



**REEL DİZİLERİN α . MERTEBEDEN
YAKINSAKLIK TİPLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Arzu ÇETE

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2023

AFYON KOCATEPE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

REEL DİZİLERİN α . MERTEBEDEN
YAKINSAKLIK TİPLERİ

Arzu ÇETE

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2023

TEZ ONAY SAYFASI

Arzu ÇETE tarafından hazırlanan “Reel Dizilerin α . Mertebeden Yakınsaklık Tipleri” adlı tez çalışması lisansüstü eğitim ve öğretim yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca 25/01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından **oy birliği** ile Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü **Matematik Anabilim Dalı**’nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE

Başkan : Prof. Dr. Erdiñ DÜNDAR
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Üye : Doç. Dr. Uğur ULUSU
Sivas Cumhuriyet Üniv.,
Cumhuriyet Sosyal Bilimler MYO

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE
Afyon Kocatepe Üniv., Fen Edebiyat Fak.

Afyon Kocatepe Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu’nun
...../...../..... tarih ve
..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. İbrahim EROL
Enstitü Müdürü

BİLİMSEL ETİK BİLDİRİM SAYFASI

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü, tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Ve bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı

beyan ederim.

25/01/2023

Arzu ÇETE

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

REEL DİZİLERİN α . MERTEBEDEN YAKINSAKLIK TİPLERİ

Arzu ÇETE

Afyon Kocatepe Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE

Bu tez çalışması altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm giriş kısmına ayrılarak konunun tarihi gelişimi verilmiştir. İkinci bölümde, tez çalışmamızın daha iyi anlaşılması için gerekli olan temel kavramlardan bahsedilmiştir. Üçüncü bölümde, reel diziler için α . mertebeden istatistiksel yakınsaklık ve α . mertebeden kuvvetli p -Cesàro toplanabilme kavramları tanımlanarak, bu kavramların bazı özellikleri ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir. Dördüncü bölümde, reel diziler için α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılarak, bazı özellikleri ile α . mertebeden istatistiksel yakınsaklık kavramı ile arasındaki içerme bağıntıları verilmiştir. Ayrıca, α . mertebeden kuvvetli p -lacunary toplanabilme kavramı da verilerek, bu kavram ile α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı arasındaki ilişkiler örnekler ve teoremlerle açıklanmıştır. Beşinci bölümde, reel diziler için α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel ve $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramlarının tanımları ve bazı özellikleri verilmiştir.

Son bölümde ise, bu çalışmada yararlanılan kaynaklar listelenmiştir.

2023, v + 35 sayfa

Anahtar Kelimeler : α . mertebe, Cesàro toplanabilme, İstatistiksel yakınsaklık, Lacunary dizi, $\mathcal{I}$ -yakınsaklık.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

CONVERGENCE TYPES OF ORDER α FOR REAL SEQUENCES

Arzu ÇETE

Afyon Kocatepe University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

Supervisor : Asst. Prof. Esra GÜLLE

This thesis study consists of six sections.

The first section is dedicated to an introduction part by giving the progress of the topic over the years. In the second section some elemental notions are mentioned in order to be more understandable of the work. In the third section, statistical convergence of order α and strong p -Cesàro summability concepts for real sequences are introduced, some properties and relationships between them are examined. In the forth section, lacunary statistical convergence of order α concept for real sequences is introduced, its properties and inclusion relations with statistical convergence of order α concept are given. Also, strong p -lacunary statistical convergence of order α concept is presented, the interactions among the two concepts given in forth section are explained with theorems and examples. In the fifth section, $\mathcal{I}$ -statistical and $\mathcal{I}$ -lacunary statistical convergence concepts of order α for real sequences are defined, their some features are offered.

Finally, in the sixth section, resources applied for this study are listed.

2023, v + 35 pages

Keywords : Order α , Cesàro summability, Statistical convergence, Lacunary sequence, $\mathcal{I}$ -convergence.

TEŞEKKÜR

Tez danışman hocam Sayın Dr. Öğr. Üyesi Esra GÜLLE'ye tez çalışmam için konunun belirlenmesi, çalışmaların yürütülmesi ve tezimin yazım sürecindeki gayret ve katkılarından dolayı teşekkürü bir borç bilirim.

Lisans ve Yüksek Lisans eğitimim boyunca üzerimde emeği olan ve bilgileriyle bana ışık tutan tüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca, tez çalışmam süresince maddi ve manevi destekleriyle hep yanımda olan aileme teşekkürlerimi sunarım.

Arzu ÇETE

Afyonkarahisar, 2023

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER DİZİNİ	iv
SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ	v
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	2
3 DİZİLERİN α . MERTEBEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI . . .	9
4 DİZİLERİN α . MERTEBEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	14
4.1 Dizilerin α . Mertebeden Kuvvetli Lacunary Toplanabilirliği	18
5 DİZİLERİN α . MERTEBEDEN $\mathcal{I}$ - İSTATİSTİKSEL VE $\mathcal{I}$ - LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI	23
6 KAYNAKLAR	33
ÖZGEÇMİŞ	35

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
(a_m)	Reel sayı dizisi
$\lim a_m$	a_m dizisinin limiti
$st - \lim a_m$	(a_m) dizisinin istatistiksel limiti
$2^{\mathbb{N}}$	$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin kuvvet kümesi
$\theta = \{j_t\}$	Lacunary dizi
$\mathcal{I}$	İdeal
$\mathcal{F}$	Süzgeç
$\mathcal{I} - \lim a_m$	(a_m) dizisinin $\mathcal{I}$ -limiti
$\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$	Doğal yoğunluğu sıfır olan kümelerin oluşturduğu ideal
$\mathcal{I}_f$	Sonlu elemanlı kümelerin oluşturduğu ideal
S	İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S_{θ}	Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S(\mathcal{I})$	$\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S(\mathcal{I})^{\alpha}$	α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
S_{θ}^{α}	α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$S_{\theta}(\mathcal{I})^{\alpha}$	α . mertebeden $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi
$[N_{\theta}^{\alpha}(p)]$	α . mertebeden kuvvetli p -lacunary yakınsak dizilerin kümesi

1. GİRİŞ

Uzaklık fonksiyonu yardımıyla tanımlanan yakınsaklık kavramı, matematiksel analizin temel kavramlarından biridir. İstatistiksel yakınsaklık fikri Zygmund tarafından 1935 yılında Varşova’da yayımlanan monografisinin ilk baskısında ortaya atıldı. Reel dizilerinin istatistiksel yakınsaklığı kavramı 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast ve Steinhaus tarafından tanıtıldı. Yıllar boyunca ve farklı isimler altında istatistiksel yakınsaklık kavramı Fourier analizi teorisinde, ergodik teoride, ölçü teorisinde, trigonometrik serilerde ve Banach uzaylarında tartışılmaya devam etmiştir.

Temelde doğal sayılar kümesinin altkümelerine dayanan bir ideal kavramı olan ve istatistiksel yakınsaklık kavramının önemli bir genelleştirmesi olan $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramı Kostyrko vd. (2000) tarafından çalışmalarında verilmiştir. Daha sonra bu kavram toplanabilme teorisinde pek çok araştırmacının ilgisini çekmiş ve araştırmacılar bu kavram üzerine çalışmalar yapmışlardır. Bu çalışmalardan biri olan ve 2011 yılında Das vd. tarafından yapılan bir çalışmada, istatistiksel ve $\mathcal{I}$ -yakınsaklık kavramlarının bir kombinasyonu olarak $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı tanıtılarak, bu kavramın bazı özellikleri incelenmiştir.

Bir reel dizinin istatistiksel yakınsaklığının mertebesi Gadjiev ve Orhan (2002) tarafından verilmiştir. Bu kavramın tanıtılmasından sonra birçok araştırmacı bu kavramı genişleterek çalışmalarında yer vermiştir.

Bu tez çalışmasının ikinci bölümünde, çalışmanın daha anlaşılır olması için dizi uzayları ve toplanabilme teorisi literatüründe bulunan bazı temel kavramlar verilmiştir.

Tez çalışmasının sonraki bölümlerinde, sırasıyla Çolak (2010), Şengül ve Et (2014) ve Das ve Savaş (2014) tarafından yapılan çalışmalardaki temel tanımlar verilerek, örnek ve teoremler analiz edilmiştir.

Tez çalışmasının son bölümüne ise, çalışma boyunca faydalanan literatürdeki kaynaklar eklenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, dizi uzayları ve toplanabilme teorisinde yapılan ayrıntılı literatür taraması sonucunda tez çalışmasının daha anlaşılır olması için gerekli olduğu kanaatine vardığımız temel kavram ve notasyonlar verilecektir.

Tanım 2.1 $\mathcal{V}$ boştan farklı bir küme olsun. $\mu : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{V}$ için

$$M_1. \mu(v_1, v_2) = 0 \Leftrightarrow v_1 = v_2$$

$$M_2. \mu(v_1, v_2) = \mu(v_2, v_1)$$

$$M_3. \mu(v_1, v_3) \leq \mu(v_1, v_2) + \mu(v_2, v_3)$$

şartlarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna $\mathcal{V}$ de bir metrik fonksiyon ve $(\mathcal{V}, \mu)$ ikilisine de metrik uzay denir (Bayraktar 2006).

