



**T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**



DOKTORA TEZİ

**REEL KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN SINIF SAYISI
PROBLEMİNE YOKOI İNVARİYANT DEĞERLERİ İLE YENİ
YAKLAŞIMLAR**

Sevcan IŞIKAY

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

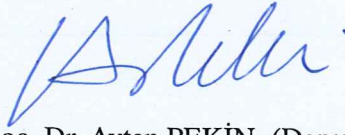
**DANIŞMAN
Doç. Dr. Ayten PEKİN**

Kasım, 2019

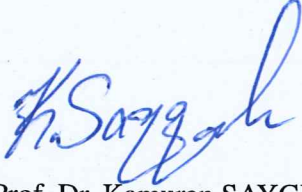
İSTANBUL

Bu çalışma 08.11.2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi



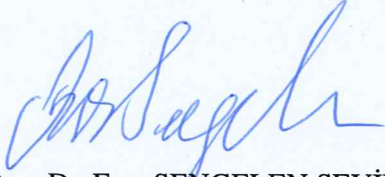
Doç. Dr. Ayten PEKİN (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



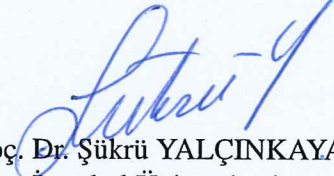
Prof. Dr. Kamuran SAYGILI
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



Prof. Dr. Ünsal TEKİR
Marmara Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi



Doç. Dr. Esra ŞENGELEN SEVİM
İstanbul Bilgi Üniversitesi
Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi



Doç. Dr. Şükrü YALÇINKAYA
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi



20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Doktora öğrenimim ve tez çalışmalarım boyunca bilgi ve tecrübeleri ile bana yol gösteren ve destek olan değerli hocam Sayın Doç. Dr. Ayten Pekin'e; benden desteklerini esirgemeyen, her daim yanımda olduklarını hissettiğim kıymetli aileme, sevgili eşim Serkan'a ve değerli ailesine en içten teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca “Yurt İçi Doktora Burs Programı” ile tarafıma vermiş olduğu destekten dolayı TÜBİTAK'a teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tezi, hayatıma anlam katan kızım Simay'a ithaf ediyorum.

Kasım, 2019

Sevcan IŞIKAY

İÇİNDEKİLER

	Sayfa No
ÖNSÖZ	iv
İÇİNDEKİLER	vi
TABLO LİSTESİ	vii
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ	ix
ÖZET	x
SUMMARY	xi
1. GİRİŞ	1
2. GENEL KISIMLAR	6
2.1. SAYI CİSİMLERİ	6
2.2. KUADRATİK SAYI CİSİMLERİ	8
2.3. KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNDE ÇARPANLARA AYIRMA	12
2.4. KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN İDEALLERİ	13
2.5. İDEAL SINIF GRUBU	15
2.6. ASALLARIN PARÇALANIŞI	17
2.7. DIRICHLET SINIF SAYISI FORMÜLÜ	19
2.8. SÜREKLİ KESİRLER	23
3. MALZEME VE YÖNTEM	26
3.1. YOKOI İNVARİYANT DEĞERLERİ İLE YAKLAŞIMLAR	26
3.2. TEMEL BİRİM VE SÜREKLİ KESİRLER İLE İLGİLİ TEMEL TEOREMLER	38
3.3. PERİYODA BAĞLI OLARAK YAKLAŞIMLAR	41
3.4. ANKENY-ARTIN-CHOWLA (AAC) SANISI	49
4. BULGULAR	56
4.1. TEMEL BİRİM İLE İLGİLİ BULGULAR	56
4.2. SINIF SAYISI İLE İLGİLİ BULGULAR	72
4.3. YOKOI İNVARİYANTLARININ AAC SANISI İLE İLİŞKİSİ	78
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	87

KAYNAKLAR	90
EKLER	95
EK 1. Mathematica Program Kodları ve Bazı d Değerlerine Karşılık Gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ Reel Kuadratik Sayı Cisimlerine Ait Parametreler.	95
ÖZGEÇMİŞ	99



TABLO LİSTESİ

	Sayfa No
Tablo 3.1: R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimlerinin m_d değerleri.	37
Tablo 3.2: R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimlerinin n_d değerleri.	37
Tablo 4.1: $n_d \neq 0$ ve $h_d = 1$ olan pozitif kare çarpansız d tam sayıları.	75
Tablo 4.2: $d \leq 19$ için m_d ve U_d değerleri.	86
Tablo 4.3: $d < 2 \cdot 10^5$ için $U_d < d$ ve $(m_d + 1)^2 + m_d \not\leq d$ sağlayan değerler.	86

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\bar{\alpha}$	: α elemanının eşleniği
$\mathcal{C}$	: İdeal sınıf grubu
d	: Kare çarpansız tam sayı
Δ	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin diskriminantı
ε_d	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin temel birimi
h_d, h_K	: $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin sınıf sayısı
$I(d)$	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismindeki tüm kuadratik irrasyonel sayıların kümesi
$Iz(\alpha)$	: α elemanının izi
$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$	: Kuadratik sayı cismi
k_d	: w_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımının periyot uzunluğu
χ_K	: K cismine karşılık gelen Dirichlet karakteri
$L(s, \chi)$	: Dirichlet L-fonksiyonu
M_K	: Minkowski sınırı
$N(\alpha)$	: α elemanının normu
$N(I)$	: I idealinin normu
n_d, m_d	: Yokoi invaryant değerleri
O_K	: K cisminin tamlık halkası
$\mathbb{Q}$	: Rasyonel sayılar cismi
$R(d)$	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismindeki indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayıların kümesi
T_d, U_d	: ε_d temel birimin katsayıları
$\mathcal{U}_d$	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin birim grubu
w_d	: $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin tamlık taban elemanı olan kuadratik irrasyonel sayı
w_R	: w_d kuadratik irrasyonel sayısının indirgenmiş hali
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$	: Pozitif tam sayılar kümesi
$\zeta(s)$	: Riemann zeta fonksiyonu
$\left(\frac{*}{*}\right)$	: Legendre veya Jacobi sembolü
$[x]$	: x 'in tam değeri

Kısaltmalar	Açıklama
<i>TAÇ</i>	: Tek Türlü Asal Çarpanlarına Ayrılabilen Bölge
<i>EİB</i>	: Esas İdeal Bölgesi



ÖZET

DOKTORA TEZİ

REEL KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN SINIF SAYISI PROBLEMİNE YOKOI İNVARİYANT DEĞERLERİ İLE YENİ YAKLAŞIMLAR

Sevcan IŞIKAY

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayten PEKİN

Bu çalışmanın amacı; reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayılarının, bu cisimlerin temel birimlerinin katsayıları ile tanımlanan, Yokoi invaryant değerlerine bağlı olarak incelenmesidir.

Öncelikle $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin w_d tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımında periyodik kısmın ilk terimi hakkında önemli bir kriter belirlenmiştir. Bu sayede söz konusu cisimlerin temel birimlerinin katsayıları için Yokoi invaryant değerlerine bağlı olarak bazı alt ve üst sınırlar verilmiştir.

Temel birim için elde edilen sınırlar Dirichlet Sınıf Sayısı Formülüne uygulanarak cismin sınıf sayısı üzerine bir takım yeni kriterler elde edilmiştir. Böylece reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayılarına yeni yaklaşımlar yaparken bu cisimlerin cebirsel yapıları ile ilgili yeni özellikler de elde edilmiştir. Son olarak, Ankeny-Artin-Chowla Sanısının Yokoi invaryant değerlerine bağlı olarak ifade edilen bazı durumlarda doğru olduğu gösterilmiştir.

Kasım 2019, 111 sayfa.

Anahtar kelimeler: Reel kuadratik sayı cismi, temel birim, sınıf sayısı, sürekli kesirler, Yokoi invaryant değerleri.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

THE NEW APPROXIMATIONS ON THE CLASS NUMBER PROBLEM OF REAL QUADRATIC NUMBER FIELDS BY YOKOI'S INVARIANT VALUES

Sevcan IŞIKAY

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Mathematics

Supervisor: Doç. Dr. Ayten PEKİN

The aim of this study is to investigate the class numbers of real quadratic number fields depending on Yokoi's invariant values defined by the coefficients of the fundamental units of such fields.

First of all, an important criterion is determined for the first term of the symmetric part on the continued fraction expansion of w_d , integral basis element of $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ real quadratic number field where $d \equiv 1 \pmod{4}$ positive square-free integer. Thus, some lower and upper bounds for coefficients of the fundamental units of such fields are given depending on Yokoi's invariant values.

The bounds obtained for the fundamental unit are applied to Dirichlet Class Number Formula and some new criteria on the class number of the field are obtained. Therefore, new properties regarding the algebraic structures of these fields have been obtained while bringing the new approaches to the class numbers of real quadratic number fields. Finally, it has been shown that Ankeny-Artin-Chowla Conjecture is true for some cases expressed in terms of Yokoi's invariant values.

Kasım 2019, 111 pages.

Keywords: Real quadratic number field, fundamental unit, class number, continued fractions, Yokoi's invariant values.

1. GİRİŞ

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin ikinci dereceden genişlemesi olan kuadratik sayı cisimleri, d kare çarpansız bir tam sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ biçiminde ifade edilir ve bu cisimler; eğer $d > 0$ ise reel kuadratik sayı cismi, $d < 0$ ise imajiner kuadratik sayı cismi olarak adlandırılır.

Sınıf sayısı kavramı ilk olarak Gauss tarafından "Disquisitiones Arithmeticae" adlı eserinde kuadratik formlar için tanımlanmıştır. Gauss, kuadratik formlar için bir çarpım işlemi tanımlayarak verilen bir diskriminanta sahip kuadratik formların denklik sınıflarının sonlu bir grup oluşturduğunu ispatlamıştır ve diskriminantı d olan kuadratik formların denklik sınıflarının sayısı ile ilgili aşağıdaki varsayımlarda bulunmuştur:

1. $d \rightarrow -\infty$ iken sınıf sayısı $h(d) \rightarrow \infty$
2. Sınıf sayısı 1 olan sonlu sayıda imajiner kuadratik sayı cismi vardır.
3. Sınıf sayısı 1 olan sonsuz çoklukta reel kuadratik sayı cismi vardır.

İkinci problem 1966 yılında A. Baker ve 1967 yılında H. M. Stark tarafından bağımsız olarak çözülerek, sınıf sayısı 1 olan tam olarak 9 tane imajiner kuadratik sayı cisminin var olduğu gösterilmiştir. Bunlar $d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$ değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimleridir. Sınıf sayısı 1 olan reel kuadratik sayı cisimlerinin sonsuz çoklukta olup olmadığı ise henüz kesinlik kazanmadığından bu cisimler ile çalışmak daha bir önem kazanmıştır.

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin cebirsel tam sayılarının oluşturduğu küme olan O_K tamlık halkasında çarpanlara ayrılışın tek türlü olmayabileceğini keşfeden Kummer, 1847 yılında Dedekind'in sonradan "ideal" olarak adlandıracağı kavramı ele alarak yeni bir çıkır açmıştır. Böylece O_K 'daki tek türlü çarpanlara ayrılma özelliğinin eksikliği O_K 'nın idealleri üzerinden yeniden inşa edilmiştir. Ancak O_K 'nın bütün ideallerinin kümesi ideallerin çarpma işlemine göre bir grup oluşturmaz. Bu nedenle kesirsel ideal kavramı doğmuştur ve kuadratik sayı cisminin tamlık halkasının sıfırdan farklı kesirsel ideallerinin oluşturduğu kümenin, idealler arasındaki çarpma işlemine göre değişmeli bir grup oluşturduğu gösterilmiştir. Bu

grup $\mathcal{F}$ ile ve onun esas ideallerinin kümesi de $\mathcal{E}$ ile gösterilirse, $\mathcal{C} = \mathcal{F}/\mathcal{E}$ bölüm grubuna $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin "ideal sınıf grubu" denir. Bu grubun mertebesine ise K cisminin "sınıf sayısı" denir ve h_K veya h_d ile gösterilir.

Kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayılarının belirlenmesine yönelik geliştirilen yöntemlerden biri; normu Minkowski sınırından küçük veya eşit olan ideallerin belirlenmesidir. Çünkü her ideal sınıfı normu Minkowski sınırından küçük veya eşit olan en az bir tam ideali kapsar. Bu yöntem ile d değeri küçük olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimlerinin sınıf sayıları belirlenebilir olmasına rağmen d değerleri büyüdükçe bu cisimlerin sınıf sayısını hesaplamak zorlaşır. Bir diğer yöntem ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, diskriminantı Δ olan bir kuadratik sayı cismi ve $\varepsilon_d = \frac{T_d + U_d \sqrt{d}}{2}$ bu cismin temel birimi olmak üzere

$$h_d = \begin{cases} \frac{c\sqrt{|\Delta|}}{2\pi} L(1, \chi) & ; d < 0 \\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \log \varepsilon_d} L(1, \chi) & ; d > 0 \end{cases}$$

biçiminde ifade edilen Dirichlet Sınıf Sayısı Formülüdür. Bu formül kullanılarak bir reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısının hesaplanması için ε_d temel biriminin açıkça belirlenmesine ihtiyaç vardır.

$d = n^2 + r$; $4n \equiv 0 \pmod{r}$, $r \in (-n, n]$ biçiminde ifade edilen d değerlerine karşılık gelen ve "Richaud-Degert (R-D) Tipinde Sayı Cismi" olarak adlandırılan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin formu açıkça belirlenmiş olup bu tipteki cisimler için Dirichlet Sınıf Sayısı Formülü kullanılarak sınıf sayısı üzerine çeşitli çalışmalar yapılmıştır. Örneğin; $n > 1861$ için Biró [6, 7] çalışmalarında $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2 + 4})$ ve $\mathbb{Q}(\sqrt{4n^2 + 1})$ formundaki cisimlerin, Byeon [10] çalışmasında $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2 - 4})$ formundaki cisimlerin sınıf sayılarının 1'den büyük olduğunu göstermişlerdir. Biró ve Lapkova ise " $a, n \in \mathbb{Z}^+$ tek sayılar olmak üzere $d = (an)^2 + 4a > 1253$ için $h_d > 1$ " olduğunu ispatlamıştır [8]. Diğer taraftan Hoque ve Chakraborty, $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ asal ve n tek tam sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{n^2 p^2 + 1})$ cisminin sınıf sayısının 1 olamayacağını göstermiştir [25]. Benzer şekilde sınıf sayısı 2 olan R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimlerinin belirlenmesine yönelik çeşitli çalışmalar yapılmıştır [9, 11, 33, 34]. Chakraborty ise sınıf sayısı 3 olan belirli R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimleri için bazı kriterler elde etmiştir [13]. Bu konuda yapılan çalışmalar, sadece sınıf sayısı küçük olan sayı cisimlerinin belirlenmesine yönelik olmayıp sınıf sayısının bölünebilirliği üzerine de çok sayıda çalışmalar yapılmış ve halen yapılmaya devam edilmektedir.

R-D tipinde olmayan reel kuadratik sayı cisimlerinin temel biriminin formu belli olmadığından bu tipteki cisimleri çalışmak daha bir önem kazanmıştır. Bu konuda yapılan en önemli çalışmalardan biri Yokoi invaryant değerleri ile cisimlerin temel birimlerinin sınırlandırılması ve buna bağlı olarak sınıf sayısı probleminin irdelenmesidir. Bu anlamda, $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_p = (T_p + U_p\sqrt{p})/2$ biçiminde olmak üzere, Yokoi [62, 63] çalışmalarında temel birimin T_p ve U_p tam sayı katsayılarına bağlı olarak n_p invaryantını tanımlamış ve bu invaryatın sıfırdan farklı olduğu durumlarda temel birim için üst sınır elde etmiştir. Ayrıca bu sınırı Dirichlet Sınıf Sayısı Formülüne uygulayarak olası bir istisna ile $n_p \neq 0$ ve sınıf sayısı $h_d = 1$ şartını sağlayan sonlu sayıda $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cismi olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra Mollin ve Williams ise Yokoi'nin çalışmalarını tüm pozitif kare çarpansız d tam sayısı için genelleştirmiştir. Bahsedilen bu çalışmalar Bölüm 3.1'de detaylı olarak incelenecektir.

R-D tipinde olmayan reel kuadratik sayı cisimleri üzerine yapılan diğer çalışmalar ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisimlerinin w_d kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımındaki periyoda bağlı olarak temel birimin belirlenmesi ve sınıf sayısı problemine yaklaşımlar yapılmasıdır. Azuhata, herhangi bir indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesre açılımı ile ilgili bazı rekürans bağıntıları elde etmiş [5], Tomita ise bu bağıntıları kullanarak $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin temel biriminin katsayılarını w_d 'nin sürekli kesre açılımındaki terimler ile ifade etmiştir [56]. Bu sayede cismin tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımında periyodun 3 ve 4 olması durumunda temel birimin formu açıkça belirlenmiş ve n_d Yokoi invaryantı için bazı kriterler verilmiştir [56, 57]. Mollin ve Williams ise tanımladığı özel bir polinom vasıtasıyla periyodun 4 ve 5 olması durumlarını incelemişlerdir [37, 38]. Pekin ve İşcan, periyodun 6 olması durumunu göz önüne alarak sürekli kesir açılımındaki terimler yardımıyla temel birimin formunu belirlemiş ve n_d Yokoi invaryantı için bazı kriterler vermişlerdir [52]. Benzer şekilde periyod 7, 8 ve 9 iken temel birimin formu literatürde elde edilmiş ancak Yokoi invaryantı ile ilgili bir inceleme yapılmamıştır [17, 47, 50, 51]. Periyod uzunluğu arttıkça temel birimin bu yöntemle belirlenmesi oldukça zor olmaktadır. Bu çalışmalar hakkında detaylı bilgiler Bölüm 3.2 ve Bölüm 3.3'de verilmiştir.

Diğer taraftan Ankeny, Artin ve Chowla 1952'de, " $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olmak üzere $p \nmid U_p$ nin her zaman doğru olup olmadığı" sorusunu ortaya atmışlardır [2]. Bu soru günümüzde "Ankeny-Artin-Chowla (AAC) Sanısı" olarak bilinmektedir. Nümerik hesaplamalar ile $p < 2 \times 10^{11}$ sağlayan asallar için AAC Sanısının doğru olduğu Van Der

Poorten tarafından gösterilmiştir [58]. Yokoi, tanımladığı n_p invaryant değerinin sıfırdan farklı olması durumunda $U_p < p$ olduğunu yani AAC Sanısının sağlandığını ispatlamıştır [62]. Mollin ve Williams ise $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayısı için benzer bir sonuç elde etmiştir [41]. Öte yandan Hashimoto, $(1 + \sqrt{p})/2$ 'nin sürekli kesre açılımı $[a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k'}, a_{k'}, \dots, a_1, 2a_0 - 1}]$ olmak üzere $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümelerini tanımlayarak olası bir istisna ile bu kümedeki tüm asalların AAC Sanısını sağladığını, eğer istisna varsa bunun kümedeki en küçük tam sayı olduğunu göstermiştir [19]. Byeon ve Lee ise McLaughlin'in sürekli kesirler üzerine yaptığı [35] çalışmasını kullanarak keyfi pozitif kare çarpansız d tam sayısı için Hashimoto'nun teoremini genelleştirmiştir [12]. Bahsedilen tüm bu çalışmalar hakkında detaylı bilgiler Bölüm 3.4'de verilmiştir.

Reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerini ve sınıf sayılarını incelemeyi amaçlayan bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Bu bölümü takip eden ikinci bölümde konuyla ilgili temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, elde ettiğimiz özgün teoremlerin ispatlarında kullanılan lemma, teorem ve yöntemler detaylı bir şekilde anlatılmıştır.

Dördüncü bölüm ise bu tez çalışmasının esas kısmını oluşturmaktadır. Yaptığımız çalışmalar neticesinde elde ettiğimiz özgün teoremler ve bu teoremlerin sonuçları üç alt bölümde verilmiştir. Birinci alt bölümde, öncelikle $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımında periyodik kısmın ilk terimi hakkında önemli bir kriter belirlenmiştir (Teorem 4.1.1). Daha sonra $d = a^2 + b$ ($0 < b \leq 2a$, $a, b \in \mathbb{Z}$) biçiminde bir pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere, cismin temel biriminin U_d ve T_d katsayıları ve dolayısıyla ε_d temel birim için n_d Yokoi invaryant değerine bağlı olarak yeni sınırlar verilmiştir (Teorem 4.1.2, Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4).

İkinci alt bölümde, temel birim için elde edilen yeni sınırlar Dirichlet Sınıf Sayısı Formülüne uygulanarak cismin sınıf sayısı hakkında $n_d \neq 0$ iken yeni bir alt sınır ve $n_d = 0$ iken yeni bir üst sınır elde edilmiştir (Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.3). Bu bulgular, Yokoi invaryantları ile sınıf sayısının incelenmesine yönelik literatürdeki bulgular ile karşılaştırılarak verilen örnekler ile pekiştirilmiştir (Örnek 4.2.4 ve Örnek 4.2.5).

Üçüncü alt bölümde ise Yokoi invaryant değerlerinin AAC Sanısı ile ilişkisi incelenmiştir.

Herhangi bir pozitif kare çarpansız d tam sayısı için $n_d \neq 0$ iken $U_d < d$ olduğu ispatlanmıştır (Önerme 4.3.1). Daha sonra Hashimoto tarafından tanımlanan $S(k; a_1, a_2, \dots, a_k)$ kümeleri ele alınarak $p \equiv 1 \pmod{4}$ asalının bu kümenin elemanı olması durumunda $n_p \neq 0$ dolayısıyla $U_p < p$ olduğu verilmiştir (Önerme 4.3.2). Böylece Hashimoto tarafından elde edilen Önerme 3.4.4, Yokoi invaryantları kullanılarak farklı bir yöntem ile ispatlanmıştır. Son olarak, m_d invaryantı ile AAC Sanısı arasındaki ilişki incelenerek $(m_d + 1)^2 + m_d < d$ ise $U_d < d$ elde edilmiştir (Teorem 4.3.7). Bu ifadenin tersinin geçerli olmadığı ise Sonuç 4.3.8’de verilen örnekler ile gösterilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde, çalışmamızın bulgularının değerlendirilmesi yapılmış, varılan sonuçlar mevcut literatür bilgisiyle karşılaştırmalı olarak ifade edilmiştir.

Ayrıca tez çalışmasında elde edilen bulgular belirli bir sayıya kadar olan d değerleri için Mathematica programı kullanılarak doğrulanmıştır. Yazılan program kodları ile söz konusu bazı d değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimlerine ait parametreler tablo halinde Ekler bölümünde verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu bölümde, kuadratik sayı cisimleri ve bu cisimlerin idealleri ile ilgili temel kavramlara ve teoremlere yer verilerek, söz konusu cisimlerin sınıf sayılarına ait temel kavramlar incelenecektir. Bu konuları içeren çalışmalar arasında temel eser niteliğinde kabul edilen ve [16], [18], [27], [43] ve [53] ile verilen kaynaklardan yararlanılarak, genellikle ispat verilmeden, sadece sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel sonuçlar ele alınacaktır. Son kısımda ise kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin belirlenmesinde oldukça önemli bir rol oynayan sürekli kesirler hakkındaki temel tanım ve teoremlere yer verilecek olup bu bilgilerin birçoğu [46] numaralı kaynakta yer almaktadır.

2.1. SAYI CİSİMLERİ

Tanım 2.1.1. F ve K , $F \subseteq K$ şartını sağlayan iki cisim ise K cismine F cisminin bir *genişlemesi* denir. K 'nın F cismi üzerinde vektör uzayı olarak boyutuna K 'nın F üzerindeki genişlemesinin *derecesi* denir ve $[K : F]$ ile gösterilir. Eğer $[K : F]$ sonlu ise genişlemeye *sonlu genişleme* denir.

Tanım 2.1.2. K, F 'nin bir cisim genişlemesi olsun. Bir $\alpha \in K$ için $f(\alpha) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in F[x]$ polinomu varsa α 'ya F üzerinde bir *cebirsal eleman* denir. Cebirsal olmayan elemanlara *transandant* denir.

Tanım 2.1.3. F üzerinde cebirsal bir $\alpha \in K$ 'nın kök olduğu $F[x]$ 'de asal ve monik polinoma α elemanının sağladığı *minimal polinom* denir ve $P_F(\alpha, x)$ ile gösterilir. $d^0P_F(\alpha, x)$ 'ye α 'nın F üzerindeki *derecesi* denir.

Tanım 2.1.4. K, F 'nin bir genişlemesi ve $\forall \alpha \in K, F$ üzerinde cebirsal ise K 'ya F 'nin bir *cebirsal genişlemesi* denir.

Teorem 2.1.5. Her sonlu genişleme bir cebirsal genişlemedir.

Teorem 2.1.6. α ve β elemanları F cismi üzerinde cebirsal ise $F(\alpha, \beta) = F(\gamma)$ olacak şekilde bir γ elemanı vardır.

Tanım 2.1.7. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin sonlu genişlemelerine *sayı cismi* denir.

Tanım 2.1.8. $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, n . dereceden bir sayı cismi olsun. $\alpha \in K$ 'nın minimal polinomunun kompleks sayılar üzerindeki parçalanışı $P_{\mathbb{Q}}(\alpha, x) = \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$ ile gösterilmek üzere α_i 'ler $P_{\mathbb{Q}}(\alpha, x)$ polinomunun n farklı kökü olsun. α_i 'lerin her birine $\alpha \in K$ 'nın eşlenikleri denir. Ayrıca bu polinomun reel köklerinin sayısı r_1 , kompleks kök çiftlerinin sayısı r_2 ile gösterilirse $n = r_1 + 2r_2$ eşitliği mevcuttur. $n = 2$ iken reel kuadratik sayı cisimlerinde $r_1 = 2, r_2 = 0$; imajiner kuadratik sayı cisimlerinde ise $r_1 = 0, r_2 = 1$ olacağı açıktır [53].

Teorem 2.1.9. $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, n . dereceden bir sayı cismi olsun. Bu durumda $\alpha \in K$ olmak üzere $\sigma_i : K \rightarrow K$, $\sigma_i(\alpha) = \alpha_i$ ($i = 1, \dots, n$) olacak şekilde n tane otomorfizma vardır [53].

Tanım 2.1.10. K , n . dereceden bir sayı cismi ve $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$, K üzerinde otomorfizmalar olmak üzere $\alpha \in K$ 'nın *normu* ve *izi* sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır [53].:

$$N(\alpha) = \prod_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)$$

$$Iz(\alpha) = \sum_{i=1}^n \sigma_i(\alpha)$$

Tanım 2.1.11. K , n . dereceden bir sayı cismi olmak üzere $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ elemanlarının *diskriminantı*

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \left(\det(\sigma_i(\alpha_j)) \right)^2$$

biçiminde verilir [53].

Örnek 2.1.12. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ olsun. $P_{\mathbb{Q}}(\alpha, x) = x^2 - 5$ dir ve bu polinomun kökleri $\sqrt{5}$ ve $-\sqrt{5}$ olduğundan iki tane reel kök vardır ve otomorfizmalar

$$\sigma_1(\sqrt{5}) = \sqrt{5} \quad \sigma_2(\sqrt{5}) = -\sqrt{5}$$

şeklinde dir. K cisminin $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2 - \sqrt{5}$ elemanlarının diskriminantı aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\Delta(3, 2 - \sqrt{5}) = \left| \begin{array}{cc} 3 & 3 \\ 2 - \sqrt{5} & 2 + \sqrt{5} \end{array} \right|^2 = (6\sqrt{5})^2 = 210.$$

Teorem 2.1.13. K , n . dereceden bir sayı cismi ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ olmak üzere

$$\Delta(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \det(I_z(\alpha_i, \alpha_j))$$

biçimindedir [53].

Tanım 2.1.14. Bir kompleks sayı $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel ise *cebirsel sayı* denir. α bir cebirsel sayı olmak üzere α , katsayıları tam sayılar olan monik bir polinomun kökü ise *cebirsel tam sayı* denir [16].

Teorem 2.1.15. K bir sayı cismi olmak üzere K cisminin cebirsel tam sayılarının oluşturduğu küme toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya K cisminin *tamlık halkası* denir ve O_K ile gösterilir [53].

2.2. KUADRATİK SAYI CİSİMLERİ

Tanım 2.2.1. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin ikinci dereceden genişlemesine *kuadratik sayı cismi* denir.

$[K : \mathbb{Q}] = 2$ ise $K = \mathbb{Q}(\gamma)$ biçiminde bir basit genişlemedir. Yani γ elemanı $\mathbb{Q}[x]$ de 2. dereceden monik, indirgenemez bir polinomun kökü dolayısıyla $ax^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ biçimindeki bir polinomun da köküdür. Öyleyse d kare çarpansız bir tam sayı olmak üzere $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ biçimindedir. Bu durumda $\{1, \sqrt{d}\}$, K 'nın $\mathbb{Q}$ üzerinde bir tabanıdır. O halde $\forall \alpha \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ elemanı $x, y \in \mathbb{Q}$ olmak üzere $\alpha = x + y\sqrt{d}$ şeklinde yazılabilir ve bu yazılış tek türdür.

Tanım 2.2.2. Eğer $d > 0$ ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 'ye *reel kuadratik sayı cismi*, $d < 0$ ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ 'ye *imajiner kuadratik sayı cismi* denir.

Teorem 2.2.3. Kuadratik sayı cisimlerinde iki tane otomorfizma vardır. Bunlar $\alpha = x + y\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ olmak üzere $\sigma_1(x + y\sqrt{d}) = x + y\sqrt{d}$ özdeşlik dönüşümü ve $\sigma_2(x + y\sqrt{d}) = x - y\sqrt{d}$ şeklindedir.

Tanım 2.2.4. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir kuadratik sayı cismi olsun. $\bar{\alpha} = x - y\sqrt{d}, \alpha = x + y\sqrt{d}$ nin

eşleniği olmak üzere α elemanın *normu* ve *izi*

$$N(\alpha) = \prod_{i=1}^2 \sigma_i(\alpha) = \alpha \cdot \bar{\alpha} = (x + y\sqrt{d})(x - y\sqrt{d}) = x^2 - dy^2$$

$$Iz(\alpha) = \sum_{i=1}^2 \sigma_i(\alpha) = \alpha + \bar{\alpha} = (x + y\sqrt{d}) + (x - y\sqrt{d}) = 2x$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıda $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin cebirsel tam sayılarının oluşturduğu küme olan O_K tamlık halkası ile ilgili bazı özelliklere yer verilmiştir.

Önerme 2.2.5. $\alpha \in K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ olmak üzere $\alpha \in O_K$ olması için gerek ve yeter koşul $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ ve $Iz(\alpha) \in \mathbb{Z}$ olmasıdır [53].

