



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**REEL SAYILARDA NEWTONYEN OLMAYAN
LEBESGUE ÖLÇÜSÜNÜN BAZI ÖZELLİKLERİ**

**MATEMATİK
ANA BİLİM DALI**

Yüksek Lisans Tezi

Sezgin DEMİR

20152110026

Haziran 2019

GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**REEL SAYILARDA NEWTONYEN OLMAYAN
LEBESGUE ÖLÇÜSÜNÜN BAZI ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEZGİN DEMİR

Enstitü Ana bilim Dalı : MATEMATİK

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi OĞUZ OĞUR

Haziran 2019

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**REEL SAYILARDA NEWTONYEN OLMAYAN
LEBESGUE ÖLÇÜSÜNÜN BAZI ÖZELLİKLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEZGİN DEMİR

Enstitü Ana bilim Dalı : MATEMATİK

Bu tez 17/06/2019 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.



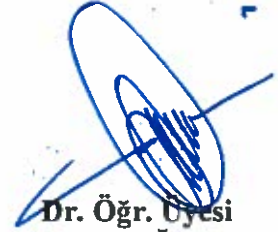
**Prof. Dr.
Cenap DUYAR**

Jüri Başkanı



**Dr. Öğr. Üyesi
Hande GÜNAY
AKDEMİR**

Üye



**Dr. Öğr. Üyesi
Oğuz OĞUR**

Üye

**Doç Dr.
BAHADIR KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Sezgin DEMİR

17/06/2019

TEŞEKKÜR

Bu konunun belirlenmesinde ve çalışma sürecinde bana yol gösteren ve yardımlarını hiç esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi OĞUZ OĞUR'a teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca hayatımın her alanında desteklerini benden esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	III
ÖZET	IV
SUMMARY	V
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI	3
2.1. α - Aritmetik	3
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	8
3.1. Newtonyen Olmayan α - Açık ve α - Kapalı Kümeler	8
3.2. α - Açık Kümelerin Newtonyen Olmayan Ölçüsü	12
BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	13
4.1. α - Kapalı, Sınırlı Kümelerin Newtonyen Olmayan Ölçüsü	13
4.2. Newtonyen Olmayan Kümelerin İç ve Dış Ölçüleri	23
4.3. Newtonyen Olmayan Ölçülebilir Kümeler	31
BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	35
KAYNAKLAR	36
ÖZGEÇMİŞ	38

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}(\mathbb{N})$	: Newtonyen olmayan reel sayılar kümesi
$\leq$	: α –sıralama
$*-\lim$	: Yıldız limit
$: =$	: Tanım olarak eşit
$\sum_N$	: Newtonyen olmayan toplam
m_N	: Newtonyen olmayan ölçü
m_N^*	: α –dış ölçü
m_{*N}	: α –iç ölçü
${}^a\sup$	: Newtonyen olmayan supremum
${}^a\inf$	: Newtonyen olmayan infimum

REEL SAYILARDA NEWTONYEN OLMAYAN LEBESGUE ÖLÇÜSÜNÜN BAZI ÖZELLİKLERİ

ÖZET

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, günümüze kadar yapılan çalışmalar ve uygulamaları hakkında kısaca bilgi verildi. İkinci bölümde tez konusu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verildi. Üçüncü bölümde Newtonyen olmayan açık ve kapalı kümeler tanımlandı ve temel teoremler verildi. Ayrıca Newtonyen olmayan açık kümelerin ölçüsü verildi.

Tezin dördüncü bölümü üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Newtonyen olmayan sınırlı, kapalı kümelerin ölçüleri tanımlandı ve temel teoremler verildi. İkinci kısımda, Newtonyen olmayan sınırlı kümenin iç ve dış tanımlanmış ve teoremler verildi. Son kısımda Newtonyen olmayan sınırlı kümelerin Lebesgue anlamında ölçüsü tanımlanmış ve teoremler verildi.

Anahtar kelimeler: Newtonyen olmayan ölçü, Newtonyen olmayan dış ölçü, Newtonyen olmayan iç ölçü.

SOME PROPERTIES of NON-NEWTONIAN LEBESGUE MEASURE in REAL NUMBERS

SUMMARY

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, the information about the studies that are done until today and these application areas, were briefly given. In the second chapter, basic definitions and theorems about the thesis subject were given. In the third chapter, non-Newtonian open and closed sets were defined and basic theorems were given. In addition, the measure of non-Newtonian open set was given. The fourth chapter of the thesis is composed of three sections. In the first section, the measure of the bounded, closed set which is non-Newtonian is defined and basic theorems are given. In the second section, the inner and outer measures of the non-Newtonian bounded sets were defined and related theorems were given. In the last section, the measure of the non-Newtonian bounded sets in the sense of Lebesgue was defined and theorems were given.

Keywords: Non-Newtonian measure, Non-Newtonian inner measure, Non-Newtonian outer measure

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Grossman ve Katz [1] çalışmasında Newtonyen olmayan kalkülüsü tanımlamışlardır. Yazarlar öncelikle klasik kalkülüs, Geometrik kalkülüs, Harmonik kalkülüs ve Kuadratik kalkülüsü tanımlamış, daha sonra da Bigeometrik, Biharmonik ve Bikuadratik kalkülüsü tanımlamışlardır.

Grossman [2] çalışmasında bigeometrik kalkülüste ölçüden bağımsız türevi incelemiştir. Grossman [3] çalışmasında meta kalkülüste türev ve integrali incelemiştir. Uzer [4] çalışmasında klasik kalkülüse alternatif olan çarpımsal tip kompleks kalkülüsü incelemiştir. Türkmen ve Başar [5] çalışmasında geometrik kalkülüste dizi uzayları üzerinde çalışmışlardır.

Çakmak ve Başar [6] çalışmasında Newtonyen olmayan kalkülüste dizi uzayları üzerinde çalışmışlardır. Bashirov ve ark. [7] çalışmasında Geometrik kalkülüs ve onun uygulamaları üzerinde çalışmışlardır. Bashirov ve Rıza [8] çalışmasında kompleks çarpımsal kalkülüs üzerinde çalışmışlardır.

Duyar ve ark. [9] çalışmasında Newtonyen olmayan reel eksende bazı temel topolojik özellikler elde etmişlerdir. Duyar ve Oğur [10] çalışmasında Newtonyen olmayan reel sayıların topolojisi üzerinde çalışmışlardır. Duyar ve Sağır [11] çalışmasında Newtonyen olmayan Lebesgue ölçüsü üzerinde çalışmışlardır.

Megginniss [12] çalışmasında Newtonyen olmayan kalkülüsü insan davranışına ve seçim yapmaya uyarlanmış olasılık teorisini oluşturmak için kullanmıştır. Florak ve Assen [13] çalışmasında Biomedikal görüntü analizinde Newtonyen olmayan kalkülüs kullanmışlardır.

Filip ve Piatecki [14] çalışmasında ekonomideki neoklasik büyüme modelini yeniden doğrulamak ve analiz etmek için Newtonyen olmayan kalkülüsü kullanmışlardır. Erdoğan [15] çalışmasında Newtonyen olmayan reel sayılarda fonksiyon dizileri ve serileri üzerinde çalışmıştır. Erdoğan [16] çalışmasında Newtonyen olmayan reel sayı serileri ve has olmayan integral üzerinde çalışmıştır.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

2.1. α –Aritmetik

2.1.1. Tanım: Tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $A \subset \mathbb{R}$ olan birebir fonksiyona üreteç denir. Örneğin I özdeşlik fonksiyonu, exp fonksiyonu birer üreteçtir [1].

