teoreminden dolayı $\mathbb{RSC}_d$ kümesini sadece temel parçanın noktalarında transversal olarak kesen demetler d . dereceden eğrilerin bütün reel demetlerin açık ve her yerde yoğun bir alt kümesidir.

2.8 Teorem 2.6.2'nin İspatının Tamamlanması

Bölüm 2.6' da herhangi bir d doğal sayısı için minimum (veya maksimum) bileşen sayısı $\frac{1-(-1)^d}{2}$ (veya $\frac{d^2-3d+4}{2}$) olan d . dereceden tekilliği olmayan eğrilerin var olduğu gösterilmiştir. Birbirine izotopik olan tekilliği olmayan d dereceli eğriler $\mathbb{RC}_d$ uzayında açık bir küme oluştururlar (bkz Bölüm 2.7). Böylece minimum bileşen sayısına sahip bir eğriyi, maksimum bileşen sayısına sahip bir eğriye bağlayan, d . dereceden eğriler demeti vardır. Bu demet sadece $\mathbb{RSC}_d$ 'nin temel parçası ile transversal olarak kesişir. Minimum parçalı bir eğriyi maksimum parçalı bir eğriye bu demet boyunca hareket ettirdiğimizde Morse değişimleri meydana gelir öyle ki her bir Morse değişimi sırasında eğrinin parça sayısı en fazla 1 artar. Sonuç olarak bu demet herhangi parça sayılı d . dereceden tekilliği olmayan eğriler üretir.

2.9 Harnack M -Eğrilerin İzotopi Sınıfları

Harnack'ın M -eğri üretme yöntemi Teorem 2.6.2' nin ispatında kullanılan yöntemden farklıdır. Şekil 2.10' da Harnack'ın inşasında kullanılan derecesi $d \leq 5$ olan M -eğriler gösterilmektedir. Derecesi $d \geq 6$ olan M -eğrileri için Harnack'ın inşası Bölüm 2.6'da olduğu gibi aynı izotopi tipine sahip M -eğriler üretir.



Şekil 2.10 Derecesi $d \leq 5$ olan M -eğriler

Bu inşa yöntemlerinde seçtiğimiz yardımcı $\mathbb{B}_d$ eğri seçimine bağlı olarak (daha açık söylemek gerekirse, $\mathbb{R}B_d \cap \mathbb{R}L$ kesişimlerin birbirine göre konumuna bağlı olarak) farklı izotopi sınıfına ait M -eğriler elde ederiz. Maksimum parçalı eğri üretebilmek için $\mathbb{R}B_d \cap \mathbb{R}L$ kümesinin d nokta içermesi ve $\mathbb{R}L \setminus \mathbb{R}B_{d-1}$ 'nin tek bir parçasında yer alması gerektiğini hatırlayalım. Burada d tek doğal sayısı için bu parça $\mathbb{R}B_{d-2} \cap \mathbb{R}L$ 'yi içermek zorundadır. Elde edilen maksimum parçalı eğrinin izotopi sınırının d den küçük her çift r sayısı için $\mathbb{R}L \setminus \mathbb{R}B_{r-1}$ 'in $\mathbb{R}L \cap \mathbb{R}B_r$ 'yi içeren bağlantılı bileşen seçimine bağlı olduğu aşıkardır. Eğer her çift r sayısı için $\mathbb{R}B_{r-2} \cap \mathbb{R}L$ 'yi içeren bağlantılı bileşeni seçersek o zaman elde edilen M -eğrinin izotopi sınıfı d tek sayı ise $\langle J \sqcup (d^2 - 3d + 2)/2 \rangle$ olurken d çift ise $\langle (3d^2 - 6d)/8 \sqcup 1 \langle (d^2 - 6d + 8)/8 \rangle \rangle$ olur. Tablo 2.2'de olası tüm $\mathbb{B}_d$ eğriler kullanılarak Harnack'ın metoduyla elde edilmiş derecesi $d \leq 10$ olan M -eğriler listelenmiştir.

Harnack M -eğrileri ile ilgili aşağıdaki iki sonuç kolaylıkla elde edilir.

Sonuç 2.9.1 Harnack M -eğrisindeki bir yuvanın derinliği en fazla 2 dir. ■

Sonuç 2.9.2 Cift dereceli herhangi bir Harnack M -eğrisi $(3d^2 - 6d + 8)/8$ tane dış oval ve $(d^2 - 6d + 8)/8$ tane iç ovale sahiptir. ■

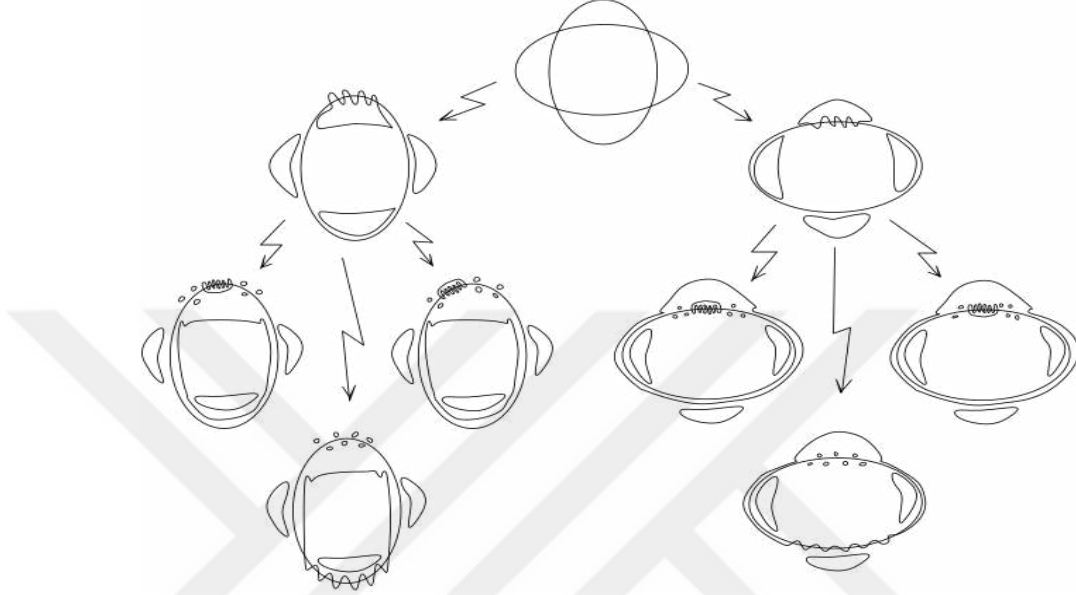
Tablo 2.2 Derecesi d olan Harnack M -eğrilerin izotopi sınıfları

d	Harnack M -eğrilerin izotopi sınıfları
2	$\langle 1 \rangle$
3	$\langle J \sqcup 1 \rangle$
4	$\langle 4 \rangle$
5	$\langle J \sqcup 6 \rangle$
6	$\langle 9 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle$
7	$\langle J \sqcup 15 \rangle, \langle J \sqcup 13 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle$
8	$\langle 18 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle, \langle 17 \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle$
9	$\langle J \sqcup 28 \rangle, \langle J \sqcup 24 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle, \langle J \sqcup 26 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle, \langle J \sqcup 23 \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle$
10	$\langle 30 \sqcup 1\langle 6 \rangle \rangle, \langle 29 \sqcup 2\langle 3 \rangle \rangle, \langle 29 \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle, \langle 28 \sqcup 1\langle 1 \rangle \sqcup 1\langle 2 \rangle \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle$