Teorem 2.2.6. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ olsun.

$$w_d = \begin{cases} \sqrt{d} & ; d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ \frac{1+\sqrt{d}}{2} & ; d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

olmak üzere $O_K = \{a + bw_d \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ biçimindedir [15].

Teorem 2.2.7. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin tamlık halkası sonlu üretilmiş bir $\mathbb{Z}$ -modüldür ve $O_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}w_d$ biçimindedir. $O_K = \mathbb{Z}[w_d]$ şeklinde yazmak mümkündür [53].

Tanım 2.2.8. $\{1, w_d\}$ ikilisine O_K halkasının *tamlık tabanı* denir [15].

Tanım 2.2.9. O_K tamlık halkasının tamlık tabanı $\{w_1, w_2\} = \{1, w_d\}$ olmak üzere

$$\Delta = \det(Iz(w_i, w_j))_{i,j=1,2}$$

ifadesine O_K tamlık halkasının veya $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin *diskriminantı* denir. Bu takdirde

$$\Delta = \begin{cases} 4d & ; d \equiv 2, 3 \pmod{4} \\ d & ; d \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir [53].

$\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasında olduğu gibi $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin O_K tamlık halkasında da aritmetik yapılabilir.

Tanım 2.2.10. $\alpha, \beta \in O_K, \alpha \neq 0$ olsun. $\beta = \alpha\gamma$ olacak şekilde bir $\gamma \in O_K$ varsa, α, β 'yi *böler* denir ve $\alpha|\beta$ ile gösterilir [15].

Tanım 2.2.11. $\varepsilon \in O_K$ için $\varepsilon^{-1} \in O_K$ ise ε 'a *birimsel eleman* denir. O_K tamlık halkasındaki birimsel elemanların kümesi $\mathcal{U}_d$ ile gösterilir [15].

Teorem 2.2.12. $\varepsilon \in O_K$ olsun. $\varepsilon \in \mathcal{U}_d$ olması için gerek ve yeter koşul $N(\varepsilon) = \pm 1$ olmasıdır [15].

Teorem 2.2.13. $\varepsilon \in O_K$ birimsel eleman ise $-\varepsilon$ ve ε^{-1} de birimsel elemandır. Ayrıca $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathcal{U}_d$ ise $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \in \mathcal{U}_d$ dir [15].

Sonuç 2.2.14. O_K tamlık halkasının birimsel elemanlarının kümesi $\mathcal{U}_d$ çarpma işlemi altında bir grup oluşturur. Bu gruba $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin *birim grubu* denir [15].

Teorem 2.2.15. $d < 0$ olmak üzere $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ imajiner kuadratik sayı cisminin birimsel elemanları

- (i) $\mathcal{U}_{-1} = \{\pm 1, \pm i\}$
- (ii) $\mathcal{U}_{-3} = \{\pm 1, \frac{\pm 1 \pm \sqrt{-3}}{2}\}$
- (iii) $d \neq -1, -3$ için $\mathcal{U}_d = \{\pm 1\}$

biçimindedir [15].

Böylece imajiner kuadratik sayı cisimlerinin sonlu tane elemandan oluşan birim grubu belirlenmiştir. Reel kuadratik sayı cisimlerinde ise birimsel elemanların sayısı sonlu değildir ve bunların belirlenmesi her zaman kolay olmayabilir.

Teorem 2.2.16. $d > 0$ olmak üzere $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin sonsuz sayıda birimsel elemanı vardır [15].

Teorem 2.2.17. $A > 1$ bir reel sayı olmak üzere $1 < \varepsilon < A$ aralığında $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin sonlu sayıda birimsel elemanı vardır [15].

Tanım 2.2.18. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi olmak üzere O_K halkasında birden büyük birimsel elemanların en küçüğüne *temel birim* denir ve ε_d ile gösterilir [15].

Teorem 2.2.19. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin $\mathcal{U}_d$ birim grubu

$$\mathcal{U}_d = \{\pm \varepsilon_d^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

biçimindedir [15].

Tanım 2.2.20. $d = n^2 + r$ pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $4n \equiv 0 \pmod{r}$ ve $-n < r \leq n$ koşullarını sağlayan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cismine *Richaud-Degert (R-D) tipinde sayı cismi* denir [59].

Bu cisimlerin temel birimleri; $\text{sgn } r$, r 'nin işaret fonksiyonu olmak üzere

- (i) $|r| = 1$ ise $\varepsilon_d = n + \sqrt{d}$ ve $N(\varepsilon_d) = -\text{sgn } r$
- (ii) $|r| = 4$ ise $\varepsilon_d = \frac{n+\sqrt{d}}{2}$ ve $N(\varepsilon_d) = -\text{sgn } r$
- (iii) $|r| \neq 1, 4$ ise $\varepsilon_d = \frac{(2n^2+r)+2n\sqrt{d}}{|r|}$ ve $N(\varepsilon_d) = 1$

biçiminde belirlenmiştir [59].

Örnek 2.2.21. $\mathbb{Q}(\sqrt{2021})$ kuadratik sayı cisminin temel birimi aşağıdaki şekilde bulunur.

$2021 = 45^2 - 4$ biçiminde yazılabilir. Burada $n = 45$ ve $r = -4$ yazılırsa $4n \equiv 0 \pmod{r}$ ve $-n < r \leq n$ koşulları sağlandığından $\mathbb{Q}(\sqrt{2021})$ cismi R-D tipinde kuadratik sayı cismi olduğu anlaşılır. Bu takdirde temel birim $\varepsilon_{2021} = \frac{45+\sqrt{2021}}{2}$ dir ve temel birimin normu $N(\varepsilon_{2021}) = +1$ dir.

Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimleri kolaylıkla bulunabilir. Fakat R-D tipinde olmayan kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerini belirlemek oldukça zordur. Bazı cisimlerin temel birimleri şaşırtıcı şekilde büyük olabilmektedir. Örneğin, $\mathbb{Q}(\sqrt{2010})$ cisminin temel birimi $\varepsilon_d = 269 + 6\sqrt{2010}$ iken $\mathbb{Q}(\sqrt{2011})$ cisminin temel birimi $\varepsilon_d = 22903355954053525066202335319378237605968890 + 510732021116138713675018566232201605320997\sqrt{2011}$ dir. $d = 40094470441$ için T_d ve U_d değerleri 10^{330000} 'dan büyüktür.

Reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin belirlenmesi sayılar teorisinde oldukça önemli bir yer tutar. Çünkü sınıf sayısı ve temel birim arasında yakın bir ilişki vardır. Esasen

bu ilişki, en açık şekilde ileriki bölümlerde verilecektir ve bu tez çalışmasının temelini oluşturan Dirichlet sınıf sayısı formülünden görülmektedir. Bu formülde, bir $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin sınıf sayısı, cismin ε_d temel birimine bağlı olarak belirlidir. R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimlerinin formu açıkça belirlenmesine karşın R-D tipinde olmayan cisimlerin temel birimlerinin formları açıkça belirli olmayıp hala üzerinde çalışılan bir konudur.

2.3. KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNDE ÇARPANLARA AYIRMA

Tanım 2.3.1. $\alpha, \beta \in O_K$ olmak üzere eğer $\alpha = \varepsilon\beta$ olacak şekilde $\varepsilon \in \mathcal{U}_d$ var ise α ve β *ilgilidir* denir.

Teorem 2.3.2. $\alpha, \beta \in O_K$ ilgili olmaları için gerek ve yeter koşul $|N(\alpha)| = |N(\beta)|$ olmasıdır.

Tanım 2.3.3. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi olmak üzere $\alpha \in O_K$ aşağıdaki şartları sağlıyorsa α 'ya *indirgenemez eleman* denir

- $\alpha \neq 0$ ve $\alpha \notin \mathcal{U}_d$
- Eğer $\beta, \gamma \in O_K$ için $\alpha = \beta\gamma$ ise β veya γ birimseldir.

Teorem 2.3.4. $|N(\alpha)| \in \mathbb{Z}$ asal ise $\alpha \in O_K$ indirgenemezdir.

Teorem 2.3.5. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi olsun. $\alpha \in O_K$ sıfırdan ve birimselden farklı bir eleman ise $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i \in O_K$ indirgenemez elemanlar olmak üzere $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_i \in O_K$ şeklinde indirgenemez elemanların çarpımı olarak yazılabilir.

Bilindiği üzere $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkası bir tek türlü asal çarpanlarına ayrılabilen bölge (TAÇ) dir. Yani sıfırdan ve birimselden farklı bir eleman asal elemanların çarpımı olarak yazılabilir ve bu yazılış tek türüdür. Fakat $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin tamlık halkası O_K 'da çarpanlara ayrılış tek türlü olmayabilir. 1840'lı yıllara kadar çarpanlara ayrılışın tek türlü olduğu düşünüldüğü için Fermat'ın son teoremi üzerine yapılan çalışmalar başarısızlıkla sonuçlanmıştır.

O_K tamlık halkası TAÇ olan kuadratik sayı cisimlerinin belirlenmesi cebirsel sayılar teorisi ile uğraşanların ilgisini çekmiştir. Baker ve Stark 1967'de tamlık halkası TAÇ

olan imajiner kuadratik sayı cisimlerinin sonlu sayıda olduğunu ve bunların $d = -1, -2, -3, -7, -11, -19, -43, -67, -163$ kare çarpansız tam sayılara karşılık gelen 9 tane cisimden ibaret olduğunu ispatlamıştır. Fakat tamlık halkası TAÇ olan reel kuadratik sayı cisimlerinin sonsuz sayıda olup olmadığı henüz ispatlanmamıştır. Gauss sonsuz sayıda olduğunu iddia etmiştir.

Örnek 2.3.6. $d = 10$ alalım. $\mathbb{Z}[w_d]$ de 6'nın çarpanlara ayrılışı

$$6 = 2 \cdot 3 = (4 + \sqrt{10})(4 - \sqrt{10})$$

biçimindedir. Dolayısıyla $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10})$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık halkası O_K TAÇ değildir.

2.4. KUADRATİK SAYI CİSİMLERİNİN İDEALLERİ

Genel olarak n . dereceden bir K sayı cismi için O_K bir halka olduğundan onun ideallerinden bahsetmek mümkündür.

Tanım 2.4.1. $\emptyset \neq I \subseteq O_K$ olmak üzere

- $\forall \alpha, \beta \in I$ için $\alpha \pm \beta \in I$
- $\forall \alpha \in I, \forall \gamma \in O_K$ için $\alpha\gamma \in I$

sağlanıyorsa I idealine O_K tamlık halkasının bir *ideali* denir. Bazı kaynaklarda I idealine K cisminin bir ideali de denilmektedir.

n . dereceden bir K cisminin bir I idealinin $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\} \subseteq O_K$ ve $r \leq n$ olacak şekilde bir $\mathbb{Z}$ -tabanı vardır. Burada α_i 'lere I idealinin üreteçleri denir. Eğer K bir kuadratik sayı cismi ise $[K : \mathbb{Q}] = 2$ olduğundan O_K tamlık halkasının idealleri en fazla iki eleman tarafından üretilir [53].

Teorem 2.4.2. $O_K, \{1, w_d\}$ ile üretilmiş $\mathbb{Z}$ -modül olduğundan O_K tamlık halkasının her ideali de sonlu üretilmiş bir $\mathbb{Z}$ -modüldür [53].

Tanım 2.4.3. I, O_K 'nın bir ideali ise α_1, α_2 gibi iki cebirsel tam eleman ile üretildiğinden $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 'ya I idealinin tabanı denir. Bu tabana bağlı olarak

$$I = (\alpha_1, \alpha_2) = \{\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in O_K\}$$

biçiminde ifade edilir. O_K halkası $O_K = (1, w_d)$ biçiminde olan bir idealdir ve O_K tamlık halkasına *birim ideal* denir [53].

Bilindiği gibi $\mathbb{Z}$ tam sayılar halkasının her ideali esas idealdir. Fakat O_K 'nın idealleri için bu her zaman doğru değildir. Yani O_K bir esas ideal bölgesi (EİB) olmayabilir.

Örnek 2.4.4. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{10})$ reel kuadratik sayı cismini ele alalım. $O_K = \{a + b\sqrt{10} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ biçimindedir. $I = \{2u + v\sqrt{10} \mid u, v \in \mathbb{Z}\}$ kümesi O_K halkasının bir idealidir. Bu ideal 2 ve $\sqrt{10}$ tarafından üretilmiştir. Yani

$$I = (2, \sqrt{10}) = \{2\beta_1 + \sqrt{10}\beta_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in O_K\}$$

şeklinde yazılabilir. Şimdi I idealinin bir esas ideal olmadığını gösterelim: $I = (2, \sqrt{10}) = (\alpha)$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$2 \in I, \sqrt{10} \in I \Rightarrow \alpha \mid 2 \text{ ve } \alpha \mid \sqrt{10} \Rightarrow N(\alpha) \mid N(2) = 4 \text{ ve } N(\alpha) \mid N(\sqrt{10}) = -10$$

dolayısıyla $N(\alpha) = \pm 1, \pm 2$ dir. $N(\alpha) = a^2 - 10b^2 = \pm 1, \pm 2$ denklemlerinin çözümleri $\alpha_1 = 3 + \sqrt{10}$ ve $\alpha_2 = 19 + 6\sqrt{10}$ dur fakat $\alpha_1, \alpha_2 \notin I$ olduğundan $I = (\alpha)$ olacak şekilde bir α elemanı yoktur. O halde $I = (2, \sqrt{10})$ bir esas ideal değildir. Dolayısıyla $\mathbb{Q}(\sqrt{10})$ cisminin tamlık halkası bir EİB değildir.

Tanım 2.4.5. I ve J, O_K nın iki ideali olmak üzere bunların *toplamı* ve *çarpımı*

$$I + J = \{a + b \mid a \in I, b \in J\}$$

$$IJ = \{\sum a_i b_i \mid a_i \in I, b_i \in J\}$$

şeklinde tanımlanır.

O_K 'nın idealleri için ters eleman özelliği mevcut olmayabilir. Dolayısıyla O_K 'nın idealleri kümesi ideal çarpma işlemine göre bir yarı-grup oluşturur.

Tanım 2.4.6. I, O_K tamlık halkasının bir ideali olsun. $I' = \{a' \mid a \in I\}$ kümesi de bir idealdir ve bu ideale I idealinin *eşleniği* denir [54].

Tanım 2.4.7. O_K 'nın sıfırdan farklı bir I idealinin *normu* $N(I) = |O_K/I|$ dir [54].

Tanım 2.4.8. I_1 ve I_2 , O_K 'nın idealleri olmak üzere $I_2 = I_1 I_3$ olacak şekilde O_K 'nın bir I_3 ideali varsa I_1 ideali I_2 idealini *böler* denir ve $I_1 | I_2$ ile gösterilir [54].

Tanım 2.4.9. P, O_K 'nın sıfırdan ve birim idealden farklı bir ideali olmak üzere P idealinin bütün bölenleri birim ideal ve kendisinden ibaretse P 'ye *asal ideal* denir. Eğer J, O_K 'nın sıfırdan ve birim idealden farklı bir ideali ve J ile O_K arasında başka bir ideal yoksa J 'ye *maksimal ideal* denir.

Teorem 2.4.10. $I \subset O_K$ sıfırdan farklı bir ideal ise I bir takım asal ideallerin çarpımı olarak tek türlü yazılabilir [53].

Teorem 2.4.11. K bir kuadratik sayı cismi ise O_K bir Dedekind Bölgesidir. Dolayısıyla O_K 'nın tek türlü çarpanlara ayrılabilen bölge olması için gerek ve yeter koşul esas ideal bölgesi olmasıdır [53].

Teorem 2.4.12. Eğer O_K bir Euclid Bölgesi ise esas ideal bölgesidir [53].

2.5. İDEAL SINIF GRUBU

Bu kısımda kesirsel ideal kavramından bahsederek K cisminin bütün kesirsel idealleri kümesinin bir grup oluşturduğunu göstereceğiz ve "ideal sınıf grubu" kavramını tanımlayacağız.

Tanım 2.5.1. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir kuadratik sayı cismi olmak üzere $\emptyset \neq A \subset K$ için aşağıdaki özellikler sağlanıyor ise A 'ya K cisminin *bir kesirsel ideali* denir.

- (i) $\forall a, b \in A$ için $a - b \in A$,
- (ii) $\forall a \in A, \alpha \in O_K$ için $a\alpha \in A$,
- (iii) $\exists 0 \neq \beta \in O_K$ için $\beta A \subset O_K$.

Özel olarak O_K tamlık halkasının bütün idealleri birer kesirsel idealdir. Bu ideallere *tam ideal* denir [53].

Tanım 2.5.2. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ bir kuadratik sayı cismi olsun. $0 \neq \alpha \in K$ ve A, O_K 'nin sıfırdan farklı bir ideali olmak üzere K cisminin her kesirsel ideali αA şeklinde bir kümedir [53].

Tanım 2.5.3. A bir kesirsel ideal olmak üzere $A^{-1} = \{\alpha \in K \mid \alpha A \subseteq O_K\}$ ideale *ters kesirsel ideal* denir [54].

Teorem 2.5.4. Her A kesirsel idealinin $A \cdot A^{-1} = O_K$ olacak şekilde bir A^{-1} tersi vardır [54].

Teorem 2.5.5. P, O_K 'nin bir asal ideali ise P^{-1} kesirsel idealdir ve $PP^{-1} = O_K$ dır [54].

K kuadratik sayı cisminin O_K tamlık halkasının sıfırdan farklı kesirsel ideallerinin kümesini $\mathcal{F}$ ile, esas ideallerinin kümesini $\mathcal{E}$ ile gösterelim.

Teorem 2.5.6. $\mathcal{F}$ kümesi ideallerin çarpma işlemine göre birim elemanı O_K olan bir değişmeli gruptur ve $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ 'nin alt grubudur [53].

Tanım 2.5.7. $\mathcal{C} = \mathcal{F}/\mathcal{E}$ bölüm grubuna $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin *ideal sınıf grubu* denir. Bu grubun mertebesine K cisminin *sınıf sayısı* denir ve h_K veya h_d ile gösterilir [53].

Böylece cismin kesirsel idealleri grubu sınıflara ayrılmış olur. Aynı sınıfta bulunan ideallere *denk idealler* denir ve $A \sim B$ biçiminde gösterilir. Burada h_K 'nin büyüklüğü O_K 'nin esas ideal bölgesi olup olmadığı hakkında bilgi verir.

Teorem 2.5.8. Bir cebirsel sayı cisminin ideal sınıfları sayısı sonludur [53].

Teorem 2.5.9. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin sınıf sayısının 1 olması için gerek ve yeter koşul O_K tamlık halkasının bir esas ideal bölgesi olmasıdır [54].

Kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısının belirlenmesine yönelik yapılan çalışmalardan biri, normu Minkowski sınırından küçük ideallerin belirlenmesidir. Minkowski sınırı yardımıyla bazı sayı cisimlerinin sınıf sayıları belirlenebilir ancak sınır büyüdükçe sınıf sayısını bu yolla hesaplamak zorlaşır.

Tanım 2.5.10. (Minkowski Sınırı) n . dereceden bir K sayı cismi için $[K : \mathbb{Q}] = 2 = r_1 + 2r_2$ olduğunu biliyoruz. Δ, K cisminin diskriminantı olmak üzere

$$M_K = \frac{n!}{n^n} \left(\frac{4}{\pi} \right)^{r_2} \sqrt{|\Delta|} \quad (2.1)$$

ile belirli olan M_K sayısına *Minkowski Sınırı* denir [14].

Reel kuadratik sayı cisimlerinde $r_1 = 2, r_2 = 0$, imajiner kuadratik sayı cisimlerinde $r_1 = 0, r_2 = 1$ dir. O halde (2.1) eşitliği kuadratik sayı cisimleri için yeniden düzenlenirse Minkowski sınırı

$$M_K = \begin{cases} \frac{\sqrt{\Delta}}{2} & ; d > 0 \\ \frac{2\sqrt{\Delta}}{\pi} & ; d < 0 \end{cases}$$

biçimini alır.

Teorem 2.5.11. K kuadratik sayı cisminin her ideal sınıfında $N(A) \leq M_K$ olacak şekilde bir A tam ideali vardır [14].

Örnek 2.5.12. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{13})$ reel kuadratik sayı cismi için Minkowski sınırı $M_K = \frac{\sqrt{13}}{2} \approx 1.803$ 'tür. Normu 1.803'ten küçük olan tek ideal O_K aşık idealidir. Bu ideal esas ideal olduğu için $h_K = 1$ dir.

Burada Minkowski sınırının 2'den küçük olması sınıf sayısının elde edilmesinde oldukça kullanışlıdır. Minkowski sınırının 2'den küçük olmaması durumu, birim idealden başka normu bu şartı sağlayan ideallerin var olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla bu tür tamlık halkalarında normları 2 ve 2'den büyük olan idealleri hesaba katmak gerekmektedir.

2.6. ASALLARIN PARÇALANIŞI

Teorem 2.6.1. P asal ideal olmak üzere $P|(p)$ olacak şekilde bir tek $p \in \mathbb{Z}$ asal sayısı vardır [45].

Bu durumda O_K tamlık halkasının sıfırdan farklı her asal ideali $p \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $pO_K = (p)$ biçiminde bir esas ideali böler. O_K 'nın bütün asallarını pO_K idealinin asal çarpanlarını bularak elde etmek mümkündür.

Tanım 2.6.2. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismi olsun. Bu durumda

- $pO_K = P^2$ ise p 'ye dallanmış asaldır
- $pO_K = PP'$ olacak şekilde farklı P ve P' idealleri varsa p tamamen parçalanmış asaldır

- $pO_K = P$ ise p 'ye asal kalır

denir [45].

Aşağıda, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminde asalların parçalanışı ile ilgili teoremlerde kullanılan bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Tanım 2.6.3. p tek asal sayı ve $0 \neq a \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 1 & ; x^2 \equiv a \pmod{p} \text{ denklemini } \text{çözümüne sahip ve } \text{ebob}(a, p) = 1 \\ -1 & ; x^2 \equiv a \pmod{p} \text{ denklemini } \text{çözümüne sahip değil} \\ 0 & ; p|a \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $\left(\frac{*}{*}\right)$ sembolüne *Legendre Sembolü* denir [15].

Tanım 2.6.4. $b > 1$ herhangi bir tek sayı, $\text{ebob}(a, b) = 1$ ve b 'nin asal çarpanlara ayrılışı $b = p_1 p_2 \cdots p_n$ biçiminde olsun. Buna göre $\left(\frac{a}{p_i}\right)$ Legendre anlamında olmak üzere *Jacobi sembolü* aşağıdaki şekilde tanımlanır [15]:

$$\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right) \left(\frac{a}{p_2}\right) \cdots \left(\frac{a}{p_n}\right)$$

Tanım 2.6.5.

$$\left(\frac{a}{2}\right) = \begin{cases} 0 & ; a \equiv 0 \pmod{8} \\ 1 & ; a \equiv 1 \pmod{8} \\ -1 & ; a \equiv 5 \pmod{8} \\ \text{tanımsız} & ; \text{aksi halde} \end{cases}$$

özelliliği ile genişletilmiş Jacobi sembolüne *Kronecker Sembolü* denir [23].

Teorem 2.6.6. p ve q birbirinden farklı iki tek asal sayı olmak üzere

$$\left(\frac{p}{q}\right) \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \frac{q-1}{2}}$$

sağlanır. [46]

Teorem 2.6.7. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin diskriminantı Δ olsun. $p \in \mathbb{Z}$ tek asal sayı olmak üzere $(p) = pO_K$ 'nin parçalanışı aşağıdaki gibidir [45]:

- $p|\Delta$ ise $(p, \sqrt{d}) = P$ olmak üzere $pO_K = P^2$ dir.
- $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1$ ise $pO_K = PP'$ olacak şekilde farklı P, P' idealleri vardır.
- $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$ ise $pO_K = P$ dir.

Teorem 2.6.8. $p = 2$ durumunda p 'nin K 'da parçalanışı aşağıdaki gibidir [45]:

- $2|\Delta$ ise P asal olmak üzere $2O_K = P^2$ dir. Eğer $d \equiv 2 \pmod{4}$ ise $P = (2, \sqrt{d})$, $d \equiv 3 \pmod{4}$ ise $P = (2, 1 + \sqrt{d})$ dir.
- $d \equiv 1 \pmod{8}$ ise P, P' farklı asallar olmak üzere $2O_K = PP'$ dir.
- $d \equiv 5 \pmod{8}$ ise $2O_K = P$ dir.

p asal sayısının parçalanışı Legendre ve Kronecker sembollerine bağlı olarak aşağıdaki şekilde verilebilir.

Sonuç 2.6.9. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin O_K tamlık halkasında p asalının ayrışımı

- $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 1 \Leftrightarrow p$ ayrışır
- $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \Leftrightarrow p$ asal kalır
- $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0 \Leftrightarrow p$ dallanır

biçimindedir [23].

Örnek 2.6.10. $d = 21$ olsun. (2.1) denkleminde Minkowski sınırı $M_K \approx 2.291$ dir. $d \equiv 5 \pmod{8}$ olduğundan Teorem 2.6.8'den $2O_K$ asaldır. Yani O_K halkasında normu 2 olan idealler yoktur. Dolayısıyla normu Minkowski sınırından küçük olan tek bir ideal vardır o da O_K aşikar idealidir. Bu durumda K cisminin sınıf sayısı 1'dir.

2.7. DIRICHLET SINIF SAYISI FORMÜLÜ

Sınıf sayısının belirlenmesine yönelik geliştirilen en önemli yöntem, analitik sınıf sayısı formülü olarak da adlandırılan Dirichlet sınıf sayısı formülüdür.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1839'da kuadratik sayı cisimleri için sınıf sayısı formülünün kanıtını verdi. Ancak bu formül 1801'de Gauss tarafından ideal sınıflardan ziyade kuadratik formlar için ifade edilmiştir. Bu da Gauss'un bu formülü Dirichlet'ten daha önce kuadratik formlar için bildiği anlamına gelir. Kuadratik sayı cisimleri için Dirichlet Karakterine bağlı olarak oluşturulan ve Dirichlet sınıf sayısı formülü olarak bilinen bu formülü ifade etmeden önce gerekli ön bilgiler verilecektir.

Tanım 2.7.1. Herhangi bir G grubu üzerinde tanımlı kompleks değerli bir f fonksiyonu

$$(i) \quad \forall a, b \in G \text{ için } f(ab) = f(a) \cdot f(b)$$

$$(ii) \quad \exists c \in G : f(c) \neq 0$$

özelliklerini sağlıyor ise f 'ye G 'nin bir *karakteri* denir [4].

Teorem 2.7.2. f , etkisiz elemanı e olan sonlu bir G grubunun karakteri olsun. Bu takdirde $f(e) = 1$ 'dir ve her bir $f(a)$ değeri 1'in bir köküdür. Ayrıca $a^n = e$ ise $f(a)^n = 1$ 'dir [4].

Tanım 2.7.3. G üzerindeki her bir elemanı 1'e taşıyan karaktere *temel (principal) karakter* denir [4].

Teorem 2.7.4. G mertebesi n olan sonlu, değişmeli bir grup olsun. G tam olarak n farklı karaktere sahiptir [4].

$\varphi(n)$ Euler fonksiyonu olmak üzere modulo k 'da birbirine denk olmayan ve her biri k ile aralarında asal olan $\varphi(n)$ tane tam sayıdan oluşan gruba *mod k indirgenmiş temsilciler sistemi (reduced residue class)* denir. Bu sistemdeki bir a elemanına karşılık gelen $\hat{a}$ temsilci sınıfı

$$\hat{a} = \{x \mid x \equiv a \pmod{k}\}$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.7.5. G grubu olarak mod k indirgenmiş temsilciler sistemi alınırsa G 'nin her f karakteri için

$$\chi_f(n) = \begin{cases} f(\hat{n}) & ; \text{ebob}(n, k) = 1 \\ 0 & ; \text{ebob}(n, k) > 1 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan χ_f aritmetik fonksiyonuna *mod k Dirichlet Karakteri* adı verilir. Temel karakter

$$\chi_1(n) = \begin{cases} 1 & ; \text{ebob}(n, k) = 1 \\ 0 & ; \text{ebob}(n, k) > 1 \end{cases}$$

şeklindedir [4].

Tanım 2.7.6. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin diskriminantı Δ olmak üzere K cismine karşılık gelen *mod $|\Delta|$ Dirichlet karakteri*

$$\chi_K(p) = \begin{cases} \left(\frac{\Delta}{p}\right) & ; p \neq 2, p \nmid \Delta \\ (-1)^{\frac{\Delta^2-1}{8}} & ; p = 2, 2 \nmid \Delta \\ 0 & ; p \mid \Delta \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır [46].

Örnek 2.7.7. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kuadratik sayı cismini ele alalım. Diskriminant $\Delta = 8$ 'dir.

$$\chi_K(a) = \begin{cases} 1 & ; a \equiv 1, 7 \pmod{8} \\ -1 & ; a \equiv 3, 5 \pmod{8} \\ 0 & ; \text{ebob}(a, 8) \neq 1 \end{cases}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.7.8. f bir aritmetik fonksiyon ve s bir reel sayı olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$ sonsuz toplamına *Dirichlet serileri* denir.

Tanım 2.7.9. Dirichlet serilerinin $f(n) = 1$ özel haline *Riemann zeta fonksiyonu* denir.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots$$

Tanım 2.7.10. s bir reel sayı ve χ bir Dirichlet karakteri olmak üzere $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ fonksiyonuna *Dirichlet L-fonksiyonu* denir.

Örnek 2.7.11. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kuadratik sayı cismine karşılık gelen *mod $|\Delta|$ Dirichlet karakteri* χ göz önüne alınırsa aşağıdaki seri elde edilir:

$$L(1, \chi) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Teorem 2.7.12. (Dirichlet Sınıf Sayı Formülü) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ diskriminantı Δ olan bir kuadratik sayı cismi olsun. Bu durumda

$$h_K = \begin{cases} \frac{c\sqrt{|\Delta|}}{2\pi} L(1, \chi) & ; d < 0 \\ \frac{\sqrt{\Delta}}{2\log \varepsilon_d} L(1, \chi) & ; d > 0 \end{cases}$$

sağlanır. Burada ε_d , K reel kuadratik sayı cisminin temel birimidir ve c, K imajiner kuadratik sayı cisminin birimsel elemanlarının sayısı olup bu sayı aynı zamanda $d < 0$ diskriminantlı imajiner kuadratik sayı cisimlerinin kuadratik formlarına ait otomorfizmalarının sayısıdır ve

$$c = \begin{cases} 2 & ; d < -4 \\ 4 & ; d = -4 \\ 6 & ; d = -3 \end{cases}$$

ile belirlidir [24].