Bu tez çalışması boyunca, $\mathcal{V} = \mathbb{R}$ uzayı üzerinde $\mu(v_1, v_2) = |v_1 - v_2|$ biçiminde tanımlanan mutlak değer metriği gözönüne alınacaktır.

Tanım 2.2 Tanım cümlesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi olan fonksiyonlara dizi denir. Eğer dizinin değer cümlesi $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ise bu diziye reel terimli dizi veya reel dizi denir (Balcı 2010).

Genel terimi a_m olan bir dizi $(a_m) = (a_1, a_2, \dots, a_m, \dots)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 2.3 (a_m) bir dizi olmak üzere her m doğal sayısı için $|a_m| \leq \mathcal{M}$ olacak biçimde pozitif bir $\mathcal{M}$ sayısı varsa bu diziye sınırlı dizi denir (Balcı 2010).

Sınırlı reel dizilerin kümesi l_∞ ile gösterilir.

Tanım 2.4 (a_m) bir dizi ve a bir reel sayı olsun. Her $\delta > 0$ için $m > m_0$ olduğunda $|a_m - a| < \delta$ olacak şekilde bir $m_0 = m_0(\delta) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabiliyorsa (a_m) dizisi a ya yakınsaktır denir ve $a_m \rightarrow a$ biçiminde gösterilir (Balcı 2010).

Tanım 2.5 F reel veya kompleks sayılar cismi ve $\mathcal{V}$ boştan farklı bir küme olmak üzere

$$+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

$$\cdot : F \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$$

işlemleri her $v, y, z \in \mathcal{V}$ ve her $a, b \in F$ için

$$L_1. v + y = y + v$$

$$L_2. (v + y) + z = v + (y + z)$$

$$L_3. \text{ Her } v \in \mathcal{V} \text{ için } v + \theta = v \text{ olacak şekilde bir } \theta \text{ vardır.}$$

$$L_4. \text{ Her bir } v \in \mathcal{V} \text{ için } v + (-v) = \theta \text{ olacak şekilde bir } -v \text{ vardır.}$$

$$L_5. 1.v = v$$

$$L_6. a(v + y) = av + ay$$

$$L_7. (a + b)v = av + bv$$

$$L_8. a(bv) = (ab)v$$

özelliklerini sağlıyorsa $\mathcal{V}$ kümesine F cismi üzerinde bir lineer uzay denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.6 $\mathcal{V}$, F cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\|\cdot\| : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v \rightarrow \|v\|$$

dönüşümü her $v, y \in \mathcal{V}$ için

$$N_1. \|v\| \geq 0$$

$$N_2. \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

$$N_3. \|av\| = |a| \|v\|, a \in F$$

$$N_4. \|v + y\| \leq \|v\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa bu dönüşüme bir norm ve $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.7 $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve (a_m) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\delta > 0$ için $m > m_0$ olduğunda $\|a_m - a\| < \delta$ olacak şekilde bir m_0 sayısı varsa (a_m) dizisi a ya yakınsaktır denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.8 $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve (a_m) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\delta > 0$ için $m, n > m_0$ olduğunda $\|a_m - a_n\| < \delta$ olacak şekilde bir m_0 sayısı varsa (a_m) dizisine Cauchy dizisi denir (Bayraktar 2006).

Tanım 2.9 $(\mathcal{V}, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $\mu(v, y) = \|v - y\|$ olarak tanımlanan μ fonksiyonu $(M_1) - (M_3)$ şartlarını sağladığından bu μ metriğine norm metriği denir. Eğer $\mathcal{V}$ uzayı norm metriğine göre tam ise $\mathcal{V}$ ye Banach uzayı denir (Bayraktar 2006).

Sınırlı dizilerin l_∞ uzayı $\|a\|_\infty = \sup_m |a_m|$ biçiminde tanımlanan $\|\cdot\|_\infty$ normuyla birlikte bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.10 Doğal sayıların bir A altkümesi için $A_m = \{a \leq m : a \in A\}$ olsun. A_m kümesinin eleman sayısı $|A_m|$ ile gösterilmek üzere eğer

$$\mathcal{D}(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|A_m|}{m}$$

limiti var ise bu durumda A kümesi $\mathcal{D}(A)$ doğal yoğunluğuna sahiptir denir (Niven ve Zuckerman 1980).

Tanım 2.11 (a_m) bir reel dizi olmak üzere eğer her $\delta > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa (a_m) dizisi L ye istatistiksel yakınsaktır denir ve $S - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir (Fast 1951).

İstatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S ile gösterilecektir.

Bir dizi yakınsak ise istatistiksel yakınsaktır, fakat bu durumun tersi her zaman sağlanmayabilir. Yani istatistiksel yakınsak bir dizi yakınsak olmayabilir. Bu durum aşağıda verilen örnekle ifade edilebilir:

Bir (a_m) dizisi

$$a_m = \begin{cases} 4 & , \quad m = k^4 \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda her $\delta > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} |\{m \leq k : |a_m - 0| \geq \varepsilon\}| \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{k}}{k} = 0$$

olduğundan $S - \lim a_m = 0$ dır. Fakat bu dizinin farklı iki limit noktası 0 ve 4 olduğundan yakınsak değildir.

Tanım 2.12 (a_m) bir reel dizi ve $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^p = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa (a_m) dizisi L sayısına kuvvetli p -Cesàro toplanabilir veya $[C(p)]$ -toplanabilirdir denir ve $[C(p)] - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir (Connor 1988).

Kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $[C(p)]$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.13 $\theta = \{j_t\}$ tamsayıların artan bir dizisi olmak üzere $j_0 = 0$ ve $t \rightarrow \infty$ iken $h_t = j_t - j_{t-1} \rightarrow \infty$ şartları sağlanıyorsa $\theta = \{j_t\}$ ye bir lacunary dizi denir.

$(j_t) = (2^t - 1)$ ve $(j_t) = (t!)$ dizileri lacunary diziye birer örnek olarak verilebilir.

Bir lacunary diziden elde edilen aralık $I_t = (j_{t-1}, j_t]$ ile, $\frac{j_t}{j_{t-1}}$ oranı ise q_t ile gösterilir (Freedman vd. 1978).

Tanım 2.14 (a_m) bir reel dizi ve $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi olmak üzere her $\delta > 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h_t} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa (a_m) dizisi L ye lacunary istatistiksel yakınsak veya S_θ -yakınsaktır denir ve $a_m \rightarrow L(S_\theta)$ veya $S_\theta - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir (Fridy ve Orhan 1993).

Lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_θ ile gösterilecektir.

Tanım 2.15 (a_m) bir reel dizi, $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi ve $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h_t} \sum_{m \in I_t} |a_m - L|^p = 0$$

olacak biçimde bir L sayısı varsa (a_m) dizisi L ye kuvvetli p -lacunary toplanabilir veya $[N_\theta(p)]$ -toplanabildir denir ve $a_m \rightarrow L([N_\theta(p)])$ veya $[N_\theta(p)] - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir (Freedman vd. 1978).

Kuvvetli p -lacunary toplanabilir dizilerin kümesi $[N_\theta(p)]$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.16 Bir $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi

$$\mathcal{I}_1. \emptyset \in \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I}_2. \text{ Her } E_1, E_2 \in \mathcal{I} \text{ için } E_1 \cup E_2 \in \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I}_3. \text{ Her } E_1 \in \mathcal{I} \text{ ve } E_3 \subset E_1 \text{ için } E_3 \in \mathcal{I}$$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{I}$ ya $\mathbb{N}$ de bir ideal denir (Kostyrko vd. 2000).

Eğer $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $\mathcal{I}$ idealinin elemanı değilse, $\mathcal{I}$ ya bir gerçek ideal denir. Ayrıca, eğer $\mathcal{I}$ bir gerçek ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{n\} \in \mathcal{I}$ oluyorsa, $\mathcal{I}$ ideale uygun ideal denir.

Tanım 2.17 Boştan farklı bir $\mathcal{F} \subset 2^{\mathbb{N}}$ ailesi

$$F_1. \emptyset \notin \mathcal{F}$$

$$F_2. \text{ Her } F_1, F_2 \in \mathcal{F} \text{ için } F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}$$

$$F_3. \text{ Her } F_1 \in \mathcal{F} \text{ ve } F_3 \supset F_1 \text{ için } F_3 \in \mathcal{F}$$

şartlarını sağlıyorsa $\mathcal{F}$ ye $\mathbb{N}$ de bir süzgeç denir (Kostyrko vd. 2000).

Eğer $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir uygun ideali ise, bu durumda

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{F \subset \mathbb{N} : F = \mathbb{N} \setminus \mathcal{I} \text{ for } \exists E \in \mathcal{I}\}$$

ailesi doğal sayılar kümesinde bir süzgeç olup $\mathcal{I}$ ile ilişkili süzgeç adı verilir.