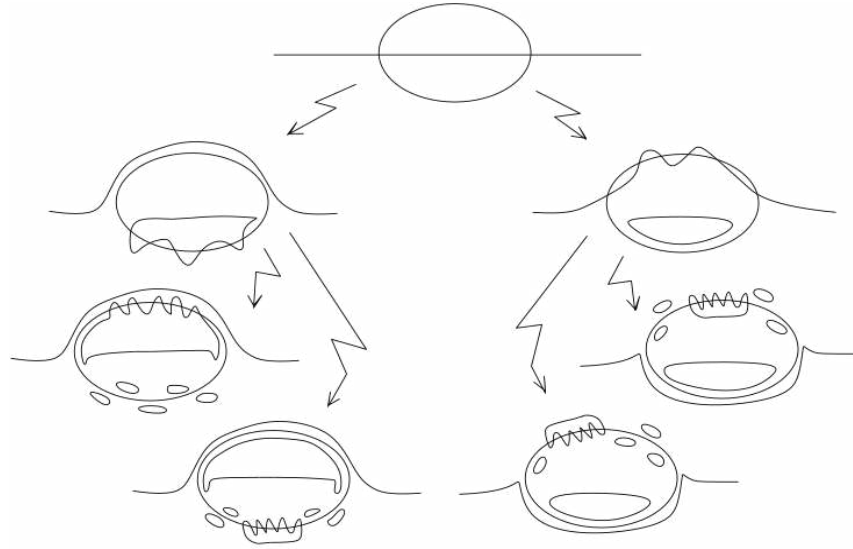
2.10 Hilbert Eğrileri

Hilbert [24] tekiliği olmayan eğriler için izotopi sınıflandırma problemini açıkça ifade eden ilk kişidir. Aynı zamanda bu problemde en çok M -eğrilerinin ilginç olduğunu öne sürmüştür. Bildiğimiz gibi Harnack da çok özel M -eğrilerinin izotopi sınıfları üzerinde çalışmıştır. Fakat, dikkat edilirse Sonuç 2.9.1 ile Sonuç 2.3.3 arasında oldukça büyük hata payı vardır. Hilbert, bu hatanın M -eğrilerinin içsel özellikleriyle değil, M -eğri üretme yönteminin özellikleriyle açıklandığını gösterdi. Hilbert, Harnack'ın yöntemine yakın, ancak Teorem 2.3.3 belirtildiği gibi herhangi bir derinlikte yuvalara sahip M -eğrileri üreten yeni yöntemi önerdi. Onun yönteminde, Harnack'ın yönteminde

kullanılan doğru yerine tekliği olmayan bir konik kullanılmaktadır ve başlangıç eğrisi için de bir doğru veya konik kullanılır. Şekil 2.11 ve 2.12’de Hilbert’in yöntemi kullanarak M -eğrilerin nasıl elde edildiği gösterilmektedir.



Şekil 2.11 Dereceleri 4 ve 6 olan eğrilerin Hilbert yöntemi ile inşası



Şekil 2.12 Dereceleri 3 ve 5 olan eğrilerin Hilbert yöntemi ile inşası

Hilbert’in yöntemiyle elde edilen $d \leq 8$ dereceli M -eğrilerinin izotop sınıflarının listesi Tablo 2.3’ te verilmiştir. Hilbert diğer durumların aksine 6.dereceden eğrilerin sınıflandırılmasında büyük bir zorlukla karşılaşmıştır. Harnak tarafından bulunan

$\langle 9 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle$ M -eğrisinden farklı başka bir maksimum bileşenli $\langle 1 \sqcup 1\langle 9 \rangle \rangle$ eğrinin varlığını göstermiştir. Maksimum bileşenli 6.dereceden eğrilerde sadece bu iki reel yapının mümkün olabileceği sonucuna varmıştır. Bu iddia, Gudkov [16] tarafından bu iki eğriden farklı yeni bir $\langle 5 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle$ M -eğrinin bulunmasıyla çürütülmüştür. Gudkov [13], 6. dereceden eğrilerin bütün izotopi sınıflandırılmasını tamamlamıştır. (Bu konu Bölüm 2.13'te detaylı incelenmiştir.)

Tablo 2.3 Derecesi d olan Hilbert M -eğrilerin izotopi sınıfları

d	Hilbert M -eğrilerin izotopi sınıfları
4	$\langle 1 \rangle$
5	$\langle J \sqcup 6 \rangle$
6	$\langle 9 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle, \langle 1 \sqcup 1\langle 9 \rangle \rangle$
7	$\langle J \sqcup 15 \rangle, \langle J \sqcup 12 \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle, \langle J \sqcup 13 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle, \langle J \sqcup 2 \sqcup 1\langle 12 \rangle \rangle, \langle J \sqcup 1 \sqcup 1\langle 13 \rangle \rangle$
8	$\langle 5 \sqcup 1\langle 14 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle, \langle 17 \sqcup 1\langle 2 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle, \langle 18 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle, \langle 1 \sqcup 1\langle 2 \sqcup 1\langle 17 \rangle \rangle \rangle, \langle 1 \sqcup 1\langle 14 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle \rangle$

2.11 Ragsdale'in Katkıları

Herhangi bir eğrinin bir ovali eğer çift sayıda oval içinde yaşıyorsa bu ovale *çift oval* denir. Aksi halde *tek oval* denir. Verilen bir eğrinin çift oval sayısını c ile tek oval sayısını da t ile gösterelim. V. Ragsdale [23] c, t sayılarının eğrinin derecesi çift olduğunda önemli topolojik bilgi barındırdığını görmüş ve [25]'de Harnack ve Hilbert'in yöntemlerinden yararlanarak çift dereceli eğrilerin bu sayıları için aşağıdaki sonuçları bularak bu sürece dikkate değer bir katkıda bulunmuştur.

Teoerem 2.11.1 Derecesi $d=2k$ olan Harnack M -eğrileri için

$$c = \frac{3k^2 - 3k + 2}{2} \quad \text{ve} \quad t = \frac{k^2 - 3k + 2}{2}$$

eşitlikleri sağlanır.

Teorem 2.11.2 ([23]) Derecesi $d=2k$ olan Hilbert M -eğrileri için

$$\frac{k^2-3k+4}{2} \leq c \leq \frac{3k^2-3k+2}{2} \quad \text{ve} \quad \frac{k^2-3k+2}{2} \leq t \leq \frac{3k(k-1)}{2}. \blacksquare$$

Uyarı 2.11.1 Çift dereceli bir eğri iki taraflı olduğundan reel projektif düzlemi ($\mathbb{RP}^2$) iki bölgeye ayırır. Bunlardan birisi yönlendirilemez bir parçaya sahipken; diğeri yönlendirilebilirdir. Bu bölgeleri sırasıyla $\mathbb{RP}_-^2$ ve $\mathbb{RP}_+^2$ ile gösterelim. $\mathbb{RP}_-^2$ 'nin $t+1$ ve $\mathbb{RP}_+^2$ 'in de c tane bileşene sahip olduğu kolaylıkla görülebilir. Buradan bu bölgelerin Euler karakteristiği $\chi(\mathbb{RP}_+) = c - t$ ve $\chi(\mathbb{RP}_-) = t - c + 1$ olarak elde edilir.

Bu sonuçlardan yararlanarak Ragsdale çift dereceli herhangi bir eğri için t ve c değerlerinin üst sınırını veren aşağıdaki hipotezi öne sürmüştür.

