

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülen TÜMER

**REGRESYON MODELLERİNDE EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN
EDİCİLERİ**

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2010

**ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**REGRESYON MODELLERİNDE EN KÜÇÜK KARELER
TAHMİN EDİCİLERİ**

Gülen TÜMER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Bu tez/....../..... Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından
Oybirliği/Oyçokluğu İle Kabul Edilmiştir.

İmza.....
Prof. Dr. Fikri AKDENİZ
Danışman

İmza.....
Prof. Dr. Olcay ARSLAN
Üye

İmza.....
Prof. Dr. Altan ÇABUK
Üye

Bu tez Enstitümüz İstatistik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların
kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümler tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS

REGRESYON MODELLERİNDE EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN
EDİCİLERİ

Gülen TÜMER

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
İSTATİSTİK ANABİLİM DALI

Danışman: Prof. Dr. Fikri AKDENİZ

Yıl: 2010, **Sayfa:**75

Jüri : Prof. Dr. Fikri AKDENİZ

Prof. Dr. Olcay ARSLAN

Prof. Dr. Altan ÇABUK

$$y = Xb + e, e \sim (0, s^2 I_n)$$

standart lineer modelini düşünelim. b nın en küçük kareler (EKK) tahmin edicisi $\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$ dir.

$Z: n \times p \pm 1$ lerin ve sıfırların matrisi olmak üzere $Z'Xb = Z'y$ ifadesine göre $E(b^{\#}) = b$ beklenen değeri ve $Var(b^{\#}) = s^2(Z'X)^{-1}Z'Z(X'Z)^{-1}$ varyansı ile $b^{\#} = (Z'X)^{-1}Z'y$ bir enstrumental değişken tahmin edicisidir. Householder dönüşümleri ile $e = y - Xb$ ya bağlı olarak $\hat{e}\hat{e}' = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2$ rezidü kareler toplamını minimum yapan b nın değeridir. $X = L^{-1}X_*$ ve $y = L^{-1}y_*$ ve $LL' = V$ olmak üzere genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $\hat{b} = (X_*'V^{-1}X_*)^{-1}X_*'V^{-1}y_*$ ve Givens dönüşümleri ile genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi $\hat{b} = U^{-1}(t_1 - T_{12}g_2)$ verilmiştir. Ayrıca, gerçek veri kümesi üzerinde Householder dönüşüm matrislerinin regresyon analizinde uygulaması yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: En Küçük Kareler, Genelleştirilmiş En Küçük Kareler, Householder Dönüşümü, Givens Dönüşümü.

ABSTRACT

MSc THESIS

LEAST SQUARES ESTIMATORS IN REGRESSION MODELS

Gülen TÜMER

DEPARTMENT OF STATISTICS
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
UNIVERSITY OF ÇUKUROVA

Supervisor: Prof. Dr. Fikri AKDENİZ

Year: 2010, **Pages:** 75

Jury : Prof. Dr. Fikri AKDENİZ

Prof. Dr. Olcay ARSLAN

Prof. Dr. Altan ÇABUK

The least squares (LS) estimator of b in the standard linear model $y = Xb + e$, $e \sim (0, s^2 I_n)$ is given by $\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y$.

According to $Z'Xb = Z'y$, $\hat{b} = (Z'X)^{-1} Z'y$, together with expectation value $E(\hat{b}) = b$ and variance $Var(\hat{b}) = s^2 (Z'X)^{-1} Z'Z (X'Z)^{-1}$, is known as an instrumental variable estimator, where Z is a given by $n \times p$ matrix of 1 and zeros. The sum of squared residuals $\hat{e}'\hat{e} = \sum_{i=1}^n \hat{e}_i^2$ minimized by b value, depend on the Householder transformations with $\hat{e} = y - X\hat{b}$.

Generalized least squares estimator is $\hat{b} = (X_*' V^{-1} X_*)^{-1} X_*' V^{-1} y_*$, with $X = L^{-1} X_*$, $y = L^{-1} y_*$ and $LL' = V$. Givens transformations with generalized LS estimator is given by $\hat{b} = U^{-1}(t_1 - T_{12}g_2)$.

In addition, Householder matrix transformations are applied in regression analysis for real dataset.

Key words: Least squares, generalized least squares, Householder transformation, Givens transformation.

TEŞEKKÜR

Çukurova Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma Prof. Dr. Fikri AKDENİZ danışmanlığında gerçekleştirilmiştir.

Bu tezin başlangıcından bitişine kadar sahip olduğuengin bilgi ve deneyimini benden esirgemeyen, değerli zamanını bana ayıran sevgili hocam ve danışmanım Prof. Dr. Fikri AKDENİZ’e sonsuz teşekkür ederim.