Tanım 2.18 (a_m) bir reel dizi olmak üzere her $\delta > 0$ için

$$A(\delta) = \{m \in \mathbb{N} : |a_m - L| \geq \delta\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa (a_m) dizisi L ye $\mathcal{I}$ -yakınsaktır denir ve $\mathcal{I} - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir (Kostyrko vd. 2000).

Özel olarak $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olması durumunda $\mathcal{I}_f$, $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve böylece $\mathcal{I}$ -yakınsaklık ile Tanım 2.4 deki yakınsaklık kavramı örtüşür.

Özel olarak $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\mathcal{D}}$ olması durumunda $\mathcal{I}_{\mathcal{D}}$, $\mathbb{N}$ de bir uygun idealdir ve böylece $\mathcal{I}$ -yakınsaklık ile Tanım 2.11 deki istatistiksel yakınsaklık kavramı örtüşür.

Tanım 2.19 (a_m) bir reel dizi olmak üzere eğer her $\delta, \gamma > 0$ için

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa (a_m) dizisi L ye $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaktır denir ve $S(\mathcal{I}) - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir (Das vd. 2011).

$\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S(\mathcal{I})$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.20 (a_m) bir reel dizi ve $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi olmak üzere eğer her $\delta, \gamma > 0$ için

$$\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa (a_m) dizisi L ye $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta(\mathcal{I}) - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir (Das vd. 2011).

$\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta(\mathcal{I})$ ile gösterilecektir.

Lemma 2.21 $S_\theta(\mathcal{I}) \cap l_\infty$, l_∞ sınırlı reel dizilerin Banach uzayının kapalı bir altkümesidir (Das vd. 2011).

Tanım 2.22 (a_m) bir reel dizi ve $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi olmak üzere her $\delta > 0$ için

$$\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t} \sum_{m \in I_t} |a_m - L| \geq \delta \right\}$$

kümesi $\mathcal{I}$ ya ait oluyorsa (a_m) dizisi L ye kuvvetli $\mathcal{I}$ -lacunary toplanabilir veya $[N_\theta(\mathcal{I})]$ -toplanabilirdir denir ve $a_m \rightarrow L([N_\theta(\mathcal{I})])$ biçiminde gösterilir (Das vd. 2011).

Kuvvetli $\mathcal{I}$ -lacunary toplanabilir dizilerin kümesi $[N_\theta(\mathcal{I})]$ ile gösterilecektir.

3. DİZİLERİN α . MERTEBEDEN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, reel diziler için α . mertebeden istatistiksel yakınsaklık ve α . mertebeden kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramları ile ilgili Çolak (2010) tarafından yapılan çalışmadaki tanımlar verilip, bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Tanım 3.1 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere her $\delta > 0$ için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| = 0$$

olacak biçimde bir L reel sayısı varsa (a_m) reel dizisi L sayısına α . mertebeden istatistiksel yakınsaktır denir ve $S^\alpha - \lim a_m = L$ veya $a_m \rightarrow L(S^\alpha)$ biçiminde yazılır.

α . mertebeden istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S^α ile gösterilecektir.

Teorem 3.2 $0 < \alpha \leq 1$ ve $(a_m), (b_m)$ reel diziler olsun. Bu durumda,

- (i) Eğer $S^\alpha - \lim a_m = a$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S^\alpha - \lim c a_m = c a$ dır.
- (ii) Eğer $S^\alpha - \lim a_m = a$ ve $S^\alpha - \lim b_m = b$ ise $S^\alpha - \lim(a_m + b_m) = a + b$ dir.

İspat:

(i) $S^\alpha - \lim a_m = a$ ve $c \in \mathbb{C}$ olsun. $c = 0$ için ispat açıktır. Bu durumda ispatı tamamlamak için $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Her $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |c a_m - c a| \geq \delta\}| = \frac{1}{k^\alpha} \left| \left\{ m \leq k : |a_m - a| \geq \frac{\delta}{|c|} \right\} \right|$$

ifadesi göz önüne alındığında kabulümüzden $S^\alpha - \lim c a_m = c a$ bulunur.

(ii) $S^\alpha - \lim a_m = a$ ve $S^\alpha - \lim b_m = b$ olsun. Her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |(a_m + b_m) - (a + b)| \geq \delta\}| &\leq \frac{1}{k^\alpha} \left| \left\{ m \leq k : |a_m - a| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \right| \\ &\quad + \frac{1}{k^\alpha} \left| \left\{ m \leq k : |b_m - b| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği göz önüne alındığında kabulümüzden $S^\alpha - \lim(a_m + b_m) = a + b$ bulunur.

Bu teorem S^α kümesinin bir lineer uzay olduğunu gösterir. ■

Teorem 3.3 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere $S^\alpha \subseteq S^\beta$ dır.

İspat: $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $a_m \rightarrow L(S^\alpha)$ olsun. Her $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{k^\beta} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \leq \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}|$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sağ tarafındaki limit kabulümüz gereğince 0 a eşit olacağından sol tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $a_m \rightarrow L(S^\beta)$ ve dolayısıyla $S^\alpha \subseteq S^\beta$ elde edilir. ■

Bu teoremden aşağıdaki sonuca ulaşılabilir:

Sonuç 3.4 Eğer bir (a_m) dizisi L sayısına S^α -yakınsak ise, bu durumda bu dizi L ye istatistiksel yakınsaktır.

Tanım 3.5 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^\alpha} \sum_{m=1}^k |a_m - L| = 0$$

olacak biçimde bir L reel sayısı varsa (a_m) reel dizisi L sayısına α . mertebeden kuvvetli Cesàro toplanabilir veya $[C^\alpha]$ -toplanabilirdir denir ve $[C^\alpha] - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir.

α . mertebeden kuvvetli Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $[C^\alpha]$ ile gösterilecektir.

Uyarı 3.6 $\alpha = 1$ için α . mertebeden kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramı kuvvetli Cesàro toplanabilme kavramı ile örtüşür.

Tanım 3.7 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k^\alpha} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^p = 0$$

olacak biçimde bir L reel sayısı varsa (a_m) dizisi L sayısına α . mertebeden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir veya $[C^\alpha(p)]$ -toplanabilirdir denir ve $[C^\alpha(p)] - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir.

α . mertebeden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir dizilerin kümesi $[C^\alpha(p)]$ ile gösterilecektir.

Teorem 3.8 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $[C^\alpha(p)] \subseteq [C^\beta(p)]$ dir.

İspat: $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $[C^\alpha(p)] - \lim a_m = L$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{k^\beta} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^p \leq \frac{1}{k^\alpha} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^p$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sağ tarafındaki limit kabulümüz gereğince 0 a eşit olacağından sol tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $[C^\beta(p)] - \lim a_m = L$ ve dolayısıyla $[C^\alpha(p)] \subseteq [C^\beta(p)]$ elde edilir. ■

Bu teoremden aşağıdaki sonuca ulaşılabilir:

Sonuç 3.9 Eğer bir (a_m) dizisi L sayısına $[C^\alpha(p)]$ -toplanabilir ise bu durumda bu dizi L ye kuvvetli p -Cesàro toplanabiliridir.

Sonuç 3.10 Teorem 3.8 de $p = 1$ alınması durumunda da ispat sağlanır. Yani $0 < \alpha < \beta \leq 1$ olmak üzere $[C^\alpha] \subseteq [C^\beta]$ dir.

Teorem 3.11 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $[C^\alpha(q)] \subset [C^\alpha(p)]$ dir.

İspat: $0 < p < q < \infty$ ve $[C^\alpha(q)] - \lim a_m = L$ olsun. Bu durumda Hölder eşitsizliğinden

$$\frac{1}{k^\alpha} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^p < \frac{1}{k^\alpha} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^q$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sağ tarafındaki limit kabulümüz gereğince 0 a eşit olacağından sol tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $[C^\alpha(p)] - \lim a_m = L$ ve dolayısıyla $[C^\alpha(q)] \subset [C^\alpha(p)]$ elde edilir. ■

Teorem 3.12 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda bir (a_m) dizisi L sayısına α . mertebeden kuvvetli p -Cesàro toplanabilir ise, bu dizi aynı sayıya β . mertebeden istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $[C^\alpha(p)] - \lim a_m = L$ olsun.

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^p &= \sum_{\substack{m=1 \\ |a_m - L| \geq \delta}}^k |a_m - L|^p + \sum_{\substack{m=1 \\ |a_m - L| < \delta}}^k |a_m - L|^p \\ &\geq \sum_{\substack{m=1 \\ |a_m - L| \geq \delta}}^k |a_m - L|^p \\ &\geq \delta^p |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^\alpha} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^p &\geq \delta^p \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &\geq \delta^p \frac{1}{k^\beta} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sol tarafındaki limit kabulümüz gereğince 0 a eşit olacağından sağ tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $a_m \rightarrow L(S^\beta)$ bulunur. ■

Teorem 3.12 nin tersi sadece $\alpha = \beta = 1$ için doğrudur.