Ragsdale Varsayımı 2.11.3 Derecesi $d=2k$ olan herhangi bir eğri için

$$c \leq \frac{3k(k-1)}{2} + 1 \quad \text{ve} \quad t \leq \frac{3k(k-1)}{2}, \text{ dir. } \blacksquare$$

Ragsdale bu süreçte daha zayıf varsayımlar da ortaya atmıştır. Yaklaşık otuz yıl sonra I. G. Petrovsky, bu zayıf varsayımlardan biri olan aşağıdaki önermeyi kanıtlamıştır. Bu teorem Bezout teoremi kullanılmadan elde edilen ilk sonuç olarak bilinir.

Teorem 2.11.4 (Petrovsky [21]) Derecesi $d=2k$ olan tekilliği olmayan reel projektif cebirsel eğriler için

$$-\frac{3k(k-1)}{2} \leq c - t \leq \frac{3k(k-1)}{2} + 1$$

sağlanır. $\blacksquare$

Viro [10], $t = \frac{3k(k-1)}{2} + 1$ oval sayısına sahip çift dereceli eğrilerin varlığını göstererek Ragsdale'in t için verdiği üst sınırın yanlış olduğunu ispatlamıştır. I.V. İtenberg [5], c (veya t) ile $\frac{3k(k-1)}{2} + 1$ arasındaki farkın k 'ya bağlı ikinci dereceden bir fonksiyon olduğunu göstererek Ragsdale-Petrovsky'nin verdiği bu üst sınırların yanlış olduğunu kanıtlamıştır.

Ragsdale'in bu çalışmalarından esinlenerek 1960'ların sonlarına doğru Gudkov [18] aşağıdaki hipotezi öne sürmüş bu hipotez V.A. Rokhlin [17] tarafından 1972 yılında ispatlanmıştır.-

Teorem 2.11.5 (Gudkov-Rokhlin [17]) Derecesi $d=2k$ olan herhangi bir M -eğrisi için

$$c - t = k^2 \mod 8$$

sağlanır. ■

2.12 Harnack ve Hilbert Yöntemlerinin Genelleştirilmesi

1910-1917'de L. Brusotti,[19]'de Harnack ve Hilbert'in yöntemlerinden farklı klasik çözmeye dayalı tümevarım yoluyla M -eğri üretme yöntemi buldu. Bu yöntemini anlatmadan önce bazı tanımlar verilecektir.

Tanım 2.12.1 C derecesi d olan bir eğri, X , C 'nin reel noktalar kümesinde basit bir yay ve ρ pozitif bir sayı olsun. Eğer bu yayı ρd noktada kesen derecesi ρ olan bir eğri varsa, X yayına C 'nin *rankı ρ olan bir bazı (tabanı)* denir. Rankı ρ olan bir baz aynı zamanda rankı ρ 'nun herhangi bir katı olan bir bazdır; çünkü elde edilen eğrinin bir kaç ayrık birleşimi düşünülerek (eğrinin her bir kopyası hafifçe kaydırılarak) derecesi ρ olan yeni eğriler üretebiliriz.

Tanım 2.12.2 C derecesi d olan bir M -eğri olsun. Eğer C rankı $d/2$ olan ayrık iki baza sahipse C 'ye *üreten eğri* denir.

Tanım 2.12.3 C_0 derecesi d_0 olan bir M -eğri ve C de X ve Y gibi iki baz ile d . dereceden üreten eğri olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanırsa C_0 'a C 'nin *yardımcı eğrisi* denir.

- i) $\mathbb{R}C \cap \mathbb{R}C_0$ kesişimi dd_0 farklı noktadan oluşur, ve bu kesişim noktaları $\mathbb{R}C$ 'nin tek bir K parçasında ve benzer şekilde $\mathbb{R}C_0$ 'nin tek bir K_0 parçasında yer alır.
- ii) $\mathbb{R}C \cap \mathbb{R}C_0$ keşim noktalarının dairesel sıralamaları K ve K_0 'da nasıl konumlandığına bağlı olarak aynıdır.
- iii) $X \subset \mathbb{R}C \setminus \mathbb{R}C_0$
- iv) K tek taraflı bir eğri ve $d_0 \equiv d \mod 2$ ise X tabanı K_0 ovalinin dışındadır.
- v) X tabanının rankı, $d + d_0$ ve $2d$ sayılarının bir bölenidir ve Y 'nin rankı da $2d + d_0$ ve $2d$ 'nin bölenidir.

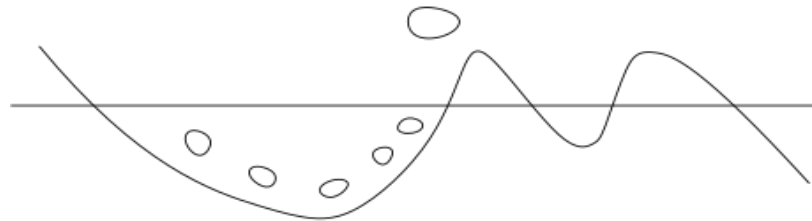
Uyarı 2.12.1 Derecesi $d_0 = 0$ olan boş bir eğri de yardımcı eğri olabilir. Bu durumda, X 'in rankı, üreten eğrinin derecesinin bir böleni olmalıdır.

C d . dereceden üreten bir eğri ve C_0 , d_0 dereceli C 'nin yardımcı eğrisi ve X ile Y , C 'nin bazıları olsun. X 'in rankı $d + d_0$ 'ı böldüğü için X 'in rankını $d + d_0$ olarak kabul edelim. A , X ile $d(d + d_0)$ farklı noktada kesişen $d + d_0$ dereceli reel bir eğri olsun. $C \cup C_0$ eğrisini bir L doğrusu yardımıyla çözersek $d + d_0$ dereceli bir M -eğrisi elde edeceğimiz kolaylıkla görülür. Bu M -eğrisi C 'nin yardımcı eğrisidir ve bazlarda X ve Y 'den elde edilir. C_0 eğrisi yerine yeni ürettiğimiz eğriyi alıp bu yöntemi tekrar edebiliriz. Bu şekilde devam edildiğinde M -eğrilerden oluşan bir dizi elde ederiz öyle ki bu eğrilerin derecesi de aritmetik bir dizi $\{kd + d_0\}_{k=1}^{\infty}$ oluşturur. Bu maksimum eğri üretme yöntemine *Brusotti yöntemi* ve elde edilen M -eğri dizisine de *Brusotti dizisi* denir.

Derecesi $d \leq 2$ bir eğrinin herhangi bir yayı rankı 1 olan bir bazdır, fakat bu durum üçüncü dereceden eğriler için her zaman doğru değildir. Örneğin; derecesi 3 olan bir eğrinin bir yayının 1 ranklı taban olması için gerek ve yeter koşul o yayın büküm noktası içermesidir.

Teorem 2.12.1 ([1]) Üreten eğrinin derecesi $d = 1$ ve yardımcı eğrinin derecesi $d_0 \leq 2$ ise Brusotti yöntemi ile Harnack yöntemi aynıdır. Eğer $d = 2$ ve $d_0 \leq 2$ ise Brusotti yöntemi ile Hilbert yöntemi aynıdır. ■

Brusotti'nin yönteminde derecesi 1 olan üreten eğri ve derecesi $d_0 \leq 4$ olan yardımcı eğri kullanıldığında Harnack'ın yöntemiyle aynı izotopi sınıfına sahip M -eğrilerin elde edildiği gösterilebilir. Ancak derecesi 5 olan yardımcı eğriler kullanılır kullanılmaz, Brusotti'nin yöntemiyle M -eğrilerin yeni izotopi sınıfları elde edilebilir. Yeni izotopi sınıfı üreten 5. dereceden yardımcı eğriyi Gudkov [16] ancak 1971'de buldu. Bu eğrinin bileşenlerinin, sabit bir doğruya göre konumu Şekil 2.13'te gösterilmektedir.