2.1.2. Tanım: Görüntü kümesi A olan bir α –üretici verilsin. Her $x, y \in A$ olmak üzere aşağıdaki işlemler ve sıralama bağıntısıyla α –aritmetik olarak ifade edilir. [1]

$$\alpha \text{ –toplama} \quad x \dot{+} y = \alpha \{ \alpha^{-1}(x) + \alpha^{-1}(y) \}$$

$$\alpha \text{ –çıkarma} \quad x \dot{-} y = \alpha \{ \alpha^{-1}(x) - \alpha^{-1}(y) \}$$

$$\alpha \text{ –Çarpma} \quad x \dot{\times} y = \alpha \{ \alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(y) \}$$

$$\alpha \text{ –bölme } (\alpha^{-1}(y) \neq 0) \quad x \dot{/} y = \alpha \{ \alpha^{-1}(x) / \alpha^{-1}(y) \}$$

$$\alpha \text{ –sıralama} \quad x \dot{\leq} y \Leftrightarrow \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(y)$$

2.1.3. Tanım: $x \dot{<} \dot{0}$ olan sayılar α –negatif sayılar, $x \dot{>} \dot{0}$ olan sayılar α –pozitif sayılardır. α –sıfır sayısı $\dot{0} = \alpha(0)$ ve α –bir sayısı $\dot{1} = \alpha(1)$ olarak gösterilir. α –tamsayılar $\dot{0}$ sayısına ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının α –toplamasıyla ve $\dot{0}$ sayısından ardışık olarak $\dot{1}$ sayısının α –çıkarılmasıyla elde edilir [1]. Ayrıca

α –tamsayılar

$$\dots, \alpha(-3), \alpha(-2), \alpha(-1), \alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \dots$$

şeklinde tanımlanır.

Her n tamsayısı α –aritmetiğe göre $\dot{n} = \alpha(n)$ ile gösterilir.

2.1.4. Tanım: $\mathbb{R}(\mathbb{N})_\alpha = \mathbb{R}(\mathbb{N}) := \{\alpha(x) : x \in \mathbb{R}\}$ kümesine Newtonyen olmayan reel sayı kümesi denir [1].

2.1.5. Tanım: $A \subset \mathbb{R}(\mathbb{N})$ kümesindeki bir x sayısının α –karesi x^{2N} ile gösterilir ve $x^{2N} = x \dot{\times} x$ olarak tanımlanır [1].

$A \subset \mathbb{R}(\mathbb{N})$ kümesindeki bir x sayısının α –karekökü, α –karesi x sayısına eşit olan α –negatif olmayan sayı olarak tanımlanır ve $\sqrt{x}^N$ ile gösterilir. Yani $t^{2N} = x \Leftrightarrow t = \sqrt{x}^N$ yazılır. Böylece $t = \sqrt{x}^N = \alpha\{\sqrt{\alpha^{-1}(x)}\}$ şeklinde gösterilir.

$x \in \mathbb{R}(\mathbb{N})$ elemanının p . Newtonyen olmayan üssü ve q . Newtonyen olmayan kökü sırasıyla x^{pN} ve $\sqrt[q]{x}^N$ ile gösterilir.

$$x^{2N} = x \dot{\times} x = \alpha\{\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)\}$$

$$x^{3N} = x^{2N} \dot{\times} x = \alpha\left\{\alpha^{-1}\left\{\alpha\left(\alpha^{-1}(x) \times \alpha^{-1}(x)\right)\right\} \times \alpha^{-1}(x)\right\}$$

$\vdots$

$$x^{pN} = x^{(p-1)N} \dot{\times} x = \alpha\left\{\left[\alpha^{-1}(x)\right]^p\right\}$$

$\vdots$

şeklinde tanımlanır [1,6].

2.1.6. Tanım: $\mathbb{R}(\mathbb{N})$ de $(a, b)_N$ α –açık aralığı

$$\begin{aligned} (a, b)_N &= \{x \in \mathbb{R}(\mathbb{N}) : a \dot{<} x \dot{<} b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}(\mathbb{N}) : \alpha^{-1}(a) < \alpha^{-1}(x) < \alpha^{-1}(b)\} \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)). \end{aligned}$$

Benzer şekilde $[a, b]_N$ α –kapalı aralığı

$$\begin{aligned} [a, b]_N &= \{x \in \mathbb{R}(\mathbb{N}) : a \dot{\leq} x \dot{\leq} b\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}(\mathbb{N}) : \alpha^{-1}(a) \leq \alpha^{-1}(x) \leq \alpha^{-1}(b)\} \\ &= \alpha([\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)]) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır [11].

2.1.7. Örnek: $\exp$ fonksiyonu ile oluşturulan geometrik aritmetik $x, y \in \mathbb{R}^+$ için

$$\alpha - \text{toplama} \quad x \dot{+} y = \exp\{\ln x + \ln y\} = x \cdot y$$

$$\alpha - \text{çıkarma} \quad x \dot{-} y = \exp\{\ln x - \ln y\} = x / y$$

$$\alpha - \text{çarpma} \quad x \dot{\times} y = \exp\{\ln x \cdot \ln y\} = x^{\ln y} = y^{\ln x}$$

$$\alpha - \text{bölme} \quad x \dot{/} y = \exp\{\ln x / \ln y\} = x^{\frac{1}{\ln y}} \quad (y \neq 1)$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.1.8. Tanım: Her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k \in \mathbb{R}_\alpha$ olmak üzere

$$\begin{aligned} {}_\alpha \sum_{k=0}^{\infty} x_k &= x_0 \dot{+} x_1 \dot{+} \dots \dot{+} x_k \dot{+} \dots \\ &= \alpha \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^{-1}(x_k) \right\} \end{aligned}$$

sonsuz toplamına α - seri denir [18].

2.1.9. Tanım: ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ bir Newtonyen olmayan seri olmak üzere, genel terimi

$$s_m = {}_a \sum_{n=1}^m a_n \text{ olan } (s_m) \text{ dizisine } {}_a \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ serisinin Newtonyen olmayan kısmi toplamlar}$$

dizisi veya α - kısmi toplamlar dizisi denir. Yine $(s_m) = {}_a \sum_{n=1}^m a_n$ α - toplamına ise

Newtonyen olmayan m . kısmi toplamı denir [16].

2.1.10. Tanım: ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin (S_n) kısmi toplamlar dizisi α - yakınsak ise, bu serinin

α - yakınsak olduğu söylenir. Eğer ${}_a \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s$ ise ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ yazılır. ${}_a \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ limiti

yoksa veya ${}_a \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \pm \infty$ ya da ${}_a \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \dot{+} \infty$ ise ${}_a \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin α - ıraksak olduğu

söylenir [16].

2.1.11. Tanım: Boş olmayan bir $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ altkümesi verilsin. Eğer her $x \in X$ için $x \leq b$ ($x \geq a$) olacak şekilde bir $b \in \mathbb{R}(N)_\alpha$ ($a \in \mathbb{R}(N)_\alpha$) elemanı varsa X kümesi α –üstten sınırlı (α - alttan sınırlı) ve b sayısına da (a sayısına da) α - üst sınır (α - alt sınır) denir [16].

2.1.12. Tanım: Eğer X kümesi α - üstten sınırlı ve α - alttan sınırlı ise bu X kümesine α - sınırlı küme denir [16].

2.1.13. Tanım: Boş olmayan $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ alt kümesi verilsin. Her $x \in X$ için $x \leq M$ ($m \leq x$) olacak şekilde bir $M \in X$ ($m \in X$) elemanı varsa M sayısına (m sayısına) X kümesinin α - maksimal (α - minimal) elemanı denir ve kısaca

$$M = {}^\alpha \text{maks} \{x : x \in X\} = {}^\alpha \text{maks} X \quad (m = {}^\alpha \text{min} \{x : x \in X\} = {}^\alpha \text{min} X)$$

ile tanımlanır [16].

2.1.14. Tanım: α - üstten sınırlı (α - alttan sınırlı) $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesi için $B = \{b : b, X \text{ kümesinin } \alpha \text{ –üst sınırı}\}$ ($A = \{a : a, X \text{ kümesinin } \alpha \text{ –alt sınırı}\}$) olsun. B kümesinin (A kümesinin) α - minimal (α - maksimal) elemanına X kümesinin α - supremumu (α - infimumu) denir ve ${}^\alpha \text{sup} X$ (${}^\alpha \text{inf} X$) ile gösterilir [16].

2.1.15. Teorem: a) Boş olmayan ve α - üstten sınırlı her $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ alt kümesinin bir tek α - supremumu vardır.

b) Boş olmayan ve α - alttan sınırlı her $X \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ alt kümesinin bir tek α – infimumum vardır [16].

2.1.16. Teorem: Boş olmayan α - üstten sınırlı bir $A \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesi verildiğinde $c = {}^\alpha \text{sup} A$ olması için gerek ve yeter koşul

i) c sayısının A kümesinin bir α - üst sınırı olması ve

ii) her $\varepsilon > 0$ sayısı için $a_\varepsilon > c - \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $a_\varepsilon \in A$ sayısının bulunmasıdır [16].