Teorem 3.13 $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda sınırlı bir (a_m) dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise, bu dizi aynı sayıya kuvvetli p -Cesàro toplanabiliridir.

İspat: (a_m) dizisi sınırlı olduğundan

$$|a_m - L| \leq \mathcal{M}$$

olacak şekilde pozitif bir $\mathcal{M}$ sayısı vardır. $a_m \rightarrow L(S)$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} \sum_{m=1}^k |a_m - L|^p &= \frac{1}{k} \sum_{\substack{m=1 \\ |a_m - L| \geq \delta}}^k |a_m - L|^p + \frac{1}{k} \sum_{\substack{m=1 \\ |a_m - L| < \delta}}^k |a_m - L|^p \\
&\leq \frac{\mathcal{M}^p}{k} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| + \delta^p
\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sağ tarafındaki limit kabulümüz gereğince 0 a eşit olacağından sol tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $[C(p)] - \lim a_m = L$ bulunur. ■



4. DİZİLERİN α . MERTEBEDEN LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, reel diziler için α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsaklık ve α . mertebeden kuvvetli lacunary toplanabilme kavramları ile ilgili Şengül ve Et (2014) tarafından yapılan çalışmadaki temel tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.1 $\theta = (j_t)$ bir lacunary dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. h_r^α, h_r 'nin α . kuvvetini, yani $h_r^\alpha = (h_r)^\alpha = (h_1^\alpha, h_2^\alpha, \dots, h_r^\alpha, \dots)$ göstermek üzere her $\delta > 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| = 0$$

olacak biçimde bir L reel sayısı varsa (a_m) dizisi L sayısına α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsak veya S_θ^α -yakınsaktır denir ve $S_\theta^\alpha - \lim a_m = L$ veya $a_m \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ biçiminde gösterilir.

α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi S_θ^α ile gösterilecektir.

α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsaklık $0 < \alpha \leq 1$ için iyi tanımlıdır, fakat $\alpha > 1$ için iyi tanımlı değildir. Örneğin; (a_m) dizisini

$$a_m := \begin{cases} 1, & m = 2t \\ 0, & m \neq 2t \end{cases} \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, $\alpha > 1$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - 1| \geq \delta\}| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j_t - j_{t-1}}{2h_t^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_t}{2h_t^\alpha} = 0$$

olup $S_\theta^\alpha - \lim a_m = 1$ ve,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - 0| \geq \delta\}| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{j_t - j_{t-1}}{2h_t^\alpha} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{h_t}{2h_t^\alpha} = 0$$

olup $S_\theta^\alpha - \lim a_m = 0$ elde edilir. Bu durumda, (a_m) dizisi hem 1 e hem de 0 a α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsak olur. Fakat bu durum limitin tekliği ile çelişir.

Teorem 4.2 $0 < \alpha \leq 1$ ve $(a_m), (b_m)$ reel diziler olsun. Bu durumda,

- (i) Eğer $S_\theta^\alpha - \lim a_m = a_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ ise $S_\theta^\alpha - \lim c a_m = c a_0$ dir.
- (ii) Eğer $S_\theta^\alpha - \lim a_m = a_0$ ve $S_\theta^\alpha - \lim b_m = b_0$ ise $S_\theta^\alpha - \lim(a_m + b_m) = a_0 + b_0$ dir.

İspat:

(i) $S_\theta^\alpha - \lim a_m = a_0$ ve $c \in \mathbb{C}$ olsun. $c = 0$ için ispat açıktır. Bu durumda ispatı tamamlamak için $c \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Her $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |c a_m - c a_0| \geq \delta\}| = \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m - a_0| \geq \frac{\delta}{|c|} \right\} \right|$$

ifadesi göz önüne alındığında kabulümüzden $S_\theta^\alpha - \lim c a_m = c a_0$ bulunur.

(ii) $S_\theta^\alpha - \lim a_m = a_0$ ve $S_\theta^\alpha - \lim b_m = b_0$ olsun. Her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |(a_m + b_m) - (a_0 + b_0)| \geq \delta\}| &\leq \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m - a_0| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \right| \\ &\quad + \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \left\{ m \in I_t : |b_m - b_0| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

eşitsizliği göz önüne alındığında kabulümüzden $S_\theta^\alpha - \lim(a_m + b_m) = a_0 + b_0$ bulunur.

Bu teorem S_θ^α kümesinin bir lineer uzay olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.3 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi ve $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olmak üzere $S_\theta^\alpha \subseteq S_\theta^\beta$ dir ve en az bir $\alpha < \beta$ için bu içerme kesindir.

İspat: $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $a_m \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ olsun. Her $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{h_t^\beta} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \leq \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}|$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sağ tarafındaki limit kabulümüz gereğince 0 a eşit olacağından sol tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $a_m \rightarrow L(S_\theta^\beta)$ ve dolayısıyla $S_\theta^\alpha \subseteq S_\theta^\beta$ elde edilir. İçermenin kesin olduğunu göstermek için bir (a_m) dizisini

$$a_m := \begin{cases} \lfloor \sqrt{h_m} \rfloor & , \quad m = 1, 2, 3, \dots, \lfloor \sqrt{h_m} \rfloor \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. $\beta \in (\frac{1}{2}, 1]$ için $(a_m) \in S_\theta^\beta$, $\alpha \in (0, \frac{1}{2}]$ için ise $(a_m) \notin S_\theta^\alpha$ dir. ■

Bu teoremden aşağıdaki sonuca ulaşılabilir:

Sonuç 4.4 Eğer bir (a_m) dizisi L sayısına S_θ^α -yakınsak ise bu durumda bu dizi L ye S_θ -yakınsaktır.

Teorem 4.5 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer $\liminf_t q_t > 1$ ise $S^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$ dır.

İspat: $\liminf_t q_t > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda yeterince büyük t ler için $q_t \geq 1 + \eta$ olacak şekilde bir $\eta > 0$ sayısı vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{j_t}{j_{t-1}} \geq 1 + \eta &\Rightarrow \frac{j_{t-1}}{j_t} \leq \frac{1}{1 + \eta} \\ &\Rightarrow 1 - \left(\frac{j_{t-1}}{j_t}\right) \geq 1 - \left(\frac{1}{1 + \eta}\right) \\ &\Rightarrow \frac{h_t}{j_t} \geq \frac{\eta}{1 + \eta} \end{aligned}$$

bulunur. Buradan da $0 < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{h_t}{j_t} \geq \frac{\eta}{1 + \eta} \Rightarrow \left(\frac{h_t}{j_t}\right)^\alpha \geq \left(\frac{\eta}{1 + \eta}\right)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{j_t^\alpha} \geq \frac{\eta^\alpha}{(1 + \eta)^\alpha} \cdot \frac{1}{h_t^\alpha}$$

elde edilir. $a_m \rightarrow L(S^\alpha)$ olsun. Bu durumda her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{j_t^\alpha} |\{m \leq j_t : |a_m - L| \geq \delta\}| &\geq \frac{1}{j_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &\geq \frac{\eta^\alpha}{(1 + \eta)^\alpha} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $a_m \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ elde edilir. Bu da $S^\alpha \subseteq S_\theta^\alpha$ olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.6 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer $\limsup_t q_t < \infty$ ise $S_\theta^\alpha \subseteq S$ dır.

İspat: $\limsup_t q_t < \infty$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda her t için $q_t < \mathcal{H}$ olacak şekilde bir $\mathcal{H} > 0$ sayısı vardır.

$a_m \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ ve

$$N_t = |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}|$$

olduğunu kabul edelim. Kabulümüzden her $\delta > 0$ için

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| = 0$$

olduğundan bir $t_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki her $t > t_0$ için $\frac{N_t}{h_t^\alpha} < \delta$ yazılabilir. Diğer taraftan $h_t^\alpha \leq h_t$ olduğundan

$$\frac{N_t}{h_t} < \frac{N_t}{h_t^\alpha}$$

ve dolayısıyla $\frac{N_t}{h_t} < \delta$ dır.

$$\mathcal{N} = \max\{N_t : 1 \leq t \leq t_0\}$$

ve k da $j_{t-1} < k \leq j_t$ şartını sağlayan bir tamsayı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| &\leq \frac{1}{j_{t-1}} |\{m \leq j_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &= \frac{1}{j_{t-1}} \{N_1 + N_2 + \dots + N_{t_0} + N_{t_0+1} + \dots + N_t\} \\ &\leq \frac{t_0 \mathcal{N}}{j_{t-1}} + \frac{1}{j_{t-1}} \left\{ h_{t_0+1} \frac{N_{t_0+1}}{h_{t_0+1}} + \dots + h_t \frac{N_t}{h_t} \right\} \\ &\leq \frac{t_0 \mathcal{N}}{j_{t-1}} + \frac{1}{j_{t-1}} \left(\sup_{t > t_0} \frac{N_t}{h_t} \right) \{h_{t_0+1} + \dots + h_t\} \\ &\leq \frac{t_0 \mathcal{N}}{j_{t-1}} + \delta \frac{j_t - j_{t_0}}{j_{t-1}} \\ &\leq \frac{t_0 \mathcal{N}}{j_{t-1}} + \delta q_t \\ &\leq \frac{t_0 \mathcal{N}}{j_{t-1}} + \delta \mathcal{H} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla $a_m \rightarrow L(S)$ elde edilir. Bu da $S_\theta^\alpha \subseteq S$ olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.7 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Eğer $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{h_t^\alpha}{j_t} > 0$ ise $S \subseteq S_\theta^\alpha$ dır.