Ayrıca eğitim ve öğretim hayatım boyunca benden maddi ve manevi katkılarını esirgemeyen aileme teşekkürlerimi bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER	SAYFA
ÖZ.....	I
ABSTRACT.....	II
TEŞEKKÜR.....	III
İÇİNDEKİLER.....	IV
KISALTMALAR.....	VI
1. GİRİŞ.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Lineer İstatistiksel Model.....	2
1.3. Standart Lineer Model.....	3
1.4. $\hat{b}$ 'Nın Beklenen Değeri ve Varyansı.....	5
1.5. s^2 'nin En Küçük Kareler Tahmin Edicisi.....	7
2.ENSTRUMENTAL DEĞİŞKENİN TAHMİN EDİCİSİ.....	10
2.1. Giriş.....	10
2.2. Enstrumental Değişkenin Tahmin Edicisi I.....	10
2.3. Householder Yönteminin Bir Nonsimetrik Çeşiti.....	11
2.4. Enstrumental Değişken Tahmin Edicisi II.....	14
2.5.Householder Yöntemi İle Instrumental Değişken Tahmin Edicileri Hesaplama.....	15
3.GENELEŞTİRİLMİŞ EN KÜÇÜK KARELER TAHMİN EDİCİSİ.....	18
3.1. Giriş.....	18
3.2. Gruplandırılmış Veri.....	18
3.3. Üç Lineer Model.....	20
3.4. Genişletilmiş En Küçük Kareler Ve Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicileri.....	22
3.5. Elementer Hesapsal Yöntemler.....	24
3.6. Householder Dönüşümleri İle Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi.....	27
3.7. Householder Yönteminin Bir Geri Denemesi.....	30
3.8. Givens Dönüşümleri İle Genelleştirilmiş En Küçük	

Kareler Tahmin Edicisi.....	32
4. LİNEER OLMAYAN EKK PROBLEMLERİNİN ARDIŞIK ÇÖZÜMÜ	34
4.1. Giriş.....	34
4.2. Lineer olmayan EKK Problemlerinin ardışık Çözümü.....	34
5. LİNEER EKK PROBLEMLERİNİN ARDIŞIK ÇÖZÜMÜ.....	38
5.1. Giriş.....	38
5.2. Genelleştirilmiş EKK Tahmin Edicilerinin Ardışık Olarak Geliştirilmesi.....	38
5.3. Sıradan EKK Tahmin Edicisinin Ardışık Olarak Geliştirilmesi....	41
6. EKK TAHMİN EDİCİLERİ İÇİN KANONİK İFADELER VE UYGULAMA.....	45
6.1. Giriş.....	45
6.2. Standart Lineer Modelin Kanonik Formu.....	45
6.3. Householder Yönteminin Regresyon Analizine Uygulanması.....	57
6.4. β ve s^2 nin Yansız Tahmin Edicileri.....	65
6.5. β nın Minimum Varyans Yansız Lineer Tahmin Edicisi.....	67
7. SONUÇ VE ÖNERİLER	72
7.1. Sonuçlar ve Öneriler.....	72
KAYNAKLAR.....	73
ÖZGEÇMİŞ.....	75

KISALTMALAR

EKK : En Küçük Kareler

GEKK : Genelleştirilmiş En Küçük Kareler

1.GİRİŞ

1.1.Giriş

EKK yöntemi, birbirine bağlı olarak değişen iki fiziksel büyüklük arasındaki matematiksel bağıntıyı, mümkün olduğunca gerçeğe uygun bir denklem olarak yazmak için kullanılan, standart bir regresyon yöntemidir. Bir başka deyişle bu yöntem, ölçüm sonucu elde edilmiş veri noktalarına “mümkün olduğu kadar yakın” geçecek bir fonksiyon eğrisi bulmaya yarar. EKK yöntemi, basit doğrusal ve çoklu regresyon modellerinin çözümlenmesinde kullanılan tekniklerin temelidir.

Kurulan regresyon modeli problemle ilgili örnek olarak alınmış gözlemler kullanılarak hesaplanmaya çalışılır. Bu nedenle kurduğumuz modeldeki değerler tahmini değerler olacaktır. Tahmin olarak adlandırılan katsayıların gerçek katsayılara en yakın şekilde hesaplanması için geliştirilen yöntemlerden en iyisi EKK yöntemidir. Modele alınan bağımlı ve bağımsız değişkenler yapılan araştırmalarda yanlış ölçülmüş olabilir. Bu nedenle regresyon analizi için kurulan modelde, bağımlı ve bağımsız değişkenin yanı sıra hata terimi olarak isimlendirilen bir değişkenin de yer alması gerekir. Genel olarak hata teriminin minimum olması beklenir. Bu hatanın üstesinden gelmek için; denklemin verdiği teorik değerler ile ölçümlerin verdiği gerçek değerler arasındaki farkların karelerinin toplamını küçültme fikrinden yararlanılır. Bu fikir de EKK yöntemini oluşturur.

Ölçümler; hatalara neden olduğunda, bilinmeyen parametrelerin tahmininin tarihi Mısırlı matematikçi ve astronom Ptolemy (MS. 90-168) zamanından Gauss (1777-1855) ve Laplace (1749-1827)’a (en küçük kareler tahmini yönteminin mucitleri) kadar sürer. Ptolemy zamanından beri, astronomlar gözlemlerdeki olası ölçüm hatalarındaki ayarlamaları yapmadaki problemlerle karşı karşıyaydılar. Son 5 yüz yılda kısmen öznel kısmen nesnel çeşitli girişimler yapıldı ve sonuçta Gauss ve Laplace’ın büyük rolüyle en küçük kareler tahmini metodu keşfedildi. Bilindiği kadarıyla, EKK yöntemi ilk olarak 1795’te Carl Friedrich Gauss tarafından geliştirilmiştir. Ancak en küçük kareler yöntemi bir cebirsel yöntem olarak 1805 yılında Fransız matematikçi Adrien-Marie Legendre tarafından önerilmiştir. Daha

sonra 1809 da istatistiksel yöntem olarak Gauss tarafından geliştirilmiştir. (Gauss (1809))

Günümüzde ise çok değişkenli istatistik yöntemlerin çok geniş bir şekilde kullanılanlarından biridir.