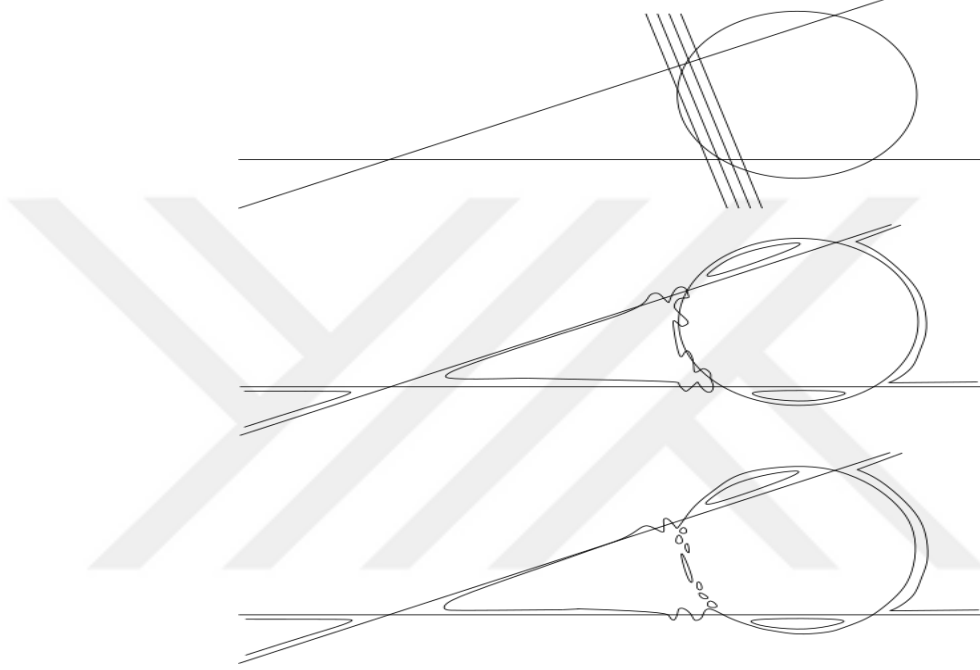


Şekil 2.13 Gudkov'un 5. dereceden yardımcı eğrisi

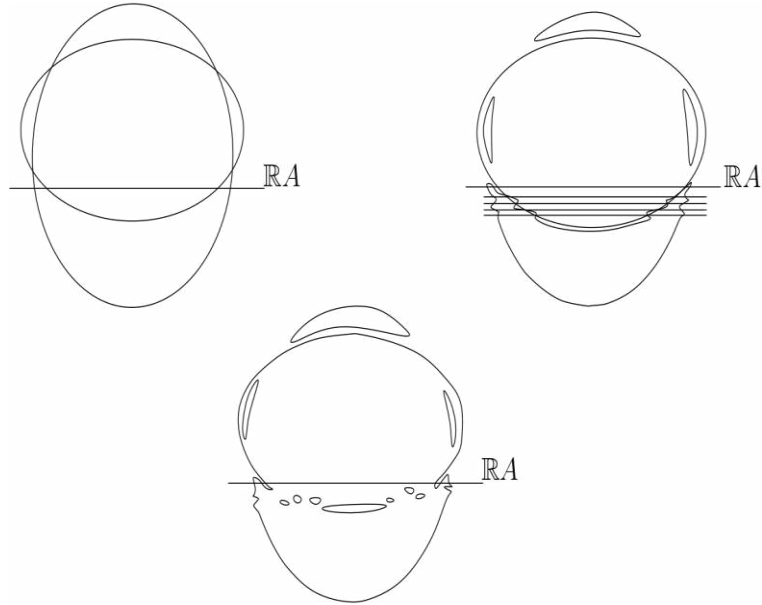
Bu yardımcı eğri ve doğrunun birleşiminin çözülmesiyle Harnack ve Hilbert yöntemiyle elde edilememiş $\langle 5 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle$ izotopi sınıfına sahip 6. dereceden bir M -eğrisi elde edilir.

Bu eğri daha önce 1960'ların sonlarında Gudkov [18] tarafından çok daha karmaşık bir yöntemle bulunmuştur.

Şekil 2.14 ve 2.15' te derecesi 6 olan iki tane yardımcı eğri insası veriliyor. Brusotti yönteminde bu yardımcı eğriler kullanılarak, 8. dereceden başlayan yeni izotopi sınıfında eğriler elde edilir.



Şekil 2.14 Altıncı dereceden Harnak'ın M-eğri inşası



Şekil 2.15 Altıncı dereceden Hilbert'in M-eğrisi inşası (en alttaki)

2.13 Gudkov'un Katkıları

Bölüm 2.4'te gördüğümüz gibi derecesi $d \leq 5$ tekilliği olmayan projektif eğrilerin izotopi sınıflarını belirlemede yukarıda bahsedilen yöntemler yeterlidir. Ancak derecesi $d \geq 6$ olan M -eğriler için bu teknikler artık yeterli değildir. Hilbert [24], derecesi 6 olan M -eğriler için iki tane izotopi sınıfının $\langle 9 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle$, $\langle 1 \sqcup 1\langle 9 \rangle \rangle$ var olduğunu gösterip başkada olamayacağını iddia etti. Bu iddianın ispatında altıncı dereceden eğrilerin uzayının katmanlaşması (stratification) ile ilgili detaylı bir araştırmanın gerekliliğine inanıyordu. Rokhlin 1913'te, Hilbert'in bu bakış açısından ilerleyerek 6.dereceli M -eğriler için $\langle 11 \rangle$ ve $\langle 1\langle 10 \rangle \rangle$ izotopi sınıflarının mümkün olamayacağını gösterdi. Bu eğriler için izotopik sınıflandırma problemin çözümünün tamamlanması Gudkov tarafından gerçekleştirildi.

Teoremi 2.13.1 ([14]) Derecesi 6 olan tekilliği olmayan herhangi bir projektif cebirsel reel düzlem eğrisi Tablo 2.4'te verilen 56 izotopi sınıftan birine aittir.

Tablo 2.4 Altıncı dereceli reel düzlem eğrisinin 56 izotopi sınıfı

$\langle 9 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle$	$\langle 5 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 1 \sqcup 1\langle 9 \rangle \rangle$
$\langle 10 \rangle \langle 8 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle$	$\langle 5 \sqcup 1\langle 4 \rangle \rangle \langle 4 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle$	$\langle 1 \sqcup 1\langle 8 \rangle \rangle \langle 1\langle 9 \rangle \rangle$
$\langle 9 \rangle \langle 7 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \langle 6 \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle \langle 5 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle \langle 4 \sqcup 1\langle 4 \rangle \rangle \langle 3 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle \langle 2 \sqcup 1\langle 6 \rangle \rangle \langle 1 \sqcup 1\langle 7 \rangle \rangle \langle 1\langle 8 \rangle \rangle$		
$\langle 8 \rangle \langle 6 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \langle 5 \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle \langle 4 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle \langle 3 \sqcup 1\langle 4 \rangle \rangle \langle 2 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle \langle 1 \sqcup 1\langle 6 \rangle \rangle \langle 1\langle 7 \rangle \rangle$		
$\langle 7 \rangle \langle 5 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \langle 4 \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle \langle 3 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle \langle 2 \sqcup 1\langle 4 \rangle \rangle \langle 1 \sqcup 1\langle 5 \rangle \rangle \langle 1\langle 6 \rangle \rangle$		
$\langle 6 \rangle \langle 4 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \langle 3 \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle \langle 2 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle \langle 1 \sqcup 1\langle 4 \rangle \rangle \langle 1\langle 5 \rangle \rangle$		
$\langle 5 \rangle \langle 3 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \langle 2 \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle \langle 1 \sqcup 1\langle 3 \rangle \rangle \langle 1\langle 4 \rangle \rangle$		
$\langle 4 \rangle \langle 2 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \langle 1 \sqcup 1\langle 2 \rangle \rangle \langle 1\langle 3 \rangle \rangle$		
$\langle 3 \rangle \langle 1 \sqcup 1\langle 1 \rangle \rangle \langle 1\langle 2 \rangle \rangle$	$\langle 1\langle 1\langle 1 \rangle \rangle \rangle$	
$\langle 2 \rangle \langle 1\langle 1 \rangle \rangle$		
$\langle 1 \rangle$		
$\langle 0 \rangle$		