İspat: $a_m \rightarrow L(S)$ ve $\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{h_t^\alpha}{j_t} > 0$ olsun. Her $\delta > 0$ için

$$\{m \leq j_t : |a_m - L| \geq \delta\} \supset \{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{1}{j_t} |\{m \leq j_t : |a_m - L| \geq \delta\}| &\geq \frac{1}{j_t} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &= \frac{h_t^\alpha}{j_t} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $t \rightarrow \infty$ için limit alınırsa eşitsizliğin sol tarafındaki limit kabulümüz gereğince 0 a eşit olacağından sağ tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $a_m \rightarrow L(S_\theta^\alpha)$ ve dolayısıyla $S \subseteq S_\theta^\alpha$ elde edilir. ■

4.1. Dizilerin α . Mertebeden Kuvvetli Lacunary Toplanabilirliği

Tanım 4.8 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. p bir pozitif reel sayı olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - L|^p = 0$$

olacak biçimde bir L reel sayısı varsa (a_m) dizisi L sayısına α . mertebeden kuvvetli p -lacunary toplanabilir veya $[N_\theta^\alpha(p)]$ -toplanabilirdir denir ve $[N_\theta^\alpha(p)] - \lim a_m = L$ biçiminde gösterilir.

α . mertebeden kuvvetli p -lacunary toplanabilir dizilerin kümesi $[N_\theta^\alpha(p)]$ ile gösterilecektir.

Teorem 4.9 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi, $\alpha \in (0, 1]$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $[N_\theta^\alpha(p)]$ dizi uzayı

$$\|a\|_\theta = \sup_t \left(\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.1)$$

normuyla birlikte bir Banach uzayıdır. Ayrıca, $0 < p < 1$ için

$$\|a\|_{\theta_1} = \sup_t \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m|^p \quad (4.2)$$

normuyla birlikte ise bir tam p -normlu uzayıdır.

İspat: $[N_\theta^\alpha(p)]$ dizi uzayı (4.1) eşitliğindeki normla birlikte bir normlu uzaydır. İspatı tamamlamak için bu uzayın tam olduğu gösterilmelidir. Bunun için varsayalım ki (a^s) her $s \in \mathbb{N}$ için

$$a^s = (a_m^s) = (a_1^s, a_2^s, \dots) \in [N_\theta^\alpha(p)]$$

olacak şekilde bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda $s, r \rightarrow \infty$ için

$$\|a^s - a^r\|_\theta = \sup_t \left(\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m^s - a_m^r|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

yazılabilir. Buradan, her $t \in \mathbb{N}$ ve $s, r \rightarrow \infty$ için

$$\left(\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m^s - a_m^r|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

bulunur. Böylece her $m \in \mathbb{N}$ ve $s, r \rightarrow \infty$ için

$$|a_m^s - a_m^r|^p \rightarrow 0$$

elde edilir. Bu durum her $m \in \mathbb{N}$ için $(a_m^s) = (a_m^1, a_m^2, \dots)$ dizisinin $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan bu dizi yakınsaktır. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\lim_s a_m^s = a_m$ olduğunu kabul edelim. (a^s) bir Cauchy dizisi olduğundan her $\delta > 0$ için bir $n_0 = n_0(\delta)$ sayısı vardır öyle ki her $s, r \geq n_0$ için

$$\|a^s - a^r\|_\theta < \delta$$

dır. Böylece her $t \in \mathbb{N}$ ve her $s, r \geq n_0$ için

$$\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m^s - a_m^r|^p < \delta^p$$

elde edilir. $r \rightarrow \infty$ için limit alınırsa her $t \in \mathbb{N}$ ve $s \geq n_0$ için

$$\lim_r \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m^s - a_m^r|^p = \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m^s - a_m|^p < \delta^p$$

elde edilir. Böylece

$$\|a^s - a\|_\theta = \sup_t \left(\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m^s - a_m|^p \right)^{\frac{1}{p}} \rightarrow 0$$

ve buradan da $s \rightarrow \infty$ için $a^s \rightarrow a$ bulunur.

$$\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - a|^p \leq 2^p \cdot \left\{ \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - a_m^{n_0}|^p + \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m^{n_0} - a|^p \right\}$$

olduğundan $a \in [N_\theta^\alpha(p)]$ dir.

Benzer şekilde $0 < p < 1$ için $[N_\theta^\alpha(p)]$ uzayı (4.2) normuna göre bir tam p -normlu uzaydır. ■

Teorem 4.10 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $[N_\theta^\alpha(p)] \subseteq [N_\theta^\beta(p)]$ dir ve en az bir $\alpha < \beta$ için bu içermeye kesindir.

İspat: $[N_\theta^\alpha(p)] - \lim a_m = L$ olsun. Bu durumda $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve pozitif bir p reel sayısı için

$$\frac{1}{h_t^\beta} \sum_{m \in I_t} |a_m - L|^p \leq \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - L|^p$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin $t \rightarrow \infty$ için limiti alınır sağ taraftaki limit 0 a eşit olacağından sol tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $[N_\theta^\beta(p)] - \lim a_m = L$ ve dolayısıyla $[N_\theta^\alpha(p)] \subseteq [N_\theta^\beta(p)]$ elde edilir. İçermenin kesin olduğunu göstermek için (a_m) dizisini

$$a_m := \begin{cases} 1 & , \quad m = n^2 \ (n \in \mathbb{N}) \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda, $\frac{1}{2} < \beta \leq 1$ için $(a_m) \in [N_\theta^\beta(p)]$ dir, fakat $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ için $(a_m) \notin [N_\theta^\alpha(p)]$ dir. ■

Sonuç 4.11 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve p bir pozitif reel sayı olsun. Bu durumda

- i) Eğer $\alpha = \beta$ ise $[N_\theta^\alpha(p)] = [N_\theta^\beta(p)]$ dir.
- ii) Her $\alpha \in (0, 1]$ ve $0 < p < \infty$ için, $[N_\theta^\alpha(p)] \subset [N_\theta(p)]$ dir.

Teorem 4.12 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < q < \infty$ olsun. Bu durumda $[N_\theta^\alpha(q)] \subset [N_\theta^\alpha(p)]$ dir.

İspat: $[N_\theta^\alpha(q)] - \lim a_m = L$ olsun. Bu durumda Hölder eşitsizliğinden

$$\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - L|^p < \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - L|^q$$

yazılabilir. Bu eşitsizliğin $t \rightarrow \infty$ için limiti alınrsa sağ taraftaki limit 0 a eşit olacağından sol tarafındaki ifadenin de limiti 0 a eşit olacaktır. Böylece $[N_\theta^\alpha(p)] - \lim a_m = L$ ve dolayısıyla $[N_\theta^\alpha(q)] \subset [N_\theta^\alpha(p)]$ elde edilir. ■

Teorem 4.13 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi, $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $[N_\theta^\alpha(p)] \subseteq S_\theta^\beta$ dır ve en az bir $\alpha < \beta$ için bu içerme kesindir.

İspat: $[N_\theta^\alpha(p)] - \lim a_m = L$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \sum_{m \in I_t} |a_m - L|^p &= \sum_{\substack{m \in I_t \\ |a_m - L| \geq \delta}} |a_m - L|^p + \sum_{\substack{m \in I_t \\ |a_m - L| < \delta}} |a_m - L|^p \\ &\geq \sum_{\substack{m \in I_t \\ |a_m - L| \geq \delta}} |a_m - L|^p \\ &\geq \delta^p |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - L|^p &\geq \frac{1}{h_t^\alpha} \delta^p |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &\geq \frac{1}{h_t^\beta} \delta^p |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte t ye göre limit alınrsa $a_m \rightarrow L(S_\theta^\beta)$ elde edilir. Böylece $N_\theta^\alpha(p) \subseteq S_\theta^\beta$ bulunur. $\alpha = \beta$ ve $p = 1$ için $[N_\theta^\alpha(p)] \subset S_\theta^\beta$ içermesinin kesin olduğunu gösterelim. $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi olmak üzere her $\delta > 0$ ve $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için

$$\frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - 0| \geq \delta\}| = \frac{\llbracket \sqrt{h_t} \rrbracket}{h_t^\alpha} \rightarrow 0, \quad (t \rightarrow \infty)$$

yani $a_m \rightarrow 0(S_\theta^\alpha)$ elde edilir.