Bu tezde öncelikle EKK in temelleri üzerinde durulacaktır. Tarihsel süreç içinde EKK problemine çeşitli yaklaşımlar incelenecektir.

1.2. Lineer İstatistiksel Model

Bir Y değişkeninin $X_1, X_2, \dots, X_p$ değişkenlerinin tümü ile lineer ilişkili olduğunu varsayalım.

$$Y = X_1 b_1 + X_2 b_2 + \dots + X_p b_p \quad (1.1)$$

ve $p+1$ değişkenin $n > p$ gözlemden oluşan bir kümesinden $b_1, b_2, \dots, b_p$ bilinmeyen parametrelerini tahmin etmek istiyoruz. $X_1, X_2, \dots, X_p$ ler hatasız fakat Y hatalı gözlenirse, Y nin i -inci gözlenen değeri, X değişkenlerinin gözlenen i -inci değerleri ile ilgilidir. O halde

$$Y = X_1 b_1 + X_2 b_2 + \dots + X_p b_p + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

yazılır. Bu denklemlerin matris formundaki gösterimi

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{1p} \\ X_{21} & X_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & X_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix}$$

ya da

$$y = X b + e \quad (1.3)$$

dir. e 'ın elemanlarının sıfır beklenen değer, sıfır kovaryans ve s^2 varyansına sahip olarak normal dağıldığını söyleyebiliriz. Bir tek X rasgele değişkeninin varyansı

$$Var(X) = E[X - E(X)]^2 \quad (1.4)$$

formülü ile verilir. X ve Y rasgele değişkenleri arasındaki kovaryans

$$Cov(X, Y) = E([X - E(X)][Y - E(Y)]) \quad (1.5)$$

dir.

1.3. Standart Lineer Model

$$y = Xb + e$$

ile gösterilen model standart model olarak düşünülecektir. 1.2.'de e vektörünün elemanlarının sıfır ortalama ve s^2 varyansı ile bağımsız olarak normal dağıldığını önerdik. O halde

$$E(e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E([e_i - E(e_i)]^2) = s^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ya da

$$E(e_i^2) = s^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

yazabiliriz. e_i ve e_j 'nin bağımsızlığı onların sıfır kovaryansa sahip olmaları anlamına gelir.

$$E\{[e_i - E(e_i)][e_j - E(e_j)]\} = 0, \quad i \neq j = 1, 2, \dots, n$$

ya da

$$E(e_i e_j) = 0, \quad i \neq j = 1, 2, \dots, n$$

Bu sonuçları birleştirerek

$$E \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(e_1) \\ E(e_2) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ E(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}$$

ya da

$$E(e) = 0$$

ve

$$E \left\{ \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_n \end{bmatrix} [e_1 e_2 \dots e_n] \right\} = E \begin{bmatrix} e_1 e_1 & e_1 e_2 & \cdot & \cdot & \cdot & e_1 e_n \\ e_2 e_1 & e_2 e_2 & \cdot & \cdot & \cdot & e_2 e_n \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ e_n e_1 & e_n e_2 & \cdot & \cdot & \cdot & e_n e_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(e_1^2) & E(e_1 e_2) & \cdot & \cdot & \cdot & E(e_1 e_n) \\ E(e_2 e_1) & E(e_2^2) & \cdot & \cdot & \cdot & E(e_2 e_n) \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ E(e_n e_1) & E(e_n e_2) & \cdot & \cdot & \cdot & E(e_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} s^2 0 & \mathbf{K} & 0 \\ 0 s^2 & \mathbf{O} & \mathbf{M} \\ 0 0 & \mathbf{L} & s^2 \end{bmatrix}$$

ya da

$$E(ee') = s^2 I_n$$

olur.

1.2.'in cebirsel modeli ile bu istatistiksel varsayımları birleştirerek standart lineer istatistiksel modele sahip oluruz. (Farebrother, (1988))

$$y = Xb + e \quad E(e) = 0 \quad E(ee') = s^2 I_n \quad (1.6)$$

1.4. $\hat{b}$ 'nın Beklenen Değeri ve Varyansı

$$y = Xb + e \quad E(e) = 0 \quad E(ee') = s^2 I_n$$

standart lineer modelde b 'nın EKK tahmin edicisi

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y \quad (1.7)$$

ile verilir.

$$\begin{aligned} e'e &= (y - Xb)'(y - Xb) \\ &= y'y - y'Xb - b'X'y + b'X'Xb \\ &= y'y - 2y'Xb + b'X'Xb \\ &= y'y - 2X'yb + b'X'Xb \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\frac{d(e'e)}{d\beta} = -2X'y + 2X'Xb = 0$$

$$X'Xb = X'y$$

Bu sonuçtan

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'y$$

bulunur.