Gudkov'un Varsayımları 2.13.2

(i) Derecesi $d = 2k$ olan herhangi bir M -eğrisi için

$$c - t \equiv k^2 \pmod{8}$$

(ii) Derecesi $d=2k$ olan herhangi bir $(M-1)$ -eğrisi için

$$c - t \equiv k^2 \pm 1 \mod 8$$

sağlanır. ■

V. I. Arnold [15], (i) varsayımını kanıtlamaya çalışırken, reel cebirsel bir düzlem eğrisinin topolojisi ile onun kompleksleştirilmiş halinin topolojisi arasında bazı çarpıcı bağlantılar keşfetti. Bu hipotez yerine daha zayıf bir halini, yani 8 yerine modülü 4, kanıtlamıştır. Aynı zamanda Teorem 2.11.4'te sözü edilen Petrovsky'nin eşitsizliklerini güçlendirdi. Gudkov'un (i). varsayımı ve onun yüksek boyuta genellemesi Arnold'un 1971 yılında keşfettiği bağlantılardan yararlanılarak Rokhlin [17] tarafından ispatlandı.

BÖLÜM 3

REEL CEBİRSEL EĞRİLERE KOMPLEKS AÇIDAN BAKIŞ

3.1 Reel Eğrilerin Kompleks Topolojisi

F.Klein [22] 1876'da tekilliği olmayan reel projektif cebirsel $C \subset \mathbb{P}^2$ eğrisinin izotopi sınıfının, C 'nin reel noktalar kümesinin ($\mathbb{R}C$ 'nin), C 'nin kompleks noktalar kümesinde (yani $\mathbb{C}C$ 'de) nasıl konumlandığına bağlı olup olmadığıyla ilgilenmiştir. Bilindiği gibi $\mathbb{C}C$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ 'nin yönlendirilebilir pürüzsüz iki boyutlu alt uzayıdır, ve onu topolojisi C 'yi belirleyen polinomun derecesine bağlıdır. Eğer polinomun derecesi d ise $\mathbb{C}C$, küreye $(d-1)(d-2)/2$ tane kulp (handle) eklenmesiyle elde edilir. Burada kulp sayısı yüzeyin cinsi (genusu) olarak adlandırılır. O halde Bölüm 2'de bahsedilen topolojik problem $\mathbb{C}C$ için sıradandır. İzotopi sınıflandırması da bu durumda sıradan bir probleme dönüşür çünkü $(\mathbb{C}\mathbb{P}^2, \mathbb{C}C)$ ikilisinin topolojisi yine C 'yi belirleyen polinomun derecesi tarafından belirlenir. Bölüm 2.7.1'de bahsedilen deformasyon (rigid izotopi) problemi yine bu durumda aşıkardır çünkü $\mathbb{C}C_d \setminus \mathbb{C}SC_d$ uzayının reel boyutu 2 olduğundan, $\mathbb{C}NC_d$ uzayı (yani tekilliği olmayan d . dereceden kompleks projektif eğrilerin uzayı) bağlantılıdır. Burada $\mathbb{C}C_d$, d . dereceden kompleks projektif eğrilerin uzayı iken, $\mathbb{C}SC_d$ ise bu uzayda tekilliği olan eğrilerin uzayıdır.

Uyarı 3.1.1 C eğrisinin kompleks noktalar kümesi $\mathbb{C}C$, $[z_0:z_1:z_2] \rightarrow [\bar{z}_0:\bar{z}_1:\bar{z}_2]$ tanımlı kompleks involusyon, $conj: \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, altında korunur ve sabit bıraktığı noktalar kümesi, $\{p \in \mathbb{C}C \mid conj(p) = p\}$, $\mathbb{R}C$ kümesine eşittir.

Tanım 3.1.1 Klein'e göre eğer $\mathbb{C}C \setminus \mathbb{R}C$ uzayı bağlantılı değilse C 'ye *bölen eğri* ya da *Tip 1 eğri* denir. Aksi halde C 'ye *Tip 2 eğri* denir. Aslında eğer C , Tip 1 eğri ise $\mathbb{C}C \setminus \mathbb{R}C$ uzayı 2 parçadan oluşur (bunlara *halves* denir), ve bu parçalar yönlendirebilir

olup onların *yönlendirilmesi* (*orientations*), $\mathbb{R}C$ için iki tane zıt yönlendirme tanımlar. $\mathbb{R}C$ eğrisinin bu yönlendirmelerine eğrinin *kompleks yönlendirmeleri* (*complex orientations*) denir.

Bu zıt yönlendirmelerin oluşturduğu ikiliye *yarı-oryantasyon* (*semi orienatation*) denir. O halde Tip 1 eğrilerin kompleks yönlendirmeleri yarı-oryantasyon üretir.

Tanım 3.1.2 Bölüm 2.2’de ifade edilen bir eğrinin ovallerinin birbirine göre konumunun gösterimine eğrinin *reel gösterimi* denir. Eğrinin tipinin reel gösterime eklenmesiyle elde edilen ifadeye ya da Tip 1 eğriler için eğrinin kompleks yönlendirmelerinin reel gösterime eklenmesiyle elde edilen ifadeye eğrinin *kompleks gösterimi* denir.

Eğer bir C eğrisi Tip 1 (veya Tip 2) ise bu eğrinin reel gösterimine Tip 1 (veya Tip 2) denir.

Daha sonraki bölümlerde göreceğimiz gibi kompleks gösterim fikri reel gösterimden daha kullanışlıdır. Bir eğrinin kompleks gösterimi deformasyon altında korunur. Böylece reel gösterimi aynı; fakat kompleks gösterimi farklı olan iki eğri aynı deformasyon sınıfında yer alamaz. Şekil 2.9’da gösterilen beşinci dereceli eğriler bunun tipik örneğidir.

Örnek 3.1.1 Örnek 1.2.1.1’de gösterildiği gibi kompleks projektif doğru ($\mathbb{CP}^1$), küreye ve reel projektif doğru ($\mathbb{RP}^1$) da çembere (S^1) homeomorfiktir. Jordan teoreminden $\mathbb{CP}^1 \setminus \mathbb{RP}^1$ bağlantılı değildir. O halde $\mathbb{RP}^1$, Tip 1 olup zıt iki yönlendirmeye sahiptir. Fakat $\mathbb{RP}^1$ bağlantılı bir uzay oluşu için bu yönlendirmeleri reel gösterimde göstermeye gerek yoktur.