Örnek 2.7.13. $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ kuadratik sayı cismini ele alalım. Temel birim $\varepsilon_d = 1 + \sqrt{2}$ ve diskriminant $\Delta = 8$ 'dir. Bu durumda

$$h_K = \frac{\sqrt{8}}{2\log(1 + \sqrt{2})} L(1, \chi) \approx 1.605 L(1, \chi)$$

bulunur. Ayrıca

$$L(1, \chi) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

yani $L(1, \chi) < 1$ olduğundan $h_K < 1.605$ elde edilir. Dolayısıyla $h_K = 1$ olmak zorundadır.

$K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cismine karşılık gelen Dirichlet karakteri için $L(1, \chi)$ fonksiyonunun değeri biliniyorsa cismin sınıf sayısı yukarıdaki formül ile hesaplanabilir. Dirichlet karakterleri sayılar teorisinde Dirichlet L-serilerini tanımlamak için kullanılır. Eğer χ bir Dirichlet karakteri ise χ 'ye ait Dirichlet L-serisi $L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ biçimindedir. Burada s bir kompleks sayıdır ve $\text{Re}(s) > 1$ dir. Bu nedenle $L(1, \chi)$ değerlerinin hesaplanması sayılar teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. Literatürde $L(1, \chi)$ fonksiyonu ile ilgili çeşitli tahmin formülleri elde edilmiş olup, aşağıda Tatzawa'nın alt sınırı ve Hua'nın üst sınırı verilmiştir.

Teorem 2.7.14. (Tatzawa) $0 < c < \frac{1}{2}$ sağlayan herhangi bir c gerçel sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$

cisminin diskriminantı $\Delta \geq \max\{e^{1/c}, e^{11.2}\}$ ise olası bir istisna ile

$$L(1, \chi) > 0.655 \frac{c}{\Delta^c}$$

sağlanır [55].

Kim [31], Genelleştirilmiş Riemann Hipotezi sağlanıyor ise Tatzuza'nın teoreminin istisnasız doğru olduğunu göstermiştir. O halde istisnai değerler var ise bu Genelleştirilmiş Riemann Hipotezine bir karşıt örnektir.

Teorem 2.7.15. (Hua) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin diskriminantı Δ ve bu cisme karşılık gelen $\text{mod}|\Delta|$ Dirichlet Karakteri χ olsun. $L(s, \chi)$ L-fonksiyonunun $s = 1$ deki değeri için

$$L(1, \chi) < \frac{\log \Delta}{2} + 1$$

sağlanır [26].

2.8. SÜREKLİ KESİRLER

Bu kısımda sürekli kesirler ile ilgili temel kavramlara yer verilecektir.

Tanım 2.8.1. $n \geq 0$ olmak üzere $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ ve $i \geq 1$ için $a_i > 0$ olsun.

$$[a_0, a_1, \dots, a_n] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

biçimindeki ifadeye *sonlu sürekli kesir* denir. Sonlu sürekli bir kesrin basamak sayısı olan n değeri sonsuz ise elde edilen sürekli kesre *sonsuz sürekli kesir* denir ve $[a_0, a_1, \dots]$ ile gösterilir. Sonsuz sürekli kesrin ilk k teriminden oluşan sonlu sürekli kesir $c_k = [a_0, a_1, \dots, a_k]$ biçiminde olup c_k 'ya *sonsuz sürekli kesrin k . yaklaşımı* denir [46].

Teorem 2.8.2. Her sonlu sürekli kesir bir rasyonel sayıdır. Tersine, her rasyonel sayı bir sonlu sürekli kesre eşittir [46].

Teorem 2.8.3. Her sonsuz sürekli kesrin değeri bir irrasyonel sayıdır. Tersine her irrasyonel sayının sürekli kesre açılımı sonsuzdur [46].

Tanım 2.8.4. $n, m \geq 0$ tam sayılar olmak üzere

$$[a_1, a_2, \dots, a_n, \overline{b_1, b_2, \dots, b_m}]$$

biçiminde sonlu bir adımdan sonra a_k değerleri periyodik olarak aynı değerleri alıyorsa böyle kesirlere *periyodik sürekli kesir* denir. Burada m ve n sayılarının en küçüğü alındığında m 'ye *periyod uzunluğu* denir. Ayrıca eğer $n = 0$ yani a_i 'ler yoksa *pür periyodik sürekli kesir* denir [46].

Tanım 2.8.5. $a, b \in \mathbb{Q}, b \neq 0$ ve d pozitif kare çarpansız tam sayı ise $a + b\sqrt{d}$ sayısına bir *kuadratik irrasyonel sayı* denir. Kuadratik irrasyonel sayılar $\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ cisminin irrasyonel sayılarıdır.

Önerme 2.8.6. α kuadratik irrasyonel sayısı, d pozitif kare çarpansız tam sayı ve $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0, s \mid (d - r^2)$ olmak üzere $\alpha = \frac{r + \sqrt{d}}{s}$ biçimindedir.

Tanım 2.8.7. α kuadratik irrasyonel sayı ve $\bar{\alpha}, \alpha$ 'nın eşleniği olsun. Eğer $\alpha > 1$ ve $-1 < \bar{\alpha} < 0$ ise α 'ya *indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı* denir.

Teorem 2.8.8. Her periyodik sürekli kesir bir kuadratik irrasyonel sayıdır. Tersine bir kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesirlere açılımı periyodiktir [46].

Teorem 2.8.9. Bir kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesirlere açılımının pür periyodik olması için gerek ve yeter koşul indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayı olmasıdır [46].

Aşağıda kuadratik irrasyonel sayıların sürekli kesirlere açılımındaki terimleri ile ilgili $\{p_n\}$, $\{q_n\}$ ve $\{r_n\}$ dizileri tanımlanmış ve bu diziler hakkında bazı eşitlikler verilmiş olup bu bilgiler sürekli kesirleri konu alan birçok kitapta mevcuttur [43, 46].

$$\begin{aligned} p_{-1} &= 1 & p_0 &= a_0 & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} & (n \geq 1) \\ q_{-1} &= 0 & q_0 &= 1 & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2} & (n \geq 1) \\ r_{-1} &= 1 & r_0 &= 0 & r_n &= a_n r_{n-1} + r_{n-2} & (n \geq 1) \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\frac{p_n}{q_n} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_n], \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n} = \frac{1 + \sqrt{P}}{2}, \quad \frac{q_n}{r_n} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

Aşağıdaki iddialar n üzerinde tümevarım ile kolayca ispatlanabilir.

$$q_n r_{n-1} - r_n q_{n-1} = (-1)^n \quad (2.3)$$

$$q_n r_{n-2} - r_n q_{n-2} = (-1)^{n-1} a_n \quad (2.4)$$

$$p_n - a_0 q_n = r_n \quad (2.5)$$

Teorem 2.8.10. d pozitif kare çarpansız tam sayı olsun. $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesir açılımı

$$\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, \dots, a_{n-1}, 2a_0}]$$

biçimindedir [46].

Teorem 2.8.11. $(p, q), x^2 - dy^2 = \pm 1$ denkleminin bir pozitif çözümü ise $\frac{p}{q}$ ifadesi $\sqrt{d}$ 'nin sürekli kesirlere açılımında bir yaklaşımdır [46].

Teorem 2.8.12. d kare olmayan bir pozitif tam sayı ve $\sqrt{d}$ 'nin yaklaşımları $\frac{p_k}{q_k}$ olsun. Eğer N tam sayısı için $|N| < \sqrt{d}$ ise $x^2 - dy^2 = N$ denkleminin herhangi bir pozitif çözümü (s, t) ve s, t aralarında asal ise $\exists n \in \mathbb{N}$ için $s = p_n$ ve $t = q_n$ dir [46].

Aşağıda verilen teoremde, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin temel birimini belirlemek için $\sqrt{d}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesirlere açılımından faydalanılmaktadır.

Teorem 2.8.13. d pozitif kare çarpansız tam sayı ve $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin temel birimi ε_d olsun. $\sqrt{d}$ 'nin periyod uzunluğu k ve $(k-1)$. yaklaşımı $\frac{p}{q}$ olsun. Bu durumda

$$d \not\equiv 1 \pmod{4} \text{ veya } d \equiv 1 \pmod{8} \text{ ise } \varepsilon_d = p + q\sqrt{d}$$

$$d \equiv 5 \pmod{8} \text{ ise } \varepsilon_d = p + q\sqrt{d} \text{ veya } \varepsilon_d^3 = p + q\sqrt{d}$$

dir. Eğer k çift ise $N(\varepsilon_d) > 0$, k tek ise $N(\varepsilon_d) < 0$ ifadeleri gerçekleşir [43].

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu bölümde, tezin orijinal bulgularının elde edilmesinde yararlanılan teoremlere yer verilecektir.

3.1. YOKOI İNVARİYANT DEĞERLERİ İLE YAKLAŞIMLAR

1932 doğumlu Japon matematikçi Hideo Yokoi, reel kuadratik sayı cisimleri üzerine önemli çalışmalarda bulunmuş ve sınıf sayısı problemini tanımladığı invaryant değerler bağlamında ele almıştır. İlk olarak 1988’de $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimi vasıtasıyla $\left| \frac{T_p}{U_p^2} - n_p \right| < \frac{1}{2}$ biçiminde yeni p -invaryant n_p ’yi tanımlamıştır [62, 63]. Bu çalışmalar esasen Yokoi’nin 1968’de temel biriminin normu -1 olan herhangi bir kare çarpansız tam sayı için elde ettiği forma dayanmaktadır [60]. Daha sonra 1990 yılında bu invaryant değer ile sınıf sayısı arasındaki ilişkiyi incelemiş ve olası bir istisna ile $n_p \neq 0$ ve $h_p = 1$ şartını sağlayan yalnızca sonlu sayıda $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cismi var olduğunu göstermiştir [64]. Diğer taraftan Mollin ve Williams, 1990 ve 1992 yıllarında yayınlanan makalelerinde [39, 41], Yokoi’nin çalışmalarını tüm kare çarpansız d tam sayılarına genelleştirmek için küçük değişiklikler ile n_d invaryantını tanımlamış ve benzer bulgular elde etmiştir. Yokoi de tanımlamış olduğu p -invaryantını herhangi bir kare çarpansız d tamsayısı için 1991 ve 1993 yıllarında ki [66, 68] çalışmalarında genelleştirmiştir. İlk olarak n_p ’yi $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor$ olarak yeniden tanımlamış ve benzer şekilde olası bir istisna ile $n_d \neq 0$ ve $h_d = 1$ şartını sağlayan yalnızca sonlu sayıda $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi var olduğunu göstermiştir. Ayrıca $n_d = 0$ durumunu incelemek için $m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor$ biçiminde yeni bir invaryant tanımlayarak $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısı için m_d invaryantına bağlı olarak yeni sınırlar elde etmiştir. Bahsedilen bu çalışmalar hakkında detaylı bilgiler bu bölümde verilecektir.

Teorem 3.1.1. (Davenport-Ankeny-Hasse-Ichimura) d kare çarpansız bir tamsayı olmak üzere $m > 1$ doğal sayısı için $x^2 - dy^2 = \pm 4m$ Diophant denkleminin en az bir aşikar olmayan

çözümü varsa

$$m \geq \begin{cases} \frac{T_d}{U_d^2} & ; N(\varepsilon_d) = -1 \\ \frac{T_d-2}{U_d^2} & ; N(\varepsilon_d) = 1 \end{cases}$$

sağlanır.

Yukarıda verilen teorem herhangi bir tam kare olmayan m sayısı için [3, 22] numaralı kaynaklarda ispatlanmıştır. Keyfi bir m doğal sayısı için ise H. Ichimure, H. Yokoi'ye yazdığı bir mektupta ispatlamış olup Yokoi'nin [63] makalesinde mevcuttur.

Aşağıda Yokoi'nin 1968'de yayınlanan çalışmaları yer almaktadır.

Lemma 3.1.2. d pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere eğer $t^2 - du^2 = -4$ çözülebilir ise

$$d = 2^{\delta_1} \prod_i p_i \quad u = 2^{\delta_2} \prod_j q_j^{e_j}$$

biçimindedir. Burada $\delta_1, \delta_2 \in \{0, 1\}$, $p_i, q_j \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı, e_j pozitif tam sayılardır. Ayrıca $d \equiv 2 \pmod{4}$ ise $t \equiv 0 \pmod{2}$ dir ki bu $u \equiv 0 \pmod{2}$ olmasına denktir [60].

Lemma 3.1.3. $p \equiv 1 \pmod{4}$ sağlayan herhangi bir p asalı için $a^2 + 4 = bp^2$, $0 < a < p^2$ olacak şekilde tek türlü belirli a ve b tam sayıları vardır ve $d = p^2 m^2 \pm 2am + b$ ($m > 0$) biçimindedir. Bu durumda $d \equiv 1 \pmod{4}$ veya $d \equiv 4, 8 \pmod{16}$ dır. Ayrıca $t^2 - du^2 = -4$ Pell denklemi her zaman çözülebilirdir [60].

Teorem 3.1.4. $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olmak üzere a ve b , $a^2 + 4 = bp^2$ ($0 < a < p^2$) şartını sağlayan tam sayılar olsun. Pozitif kare çarpansız d tam sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi

$$\varepsilon_d = \frac{(p^2 m \pm a) + p\sqrt{d}}{2}$$

biçimindedir ve $N(\varepsilon_d) = -1$ dir [60].

Modulo 4'te 1'e denk olan p asalların kümesini $\mathbb{P}$ ile, negatif olmayan tam sayıların kümesini $\mathbb{N}_0$ ile gösterelim. p -invariant, $\mathbb{P}$ 'den $\mathbb{N}_0$ 'a bir dönüşüm olarak tanımlanır. Örneğin, sınıf

sayısı h_p , $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin; $\varepsilon_p = (T_p + U_p\sqrt{p})/2$ ifadesindeki T_p ve U_p , $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin temel biriminin bilinen p -invariantlarıdır [63]. Yokoi 1988'de

$$\left| \frac{T_p}{U_p^2} - n_p \right| < \frac{1}{2} \quad (3.1)$$

eşitsizliği ile p -invariant n_p yi tanımlayarak

$$T_p = U_p^2 \cdot n_p \pm a_p \quad (0 \leq a_p < U_p^2/2)$$

ifadesini elde etmiştir. Burada a_p de bir p -invarianttır ve $a_p^2 \equiv -4 \pmod{U_p^2}$ kongrüans bağıntısını sağlar. Böylece $b_p = (a_p^2 + 4)/U_p^2$ alınırsa b_p de bir p -invarianttır.

Teorem 3.1.5. $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin ε_p temel birimi ve p asalı için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [62]:

$$(i) \ \varepsilon_p = \frac{U_p^2 \cdot n_p \pm a_p + U_p\sqrt{p}}{2}$$

$$(ii) \ p = U_p^2 \cdot n_p^2 \pm 2a_p n_p + b_p$$

Kanıt. i) $T_p = U_p^2 \cdot n_p \pm a_p$ olduğundan aşıkardır.

ii) $T_p^2 - pU_p^2 = -4$ olduğundan

$$\begin{aligned} pU_p^2 &= T_p^2 + 4 = (U_p^2 \cdot n_p \pm a_p)^2 + 4 \\ &= (U_p^2 \cdot n_p^2 \pm 2a_p n_p)U_p^2 + (a_p^2 + 4) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$a_p^2 + 4 \equiv 0 \pmod{U_p^2}$$

ve $a_p^2 + 4 = b_p U_p^2$ olduğundan

$$p = U_p^2 \cdot n_p^2 \pm 2a_p n_p + b_p$$

elde edilir. □

Lemma 3.1.6. $U_p > 2$ olmak üzere aşağıdakiler denktir [62]:

$$i) n_p = 0 \quad ii) T_p > 2p \quad iii) U_p^2 > 4p$$

Kanıt. $T_p^2 - pU_p^2 = -4$ olduğundan $\frac{T_p^2}{U_p^2} - p = -\frac{4}{U_p^2} < 0$ yani $\frac{T_p^2}{U_p^2} < p$ dir. $U_p > 2$ iken

$$p > T_p \frac{T_p}{U_p^2} = p - \frac{4}{U_p^2} > p - \frac{1}{2}$$

elde edilir. Dolayısıyla $U_p > 2$ iken $p > \frac{T_p^2}{U_p^2} > p - \frac{1}{2}$ sağlanır.

$(i) \Leftrightarrow (ii) : n_p = 0$ ise tanım gereği $\frac{T_p}{U_p^2} < \frac{1}{2}$ yani $\frac{T_p^2}{U_p^2} < \frac{T_p}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$p - \frac{1}{2} < \frac{T_p^2}{U_p^2} < \frac{T_p}{2} \Rightarrow 2p - 1 < T_p$$

sağlanır. $T_p \neq 2p$ olduğundan istenen elde edilir. Tersine $2p < T_p$ olsun.

$$\frac{T_p^2}{U_p^2} < p < \frac{T_p}{2} \Rightarrow \frac{T_p}{U_p^2} < \frac{1}{2}$$

ve dolayısıyla $n_p = 0$ dir.

$(ii) \Leftrightarrow (iii) : T_p^2 - pU_p^2 = -4$ sağlandığından $T_p > 2p$ olması için gerek ve yeter koşul $4p^2 - pU_p^2 < -4$ yani $4p + \frac{4}{p} < U_p^2$ olmasıdır. $p \geq 5$ olduğu için $U_p^2 > 4p$ elde edilir. $\square$

Teorem 3.1.7. $p \in \mathbb{P}$ için $n_p \neq 0$ ise $U_p \not\equiv 0 \pmod{p}$ sağlanır [62].

Kanıt. $U_p = 1$ ve $U_p = 2$ durumunda doğru olduğu aşikardır. $U_p > 2$ ise Lemma 3.1.6'dan $n_p \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $U_p^2 \leq 4p$ olmasıdır. Diğer taraftan eğer $U_p \equiv 0 \pmod{p}$ olduğunu varsayarsak $p \leq U_p$ olur. Böylece $p^2 \leq U_p^2 \leq 4p$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $n_p \neq 0$ ise $U_p \not\equiv 0 \pmod{p}$ sağlanır. $\square$

Teorem 3.1.8. d pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_d = (T_d + U_d\sqrt{d})/2$ biçiminde olsun. O halde

$$N(\varepsilon_d) = +1 \Rightarrow T_d > \varepsilon_d > U_d\sqrt{d}$$

$$N(\varepsilon_d) = -1 \Rightarrow T_d < \varepsilon_d < U_d\sqrt{d}$$

sağlanır [61].

Kanıt. $N(\varepsilon_d) = +1$ ise $T_d^2 - dU_d^2 = +4$ olduğundan $T_d = \sqrt{dU_d^2 + 4} > U_d\sqrt{d}$ dolayısıyla $T_d > \varepsilon_d = (T_d + U_d\sqrt{d})/2 > U_d\sqrt{d}$ elde edilir.

$N(\varepsilon_d) = -1$ ise $T_d^2 - dU_d^2 = -4$ olduğundan $T_d = \sqrt{dU_d^2 - 4} < U_d\sqrt{d}$ dolayısıyla $T_d < \varepsilon_d = (T_d + U_d\sqrt{d})/2 < U_d\sqrt{d}$ elde edilir. $\square$

$p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olmak üzere Yokoi tanımlamış olduğu p -invariant n_p yardımıyla $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısını incelemiş ve aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Lemma 3.1.9. $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olsun. $n_p \neq 0$ ise $\varepsilon_p < 2p$ dir ve p 'nin olası bir istisnası hariç $p > e^m, m \geq 11.2$ için

$$h_p > \frac{0.3275}{m} \cdot \frac{p^{(m-2)/(2m)}}{\log 2p}$$

sağlanır. Ayrıca Genelleştirilmiş Riemann Hipotezi varsayımı altında istisnasız doğrudur [64].

Kanıt. Sınıf sayısı için ifade edilen alt sınır, Teorem 2.7.14 ve Lemma 3.1.6'nın Dirichlet sınıf sayısı formülüne uygulanması ile elde edilir. Eğer genelleştirilmiş Riemann Hipotezi'nin doğru olduğu varsayılırsa, Tatzawa'nın teoreminin istisnasız doğru olduğu Kim [31] tarafından gösterilmiştir. $\square$

Teorem 3.1.10. $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olsun. $p > 4.1 \times 10^6$ ve $n_p \neq 0$ (yani $\varepsilon_p < 2p$) ise p 'nin olası bir istisnası ile $h_p > 1$ dir. Ayrıca Genelleştirilmiş Riemann Hipotezi varsayımı altında bu istisnasız doğrudur [64].

Kanıt. Herhangi bir $m \geq 11,2$ sabiti için

$$f_m(x) = \frac{x^a}{\log(2x)} \quad a = a(m) = \frac{m-2}{2m} > 0$$

olsun. $x \geq 6$ için

$$f'_m(x) = \frac{a \log(2x) - 1}{x^{1-a}(\log(2x))^2} > 0$$

olduğundan $f(x)$, $[6, \infty]$ aralığında artandır. Ayrıca $g_m = \frac{0.3275}{m} \cdot f_m(x)$ olsun. O halde $m = 15 (> 11.2)$ için

$$g_{15}(4.1 \times 10^6) > 1 \text{ ve } e^m = e^{15} < 4.1 \times 10^6$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 3.1.9'dan p 'nin olası bir istisnası ile (genelleştirilmiş Riemann Hipotezi varsayımı altında istisnasız) tüm $p > 4.1 \times 10^6$ asalları için $h_p > 1$ sağlanır. $\square$

Ayrıca Yokoi [64], $3533 < p < 4.1 \times 10^6$ şartını sağlayan $p \equiv 1 \pmod{4}$ asalı için UBASIC86 bilgisayar programını kullanarak $n_p \neq 0$ iken $h_p > 1$ olduğunu doğrulamıştır ve $5 \leq p \leq 3533$ iken $n_p \neq 0$ ve $h_p = 1$ olacak şekilde tam olarak 30 tane p asalı olduğunu göstermiştir.

Sonuç 3.1.11. $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olmak üzere p 'nin olası bir istisnası ile $n_p \neq 0$ ve $h_p = 1$ şartını sağlayan tam olarak 30 tane p asalı olup bunlar 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, 61, 101, 149, 157, 173, 197, 269, 293, 317, 461, 509, 557, 677, 773, 797, 941, 1013, 1493, 1613, 1877, 2477, 2693, 3533 dir [64].

Mollin ve Williams'ın, Yokoi'nin $p \equiv 1 \pmod{4}$ asalları için tanımladığı p -invariantı n_p 'yi genelleştirmek için yaptığı çalışmalarda temel birim ve invariant için farklı notasyonlar kullandığından karışıklığı önlemek amacıyla terimlerin üzerine şapka işareti eklenmiştir. Mollin ve Williams [41], d pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimini

$$\epsilon_d = \frac{\hat{T}_d + \hat{U}_d \sqrt{d}}{\sigma}; \quad \sigma = \begin{cases} 2 & ; d \equiv 1 \pmod{4} \\ 1 & ; d \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

biçiminde ele almış ve

$$B = \frac{\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} - N(\epsilon_d) - 1}{\hat{U}_d^2}$$

şeklinde tanımlanan B sınırı yardımıyla

$$\hat{n}_d = \begin{cases} \lfloor B \rfloor & ; B - \lfloor B \rfloor < 1/2 \\ \lfloor B \rfloor + 1 & ; B - \lfloor B \rfloor > 1/2 \end{cases} \quad (3.2)$$

invariantını tanımlamıştır. Bu durumda

$$\hat{a}_d = \begin{cases} \hat{T}_d - \hat{U}_d^2 \hat{n}_d & ; B - \lfloor B \rfloor < 1/2 \\ \hat{U}_d^2 \hat{n}_d - \hat{T}_d & ; B - \lfloor B \rfloor > 1/2 \end{cases}$$

ve

$$\hat{b}_d = \frac{\hat{a}_d^2 - \sigma^2 N(\varepsilon_d)}{\hat{U}_d^2}$$

biçimindedir.

Teorem 3.1.12. d pozitif kare çarpansız tam sayı olsun. O halde

$$(i) \quad \varepsilon_d = \frac{\hat{U}_d^2 \hat{n}_d \pm \hat{a}_d + \hat{U}_d \sqrt{d}}{\sigma}$$

$$(ii) \quad d = \hat{U}_d^2 \hat{n}_d^2 \pm 2\hat{a}_d + \hat{b}_d$$

eşitlikleri gerçekleşir [41].

Kanıt. (i) $\hat{T}_d = \hat{U}_d^2 \hat{n}_d \pm \hat{a}_d$ olduğundan sonuç açıktır.

(ii) $\hat{T}_d^2 - \hat{U}_d^2 d = N(\varepsilon_d) \sigma^2$ olduğundan

$$\hat{U}_d^2 d = \hat{T}_d^2 - N(\varepsilon_d) \sigma^2 = (\hat{U}_d^2 \hat{n}_d \pm \hat{a}_d)^2 - N(\varepsilon_d) \sigma^2$$

ve dolayısıyla

$$d = \hat{U}_d^2 \hat{n}_d^2 \pm 2\hat{a}_d + \hat{b}_d$$

elde edilir. □

Teorem 3.1.13. d pozitif tam sayı ve $\hat{U}_d > 2$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir [41]:

$$i) \hat{n}_d = 0 \quad ii) \hat{T}_d > \frac{4d}{\sigma} \quad iii) \hat{U}_d^2 > \frac{16d}{\sigma^2}$$

Kanıt. $\hat{T}_d^2 - \hat{U}_d^2 d = N(\varepsilon_d) \sigma^2$ olduğundan

$$\left(\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} \right)^2 = 4N(\varepsilon_d) + \left(\frac{2}{\sigma} \right)^2 d \hat{U}_d^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} \right)^2 - \frac{(N(\epsilon_d) + 1)^2}{\hat{U}_d^2} &\leq \frac{4N(\epsilon_d)}{\hat{U}_d^2} + \left(\frac{2}{\sigma} \right)^2 d \\ \Rightarrow \left(\frac{2}{\sigma} \right)^2 d + \frac{N(\epsilon_d) - 1}{4} &\leq \left(\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} \right)^2 - \frac{(N(\epsilon_d) + 1)^2}{\hat{U}_d^2} \end{aligned}$$

sağlanır.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): $n_d = 0$ ise

$$\frac{\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} - N(\epsilon_d) - 1}{\hat{U}_d^2} < \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\frac{\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} + N(\epsilon_d) + 1}{2} > \left(\frac{2}{\sigma} \right)^2 d + \frac{N(\epsilon_d) - 1}{4}$$

dolayısıyla

$$\hat{T}_d > \frac{4}{\sigma}d - \frac{\sigma}{4}(N(\epsilon_d) + 3)$$

sağlanır. $\hat{T}_d \leq \frac{4d}{\sigma}$ olduğu varsayılırsa

$$\frac{4d}{\sigma} \geq \hat{T}_d > \frac{4}{\sigma}d - \frac{\sigma}{4}(N(\epsilon_d) + 3)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\hat{T}_d > \frac{4d}{\sigma}$ olur.

Tersine, eğer $\hat{T}_d > \frac{4d}{\sigma}$ ise $\hat{U}_d > 2$ olduğundan

$$\begin{aligned} \hat{T}_d + \frac{N(\epsilon_d) + 1}{4} &> \left(\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} \right)^2 d + \frac{N(\epsilon_d) + 1}{4} > \left(\frac{2}{\sigma} \right)^2 + \frac{4N(\epsilon_d)}{\hat{U}_d^2} \\ &\geq \left(\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} \right)^2 - \frac{(N(\epsilon_d) + 1)^2}{\hat{U}_d^2} \end{aligned}$$

ve böylece

$$1 \geq \frac{\frac{\hat{T}_d + N(\epsilon_d) + 1}{4}}{\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} + N(\epsilon_d) + 1} > \frac{\frac{2\hat{T}_d}{\sigma} - N(\epsilon_d) - 1}{\hat{U}_d^2}$$

sağlanır. Dolayısıyla $\hat{n}_d = 0$ olur.

(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): $\hat{T}_d > \frac{4d}{\sigma}$ ve $N(\varepsilon_d)\sigma^2 = \hat{T}_d^2 - \hat{U}_d^2 d$ olması için gerek ve yeter koşul $\hat{U}_d^2 > \frac{16d}{\sigma^2} - \frac{N(\varepsilon_d)\sigma^2}{d}$ dir. Ayrıca $d > \sigma^2$ olduğundan $\hat{U}_d^2 > \frac{16d}{\sigma^2}$ elde edilir. $\square$

Sonuç 3.1.14. d kare çarpansız tam sayı olmak üzere $\hat{n}_d \neq 0$ ise $\varepsilon_d < 8d/\sigma^2$ sağlanır [41].

Teorem 3.1.15. $\hat{n}_d \neq 0$ ise $h_d = 1$ olan sadece sonlu sayıda d vardır [41].

Kanıt. Sonuç 3.1.14'den $\log \varepsilon_d < \log(8d/\sigma^2)$ dir. Tatumawa'nın teoremi ve Dirichlet sınıf sayısı formülünden yalnızca sonlu sayıda d için $h_d = 1$ olduğu sonucuna varılır. $\square$

Mollin ve Williams bir diğer çalışmasında, temel birim için elde ettiği bu üst sınırı kullanarak, cismin diskriminantı $\Delta > 5 \times 10^6$ iken olası bir istisna ile $h_d > 1$ olduğunu ispatlamıştır ve $\hat{n}_d \neq 0$ ve $h_d = 1$ şartını sağlayan 68 tane d 'yi listelemiştir [39].

Teorem 3.1.16. $h_d = 1$ ve $\hat{n}_d \neq 0$ ise olası bir istisna ile

$$d \in \{2, 3, 5, 6, 7, 11, 13, 14, 17, 21, 23, 29, 33, 37, 38, 41, 47, 53, 61, 62, 69, 77, 83, 93, 101, 133, 141, 149, 157, 167, 173, 197, 213, 227, 237, 269, 293, 317, 341, 398, 413, 437, 453, 461, 509, 557, 573, 677, 717, 773, 797, 917, 941, 1013, 1077, 1133, 1253, 1293, 1493, 1613, 1757, 1877, 2453, 2477, 2693, 3053, 3317, 3533\}$$

Kanıt. $\hat{n}_d \neq 0$ ise Sonuç 3.1.14'den $\varepsilon_d < 8d/\sigma^2$ dolayısıyla $\log \varepsilon_d < \log(8d/\sigma^2)$ dir. Teorem 2.7.14'de $c = 0.0885$ alınırsa

$$h_d > \frac{\sqrt{\Delta} \cdot 0.0885 \cdot 0.655}{2 \log(2\Delta) \cdot \Delta^{0.0885}}$$

elde edilir. Bu durumda $\Delta > 5 \times 10^6$ ise $h_d > 1$ dir. Dolayısıyla $h_d = 1$ ve $\hat{n}_d \neq 0$ olan reel kuadratik sayı cisimleri için olası bir istisna ile $\Delta \leq 5 \times 10^6$ dir. Mollin ve Williams, sürekli kesirleri ve asalların parçalanışını kullanarak bu sınırı daha da küçültmüştür. $h_d = 1$ olan cisimler için $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ise $d \leq 7653$; $d \equiv 1 \pmod{8}$ ise $d < 4096$; $d \equiv 5 \pmod{8}$ ise $d < 23117$ olarak hesaplamıştır. Geri kalan değerler arasında $h_d = 1$ ve $\hat{n}_d \neq 0$ şartını sağlayan 68 tane d tam sayısını listelemiştir. $\square$

Teorem 3.1.17. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı ve $\hat{n}_d \neq 0$ ise $\hat{U}_d \not\equiv 0 \pmod{d}$ sağlanır [41].