$$y = Xb + e$$

olduğundan

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'(Xb + e)$$

$$\hat{b} = (X'X)^{-1}X'Xb + (X'X)^{-1}X'e$$

$$\hat{b} = b + (X'X)^{-1}X'e \quad (1.9)$$

yazılır. X ve b , e 'nin fonksiyonu değildir, beklenen değeri alınır

$$E(\hat{b}) = E(b) + E[(X'X)^{-1}X'e]$$

$$E(\hat{b}) = b + (X'X)^{-1}X'E(e) \quad (1.10)$$

dir. Fakat $E(e) = 0$ olduğundan $\hat{b}$ 'nın beklenen değeri

$$E(\hat{b}) = b + (X'X)^{-1}X'0$$

$$E(\hat{b}) = b \quad (1.11)$$

dır ve $\hat{b}$ 'nın i -inci bileşeni $\hat{b}_i$ 'nin beklenen değeri $E(\hat{b}_i) = b_i$ dir. Ayrıca, yanlışlık terimi

$$bias(\hat{b}) = E(\hat{b}) - b = 0 \quad (1.12)$$

olduğundan $\hat{b}$, b nin yansız tahmin edicisidir.(Farebrother, (1985)). Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\hat{d} &= \hat{b} - E(\hat{b}) \\ \hat{d} &= \hat{b} - b \\ \hat{d} &= b + (X'X)^{-1}X'e - b \\ \hat{d} &= (X'X)^{-1}X'e\end{aligned}\tag{1.13}$$

yazılır. $E(ee') = s^2 I_n$ olmak üzere $\hat{b}$ nin varyansı, $\text{var}(\hat{b})$ nin köşegen üzerindeki ii-inci elemanı $\hat{b}_i$ nin varyansını ve $\text{var}(\hat{b})$ nin ij-inci elemanı $\hat{b}_i$ ve $\hat{b}_j$ nin kovaryansını göstermek üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{b}) &= E(\hat{d}\hat{d}') \\ &= E[(X'X)^{-1}X'ee'X(X'X)^{-1}] \\ &= (X'X)^{-1}X'E(ee')X(X'X)^{-1} \\ &= (X'X)^{-1}X'(s^2 I_n)X(X'X)^{-1} \\ &= s^2 (X'X)^{-1}X'I_n X(X'X)^{-1} \\ \text{Var}(\hat{b}) &= s^2 (X'X)^{-1}\end{aligned}\tag{1.14}$$

1.5. s^2 nin En Küçük Kareler Tahmin Edicisi I

Önceki kısımlarda yalnız $b_1, b_2, \dots, b_p$ nin tahmin edicisi ile ilgilendik, fakat standart lineer model bağlamında, s^2 nin tahmini ile de ilgilenmeliyiz. s^2 nin EKK tahmin edicisini bulmada bir matrisin izi kavramını kullanacağız.

Eğer C: $m \times m$ matris ise, bunun izi köşegen elemanlarının toplamıdır.

$$\text{tr} (C) = \sum_{i=1}^M C_{ii} \quad (1.15)$$

ve izin temel özellikleri kullanılırsa: A: $m \times p$ ve B: $p \times m$ matris olmak üzere,

$$\begin{aligned} \text{tr} (AB) &= \text{tr} \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} \right) \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^p \sum_{i=1}^m a_{ik} b_{ki} \\ &= \sum_{k=1}^p \left(\sum_{i=1}^m a_{ik} b_{ki} \right) \\ &= \text{tr}(BA) \end{aligned} \quad (1.17)$$

dır. Householder yöntemine (Farebrother, 1988 s. 81) göre $U : p \times p$ üst üçgensel matris, $Q_1 : n \times p$ matris ve $Q_1' Q_1 = I_p$ olmak üzere $X'X = U'U$ ve $X = Q_1 U$ ve $Q_2 : n \times (n-p)$ matristir öyle ki $Q_2' X = 0$, $Q_1' Q_2 = 0$ ve $Q_2' Q_2 = I_{n-p}$ eşitlikleri sağlanır.

$$\begin{aligned} \hat{e} &= y - X \hat{b} = Q_2 Q_2' y \\ \hat{e} &= y - X \hat{b} = Q_2 t = Q_2 Q_2' y \quad (t = Q_2' y) \\ \hat{e} &= Q_2 Q_2' (X b + e) = Q_2 Q_2' X b + Q_2 Q_2' e \\ \hat{e} &= Q_2 Q_2' e \end{aligned} \quad (1.18)$$

dır. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
E(\hat{e}\hat{e}') &= E[Q_2 Q_2' e e' Q_2 Q_2'] \\
&= Q_2 Q_2' E(e e') Q_2 Q_2' \\
&= Q_2 Q_2' (s^2 I_n) Q_2 Q_2' \\
&= s^2 Q_2 Q_2' Q_2 Q_2' \\
&= s^2 Q_2 Q_2'
\end{aligned} \tag{1.19}$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
E(\hat{e}'\hat{e}) &= E[\text{tr}(\hat{e}'\hat{e})] = E[\text{tr}(\hat{e}\hat{e}')] \\
&= \text{tr}([E(\hat{e}\hat{e}')]]) = \text{tr}(s^2 Q_2 Q_2') \\
&= s^2 \text{tr}(Q_2 Q_2') = s^2 \text{tr}(I_{n-p}) \\
E(\hat{e}'\hat{e}) &= (n-p)s^2
\end{aligned} \tag{1.20}$$

bulunur. Böylece s^2 , nin EKK tahmin edicisi (1.22)

$$\hat{s}^2 = \frac{\hat{e}'\hat{e}}{n-p}$$

dir. $\hat{s}^2$, s^2 'nin yansız tahmin edicisidir ve $E(\hat{s}^2) = s^2$ sağlanır.

2.ENSTRUMENTAL DEĞİŞKENİN TAHMİN EDİCİSİ

2.1.Giriş

Bölüm 1’de standart lineer regresyon modellerinde EKK tahmin edicilerinden bahsedildi. $\hat{b}$ nın beklenen değeri ve varyans kavramlarına değinildi.