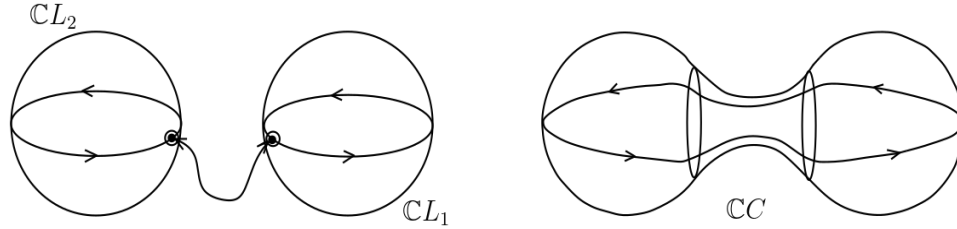
Örnek 3.1.2 $X = Z(F) \subset \mathbb{P}^2$ tekilliği olmayan reel projektif konik olsun. Burada F ’nin derecesi $d = 2$ olup cins formülünden $g = (2 - 1)(2 - 2)/2 = 0$ elde edilir. O halde $\mathbb{C}X$, S^2 ’ye homoemorfiktir. Küre üzerinde 2 farklı involusyon mevcuttur:

$$c_1: S^2 \rightarrow S^2, c_1(x, y, z) = (x, y, -z) \quad \text{ve} \quad c_2: S^2 \rightarrow S^2, c_2(x, y, z) = (-x, -y, -z).$$

Birincisine göre $\mathbb{R}X = S^1$, fakat ikincisine göre $\mathbb{R}X = \emptyset$ 'dir. O halde boş küme Tip 2 eğridir. Jordan teoreminden, reel parçası boştan farklı olan tekiliği olmayan ikinci dereceden eğriler Tip 1'dir. Böylece $\langle 0 \rangle$ reel gösterim Tip 2 iken $\langle 1 \rangle$ reel gösterim Tip 1'dir.

3.2 Kompleks Bakış Açısıyla Klasik Çözme Yöntemi

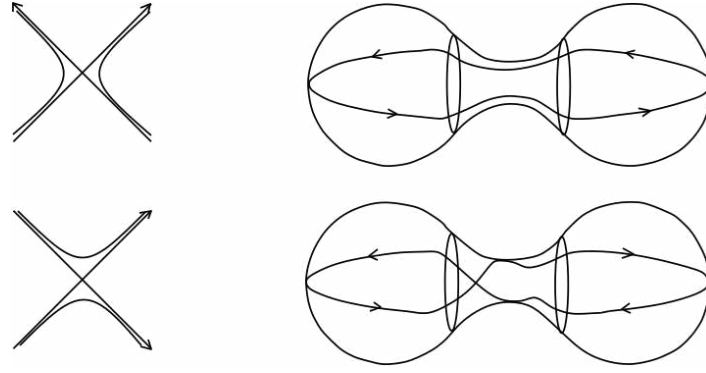
Bu bölümde Bölüm 2.5'te verilen klasik çözme yöntemini kompleks açıdan inceleyeceğiz. Örnek olarak bir noktada kesişen iki reel $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^2$ doğrusunu alalım. Bu tek noktanın klasik çözülmesi ile elde edilen eğriye de C diyelim. Bildiğimiz gibi $\mathbb{C}L_i$ ve $\mathbb{C}C$ küreye homeomorfiktir. $\mathbb{C}L_1$ ve $\mathbb{C}L_2$ küreleri tek noktada birbirlerine yapışıktır. U_0 , bu noktanın bir komşuluğu olsun öyle ki $\mathbb{C}C \setminus U_0$, $(\mathbb{C}L_1 \cup \mathbb{C}L_2) \setminus U_0$ 'in tüp komşuluğunun bir bölümüdür (*section*). O halde $\mathbb{C}C \setminus U_0$ topolojik olarak iki ayrık dairedir. $\mathbb{C}C$, S^2 'ye homeomorfik olduğu için $\mathbb{C}C \setminus (D^2 \sqcup D^2)$ iç içe geçmiş çemberler arasındaki bölgeye (annulus) homeomorfiktir. Dikkat edilirse burada herşey conj involusyonuna göre korunur. Yani, kesişim noktası reel noktadır ve U_0 , conj altında korunacak şekilde seçilebilir. Şekil 3.1'de görüldüğü gibi $\mathbb{C}C$ 'nin yarısı iki yarım disk ve bunlara bağlantılı yarım annulus olarak ifade edilir.



Şekil 3.1 Kompleks açıdan klasik çözme yöntemi

Eğer C eğrimiz Tip 1 ise $\mathbb{C}C \setminus \mathbb{R}C$ 'in sahip olduğu iki simetrik parça, $\mathbb{R}C$ 'nin yönlendirmesiyle ayırt edilir. Bir noktada kesişen iki reel doğru $\mathbb{C}P^2$ 'de Şekil 3.2'de görüldüğü gibi iki farklı şekilde çözülür.

Kompleks parçanın klasik çözülmeden nasıl etkilendiğini anlamak için yukarıda fikir anahtar niteliğindedir. İlk olarak reel parçaya bakmadan kompleks parçaya bakacağız. C , dejenere olmayan çift katlı tekil noktasına sahip projektif düzlem eğrisi olsun. C , bu nokta civarında bir noktada kesişen iki doğru gibi görünür. Morse Lemma'dan



Şekil 3.2 Kesişen iki reel doğrunun $\mathbb{RP}^2$ ve $\mathbb{CP}^2$ 'de çözülmesi (soldan sağa)

$U \subset \mathbb{CP}^2$, bu nokta civarında bir komşuluk olmak üzere $U \cap C$ kesişimini 0'da kesişen iki kompleks doğruya götüren bir $f: U \rightarrow \mathbb{C}^2$ gömme fonksiyonu vardır. Yine Morse Lemma'dan eğrinin çift katlı noktaları civarında klasik çözülmesi; bu doğruların çözülmesine denktir. Yani birbiriyle transverse kesişen iki disk, annulus ile yer değiştirir.

Örnek 3.2.1 $C \subset \mathbb{P}^2$ ikişer ikişer kesişen, ama üç tanesi aynı noktadan geçmeyen d tane projektif doğrunun birleşimi olsun. Bu eğrinin kompleks parçası $\mathbb{CC}$, herhangi ikisi tek noktada teğet d tane kürenin birleşimidir. Burada çözülme her küreden $d - 1$ ayrık daireler çıkartıp yerine bu dairelerin sınır çemberine $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ tane tüp bağlamak anlamına gelir. Elde edilen kompleks manifold olduğundan yönlendirilebilirdir ve Euler karakteristik hesabıyla bu uzayın cinsi $\frac{(d-1)(d-2)}{2}$ olduğu görülür.

Teorem 3.2.2 ([1]) $C \subset \mathbb{P}^2$ bir reel bir eğri olsun. Eğer $\mathbb{RC} = \emptyset$ ise C , Tip 2'dir. ■

Teorem 3.2.3 ([1]) Maksimal eğrileri (yani M -eğrileri) Tip 1'dir.