Kanıt. $\hat{U}_d > 2$ olduğunu varsayabiliriz. Teorem 3.1.13'den $\hat{U}_d^2 \leq 4d$ dir. Ayrıca eğer $\hat{U}_d \not\equiv 0 \pmod{d}$ olsa $\hat{U}_d^2 \geq d^2$ dolayısıyla $4d \geq \hat{U}_d^2 \geq d^2 > 4d$ çelişkisi elde edilir. $\square$

Yukarıdaki teorem tüm pozitif kare çarpansız d tam sayıları için ifade edilmesine rağmen sadece $d \equiv 1 \pmod{4}$ durumunu göz önüne alarak ispatlamıştır. $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ için Teorem 3.1.13'den $\hat{U}_d^2 \leq 16d$ olduğundan yukarıdaki teoremin ispatında kullanılan yöntem ile $\hat{U}_d \not\equiv 0 \pmod{d}$ sağlanamaz.

Ayrıca, Mollin ve Williams [40] bilgisayar programı yardımıyla, diskriminantı $\Delta < 50000$ olan $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimleri için tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımının periyod uzunluğu 25'den küçük olan ve $h_d = 1$ olan reel kuadratik sayı cisimleri, periyod uzunluğuna göre sınıflandırarak listelemiştir.

Diğer taraftan Yokoi, temel birimin normunun -1 olması durumunu 1991'de yayınlanan [66] makalesinde, $+1$ olması durumunu ise 1993'de yayınlanan [68] makalesinde inceleyerek tüm kare çarpansız d tam sayıları için n_d invariantını aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir:

$$D_+ = \{d \mid d \text{ pozitif kare çarpansız tam sayı}, N(\varepsilon_d) = 1\}$$

$$D_- = \{d \mid d \text{ pozitif kare çarpansız tam sayı}, N(\varepsilon_d) = -1\}$$

olmak üzere $d \in D_+$ ise

$$V_d = \{v \mid 0 \leq v < U_d^2, v^2 \equiv 4 \pmod{U_d^2}\}$$

$$(V, W)_d = \{(v, w) \mid v \in V_d, v^2 - 4 = wU_d^2\}$$

$d \in D_-$ ise

$$V_d = \{v \mid 0 \leq v < U_d^2, v^2 \equiv -4 \pmod{U_d^2}\}$$

$$(V, W)_d = \{(v, w) \mid v \in V_d, v^2 + 4 = wU_d^2\}$$

biçiminde tanımlansın.

Teorem 3.1.18. d pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere

$$\begin{cases} T_d = U_d^2 \cdot n_d + v \\ d = U_d^2 \cdot n_d^2 + 2v \cdot n_d + w \end{cases}$$

olacak şekilde tek türlü belirli $n_d \in \mathbb{N}_0$ ve $(v, w) \in (V, W)_d$ vardır. Ayrıca, $U_d > 2$ ise

$$0 \leq w < v < U_d^2 \text{ ve } n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor$$

sağlanır [66, 68].

Eğer $d \in D_+$ ise

$$E_d = \{e \mid 0 < e < d, e^2 \equiv 4 \pmod{d}\}$$

$$(E, F)_d = \{(e, f) \mid e \in E_d, e^2 - 4 = fd\}$$

eğer $d \in D_-$ ise

$$E_d = \{e \mid 0 \leq e < d, e^2 \equiv -4 \pmod{d}\}$$

$$(E, F)_d = \{(e, f) \mid e \in E_d, e^2 + 4 = fd\}$$

biçiminde tanımlansın.

Teorem 3.1.19. d pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere

$$\begin{cases} T_d = d \cdot m_d + e \\ U_d^2 = d \cdot m_d^2 + 2e \cdot m_d + f \end{cases}$$

olacak şekilde tek türlü belirli $m_d \in \mathbb{N}_0$ ve $(e, f) \in (E, F)_d$ vardır. Ayrıca, $d > 5$ ise

$$m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor \text{ ve } 0 \leq f < e < d$$

sağlanır ve $f = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $e = 2$ olmasıdır [66, 68].

Teorem 3.1.20. $d \in D_-$ için

$$(i) \varepsilon_d > \frac{d-4}{n_d+1}$$

$$(ii) h_d < \frac{\frac{1}{4}\sqrt{d}(2+\log d)}{\log\left(\frac{d-4}{n_d+1}\right)}$$

$$(iii) h_d < \frac{\frac{1}{4}\sqrt{d}(2+\log d)}{\log(dm_d)}$$

sağlanır [66].

Yokoi, R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimleri için n_d ve m_d invariantlarını inceleyerek aşağıdaki sonuçlara ulaşmıştır.

Teorem 3.1.21. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ R-D tipinde reel kuadratik sayı cismi olmak üzere $d > 5$ için

$$m_d = \begin{cases} 2 & ; r = -2 \\ 1 & ; r = 2, \pm 3 \\ 0 & ; |r| \neq 2, 3 \end{cases}$$

sağlanır [68].

Tablo 3.1: R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimlerinin m_d değerleri.

$d = n^2 + r$	r	T_d	U_d	m_d	e	f
$d \geq 6$	2	$2n^2 + 2$	$2n$	1	n^2	$n^2 - 2$
$d \geq 7$	-2	$2n^2 - 2$	$2n$	2	2	0
$d \geq 39$	3	$2(2n^2 + 3)/3$	$4n/3$	1	$(n^2 - 3)/3$	$(n^2 - 9)/9$
$d \geq 33$	-3	$2(2n^2 - 3)/3$	$4n/3$	1	$(n^2 + 3)/3$	$(n^2 + 9)/9$

Tablo 3.2: R-D tipinde reel kuadratik sayı cisimlerinin n_d değerleri.

$d = n^2 + r$	r	T_d	U_d	n_d	v	w
$d \geq 17$	1	$2n$	2	$n/2$	0	1
$d \geq 10$	1	$2n$	2	$(n-1)/2$	2	2
$d \geq 15$	-1	$2n$	2	$n/2$	0	-1
$d \geq 29$	4	n	1	n	0	4
$d \geq 21$	-4	n	1	n	0	-4

Önerme 3.1.22. (i) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin $|r| = 1$ sağlayan R-D tipinde bir reel kuadratik sayı cismi olması için gerek ve yeter koşul $U_d = 2$ olmasıdır.

- (ii) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin $|r| = 4$ sağlayan R-D tipinde bir reel kuadratik sayı cismi olması için gerek ve yeter koşul $U_d = 1$ olmasıdır.

$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin n_d ve m_d invaryantlarına bağlı olarak sınıf sayısı h_d için elde edilmiş olan alt sınırlar aşağıda verilmiştir. Burada

$$\delta_d = \begin{cases} 0 & ; d \equiv 1 \pmod{4} \\ 1 & ; d \equiv 2, 3 \pmod{4} \end{cases}$$

dir.

Teorem 3.1.23. d pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere herhangi $s \geq 11.2$ ve $d \geq e^s$ için

- (i) $m_d \neq 0$ ise olası bir istisna ile $h_d > \frac{0.3275 \cdot 4^{\delta_d(s-2)/2s} \cdot s^{-1} \cdot d^{(s-2)/2s}}{\log(m_d+1)d}$
- (ii) $m_d = 0$ (yani $n_d \neq 0$) ise olası bir istisna ile $h_d > \frac{0.3275 \cdot 4^{\delta_d(s-2)/2s} \cdot s^{-1} \cdot d^{(s-2)/2s}}{\log(d/n_d)+1}$
- (iii) $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ R-D tipinde bir reel kuadratik cisim ise $h_d > \frac{0.3275 \cdot 4^{\delta_d(s-2)/2s} \cdot s^{-1} \cdot d^{(s-2)/2s}}{\log(3d)}$

sağlanır [68].

3.2. TEMEL BİRİM VE SÜREKLİ KESİRLER İLE İLGİLİ TEMEL TEOREMLER

Bölüm 2.2’de bir $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi ve özellikleri ile Bölüm 2.8’de sürekli kesirler ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir. Burada ise temel birim ve sürekli kesirler arasındaki bağlantı ile ilgili literatürde elde edilmiş önemli teoremlere yer verilmiş olup bu tez çalışmasının orijinal bulgularının ispatlarında (Bölüm 4) kullanılmıştır.

d pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismindeki tüm kuadratik irrasyonel sayıların kümesini $I(d)$ ile, tüm indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayılarının kümesini $R(d)$ ile gösterelim. Teorem (2.8.9)’a göre $\alpha \in R(d)$ ise α ’nın sürekli kesre açılımı pür periyodiktir. Yani

$$\alpha = [\overline{a_1, \dots, a_{k_d}}]$$

biçimindedir. Burada k_d, α 'nın sürekli kesre açılımının periyodudur.

Lemma 3.2.1. d pozitif kare çarpansız tam sayı ve herhangi bir $\alpha \in R(d)$ elemanının sürekli kesre açılımının periyodu k_d olmak üzere

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_{k_d} + \frac{1}{\alpha}}}} = \frac{r\alpha + s}{t\alpha + u} \quad (a_i, r, s, t, u \in \mathbb{Z}, a_i \geq 1, 1 \leq i \leq k_d)$$

olsun. Bu durumda $t\alpha + u$, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ kuadratik sayı cisminin temel birimidir ve normu $(-1)^{k_d}$ dir [5].

Lemma 3.2.2. $d \equiv 1 \pmod{4}$ ($d > 5$) pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $w_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$, $q_0 = \lfloor w_d \rfloor$, $w_R = q_0 - 1 + w_d$ olsun. Bu durumda $w_d \notin R(d)$ ve $w_R \in R(d)$ dir. w_R nin periyodu k_d olmak üzere

$$w_R = [\overline{2q_0 - 1, q_1, \dots, q_{k_d-1}}] \text{ ve } w_d = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_{k_d-1}, 2q_0 - 1}]$$

biçimindedir. Ayrıca

$$w_R = \frac{P_{k_d} w_R + P_{k_d-1}}{Q_{k_d} w_R + Q_{k_d-1}} = [2q_0 - 1, q_1, \dots, q_{k_d-1}, w_R]$$

ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin $\varepsilon_d = \left(\frac{T_d + U_d \sqrt{d}}{2}\right) > 1$ temel biriminin katsayıları, $Q_0 = 0, Q_1 = 1$ ve $\forall i \geq 1$ için $Q_{i+1} = q_i Q_i + Q_{i-1}$ olmak üzere

$$T_d = (2q_0 - 1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \text{ ve } U_d = Q_{k_d} \quad (3.3)$$

biçimindedir [56].

Lemma 3.2.3. $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ($d > 5$) pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $w_d = \sqrt{d}$, $q_0 = \lfloor w_d \rfloor$, $w_R = q_0 + w_d$ olsun. Bu durumda $w_d \notin R(d)$ ve $w_R \in R(d)$ dir. w_R nin periyodu k_d olmak üzere

$$w_R = [\overline{2q_0, q_1, \dots, q_{k_d-1}}] \text{ ve } w_d = [q_0, \overline{q_1, \dots, q_{k_d-1}, 2q_0}]$$

biçimindedir. Ayrıca

$$w_R = \frac{P_{k_d} w_R + P_{k_d-1}}{Q_{k_d} w_R + Q_{k_d-1}} = [2q_0, q_1, \dots, q_{k_d-1}, w_R]$$

ise $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin $\varepsilon_d = \left(\frac{T_d + U_d \sqrt{d}}{2}\right) > 1$ temel biriminin katsayıları, $Q_0 = 0, Q_1 = 1$ ve $\forall i \geq 1$ için $Q_{i+1} = q_i Q_i + Q_{i-1}$ olmak üzere

$$T_d = 2q_0 Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \text{ ve } U_d = 2Q_{k_d} \quad (3.4)$$

biçimindedir [56].

Lemma 3.2.4. $0 < b \leq 2a$ sağlayan a ve b tam sayıları için $d = a^2 + b$ bir pozitif kare çarpansız tam sayı olsun. $w = w_0 \in R(d)$ elemanının sürekli kesir açılımı, $[w_i] = \ell_i$ ($i \geq 0$) olmak üzere $w_i = \ell_i + \frac{1}{w_{i+1}}$ olsun. Bu takdirde, $w_i = \frac{a-r_i+\sqrt{d}}{c_i}$ olup ℓ_i, c_i, r_i tam sayıları aşağıdaki rekürans bağıntılarından elde edilir.

$$w_0 = \frac{a - r_0 + \sqrt{d}}{c_0} \quad (3.5)$$

$$2a - r_i = c_i \ell_i + r_{i+1} \quad (3.6)$$

$$c_{i+1} = c_{i-1} + (r_{i+1} - r_i) \ell_i \quad (i \geq 0) \quad (3.7)$$

$$0 \leq r_{i+1} < c_i \quad (3.8)$$

$$c_{-1} = \frac{b + 2ar_0 - r_0^2}{c_0} \quad (3.9)$$

Ayrıca w_0 irrasyonel sayısının periyodu $k \geq 1$ olmak üzere

$$\ell_i = \ell_{k-i} \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad (3.10)$$

$$r_i = r_{k-i+1} \quad (3.11)$$

$$c_i = c_{k-i} \quad (1 \leq i \leq k) \quad (3.12)$$

eşitlikleri gerçekleşir [5].

Lemma 3.2.5. $d \equiv 1 \pmod{4}$ ($d > 5$) pozitif kare çarpansız tam sayı olsun. Lemma 3.2.4'de

$w = w_R = q_0 - 1 + w_d$ alınırsa aşağıdaki rekürans bağıntıları elde edilir:

$$r_0 = r_1 = a - \ell_0 = a - 2q_0 + 1$$

$$c_0 = 2, \quad c_1 = c_{-1} = \frac{b + 2ar_0 - r_0^2}{c_0}$$

$$\ell_0 = 2q_0 - 1$$

$$\ell_i = q_i \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad (3.13)$$

Benzer şekilde $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ ($d > 5$) pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere Lemma 3.2.4'de $w = w_R = q_0 + w_d$ alırsa aşağıdaki rekürans bağıntıları elde edilir:

$$r_0 = r_1 = 0$$

$$c_0 = 1, \quad c_1 = b$$

$$\ell_0 = 2q_0$$

$$\ell_i = q_i \quad (1 \leq i \leq k-1) \quad (3.14)$$

[56].

3.3. PERİYODA BAĞLI OLARAK YAKLAŞIMLAR

$\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel biriminin belirlenmesine yönelik yapılan çalışmalardan biri de cismin tamlik taban elemanının sürekli kesre açılımındaki terimlere bağlı olarak temel birimin katsayılarının formülize edilmesidir. Bir kuadratik irrasyonel sayı olan w_d tamlik taban elemanının sürekli kesre açılımının periyodu k_d ile gösterilmek üzere bu konudaki çalışmalar $k_d = 3, 4$ ve 5 için Tomita [56, 57], Mollin ve Williams [37, 38] tarafından; $k_d = 6$ için Pekin ve İşcan [52] tarafından; $k_d = 7$ ve 8 olması durumunda ise Gözeri ve Pekin [17], Özer ve Pekin [50, 51] tarafından yapılmıştır. Bahsedilen bu çalışmalarda periyod $k_d = 3, 4, 5, 6$ iken $n_d \neq 0$ olması durumu incelenerek bir takım koşullar elde edilmiştir, ayrıca $n_d \neq 0$ ve $h_d = 1$ sağlayan kare çarpansız d tam sayıları tablo halinde listelenmiştir.

Herhangi bir pozitif kare çarpansız d tam sayısı, $0 < b \leq 2a$ ve $a, b \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $d =$

$a^2 + b$ şeklinde yazılabilir. Burada $\sqrt{d} - 1 < a < \sqrt{d}$ olduğundan d, a ve b tam sayıları ile tek türlü ifade edilir. $d \equiv 1 \pmod{4}$ ve $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ için $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanları sırasıyla $w_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ ve $w_d = \sqrt{d}$ olduğundan bu durumlar ayrı ayrı incelenmiştir. Ayrıca $d \equiv 1 \pmod{4}$ iken w_d 'nin sürekli kesre açılımı ve ε_d temel birimin katsayıları belirlenirken $d = a^2 + b$ yazılışındaki a tam sayısının tek veya çift olması durumuna göre incelenmiştir.

Tomita [57], D_β^α kümesini aşağıdaki şekilde tanımlamış

$$D_\beta^\alpha = \{d \in \mathbb{Z}^+ \mid d \equiv \alpha \pmod{8}, b \equiv \beta \pmod{8}\}$$

ve $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ olması durumunda α ve β tam sayılarının alabileceği değerlere göre mümkün olan tüm D_β^α kümeleri aşağıdaki şekilde göstermiştir.

- a çift ise $b \equiv 1 \pmod{4}$ dir. Bu durumda $d \in D_1^1 \cup D_5^1 \cup D_1^5 \cup D_5^5$ biçimindedir.
- a tek ise $b \equiv 0 \pmod{4}$ dir. Bu durumda $d \in D_0^1 \cup D_4^5$ biçimindedir.

Aşağıda $D_0^1, D_1^1, D_5^1, D_1^5, D_4^5, D_5^5$ kümeleri açık bir şekilde yazılmıştır.

$$D_0^1 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m, a \equiv 1 \pmod{2}, 0 < 4m < a\}$$

$$D_1^1 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 1, a \equiv 0 \pmod{4}, 0 \leq 4m < a\}$$

$$D_5^1 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 5, a \equiv 2 \pmod{4}, 0 \leq 4m < a - 2\}$$

$$D_1^5 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 1, a \equiv 2 \pmod{4}, 0 \leq 4m < a\}$$

$$D_4^5 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 4, a \equiv 1 \pmod{2}, 0 \leq 4m < a - 2\}$$

$$D_5^5 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 5, a \equiv 0 \pmod{4}, 0 \leq 4m < a - 2\}$$

Benzer şekilde $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ için de bazı kümeler tanımlanmıştır [57]. Tomita bu kümeleri aşağıdaki teoremlerin ispatlarında kullanmıştır.

Teorem 3.3.1. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $w_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının

sürekli kesre açılımında periyodu $k_d = 3$ olsun. Eğer a tek sayı ise

$$w_d = \left[\frac{a+1}{2}, \overline{\ell, \ell, a} \right]$$

biçimindedir. Ayrıca $\varepsilon_d = \frac{T_d + U_d \sqrt{d}}{2}$ olmak üzere $a = (\ell^2 + 1)r + \ell$ eşitliğini sağlayan ℓ ve r pozitif tam sayıları için

$$(T_d, U_d) = ((\ell^2 + 1)^2 r + \ell(\ell^2 + 3), \ell^2 + 1)$$

$$d = (\ell^2 + 1)^2 r^2 + 2\ell(\ell^2 + 3)r + \ell^2 + 4$$

dir. Eğer a çift sayı ise

$$w_d = \left[\frac{a}{2}, \overline{1, 1, a} \right], \quad (T_d, U_d) = (2a, 2), \quad d = a^2 + 1$$

sağlanır [56].

Sonuç 3.3.2. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı ve $k_d = 3$ ise

$$n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor \neq 0$$

daima gerçekleşir ve bu durumda sınıf sayısı $h_d = 1$ olan

$$d = 17, 37, 61, 101, 197, 317, 461, 557, 667, 773, 1877$$

değerlerine karşılık gelen 11 tane $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi vardır [56].

Kanıt. a çift ise Teorem 3.3.1'den $n_d = \left\lfloor \frac{2a}{2} \right\rfloor = a \neq 0$ olduğu açıktır. a tek olsun.

$$U_d^2 - \ell(\ell^2 + 3) = \ell^3(\ell - 1) + \ell(2\ell - 3) + 1$$

ve $\ell > 1$ olduğundan $U_d^2 > \ell(\ell^2 + 3)$ elde edilir. Bu durumda

$$n_d = \left\lfloor \frac{(\ell^2 + 1)^2 r + \ell(\ell^2 + 3)}{(\ell^2 + 1)^2} \right\rfloor = r \neq 0$$

sağlanır. Yokoi tarafından $n_d \neq 0$ ve $h_d = 1$ olan d 'lerin belirlendiği tabloda [64] periyodu 3

olan 11 tane $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi vardır. $\square$

Teorem 3.3.3. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı ve $k_d = 5$ ise ℓ, v tam sayılar olmak üzere

$$w_d = \begin{cases} \left[\frac{a}{2}, 1, \ell, \ell, 1, a-1 \right] (\ell \geq 0) & ; a \text{ çift} \\ \left[\frac{a+1}{2}, \ell, v, v, \ell, a \right] (\ell \geq 2, v > 0) & ; a \text{ tek} \end{cases}$$

$$(T_d, U_d) = \begin{cases} (A^2r + B, A) & ; a \text{ çift} \\ (a(A^2 + \ell^2) + 2(vA + \ell), A^2 + \ell^2) & ; a \text{ tek} \end{cases}$$

ve

$$d = A^2r^2 + 2Br + C$$

ifadeleri sağlanır. Burada A, B, C ve r aşağıdaki biçimde tek türlü belirlenir:

- a çift ise $A = \ell^2 + 2\ell + 2, B = (\ell^2 + \ell)A + \ell^2$ ve $C = (\ell^2 + 3)\ell^2 + 2(\ell^2 - 1)\ell + 1$. $r, a = Ar + \ell^2 + \ell$ ile tek türlü belirlenmiş negatif olmayan bir tam sayıdır.
- a tek ise $A = v\ell + 1, r$ ve s

$$\begin{cases} Ar + \ell s = a \\ \ell r - As = -v^2 - 1 \end{cases}$$

ile tek türlü belirli pozitif tam sayılardır ve $B = s\ell A + 2v, C = s(s\ell^2 + 4)$ dir [57].

Sonuç 3.3.4. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı, $k_d = 5$ ve a çift olsun. $m_d = 1$ olması için gerek ve yeter koşul $d = (\ell^2 + 3)\ell^2 + 2(\ell^2 - 1)\ell + 1$ ($\ell \in \mathbb{Q}^+, \ell \neq 1$) olmasıdır [57].

Kanıt. Teorem 3.3.3'den $A^2 - B = (\ell + 2)A - \ell^2 > 0$ olduğundan

$$n_d = \left\lfloor \frac{A^2r + B}{A^2} \right\rfloor = r \geq 0$$

sağlanır. O halde $m_d \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $r = 0$ olmasıdır. $m_d = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $r = 0$ olduğundan ve Teorem 3.3.3'den $d = C$ elde edilir. Tersine

eğer $d = C$ ise $r = 0$ dır ve $A^2 - B < B$ olduğundan

$$0 < m_d = \left\lfloor \frac{A^2}{A^2r + B} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{A^2}{B} \right\rfloor < 2$$

yani $m_d = 1$ elde edilir. □

Sonuç 3.3.5. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı, $k_d = 5$ ve a tek olsun. $m_d \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $a < U_d = A^2 + \ell^2$ olmasıdır ve bu şartlar altında $d = A^2r^2 + 2Br + C$ sağlanır [57].

Kanıt. $m_d \neq 0$ olduğunu varsayalım. (3.3)'deki temel birimin T_d ve U_d katsayıları kullanılarak $2q_0 - 1 < U_d = Q_5$ elde edilir. a tek olduğundan $q_0 = (a + 1)/2$ dir. Böylece $a < U_d$ sağlanır. Tersine $a < U_d$ olsun.

$$U_d - 2(vA + \ell) = A(A - 2v) + \ell(\ell - 2)$$

ve $\ell \geq 2$ olduğundan $U_d > 2(vA + \ell)$ sağlanır. Böylece

$$n_d = \left\lfloor \frac{a(A^2 + \ell^2) + 2(vA + \ell)}{(A^2 + \ell^2)^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{A^2 + \ell^2} \right\rfloor = 0$$

dolayısıyla $m_d \neq 0$ dır. □

Sonuç 3.3.6. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı ve $k_d = 5$ olsun. Bu durumda olası bir istisna ile sınıf sayısı $h_d = 1$ olan cisimler

$$a \text{ çift ise } d = 41, 149, 157, 269, 941$$

$$a \text{ tek ise } d = 181, 397, 1013, 2477, 2693, 3533, 4253$$

değerlerine karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisimleridir [57].

Sonuç 3.3.7. $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olsun. O halde $k_p = 4$ ise $U_p < p$, $k_p = 5$ ve a tek ise $U_p < p$ dir [57].

Kanıt. $k_p = 4$ ve a çift ise [57, Sonuç 1]'den ve $r > 0$ olduğundan

$$p = A^2r^2 + 2Br + C > A = U_p$$

sağlanır. $k_p = 4$ ve a tek olsun. [57, Not 2]'den

$$p - U_p = (A + 2)(A - 2)r^2 + \ell((2sr - 1)(A + 1) + 2sr) + s(s\ell^2 + 4)$$

ve $2sr > 1$ olduğundan $p > U_p$ elde edilir. Son olarak $k_p = 5$ ve a tek ise Teorem 3.3.3'den

$$p = A^2r^2 + 2Br + C > A^2 + C > A^2 + \ell^2 = U_p$$

sağlanır. □

Teorem 3.3.8. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $w_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyodu $k_d = 6$ olsun. Eğer a tek sayı ise r, s pozitif tam sayılar, $\ell_1 > \ell_2$ ve $A = \ell_1\ell_2 + 1, a = Ar + t\ell_1$ olmak üzere

$$w_d = \left[\frac{a+1}{2}, \ell_1, \ell_2, \frac{2Ar - \ell_1s + 4\ell_2}{As - 2\ell_2^2}, \ell_2, \ell_1, a \right]$$

$$T_d = a(A^2\ell_3 + 2A\ell_1) + 2\ell_2(A\ell_3 + \ell_1) + 2A$$

$$U_d = A^2\ell_3 + 2A\ell_1$$

$$d = (Ar + t\ell_1)^2 + 4r\ell_2 + 2s$$

biçiminde ifade edilir [52].

Teorem 3.3.9. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı, $k_d = 6$ ve a tek sayı ise

$$(i) \ n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = 0 \Rightarrow t \leq 2A$$

$$(ii) \ t \leq A \Rightarrow n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = 0$$

koşulları sağlanır.

Kanıt. $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $U_d^2 - T_d > 0$ olmasıdır.

i) Teorem 3.3.8'deki T_d ve U_d katsayıları kullanılarak

$$\begin{aligned} U_d^2 - T_d &= (A^2\ell_3 + 2A\ell_1)^2 - (Ar + t\ell_1)(A^2\ell_3 + 2A\ell_1) - 2\ell_2(A\ell_3 + \ell_1) - 2A \\ &= (A^2\ell_3 + 2A\ell_1)(A^2\ell_3 + 2A\ell_1 - Ar - t\ell_1) - 2\ell_2(A\ell_3 + \ell_1) - 2A \\ &= (A^2\ell_3 + 2A\ell_1)(A(A\ell_3 - r) + \ell_1(2A - t)) - 2\ell_2(A\ell_3 + \ell_1) - 2A \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlikte, $A(A\ell_3 - r) + \ell_1(2A - t) = K$ olarak alınırsa Teorem 3.3.8'deki

$$\ell_3 = \frac{Ar - t\ell_1 + 2\ell_2}{At - 2\ell_2^2}$$

değeri K da yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} K &= A \left(\frac{A^2r - At\ell_1 + 2A\ell_2}{At - \ell_2^2} \right) + \ell_1(2A - t) \\ &= \frac{A^2r(A - t) + A^2(2\ell_2 - \ell_1t) + Ar\ell_2^2}{At - \ell_2^2} + \ell_1(2A - t) \end{aligned}$$

olur. Teorem 3.3.8'den $At - \ell_2^2 > 0$ ve $t > 2A$ iken $t > A = \ell_1\ell_2 + 1$ olacağından ve $\ell_1 > \ell_2$ den $\ell_1t > \ell_1^2\ell_2 + \ell_1 > 2\ell_2$ elde edilir. Ayrıca $A^2r(A - t) > Ar\ell_2^2$ eşitsizliği sağlandığından $K < 0$ sonucuna ulaşılır. Bu da $U_d^2 - T_d < 0$ olması demektir fakat bu $n_d = 0$ olmasıyla çelişir. O halde $t \leq 2A$ olmalıdır.

ii) $t \leq A$ olsun.

$$U_d^2 - T_d = (A^2\ell_3 + 2A\ell_1)(A(A\ell_3 - r) + \ell_1(2A - t)) - 2A(\ell_2\ell_3 + 2)$$

biçiminde yazılır. $A(A\ell_3 - r) + \ell_1(2A - t) = K$ ifadesi, ℓ_3 değeri ve $t \leq A$ için $K > 0$ olduğu görülür. K değeri $U_d^2 - T_d$ de yerine yazılarak

$$U_d^2 - T_d = (A^2\ell_3 + 2A\ell_1) \frac{A\ell_1t(A - t) + A^2r(A - t) + 2A\ell_2(A - \ell_1\ell_2) + \ell_1\ell_2^2t}{At - \ell_2^2} - 2A(\ell_2\ell_3 + 2)$$

biçiminde elde edilir.

$$\begin{aligned} (A^2\ell_3 + 2A\ell_1)\ell_1\ell_2^2t - 2A(\ell_2\ell_3 + 2) &= A^2\ell_1\ell_2^2\ell_3t + 2A\ell_1^2\ell_2^2t - 2A\ell_2\ell_3 - 4A \\ &= A\ell_2\ell_3(A\ell_1\ell_2 - 2) + 2A(\ell_1^2\ell_2^2t - 2) > 0 \end{aligned}$$

olduğundan $U_d^2 - T_d > 0$ olacaktır. Bu da $n_d = 0$ olmasıdır. $\square$

Sonuç 3.3.10. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı, $k_d = 6$ ve a tek olsun. Bu durumda $n_d = 0$ sağlayan ve $h_d = 1$ olan

$$d = 57, 309, 381, 749, 1893, 2453$$

değerlerine karşılık gelen 6 tane $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi vardır.