EKK yönteminin verimli, sapmasız ve tutarlı sonuç verebilmesi için gerekli koşullardan biri de enstrumental (yardımcı) değişkenler ile hata teriminin arasında korelasyon olmaması gerekir. Bu bölümde enstrumental değişkenler ve tahmin edicileri çalışılmıştır. Householder yöntemi ile enstrumental değişkenlerin hesaplanmasına değinilmiştir.

2.2. Enstrumental Değişkenin Tahmin Edicisi I

$Z : n \times p$ m1 lerin ve sıfırların matrisi olmak üzere p bilinmeyen ve p denklemden oluşan

$$Z'Xb = Z'y \quad (2.1.)$$

ile ortalamalar yöntemi kullanılarak b nın değeri ile $\hat{b}$ tahmin edilebilir. Z nin elemanları bu yolla kısıtlanmazsa, yani Z nin elemanları her hangi bir değeri alıyorsa,

$$\hat{b} = (Z'X)^{-1} Z'y \quad (2.2)$$

bir enstrumental değişken tahmin edicisi olarak bilinir.

$$y = Xb + e \quad E(e) = 0 \quad E(ee') = s^2 I_n$$

standart lineer modelde enstrumental değişken tahmin edicisi

$$\begin{aligned}
\hat{b} &= (Z'X)^{-1}Z'y = (Z'X)^{-1}Z'(Xb + e) \\
&= (Z'X)^{-1}Z'Xb + (Z'X)^{-1}Z'e \\
&= b + (Z'X)^{-1}Z'e
\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$E(\hat{b}) = b + (Z'X)^{-1}Z'E(e) = b \tag{2.4}$$

beklenen değere ve

$$\begin{aligned}
Var(\hat{b}) &= E[(\hat{b} - b)(\hat{b} - b)'] \\
&= (Z'X)^{-1}Z'E(ee')Z(X'Z)^{-1} \\
&= s^2(Z'X)^{-1}Z'Z(X'Z)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

varyansa sahiptir.

2.3. Householder Yönteminin Bir Simetrik Olmayan Çeşidi

$$X'X\hat{b} = X'y \tag{2.6}$$

eşitliğinde verilen EKK problemini ele alarak Householder yönteminin uygulanabilirliğini inceleyeceğiz.

İlk olarak, köşegen altındaki ilk kolonu sıfır olan $X^{[1]} = H_1'X$ için $H_1' = H_1$ ve $H_1H_1 = I_n$ i sağlayan $n \times n$ H_1 matrisi tanımlayalım.

$$X'X\hat{b} = X'y$$

nin çözümü

$$X'H_1H_1X\hat{b} = X'H_1H_1y \tag{2.7}$$

nin çözümü ile aynıdır ya da

$$X'H_1H_1'X\hat{b} = X'H_1H_1'y$$

ya da

$$X^{[1]'}X^{[1]}\hat{b} = X^{[1]'}y^{[1]} \quad (2.8)$$

ki burada $y^{[1]} = H_1'y$ dir.

Daha sonra, köşegen altındaki ilk iki kolonu sıfır olan $X^{[2]}=H_2'X^{[1]}$ için $H_2'=H_2$ ve $H_2H_2=I_n$ i sağlayan $n \times n$ H_2 matrisi tanımlanır ve

$$X^{[1]'}X^{[1]}\hat{b} = X^{[1]'}y^{[1]}$$

in çözümü

$$X^{[1]'}H_2H_2X^{[1]}\hat{b} = X^{[1]'}H_2H_2y^{[1]}$$

in çözümü ile aynıdır ya da

$$X^{[1]'}H_2H_2'X^{[1]}\hat{b} = X^{[1]'}H_2H_2'y^{[1]}$$

ya da

$$X^{[2]'}X^{[2]}\hat{b} = X^{[2]'}y^{[2]} \quad (2.9)$$

dir ki burada $y^{[2]} = H_2'y^{[1]}$ dir.

Bu teknik

$$Z'X\hat{b}=Z'y \quad (2.10)$$

enstrumetal değışken problemine genelleştirilebilir.

İlk olarak, $X^{[1]} = K_2X$ in ilk kolonu için $K_1K_1=I_n$ i sağlayan $n \times n$ K_1 matrisine ihtiyacımız vardır ve $Z^{[1]} = K_1'Z$ nin ilk kolonu köşegen altında sıfırdır.

$$Z'X\hat{b}=Z'y$$

nin çözümü

$$Z'K_1K_1X\hat{b}=Z'K_1K_1y$$

in çözümü ile aynıdır ya da

$$Z^{[1]'}X^{[1]}\hat{b}=Z^{[1]'}y^{[1]} \quad (2.11)$$

dir ki burada $y^{[1]}=K_1y$ dir.