İspat. C derecesi d olan bir M -eğrisi olsun. O zaman $\mathbb{RC}$, $(d - 1)(d - 2)/2 + 1$ tane ayrık çemberin birleşimidir. $\mathbb{CC}$ de cinsi $g = (d - 1)(d - 2)/2$ olan yönlendirebilir yüzeydir. Varsayalım ki C , Tip 1 olmasın. $\mathbb{CC}$ 'yi $\mathbb{RC}$ boyunca kesildiğinde elde edilen yüzey bağlantılıdır. Bu yüzeyin Euler karakteristiği χ bu süreçte değişmez ve

$$\chi = 2 - 2g = 2 - 2(d - 1)(d - 2)/2 = 2 - (d - 1)(d - 2)'e$$

eşittir. $\mathbb{RC}$ 'nin her bir parçası sınırdaki 2 tane çember ortaya çıkarır. Böylece sınırdaki çember sayısı $(d - 1)(d - 2) + 2$ 'dir. Her sınır çemberini daire ile kapatıldığında elde

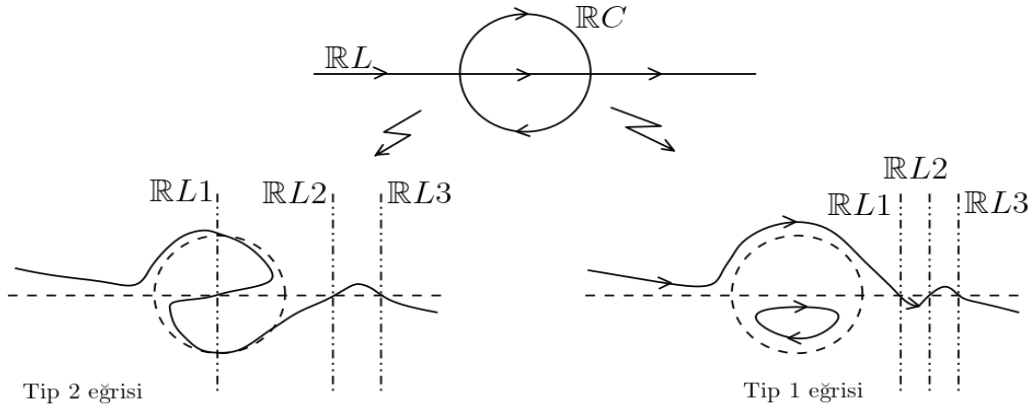
edilen yüzeyin Euler karakteristiği $2 - (d - 1)(d - 2) + (d - 1)(d - 2) + 2 = 4$ olur. Fakat Euler karakteristiği 4 olan bağlantılı kapalı bir yüzey yoktur. ■

Teorem 3.2.4 ([1]) $C \subset \mathbb{P}^2$ derecesi d olan reel bir eğri olsun. Eğer C 'nin reel gösterimi derinliği $d/2$ içeren bir yuvaya sahipse bu eğri Tip 1'dir.

İspat. Bu yuvanın iç ovalinden bir $p \in \mathbb{RP}^2$ noktası alalım. Bu noktadan geçen her reel doğru $\mathbb{R}C$ 'yi d noktada kestiği için $\mathbb{C}C \setminus \mathbb{R}C$ ile kesişmez. $\mathbb{C}C \setminus \mathbb{R}C$ 'nin $f: \mathbb{CP}^2 \setminus \mathbb{RP}^2 \rightarrow S^2$ fonksiyonu altındaki görüntüsü ile büyük çember ortak bir noktaya sahip değildir. Fakat görüntü kümesi nokta ve onun antipodal noktasını da içerir. Böylece bağlantılı olamaz. O halde $\mathbb{C}C \setminus \mathbb{R}C$ de bağlantılı değildir. ■

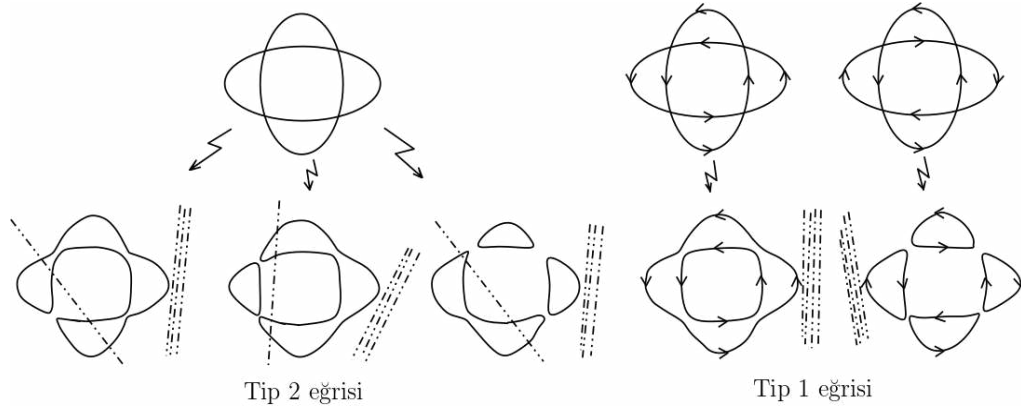
Teorem 3.2.1 (Rokhlin [11] ve Marin [9]) $C_1, \dots, C_k$ dereceleri sırasıyla $d_1, \dots, d_k$ olan ve tekilliği olmayan eğriler olsun öyle ki bunlardan üçü aynı noktadan geçmesin ve her i, j için C_i ile C_j eğrisi $d_i d_j$ reel noktada kesişsin. C de $C_1 \cup \dots \cup C_k$ eğrisinin klasik çözülmesi sonucunda elde edilen tekilliği olmayan eğri olsun. O zaman C 'nin Tip 1 olması için gerek ve yeter koşul her i için C_i 'nin Tip 1 olması ve $\mathbb{R}C$ 'nin $C_1, \dots, C_k$ 'nin bazı kompleks yönlendirmesiyle aynı yönlendirmeye sahip olmasıdır. (Yani $C_1 \cup \dots \cup C_k$ birleşimi C 'ye dönüştüren deformasyon C_i 'nin kompleks yönlendirmelerini $\mathbb{R}C$ 'nin tek yönlendirmesinin ürettiği $\mathbb{R}C$ 'nin ilgili kısmının yönlendirmelerine taşır.) ■

Örnek 3.2.2 Şekil 3.3'te kübik eğrilerin kompleks yönlendirmesi gösterilmiştir.



Şekil 3.3 Kompleks yönlendirmesi ile gösterilen kübik eğriler

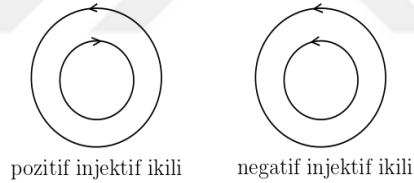
Örnek 3.2.3 Dördüncü dereceden eğrilerin kompleks yönlendirmesinin eğrinin tipine göre ayrımı Şekil 3.4'te verilmiştir.



Şekil 3.4 Kompleks yönlendirmesi ile gösterilen dördüncü dereceden eğri.

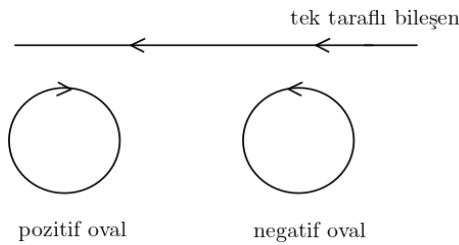
3.3 Eğrilerin Kompleks Gösterimi

Eğer injektif iki ovalin yönlendirmeleri (bunları eğrinin yönlendirmesi üretir), bu ovalerin sınırladığı annulus tarafından üretiliyorsa bu ovalere *pozitif* denir. Aksi halde *negatif* denir (Şekil 3.5'e bakınız). Bir eğrideki pozitif injektif ikili sayısını i^+ ile negatif injektif sayısını da i^- ile gösterelim.