$0 < \alpha < 1$ için,

$$\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - 0| = \frac{\llbracket \sqrt{h_t} \rrbracket \llbracket \sqrt{h_t} \rrbracket}{h_t^\alpha} \rightarrow \infty$$

olup $\alpha = 1$ için,

$$\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - 0| = \frac{\llbracket \sqrt{h_t} \rrbracket \llbracket \sqrt{h_t} \rrbracket}{h_t^\alpha} \rightarrow 1$$

olur. Dolayısıyla $0 < \alpha \leq 1$ için $a_m \not\rightarrow 0 ([N_\theta^\alpha(p)])$. Bu nedenle $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ için, $[N_\theta^\alpha(p)] \subset S_\theta^\alpha$ dır. ■

Sonuç 4.14 $0 < \alpha \leq 1$ ve $0 < p < \infty$ olsun.

- i) Eğer bir dizi L sayısına $[N_\theta^\alpha(p)]$ -toplanabilir ise, bu dizi L ye S_θ^α -yakınsaktır.
- ii) Eğer bir dizi L sayısına $[N_\theta^\alpha(p)]$ -toplanabilir ise, bu dizi L ye S_θ -yakınsaktır.

5. DİZİLERİN α . MERTEBEDEN $\mathcal{I}$ - İSTATİSTİKSEL VE $\mathcal{I}$ - LACUNARY İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, reel diziler için ideal kavramı kullanılarak verilen α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel ve $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramları ile ilgili Das ve Savaş (2014) tarafından yapılan çalışmadaki tanım, örnek ve teoremler verilecektir.

Çalışmanın bu bölümünde $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$, doğal sayılar kümesinin bir uygun ideali olarak seçilecektir.

Tanım 5.1 $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere her $\delta, \gamma > 0$ için

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlanıyorsa (a_m) reel dizisi L sayısına α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak veya $S(\mathcal{I})^\alpha$ -yakınsaktır denir ve $a_m \rightarrow L(S(\mathcal{I})^\alpha)$ biçiminde gösterilir.

α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S(\mathcal{I})^\alpha$ ile gösterilecektir.

Uyarı 5.2

- i) $\alpha = 1$ olması durumunda $S(\mathcal{I})^\alpha$ -yakınsaklık kavramı $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaklık kavramı ile örtüşür.
- ii) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olması durumunda $S(\mathcal{I})^\alpha$ -yakınsaklık kavramı α . mertebeden istatistiksel yakınsaklık kavramı ile örtüşür.
- iii) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ ve $\alpha = 1$ olması durumunda $S(\mathcal{I})^\alpha$ -yakınsaklık kavramı istatistiksel yakınsaklık kavramı ile örtüşür.

Örnek 5.3 $\mathcal{I} = \mathcal{I}_D$ olarak alalım. (λ_k) dizisini $1 \leq k < 10$ için $\lambda_k = 1$ ve her $k \geq 10$ için $\lambda_k = k - 10$ olarak tanımlayalım. Ayrıca A kümesi $A = \{1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \dots\}$ biçiminde olsun. (a_m) dizisini ise

$$a_m := \begin{cases} m & , \quad k - \lfloor \sqrt{\lambda_k^\alpha} \rfloor + 1 \leq m \leq k \text{ ve } k \notin A \text{ ise} \\ m & , \quad k - \lambda_k + 1 \leq m \leq k \text{ ve } k \in A \text{ ise} \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım.

Bu durumda her $0 < \delta < 1$ için $I_k = [k - \lambda_k + 1, k]$ olmak üzere $k \rightarrow \infty$ ve $k \notin A$ iken

$$\frac{1}{\lambda_k^\alpha} |\{m \in I_k : |a_m - 0| \geq \delta\}| = \frac{\llbracket \sqrt{\lambda_k} \rrbracket}{\lambda_k^\alpha} \rightarrow 0$$

olur. Böylece her $\gamma > 0$ ve bazı $n_1 \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_k^\alpha} |\{m \in I_k : |a_m| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} \subset A \cup \{1, 2, \dots, n_1\} \quad (5.1)$$

olur. Şimdi $\gamma > 0$ verilmiş olsun.

$$\lim_k \frac{k - \lambda_k}{k^\alpha} = 0$$

olduğundan her $k \geq n_2$ için

$$\frac{k - \lambda_k}{k^\alpha} < \frac{\gamma}{2}$$

olacak şekilde bir $n_2 \in \mathbb{N}$ sayısı seçilebilir. Bu durumda $\delta > 0$ ve her $k \geq n_2$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m| \geq \delta\}| &= \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k - \lambda_k : |a_m| \geq \delta\}| + \frac{1}{k^\alpha} |\{m \in I_k : |a_m| \geq \delta\}| \\ &\leq \frac{k - \lambda_k}{k^\alpha} + \frac{1}{k^\alpha} |\{m \in I_k : |a_m| \geq \delta\}| \\ &\leq \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{\lambda_k^\alpha} |\{m \in I_k : |a_m| \geq \delta\}| \end{aligned}$$

olur. Böylece, (5.1) den $n = \max\{n_1, n_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} &\subset \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{\lambda_k^\alpha} |\{m \in I_k : |a_m| \geq \delta\}| \geq \frac{\gamma}{2} \right\} \\ &\cup \{1, 2, 3, \dots, n_2\} \\ &\subset A \cup \{1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

olur. Sağ taraftaki kümenin $\mathcal{I}$ idealinin elemanı olduğu açıktır. Bu durumda sol taraftaki küme de $\mathcal{I}$ nın elemanı olur. Bu ise (a_m) dizisinin 0 a α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. Fakat bu dizi 0 a α . mertebeden istatistiksel yakınsak değildir.

Teorem 5.4 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $S(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S(\mathcal{I})^\beta$ dır ve özel olarak $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olmak üzere $\alpha < \beta$ şartını sağlayan bazı α, β lar için bu içerme kesindir.

İspat: $a_m \rightarrow L(S(\mathcal{I})^\alpha)$ olsun. Bu durumda $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için

$$\frac{1}{k^\beta} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \leq \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}|$$

ve böylece her $\gamma > 0$ için

$$\left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k^\beta} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} \subseteq \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\}$$

olur. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki küme kabulümüzden $\mathcal{I}$ idealine ait olduğundan sol tarafı da $\mathcal{I}$ nın elemanı olacaktır. Bu ise $S(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S(\mathcal{I})^\beta$ olduğunu gösterir. Teoremden bahsedilen bazı α, β lar ile ilgili olarak kapsamanın kesin olduğunu göstermek için $n, m \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$a_k := \begin{cases} 1 & , \quad k = n^m \text{ ise,} \\ 0 & , \quad k \neq n^m \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde bir (a_k) dizisi tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olmak üzere $S(\mathcal{I})^\beta - \lim a_k = 0$, yani $(a_k) \in S(\mathcal{I})^\beta$, fakat $(a_k) \notin S(\mathcal{I})^\alpha$ dır. ■

Sonuç 5.5 Eğer bir dizi L ye α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak ise, o zaman bu dizi L ye $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaktır, yani $S(\mathcal{I})^\alpha \subset S(\mathcal{I})$ dır.

Tanım 5.6 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere her $\delta, \gamma > 0$ için

$$\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} \in \mathcal{I}$$

şartı sağlamıyorsa (a_m) reel dizisi L sayısına α . mertebeden $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsak veya $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ -yakınsaktır denir ve $a_m \rightarrow L(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$ biçiminde gösterilir. α . mertebeden $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ ile gösterilecektir.

Uyarı 5.7

- i) $\alpha = 1$ olması durumunda α . mertebeden $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ile örtüşür.

ii) $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olması durumunda α . mertebeden $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı α . mertebeden lacunary istatistiksel yakınsaklık kavramı ile örtüşür.

$S(\mathcal{I})^\alpha$ ve $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ kümeleri tüm reel diziler uzayının lineer altuzayları olup, aşağıdaki iki teoremden bu uzayların topolojik bir niteliği incelenecektir. Her ikisi için de benzer ispat yöntemi uygulandığından, sadece $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ için detaylı bir ispat yapılmıştır.

Teorem 5.8 $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \cap l_\infty$, l_∞ sınırlı reel dizi uzayının kapalı bir alt kümesidir. Burada l_∞ , tüm sınırlı reel dizilerin supremum normuyla birlikte bir Banach uzayıdır.