Daha sonra, $X^{[2]}=K_2X^{[1]}$ in ilk iki kolonu için $K_2K_2=I_n$ i sağlayan $n \times n$ K_2 matrisi gerekiyor ve $Z^{[2]}=K_2'Z^{[1]}$ in köşegen altındaki ilk iki kolonu sıfırdır.

$$Z^{[1]'}X^{[1]}\hat{b}=Z^{[1]'}y^{[1]}$$

nin çözümü

$$Z^{[1]'}K_2K_2X^{[1]}\hat{b}=Z^{[1]'}K_2K_2y^{[1]} \quad (2.12)$$

in çözümü ile aynıdır ya da

$$Z^{[2]'}X^{[2]}\hat{b}=Z^{[2]'}y^{[2]}$$

dir ki burada $y^{[2]}=K_2y^{[1]}$ dir. Bu yolla devam ederek en sonunda

$$X^{[p]}=\begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} \text{ ve } Z^{[p]}=\begin{bmatrix} U_* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

her ikisi de üst üçgensel formda olmak üzere

$$Z^{[p]'}X^{[p]}\hat{b}=Z^{[p]'}y^{[p]} \quad (2.14)$$

denklemini elde ederiz. İlk p elemanı ve kalan n-p elemanı olarak parçalayarak

$$y^{[p]} = \begin{bmatrix} v \\ p \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklemi

$$U_*' U \hat{b} = U_*' v \quad (2.15)$$

olarak yeniden yazabiliriz ve

$$U \hat{b} = v \quad (2.16)$$

geri yerine yazma ile enstrumental değişken tahmin edicileri elde edebiliriz.

2.4. Enstrumental Değişken Tahmin Edicisi II

Tartışmamızda şimdiye kadar, $n \times m$ enstrumental Z matrisi $n \times p$ X regressörler matrisi gibi aynı boyuta sahiptir. Uygulamada, bunun yanı sıra, enstrumentlerin sayısı sık sık regressör sayısını geçer ($m \geq p$). Bu bağlamda enstrumental değişken tahmin edicisi için formül

$$Var(\hat{b}) = s^2 [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1} \quad (2.17)$$

varyans matrisi ile

$$\hat{b} = [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1} X'Z(Z'Z)^{-1} Z'y \quad (2.18)$$

olur.

Bu formülleri daha önceki tanımlar ile karşılaştırsak $m = p$ olduğu zamanı sağladığı görülür.

$$\hat{b} = (Z'X)^{-1} Z'Z(X'Z)^{-1} X'Z(Z'Z)^{-1} Z'y = (Z'X)^{-1} Z'y \quad (2.19)$$

ve

$$Var(\hat{b}) = s^2 (Z'X)^{-1} Z'Z(X'Z)^{-1}$$

Ekonometride enstrumental değişken tahmin edicinin bu varyantı bazen EKK yönteminin iki uygulamasından elde edilebilen iki-aşamalı EKK tahmin edicisi olarak bilinir. (Davidson, ve Mackinnon, (1993). İlk olarak

$$\hat{X} = Z(Z'Z)^{-1}Z'X \quad (2.20)$$

i elde etmek için Z üzerine X i regres ederiz ve sonra $\hat{X}$ üzerine y yi regres ederiz.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= (\hat{X}'\hat{X})^{-1}\hat{X}'y \\ &= [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'y \\ &= [X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1}X'Z(Z'Z)^{-1}Z'y \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$\hat{s}^2 = \frac{(y - X\hat{b})'(Y - X\hat{b})}{n - p} \quad (2.22)$$

elde etmek için

$$Var(\hat{b}) = s^2(\hat{X}'\hat{X})^{-1} = s^2[X'Z(Z'Z)^{-1}Z'X]^{-1} \quad (2.23)$$

kullanılır. Bu hesaplamalar Householder yöntemi ile yapılabilir.

2.5.Householder Yöntemi İle Enstrumental Değişken Tahmin Edicileri Hesaplama

$n \times (m + p + 1)$ matris $[Z \ X \ y]$ ye m Householder dönüşüm matrislerinin bir dizisini uygulayarak

$$P'[Z \ X \ y] = \begin{bmatrix} A & B & c \\ 0 & F & y \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

ye sahip oluruz, burada P : $n \times n$ ortonormal matris, A : $m \times m$ üst üçgensel matris, B : $m \times p$ matris, c $m \times 1$ vektör, F $(n-m) \times p$ matris ve g $(n-m) \times 1$ vektördür.

Böylece

$$\begin{aligned} P' \hat{X} &= P' Z (Z' P P' Z)^{-1} Z' P P' X \\ &= \begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix} (A' A)^{-1} A' B = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.25)$$

$m \times (p+1)$ matris $\begin{bmatrix} B & c \end{bmatrix}$ ye p Householder dönüşümlerin bir dizisini uygulayarak,

$$Q' \begin{bmatrix} B & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & v \\ 0 & t_1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

e sahip oluruz. Burada Q : $m \times m$ ortonormal matris U : $p \times p$ üst üçgensel matris, v : $p \times 1$ vektör, t_1 : $(m-p) \times 1$ vektördür. Böylece

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{b}) &= s^2 (\hat{X}' \hat{X})^{-1} (\hat{X}' P P' \hat{X})^{-1} = s^2 (B' B)^{-1} \\ &= s^2 (B' Q Q' B)^{-1} \\ &= s^2 (U' U)^{-1} \end{aligned} \quad (2.27)$$

dir.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= (\hat{X}' \hat{X})^{-1} \hat{X}' y \\ &= (\hat{X}' P P' \hat{X})^{-1} \hat{X}' P P' y \\ &= (B' Q Q' B)^{-1} B' Q Q' c \\ &= (U' U)^{-1} U' v \\ &= U^{-1} (U')^{-1} U' v \end{aligned}$$

$$= U^1 v \quad (2.28)$$

ve

$$\begin{aligned} (n-p)\hat{s}^2 &= (y - X\hat{b})'PP'(y - X\hat{b}) \\ &= (c - B\hat{b})'(c - B\hat{b}) + (g - F\hat{b})'(g - F\hat{b}) \\ &= (c - B\hat{b})'QQ'(c - B\hat{b}) + t_2't_2 \\ &= t_1't_1 + t_2't_2 \end{aligned} \quad (2.29)$$

dir ki burada $t_2 = g - F\hat{b}$ dir

3. GEKK TAHMİN EDİCİLERİ

3.1.Giriş

Bölüm 2’de enstrumental değişkenlerin tahmin edicileri üzerinde duruldu. Householder yöntemi ile enstrumental değişkenlerin tahmin edicilerinin hesaplamasına çalışıldı. Bu bölümde ise genelleştirilmiş EKK tahmin edici Householder ve Givens dönüşümleriyle ele alınacaktır.