2.1.17. Teorem: Boş olmayan ve α – alttan sınırlı $A \subset \mathbb{R}(N)_\alpha$ kümesi verildiğinde $c = {}^\alpha \text{inf} A$ olması için gerek ve yeter şart

i) c sayısının A kümesi için bir α – alt sınır olması ve

ii) her $\varepsilon > 0$ sayısı için $a_\varepsilon < c + \varepsilon$ olacak şekilde en az bir $a_\varepsilon \in A$ sayısının bulunmasıdır [16].

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Newtonyen Olmayan α - açık ve α - kapalı kümeler

3.1.1.Tanım: $E \subset \mathbb{R}(N)$ altkümesi ve $c \in \mathbb{R}(N)$ verilsin. E kümesinin tamamen içinde c noktasını içeren bir α - açık aralık varsa c noktasına iç nokta denir ve

$$c \in (a, b)_N \subset E \Leftrightarrow \alpha^{-1}(c) \in \alpha^{-1}\left((a, b)_N\right) = \left(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)\right) \in \alpha^{-1}(E)$$

şeklinde gösterilir [10].

Bu tanıma göre $c, E \subset \mathbb{R}(N)$ altkümesinin bir iç noktası olması için gerek ve yeter şart $\alpha^{-1}(c)$ sayısının $\alpha^{-1}(E) \subset \mathbb{R}$ alt kümesinin iç noktası olmasıdır [10].

3.1.2.Tanım: $E \subset \mathbb{R}(N)$ altkümesinin tüm noktaları iç nokta ise E kümesine α - açık küme denir [10].

Bu tanıma göre G kümesinin α - açık kümesinin ters görüntüsü $\alpha^{-1}(G)$, $\mathbb{R}$ de açık kümedir.

3.1.3. Örnek: Her $(a, b)_N$ α - açık aralığı $\mathbb{R}(N)$ 'de α - açık kümedir.

$c \in (a, b)_N$ alınsın. Bu durumda $\alpha^{-1}(c) \in (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))$ olur. $\alpha^{-1}(c)$ iç nokta olduğundan $(\alpha^{-1}(c) - r, \alpha^{-1}(c) + r) \subset (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))$ olacak şekilde $r > 0$ sayısı vardır.

Buradan

$$\alpha^{-1}(c) \in (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) \Rightarrow \exists r > 0 : (\alpha^{-1}(c) - r, \alpha^{-1}(c) + r) \subset (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))$$

$$\alpha(\alpha^{-1}(c) - \alpha^{-1}(\alpha(r)), \alpha^{-1}(c) + \alpha^{-1}(\alpha(r))) \subset \alpha(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))$$

$$\Rightarrow (\alpha(\alpha^{-1}(c) - \alpha^{-1}(\alpha(r))), \alpha(\alpha^{-1}(c) + \alpha^{-1}(\alpha(r)))) \subset \alpha(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))$$

$$\Rightarrow (c \dot{-} \alpha(r), c \dot{+} \alpha(r))_N \subset (a, b)_N.$$

3.1.4. Teorem: $\mathbb{R}(N)$ de α -açık kümelerin keyfî bir ailesinin birleşimi α -açıktır [10].

İspat: $G = \bigcup_i G_i$ olsun, burada bütün G_i kümeleri $\mathbb{R}(N)$ de açıktır. $c \in G$ ise, i_0 'lar

için $c \in G_{i_0}$ yazılır. Böylece G_{i_0} $\mathbb{R}(N)$ de açıktır. Bu durumda α -açık $(a, b)_N$ aralığı vardır öyle ki

$$c \in (a, b)_N \subset G_{i_0} \subset G \text{ olur. Bu ispatı tamamlar.}$$

3.1.5. Teorem: $\mathbb{R}(N)$ de sonlu sayıda α -açık kümelerin kesişimi α -açık kümedir [10].

İspat: G_i , tüm $i = 1, 2, \dots, n$ için $\mathbb{R}(N)$ de α -açık küme ve $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ olsun. Herhangi

$c \in G$ alınırsa her $i = 1, 2, \dots, n$ için $(a_i, b_i)_N$ α -aralıkları vardır öyle ki

$$c \in (a_i, b_i)_N = \alpha(\alpha^{-1}(a_i), \alpha^{-1}(b_i)) \subset G_i$$

yazılır. Buradan

$$\alpha^{-1}(c) \in (\alpha^{-1}(a_i), \alpha^{-1}(b_i)) \subset \alpha^{-1}(G_i)$$

olur. Yine

$$\lambda = \max \{ \alpha^{-1}(a_1), \dots, \alpha^{-1}(a_n) \}, \mu = \min \{ \alpha^{-1}(b_1), \dots, \alpha^{-1}(b_n) \}$$

tanımlansın. Buradan

$$\alpha^{-1}(c) \in (\lambda, \mu) \subset \bigcap_{i=1}^n \alpha^{-1}(G_i)$$

olur ve böylece

$$c \in \alpha((\lambda, \mu)) = (\alpha(\lambda), \alpha(\mu))_N \subset \alpha\left(\bigcap_{i=1}^n \alpha^{-1}(G_i)\right) \subset G$$

elde edilir.

Bu ise G kümesinin bir α -açık küme olduğunu gösterir.

3.1.6. Teorem: Eğer G kümesi $\mathbb{R}(N)$ de açıksa tümleyeni $G^c = \mathbb{R}(N) - G$ α -kapalıdır [10].

İspat: $c \in G$ keyfi nokta olsun. Buradan $\mathbb{R}(N)$ de $(a, b)_N$ α -açık aralığı vardır öyleki $c \in (a, b)_N \subset G$ yazılır. Buna göre, G 'nin herhangi bir noktası G^c nin limit noktası olamaz. Bu nedenle G^c tüm limit noktalarını içerir ve G^c α -kapalıdır.

3.1.7. Teorem: Eğer F kümesi $\mathbb{R}(N)$ de kapalıysa, tümleyeni F^c açıktır [10].

İspat: $c \in F^c$ keyfi nokta olsun. Bu durumda c , F kümesinin bir limit noktası değildir. Bu nedenle $c \in (a, b)_N$ ve $(a, b)_N \cap F = \emptyset$ olacak şekilde $\mathbb{R}(N)$ de bir α -açık $(a, b)_N$ aralığı vardır. Dolayısıyla $c \in (a, b)_N \subset F^c$ yazılır. Son olarak F^c nin her noktası iç noktadır. Bu ispatı tamamlar.

3.1.8. Tanım: E , $\mathbb{R}(N)$ de boştan farklı sınırlı bir alt küme olsun ve $a = \inf_N E$, $b = \sup_N E$ olsun. $S = [a, b]_N$ α -kapalı aralığı, E kümesini içeren en küçük α -kapalı aralık olarak adlandırılır. Burada açıktır ki

$$\inf_N E = \alpha(\inf \alpha^{-1}(E)) \text{ ve } \sup_N E = \alpha(\sup \alpha^{-1}(E)) \text{ dir [10].}$$

3.1.9. Teorem: Eğer $S = [a, b]_N$ $\mathbb{R}(N)$ kümesinde sınırlı kapalı alt küme F kümesini içeren en küçük α -kapalı aralığı ise $S - F$ kümesi $\mathbb{R}(N)$ 'de α -açık olur [10].

İspat: $S - F = [a, b]_N - F$

$$= \alpha([\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)] - \alpha^{-1}(F))$$

$$= \alpha((\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) \cap \alpha^{-1}(F)^c)$$

ve $(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) \cap (\alpha^{-1}(F))^c$ kümesi $\mathbb{R}'$ de açık bir küme olduğundan $S - F$ $\mathbb{R}(N)$ de α -açık olur.

3.1.10. Tanım: $x, \mathbb{R}(N)$ de bir nokta ve $A \subset \mathbb{R}(N)$ nin bir altkümesi olsun. Eğer x noktasını içeren $(a, b)_N$ α -açık aralıklarında x noktasından farklı A kümesine ait bir nokta varsa, x 'e A 'nın limit noktası denir [9].

3.1.11. Tanım: A kümesinin her noktası limit noktası ise A kümesine α -kapalıdır denir.

Bu tanıma göre A α -kapalı ise $\alpha^{-1}(A)$, $\mathbb{R}$ de kapalıdır [9].