Teorem 3.3.11. $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı $0 < b \leq 2a$ eşitsizliğini sağlayan $a, b \in \mathbb{Z}$ için $d = a^2 + b$ biçiminde tanımlansın. $w_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ kuadratik irrasyonel sayısının sürekli kesre açılımında periyodu $k_d = 6$ olsun. Eğer a çift sayı ise $A = \ell_2 + 1, B = 2s - r$ ($r, s, \ell_1, \ell_2 \in \mathbb{Z}^+, r > 1$) olmak üzere

$$w_d = \left[\frac{a}{2}, 1, \ell_2, \frac{A(r+1) - B}{AB - 1}, \ell_2, 1, a - 1 \right]$$

$$T_d = (A(r+1) + 2B)(A^2\ell_3 + 2A) + 2(A-1)(A\ell_3 + 1) + 2A$$

$$U_d = A^2\ell_3 + 2A$$

$$d = (A(r+1) + B - 1)^2 + \text{big}((A-3)(r+1) + 4s) + 1$$

eşitlikleri sağlanır [52].

Teorem 3.3.12. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı, $k_d = 6$ ve a çift sayı ise

$$(i) \ n_d = 0 \Rightarrow A + r \geq 2s - 2$$

$$(ii) \ A + r \geq 2s \Rightarrow n_d = 0$$

koşulları sağlanır.

Sonuç 3.3.13. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı, $k_d = 6$ ve a çift olsun. Bu durumda $n_d = 0$ sağlayan ve $h_d = 1$ olan sadece $\mathbb{Q}(\sqrt{341})$ reel kuadratik sayı cismi vardır.

Teorem 3.3.14. $d = a^2 + b = a^2 + 4m + 2, d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı ve $k_d = 6$ olsun. $A = \ell_1\ell_2 + 1$ ($\ell_1, \ell_2, m, r \neq 1, t \neq 0$ pozitif tam sayılar ve $\ell_1 > r$) olmak üzere

$$w_d = \left[a, \ell_1, \ell_2, \frac{2Ar - 2t\ell_1 + 2\ell_2}{2At - \ell_2^2}, \ell_2, \ell_1, 2a \right]$$

$$T_d = (Ar + t\ell_1)(A^2\ell_3 + 2A\ell_1) + (\ell_3\ell_2 + 2A - 1)$$

$$U_d = A^2\ell_3 + 2A\ell_1$$

$$d = (Ar + t\ell_1)^2 + 2r\ell_2 + 2t$$

eşitlikleri sağlanır [52].

Teorem 3.3.15. $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı, $b \equiv 2 \pmod{4}$ ve $k_d = 6$ ise

$$(i) \quad n_d = 0 \Rightarrow t \leq A$$

$$(ii) \quad 2t \leq A \Rightarrow n_d = 0$$

koşulları sağlanır.

Sonuç 3.3.16. $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı, $b \equiv 2 \pmod{4}$ ve $k_d = 6$ olsun. Bu durumda $n_d = 0$ sağlayan ve $h_d = 1$ olan $d = 22, 59, 278$ değerlerine karşılık gelen 3 tane $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cismi vardır.

3.4. ANKENY-ARTIN-CHOWLA (AAC) SANISI

$p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olmak üzere $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısı h_p ve temel birimi $\varepsilon_p = (T_p + U_p\sqrt{p})/2$ ile gösterilsin. Aşağıda verilen kongrüans ilk olarak 1948’de Kiselev [32] tarafından daha sonra bağımsız olarak Ankeny ve Chowla [1] tarafından ispatlanmıştır:

$$h_p \frac{T_p}{U_p} \equiv B_\mu \pmod{p}.$$

Burada $\mu = (p - 1)/2$ dir ve B_n, n -inci Bernoulli sayısını göstermektedir. 1952’de Ankeny, Artin ve Chowla $p \nmid U_p$ nin her zaman doğru olup olmadığı sorusunu ortaya atmışlardır [2] ve bu soru günümüzde Ankeny-Artin-Chowla (AAC) Sanısı olarak anılmaktadır. Nümerik

hesaplamalar ile Van Der Poorten [58], AAC Sanısının $p < 2 \times 10^{11}$ sağlayan asallar için doğru olduğunu göstermiştir. Fakat sonsuz sayıdaki $p \equiv 1 \pmod{4}$ asalı için $p \nmid U_p$ olup olmadığı hala açık bir problemdir.

AAC Sanısı üzerine literatürde birçok çalışma mevcuttur. Yokoi [62], n_p invaryatının sıfırdan farklı olması durumunda $U_p < p$ olduğunu yani AAC Sanısının sağlandığını göstermiştir (Teorem 3.1.7). Mollin ve Williams ise $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $\hat{n}_d \neq 0$ ise $\hat{U}_d \not\equiv 0 \pmod{d}$ olduğunu ispatlamıştır (Teorem 3.1.17).

Diğer taraftan Hashimoto [19], AAC Sanısı ile $(1 + \sqrt{p})/2$ nin sürekli kesre açılımı arasındaki ilişkiyi incelemiş ve bir olası istisna ile tüm $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ asalları için $U_p < p$ olduğunu yani AAC Sanısının sağlandığını göstermiştir. Byeon ve Lee [12] ise McLaughlin [35] in sürekli kesirler üzerine çalışmasını kullanarak keyfi pozitif kare çarpansız d tam sayısı için Hashimoto'nun teoremini genelleştirmiştir. Ayrıca Hashimoto [20, 21], $d \equiv 1 \pmod{4}$ için $d < U_d$ olan d 'lerin nasıl karakterize edilebileceğini araştırmış ve $d \in S(7; 1, c)$ özel durumu için $U_d \not\equiv 0 \pmod{d}$ olduğunu ispatlamıştır. Bahsedilen çalışmalar hakkında detaylı bilgiler aşağıda verilmiştir.

$p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olmak üzere $(1 + \sqrt{p})/2$ nin sürekli kesre açılımı

$$\frac{1 + \sqrt{p}}{2} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k_p}}]$$

şeklinde gösterilsin. Burada $1 \leq t < k_p$ için $a_{k_p-t} = a_t$ ve $a_{k_p} = 2a_0 - 1$, ayrıca k_p 'nin tek sayı olduğu bilinmektedir [43].

Önerme 3.4.1. $p \equiv 1 \pmod{4}$ olmak üzere $k_p = 1, 3, 5$ ise $U_p < p$ dir ve AAC Sanısı doğrudur [19].

Kanıt. $k_p = 1$ ve $k_p = 3$ için önermeyi ispatlamak kolaydır. Tomita [57], $k_p = 5$ ve $\lfloor \sqrt{p} \rfloor$ tek iken ispatlamıştır. Ancak onun ispatı $k_p = 5$ ve $\lfloor \sqrt{p} \rfloor$ çift iken de geçerlidir. $\square$

Peki $k_p = 7$ için ne olur? Hashimoto [19], bu soru üzerine çalışmış ve $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümesini tanımlayarak olası istisna ile bu kümedeki tüm asalların AAC Sanısını sağladığını, eğer istisna varsa bunun kümedeki en küçük tam sayı olduğunu ispatlamıştır. k herhangi bir tek tam sayı ve $k' = (k - 1)/2$ olmak üzere, verilen herhangi $a_1, a_2, \dots, a_{k'}$ pozitif tam sayıları

için $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümesini şu şekilde tanımlamıştır:

$$S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'}) = \left\{ p \in \mathbb{Z}^+ \mid \begin{array}{l} p \equiv 1 \pmod{4} \text{ asal,} \\ \frac{1+\sqrt{p}}{2} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k'}, a_{k'}, \dots, a_1, 2a_0 - 1}] \\ a_0 = \left\lfloor \frac{1+\sqrt{p}}{2} \right\rfloor \end{array} \right\} \quad (3.15)$$

$S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümesi boş küme değildir.

Örneğin, $p = 5$ alalım. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = [\overline{1}]$ dir ve $k_5 = 1$ dir. Ayrıca 5 asalı sadece $S(1;)$ değil aynı zamanda $S(3; 1)$ ve $S(5; 1, 1)$ kümelerine de aittir. Çünkü

$$S(k_p; \dots) = [1, \overline{1}] = [1, \overline{1, 1, 1}] = [1, \overline{1, 1, 1, 1, 1}] = \dots$$

Önerme 3.4.2. (3.15) ile tanımlı $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümesi

$$S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'}) = \{ (q_{k-1}s + q_{k-2}r_{k-2})^2 + 4q_{k-2}s + 4r_{k-2}^2 \mid \\ s \in \mathbb{Z}, s > -\frac{q_{k-2}r_{k-2}}{q_{k-1}}, \quad q_{k-1}s + q_{k-2}r_{k-2} \text{ tek sayı} \} \quad (3.16)$$

şeklindedir. Burada q_{k-1}, q_{k-2} ve r_{k-2} (2.2) ile tanımlanmıştır ve $k' + 1 \leq i \leq 2k'$ için $a_i = a_{2k'+1-i}$ dir. Ayrıca eğer $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ ve $p \neq \min S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ ise

$$p = (q_{k-1}s + q_{k-2}r_{k-2})^2 + 4q_{k-2}s + 4r_{k-2}^2$$

olup $s \in \mathbb{Z}$ ve $s > -\frac{q_{k-2}r_{k-2}}{q_{k-1}} + 1$ dir [19].

Kanıt. Öncelikle p yi a_n ler ile ifade etmeye çalışalım:

$$\begin{aligned} \frac{1+\sqrt{p}}{2} &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k_p-1}, [2a_0 - 1, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k_p}}]] \\ &= [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{k_p-1}, a_0 - 1 + \frac{1+\sqrt{p}}{2}] \\ &= \left[a_0, \frac{(a_0 - 1 + \frac{1+\sqrt{p}}{2})q_{k_p-1} + q_{k_p-2}}{(a_0 - 1 + \frac{1+\sqrt{p}}{2})r_{k_p-1} + r_{k_p-2}} \right] \\ &= a_0 + \frac{(a_0 - 1 + \frac{1+\sqrt{p}}{2})r_{k_p-1} + r_{k_p-2}}{(a_0 - 1 + \frac{1+\sqrt{p}}{2})q_{k_p-1} + q_{k_p-2}} \end{aligned}$$

Dolayısıyla aşağıdaki eşitlik sağlanır

$$q_{k_p-1} \left(\frac{1+\sqrt{p}}{2} \right)^2 - (q_{k_p-1} - q_{k_p-2} + r_{k_p-1}) \left(\frac{1+\sqrt{p}}{2} \right) - a_0(a_0-1)q_{k_p-1} - a_0q_{k_p-2} - (a_0-1)r_{k_p-1} - r_{k_p-2} = 0. \quad (3.17)$$

Diğer taraftan

$$\left(\frac{1+\sqrt{p}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt{p}}{2} \right) - \frac{p-1}{4} = 0$$

sağlanır. O halde

$$\frac{q_{k_p-1} - q_{k_p-2} + r_{k_p-1}}{q_{k_p-1}} = 1 \quad (3.18)$$

ve

$$\frac{a_0(a_0-1)q_{k_p-1} + a_0q_{k_p-2} + (a_0-1)r_{k_p-1} + r_{k_p-2}}{q_{k_p-1}} = \frac{p-1}{4} \quad (3.19)$$

olur. (3.18) den

$$q_{k_p-2} = r_{k_p-1} \quad (3.20)$$

elde edilir. (3.19) ve (3.20)'den

$$\frac{p-1}{4} = a_0(a_0-1) + \frac{(2a_0-1)q_{k_p-2} + r_{k_p-2}}{q_{k_p-1}} \quad (3.21)$$

$$\frac{p-(2a_0-1)^2}{4} q_{k_p-1} - (2a_0-1)q_{k_p-2} = r_{k_p-2} \quad (3.22)$$

bulunur. Diğer taraftan (2.3) ve (3.20)'den, ayrıca k_p tek olduğundan

$$r_{k_p-2}q_{k_p-1} - q_{k_p-2}^2 = 1 \quad (3.23)$$

elde edilir. (3.23)'den dolayı (3.22) denkleminin herhangi bir (p, a_0) tam sayı çözümü bir s

tam sayısı için aşağıdakileri sağlamak zorundadır:

$$\frac{p - (2a_0 - 1)^2}{4} = r_{k_p-2}^2 + q_{k_p-2}s \quad (3.24)$$

$$2a_0 - 1 = q_{k_p-2}r_{k_p-2} + q_{k_p-1}s \quad (3.25)$$

$\frac{p - (2a_0 - 1)^2}{4} > 0$ ve $2a_0 - 1 > 0$ olduğundan (3.24) ve (3.25) şunu gösterir:

$$s > -\frac{q_{k_p-2}r_{k_p-2}}{q_{k_p-1}} \quad (3.26)$$

Burada q_{k_p-1}, q_{k_p-2} ve r_{k_p-2} nin $a_1, a_2, \dots, a_{k_p-1}$ in polinomları olduklarına dikkat edelim. $\square$

Önerme 3.4.3. $p \equiv 1 \pmod{4}$ asalı için temel birimin katsayıları T_p ve U_p , $\frac{1+\sqrt{p}}{2}$ nin sürekli kesre açılımının terimleri cinsinden aşağıdaki gibi yazılabilir [19]:

$$T_p = q_{k_p-1}^2 s + q_{k_p-1} q_{k_p-2} r_{k_p-2} + 2q_{k_p-2}$$

$$U_p = q_{k_p-1}$$

Teorem 3.4.4. Bir olası istisna ile tüm $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ asalları için $U_p < p$ dir. Ayrıca eğer p istisna ise

$$p = (q_{k_p-1}s + q_{k_p-2}r_{k_p-2})^2 + 4q_{k_p-2}s + 4r_{k_p-2}^2$$

biçiminde yazılabilir ve $s = \left\lceil -\frac{q_{k_p-2}r_{k_p-2}}{q_{k_p-1}} \right\rceil$ dir [19].

Kanıt. $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ ve $p \neq \min S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ olduğunu farzedelim. Önerme 3.4.2'den $s > -\frac{q_{k-2}r_{k-2}}{q_{k-1}} + 1$ olduğunu biliyoruz. Böylece (3.23)'den

$$p > q_{k-1}^2 + 4q_{k-2} + \frac{4r_{k-2}(-q_{k-2}^2 + q_{k-1}r_{k-2})}{q_{k-1}} = q_{k-1}^2 + 4q_{k-2} + \frac{4r_{k-2}}{q_{k-1}} > q_{k-1}$$

ve $k_p \leq k$ olduğundan $p > q_{k-1} \geq q_{k_p-1} = U_p$ bulunur. O halde $p = \min S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ hariç tüm $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ asalları için $U_p < p$ dir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. $\square$

Sonuç 3.4.5. Eğer $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümesinin minimumu asal değil ise $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümesine ait olan tüm asallar için $U_p < p$ sağlanır [19].

Byeon ve Lee [12] ise Hashimoto'nun çalışmaları keyfi pozitif kare çarpansız d tam sayısı için genelleştirmek için Mc Laughlin'in aşağıda verilen teoremini kullanmıştır. Bu teorem, $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ pozitif tam sayıların palindromik dizisi için $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}}, 2a_0]$ olacak şekilde a_0 ve d pozitif tam sayıların var olup olmadığını araştırmaktadır.

Teorem 3.4.6. (Mc Laughlin) l bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ pozitif tam sayıların bir palindromik dizisi olsun. $\frac{P_l}{Q_l}$, $[0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}}, 2a_0]$ sürekli kesrinin i -inci yaklaşımı olsun. Bu durumda $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}}, 2a_0]$ olacak şekilde a_0 ve d tam sayılarının var olması için gerek ve yeter koşul $P_{l-2}Q_{l-2}$ nin çift tamsayı olmasıdır.

Ayrıca eğer $\sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}}, 2a_0]$ sağlayan bir pozitif d tam sayısı var ise

$$t > \begin{cases} \frac{-Q_{l-2}P_{l-2}}{2Q_{l-1}} & ; l \text{ tek} \\ \frac{Q_{l-2}P_{l-2}}{2Q_{l-1}} & ; l \text{ çift} \end{cases}.$$

ve tQ_{l-1} bir tam sayı olacak şekilde bir t sayısı için

$$d = p(t) := \begin{cases} \left(\frac{Q_{l-2}P_{l-2}}{2} + tQ_{l-1} \right)^2 + 2tP_{l-1} + P_{l-2}^2 & ; l \text{ tek} \\ \left(\frac{-Q_{l-2}P_{l-2}}{2} + tQ_{l-1} \right)^2 + 2tP_{l-1} - P_{l-2}^2 & ; l \text{ çift} \end{cases}.$$

biçimindedir [35].

Byeon ve Lee [12] verilen pozitif bir k tam sayısı ve $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ pozitif tam sayıların palindromik bir dizisi için $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{l-1})$ kümesini şöyle tanımlamıştır:

$$S(l; a_1, a_2, \dots, a_{l-1}) = \{d \in \mathbb{Z}^+ \mid \sqrt{d} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \dots, a_{l-1}}, 2a_0]\}.$$

Teorem 3.4.7. l herhangi bir pozitif tam sayı ve $a_1, a_2, \dots, a_{l-1}$ pozitif tam sayıların bir palindromik dizisi olsun. Bir olası istisna ile tüm $d \in S(l; a_1, a_2, \dots, a_{l-1})$ kare çarpansız tam sayılar için $U_d < d$ dir. Eğer istisna varsa bu $S(l; a_1, a_2, \dots, a_{l-1})$ kümesinde en küçük tam sayıdır [12].

Kanıt. Teorem 3.4.6'dan $\alpha \in \mathbb{Q}$ için

$$t = \begin{cases} \alpha + \frac{-Q_{l-2}P_{l-2}}{2Q_{l-1}} & ; l \text{ tek} \\ \alpha + \frac{Q_{l-2}P_{l-2}}{2Q_{l-1}} & ; l \text{ çift} \end{cases}.$$

ve dolayısıyla

$$d = \begin{cases} \alpha^2 Q_{l-1}^2 + 2\alpha P_{l-1} - \frac{Q_{l-2}P_{l-2}P_{l-1}}{Q_{l-1}} + P_{l-2}^2 & ; l \text{ tek} \\ \alpha^2 Q_{l-1}^2 + 2\alpha P_{l-1} + \frac{Q_{l-2}P_{l-2}P_{l-1}}{Q_{l-1}} - P_{l-2}^2 & ; l \text{ çift} \end{cases}.$$

dir. $P_{l-1}Q_{l-2} + (-1)^{l-1} = P_{l-2}Q_{l-1}$ olduğundan

$$d = \begin{cases} \alpha^2 Q_{l-1}^2 + 2\alpha P_{l-1} - \frac{(P_{l-2}Q_{l-1}-1)P_{l-2}}{Q_{l-1}} + P_{l-2}^2 & ; l \text{ tek} \\ \alpha^2 Q_{l-1}^2 + 2\alpha P_{l-1} + \frac{(P_{l-2}Q_{l-1}+1)P_{l-2}}{Q_{l-1}} - P_{l-2}^2 & ; l \text{ çift} \end{cases}.$$

ve böylece

$$d = \alpha^2 Q_{l-1}^2 + 2\alpha P_{l-1} - \frac{P_{l-2}}{Q_{l-1}}$$

elde edilir. Eğer Q_{l-1} tek sayı ve $d \neq \min S(l; a_1, a_2, \dots, a_{l-1})$ ise $\alpha \geq 1$ dir ve

$$d \geq Q_{l-1}^2 + 2P_{l-1} + \frac{P_{l-2}}{Q_{l-1}} > 2Q_{l-1}$$

eğer Q_{l-1} çift sayı ve $d \neq \min S(l; a_1, a_2, \dots, a_{l-1})$ ise $\alpha \geq \frac{1}{2}$ dir. Dolayısıyla

$$d \geq \frac{1}{4}Q_{l-1}^2 + P_{l-1} + \frac{P_{l-2}}{Q_{l-1}}$$

olur. Böylece $Q_{l-1} \geq 8$ ve Q_{l-1} çift iken $d > 2Q_{l-1}$ elde edilir. Bu durumda Teorem 2.8.13, $U_d \leq 2Q_{l-1}$ olmasını gerektirir ($d \equiv 1 \pmod{4}$ için $U_d, 2Q_{l-1}$ 'e eşit olabilir). Böylece $d \neq \min S(l; a_1, a_2, \dots, a_{l-1})$ ise Q_{l-1} 'nin 8'den küçük ve çift olduğu durum hariç $d > 2Q_{l-1} \geq U_d$ olduğu ispatlanır. Ayrıca

- $Q_{l-1} = 6$ ise $d \in S(4; 1, 4, 1)$ veya $d \in S(2; 6)$,
- $Q_{l-1} = 4$ ise $d \in S(4; 1, 2, 1)$ veya $d \in S(2; 4)$,
- $Q_{l-1} = 2$ ise $d \in S(3; 1, 1)$ veya $d \in S(2; 2)$

sağlanır ve böyle tüm d ler için $d > U_d$ olduğu kolayca teyit edilebilir. Dolayısıyla ispat tamamlanır. $\square$

4. BULGULAR

4.1. TEMEL BİRİM İLE İLGİLİ BULGULAR

Bu bölümde, Bölüm 3.2’de verilen temel birim ve sürekli kesirler ile ilgili teoremlerden yararlanılarak elde edilen özgün teoremlere ve bunların ispatlarına yer verilmiştir. İlk olarak, $d \equiv 1 \pmod{4}$ iken $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımında periyodik kısmın ilk terimi hakkında önemli bir kriter elde edilmiştir (Teorem 4.1.1). Ayrıca, ε_d temel birimin katsayıları olan T_d ve U_d tam sayıları için ve dolayısıyla ε_d temel birim için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir (Teorem 4.1.2, Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4).

Herhangi bir indirgenmiş kuadratik irrasyonel sayının sürekli kesre açılımı ile ilgili bazı rekürans bağıntıları Azuhata tarafından elde edilmiştir [5]. Bu bağıntılardan yararlanılarak reel kuadratik sayı cisminin temel biriminin katsayıları, tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımındaki terimlere bağlı olarak ifade edilmiştir [56]. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_d = (T_d + U_d\sqrt{d})/2$ ve tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımının periyodu k_d ile gösterilmek üzere, Bölüm 3.2’de verilen bu çalışmalar, d ve a ’nın aldığı değerlere bağlı olarak 3 farklı durum için aşağıda özetlenmiştir:

Durum I $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve $a \equiv 1 \pmod{2}$

$$q_0 = \lfloor w_d \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{d})/2 \rfloor = (a + 1)/2,$$

$$w_d = [(a + 1)/2, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_3, \ell_2, \ell_1, a}],$$

$$T_d = aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \text{ ve } U_d = Q_{k_d}. \quad (4.1)$$

Durum II $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve $a \equiv 0 \pmod{2}$

$$q_0 = \lfloor w_d \rfloor = \lfloor (1 + \sqrt{d})/2 \rfloor = a/2,$$

$$w_d = [a/2, \overline{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_3, \ell_2, \ell_1, a - 1}],$$

$$T_d = (a-1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \text{ ve } U_d = Q_{k_d}. \quad (4.2)$$

Durum III $d = a^2 + b \equiv 2, 3 \pmod{4}$

$$q_0 = \lfloor w_d \rfloor = \lfloor \sqrt{d} \rfloor = a,$$

$$w_d = [a, \ell_1, \ell_2, \ell_3, \dots, \ell_3, \ell_2, \ell_1, 2a],$$

$$T_d = 2aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \text{ ve } U_d = 2Q_{k_d}. \quad (4.3)$$

Q_i tam sayıları; $Q_0 = 0, Q_1 = 1$ olmak üzere $\forall i > 1$ için

$$Q_i = \ell_{i-1}Q_{i-1} + Q_{i-2} \quad (4.4)$$

rekürans bağıntısı yardımıyla belirlenir.

Aşağıda verilen teorem, Azuhata ve Tomita'nın yukarıda bahsedilen çalışmaları kullanılarak elde edilmiş, bu teze ait orijinal bir bulgu olup, $d \equiv 1 \pmod{4}$ iken tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımında periyodik kısmın ilk terimi hakkında önemli bir kriter vermektedir. Bu kriter, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ϵ_d temel biriminin katsayıları olan T_d ve U_d tam sayıları ve bunlara bağlı olarak ifade edilen n_d Yokoi invaryantı ile ilgili yeni sınırlar ve yeni gerek ve yeter koşullar veren Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3'ün ispatlarında önemli bir rol oynamaktadır.

Teorem 4.1.1. $0 < b \leq 2a$ sağlayan a ve b tam sayıları için $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ bir pozitif kare çarpansız tam sayı olsun. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin $w_d = \frac{1+\sqrt{d}}{2}$ tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımının periyodu k_d ile gösterilsin. Her $k_d > 1$ için aşağıdakiler sağlanır [29]:

(i) a tek sayı $\Rightarrow \ell_1 \neq 1$ yani $\ell_1 \geq 2$,

(ii) a çift sayı $\Rightarrow \ell_1 = 1$.

Kanıt. Bu teoremin ispatında Bölüm 3.3'de verilen D_β^α kümelerinden yararlanılmıştır. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ise $d \in D_0^1 \cup D_4^5 \cup D_1^1 \cup D_1^5 \cup D_5^5 \cup D_5^1$ olur.

(i) a tek sayı olsun. O halde $d \in D_0^1 \cup D_4^5$ ve $q_0 = (a+1)/2$ dir. q_0 değeri Lemma 3.2.5'de

verilen denklemlerde yazıldığında

$$r_0 = r_1 = a - 2q_0 + 1 = 0$$

$$c_0 = 2$$

$$c_1 = c_{-1} = (b + 2ar_0 - r_0^2)/c_0 = b/2$$

$$\ell_0 = 2q_0 - 1 = a$$

elde edilir. Öncelikle $d \in D_0^1 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m, a \equiv 1 \pmod{2}, 0 < 4m < a\}$ olması durumunu ele alalım. Şu halde $b = 8m$ ve $c_{-1} = c_1 = 4m$ olur. (3.6) denkleminde $i = 1$ alınırsa $2a - r_1 = c_1\ell_1 + r_2$ ifadesinden

$$r_2 = 2a - r_1 - c_1\ell_1 = 2a - 4m\ell_1$$

bulunur. Elde edilen değerler (3.8)'de $i = 1$ için bulunan $0 \leq r_2 < c_1$ eşitsizliğinde yerine yazılarak $a < 2m(1 + \ell_1)$ olduğu görülür. Diğer taraftan $d \in D_0^1$ olduğundan $0 < 4m < a$ ve dolayısıyla

$$0 < 4m < a < 2m(1 + \ell_1)$$

bulunur. Son eşitsizlikte $\ell_1 = 1$ olması durumunda $0 < 4m < a < 4m$ çelişkisi elde edileceğinden $\ell_1 \neq 1$ olmak zorundadır.

Şimdi $d \in D_4^5 = \{d \in D \mid d = a^2 + 8m + 4, a \equiv 1 \pmod{2}, 0 \leq 4m < a - 2\}$ durumunu inceleyelim. Şu halde $b = 8m + 4$ ve $c_{-1} = c_1 = 4m + 2$ olur. (3.6) denkleminde $i = 1$ alınırsa

$$r_2 = 2a - r_1 - c_1\ell_1 = 2a - (4m + 2)\ell_1$$

elde edilir. Ayrıca $0 \leq r_2 < c_1$ eşitsizliğinden

$$0 \leq 2a - (4m + 2)\ell_1 < 4m + 2$$

ve dolayısıyla

$$a - 2 < 2m + 2m\ell_1 + \ell_1 - 1$$

bulunur. Diğer taraftan $d \in D_4^5$ olduğundan $0 \leq 4m < a - 2$ dir. Böylece

$$4m < a - 2 < 2m + 2m\ell_1 + \ell_1 - 1$$

ve

$$2m < 2m\ell_1 + \ell_1 - 1$$

sağlanır. $\ell_1 = 1$ olması durumunda $2m < 2m$ çelişkisi elde edileceğinden $\ell_1 \neq 1$ dir. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlanır.

(ii) a 'nın çift sayı olduğunu kabul edelim. O halde $d \in D_1^1 \cup D_1^5 \cup D_5^5 \cup D_5^1$ olur. $q_0 = a/2$ olduğundan ve Lemma 3.2.5'den

$$r_0 = r_1 = a - 2q_0 + 1 = 1$$

$$c_0 = 2$$

$$c_1 = c_{-1} = (b + 2ar_0 - r_0^2)/c_0 = (b + 2a - 1)/2$$

$$\ell_0 = 2q_0 - 1 = a - 1$$

elde edilir. Öncelikle $d \in D_1^1 \cup D_1^5$ olması durumunu ele alalım. Şu halde $b = 8m + 1$ ($m \geq 0$) ve $c_{-1} = c_1 = 4m + a$ olur. (3.6) denkleminde $i = 1$ için

$$r_2 = 2a - r_1 - c_1\ell_1 = 2a - 1 - (4m + a)\ell_1$$

olduğundan

$$a(2 - \ell_1) = 4m\ell_1 + r_2 + 1$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı pozitif olduğundan $2 > \ell_1$ olacağı açıktır. Bu durumda $\ell_1 = 1$ olmak zorundadır. Şimdi de $d \in D_5^5 \cup D_5^1$ durumunu inceleyelim. Bu durumda $b = 8m + 5$ ($m \geq 0$) dir ve $c_{-1} = c_1 = 4m + a + 2$ olur. Benzer şekilde

$$r_2 = 2a - r_1 - c_1\ell_1 = 2a - 1 - (4m + a + 2)\ell_1$$

ve

$$a(2 - \ell_1) = 4m\ell_1 + 2\ell_1 + r_2 + 1 = 2(2m + 1)\ell_1 + r_2 + 1$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı pozitif olduğundan $2 > \ell_1$ olacağı açıktır. Dolayısıyla $\ell_1 = 1$ olmak zorundadır. Böylece teoremin ispatı tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.1 kullanılarak Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3'de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ε_d ile gösterilen temel birimin katsayıları U_d ve T_d için bazı kriterler elde edilmiştir. Aşağıda d, a ve k_d 'nin bazı durumları incelenmiştir. Bu durumların hepsinde Yokoi invariantı n_d sıfırdan farklı olduğundan Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3'ün ispatlarında bize kolaylık sağlayacaktır.

NOT 1. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek olsun. $k_d = 1$ ise $w_d = [\frac{a+1}{2}, \bar{a}]$ dir. Ayrıca

$$U_d = Q_{k_d} = Q_1 = 1$$

$$T_d = aQ_1 + 2Q_0 = a$$

olduğundan $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = a \neq 0$ olur.

NOT 2. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a çift olsun. O halde Teorem 4.1.1'den $\ell_1 = 1$ dir.

- $k_d = 1$ ise $w_d = [\frac{a}{2}, \overline{a-1}]$ biçimindedir. Ayrıca

$$U_d = Q_1 = 1$$

$$T_d = (a-1)Q_1 + 2Q_0 = a-1$$

olduğundan $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = a-1$ bulunur. a çift olduğundan $n_d \neq 0$ olur.