3.2. Gruplandırılmış Veri

Bölüm 1 de aşağıdaki standart lineer modeli tanıttık.

$$y = Xb + e \quad E(e) = 0 \quad E(ee') = s^2 I_n$$

Daha sonraki uygunluk için Δ alt sembolünü ekleyerek,

$$y_{\Delta} = X_{\Delta}b + e_{\Delta} \quad , \quad E(e_{\Delta}) = 0 \quad , \quad E(e_{\Delta}e_{\Delta}') = s^2 I_{n_{\Delta}} \quad (3.1)$$

modeline sahip oluruz ki burada $y_{\Delta} : n_{\Delta} \times 1$, Y değişkenindeki gözlemlerin matrisi; X_{Δ} , X değişkenindeki gözlemlerin $n_{\Delta} \times p$ matrisi, $b : p \times 1$ parametreler vektörü ve e_{Δ} , $n_{\Delta} \times 1$ hatalar vektörüdür.

Bu bölümde, modelde vurgulananların doğru olduğunu ve X_{Δ} ve y_{Δ} ’nın gözlenmediğini varsayacağız. Bunun yerine, $F_*, n_* \times n_{\Delta}$ sıfır ve birlerin matrisi olmak üzere $n_* \times p$ matris $X_* = F_* X_{\Delta}$ ve $n_* \times 1$ vektör $y_* = F_* y_{\Delta}$ gözleriz. Şimdi,

$$e_* = F_* e_{\Delta} \quad (3.2)$$

yazalım.

$$\begin{aligned}
e_* &= F_*(y_\Delta - X_\Delta b) \\
&= F_* y_\Delta - F_* X_\Delta b \\
&= y_* - X_* b
\end{aligned}$$

olarak bizim modelimiz

$$y_* = X_* b + e_* \quad (3.3)$$

olur, burada e_* ın beklenen değeri sıfırdır.

$$\begin{aligned}
E(e_*) &= E(F_* e_\Delta) \\
&= F_* E(e_\Delta) \\
&= F_* \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned} \quad (3.4)$$

ve varyans matrisi

$$\begin{aligned}
E(e_* e_*') &= E(F_* e_\Delta e_\Delta' F_*') \\
&= F_* E(e_\Delta e_\Delta') F_*' \\
&= F_* E(s^2 I_{n_\Delta}) F_*' \\
&= s^2 F_* F_*'
\end{aligned} \quad (3.5)$$

dır.

Bu sonuçları birleştirerek ve $V = F_* F_*' : n_* \times n_*$ pozitif semidefinite matris için

$$y_* = X_* b + e_*, \quad E(e_*) = 0, \quad E(e_* e_*') = s^2 V \quad (3.6)$$

modeline sahip oluruz ki bu genel lineer istatistiksel model olarak bilinir. (Grob ve Puntanen, (2000))

3.3.Üç Lineer Model

Genelde, V , $n \times n$ simetrik pozitif semidefinit matris fakat şu an için pozitif definit matris olduğunu varsayacağız. Bu bağlamda L_0 , köşegen üzerindeki elemanlar birim olarak $n \times n$ alt üçgensel matris ve D köşegen üzerindeki elemanlar pozitif olarak $n \times n$ köşegen matris olmak üzere V yi

$$V = L_0 D L_0' \quad (3.7)$$

formunda ifade edebiliriz.

$$y_0 = L_0^{-1} y_* \quad , \quad X_0 = L_0^{-1} X_* \quad , \quad e_0 = L_0^{-1} e_* \quad (3.8)$$

olsun. (3.6) deki genel lineer model

$$\begin{aligned} y_* &= X_* b + e_* \\ L_0^{-1} y_* &= L_0^{-1} X_* b + L_0^{-1} e_* \\ y_0 &= X_0 b + e_0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

şeklinde olur.

$$\begin{aligned} E(e_0 e_0') &= E(L_0^{-1} e_* e_*' (L_0^{-1})') \\ &= L_0^{-1} E(e_* e_*') (L_0^{-1})' \\ &= L_0^{-1} s^2 V (L_0^{-1})^{-1} \\ &= s^2 L_0^{-1} L_0 D L_0' (L_0^{-1})^{-1} \end{aligned}$$

$$= s^2 I_n$$

dir. Buradan

$$y_0 = X_0 b + e_0 \quad E(e_0) = 0 \quad E(e_0 e_0') = s^2 D \quad (3.10)$$

formunda tekrar yazılabilir ki biz buna köşegen lineer model diyeceğiz.