3.2. α - Açık Kümelerin Newtonyen Olmayan Ölçüsü

3.2.1. Teorem: $\mathbb{R}(N)$ deki $(a, b)_N$ α -açık aralığının ölçüsü

$$m_N(a, b)_N = \alpha(m(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))) \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlanır [11].

(3.1) eşitliği aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$\begin{aligned} m_N(a, b)_N &= \alpha(m(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b))) \\ &= \alpha(\alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a)) \\ &= b \dot{-} a. \end{aligned}$$

3.2.2. Tanım: $\mathbb{R}(N)$ de boştan farklı bir G α -açık kümesinin Newtonyen olmayan ölçüsü bileşen aralıklarının Newtonyen olmayan ölçülerinin toplamıdır. Yani

$$m_N(G) =_N \sum_k m_N(\delta_k).$$

Ayrıca

$$\begin{aligned} m_N(G) &=_N \sum_k m_N(a_k, b_k)_N \\ &=_N \sum_k \alpha(m(\alpha^{-1}(a_k), \alpha^{-1}(b_k))) \\ &= \alpha\left(\sum_k (m(\alpha^{-1}(a_k), \alpha^{-1}(b_k)))\right) \\ &=_N \sum_k b_k \dot{-} a_k. \end{aligned}$$

Burada $\delta_k = (a_k, b_k)_N$ dir. Ayrıca

$$G = \bigcup_k \delta_k = \bigcup_k (a_k, b_k)_N = \bigcup_k \alpha(\alpha^{-1}(a_k), \alpha^{-1}(b_k)) = \alpha\left(\bigcup_k (\alpha^{-1}(a_k), \alpha^{-1}(b_k))\right)$$

olduğu kolayca görülür.

α - üretici 1-1 olduğundan $(\alpha^{-1}(a_k), \alpha^{-1}(b_k))$ $k = 1, 2, \dots$ aralıkları $\alpha^{-1}(G)$ 'nin bileşen aralıklarıdır [11].

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1. α - Kapalı, α - Sınırlı Kümelerin Newtonyen Olmayan Ölçüsü

4.1.1.Tanım: $\mathbb{R}(N)$ de boştan farklı α - sınırlı, α - kapalı bir F kümesinin α -ölçüsü

$$m_N F = \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)) - m(\alpha^{-1}(C_S^F)) \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $S = [A, B]_N$, F kümesini içeren en küçük α - kapalı aralık ve $C_S^F = S - F$ α - açıktır. Dolayısıyla C_S^F α - açık kümelerin birleşimi şeklinde yazılabilir.

Yukarıdaki tanım aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir. Yine C_S^F α - açık olduğundan

$$C_S^F = \bigcup_k (a_k, b_k)_N \text{ şeklinde yazılabilir.}$$

$$\begin{aligned} m_N F &= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)) - m(\alpha^{-1}(C_S^F)) \right\} \\ &= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)) - m\left(\alpha^{-1}\left(\bigcup_k (a_k, b_k)_N\right)\right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)) - m\left(\bigcup_k (\alpha^{-1}(a_k), \alpha^{-1}(b_k))\right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(A), \alpha^{-1}(B)) - \sum_k (\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k)) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(B) - \alpha^{-1}(A) - \sum_k (\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k)) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(B) - \alpha^{-1}(A))) - \alpha^{-1}\left(\alpha\left(\sum_k (\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k))\right)\right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(B \div A) - \alpha^{-1}\left(\sum_k b_k \div a_k\right) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(B \dot{\div} A) - \alpha^{-1} \left(\sum_k m_N(a_k, b_k)_N \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(B \dot{\div} A) - \alpha^{-1}(m_N C_S^F) \right\} \\
&= B \dot{\div} A \dot{\div} m_N C_S^F
\end{aligned}$$

elde edilir.

Eğer $F = [a, b]_N$ alınırsa bu durumda $S = [a, b]_N$ olur ve F kümesinin Newtonyen olmayan ölçüsü

$$\begin{aligned}
m_N F &= \alpha \left\{ (\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) - m(\alpha^{-1}(\emptyset)) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a) - 0 \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a) \right\} \\
&= b \dot{\div} a
\end{aligned}$$

olur.

Eğer F kümesi sonlu sayıda ikiye ikiye ayrık α -kapalı aralıkların birleşimi yani

$$F = [a_1, b_1]_N \cup [a_2, b_2]_N \cup \dots \cup [a_n, b_n]_N \text{ ise } S = [a_1, b_n]_N \text{ olur.}$$

Böylece

$$\begin{aligned}
C_S^F &= [a_1, b_n]_N - \{ [a_1, b_1]_N \cup [a_2, b_2]_N \cup \dots \cup [a_n, b_n]_N \} \\
&= (b_1, a_2)_N \cup (b_2, a_3)_N \cup \dots \cup (b_{n-1}, a_n)_N \\
&= \bigcup_{k=1}^{n-1} (b_k, a_{k+1})_N
\end{aligned}$$

olur. Böylece α -kapalı bu F kümesinin α -ölçüsü

$$\begin{aligned}
m_N F &= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(a_1), \alpha^{-1}(b_n)) - m \left(\alpha^{-1} \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (b_k, a_{k+1})_N \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(a_1), \alpha^{-1}(b_n)) - m \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (\alpha^{-1}(b_k), \alpha^{-1}(a_{k+1})) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b_n) - \alpha^{-1}(a_1) - m \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} (\alpha^{-1}(b_k), \alpha^{-1}(a_{k+1})) \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b_n) - \alpha^{-1}(a_1) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha^{-1}(a_{k+1}) - \alpha^{-1}(b_k)) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b_n) - \alpha^{-1}(a_1) - (\alpha^{-1}(a_2) - \alpha^{-1}(b_1) + \dots + \alpha^{-1}(a_n) - \alpha^{-1}(b_{n-1})) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b_n) - \alpha^{-1}(a_1) - \alpha^{-1}(a_2) + \alpha^{-1}(b_1) - \dots - \alpha^{-1}(a_n) + \alpha^{-1}(b_{n-1}) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b_1) + \alpha^{-1}(b_2) + \dots + \alpha^{-1}(b_n) - \alpha^{-1}(a_1) - \alpha^{-1}(a_2) - \dots - \alpha^{-1}(a_n) \right\} \\
&= b_1 \dot{+} b_2 \dot{+} \dots \dot{+} b_n \dot{-} a_1 \dot{-} a_2 \dot{-} \dots \dot{-} a_n \\
&= \sum_{k=1}^n b_k \dot{-} a_k
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

4.1.2. Örnek: α üretici $\exp$ fonksiyonu olarak seçilsin ve $F = [a_1, b_1]_N \cup [a_2, b_2]_N$ olsun. Bu durumda $S = [a_1, b_2]_N$ ve $C_S^F = (b_1, a_2)_N$ olur. Bu durumda F kümesinin α -ölçüsü

$$\begin{aligned}
m_N F &= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(a_1), \alpha^{-1}(b_1)) - m(\alpha^{-1}(b_1, a_2)_N) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b_1) - \alpha^{-1}(a_1) - m(\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(b_1), \alpha^{-1}(a_2)))) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b_1) - \alpha^{-1}(a_1) - m(\alpha^{-1}(b_1), \alpha^{-1}(a_2)) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b_1) - \alpha^{-1}(a_1) - \alpha^{-1}(a_2) + \alpha^{-1}(b_1) \right\} \\
&= \exp \{ \ln b_1 - \ln a_1 - \ln a_2 + \ln b_1 \} \\
&= \exp \{ \ln(b_1 b_2) - \ln(a_1 a_2) \} \\
&= \exp \left\{ \ln \left(\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} \right) \right\} \\
&= \frac{b_1 b_2}{a_1 a_2}
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

4.1.3. Teorem: α -sınırlı, α -kapalı F kümesinin ölçüsü α -negatif değildir.

İspat : $S=[a,b]_N$ F kümesini içeren en küçük α -kapalı aralık olsun. Buradan

$$m_N F = \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) - m(\alpha^{-1}(C_S^F)) \right\} \geq \alpha(0)$$

olur.

4.1.4. Lemma: α -sınırlı, α -kapalı bir F kümesi verilsin. Yine Δ α -açık aralık, F kümesini kapsasın. Bu takdirde

$$m_N F = m_N \Delta \div m_N C_\Delta^F$$

olur.