İspat: $0 < \alpha \leq 1$ ve $(a^n) \in S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \cap l_\infty$ dizisi $a \in l_\infty$ noktasına yakınsayan bir dizi olsun. $a \in S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \cap l_\infty$ olduğu ispatlanmalıdır. $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subset S_\theta(\mathcal{I})$ ve Lemma 2.20 gereğince $S_\theta(\mathcal{I}) \cap l_\infty$, l_∞ uzayının kapalı bir alt kümesi olduğundan $a \in S_\theta(\mathcal{I}) \cap l_\infty$ dur. Ayrıca her $n = 1, 2, 3, \dots$ için $a^n \in S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \cap l_\infty$ olduğundan, (a^n) dizisi bazı A_n sayılarına $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaktır. Öncelikle (A_n) dizisinin bir A sayısına yakınsadığı ve (a_m) dizisinin A ya α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak olduğu gösterilmelidir. Pozitif sayıların monoton azalan ve 0 a yakınsayan bir (δ_n) dizisini alalım.

$$\|a - a^n\|_\infty < \frac{\delta_n}{4}$$

olacak şekilde pozitif bir n tamsayısı seçilsin. $0 < \gamma < 1$ olsun. Bu durumda

$$C = \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m^n - A_n| \geq \frac{\delta_n}{4} \right\} \right| < \frac{\gamma}{3} \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve

$$D = \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m^{n+1} - A_{n+1}| \geq \frac{\delta_{n+1}}{4} \right\} \right| < \frac{\gamma}{3} \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olur. $C \cap D \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $\emptyset \notin \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğundan $t \in C \cap D$ seçilebilir. Bu durumda

$$\frac{1}{h_t} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m^n - A_n| \geq \frac{\delta_n}{4} \right\} \right| < \frac{\gamma}{3}$$

ve

$$\frac{1}{h_t} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m^{n+1} - A_{n+1}| \geq \frac{\delta_{n+1}}{4} \right\} \right| < \frac{\gamma}{3}$$

olur.

Böylece

$$\frac{1}{h_t} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m^n - A_n| \geq \frac{\delta_n}{4} \vee |a_m^{n+1} - A_{n+1}| \geq \frac{\delta_{n+1}}{4} \right\} \right| < \gamma < 1$$

olur. Dolayısıyla $|a_m^n - A_n| \geq \frac{\delta_n}{4}$ ve $|a_m^{n+1} - A_{n+1}| \geq \frac{\delta_{n+1}}{4}$ olacak şekilde bir $m \in I_t$ vardır. Bu durumda

$$\begin{aligned} |A_n - A_{n+1}| &\leq |A_n - a_m^n| + |a_m^n - a_m^{n+1}| + |a_m^{n+1} - A_{n+1}| \\ &\leq |a_m^n - A_n| + |a_m^{n+1} - A_{n+1}| + \|a - a^n\|_\infty + \|a - a^{n+1}\|_\infty \\ &\leq \frac{\delta_n}{4} + \frac{\delta_{n+1}}{4} + \frac{\delta_n}{4} + \frac{\delta_{n+1}}{4} \leq \delta_n \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise (A_n) dizisinin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Bu nedenle de $n \rightarrow \infty$ için $A_n \rightarrow A$ olacak şekilde bir $A \in \mathbb{R}$ vardır. Şimdi $a_m \rightarrow A(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$ olduğunu gösterelim. Her $\delta > 0$ için $\delta_n < \delta/4$, $\|a - a^n\|_\infty < \delta/4$ ve $|A_n - A_{n+1}| < \delta/4$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ seçilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \{m \in I_t : |a_m - A| \geq \delta\} \right| &\leq \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \{m \in I_t : |a_m^n - A_n| + \|a_m - a_m^n\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + |A_n - A| \geq \delta\} \right| \\ &\leq \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m^n - A_n| + \frac{\delta}{4} + \frac{\delta}{4} \geq \delta \right\} \right| \\ &\leq \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m^n - A_n| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \right| \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} &\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \{m \in I_t : |a_m - A| \geq \delta\} \right| < \gamma \right\} \\ &\supseteq \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \left\{ m \in I_t : |a_m^n - A_n| \geq \frac{\delta}{2} \right\} \right| < \gamma \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

$$\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \{m \in I_t : |a_m - A| \geq \delta\} \right| < \gamma \right\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve

$$\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} \left| \{m \in I_t : |a_m - A| \geq \delta\} \right| \geq \gamma \right\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir ki bu ise $a_m \rightarrow A(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$ olduğunu gösterir. ■

Teorem 5.9 $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ olsun. Bu durumda $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S_\theta(\mathcal{I})^\beta$ dir.

İspat: $a_m \rightarrow L(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$ olsun. Bu durumda $0 < \alpha \leq \beta \leq 1$ için

$$\frac{1}{h_t^\beta} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \leq \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}|$$

ve böylece her $\gamma > 0$ için

$$\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\beta} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} \subseteq \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\}$$

olur. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki küme kabulümüzden $\mathcal{I}$ idealinin elemanı olduğundan sol tarafı da $\mathcal{I}$ nin elemanı olacaktır. Bu ise $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S_\theta(\mathcal{I})^\beta$ olduğunu gösterir. ■

Sonuç 5.10 $S_\theta(\mathcal{I})^\alpha \subseteq S_\theta(\mathcal{I})$ dir ve özel olarak $\mathcal{I} = \mathcal{I}_f$ olmak üzere $\alpha < \beta$ şartını sağlayan bazı α, β lar için bu içermeye kesindir.

Teorem 5.11 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda

- (i) $a_m \rightarrow L([N_\theta(\mathcal{I})^\alpha]) \Rightarrow a_m \rightarrow L(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$,
- (ii) $[N_\theta(\mathcal{I})^\alpha], S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ nın bir özalt kümesidir.

İspat:

(i) $a_m \rightarrow L([N_\theta(\mathcal{I})^\alpha])$ olsun. Bu durumda her $\delta > 0$ için

$$\sum_{m \in I_t} |a_m - L| \geq \sum_{\substack{m \in I_t \\ |a_m - L| \geq \delta}} |a_m - L| \geq \delta |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}|$$

yazılabilir. Böylece

$$\frac{1}{\delta \cdot h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - L| \geq \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}|$$

olur. Buradan her $\gamma > 0$ için

$$\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} \subseteq \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - L| \geq \delta \gamma \right\}$$

olur. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki küme kabulümüzden $\mathcal{I}$ idealinin elemanı olduğundan sol tarafı da $\mathcal{I}$ nin elemanı olacaktır. Bu ise $a_m \rightarrow L(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$ olduğunu gösterir.

(ii) $[N_\theta(\mathcal{I})^\alpha] \subset S_\theta(\mathcal{I})^\alpha$ içermesinin kesin olduğunu göstermek için bir (a_m) dizisi her $t = 1, 2, 3, \dots$ için

$$(a_m) = (1, 2, \dots, \lfloor \sqrt{h_t^\alpha} \rfloor, 0, 0, \dots)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda her $\delta > 0$ için

$$\frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - 0| \geq \delta\}| \leq \frac{\lfloor \sqrt{h_t^\alpha} \rfloor}{h_t^\alpha}$$

ve her $\gamma > 0$ için

$$\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - 0| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} \subseteq \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{\lfloor \sqrt{h_t^\alpha} \rfloor}{h_t^\alpha} \geq \gamma \right\}$$

elde edilir. Bu içirme ifadesinde sağ taraftaki küme sonlu ve bu nedenle $\mathcal{I}$ idealine ait olduğu için $a_m \rightarrow 0(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$ bulunur. Diğer taraftan

$$\frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - 0| = \frac{1}{h_t^\alpha} \cdot \frac{\lfloor \sqrt{h_t^\alpha} \rfloor (\lfloor \sqrt{h_t^\alpha} \rfloor + 1)}{2}$$

dir. $\mathcal{I}$ bir admissible ideal olduğundan $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ya ait bazı $i \in \mathbb{N}$ ler için

$$\begin{aligned} \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} \sum_{m \in I_t} |a_m - 0| \geq \frac{1}{4} \right\} &= \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{\lfloor \sqrt{h_t^\alpha} \rfloor (\lfloor \sqrt{h_t^\alpha} \rfloor + 1)}{\lfloor \sqrt{h_t^\alpha} \rfloor} \geq \frac{1}{2} \right\} \\ &= \{i, i+1, i+2, \dots\} \end{aligned}$$

olur. Buradan $a_m \not\rightarrow 0([N_\theta(\mathcal{I})^\alpha])$ elde edilir. ■

Teorem 5.12 $\theta = \{j_t\}$ bir lacunary dizi olmak üzere eğer $\liminf_t q_t^\alpha > 1$ ise, bu durumda α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsak bir dizi α . mertebeden $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaktır.

İspat:

$\liminf_t q_t^\alpha > 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda yeterince büyük t ler için $q_t^\alpha \geq 1 + \eta$ olacak şekilde $\eta > 0$ sayısı vardır. Böylece,

$$\frac{h_t^\alpha}{k_t^\alpha} \geq \frac{\eta}{1 + \eta}$$

eşitsizliği sağlanır.