- $k_d = 2$ ise $w_d = [\frac{a}{2}, \overline{1, a-1}]$ biçimindedir. Ayrıca

$$U_d = Q_2 = \ell_1 Q_1 + Q_0 = 1$$

$$T_d = (a-1)Q_2 + 2Q_1 = a+1$$

olduğundan $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = a+1 \neq 0$ bulunur.

- $k_d = 3$ ise $w_d = [\frac{a}{2}, \overline{1, 1, a-1}]$ biçimindedir. Ayrıca

$$Q_2 = \ell_1 Q_1 + Q_0 = 1$$

$$U_d = Q_3 = \ell_2 Q_2 + Q_1 = 2$$

$$T_d = (a-1)Q_3 + 2Q_2 = 2(a-1) + 2 = 2a$$

olduğundan $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = \frac{a}{2} \neq 0$ bulunur.

NOT 3. $d = a^2 + b \equiv 2, 3 \pmod{4}$ olsun. $k_d = 1$ ise $w_d = [a, \overline{2a}]$ dir. Ayrıca

$$U_d = 2Q_1 = 2$$

$$T_d = 2aQ_1 + 2Q_0 = 2a$$

olduğundan $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = a \neq 0$ bulunur.

Teorem 4.1.2. $0 < b \leq 2a$ sağlayan a ve b tam sayıları için $d = a^2 + b$ bir pozitif kare çarpansız tam sayı olsun. $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin w_d tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımının periyodu k_d ile gösterilsin. Her $k_d \geq 1$ için

$$n_d = 0 \Leftrightarrow U_d > a$$

ifadesi gerçekleşir [29].

Kanıt.

Durum I. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek olsun. $n_d = 0$ yani $U_d^2 - T_d > 0$ olduğunu varsayalım. a tek olduğundan $q_0 = (a+1)/2$ dir ve (4.1)'den

$$U_d^2 - T_d = Q_{k_d}^2 - aQ_{k_d} - 2Q_{k_d-1} = Q_{k_d}(Q_{k_d} - a) - 2Q_{k_d-1}$$

elde edilir. Bu durumda $U_d^2 - T_d > 0$ varsayımından $U_d = Q_{k_d} > a$ olmak zorundadır.

Tersine $U_d > a$ olduğunu varsayalım. $k_d = 1$ ise $U_d = Q_1 = 1$ olduğundan varsayım gereği

$1 > a$ olması gerekir. Bu ise mümkün değildir. Şimdi $k_d = 2$ durumunu inceleyelim.

$$U_d = Q_2 = \ell_1 Q_1 + Q_0 = \ell_1$$

$$T_d = aQ_2 + 2Q_1 = a\ell_1 + 2$$

ve dolayısıyla

$$U_d^2 - T_d = \ell_1^2 - a\ell_1 - 2 = \ell_1(\ell_1 - a) - 2$$

elde edilir. $U_d = \ell_1 > a$ olduğundan $\ell_1 = 2, a = 1$ durumu hariç diğer tüm durumlar için $U_d^2 - T_d > 0$ yani $n_d = 0$ dır. $\ell_1 = 2, a = 1$ iken $w_d = [1, \overline{2}, 1] = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ bulunur. Bu ise $d = 3$ olması demektir fakat $3 \not\equiv 1 \pmod{4}$ olduğundan göz ardı edilir. Böylece $k_d = 2$ için $U_d > a$ ise $n_d = 0$ olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi sırasıyla (4.4), (3.14) ve (3.10) denklemlerinde $i = k_d - 1 (> 1)$ alalım:

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2}$$

$$\ell_{k_d-1} = q_{k_d-1}$$

$$\ell_{k_d-1} = \ell_{k_d-k_d+1} = \ell_1$$

elde edilir. a tek sayı olduğundan Teorem 4.1.1'e göre $\ell_1 \geq 2$ dir. Böylece

$$Q_{k_d} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq 2Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2}$$

ve $k_d > 2$ için $Q_{k_d-2} > 0$ olduğundan $Q_{k_d} > 2Q_{k_d-1}$ elde edilir. Ayrıca $Q_{k_d} = U_d > a$ varsayımından

$$Q_{k_d}(Q_{k_d} - a) \geq Q_{k_d}$$

olur. Dolayısıyla

$$Q_{k_d}(Q_{k_d} - a) > 2Q_{k_d-1}$$

ve böylece (4.1)'deki katsayılar yardımıyla

$$U_d^2 - T_d = Q_{k_d}^2 - aQ_{k_d} - 2Q_{k_d-1} > 0$$

sağlanır. Sonuç olarak $n_d = 0$ elde edilir.

Durum II. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a çift olsun. a çift olduğundan $q_0 = a/2$ dir ve Teorem 4.1.1'den $\ell_1 = 1$ dir. $n_d = 0$ yani $U_d^2 - T_d > 0$ olsun. NOT 2'de $k_d = 1, 2, 3$ için $n_d \neq 0$ olduğu gösterilmiştir. O halde $k_d > 3$ olduğunu varsayalım. (4.4) denkleminde sırasıyla $i = k_d$ ve $i = k_d - 1$ alınırsa

$$Q_{k_d} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2}$$

$$Q_{k_d-1} = q_{k_d-2} Q_{k_d-2} + Q_{k_d-3} = \ell_2 Q_{k_d-2} + Q_{k_d-3}$$

elde edilir. Bu durumda $\ell_2 \geq 1$ ve $k_d > 3$ için $Q_{k_d-2} > 0$, $Q_{k_d-3} > 0$ olduğundan $Q_{k_d} > Q_{k_d-1} > Q_{k_d-2}$ ve dolayısıyla $Q_{k_d-2} - Q_{k_d-1} < 0$ bulunur. (4.2)'de verilen temel birimin katsayıları $U_d^2 - T_d > 0$ eşitsizliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} U_d^2 - T_d &= Q_{k_d}^2 - (a-1)Q_{k_d} - 2Q_{k_d-1} \\ &= Q_{k_d}(Q_{k_d} - a) + Q_{k_d} - 2Q_{k_d-1} \\ &= Q_{k_d}(Q_{k_d} - a) + Q_{k_d-2} - Q_{k_d-1} > 0 \end{aligned}$$

sonucu elde edilir. Böylece $Q_{k_d-2} - Q_{k_d-1} < 0$ olduğundan $U_d = Q_{k_d} > a$ olmak zorundadır.

Tersine $U_d > a$ olsun. $U_d > a+1$ ve $U_d = a+1$ için ayrı ayrı inceyerek $n_d = 0$ olduğunu gösterelim. $Q_{k_d} = U_d > a+1$ ise $Q_{k_d} - a + 1 > 2$ yazılabilir ve eşitsizliğin her iki tarafı Q_{k_d} ile çarpılırsa

$$(Q_{k_d} - a + 1)Q_{k_d} > 2Q_{k_d}$$

sağlanır. Ayrıca $Q_{k_d} \geq Q_{k_d-1}$ olduğundan

$$(Q_{k_d} - a + 1)Q_{k_d} > 2Q_{k_d-1}$$

elde edilir. Böylece (4.2)'den

$$U_d^2 - T_d = Q_{k_d}^2 - (a-1)Q_{k_d} - 2Q_{k_d-1} > 0$$

yani $n_d = 0$ elde edilir. Şimdi $U_d = Q_{k_d} = a + 1$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$T_d = (a - 1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1} = a^2 - 1 + 2Q_{k_d-1}$$

ve

$$U_d^2 - T_d = (a + 1)^2 - a^2 + 1 - 2Q_{k_d-1} = 2a + 2 - 2Q_{k_d-1}$$

yazılabilir. $Q_{k_d} = Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2}$ olduğundan $a + 1 = Q_{k_d} > Q_{k_d-1}$ dir ve

$$U_d^2 - T_d = 2a + 2 - 2Q_{k_d-1} > 2Q_{k_d-1} - 2Q_{k_d-1} = 0$$

yani $n_d = 0$ elde edilir.

Durum III. $d = a^2 + b \equiv 2, 3 \pmod{4}$ için inceleyelim. $n_d = 0$ olduğunu kabul edelim. (4.3)'teki temel birimin katsayıları kullanılarak

$$U_d^2 - T_d = 4Q_{k_d}^2 - 2aQ_{k_d} - 2Q_{k_d-1} = 2Q_{k_d}(2Q_{k_d} - a) - 2Q_{k_d-1} > 0$$

elde edilir. Bu durumda (4.4)'den $Q_i \geq 0$ ($i \geq 0$) olduğundan $2Q_{k_d} - a > 0$ dolayısıyla $2Q_{k_d} = U_d > a$ olmak zorundadır.

Tersine $U_d > a$ olduğunu varsayalım. O halde $2Q_{k_d} - a \geq 1$ yazılabilir. $Q_{k_d} \geq 1$ olduğundan

$$2Q_{k_d}(2Q_{k_d} - a) \geq 2Q_{k_d}$$

elde edilir. Şimdi bir istisna ile $Q_{k_d} > Q_{k_d-1}$ olduğunu gösterelim. $k_d = 1$ için $U_d = Q_1 = 1$ olduğundan $U_d > a$ varsayımı gereği $1 > a$ olması gerekir. Bu ise mümkün değildir. $k_d = 2$ olsun.

$$Q_{k_d} = Q_2 = q_1Q_1 + Q_0 = q_1 \geq 1 \text{ ve } Q_{k_d-1} = Q_1 = 1$$

olduğundan $q_1 = 1$ iken $Q_{k_d} = Q_{k_d-1} = 1$, $q_1 > 1$ iken $Q_{k_d} > Q_{k_d-1}$ elde edilir. $k_d > 2$ ise $Q_{k_d-2} > 0$ ve dolayısıyla

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} > Q_{k_d-1}$$

sağlanır. Böylece $k_d = 2$ ve $q_1 = 1$ olması durumu hariç $Q_{k_d} > Q_{k_d-1}$ olduğu gösterilmiştir. $k_d = 2$ ve $q_1 = 1$ sağlayan tam sayıyı bulalım. Bu durumda $Q_{k_d} = Q_2 = q_1 = 1$ eşitliği gerçekleşir ve varsayım gereği $U_d = 2Q_{k_d} > a$ olduğundan $a = 1$ olmak zorundadır. O halde $k_d = 2, q_1 = 1, a = 1$ şartlarını sağlayan cismin tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımı

$$w_d = [1, \overline{1, 2}] = \sqrt{3}$$

biçiminde olup $d = 3$ tür. Sonuç olarak $d = 3$ hariç

$$2Q_{k_d}(2Q_{k_d} - a) \geq 2Q_{k_d} > 2Q_{k_d-1}$$

ve böylece

$$2Q_{k_d}(2Q_{k_d} - a) - 2Q_{k_d-1} > 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $U_d^2 - T_d > 0$ yani $n_d = 0$ sağlanır ve ispat tamamlanır. $\square$

Elde edilen bu orijinal teoremlerin doğruluğunu teyit etmek amacıyla Mathematica Programı kullanılarak kod yazılmıştır ve böylece $d < 10^7$ sağlayan tüm d değerleri için bu çalışmada verilmiş olan teoremler doğrulanmıştır. Yazılan program kodu ve bazı d değerlerine ait parametreler Ekler bölümünde verilmiştir.

Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.2 kullanarak $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi olan ε_d ifadesini belirleyen T_d katsayısı için aşağıdaki sınırlar elde edilmiştir.

Teorem 4.1.3. $0 < b \leq 2a$ sağlayan a ve b tam sayıları için $d = a^2 + b$ bir pozitif kare çarpansız tam sayı olsun. $d \neq 3$ için aşağıdakiler sağlanır:

$$(i) \quad n_d = 0 \Rightarrow T_d > a^2 + a$$

$$(ii) \quad n_d \neq 0 \Rightarrow T_d < a^2 + a$$

$$(iii) \quad T_d \neq a^2 + a$$

Kanıt. (i) $n_d = 0$ ise Teorem 4.1.2'den $Q_{k_d} \geq a + 1$ yazılabilir. 3 ayrı durum için $T_d > a^2 + a$ olduğunu gösterelim:

Durum I. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek olsun.

Eğer $k_d = 1$ ise $U_d = Q_1 = 1$ dir. Dolayısıyla $U_d = 1 \geq a + 1$ çelişkisi elde edilir. O halde $k_d \geq 2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Q_{k_d-1} > 0$ dir. Böylece (4.1)'den

$$T_d = aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \geq a(a+1) + 2Q_{k_d-1} > a^2 + a$$

elde edilir.

Durum II. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a çift olsun.

NOT 2'de $k_d = 1, 2, 3$ için her zaman $n_d \neq 0$ olduğu gösterilmiştir. O halde $k_d \geq 4$ olduğunu kabul edelim. (4.2)'den

$$T_d = (a-1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \geq (a-1)(a+1) + 2Q_{k_d-1} = a^2 - 1 + 2Q_{k_d-1}$$

olur. Şimdi $2Q_{k_d-1} - 1 > a$ olduğunu gösterelim: (3.14) ve (3.10)'dan $q_{k_d-1} = \ell_{k_d-1} = \ell_1$ ve Teorem 4.1.1'den $\ell_1 = 1$ dir. Ayrıca $k_d \geq 4$ için $Q_{k_d-1} > Q_{k_d-2}$ olduğundan

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} < 2Q_{k_d-1}$$

sağlanır. Böylece $Q_{k_d} \geq a+1$ olduğundan $2Q_{k_d-1} - 1 > a$ elde edilir. Dolayısıyla

$$T_d \geq a^2 - 1 + 2Q_{k_d-1} > a^2 + a$$

bulunur.

Durum III. $d = a^2 + b \equiv 2, 3 \pmod{4}$ olsun.

Benzer şekilde $k_d = 1$ için $U_d = Q_1 = 1 > a$ çelişkisi elde edilir. $k_d \geq 2$ ise $Q_{k_d-1} > 0$ olduğundan

$$T_d = aQ_{k_d} + Q_{k_d-1} \geq a(a+1) + Q_{k_d-1} > a^2 + a$$

elde edilir. Böylece teoremin ilk kısmı ispatlanmış olur.

(ii) $n_d \neq 0$ ise Teorem 4.1.2'den $U_d \leq a$ dır. 3 durum için $T_d < a^2 + a$ olduğunu gösterelim:

Durum I. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek olsun.

Eğer $k_d = 1$ ise $T_d = aQ_1 + 2Q_0 = a$ olduğundan $T_d < a^2 + a$ olduğu aşıkardır. $k_d = 2$ ise $U_d = Q_2 = q_1Q_1 + Q_0 = \ell_1$ dir. Teorem 4.1.1'den $2 \leq \ell_1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca varsayım gereği $U_d = \ell_1 \leq a$ olduğundan ve a tek olduğundan $2 < a$ yazılabilir. O halde

$$T_d = aQ_2 + 2Q_1 = a\ell_1 + 2 \leq a^2 + 2 < a^2 + a$$

elde edilir. Şimdi $k_d \geq 3$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Q_{k_d-2} > 0$ dır ve dolayısıyla

$$U_d = Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = \ell_1Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq 2Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} > 2Q_{k_d-1}$$

olur. Ayrıca $U_d \leq a$ varsayımından $2Q_{k_d} < a$ elde edilir. Böylece

$$T_d = aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \leq a^2 + 2Q_{k_d-1} < a^2 + a$$

sağlanır.

Durum II. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a çift olsun.

Eğer $k_d = 1$ ise $T_d = (a-1)Q_1 + 2Q_0 = a-1$ olduğundan $T_d < a^2 + a$ olduğu aşıkardır. $k_d = 2$ ise $T_d = (a-1)Q_2 + 2Q_1 = (a-1)\ell_1 + 2 = a+1 < a^2 + a$ elde edilir. $k_d \geq 3$ için $Q_{k_d-2} > 0$ olduğundan

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = \ell_1Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} > Q_{k_d-1}$$

ve $U_d \leq a$ varsayımından $Q_{k_d-1} < a$ elde edilir. Böylece

$$T_d = (a-1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1} \leq (a-1)a + 2Q_{k_d-1} < a^2 + a$$

sağlanır.

Durum III. $d = a^2 + b \equiv 2, 3 \pmod{4}$ olsun.

Eğer $k_d = 1$ ise $T_d = aQ_1 + Q_0 = a$ olduğundan $T_d < a^2 + a$ olduğu aşıkardır. $k_d = 2$ ise $U_d = Q_2 = q_1Q_1 + Q_0 = \ell_1$ dir ve $U_d \leq a$ varsayımından $\ell_1 \leq a$ elde edilir. Böylece

$$T_d = aQ_2 + Q_1 = a\ell_1 + 1 \leq a^2 + 1$$

bulunur. O halde $a = 1$ hariç $T_d < a^2 + a$ dır. $a = 1$ durumunda ise $U_d = \ell_1 \leq a$ olduğundan

$\ell_1 = 1$ olmak zorundadır. Şimdi $a = 1, \ell_1 = 1, k_d = 2$ ve $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ olan sayıyı bulalım:

$$w_d = \sqrt{d} = [1, \overline{1, 2}]$$

olacağından $d = 3$ tür. Sonuç olarak $d = 3$ hariç $T_d < a^2 + a$ elde edilir. $k_d \geq 3$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Q_{k_d-2} > 0$ dır ve $\ell_1 \geq 1$ olduğundan

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} > Q_{k_d-1}$$

bulunur. Ayrıca $U_d \leq a$ varsayımından $Q_{k_d-1} < a$ elde edilir. Böylece

$$T_d = aQ_{k_d} + Q_{k_d-1} < a^2 + a$$

sağlanır.

(iii) Şimdi $T_d \neq a^2 + a$ olduğunu gösterelim:

Durum I. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek olsun.

$k_d = 1$ için $T_d = aQ_1 + 2Q_0 = a \neq a^2 + a$ olduğu açıktır. $k_d \geq 2$ olsun. $T_d = aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1} = a^2 + a$ olduğunu varsayalım. O halde

$$2Q_{k_d-1} = a^2 + a - aQ_{k_d} = a(a + 1 - Q_{k_d})$$

gerçeklenir ve $Q_{k_d-1} > 0$ olduğundan $a + 1 - Q_{k_d} > 0$ olmak zorundadır. Ayrıca a böler $2Q_{k_d-1}$ ve a tek olduğundan $2Q_{k_d-1} = 2a\lambda$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ elemanı vardır. O halde

$$a + 1 > Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = a\lambda\ell_1 + Q_{k_d-2}$$

sağlanır. Ayrıca $\ell_1 \geq 2$ ve $\lambda \geq 1$ olduğundan

$$a + 1 > 2a + Q_{k_d-2} \geq 2a$$

dolayısıyla $a + 1 > 2a$ çelişkisi elde edilir. O halde $T_d \neq a^2 + a$ dir.

Durum II. $d = a^2 + b \equiv 1 \pmod{4}$ ve a çift olsun.

$k_d = 1$ için $T_d = (a - 1)Q_1 + 2Q_0 = a - 1 \neq a^2 + a$ dir. $k_d = 2$ için $T_d = (a - 1)Q_2 + 2Q_1 =$

$a+1$ ve a çift olduğundan $T_d \neq a^2 + a$ olur. $k_d \geq 3$ olsun. $T_d = (a-1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1} = a^2 + a$ olduğunu varsayalım. O halde Teorem 4.1.1'den $\ell_1 = 1$ olduğundan

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2}$$

dolayısıyla

$$T_d = aQ_{k_d} - Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1} = aQ_{k_d} + Q_{k_d-1} - Q_{k_d-2} = a^2 + a$$

bulunur. Buradan

$$Q_{k_d-1} - Q_{k_d-2} = a(a+1 - Q_{k_d})$$

elde edilir. $k_d \geq 3$ için $Q_{k_d-1} \geq Q_{k_d-2}$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sol tarafı sıfıra eşit veya sıfırdan büyüktür. Bu durumda $a+1 \geq Q_{k_d}$ dır. Ayrıca $k_d \geq 3$ için $Q_{k_d-2} > 0$ olduğundan

$$Q_{k_d} = Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} > Q_{k_d-1}$$

sağlanır. Böylece

$$a+1 \geq Q_{k_d} > Q_{k_d-1}$$

ve

$$Q_{k_d-1} > Q_{k_d-1} - Q_{k_d-2}$$

olduğundan $a > Q_{k_d-1} - Q_{k_d-2}$ çelişkisi elde edilir. Bu durumda $T_d \neq a^2 + a$ olmak zorundadır.

Durum III. $d = a^2 + b \equiv 2, 3 \pmod{4}$ olsun.

$k_d = 1$ için $T_d = aQ_1 + Q_0 = a \neq a^2 + a$ olduğu açıktır. $k_d = 2$ olsun. $T_d = aQ_2 + Q_1 = a\ell_1 + 1 = a^2 + a$ olduğunu varsayalım. Bu durumda $1 = a(a+1 - \ell_1)$ dir. Bu ise sadece $a = 1, \ell_1 = 1$ iken mümkündür. $a = 1, \ell_1 = 1, k_d = 2$ ise

$$w_d = \sqrt{d} = [1, \overline{1, 2}]$$

yani $d = 3$ elde edilir. Dolayısıyla $d = 3$ hariç diğer tüm durumlar için $T_d \neq a^2 + a$ iken $d = 3$ için $T_d = a^2 + a$ dir. Şimdi $k_d \geq 3$ ve $T_d = aQ_{k_d} + Q_{k_d-1} = a^2 + a$ olduğunu varsayalım. O halde

$$Q_{k_d-1} = a(a + 1 - Q_{k_d})$$

sağlanır. $k_d \geq 3$ için $Q_{k_d-1} > 0$ olduğundan yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı da pozitif olmak zorundadır. O halde $Q_{k_d} < a + 1$ dir ve $Q_{k_d-1} = a\lambda$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{Z}^+$ elemanı vardır. Böylece

$$Q_{k_d} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = a\lambda + Q_{k_d-2} \geq a + Q_{k_d-2}$$

ve dolayısıyla $Q_{k_d} < a + 1$ olduğundan

$$Q_{k_d-2} < 1$$

çelişkisi elde edilir. O halde $T_d \neq a^2 + a$ dir. Sonuç olarak d ve k_d 'nin tüm durumları için ispat tamamlanır. $\square$

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 kullanılarak elde edilmiş olup $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ε_d temel birim için elde edilen yeni sınırları ifade etmektedir.

Teorem 4.1.4. $0 < b \leq 2a$ sağlayan a ve b tam sayıları için $d = a^2 + b$ bir pozitif kare çarpansız tam sayı olsun.

$$(i) \ n_d = 0 \Rightarrow \varepsilon_d > 2(a^2 + a)/\sigma$$

$$(ii) \ n_d \neq 0 \Rightarrow \varepsilon_d < 2(a^2 + a)/\sigma$$

Kanıt. (i) $n_d = 0$ ise Teorem 4.1.2'den $U_d \geq a + 1$ ve Teorem 4.1.3'den $T_d > a^2 + a$ dır. Ayrıca $a < \sqrt{d}$ olduğundan

$$d \equiv 1 \pmod{4} \text{ için } \varepsilon_d = \frac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2} > \frac{a^2 + a + (a+1)a}{2} = a^2 + a$$

$$d \equiv 2, 3 \pmod{4} \text{ için } \varepsilon_d = T_d + U_d\sqrt{d} > a^2 + a + (a+1)a = 2(a^2 + a)$$

elde edilir.

(ii) $n_d \neq 0$ ise Teorem 4.1.2'den $U_d \leq a$ ve Teorem 4.1.3'den $T_d < a^2 + a$ dır. Ayrıca $\sqrt{d} < a + 1$ olduğundan

$$d \equiv 1 \pmod{4} \text{ için } \varepsilon_d = \frac{T_d + U_d \sqrt{d}}{2} < \frac{a^2 + a + a(a+1)}{2} = a^2 + a$$

$$d \equiv 2, 3 \pmod{4} \text{ için } \varepsilon_d = T_d + U_d \sqrt{d} < a^2 + a + a(a+1) = 2(a^2 + a)$$

elde edilir.

d pozitif kare çarpansız tam sayı olduğundan $\sqrt{d} \notin \mathbb{Z}$ dolayısıyla $\varepsilon_d \notin \mathbb{Q}$ dur. Dolayısıyla $\varepsilon_d \neq 2(a^2 + a)/\sigma$ dır. Aslında temel birim kuadratik irrasyonel sayı olduğundan aşıkardır. $\square$

Bölüm 3.1'de $p \equiv 1 \pmod{4}$ asalı için (3.1)'de

$$\left| \frac{T_p}{U_p^2} - n_p \right| < \frac{1}{2}$$

biçiminde n_p invaryantı tanımlanmış ve $n_p \neq 0$ iken $\varepsilon_p < 2p$ olduğu Teorem 3.1.9'da verilmiştir. Bunun bir genelleştirmesi olarak tüm kare çarpansız d tam sayıları için (3.2)'de

$$B = \frac{\frac{2\hat{T}_d}{\hat{\sigma}} - N(\hat{\varepsilon}_d) - 1}{\hat{U}_d^2}$$

sınırı yardımıyla

$$\hat{n}_d = \begin{cases} \lfloor B \rfloor & ; B - \lfloor B \rfloor < 1/2 \\ \lfloor B \rfloor + 1 & ; B - \lfloor B \rfloor > 1/2 \end{cases}$$

biçimde $\hat{n}_d$ invaryantı tanımlanmış ve Sonuç 3.1.14'de $\hat{n}_d \neq 0$ iken $\varepsilon_d < 8d/\sigma^2$ olduğu gösterilmiştir. Bu bölümde ise n_d invaryantı $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor$ biçiminde ele alınarak Teorem 4.1.4'de $n_d \neq 0$ iken $\varepsilon_d < 2(a^2 + a)/\sigma$ olduğu gösterilmiştir.

Sonuç olarak $\varepsilon_d < 2(a^2 + a)/\sigma < 8d/\sigma^2$ olduğundan $n_d \neq 0$ iken $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi için Teorem 4.1.4'de daha iyi bir üst sınır elde edilmiştir.

4.2. SINIF SAYISI İLE İLGİLİ BULGULAR

Bu bölümde, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin sınıf sayısı ile ilgili elde edilen teoremlere yer verilmiştir. Bu teoremlerin ispatlarında, $L(1, \chi)$ Dirichlet L-fonksiyonu için Tatzawa'nın alt sınırı (Teorem 2.7.14) ve Hua'nın üst sınırı (Teorem 2.7.15) Dirichlet sınıf sayısı formülüne (Teorem 2.7.12) uygulanmıştır [39, 41, 64, 68]. Teorem 4.1.4'de ε_d temel birim için elde edilen yeni sınırlar sayesinde cismin sınıf sayısı için yeni ve daha iyi sonuçlar elde edilmiştir.

Lemma 4.2.1. $d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) pozitif kare çarpansız tam sayı ve $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin diskriminantı Δ olsun. $n_d \neq 0$ ise $\Delta \geq e^s$, $s \geq 11.2$ için olası bir istisna ile

$$h_d > \frac{0.3275}{s} \cdot \frac{\left(\frac{2}{\sigma}a\right)^{(s-2)/s}}{\log(a^2 + a)} \quad (4.5)$$

sağlanır.

Kanıt. Teorem 2.7.14'e göre $0 < c < \frac{1}{2}$ sağlayan herhangi bir c gerçel sayısı için cismin diskriminantı $\Delta \geq \max\{e^{1/c}, e^{11.2}\}$ ise olası bir istisna ile

$$L(1, \chi) > 0.655 \frac{c}{\Delta^c}$$

sağlanır. Eğer $s = 1/c$ alınır ve sınıf sayısı formülünde yerine yazılırsa

$$h_d = \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \log \varepsilon_d} L(1, \chi) > \frac{0.3275}{s} \cdot \frac{\Delta^{(s-2)/2s}}{\log \varepsilon_d}$$

elde edilir. $a < \sqrt{d}$ olduğundan $\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{d}/\sigma > 2a/\sigma$ sağlanır. Ayrıca Teorem 4.1.4'den $n_d \neq 0$ iken $\varepsilon_d < 2(a^2 + a)/\sigma$ olduğundan

$$\frac{1}{\log \varepsilon_d} > \frac{1}{\log(a^2 + a)}$$

ve

$$h_d > \frac{0.3275}{s} \cdot \frac{\left(\frac{2}{\sigma}a\right)^{(s-2)/s}}{\log(a^2 + a)}$$

bulunur. □

Teorem 4.2.2. $d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) pozitif kare çarpansız bir tam sayı olsun. $n_d \neq 0$ ise olası bir istisna ile aşağıdakiler sağlanır:

1. $d \equiv 1 \pmod{4}$ durumunda

- (a) $a > 585$ ise $h_d > 1$,
- (b) $a > 1562$ ise $h_d > 2$,
- (c) $a > 2709$ ise $h_d > 3$.

2. $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ durumunda

- (a) $a > 246$ ise $h_d > 1$,
- (b) $a > 678$ ise $h_d > 2$,
- (c) $a > 1195$ ise $h_d > 3$.

Kanıt. $f_{s,\sigma}(x)$ fonksiyonunu

$$f_{s,\sigma}(x) = \frac{\left(\frac{2}{\sigma}x\right)^{(s-2)/s}}{\log(x^2 + x)}$$

olarak tanımlayalım. $0.8 < (s-2)/s < 1$ olduğundan $f_{s,\sigma}(x)$, $[3, \infty)$ aralığında artandır. Diğer taraftan eğer $\Delta = 4d/\sigma^2 \geq e^s$ ise

$$a + 1 > \sqrt{d} \geq \sqrt{\frac{e^2 \sigma^2}{4}}$$

dolayısıyla

$$a > e^{s/2} \frac{\sigma}{2} - 1 \tag{4.6}$$

bulunur. $s \geq 11.2$ için $e^{s/2} \frac{\sigma}{2} - 1 \geq 3$ sağlanır. Böylece $f_{s,\sigma}(x)$ artan olduğundan

$$f_{s,\sigma}(a) > f_{s,\sigma}\left(e^{s/2} \cdot \frac{\sigma}{2} - 1\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 4.2.1'den

$$\begin{aligned}
 h_d &> \frac{0.3275}{s} \cdot \frac{\left(\frac{2}{\sigma}a\right)^{(s-2)/s}}{\log(a^2 + a)} \\
 &= \frac{0.3275}{s} \cdot f_{s,\sigma}(a) > \frac{0.3275}{s} \cdot f_{s,\sigma}\left(e^{s/2} \frac{\sigma}{2} - 1\right) \\
 &= \frac{0.3275}{s} \cdot \frac{\left(\frac{2}{\sigma}\left(e^{s/2} \frac{\sigma}{2} - 1\right)\right)^{\frac{s-2}{s}}}{\log\left(\left(e^{s/2} \frac{\sigma}{2} - 1\right)^2 + \left(e^{s/2} \frac{\sigma}{2} - 1\right)\right)}
 \end{aligned}$$

bulunur. O halde $n_d \neq 0$ sağlayan $a > e^{s/2} \cdot \left(\frac{\sigma}{2}\right) - 1$ ($s \geq 11.2$) için

$$d \equiv 1 \pmod{4} \text{ iken } h_d > \frac{0.3275}{s} \cdot \frac{\left(e^{s/2} - 1\right)^{(s-2)/s}}{\log\left(e^s - e^{s/2}\right)} \quad (4.7)$$

$$d \equiv 2, 3 \pmod{4} \text{ iken } h_d > \frac{0.3275}{s} \cdot \frac{\left(e^{s/2} - 2\right)^{(s-2)/s}}{\log\left(\frac{1}{4} \cdot (e^s - 2e^{s/2})\right)} \quad (4.8)$$

sağlanır. $d \equiv 1 \pmod{4}$ durumunda (4.7)'de $s = 12.75$ alınırsa $a > 585$ için $h_d > 1,0004$ bulunur. Benzer şekilde $s = 14.71$ ve $s = 15.81$ için istenen sonuçlar elde edilir. $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ durumunda ise (4.8)'de sırasıyla $s = 12.41, s = 14.43$ ve $s = 15.56$ için istenen sonuçlar elde edilir. $\square$

$n_d \neq 0$ sağlayan ve sınıf sayısı $h_d = 1$ olan pozitif kare çarpansız d tam sayıları ve bunlara karşılık gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin temel biriminin katsayıları, Yokoi invaryant değerleri, sınıf sayısı, tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımı ve periyodu Tablo 4.1'de listelenmiştir.