İspat: Burada $\Delta = (A, B)_N$ ve $S = [a, b]_N$, F α -kapalı kümesini içeren en küçük

α -kapalı aralık olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} m_N F &= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) - m(\alpha^{-1}(C_S^F)) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a) - m(\alpha^{-1}(C_S^F)) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(B) - \alpha^{-1}(A) - m(\alpha^{-1}(C_\Delta^F)) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(B) - \alpha^{-1}(A) - \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m(\alpha^{-1}(C_\Delta^F)) \right) \right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(B) - \alpha^{-1}(A) - \alpha^{-1} \left(m_N(\alpha^{-1}(C_\Delta^F)) \right) \right\} \\ &= B \div A \div m_N C_\Delta^F \\ &= m_N \Delta \div m_N C_\Delta^F \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

4.1.5. Teorem: F_1 ve F_2 α -sınırlı, α -kapalı iki küme olsun. Eğer $F_1 \subset F_2$ ise

$$m_N F_1 \leq m_N F_2$$

sağlanır.

İspat: $S = (a, b)_N$, F_2 kümesini içeren α -açık aralık olsun. Böylece

$$m_N F_1 = \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) - m(\alpha^{-1}(C_S^{F_1})) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a) - m(\alpha^{-1}(C_S^{F_1})) \right\} \\
&\leq \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a) - m(\alpha^{-1}(C_S^{F_2})) \right\} \\
&= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) - m(\alpha^{-1}(C_S^{F_2})) \right\} \\
&= m_N F_2
\end{aligned}$$

olur. Buradan ispat tamamlanır.

4.1.6. Teorem: F α -kapalı, α -sınırlı bir küme ve G α -açık, sınırlı bir küme olsun. Eğer $F \subset G$ ise $m_N F \leq m_N G$ sağlanır.

İspat: $S = [a, b]_N$, G α -açık kümesini içeren en küçük α -kapalı aralık olsun. Yine G bir α -açık küme olduğundan $G = \bigcup_k (a_k, b_k)_N$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca S , F kümesini de içerir. O zaman

$$\begin{aligned}
m_N F &= \alpha \left\{ m(\alpha^{-1}(a), \alpha^{-1}(b)) - m(\alpha^{-1}(C_S^F)) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1}(b) - \alpha^{-1}(a) - m(\alpha^{-1}(C_S^F)) \right\} \\
&\leq \alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k)) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k))) \right\} \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k)) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} b_k - a_k \\
&= m_N G
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$m_N F \leq m_N G$$

olduğu elde edilir.

4.1.7. Teorem: α -sınırlı, α -açık G kümesinin α -ölçüsü, G kümesi tarafından kapsanan bütün α -kapalı kümelerin ölçülerinin en küçük üst sınırıdır.

İspat: Teorem 4.1.6 gereğince $m_N G$, $F \subset G$ koşulunu sağlayan bütün F α -kapalı kümelerin ölçülerinin bir α -üst sınırıdır. α -açık G kümesi

$G = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\lambda_k, \mu_k)_N$ şeklinde yazılabilir. Böylece

$$m_N G = \sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}(m_N G) &= \alpha^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\mu_k - \lambda_k)\right) \\ &= \alpha^{-1}\left(\alpha\left(\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}(\mu_k - \lambda_k)\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}\left(\alpha\left(\alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k)\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k) \end{aligned}$$

yazılır. Ayrıca

$$\alpha^{-1}(m_N G) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k)$$

olduğundan her $\varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=1}^n (\alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k)) > \alpha^{-1}(m_N G) - \frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{2}$$

olacak şekilde bir n doğal sayısı vardır. Buradan

$$\begin{aligned} \alpha^{-1}\left(\alpha\left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k)\right)\right) &> \alpha^{-1}\left(\alpha\left(\alpha^{-1}(m_N G) - \frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{2}\right)\right) \\ \Rightarrow \alpha\left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k)\right) &> \alpha\left(\alpha^{-1}(m_N G) - \frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(\alpha^{-1}(m_N G) - \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{\alpha^{-1}(\alpha(2))} \right) \right) \right) \\
&= \alpha \left(\alpha^{-1}(m_N G) - \alpha^{-1} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha(2)} \right) \right)
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\sum_{k=1}^n \mu_k \cdot \lambda_k \geq m_N G \pm \frac{\varepsilon}{2}$$

bulunur. Her $k (k=1,2,\dots,n)$ için $[a_k, b_k]_N \subset (\lambda_k, \mu_k)_N$ olacak şekilde α -kapalı

$[a_k, b_k]_N$ aralıkları göz önüne alınsın. Böylece

$$\alpha[\alpha^{-1}(a_k), \alpha^{-1}(b_k)] \subset \alpha(\alpha^{-1}(\lambda_k), \alpha^{-1}(\mu_k))$$

yazılır. Buradan

$$[\alpha^{-1}(a_k), \alpha^{-1}(b_k)] \subset (\alpha^{-1}(\lambda_k), \alpha^{-1}(\mu_k))$$

olur. Bu kapsama kullanılarak

$$\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k) \geq \alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k) - \frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{2n}$$

yazılır. Böylece

$$\alpha^{-1}(\alpha(\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k))) \geq \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k) - \frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{2n} \right) \right)$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha^{-1}(b_k) - \alpha^{-1}(a_k)) \geq \alpha \left(\alpha^{-1}(\mu_k) - \alpha^{-1}(\lambda_k) - \frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{\alpha^{-1}(\alpha(2n))} \right)$$

$$\Rightarrow m_N[a_k, b_k]_N \geq m_N(\lambda_k, \mu_k)_N \pm \frac{\varepsilon}{\alpha(2n)}$$

olur. Bir F_0 kümesi

$$F_0 = \bigcup_{k=1}^n [a_k, b_k]_N$$

şeklinde tanımlansın. $F_0 \subset G$ ve F_0 α -kapalıdır. Buradan

$$\begin{aligned}
m_N F_0 &= {}_N \sum_{k=1}^n b_k \dot{-} a_k \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1} (b_k \dot{-} a_k) \right) \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\alpha^{-1} (b_k) - \alpha^{-1} (a_k) \right) \right) \right) \\
&= \alpha \left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1} (b_k) - \alpha^{-1} (a_k) \right)
\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}
\alpha \left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1} (b_k) - \alpha^{-1} (a_k) \right) &\dot{\geq} \alpha \left(\sum_{k=1}^n \left(\alpha^{-1} (\mu_k) - \alpha^{-1} (\lambda_k) - \frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{2n} \right) \right) \\
&= \alpha \left(\left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1} (\mu_k) - \alpha^{-1} (\lambda_k) \right) - \frac{\alpha^{-1}(\varepsilon)}{2} \right) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^n \mu_k \dot{-} \lambda_k \dot{-} \frac{\varepsilon}{2} \\
&\dot{\geq} m_N G \dot{-} \frac{\varepsilon}{2} \dot{-} \frac{\varepsilon}{2} \\
&= m_N G \dot{-} \varepsilon
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $m_N F_0 \dot{\geq} m_N G \dot{-} \varepsilon$ olur ve $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan istenilen elde edilir.

4.1.8. Teorem: α -sınırlı, α -kapalı F kümesinin α -ölçüsü, F kümesini kapsayan α -sınırlı, α -açık kümelerin ölçülerinin en büyük alt sınırıdır.

İspat: α -kapalı F kümesini içeren bir α -açık Δ aralığı verilsin. Bu takdirde

$$m_N F = m_N \Delta \dot{-} m_N C_{\Delta}^F$$

olur. C_Δ^F kümesi α -açık olduğundan Teorem 4.1.6 gereğince $\Phi \subset C_\Delta^F$ olacak şekilde α -kapalı Φ kümesi vardır. Teorem 4.1.7 gereğince $\forall \varepsilon > 0$ için

$$m_N \Phi > m_N C_\Delta^F - \varepsilon$$

yazılır

$G_0 = C_\Delta^\Phi$ olsun. G_0 kümesi α -açıktır ve $F \subset G_0$ olur. Buradan

$$m_N G_0 = m_N \Delta + m_N \Phi$$

$$< m_N \Delta + m_N C_\Delta^F + \varepsilon$$

olur. Böylece

$$m_N G_0 < m_N F + \varepsilon$$

elde edilir.

4.1.9. Teorem: α -sınırlı, α -kapalı F kümesi sonlu sayıda ikiye ikiye ayrık α -kapalı kümelerin birleşimi olsun. Yani

$$F = \bigcup_{k=1}^n F_k \quad (F_k \cap F_{k'} = \emptyset \quad k \neq k')$$

olsun. Bu takdirde

$$m_N F = \sum_{k=1}^n m_N F_k$$

olur.