Bu durumda her $\delta > 0$ için

$$\begin{aligned} \frac{1}{j_t^\alpha} |\{m \leq j_t : |a_m - L| \geq \delta\}| &\geq \frac{1}{j_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &= \frac{h_t^\alpha}{j_t^\alpha} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &\geq \frac{\eta}{1+\eta} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \end{aligned}$$

ve dolayısıyla her $\gamma > 0$ için

$$\begin{aligned} &\left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \gamma \right\} \\ &\subseteq \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{j_t^\alpha} |\{m \leq j_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \geq \frac{\gamma\eta}{1+\eta} \right\} \end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki küme kabulümüzden $\mathcal{I}$ idealinin elemanı olduğundan sol tarafı da $\mathcal{I}$ nın elemanı olacaktır. Bu ise $a_m \rightarrow L(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$ olduğunu gösterir. $\blacksquare$

Aşağıdaki son iki teoremden her $E \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ kümesi için

$$\bigcup \{k : j_{t-1} < k < j_t, r \in E\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

şartını sağlayan $\theta = \{j_t\}$ lacunary dizisi göz önüne alınacaktır.

Teorem 5.13 $\theta = \{j_t\}$ yukarıda bahsedilen şartı sağlayan bir lacunary dizi olmak üzere eğer $\limsup_t q_t < \infty$ ise, bu durumda $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsaklık bir dizi $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\limsup_t q_t < \infty$ olsun. Bu durumda her $t \geq 1$ için $q_r < \mathcal{H}$ olacak şekilde bir $\mathcal{H} > 0$ sayısı vardır. Pozitif δ, γ ve ϑ için

$$U = \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| < \gamma \right\}$$

ve

$$V = \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| < \vartheta \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Eğer $a_m \rightarrow L(S_\theta(\mathcal{I}))$ ise, bu durumda $U \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu açıktır. Ayrıca, her $u \in U$ için

$$A_u = \frac{1}{h_u} |\{m \in I_u : |a_m - L| \geq \delta\}| < \gamma$$

olduğu görülür.

Bazı $t \in U$ lar için $j_{t-1} < k < j_t$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| &\leq \frac{1}{j_{t-1}} |\{m \leq j_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\
&= \frac{1}{j_{t-1}} |\{m \in I_1 : |a_m - L| \geq \delta\}| \\
&\quad + \dots + \frac{1}{j_{t-1}} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\
&= \frac{j_1}{j_{t-1}} \frac{1}{h_1} |\{m \in I_1 : |a_m - L| \geq \delta\}| \\
&\quad + \frac{j_2 - j_1}{j_{t-1}} \frac{1}{h_2} |\{m \in I_2 : |a_m - L| \geq \delta\}| \\
&\quad + \dots + \frac{j_t - j_{t-1}}{j_{t-1}} \frac{1}{h_t} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\
&= \frac{j_t}{j_{t-1}} A_1 + \frac{j_2 - j_1}{j_{t-1}} A_2 + \dots + \frac{j_t - j_{t-1}}{j_{t-1}} A_t \\
&\leq \left(\sup_{u \in U} A_u \right) \frac{j_t}{j_{t-1}} < \mathcal{H}\gamma
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $\vartheta = \frac{\gamma}{\mathcal{H}}$ olarak seçilir ve

$$\bigcup \{k : j_{t-1} < k < j_t, r \in E\} \subset V$$

gerçeği göz önünde bulundurulursa, lacunary dizi üzerindeki koşuldan dolayı $V \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 5.14 $0 < \alpha < 1$ olsun. $\theta = \{j_t\}$ yukarıdaki şartı sağlayan bir lacunary dizi olmak üzere eğer

$$\sup_t \sum_{n=0}^{t-1} \frac{h_{n+1}^\alpha}{(j_{t-1})^\alpha} = \beta < \infty$$

ise, bu durumda α . mertebeden $\mathcal{I}$ -lacunary istatistiksel yakınsak bir dizi α . mertebeden $\mathcal{I}$ -istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $a_m \rightarrow L(S_\theta(\mathcal{I})^\alpha)$ olsun. Pozitif δ, γ ve ϑ için

$$U = \left\{ t \in \mathbb{N} : \frac{1}{h_t} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| < \gamma \right\}$$

ve

$$V = \left\{ k \in \mathbb{N} : \frac{1}{k} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| < \vartheta \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Bu durumda $U \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğu açıktır. Ayrıca, her $u \in U$ için

$$A_u = \frac{1}{h_u} |\{m \in I_u : |a_m - L| \geq \delta\}| < \gamma$$

olduğu görülür. Bazı $t \in U$ ler için $j_{t-1} < k < j_t$ olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^\alpha} |\{m \leq k : |a_m - L| \geq \delta\}| &\leq \frac{1}{j_{t-1}^\alpha} |\{m \leq j_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &= \frac{1}{j_{t-1}^\alpha} |\{m \in I_1 : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{j_{t-1}^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &= \frac{j_1^\alpha}{j_{t-1}^\alpha} \frac{1}{h_1^\alpha} |\{m \in I_1 : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &\quad + \frac{(j_2 - j_1)^\alpha}{j_{t-1}^\alpha} \frac{1}{h_2^\alpha} |\{m \in I_2 : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &\quad + \cdots + \frac{(j_t - j_{t-1})^\alpha}{j_{t-1}^\alpha} \frac{1}{h_t^\alpha} |\{m \in I_t : |a_m - L| \geq \delta\}| \\ &= \frac{j_t^\alpha}{j_{t-1}^\alpha} A_1 + \frac{(j_2 - j_1)^\alpha}{j_{t-1}^\alpha} A_2 + \cdots + \frac{(j_t - j_{t-1})^\alpha}{j_{t-1}^\alpha} A_t \\ &\leq \left(\sup_{u \in U} A_u \right) \left(\sup_t \sum_{n=0}^{t-1} \frac{(j_{n+1} - j_n)^\alpha}{(j_{t-1})^\alpha} \right) \\ &< \mathcal{H} \gamma \end{aligned}$$

olur. Burada $\vartheta = \frac{\gamma}{\mathcal{H}}$ olarak seçilir ve

$$\bigcup \{k : j_{t-1} < k < j_t, r \in E\} \subset V$$

gerçeği göz önünde bulundurulursa, lacunary dizi üzerindeki koşuldan dolayı $V \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

6. KAYNAKLAR

- Balcı M, 2016, Matematik Analiz-I, Palme Yayınevi, Ankara.
- Bayraktar M, 2006, Fonksiyonel Analiz, Pegem Akademi Yayınevi, Ankara.
- Connor J S, 1988, The statistical and strong p -Cesàro convergence of sequences, *Analysis*, 8, 47–63.
- Çolak R, 2010, Statistical convergence of order α , *Modern Methods in Analysis and Its Applications*. New Delhi, India: Anamaya Publications, 121–129.
- Das P, Savaş E, Ghosal S Kr, 2011, On generalizations of certain summability methods using ideals, *Applied Mathematics Letters*, 24, 1509–1514.
- Das P, Savaş E, 2014, On $\mathcal{I}$ -statistical and $\mathcal{I}$ -lacunary statistical convergence of order α , *Bulletin of Iranian Mathematical Society*, 40(2), 459–472.
- Fast H, 1951, Sur la convergence statistique, *Colloquium Mathematicum*, 2, 241–244.
- Freedman A R, Sember J J, Raphael M, 1978, Some Cesàro type summability spaces, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 37(3), 508–520.
- Fridy J, 1985, On statistical convergence, *Analysis*, 5, 301–313.
- Fridy J A, Orhan C, 1981, Lacunary statistical convergence, *Pacific Journal of Mathematics*, 95(2), 293–305.
- Gadjiev A D, Orhan C, 2002, Some approximation theorems via statistical convergence, *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, 32(1), 129–138.
- Kostyrko P, Salat T, Wilczyński W, 2000, $\mathcal{I}$ -convergence, *Real Analysis Exchange*, 26(2), 669–686.
- Kreyszig E, 1978, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, New York.

- Niven I, Zucherman H S, Montgomery H L, 1991, An Introduction to the Theory of Numbers, Fifth Edition, John Wiley, New York.
- Maddox I J, 1970, Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, Second Edition.
- Rath D, Tripathy B C, 1994, On statistically convergent and statistically Cauchy sequences, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 25(4), 381–386.
- Savaş E, Das P, 2011, A generalized statistical convergence via ideals, Applied Mathematics Letter, 24(6), 826–830.
- Savaş E, 1990, On lacunary strong σ -convergence, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 21(4), 359–365.
- Savaş E, 2002, Some sequence spaces and statistical convergence, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 29(5), 303–306.
- Savaş E, Karakaya V, 2007, Some new sequence spaces defined by lacunary sequences, Mathematica Slovaca, 57(4), 393–399.
- Steinhaus H, 1951, Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Mathematicum, 2, 73–74.
- Şengül H, Et M, 2014, On lacunary statistical convergence of order α , Acta Mathematica Scientia, 34(2), 473–482.
- Tripathy B C, Hazarika B, Choudhary B, 2012, Lacunary $\mathcal{I}$ -convergent sequences, Kyungpook Mathematical Journal, 52(4), 473–482.
- Šalát T, 1980, On statistically convergent sequences of real numbers, Mathematica Slovaca, 30, 139–150.
- Zygmund A, 1979, Trigonometric Series, Cambridge University Press, Cambridge, UK.