$n_d \neq 0$ iken ε_d temel birim için Teorem 4.1.4'de elde edilen üst sınırın, Yokoi'nin Teorem 3.1.6'da ve Mollin, Williams'ın Teorem 3.1.14'de elde ettikleri üst sınırdan daha iyi olduğu belirtilmişti. Dolayısıyla bu sınırlar kullanılarak sınıf sayısı için elde edilen alt sınırlar arasında Teorem 4.2.2 daha iyi bir alt sınır sağlamaktadır. Diğer taraftan, n_d ve m_d invaryantları cinsinden Teorem 3.1.23'de verilen alt sınırlar

$$(i) \ m_d \neq 0 \text{ ise olası bir istisna ile } h_d > \frac{0.3275 \cdot 4^{\delta_d(s-2)/2s} \cdot s^{-1} \cdot d^{(s-2)/2s}}{\log(m_d+1)d}$$

$$(ii) \ m_d = 0 \text{ (yani } n_d \neq 0) \text{ ise olası bir istisna ile } h_d > \frac{0.3275 \cdot 4^{\delta_d(s-2)/2s} \cdot s^{-1} \cdot d^{(s-2)/2s}}{\log(d/n_d)+1}$$

biçimindedir. Fakat cismin temel birimi sıklıkla şaşırtıcı biçimde büyük olabilmektedir. Örneğin, $d = 343513$ kare çarpansız tam sayı için $U_d > 10^{204}$ tür. Bu nedenle, n_d ve m_d

Tablo 4.1: $n_d \neq 0$ ve $h_d = 1$ olan pozitif kare çarpansız d tam sayıları.

d	a	T_d	U_d	n_d	m_d	h_d	k_d	w_d nin sürekli kesre açılımı
3	1	4	2	1	1	1	2	$[1, \overline{1, 2}]$
5	2	1	1	1	1	1	1	$[1, \overline{1}]$
13	3	3	1	3	0	1	1	$[2, \overline{3}]$
17	4	8	2	2	0	1	3	$[2, \overline{1, 1, 3}]$
21	4	5	1	5	0	1	2	$[2, \overline{1, 3}]$
29	5	5	1	5	0	1	1	$[3, \overline{5}]$
37	6	12	2	3	0	1	3	$[3, \overline{1, 1, 5}]$
53	7	7	1	7	0	1	1	$[4, \overline{7}]$
61	7	39	5	1	0	1	3	$[4, \overline{2, 2, 7}]$
69	8	25	3	2	0	1	4	$[4, \overline{1, 1, 1, 7}]$
77	8	9	1	9	0	1	2	$[4, \overline{1, 7}]$
93	9	29	3	3	0	1	2	$[5, \overline{3, 9}]$
101	10	20	2	5	0	1	3	$[5, \overline{1, 1, 9}]$
149	12	61	5	2	0	1	5	$[6, \overline{1, 1, 1, 1, 11}]$
173	13	13	1	13	0	1	1	$[7, \overline{13}]$
197	14	28	2	7	0	1	3	$[7, \overline{1, 1, 13}]$
213	14	73	5	2	0	1	4	$[7, \overline{1, 3, 1, 13}]$
237	15	77	5	3	0	1	2	$[8, \overline{5, 15}]$
269	16	164	10	1	0	1	5	$[8, \overline{1, 2, 2, 1, 15}]$
293	17	17	1	17	0	1	1	$[9, \overline{17}]$
317	17	89	5	3	0	1	3	$[9, \overline{2, 2, 17}]$
341	18	277	15	1	0	1	6	$[9, \overline{1, 2, 1, 2, 1, 17}]$
413	20	61	3	6	0	1	4	$[10, \overline{1, 1, 1, 19}]$
437	20	21	1	21	0	1	2	$[10, \overline{1, 19}]$
453	21	149	7	3	0	1	2	$[11, \overline{7, 21}]$
461	21	365	17	1	0	1	3	$[11, \overline{4, 4, 21}]$
557	23	236	10	2	0	1	3	$[12, \overline{3, 3, 23}]$
677	26	52	2	13	0	1	3	$[13, \overline{1, 1, 25}]$
717	26	241	9	2	0	1	4	$[13, \overline{1, 7, 1, 25}]$
773	27	139	5	5	0	1	3	$[14, \overline{2, 2, 27}]$
797	28	367	13	2	0	1	7	$[14, \overline{1, 1, 1, 1, 1, 1, 27}]$
1 013	31	923	29	1	0	1	5	$[16, \overline{2, 2, 2, 2, 31}]$
1 077	32	361	11	2	0	1	4	$[16, \overline{1, 9, 1, 31}]$
1 133	33	101	3	11	0	1	2	$[17, \overline{3, 33}]$
1 253	35	177	5	7	0	1	2	$[18, \overline{5, 35}]$
1 757	41	1 006	24	1	0	1	4	$[21, \overline{2, 5, 2, 41}]$
1 877	43	1 603	37	1	0	1	3	$[22, \overline{6, 6, 43}]$
2 477	49	647	13	3	0	1	5	$[25, \overline{2, 1, 1, 2, 49}]$
3 533	59	2 437	41	1	0	1	5	$[30, \overline{4, 1, 1, 4, 59}]$

invariantlarını hesaplamak ve bu yolla sınıf sayısı için yukarıdaki formülleri hesaplamak oldukça zordur. Oysa ki Teorem 4.2.2'ye göre $d = 343513 = 586^2 + 117 \equiv 1 \pmod{4}$ ve

$a = 586$ olduğundan $h_d > 1$ ($h_d \neq 1$) elde edilir.

$n_d = 0$ iken ε_d temel birim için Teorem 4.1.4'de elde edilen alt sınır ve $L(1, \chi)$ fonksiyonu için Hua'nın üst sınırı kullanılarak h_d sınıf sayısı ile ilgili aşağıdaki üst sınır elde edilmiştir.

Teorem 4.2.3. $d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) pozitif kare çarpansız bir tam sayı olsun. $n_d = 0$ ise $a \geq 20/\sigma$ için

$$h_d < \frac{a+1}{\sigma}$$

sağlanır.

Kanıt. Sınıf sayısı formülü ve Hua'nın üst sınırından

$$h_d < \frac{\sqrt{\Delta}}{2 \log \varepsilon_d} \left(\frac{\log \Delta}{2} + 1 \right)$$

olduğu bilinmektedir. $\sqrt{d} < a+1$ ve dolayısıyla $\sqrt{\Delta} < 2(a+1)/\sigma$ olduğundan

$$\frac{\log \Delta}{2} = \log \sqrt{\Delta} < \log (2(a+1)/\sigma)$$

bulunur. Ayrıca Teorem 4.1.4'den $n_d = 0$ ise $\varepsilon_d > a^2 + a$ dir. Böylece

$$h_d < \frac{2}{\sigma}(a+1) \cdot \frac{\log(a+1) + \log \frac{2}{\sigma} + 1}{2 \log(a^2 + a)}$$

sağlanır. Şimdi

$$f_\sigma(x) = \frac{\log(x+1) + \log \frac{2}{\sigma} + 1}{\log(x+1) + \log x}.$$

tanımlayalım. $x \geq 1$ için $f_\sigma(x)$ azalan fonksiyondur ve $x \geq 20/\sigma$ için $f_\sigma(x) \leq 1$ dir. Bu durumda $a \geq 20/\sigma$ için

$$h_d < \frac{a+1}{\sigma} \cdot f_\sigma(a) \leq \frac{a+1}{\sigma}$$

elde edilir. □

Literatürde reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısı için üst sınır veren çeşitli teoremler

mevcuttur. Yokoi invariant değerleri ile sınıf sayısının hesaplanmasına yönelik yapılan çalışmalar incelendiğinde yukarıda verilen teoremin her zaman en iyi üst sınır olmadığı, fakat bazı durumlar için daha kullanışlı olduğu görülmüştür. Bu durum aşağıdaki iki örnekte karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

Örnek 4.2.4. $d = 157$ olsun. $157 = 12^2 + 13 \equiv (\text{mod } 4)$ olduğundan $a = 12$ dir. $\mathbb{Q}(\sqrt{157})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi ise $\varepsilon_d = \frac{213+17\sqrt{157}}{2}$ olup $T_d = 213$ ve $U_d = 17$ dir. Temel birimin normu ise

$$N(\varepsilon_d) = \frac{213+17\sqrt{157}}{2} \frac{213-17\sqrt{157}}{2} = \frac{213^2 - 17^2 \cdot 157}{4} = -1$$

dir. Bu durumda

$$n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor = 0 \text{ ve } m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor = 1$$

elde edilir. Şimdi Teorem 4.2.3, Teorem 3.1.20.(ii) ve Teorem 3.1.20.(iii) ile $\mathbb{Q}(\sqrt{157})$ cisminin sınıf sayısı için üst sınır bulalım.

1) $n_d = 0$ olduğundan Teorem 4.2.3'ü uygulayabiliriz. $d \equiv 1 (\text{mod } 4)$ için $\sigma = 2$ olduğu bilinmektedir. Teorem 4.2.3'e göre $a \geq 20/\sigma = 10$ olduğundan

$$h_d < \frac{a+1}{\sigma} = 6.5$$

bulunur. Bu durumda $\mathbb{Q}(\sqrt{157})$ cisminin sınıf sayısı $h_d = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olabilir.

2) $N(\varepsilon_d) = -1$ olduğundan Teorem 3.1.20.(ii)'ye göre

$$h_d < \frac{\frac{1}{4}\sqrt{d}(2+\log d)}{\log\left(\frac{d-4}{n_d+1}\right)} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{157}(2+\log 157)}{\log 153} \approx 6.01$$

bulunur. O halde $\mathbb{Q}(\sqrt{157})$ cisminin sınıf sayısı $h_d = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ olabilir.

3) $N(\varepsilon_d) = -1$ ve $m_d \neq 0$ olduğundan Teorem 3.1.20.(iii)'e göre

$$h_d < \frac{\frac{1}{4}\sqrt{d}(2+\log d)}{\log(dm_d)} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{157}(2+\log 157)}{\log 157} \approx 5.98$$

bulunur. Böylece $\mathbb{Q}(\sqrt{157})$ cisminin sınıf sayısı $h_d = 1, 2, 3, 4, 5$ olabilir.

Genel olarak cismin sınıf sayısı için Teorem 3.1.20.(iii) daha iyi bir üst sınır sağlamaktadır.

Ancak Teorem 4.2.3, $n_d = 0$ için uygulanabilir iken Teorem 3.1.20.(iii), hem $m_d \neq 0$ (yani $n_d = 0$) hem de $N(\varepsilon_d) = -1$ olduğu durumlarda uygulanabilir. Ayrıca temel birimin katsayılarının çok büyük olduğu durumlarda temel birimin normu ve n_d, m_d invaryant değerlerini hesaplamak zordur. Oysa ki, Teorem 4.2.3'ün ön şartı sadece $n_d = 0$ olmasıdır. Burada n_d 'yi hesaplamak yerine Teorem 4.1.2'ye göre sadece $U_d > a$ olup olmadığını kontrol etmek yeterlidir. Dolayısıyla Teorem 4.2.3'de ifade edilen üst sınır daha kullanışlıdır.

Örnek 4.2.5. $d = 2011$ için

$$T_d = 2 * 22903355954053525066202335319378237605968890$$

$$U_d = 2 * 510732021116138713675018566232201605320997$$

dir. Bu örnekte temel birimin normunu ve n_d, m_d invaryant değerlerini hesaplamak oldukça zordur. Bu nedenle 3.1.20.(ii) ve 3.1.20.(iii) kullanışlı değildir. Teorem 4.2.3'e göre ise aşağıdaki şekilde üst sınır kolayca hesaplanabilir.

$d = 2011 = 44^2 + 75 \equiv 1 \pmod{4}$ dir. $U_d > a = 44$ olduğundan Teorem 4.1.2'ye göre $n_d = 0$ dir. O halde Teorem 4.2.3'den

$$h_d < \frac{a+1}{\sigma} = \frac{45}{2} = 22.5$$

bulunur. Dolayısıyla $\mathbb{Q}(\sqrt{2011})$ cisminin sınıf sayısı $h_d \leq 22$ dir.

4.3. YOKOI İNVARYANTLARININ AAC SANISI İLE İLİŞKİSİ

Ankeny-Artin-Chowla Sanısı ve bu sanı ile ilgili literatürde yapılmış bazı çalışmalar Bölüm 3.4'de ele alınmıştır. Burada ise, Bölüm 4.1'de temel birim ve T_d, U_d katsayıları için elde edilen teoremler yardımıyla $U_d < d$ olması için Yokoi invaryantları cinsinden elde edilen kriterlere yer verilecektir.

Önerme 4.3.1. Herhangi bir pozitif kare çarpansız d tam sayısı için $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_d = (T_d + U_d\sqrt{d})/2$ olmak üzere eğer $n_d = \left\lfloor \frac{T_d}{U_d^2} \right\rfloor \neq 0$ ise $U_d < d$ dir. Özel olarak $d \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı ve $n_d \neq 0$ ise AAC Sanısı doğrudur.

Kanıt. Teorem 4.1.2'ye göre $n_d \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $U_d \leq a$ olmasıdır. Dolayısıyla $U_d < d$ olduğu aşikardır. □

Yokoi, $p \equiv 1 \pmod{4}$ asalı için (3.1)'de verilen n_p invaryatının sıfırdan farklı olması durumunda $U_p < p$ olduğunu yani AAC Sanısının sağlandığını göstermiştir (Teorem 3.1.7). Mollin ve Williams ise $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere (3.2)'de verilen $\hat{n}_d$ invaryantı için $\hat{n}_d \neq 0$ ise $\hat{U}_d < d$ olduğunu ispatlamıştır (Teorem 3.1.17). Yukarıda verilen sonuç daha basit bir ispat ile Mollin, Williams ve Yokoi'nin teoremlerini genelleştirir.

Bölüm 3.4'de Hashimoto tarafından tanımlanan $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümelerinden bahsedilmiş ve $p \equiv 1 \pmod{4}$ asalı için $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ ve $p \neq \min S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ ise $U_p < p$ olduğu ispatlanmıştır (Önerme 3.4.4). Aşağıda ise $S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ kümeleri ile Yokoi invaryantları arasında elde edilen bağlantı verilmiştir.

Önerme 4.3.2. $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olmak üzere eğer $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ ve p bu kümenin minimumu değil ise $n_p \neq 0$ dır. Dolayısıyla $U_p < p$ sağlanır.

Kanıt. Eğer $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ ve $p \neq \min S(k; a_1, a_2, \dots, a_{k'})$ ise Önerme 3.4.2'den $s > -\frac{q_{k-2}r_{k-2}}{q_{k-1}} + 1$ dir. O halde

$$q_{k-1}s + q_{k-2}r_{k-2} > q_{k-1}$$

ve

$$q_{k-1}^2s + q_{k-1}q_{k-2}r_{k-2} > q_{k-1}^2$$

sağlanır. Bu durumda Önerme 3.4.3'den

$$T_p = q_{k-1}^2s + q_{k-1}q_{k-2}r_{k-2} + 2q_{k-2} > q_{k-1}^2s + q_{k-1}q_{k-2}r_{k-2} > q_{k-1}^2 = U_p^2$$

elde edilir. Böylece $n_p = \left\lfloor \frac{T_p}{U_p^2} \right\rfloor \neq 0$ dır. Teorem 4.1.2'den $n_p \neq 0$ iken $U_p \leq a$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $U_p < p$ sağlanır. $\square$

Böylece Hashimoto'nun Önerme 3.4.4 ile verilen sonucu farklı bir yöntem ile ispatlanmış olur.

Peki $n_d = 0$ yani $m_d \neq 0$ ise $U_d < d$ hangi koşullarda sağlanır? Tezin bu bölümünde, $U_d < d$ olması durumu m_d Yokoi invaryantına bağlı olarak incelenmiştir. Eğer $(m_d + 1)^2 + m_d < d$ ise $U_d < d$ olduğu elde edilmiştir.

Lemma 4.3.3. $d \neq 2, 5$ olmak üzere $d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) pozitif kare çarpansız tamsayı olsun. d 'nin belirlediği $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_d = \frac{T_d + U_d\sqrt{d}}{2} > 1$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

$$m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor \leq U_d \leq T_d.$$

Kanıt. Öncelikle $U_d \leq T_d$ olduğunu gösterelim. i) $d \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek iken (4.1)'den $T_d = aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$, $U_d = Q_{k_d}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $a = 1$ ve $Q_{k_d-1} = 0$ durumu hariç $U_d < T_d$ olduğu aşikardır. $a = 1$ ve $Q_{k_d-1} = 0$ iken $k_d = 1$ olacağından $w_d = [1, \bar{1}] = (1 + \sqrt{5})/2$ elde edilir. Fakat $d = 5 = 2^2 + 1$ yani $a = 2$ olduğundan çelişki elde edilir. O halde $d \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek olan tüm d tam sayıları için $U_d \leq T_d$ dir.

ii) $d \equiv 1 \pmod{4}$ ve a çift iken (4.2)'den $T_d = (a-1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$, $U_d = Q_{k_d}$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $a = 2$ ve $Q_{k_d-1} = 0$ durumu hariç $U_d < T_d$ olduğu aşikardır. $a = 2$ ve $Q_{k_d-1} = 0$ iken $k_d = 1$ olacağından $w_d = [1, \bar{1}] = (1 + \sqrt{5})/2$ elde edilir. Dolayısıyla sadece $d = 5$ için $\varepsilon_d = (1 + \sqrt{5})/2$ olup $U_d = T_d$ sağlanır.

iii) $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ iken (4.3)'den $T_d = 2aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$ ve $U_d = 2Q_{k_d}$ olduğunu biliyoruz. Benzer şekilde $a = 1$ ve $Q_{k_d-1} = 0$ durumu hariç diğer tüm durumlar için $U_d < T_d$ olduğu aşikardır. $a = 1$ ve $Q_{k_d-1} = 0$ durumunda ise $k_d = 1$ yani $w_d = [1, \bar{2}] = \sqrt{2}$ dir. O halde sadece $d = 2$ için $\varepsilon_d = 1 + \sqrt{2}$ olup $U_d = T_d$ sağlanır.

Şimdi $m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor \leq U_d$ olduğunu gösterelim: $m_d = 0$ ise ispat açıktır. $m_d \in \mathbb{Z}^+$ olduğunu kabul edelim. O halde

$$m_d \leq \frac{U_d^2}{T_d} < m_d + 1$$

olduğundan

$$m_d T_d \leq U_d^2 < (m_d + 1) T_d$$

ve

$$0 \leq U_d^2 - m_d T_d < T_d$$

elde edilir. $U_d \leq m_d$ olsa $U_d^2 \leq m_d U_d$ olurdu ve $U_d < T_d$ eşitsizliğinden

$$U_d^2 \leq m_d U_d < m_d T_d$$

ve dolayısıyla $U_d^2 - m_d T_d < 0$ çelişkisi elde edilir. O halde $m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor < U_d$ olmak zorundadır. $\square$

$d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) bir pozitif kare çarpansız tamsayı olsun. Bu durumda

$$n_d = 0 \Leftrightarrow U_d > a$$

olduğunu biliyoruz. O halde şunu söyleyebiliriz:

$$m_d = 0 \text{ (yani } n_d \neq 0) \Rightarrow U_d < a + 1$$

Aşağıda ise

$$m_d = m \Rightarrow U_d < (m + 1)(a + 1)$$

olduğu gösterilmiştir.

Lemma 4.3.4. $d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) bir pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere

$$m_d = 1 \Rightarrow U_d < 2(a + 1)$$

gerçeklenir.

Kanıt. $m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor = 1$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$1 \leq \frac{U_d^2}{T_d} < 2 \Rightarrow T_d \leq U_d^2 < 2T_d \Rightarrow 0 < 2T_d - U_d^2$$

elde edilir. Şimdi 3 ayrı durum için inceleyelim:

i) $d \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek iken (4.1)'den $T_d = aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$, $U_d = Q_{k_d}$ ve Teorem 4.1.1'den

$\ell_1 \geq 2$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca (4.4)'den

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} > 2Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq 2Q_{k_d-1}$$

dir. Dolayısıyla $2Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ elde edilir. Böylece

$$2T_d - U_d^2 = 2aQ_{k_d} + 4Q_{k_d-1} - Q_{k_d}^2 + (2Q_{k_d} - 2Q_{k_d}) = Q_{k_d}(2a + 2 - Q_{k_d}) + 4Q_{k_d-1} - 2Q_{k_d}$$

sağlanır. $0 < 2T_d - U_d^2$ ve $4Q_{k_d-1} - 2Q_{k_d} \leq 0$ olduğundan $0 < 2a + 2 - Q_{k_d}$ olmak zorundadır. O halde $U_d = Q_{k_d} < 2a + 2$ dir.

ii) $d \equiv 1 \pmod{4}$ ve a çift iken (4.2)'den $T_d = (a-1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$, $U_d = Q_{k_d}$ ve Teorem 4.1.1'den $\ell_1 = 1$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca (4.4)'den

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq Q_{k_d-1}$$

dir. Dolayısıyla $Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ elde edilir. Böylece

$$2T_d - U_d^2 = (2a-2)Q_{k_d} + 4Q_{k_d-1} - Q_{k_d}^2 + (4Q_{k_d} - 4Q_{k_d}) = Q_{k_d}(2a + 2 - Q_{k_d}) + 4Q_{k_d-1} - 4Q_{k_d}$$

sağlanır. $0 < 2T_d - U_d^2$ ve $4Q_{k_d-1} - 4Q_{k_d} \leq 0$ olduğundan $0 < 2a + 2 - Q_{k_d}$ olmak zorundadır. O halde $U_d = Q_{k_d} < 2a + 2$ dir.

iii) $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ olsun. (4.3)'den $T_d = 2aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$, $U_d = 2Q_{k_d}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq Q_{k_d-1}$$

dir. Dolayısıyla $Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ elde edilir. Böylece

$$2T_d - U_d^2 = 4aQ_{k_d} + 4Q_{k_d-1} - 4Q_{k_d}^2 + (4Q_{k_d} - 4Q_{k_d}) = Q_{k_d}(4a + 4 - 4Q_{k_d}) + 4Q_{k_d-1} - 4Q_{k_d}$$

elde edilir. $k_d \geq 1$ olduğundan $Q_{k_d} \geq 1$ dir. Şimdi $4a + 4 - 4Q_{k_d}$ ve $4Q_{k_d-1} - 4Q_{k_d}$ nin aynı anda sıfır olamayacağını gösterelim: $Q_{k_d-1} = Q_{k_d}$ olsa, $Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2}$ olduğundan $q_{k_d-1} = 1$ ve $Q_{k_d-2} = 0$ olması gerekir. Bu durumda $k_d = 2$ olurdu. Yani $Q_1 = Q_2 = 1$ elde edilirdi. $4a + 4 - 4Q_{k_d} = 0$ ise $a + 1 = Q_{k_d} = Q_2 = 1$ çelişkisi bulunur. Dolayısıyla

$2T_d - U_d^2 > 0$ ve $Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ olduğundan $4a + 4 - 4Q_{k_d} > 0$ olmak zorundadır. Yani $Q_{k_d} < a + 1$ dolayısıyla $U_d = 2Q_{k_d} < 2(a + 1)$ dir. $\square$

Lemma 4.3.5. $d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) bir pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere

$$m_d = m \Rightarrow U_d < (m + 1)(a + 1)$$

ifadesi gerçekleşir.

Kanıt. $m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor = m$ olsun. Bu durumda

$$m \leq \frac{U_d^2}{T_d} < m + 1 \Rightarrow mT_d \leq U_d^2 < (m + 1)T_d \Rightarrow 0 < (m + 1)T_d - U_d^2$$

elde edilir. Şimdi 3 ayrı durum için inceleyelim:

i) $d \equiv 1 \pmod{4}$ ve a tek iken (4.1)'den $T_d = aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$, $U_d = Q_{k_d}$ ve Teorem 4.1.1'den $\ell_1 \geq 2$ olduğunu biliyoruz. (4.4)'den

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} > 2Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq 2Q_{k_d-1}$$

ve dolayısıyla $2Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} (m + 1)T_d - U_d^2 &= (m + 1)aQ_{k_d} + 2(m + 1)Q_{k_d-1} - Q_{k_d}^2 + ((m + 1)Q_{k_d} - (m + 1)Q_{k_d}) \\ &= Q_{k_d}((m + 1)a + (m + 1) - Q_{k_d}) + 2(m + 1)Q_{k_d-1} - (m + 1)Q_{k_d} \\ &= Q_{k_d}((m + 1)(a + 1) - Q_{k_d}) + (m + 1)(2Q_{k_d-1} - Q_{k_d}) \end{aligned}$$

elde edilir. $0 < (m + 1)T_d - U_d^2$ ve $2Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ olduğundan $0 < (m + 1)(a + 1) - Q_{k_d}$ olmak zorundadır. O halde $U_d = Q_{k_d} < (m + 1)(a + 1)$ bulunur.

ii) $d \equiv 1 \pmod{4}$ ve a çift iken (4.2)'den $T_d = (a - 1)Q_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$, $U_d = Q_{k_d}$ ve Teorem 4.1.1'den $\ell_1 = 1$ olduğunu biliyoruz. (4.4)'den

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = \ell_1 Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} = Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq Q_{k_d-1}$$

ve dolayısıyla $Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} (m+1)T_d - U_d^2 &= (m+1)(a-1)Q_{k_d} + 2(m+1)Q_{k_d-1} - Q_{k_d}^2 + (2(m+1)Q_{k_d} - 2(m+1)Q_{k_d}) \\ &= Q_{k_d}((m+1)(a-1) + 2(m+1) - Q_{k_d}) + 2(m+1)Q_{k_d-1} - 2(m+1)Q_{k_d} \\ &= Q_{k_d}((m+1)(a+1) - Q_{k_d}) + 2(m+1)(Q_{k_d-1} - Q_{k_d}) \end{aligned}$$

elde edilir. $0 < (m+1)T_d - U_d^2$ ve $Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ olduğundan $0 < (m+1)(a+1) - Q_{k_d}$ olmak zorundadır. O halde $U_d = Q_{k_d} < (m+1)(a+1)$ bulunur.

iii) $d \equiv 2, 3 \pmod{4}$ olsun. (4.3)'den $T_d = 2aQ_{k_d} + 2Q_{k_d-1}$, $U_d = 2Q_{k_d}$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$Q_{k_d} = q_{k_d-1}Q_{k_d-1} + Q_{k_d-2} \geq Q_{k_d-1}$$

sağlanır. Dolayısıyla $Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} (m+1)T_d - U_d^2 &= 2(m+1)aQ_{k_d} + 2(m+1)Q_{k_d-1} - 4Q_{k_d}^2 + (2(m+1)Q_{k_d} - 2(m+1)Q_{k_d}) \\ &= Q_{k_d}(2(m+1)a + 2(m+1) - 4Q_{k_d}) + 2(m+1)Q_{k_d-1} - 2(m+1)Q_{k_d} \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $0 < (m+1)T_d - U_d^2$ ve $Q_{k_d-1} - Q_{k_d} \leq 0$ olduğundan

$$0 < 2(m+1)(a+1) - 4Q_{k_d}$$

olmak zorundadır. O halde $U_d = 2Q_{k_d} < (m+1)(a+1)$ sağlanır. $\square$

Böylece Lemma 4.3.3 ve Lemma 4.3.5'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.6. $d \neq 2, 5$ olmak üzere $d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) bir pozitif kare çarpansız tam sayı olsun. Bu durumda

$$\left\lfloor \frac{U_d}{a+1} \right\rfloor \leq m_d < U_d$$

sağlanır.

Teorem 4.3.7. $d = a^2 + b$ ($a, b \in \mathbb{Z}, 0 < b \leq 2a$) bir pozitif kare çarpansız tam sayı olmak

üzere

$$(m_d + 1)^2 + m_d < d \Rightarrow U_d < d$$

sağlanır.

Kanıt. $(m_d + 1)^2 + m_d < d = a^2 + b$ olduğunu varsayalım. O halde iki durum mevcuttur:

(i) $m_d + 1 = a$ ve $m_d < b$ (ii) $m_d + 1 < a$ ve $b \in \mathbb{Z}^+$. Şimdi ayrı ayrı inceleyelim. Eğer $m_d + 1 = a$ ve $m_d < b$ ise $m_d = a - 1 < b$ dir. a ve b pozitif tamsayılar olduğundan $a \leq b$ yazılabilir. Böylece $(m_d + 1)(a + 1) = a^2 + a \leq a^2 + b$ sağlanır. Lemma 4.3.5'den

$$U_d < (m_d + 1)(a + 1) < d$$

elde edilir. $m_d + 1 < a$ ve $b \in \mathbb{Z}^+$ olması durumunda ise $m_d + 1 \leq a - 1$ ve $2 \leq a - m_d$ dir. O halde

$$2(m_d + 1) \leq (a - 1)(a - m_d)$$

$$2m_d + 1 < 2(m_d + 1) \leq (a - 1)(a - m_d) = a^2 - am_d - a + m_d$$

$$m_d + 1 < a^2 - a(m_d + 1)$$

$$(a + 1)(m_d + 1) < a^2 < d$$

ve Lemma 4.3.5'den $U_d < d$ sağlanır. □

Şimdi $\mathcal{M}_m$ kümelerini $\mathcal{M}_m = \{d \in \mathbb{Z}^+ \mid m_d = \left\lfloor \frac{U_d^2}{T_d} \right\rfloor = m\}$ şeklinde tanımlayalım. Bu durumda Lemma 4.3.5'den ve Tablo 4.2'den aşağıdakiler elde edilir:

- $m_d = 0$ durumu $n_d \neq 0$ olmasında denktir. Teorem 4.1.2'den $U_d \leq a$ ve dolayısıyla $U_d < d$ dir. Böylece $\forall d \in \mathcal{M}_0$ için $U_d < d$ elde edilir.
- $d \in \mathcal{M}_1$ ve $(m_d + 1)^2 + m_d = 5 < d$ için $U_d < d$ sağlanır. $3, 5 \notin \mathcal{M}_1$ dir. Böylece $d = 2$ hariç $\forall d \in \mathcal{M}_1$ için $U_d < d$ dir.
- $d \in \mathcal{M}_2$ ve $(m_d + 1)^2 + m_d = 11 < d$ için $U_d < d$ sağlanır. $d \leq 11$ ve $m_d = 2$ olacak şekilde d yoktur. Böylece $\forall d \in \mathcal{M}_2$ için $U_d < d$ dir.