İspat: F α -kapalı olduğundan $\alpha^{-1}(F)$ $\mathbb{R}$ de kapalıdır. $F = \bigcup_{k=1}^n F_k$ olduğundan

$$\alpha^{-1}(F) = \alpha^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^n F_k\right) = \bigcup_{k=1}^n \alpha^{-1}(F_k)$$

olur. Dolayısıyla $\bigcup_{k=1}^n \alpha^{-1}(F_k)$ kümesi $\mathbb{R}$ de kapalıdır. Reel sayılarda Lebesgue ölçüsü özelliğinden

$$m(\alpha^{-1}(F)) = m\left(\bigcup_{k=1}^n \alpha^{-1}(F_k)\right)$$

olur. Buradan

$$\alpha^{-1}\left(\alpha\left(m\left(\alpha^{-1}(F)\right)\right)\right) = \alpha^{-1}\left(\alpha\left(m\left(\bigcup_{k=1}^n \alpha^{-1}(F_k)\right)\right)\right)$$

olup

$$\alpha\left(m\left(\alpha^{-1}(F)\right)\right) = \alpha\left(m\left(\bigcup_{k=1}^n \alpha^{-1}(F_k)\right)\right)$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} m_N F &= \alpha\left(\sum_{k=1}^n m\left(\alpha^{-1}(F)\right)\right) \\ &= \alpha\left(\sum_{k=1}^n \alpha^{-1}\left(\alpha\left(m\left(\alpha^{-1}(F)\right)\right)\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n m_N F_k \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2. Newtonyen Olmayan Kümelerin İç ve Dış Ölçüleri

4.2.1. Tanım: Boştan farklı α - sınırlı bir E kümesinin Newtonyen olmayan dış ölçüsü, E kümesini içeren tüm α - sınırlı, α - açık kümelerin ölçülerinin en büyük alt sınırıdır. Yani

$$m_N^* E = \alpha \inf_{E \subseteq G} \{m_N G\}$$

ile tanımlanır.

4.2.2. Tanım: Boştan farklı, α - sınırlı bir E kümesinin Newtonyen olmayan iç ölçüsü, E kümesinin içerdiği tüm α - kapalı kümelerin ölçülerinin en küçük üst sınırıdır. Yani

$$m_{*N} E = \alpha \sup_{F \subseteq E} \{m_N F\}$$

ile tanımlanır.

4.2.3. Teorem: G , α - sınırlı, α - açık küme ise, $m_N^* G = m_{*N} G = m_N G$ olur.

İspat: E, G kümesini içeren bir α - açık küme ve F, G kümesinin α - kapalı bir alt kümesi olsun. Böylece

$$\begin{aligned} m_N^* G &= \alpha \inf_{G \subseteq E} \{m_N E\} \\ &= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(G) \subseteq \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \{m_N E\} \right\} \\ &= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(G) \subseteq \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(E) \right) \right) \right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(G) \subseteq \alpha^{-1}(E)} m \left(\alpha^{-1}(E) \right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right\} \\ &= m_N G \end{aligned}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$m_{*N} G = \alpha \sup_{F \subseteq G} \{m_N F\}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} \{ m_N F \} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(G)} m \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right\} \\
&= \alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right) \\
&= m_N G
\end{aligned}$$

olur.

4.2.4. Teorem: F α - sınırlı, α - kapalı küme ise,

$$m_N^* F = m_{*N} F = m_N F$$

eşitliği vardır.

İspat: E, F α - kapalı kümesini içeren α - açık bir küme, G kümesi de F kümesinin α - kapalı bir altkümesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
m_N^* F &= \sup_{F \subset E} \{ m_N E \} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \{ m_N F \} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(E) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(E)} m \left(\alpha^{-1}(E) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ m \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right\} \\
&= m_N F
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
m_{*N} F &= \inf_{G \subset F} \{ m_N G \} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(G) \subset \alpha^{-1}(F)} \alpha^{-1} \{ m_N G \} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(G) \subseteq \alpha^{-1}(F)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(G) \subseteq \alpha^{-1}(F)} m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right\} \\
&= \alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right) \\
&= m_N F
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$m_N^* F = m_{\bullet N} F = m_N F$$

elde edilir.

4.2.5. Teorem: Her α - sınırlı E kümesi için $m_{\bullet N} E \leq m_N^* E$ eşitsizliği geçerlidir.

İspat: G , E kümesini içeren α - açık küme, F kümesi de E kümesinin α - kapalı bir alt kümesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
m_{\bullet N} E &= \sup_{F \subseteq E} \{m_N F\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subseteq \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \{m_N F\} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subseteq \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subseteq \alpha^{-1}(E)} m \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right\} \\
&\leq \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subseteq \alpha^{-1}(G)} m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subseteq \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subseteq \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} \{m_N G\} \right\} \\
&= \sup_{E \subseteq G} \{m_N G\} \\
&= m_N^* E
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.6. Teorem: A ve B α - sınırlı kümeler olsun. $A \subset B$ ise

$$m_{\bullet N} A \leq m_{\bullet N} B \text{ ve } m^{\bullet}_N A \leq m^{\bullet}_N B$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: E, A kümesini içeren α - açık küme ve G kümesi de A kümesinin α - kapalı bir alt kümesi olsun. Ayrıca K, B kümesini içeren α - açık küme ve L kümesi de B kümesinin α - kapalı bir alt kümesi olsun.

$$\begin{aligned} m_{\bullet N} A &= {}^a \sup_{E \subset A} \{m_N E\} \\ &= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(A)} \alpha^{-1} \{m_N E\} \right\} \\ &= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(A)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(E) \right) \right) \right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(A)} m \left(\alpha^{-1}(E) \right) \right\} \\ &\leq \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(L) \subset \alpha^{-1}(B)} m \left(\alpha^{-1}(L) \right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(L) \subset \alpha^{-1}(B)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(L) \right) \right) \right) \right\} \\ &= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(L) \subset \alpha^{-1}(B)} \alpha^{-1} \{m_N L\} \right\} \\ &= {}^a \sup_{L \subset B} \{m_N L\} \\ &= m_{\bullet N} B \end{aligned}$$

bulunur. Yine

$$\begin{aligned} m^{\bullet}_N A &= {}^a \inf_{A \subset E} \{m_N E\} \\ &= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(A) \subset \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \{m_N E\} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(A) \subseteq \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(E) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(F) \subseteq \alpha^{-1}(E)} m \left(\alpha^{-1}(E) \right) \right\} \\
&\leq \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(B) \subseteq \alpha^{-1}(K)} m \left(\alpha^{-1}(K) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(B) \subseteq \alpha^{-1}(K)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(K) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(B) \subseteq \alpha^{-1}(K)} \alpha^{-1} \{ m_N K \} \right\} \\
&= {}^{\alpha} \inf_{B \subseteq K} \{ m_N K \} \\
&= m_N^* B
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.7. Teorem: α - sınırlı bir E kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz bir E_k kümesinin birleşimi yani

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \text{ olsun.}$$

Bu durumda

$$m_N^* E \leq_N \sum_{k=1}^{\infty} m_N^* E_k$$

sağlanır.

İspat: $\sum_{k=1}^{\infty} m_N^* E_k$ α - ıraksak ise ispat açıktır.

Bu serinin α - yakınsak olduğunu kabul edelim.

G , E kümesini içeren α - açık küme ve G_k kümeleri de E_k kümelerini içeren α - açık kümeler olsun. Buradan

$$m_N^* E = {}^{\alpha} \inf_{E \subseteq G} \{ m_N G \}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subseteq \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} \{m_N G\} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subseteq \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subseteq \alpha^{-1}(G)} m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right\} \\
&\leq \alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{\alpha^{-1}(E_k) \subseteq \alpha^{-1}(G_k)} m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\inf_{\alpha^{-1}(E_k) \subseteq \alpha^{-1}(G_k)} m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right) \right) \right\} \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \left(\inf_{\alpha^{-1}(E_k) \subseteq \alpha^{-1}(G_k)} \left(m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right) \right) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \left(\inf_{\alpha^{-1}(E_k) \subseteq \alpha^{-1}(G_k)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right) \right) \right) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} \inf_{\alpha^{-1}(E_k) \subseteq \alpha^{-1}(G_k)} \left(m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} m_N^* E_k
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.8. Teorem: α - sınırlı bir E kümesi sonlu ya da sayılabilir sonsuz sayıdaki ikiye

ikişer ayrık E_k kümelerinin birleşimi yani

$$E = \bigcup_k E_k \quad (E_k \cap E_{k'} = \emptyset \quad k \neq k')$$

olsun. Bu durumda

$$m_N E \geq {}_N \sum_{k=1}^{\infty} m_N E_k$$

sağlanır.