Şekil 3.5 İnjektif ikililerin işareti

Tek taraflı bir eğrinin ovaleri de *negatif* ve *pozitif* diye ikiye ayrılır şöyle ki bu ovalerden birinin sınırladığı daireyi $\mathbb{RP}^2$ 'den çıkardığımızda elde edilen Möbius şeridini düşünelim. Bu ovalin homoloji sınıfı ile tek taraflı bileşenin homoloji sınıfı Möbius şeridinde aynı ise o zaman bu ovale *negatif* aksi halde *pozitif* denir. Örnek için Şekil 3.6'ya bakınız.



Şekil 3.6 Tek taraflı eğrinin ovalerinin işareti

İki taraflı eğrilerde sadece dışta yaşamayan ovaler pozitif ve negatif diye adlandırılır. Eğer dışta olmayan bir oval onu çevreleyen diğer oval ile birlikte bir pozitif ikili oluşturursa *pozitif* aksi halde *negatif* denir. Bu durumda ovalerin işareti eğrinin yönlendirmesine bağlı değildir. p ve n ile sırasıyla bir eğrideki pozitif ve negatif ovalerin sayısını gösterelim.

C , d . dereceden bir düzlem eğrisi olsun. $(\mathbb{RP}^2, \mathbb{CC})$ ikilisini topolojik olarak ayırt etmek için aşağıdaki kodlama kullanılacaktır. C eğrisi Tip 1 (veya Tip 2) ise reel gösterimde I (veya II) alt indeks olarak ve eğrinin derecesi de üst index olarak yazılır. Ayrıca Tip 1 eğriler için negatif ovaler için ovalin üstüne $-$, pozitifler ovaler için $+$ yazılır.

Örnek 3.3.1 Şekil 3.2.3'te verilen kübik eğrilerin kompleks gösterimi $\langle J \rangle_{II}^3$ ve $\langle J \sqcup 1^- \rangle_I^3$ 'dir. Şekil 3.2.4'te verilen 4. dereceden eğrilerin kompleks gösterimi $\langle 0 \rangle_{II}^4$, $\langle 1 \rangle_{II}^4$, $\langle 2 \rangle_{II}^4$, $\langle 1(1^-) \rangle_I^4$, $\langle 3 \rangle_{II}^4$ ve $\langle 4 \rangle_I^4$ 'tür.

3.4 Rokhlin'in Kompleks Yönlendirme Formülü

Bu bölümde Rokhlin tarafından Tip 1 tipindeki tekilliği olmayan cebirsel eğrilerin kompleks yönelimi üzerinde verilmiş sonuçlardan bahsedilmektedir.

Teorem 3.4.1 (Rokhlin Formülü [11]) C derecesi $2k$ olan Tip 1 bir eğri ve l 'de C 'nin bileşen sayısı olsun. O zaman

$$2(i^+ - i^-) = l - k^2 \text{ dir. } \blacksquare$$

Teorem 3.4.2 (Rokhlin-Mishachev Formülü [11]) C derecesi $2k + 1$ olan Tip 1 bir eğri ve l 'de C 'nin bileşen sayısı olsun. O zaman

$$(p - n) + 2(i^+ - i^-) = l - (k^2 + k) \text{ dir. } \blacksquare$$

Teorem 3.4.3 (Rokhlinin Kompleks Yönlendirme Formülü [11]) C derecesi d olan Tip 1 tekilliği olmayan reel projektif eğri olsun. O zaman

$$\int (i_{\mathbb{RC}}(x))^2 d\chi(x) = \frac{d^2}{4} \text{ dür. } \blacksquare$$

KAYNAKLAR

- [1] Viro, O. Introduction to topology of real algebraic varieties. (2007). Intl: <http://archive.schools.cimpa.info/archivesecoles/20141218145605/es2007.pdf>.
- [2] Orevkov, S.Yu. (2002). Classification of flexible M-curves of degree 8 up to isotopy, *Geom. And Funct. Anal.* 12, 723-755.
- [3] Kharlamov, V., Viro, O.Ya. (2007). Easy reading on topology of real plane algebraic curves. Intl.: 'http://www.pdmi.ras.ru/ olegviro/introMSRI.pdf'.
- [4] Orevkov, S.Yu. (1999). Link theory and oval arrangements of real algebraic curves, *Topology* 38 (1999), no. 4, 779-810
- [5] Itenberg, I., and O. Viro, Patchworking algebraic curves disproves the Ragsdale conjecture *Math. Intelligencer* 18 (1996), no. 4, 19-28.
- [6] Shustin, E. (1992). Topology of real plane algebraic curves, *Lect. Notes Math.*, Springer. **1524**, 97-109.
- [7] Viro, O.Ya. (1990) Real algebraic plane curves: constructions with controlled topology, *Leningrad J. Math.* **1**, no. 5, 1059-1134.
- [8] Shustin, E. (1988) New M - and $(M - 1)$ -curves of degree 8, *Lecture notes in math.*, Springer. **1346**, 487-493.
- [9] Marin, A. (1980). Quelques remarque sur les courbes algebriques planes reelles, *Publ. Math. Univ. Paris VII.* **9**.
- [10] Viro, O.Ya. (1980). Curves of degree 7, curves of degree 8, and the Ragsdale conjecture, *Soviet Math. Dokl.* **22**, 566–570.
- [11] Rokhlin, V.A. (1978) Complex topological characteristics of real algebraic curves, *Usp. Mat. Nauk.* **33**, no. 5, 77-89.
- [12] Wilson, G. *Hilbert's sixteenth problem*, *Topology* **17** (1978), 53–74.
- [13] Hartshorne, R. (1977). *Algebraic Geometry*. Springer-Verlag.
- [14] Gudkov, D.A. (1974). The topology of real projective algebraic varieties, *Russian Math. Surveys.* **29:4**, 1–79.

- [15] Arnold, V.I. (1971). On the location of ovals of real algebraic plane curves, involutions on four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integral quadratic forms, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **5**, 260–1-9.
- [16] Gudkov, D.A. (1971) Construction of new series of M -curves, *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **.200.** 1269-1272.
- [17] Rokhlin, V.A. (1972). Congruences modulo 16 in Hilbert’s sixteenth problem, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.* **6**, 58-64.
- [18] Gudkov, D.A., Utkin, G.A. (1969). The topology of curves of degree 6 and surfaces of degree 4, *AMS*. **112**.
- [19] Brusotti, L. (1956). Su talune questioni di realita nei loro metodi, risultati e problemi, *Colloque sur les Questions de Realite en Geometrie*. 105-129.
- [20] Milnor, J. (1969). *Morse theory*. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.
- [21] Petrovsky, I.G. (1938). On the topology of real plane algebraic curves. *Annals of Mathematics*. **39**, 187-209.
- [22] Klein, F. (1922). *Gesammelte mathematische Abhandlungen*. Vol.**2**, Berlin.
- [23] Ragsdale, V. (1906). On the arrangement of the real branches of plane algebraic curves, *Amer. J. Math.* **28**. 377-404.
- [24] Hilbert, D. (1901). Mathematische Probleme, *Arch. Math. Phys.* **3**, 213-237.
- [25] Harnack, A. (1876). Über Vieltheiligkeit der ebenen algebraischen Curven, *Math. Ann.* **10**, 189-199.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Muhammed PEKTAŞ

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Üniversite	Mezuniyet Yılı
Y.Lisans	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2023
Lisans	Matematik	Gaziantep Üniversitesi	2018

Uluslararası bilimsel araştırmalar kongresinde sunulan ve bildiri kitabında basılan bildiriler

Pektaş, M. (2023) Reel Düzlemsel Eğrilerin Topolojisi, 4. *International Anatolian Congress on Multidisciplinary Research*.