- Benzer şekilde $\forall d \in \mathcal{M}_3 \cup \mathcal{M}_4 \cup \mathcal{M}_5 \cup \mathcal{M}_6 \cup \mathcal{M}_7 \cup \mathcal{M}_9 \cup \mathcal{M}_{10}$ için $U_d < d$ sağlanır.
- $d \in \mathcal{M}_8$ ve $(m_d + 1)^2 + m_d = 89 < d$ için $U_d < d$ sağlanır. Fakat $d \in \{19, 22, 59\}$ için $U_d \not< d$ dir.

Tablo 4.2: $d \leq 19$ için m_d ve U_d değerleri.

d	2	3	5	6	7	10	11	13	14	15	17	19
m_d	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	8
U_d	1	1	1	2	3	1	3	1	4	1	2	29

Sonuç 4.3.8. d pozitif kare çarpansız tam sayı olmak üzere $(m_d + 1)^2 + m_d < d$ ise Ankeny-Artin-Chowla Sanısı doğrudur. Ancak Teorem 4.3.7'nin tersi geçerli değildir. Mathematica programı kullanılarak $d < 2 \cdot 10^5$ için sadece 9 aksi örnek bulunmuştur ve bunlar Tablo 4.3'de listelenmiştir.

Tablo 4.3: $d < 2 \cdot 10^5$ için $U_d < d$ ve $(m_d + 1)^2 + m_d \not< d$ sağlayan değerler.

d	a	T_d	U_d	m_d	$(m_d + 1)^2 + m_d \not< d$
2	1	1	1	1	$5 \not< 2$
5	2	1	1	1	$5 \not< 5$
754	27	20 457	745	27	$811 \not< 754$
1 943	44	83 751	1 900	43	$1979 \not< 1943$
2 543	50	124 608	2 471	49	$2549 \not< 2543$
34 691	186	6 454 674	34 655	186	$35155 \not< 34691$
42 421	205	8 699 902	42 240	205	$42641 \not< 42421$
50 937	225	11 477 806	50 856	225	$51301 \not< 50937$
68 457	261	17 890 094	68 376	261	$68905 \not< 68457$

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında öncelikle $d \equiv 1 \pmod{4}$ iken $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımda periyodik kısmın ilk terimi hakkında önemli bir kriter elde edilmiştir (Teorem 4.1.1). Ayrıca, $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ cisminin ε_d temel biriminin katsayıları olan T_d ve U_d tam sayıları ve ε_d temel birimi için bazı alt ve üst sınırlar elde edilmiştir (sırasıyla Teorem 4.1.2, Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4).

$n_d \neq 0$ olması durumunda $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin ε_d temel birimi için literatürde bazı üst sınırlar elde edilmiştir. Örneğin; Yokoi, $p \equiv 1 \pmod{4}$ asal sayı olmak üzere $\varepsilon_p < 2p$ olduğunu göstermiştir (Lemma 3.3 ve Lemma 3.4). Mollin ve Williams ise Yokoi'nin çalışmalarını genelleştirerek herhangi bir pozitif kare çarpansız d tam sayısı için $\varepsilon_d < 8d/\sigma^2$ olduğunu ispatlamıştır (Sonuç 3.1.14). Bu tez çalışmasında ise sürekli kesirler ile ilgili rekürans bağıntılarından yararlanılarak herhangi bir pozitif kare çarpansız d tam sayısı için $\varepsilon_d < 2(a^2 + a)/\sigma$ olduğu ispatlanmıştır (Teorem 4.1.4). Dolayısıyla $\varepsilon_d < 2(a^2 + a)/\sigma < 8d/\sigma^2$ olduğundan $n_d \neq 0$ iken $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi için daha iyi bir üst sınır sağlanmıştır.

Ayrıca, reel kuadratik sayı cisimlerinin temel birimleri için elde ettiğimiz sınırlar Dirichlet Sınıf Sayısı Formülüne uygulanarak sınıf sayısı için bir takım yeni kriterler ifade edilmiştir (Lemma 4.2.1, Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.3). Bu teoremlerin elde edilmesinde [39, 41, 64, 68] çalışmalarında olduğu gibi $L(1, \chi)$ Dirichlet L-fonksiyonu için Tatzuza'nın alt sınırı (Teorem 2.7.14) ve Hua'nın üst sınırı (Teorem 2.7.15) Dirichlet Sınıf Sayısı Formülüne uygulanmıştır. Böylece Teorem 4.1.4'de ε_d temel birim için ifade ettiğimiz yeni sınırlar sayesinde, sınıf sayısının belirlenmesine yönelik yeni bulgular elde edilmiştir.

$n_d \neq 0$ iken sınıf sayısı üzerine yaptığımız çalışmalarda elde ettiğimiz alt sınır (Teorem 4.2.2), Yokoi, Mollin ve Williams'ın elde etmiş olduğu sınırlardan daha iyi bir alt sınır sağlamaktadır. Bunun nedeni, temel birim için daha iyi bir üst sınır elde etmiş olmamızdır. Diğer taraftan, n_d ve m_d invariantları cinsinden Yokoi tarafından verilen diğer alt sınırlar

$$(i) \quad m_d \neq 0 \text{ ise olası bir istisna ile } h_d > \frac{0.3275 \cdot 4^{\delta_d(s-2)/2s} \cdot s^{-1} \cdot d^{(s-2)/2s}}{\log(m_d+1)d}$$

(ii) $m_d = 0$ (yani $n_d \neq 0$) ise olası bir istisna ile $h_d > \frac{0.3275 \cdot 4^{\delta_d(s-2)/2s} \cdot s^{-1} \cdot d^{(s-2)/2s}}{\log(d/n_d)+1}$

biçimindedir (Teorem 3.1.23). Cismin temel biriminin çok büyük olduğu durumlarda n_d ve m_d invaryant değerlerini hesaplamak oldukça zordur. Örneğin, $d = 343513$ kare çarpansız tam sayı için $U_d > 10^{204}$ olduğundan yukarıdaki formüller kullanışlı değildir. Oysa ki Teorem 4.2.2'ye göre $d = 343513 = 586^2 + 117 \equiv 1 \pmod{4}$ ve $a = 586$ olduğundan kolayca $h_d > 1$ ($h_d \neq 1$) elde edilir. Dolayısıyla bu tez çalışmasında $n_d \neq 0$ olması durumunda sınıf sayısı için daha iyi ve daha kolay uygulanabilir bir alt sınır verilmiştir.

Literatürde reel kuadratik sayı cisimlerinin sınıf sayısı için üst sınır veren çeşitli teoremler mevcuttur. Yokoi invaryant değerleri ile sınıf sayısının hesaplanmasına yönelik yapılan çalışmalar incelendiğinde, Teorem 4.6'da verdiğimiz sınırın her zaman en iyi üst sınır olmadığı, ancak bazı durumlar için daha kullanışlı olduğu görülmüştür. Bu durum, iki örnekte karşılaştırmalı olarak incelenmiştir (Örnek 4.2.4 ve Örnek 4.2.5). Genel olarak cismin sınıf sayısı için Yokoi tarafından verilen Teorem 3.1.20.(iii)'deki sınır daha iyi bir üst sınır sağlamaktadır. Fakat bu sınır, m_d invaryant değerinin ve temel birimin normunun hesaplamasını gerektirdiğinden, temel birimin çok büyük olduğu durumlarda kullanışlı değildir. Ayrıca Teorem 3.1.20.(iii)'nin ön koşulu hem $m_d \neq 0$ (yani $n_d = 0$) hem de $N(\varepsilon_d) = -1$ olmasıdır. Oysa ki, Teorem 4.2.3'ün ön koşulu sadece $n_d = 0$ olmasıdır. Burada n_d 'yi hesaplamak yerine Teorem 4.1.2'de elde ettiğimiz $n_d = 0$ için gerek ve yeter koşul olan $U_d > a$ şartının sağlanıp sağlanmadığının kontrol edilmesi yeterlidir. Dolayısıyla Teorem 4.2.3'de ifade ettiğimiz üst sınır daha kolay uygulanabilir.

$p \equiv 1 \pmod{4}$ asalı için n_p invaryantının sıfırdan farklı olması durumunda $U_p < p$ olduğu yani AAC Sanısının sağlandığı Yokoi tarafından gösterilmiştir (Teorem 3.1.7). Benzer şekilde, Mollin ve Williams ise $d \equiv 1 \pmod{4}$ pozitif kare çarpansız tam sayısı için $U_d < d$ olduğunu ispatlamıştır (Teorem 3.1.17). Bu tez çalışmasında elde edilen Önerme 4.3.1, daha basit bir ispat ile Mollin, Williams ve Yokoi'nin teoremlerini genelleştirmektedir. Diğer taraftan Hashimoto, olası bir istisna ile tüm $p \in S(k; a_1, a_2, \dots, a_k)$ asalları için $U_p < p$ olduğunu yani AAC Sanısının doğru olduğunu göstermiştir (Teorem 3.4.4). Bu tez çalışmasında ise bu kümeler ile Yokoi invaryant değerleri arasında ilişki kurularak Hashimoto tarafından elde edilen teorem farklı bir metod ile ispatlanmıştır (Önerme 4.3.2). Ayrıca literatürde rastlanmayan, m_d Yokoi invaryantı ile AAC Sanısı arasındaki ilişki incelenerek yeni bulgular elde edilmiştir (Teorem 4.3.7 ve Sonuç 4.3.8).

Bu tez çalışmasından elde edilen bulgular ile bazı Pell denklemlerinin çözülebilirliği Yokoi invaryant değerlerine bağlı olarak araştırılabilir. Ayrıca Pell denklemlerinin çözülebilirliğine bağlı olarak cismin tamlik halkası O_K 'nın ideallerinin yapısı belirlenerek ideal sınıf grubu ve dolayısıyla bu cisimlerin sınıf sayıları ile cebirsel yapıları incelenebilir. Öte yandan son yıllarda hem imajiner hem de reel kuadratik sayı cisimleri kriptografik protokollerin güvenliğinde çalışılmaya başlanmıştır. Bu kriptosistemlerde güvenlik, cismin seçimine bağlıdır dolayısıyla kuadratik sayı cisminin yapısının bilinmesine ihtiyaç vardır. Bu nedenle Yokoi invaryant değerlerinin kriptoloji ile bağlantısı da araştırılabilir.

Bu tez çalışmasında elde edilen bulguların, reel kuadratik sayı cisimlerinin cebirsel yapılarının daha iyi belirlenmesine yönelik ileride yapılacak olan incelemelere önemli ölçüde katkı sağlaması ve ışık tutması beklenmektedir.

KAYNAKLAR

- [1]. Ankeny, N.C., Chowla, S., 1962, A further note on the class number of real quadratic fields, *Acta Arith.*, 7 (3), 271-272.
- [2]. Ankeny, N.C., Artin, E., Chowla, S., 1952, The class-number of real quadratic number fields, *Annals of Mathematics*, 56 (3), 479-493.
- [3]. Ankeny, N.C., Chowla, S., Hasse, H., 1965, On the class-number of the maximal real subfield of a cyclotomic field, *J. Reine Angew. Math.*, 217, 217-220.
- [4]. Apostol, T.M., 1976, *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer-Verlag, New York, ISBN: 0-387-90163-9.
- [5]. Azuhata, T., 1984, On the fundamental units and the class numbers of real quadratic fields, *Nagoya Mathematical Journal*, 95, 125-135.
- [6]. Biró, A., 2003, Yokoi's conjecture, *Acta Arithmetica*, 106 (1), 85-104.
- [7]. Biró, A., 2003, Chowla's conjecture, *Acta Arithmetica*, 107 (2), 179-194.
- [8]. Biró, A., Lapkova, K., 2015, The class number one problem for the real quadratic fields $\mathbb{Q}(\sqrt{(an)^2 + 4a})$ *arXiv preprint arXiv:1508.05644*.
- [9]. Byeon, D., Kim, H.K., 1997, Class number 2 criteria for real quadratic fields of Richaud-Degert type, *Journal of Number Theory*, 62, 257-272.
- [10]. Byeon, D., Kim, M., Lee, J., 2007, Mollin's conjecture, *Acta Arithmetica*, 126 (2), 99.
- [11]. Byeon, D., Lee, S., 2008, Class number 2 problem for certain real quadratic fields of Richaud-Degert type, *Journal of Number Theory*, 128 865-883.
- [12]. Byeon, D., Lee, S., 2012, A note on units of real quadratic fields, *Bull. Korean Math. Soc.* 49, 767-774.
- [13]. Chakraborty, K., Hoque, A., Mishra, M., 2018, A note on certain real quadratic fields with class number up to three, *arXiv preprint arXiv:1812.02488*
- [14]. Cohn, H., 1980, *Advanced Number Theory*, Dover Publications, New York, ISBN: 0-486-64023-X.
- [15]. Çallıalp, F., 2009, *Sayıların Teorisi*, Birsen Yayınevi, İstanbul, ISBN: 978-975-511-518-4.
- [16]. Çallıalp, F., 2001, *Örneklerle Soyut Cebir*, Birsen Yayınevi, İstanbul, ISBN: 978-975-511-350-0.
- [17]. Gözeri, G.K., Pekin, A., 2014, Explicit form of fundamental units of certain real quadratic fields, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 7 (1), 55-64.

- [18]. Hardy, G.H., Wright, M.E., 1975, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford, ISBN: 0 19 853310 7.
- [19]. Hashimoto, R., 2001, Ankeny-Artin-Chowla conjecture and continued fraction expansion, *Journal of Number Theory*, 90 (1), 143-153.
- [20]. Hashimoto, R., 2008, Certain integers related to Ankeny-Artin-Chowla conjecture, *AIP Conference Proceedings*, 976, 103.
- [21]. Hashimoto, R., 2011, Searching discriminants with large fundamental units via continued fraction expansion, *AIP Conference Proceedings*, 1385, 38.
- [22]. Hasse, H., 1965, Über mehrklassige, aber eingeschlechtige reellquadratische Zahlkörper, *Elemente der Mathematik*, 20, 49-72.
- [23]. Hasse, H., 1980, *Number Theory*, Springer-Verlag, Berlin, ISBN: 3-540-08275-1.
- [24]. Hecke, E., 1981, *Lectures on the Theory of Algebraic Numbers*, Springer-Verlag, New York, ISBN: 0-387-90595-2.
- [25]. Hoque, A., Chakraborty, K., 2018, Pell-type equations and class number of the maximal real subfield of a cyclotomic field, *The Ramanujan Journal*, 46(3), 727-742.
- [26]. Hua, L.-K., On the least solution of Pell's equation, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 48 (10), 731-735.
- [27]. Ireland, K., Rosen, M., 1990, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, Springer-Verlag, New York, ISBN: 3-540-97329-X.
- [28]. Işııkay, S., Pekin, A., 2017, New results on invariant values of certain real quadratic fields, *4th International Conference on Pure and Applied Science*, 23-25 November 2017 Istanbul, 122.
- [29]. Işııkay, S., Pekin, A., 2018, Some criteria on invariant values, *Maejo International Journal of Science and Technology*, 12 (2), 101-111.
- [30]. Işııkay, S., Pekin, A., 2018, The new criterion on Yokoi's D -invariant, *International Conference on Mathematical Studies and Applications*, 4-6 October 2018 Karaman, 121.
- [31]. Kim, H.K., 1988, A conjecture of S. Chowla and related topics in analytic number theory, Ph.D. thesis, Johns Hopkins University.
- [32]. Kiselev, A.A., 1948, An expression for the number of classes of ideals of real quadratic fields by means of Bernoulli numbers, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 61, 777-779.
- [33]. Lee, J., 2009, A complete determination of narrow Richaud-Degert type which is not 5 modulo 8 with class number two, *Journal of Number Theory*, 129, 604-620.
- [34]. Leu, M.G., 1989, On a determination of certain real quadratic fields of class number two, *J. Number Theory*, 33, 101-106.

- [35]. Mc Laughlin, J., 2003, Multi-variable polynomial solutions to Pell's equation and fundamental units in real quadratic fields, *Pacific journal of mathematics*, 210 (2), 335-349.
- [36]. Mollin, R.A., Williams, H.C., 1987, Class number one criteria for real quadratic fields I, *Proceeding of the Japan Academy Ser. A. Mathematical Science*, 63, 121-125.
- [37]. Mollin, R.A., Williams, H.C., 1989, Period four and real quadratic fields of class number one, *Proceeding of the Japan Academy Ser. A. Mathematical Science*, 65, 89-93.
- [38]. Mollin, R.A., Williams, H.C., 1990, Continued fractions of period five and real quadratic fields of class number one, *Acta Aritmetica*, 56, 55-63.
- [39]. Mollin, R.A., Williams, H.C., 1990, Solution of a problem of Yokoi, *Proceeding of the Japan Academy Ser. A. Mathematical Science*, 66, 141-145.
- [40]. Mollin, R.A., Williams, H.C., 1991, On a determination of real quadratic fields of class number one and related continued fraction period length less than 25, *Proceeding of the Japan Academy Ser. A. Mathematical Science*, 67, 20-25.
- [41]. Mollin, R.A., Williams, H.C., 1992, A complete generalization of Yokoi's p -invariants, *Colloquium Mathematicum*, 63 (2), 285-294.
- [42]. Mollin, R.A., Williams, H.C., 1992, On real quadratic fields of class number two, *Mathematics of Computation*, 59 (200), 625-632.
- [43]. Mollin, R.A., 1996, *Quadratics*, CRC Press, Boca Raton, ISBN: 0-8493-3983-9.
- [44]. Mollin, R. A., 2008, *Fundamental Number Theory with Applications*, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, ISBN:978-1-4200-6659-3.
- [45]. Murty, M.R., Esmonde, J., 2004, *Problems in Number Theory*, Springer, ISBN: 0-387-22182-4.
- [46]. Niven, I., Zuckerman, H.S., Montgomery, H.L., 1991, *An Introduction to the Theory of Numbers*, John Wiley Sons, New York, ISBN: 0-471-62546-9.
- [47]. Özer, Ö., 2017, A note on the structure of certain real quadratic number field, *Iranian Journal of Science and Technology, Transactions A: Science*, 41(3), 759-769.
- [48]. Özer, Ö., Telci, F., İşcan, H., 2009, On some real quadratic fields with period 4, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 4 (28), 1389-1396.
- [49]. Özer, Ö., Telci, F., 2011, On continued fractions of real quadratic fields with period six, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, 6 (17), 833-840.
- [50]. Özer, Ö., Pekin, A., 2015, An algorithm for explicit form of fundamental units of certain real quadratic fields and period eight, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, 8 (3), 343-356.
- [51]. Özer, Ö., Pekin, A., 2016, An algorithm for explicit form of fundamental units of certain real quadratic fields, *Journal of Analysis and Number Theory*, 4 (1), 23-27.

- [52]. Pekin, A., İşcan, H., 2005, Continued fractions of period six and explicit representations of fundamental units of some real quadratic fields, *Journal of the Indian Mathematical Society*, 72, 184-194.
- [53]. Ribenboim, P., 1972, *Algebraic Numbers*, Wiley -Interscience, New York, ISBN: 0-471-71804-1.
- [54]. Stewart, I., Tall, D., 2002, *Algebraic Number Theory and Fermat's Last Theorem*, A K Peters, Canada.
- [55]. Tatzawa, T., 1951, On a theorem of Siegel, *Japanese Journal of Mathematics*, 21, 163-178.
- [56]. Tomita, K., 1995, Explicit representation of fundamental units of some quadratic fields I, *Proceeding of the Japan Academy Ser. A Mathematical Sciences*, 71 (2), 41-43.
- [57]. Tomita, K., 1997, Explicit representation of fundamental units of some quadratic fields II, *Journal of Number Theory*, 63, 275-285.
- [58]. Van Der Poorten, A.J., Te Riele, H.J.J. and Williams, H.C., 2001, Computer verification of the Ankeny-Artin-Chowla conjecture for all primes less than 100 000 000 000, *Mathematics of Computation*, 70 (235), 1311-1328.
- [59]. Von Degert, G., 1958, Über die Bestimmung der Grundeinheit gewisser reell-quadratischer Zahlkörper, *In Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, 22 (1), 92-97.
- [60]. Yokoi, H., 1969, On real quadratic fields containing units with norm -1, *Nagoya Mathematical Journal*, 33, 139-152.
- [61]. Yokoi, H., 1988, Class number one problem for real quadratic fields (the conjecture of Gauss), *Proceeding of the Japan Academy Ser. A Mathematical Sciences*, 64, 53-55.
- [62]. Yokoi, H., 1988, New invariants of real quadratic fields, *Proc. 1st Conf. Canadian Number Theory Assoc.*, April, 18-27, 1988, Banff, Canada, 635-639.
- [63]. Yokoi, H., 1988, Some relations among new invariants of prime p congruent to 1 mod 4, *Advanced Studies in Pure Mathematics Investigations in Number Theory*, 13, 493-501.
- [64]. Yokoi, H., 1990, The fundamental unit and class number one problem of real quadratic fields with prime discriminant, *Nagoya Mathematical Journal*, 120, 51-59.
- [65]. Yokoi, H., 1991, A note on the class-number of real quadratic fields with prime discriminants, *Proceeding of the Japan Academy Ser. A Mathematical Sciences*, 67, 308-312.
- [66]. Yokoi, H., 1991, The fundamental unit and bounds for class numbers of real quadratic fields, *Nagoya Mathematical Journal*, 124, 181-197.
- [67]. Yokoi, H., 1993, A note on class number one problem for real quadratic fields, *Proceeding of the Japan Academy Ser. A Mathematical Sciences*, 69, 22-26.

- [68]. Yokoi, H., 1993, New invariants and class number problem in real quadratic fields, *Nagoya Mathematical Journal*, 132, 175-197.
- [69]. Yokoi, H., 1994, Solvability of the Diophantine equation $x^2 - Dy^2 = \pm 2$ and new invariants for real quadratic fields, *Nagoya Mathematical Journal*, 134, 137-149.



EKLER

EK 1. Mathematica Program Kodları ve Bazı d Değerlerine Karşılık Gelen $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ Reel Kuadratik Sayı Cisimlerine Ait Parametreler.

Bu tez çalışmasında elde edilen bulgular belli bir sayıya kadar olan d değerleri için Mathematica programı kullanılarak incelenmiştir. Öncelikle $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ reel kuadratik sayı cisminin temel birimi $\varepsilon_d = (t + u\sqrt{d})/2$ biçiminde olmak üzere t ve u değerleri elde edilmiş, bunlara bağlı olarak

$$n = \left\lfloor \frac{t}{u^2} \right\rfloor \text{ ve } m = \left\lfloor \frac{u^2}{t} \right\rfloor$$

Yokoi invaryant değerleri hesaplanmıştır. Ayrıca cismin sınıf sayısı ve tamlık taban elemanının sürekli kesre açılımı ile periyodu bulunmuştur. Yazılan kodlar aşağıda verilmiş ve bazı d değerlerine ait parametreler tabloda listelenmiştir.

```
def={};
For[d=2,d<10000,d++,
If[SquareFreeQ[d],
s=Sqrt[d];
a=Floor[s];
c=First[RootReduce[NumberFieldFundamentalUnits[s]]];
u=Coefficient[2c,s];
t=c+c-u*s;
m=Quotient[u*u,t];
n=Quotient[t, u*u];
h=NumberFieldClassNumber[s];
If[Mod[d,4]==1,
w=(1+s)/2,
w=s];
k=Length[ContinuedFraction[w][[2]]];
cf=ContinuedFraction[w,k+1];
If[k<11,
def=Append[def,{d,a, t, u, n,m, h,k, " <",{cf}, ">"},
def=Append[def,{d,a, t, u, n,m, h,k," <"," ", ">"}]
]];
TableForm[def]
```

Bazı d Değerlerine Karşılık Gelen Parametreler

d	a	T_d	U_d	n_d	m_d	h_d	k_d	w_d 'nin açılımı
2	1	2	2	0	2	1	1	$[1, \overline{2}]$
3	1	4	2	1	1	1	2	$[1, \overline{1, 2}]$
5	2	1	1	1	1	1	1	$[1, \overline{1}]$
6	2	10	4	0	1	1	2	$[2, \overline{2, 4}]$
7	2	16	6	0	2	1	4	$[2, \overline{1, 1, 1, 4}]$
10	3	6	2	1	0	2	1	$[3, \overline{6}]$
11	3	20	6	0	1	1	2	$[3, \overline{3, 6}]$
13	3	3	1	3	0	1	1	$[2, \overline{3}]$
14	3	30	8	0	2	1	4	$[3, \overline{1, 2, 1, 6}]$
15	3	8	2	2	0	2	2	$[3, \overline{1, 6}]$
17	4	8	2	2	0	1	3	$[2, \overline{1, 1, 3}]$
19	4	340	78	0	17	1	6	$[4, \overline{2, 1, 3, 1, 2, 8}]$
21	4	5	1	5	0	1	2	$[2, \overline{1, 3}]$
22	4	394	84	0	17	1	6	$[4, \overline{1, 2, 4, 2, 1, 8}]$
23	4	48	10	0	2	1	4	$[4, \overline{1, 3, 1, 8}]$
26	5	10	2	2	0	2	1	$[5, \overline{10}]$
29	5	5	1	5	0	1	1	$[3, \overline{5}]$
30	5	22	4	1	0	2	2	$[5, \overline{2, 10}]$

Devamı sonraki sayfada

Önceki sayfadan devam

d	a	T_d	U_d	n_d	m_d	h_d	k_d	w_d 'nin açılımı
31	5	3 040	546	0	98	1	8	$[5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}]$
33	5	46	8	0	1	1	4	$[3, \overline{2, 1, 2, 5}]$
34	5	70	12	0	2	2	4	$[5, \overline{1, 4, 1, 10}]$
35	5	12	2	3	0	2	2	$[5, \overline{1, 10}]$
37	6	12	2	3	0	1	3	$[3, \overline{1, 1, 5}]$
38	6	74	12	0	1	1	2	$[6, \overline{6, 12}]$
39	6	50	8	0	1	2	2	$[6, \overline{4, 12}]$
41	6	64	10	0	1	1	5	$[3, \overline{1, 2, 2, 1, 5}]$
⋮								
149	12	61	5	2	0	1	5	$[6, \overline{1, 1, 1, 1, 11}]$
151	12	3 456 296 080	281 269 386	0	22 889 378	1	20	
154	12	42 590	3 432	0	276	2	10	$[12, \overline{2, 2, 3, 1, 2, \dots, 24}]$
155	12	498	40	0	3	2	4	$[12, \overline{2, 4, 2, 24}]$
157	12	210	17	0	1	1	5	$[6, \overline{1, 3, 3, 1, 11}]$
197	14	28	2	7	0	1	3	$[7, \overline{1, 1, 13}]$
199	14	32 532 393 040	2 306 160 198	0	163 479 362	1	20	
226	15	30	2	7	0	8	1	$[15, \overline{30}]$

Devamı sonraki sayfada

Önceki sayfadan devam

d	a	T_d	U_d	n_d	m_d	h_d	k_d	w_d 'nin açılımı
694	26	77 564 210 890 029 284 ··· 765 770	2 944 297 181 807 995 ··· 344 228	0	111 763 992 636 ··· 929 805 137	1	46	
695	26	67 278	2 552	0	96	2	8	$[26, \overline{2, 1, 3, 10, 3, 1, 2, 52}]$
697	26	264	10	2	0	6	5	$[13, \overline{1, 2, 2, 1, 25}]$
701	26	23 564	890	0	33	1	11	$[13, \overline{1, 2, 1, 4, 1, \dots, 25}]$
1 090	33	66	2	16	0	12	1	$[33, \overline{66}]$
2 010	44	538	12	3	0	8	4	$[44, \overline{1, 4, 1, 88}]$
2 011	44	45 806 711 908 107 050 ··· 132 404 670 638 756 475 ··· 211 937 780	1 021 464 042 232 277 ··· 427 350 037 132 464 403 ··· 210 641 994	0	22 778 076 533 121 ··· 357 599 405 604 ··· 494 657 620 692 161	1	94	
2 013	44	673	15	2	0	2	4	$[22, \overline{1, 13, 1, 43}]$
2 026	45	90	2	22	0	14	1	$[45, \overline{90}]$
2 029	45	45	1	45	0	7	1	$[23, \overline{45}]$
2 755	52	8 818	168	0	3	12	4	$[52, \overline{2, 20, 2, 104}]$
4 579	67	82 420	1 218	0	17	14	6	$[67, \overline{1, 2, 67, 2, 1, 134}]$
23 410	153	306	2	76	0	52	1	$[153, \overline{306}]$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Sevcan IŞIKAY
Doğum Yeri	Bakırköy
Doğum Tarihi	05.12.1987
Uyruğu	☒ T.C. ☐ Diğer:
E-Posta Adresi	isikaysevcan@gmail.com

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Yıldız Teknik Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Matematik
Mezuniyet Yılı	2010

Yüksek Lisans	
Üniversite	Yıldız Teknik Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2011

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2019

Makale ve Bildiriler	
Makaleler	
Işıkay, S. and Pekin, A., 2018, Some criteria on invariant values, <i>Maejo International Journal of Science and Technology</i> , vol. 12 (2), pp. 101-111 (SCI-E)	
Işıkay, S. and Pekin, A., New bounds for fundamental units and class numbers of real quadratic fields, (submitted)	
Bildiriler	
Işıkay, S. and Pekin, A., 2017, On the Yokoi's invariant value of certain real quadratic fields with the period eight, <i>VIII Annual International Conference of the Georgian</i>	

Mathematical Union, September 4-8 2017 Batumi, Georgia, 109.

Işıkay, S. and Pekin, A., 2017, New results on invariant values of certain real quadratic fields, *4th International Conference on Pure and Applied Sciences*, November 23-25 2017 Istanbul, Turkey, p. 122.

Işıkay, S. and Pekin, A., 2018, The new criterion on Yokoi's D-invariant, *International Conference on Mathematical Studies and Applications*, October 4-6 2018, Karaman, Turkey, p. 121.