İspat: G, E kümesini içeren α kapalı bir altkümesi ve G_k kümeleri de E_k kümelerinin

α -kapalı altkümeleri olsun. Buradan

$$\begin{aligned}
m_{\bullet N} E &= {}^a \sup_{G \subset E} \{m_N G\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(G) \subset \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \{m_N G\} \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(G) \subset \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(G) \subset \alpha^{-1}(E)} m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right\} \\
&\geq \alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{\alpha^{-1}(G_k) \subset \alpha^{-1}(E_k)} m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\sup_{\alpha^{-1}(G_k) \subset \alpha^{-1}(E_k)} m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right) \right) \right\} \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \left(\sup_{\alpha^{-1}(G_k) \subset \alpha^{-1}(E_k)} m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} \alpha \left(\sup_{\alpha^{-1}(G_k) \subset \alpha^{-1}(E_k)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right) \right) \right) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} \left({}^a \sup_{\alpha^{-1}(G_k) \subset \alpha^{-1}(E_k)} \alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G_k) \right) \right) \right) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} \left({}^a \sup_{\alpha^{-1}(G_k) \subset \alpha^{-1}(E_k)} m_N (G_k) \right) \\
&= {}_N \sum_{k=1}^{\infty} m_{\bullet N} E_k
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.2.9. Teorem: α - sınırlı bir E kümesi verilsin. Eğer Δ , E kümesini içeren α - açık bir aralık ise,

$$m_{\bullet N}^* E + m_{\bullet N} [C_{\Delta}^E] = m_N \Delta$$

sağlanır.

İspat: G , E kümesini içeren α - açık küme ve K da C_{Δ}^E kümesinin α - kapalı bir altkümesi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
m^*_N E + m_{\bullet N} [C^E_\Delta] &= \alpha \left\{ \alpha^{-1} (m^*_N E) + \alpha^{-1} (m_{\bullet N} [C^E_\Delta]) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\inf_{E \subset G} m_N G \right) + \alpha^{-1} \left(\sup_{K \subset C^E_\Delta} m_N K \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\inf_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} (m_N G) \right) \right) + \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\sup_{\alpha^{-1}(K) \subset \alpha^{-1}(C^E_\Delta)} \alpha^{-1} (m_N K) \right) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} (m_N G) + \sup_{\alpha^{-1}(K) \subset \alpha^{-1}(C^E_\Delta)} \alpha^{-1} (m_N K) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} \left(\alpha (m(\alpha^{-1}(G))) \right) + \sup_{\alpha^{-1}(K) \subset \alpha^{-1}(C^E_\Delta)} \alpha^{-1} \left(\alpha (m(\alpha^{-1}(K))) \right) \right\} \\
&= \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(G)} m(\alpha^{-1}(G)) + \sup_{\alpha^{-1}(K) \subset \alpha^{-1}(C^E_\Delta)} m(\alpha^{-1}(K)) \right\} \\
&= \alpha \left\{ m^* (\alpha^{-1}(E)) + m_{\bullet} (\alpha^{-1}(C^E_\Delta)) \right\} \\
&= \alpha \{ m(\alpha^{-1}(\Delta)) \} \\
&= m_N \Delta
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.3. Newtonyen Olmayan Ölçülebilir Kümeler

4.3.1. Tanım: α - sınırlı bir E kümesinin Newtonyen olmayan iç ve dış ölçüleri eşit ise, E kümesine Newtonyen olmayan ölçülebilir küme ya da kısaca α - ölçülebilir küme denir.

G, E kümesini içeren α - açık küme ve F kümesi de E kümesinin α - kapalı bir altkütmesi olsun. Bu durumda

$$m_N^* E = \alpha \inf_{E \subset G} \{m_N G\} \text{ ve } m_{*N} E = \alpha \sup_{F \subset E} \{m_N F\}$$

olur ve $m_{*N} E = m_N^* E$ olduğundan

$$\alpha \inf_{E \subset G} \{m_N G\} = \alpha \sup_{F \subset E} \{m_N F\}$$

$$\Rightarrow \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(G)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right) \right) \right\} = \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(E)} \alpha^{-1} \left(\alpha \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(G)} m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right\} = \alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(E)} m \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right\}$$

$$\Rightarrow \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \inf_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(G)} m \left(\alpha^{-1}(G) \right) \right\} \right) = \alpha^{-1} \left(\alpha \left\{ \sup_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(E)} m \left(\alpha^{-1}(F) \right) \right\} \right)$$

$$\Rightarrow \inf_{\alpha^{-1}(E) \subset \alpha^{-1}(G)} m \left(\alpha^{-1}(G) \right) = \sup_{\alpha^{-1}(F) \subset \alpha^{-1}(E)} m \left(\alpha^{-1}(F) \right)$$

$$\Rightarrow m^* \left(\alpha^{-1}(E) \right) = m_* \left(\alpha^{-1}(E) \right)$$

yazılır.

Bu tanıma göre E kümesi α - ölçülebilir küme ise $\alpha^{-1}(E)$, $\mathbb{R}$ de ölçülebilirdir.

4.3.2. Teorem: α - sınırlı, α - açık kümeler α - ölçülebilirdir.

İspat: F α - sınırlı, α - açık küme olsun. Bu durumda Teorem 4.2.3 gereğince $m_N^* F = m_{*N} F$ olur. Bu durumda F kümesi α - ölçülebilirdir.

4.3.3. Teorem: Her α - sınırlı, α - kapalı küme α - ölçülebilirdir.

İspat: G α - sınırlı, α - kapalı bir küme olsun. Bu durumda Teorem 4.2.4 gereğince

$m_N^* G = m_{*N} G$ yazılır. Dolayısıyla G kümesi α - ölçülebilir bir kümedir.

4.3.4. Teorem: α -sınırlı bir E kümesi verilsin. Eğer E kümesi ikişer ikişer ayrık α -ölçülebilir E_k kümelerin sonlu ya da sayılabilir sonsuz kümelerinin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa E , α -ölçülebilirdir ve $m_N E = \sum_N m_N E_k$

eşitliği sağlanır.

İspat: $E_k \cap E_{k'} = \emptyset$ $k \neq k'$, olmak üzere $E = \bigcup_k E_k$ şeklinde yazılsın. Bu durumda

$$m_N^* E \leq \sum_N m_N^* E_k \quad \text{ve} \quad m_{*N} E \geq \sum_N m_{*N} E_k$$

yazılır. E , α -sınırlı bir küme olduğundan $m_{*N} E \leq m_N^* E$ dir.

E_k kümeleri α -ölçülebilir kümeler olduğundan

$$\sum_N m_N E_k = \sum_N m_{*N} E_k \leq m_{*N} E \leq m_N^* E \leq \sum_N m_N^* E_k = \sum_N m_N E_k$$

yazılır. Dolayısıyla $m_{*N} E = m_N^* E$ dir. Bu durumda E kümesi α -ölçülebilirdir ve $m_N E = \sum_N m_N E_k$ elde edilir.

4.3.5. Teorem: Sonlu sayıda α -ölçülebilir kümenin birleşimi yine α -ölçülebilirdir.

İspat: E_k kümeleri α -ölçülebilir kümeler olmak üzere $E = \bigcup_{k=1}^n E_k$ olsun.

E_k kümeleri α -ölçülebilir olduğundan $\alpha^{-1}(E_k)$ kümeleri $\mathbb{R}$ de ölçülebilirdir.

Bu durumda $\bigcup_{k=1}^n \alpha^{-1}(E_k)$ kümeleri de ölçülebilirdir. Buradan

$\bigcup_{k=1}^n \alpha^{-1}(E_k) = \alpha^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) = \alpha^{-1}(E)$ yazılır. Böylece $\alpha^{-1}(E)$ ölçülebilirdir. Bu ise E kümesinin α -ölçülebilir küme olduğunu gösterir.

4.3.6. Teorem: Sonlu sayıda α -ölçülebilir kümenin kesişimi yine α -ölçülebilir kümedir.

İspat: E_k kümeleri α -ölçülebilir kümeler olmak üzere $E = \bigcap_{k=1}^n E_k$ olsun. E_k

kümeleri α -ölçülebilir olduğundan $\alpha^{-1}(E_k)$ kümeleri ölçülebilirdir. Dolayısıyla

$\bigcap_{k=1}^n \alpha^{-1}(E_k)$ kümesi de ölçülebilirdir. Ayrıca

$$\bigcap_{k=1}^n \alpha^{-1}(E_k) = \alpha^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^n E_k\right) = \alpha^{-1}(E)$$

yazılabileceğinden $\alpha^{-1}(E)$ ölçülebilirdir. Dolayısıyla E kümesi α - ölçülebilir kümedir.

4.3.7. Teorem: İki α - ölçülebilir kümenin farkları da α - ölçülebilir bir kümedir.

İspat: E_1 ve E_2 kümeleri α - ölçülebilir kümeler olmak üzere $E = E_1 \setminus E_2$ olsun. E_1 ve E_2 kümeleri α - ölçülebilir olduğundan $\alpha^{-1}(E_1)$ ve $\alpha^{-1}(E_2)$ kümeleri de ölçülebilirdir. Dolayısıyla $\alpha^{-1}(E_1) \setminus \alpha^{-1}(E_2)$ kümesi de ölçülebilirdir. Böylece

$$\alpha^{-1}(E_1) \setminus \alpha^{-1}(E_2) = \alpha^{-1}(E_1 \setminus E_2) = \alpha^{-1}(E)$$

olduğundan $\alpha^{-1}(E)$ ölçülebilir bir kümedir. Buradan E kümesi α - ölçülebilirdir.

4.3.8. Teorem: E_1 ve E_2 α - ölçülebilir kümeler olsun. Eğer $E_2 \subset E_1$ ve $E = E_1 \setminus E_2$

$$\text{ise } m_N E = m_N E_1 - m_N E_2$$

sağlanır.

İspat: E_1 ve E_2 α - ölçülebilir olduğundan Teorem 4.3.7 gereğince $E_1 \setminus E_2$ de α - ölçülebilirdir. $E = E_1 \setminus E_2$ olduğundan $E_1 = E \cup E_2$ yazılır. Teorem 4.3.4 gereğince

$$m_N E_1 = m_N E + m_N E_2 \text{ olur.}$$

4.3.9. Teorem: Eğer α - sınırlı bir E kümesi sayılabilir α - ölçülebilir kümelerin birleşimi ise E kümesi de α - ölçülebilirdir.

İspat: E_k , $k = 1, 2, \dots$ α - ölçülebilir kümeler olmak üzere $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ olsun. E_k

kümeleri α - ölçülebilir olduğundan $\alpha^{-1}(E_k)$ kümesi de $\mathbb{R}$ de ölçülebilirdir. Böylece

$$\alpha^{-1}(A_1) = \alpha^{-1}(E_1)$$

$$\alpha^{-1}(A_2) = \alpha^{-1}(E_2) \setminus \alpha^{-1}(E_1)$$

$$\alpha^{-1}(A_3) = \alpha^{-1}(E_3) \setminus (\alpha^{-1}(E_1) \cup \alpha^{-1}(E_2))$$

$\vdots$

$$\alpha^{-1}(A_n) = \alpha^{-1}(E_n) \setminus (\alpha^{-1}(E_1) \cup \dots \cup \alpha^{-1}(E_{n-1}))$$

$\vdots$

şeklinde tanımlanan $\alpha^{-1}(A_n)$, $n = 1, 2, \dots$ ikişer ikişer ayrık ölçülebilir kümelerdir.

Ayrıca

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}(A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}(E_k) = \alpha^{-1}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \alpha^{-1}(E)$$

yazılır. Böylece $\alpha^{-1}(A_k)$ kümeleri ikişer ikişer ayrık olduğundan Teorem 4.3.4 gereğince $\alpha^{-1}(E)$ ölçülebilirdir. Bu ise E kümesinin α - ölçülebilir olduğunu gösterir.

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Konu ile ilgili yapılan literatür taraması sonucunda bildiğimiz kadarıyla Newtonyen Olmayan açık kümeler için ölçü tanımlandığı halde kapalı ve sınırlı kümeler için tanımlanmadığı tespit edilmiştir. Bu tez çalışmasında ilk kez Newtonyen olmayan kapalı, sınırlı kümeler için Lebesgue ölçüsü tanımlanmıştır. Daha sonra Newtonyen olmayan açık ve kapalı kümelerin ölçülerinden yararlanılarak Newtonyen olmayan iç ve dış ölçü tanımlanmış ve temel teoremler verilmiştir. Son olarak Newtonyen olmayan ölçü tanımlanmış ve teoremler verilmiştir.

Bu tez çalışmasından yararlanılarak Newtonyen olmayan ölçülebilir fonksiyonlar tanımlanabilir. Ayrıca Newtonyen olmayan Lebesgue integrali tanımlanıp, ilgili teoremler verilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Grossman M., Katz R., Non-Newtonian calculus, 1 st ed., Press, Piagen Cove Massuchusets, 1972.
- [2] Grossman M., Bigeometric Calculus: A System with a Scale Free Deriative, 1 st ed., Archimedes Foundation, Rockport Massachusets, 1983.
- [3] Grossman J., Meta Calculus: Differential and İntegral 1 st ed., Archimedes Foundation, Rockport Massachusets, 1981.
- [4] Uzer A., Multiplicative type complex calculus as an alternative to the classical calculus, Computers and Mathematics with Applications, 60, 2725-2737, 2010.
- [5] Türkmen C., Başar F., Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus, First International Conference on Analysis and Applied Mathematicch Gumushane, Turkey, 18-21 Ekim, 2012.
- [6] Çakmak A. F., Başar F., Some new results on sequence spaces with respert to non-Newtonian calculus, Journal of Inequalities and Applications, 228, 1-12, 2012.
- [7] Bashirov A. E., Misirli Kurpınar E., Ozyapıcı A., Multiplicative calculus and its applications, 337, 36-48, 2008.
- [8] Bashirov A. E., Riza M., On complex Multiplicative differentiation, TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 1(1), 75-85, 2011.
- [9] Duyar C., Sağır B., Oğur O., Some basic topological properties on non-Newtonian real line, British Journal of Mathematics and Computer Science, 9(4), 300-307, 2015.
- [10] Duyar C., Oğur O., A note on Topology of non-Newtonian Real Numbers, Journal of Mathematics, 13(6), 11-14, 2017.
- [11] Duyar C., Sağır B., Non-Newtonian comment of Lebesgue Measure in Real numbers, Journal of Mathematics, Article ID 6507013, 1-4, 2017.

- [12] Megginiss J. R., Non-Newtonian Calculus Applied to probability, utility, and Bayesi an Analysis. American statistical Assolation: Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, 405-410, 1980.
- [13] Florak L., Van Assen H., Multiplicative calculus in biomedical image anaysis, Journal of Mathematical İmaging and Vision, 42(1), 64-75, 2012.
- [14] Filip D., Piatecki C., A non-Newtonian examination of the theory of exogenous growth, Mathematica Aeterna, 4(2), 101-117, 2014.
- [15] Fatma Nur Erdoğan, Newtonyen Olmayan Reel Sayılarda Fonksiyon Dizileri ve Serileri, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, Yüksek Lisans Tezi, 2016.
- [16] Murat Erdoğan , Newtonyen Olmayan Reel Sayı Serileri ve Has Olmayan İntegraller, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun, Yüksek Lisans Tezi, 2016.
- [17] Natanson I.P., Theory of function of a real variable, vol. 1, Frederick Ungar Publishing Co., New York, NY, USA, 1964.
- [18] Uğur Kadak, Newtonyen Olmayan Analiz ve Çeşitli Uygulamaları, Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara, Doktora Tezi, 2015.

ÖZGEÇMİŞ

Sezgin DEMİR 1991 yılında Giresun’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Giresun’da tamamladı. 2010 yılında Eynesil Anadolu Lisesi’nden mezun oldu. 2011 yılında başladığı Giresun Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nü 2015 yılında bitirdi. 2016 yılında Giresun Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Yüksek lisans eğitimine devam etmektedir.