Ayrıca, $W = D^{-1}$ ve $y = W^{1/2} y_0$, $X = W^{1/2} X_0$ ve $e = W^{1/2} e_0$ alınırsa; köşegen lineer model, standart lineer model formunda yeniden yazılabilir.

$$y_0 = X_0 b + e_0$$

$$W^{1/2} y_0 = W^{1/2} X_0 b + W^{1/2} e_0$$

$$y = X b + e$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} E(e) &= E(W^{1/2} e_0) \\ &= W^{1/2} E(e_0) = 0 \end{aligned}$$

dır ve

$$\begin{aligned} E(e e') &= E(W^{1/2} e_0 e_0' W^{1/2}) \\ &= W^{1/2} E(e_0 e_0') W^{1/2} \\ &= s^2 W^{1/2} D W^{1/2} \\ &= s^2 I_n \end{aligned}$$

dir. Bu ifadelerden yeniden standart lineer modeli buluruz:

$$Y_i = X_{i1} b_1 + X_{i2} b_2 + \dots + X_{ip} b_p + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(e_i^2) = s^2, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(e_i e_j) = 0 \quad , \quad i \neq j = 1, 2, \dots, n \quad (3.11)$$

Köşegen lineer model;

$$Y_i^0 = X_{i1}^0 b_1 + X_{i2}^0 b_2 + \dots + X_{ip}^0 b_p + e_i^0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(e_i^0) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E[(e_i^0)^2] = s^2 d_{ii} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

$$E(e_i^0 e_j^0) = 0 \quad , \quad i \neq j = 1, 2, \dots, n$$

olur ve genel lineer model

$$Y_i^* = X_{i1}^* b_1 + X_{i2}^* b_2 + \dots + X_{ip}^* b_p + e_i^* \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E(e_i^*) = 0 \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$E[(e_i^*)^2] = s^2 v_{ii} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.13)$$

$$E(e_i^* e_j^*) = s^2 v_{ij} \quad , \quad i \neq j = 1, 2, \dots, n$$

dir. Böylece, alt sembolü göz ardı edersek, $v_{ij}=0$ olarak sıfır kovaryanslı hatalar düşünüp genel lineer modelin bir özel hali olan köşegen lineer modeli elde ederiz ve $d_{ii}=1$ olarak aynı varyanslı hatalar düşünüp, köşegen lineer modelin bir özel hali olan standart modeli buluruz. (Plackett, (1950))

3.4.Ağırlıklı En Küçük Kareler ve Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicileri

Bölüm 1.4.de sıradan EKK tahmin edicisi oluşturduk. Standart lineer modelde

$$Var(\hat{b}) = s^2 (X'X)^{-1}$$

varyans matrisi ile

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y$$

b 'nın yansız tahmin edicisidir. Ayrıca Bölüm 1.5. de $(n-p) s^2$ 'nin ağırlıksız sıradan EKK ler rezidülerinin kareleri toplamı tarafından yansız şekilde tahmin edilebileceğini oluşturduk.

$$(n-p) s^2 = (y - X\hat{b})'(y - X\hat{b}).$$

dir. $X = W^{1/2} X_0$, $y = W^{1/2} y_0$ olmak üzere bu formüller ağırlıklı EKK tahmin edicisini şu şekilde verir.

$$\begin{aligned} \hat{b} &= (X'X)^{-1} X'y \\ &= (X_0' (W^{1/2})' W^{1/2} X_0)^{-1} X_0' (W^{1/2})' W^{1/2} y_0 \\ &= (X_0' W X_0)^{-1} X_0' W y_0 \end{aligned} \tag{3.14}$$

ve

$$Var(\hat{b}) = s^2 (X_0' W X_0)^{-1} \tag{3.15}$$

varyans matrisi ile köşegen lineer modelde b 'nın yansız tahmin edicisi olacaktır ve ağırlıklı EKK rezidülerinin ağırlıklı kareleri toplamı

$$(n-p) \hat{s}^2 = (y_0 - X_0 \hat{b})' W (y_0 - X_0 \hat{b})$$

$(n-p) s^2$ 'nin yansız tahmin edicisi olacaktır. (Chen ve Shao (1993))

Öte yandan,

$$X_0 = L_0^{-1} X_* , \quad y_0 = L_0^{-1} y_* , \quad W = D^{-1}$$

ve

$$\begin{aligned} V^{-1} &= (L_0 D L_0')^{-1} \\ &= (L_0')^{-1} D^{-1} L_0^{-1} \\ &= (L_0^{-1})' W L_0^{-1} \end{aligned} \tag{3.16}$$

dir. Bu sonuçlara göre genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi

$$\hat{b} = \left[X_*' (L_0^{-1})' W L_0^{-1} X_*' \right]^{-1} X_*' (L_0^{-1})' W L_0^{-1} y_*$$

ya da

$$\hat{b} = (X_*' V^{-1} X_*)^{-1} X_*' V^{-1} y_* \tag{3.17}$$

bulunur ve

$$Var(\hat{b}) = s^2 (X_*' V^{-1} X_*)^{-1} \tag{3.18}$$

varyans matrisi ile genel lineer modelde b nin yansız tahmin edicisi olacaktır ve genelleştirilmiş EKK rezidülerinin ağırlıklı kareleri toplamı

$$(n-p) \hat{s}^2 = (y_* - X_* \hat{b})' V^{-1} (y_* - X_* \hat{b})$$

olarak $(n-p) \hat{s}^2$ nin bir yansız tahmin edicisi olacaktır.

3.5. Elementer Hesaplama Yöntemleri

Verilen X_0 , y_0 ve $W = D^{-1}$, Bölüm 3.2. nin sonuçlarına göre ağırlıklı EKK ifadelerini

$$\hat{b} = (X_0' W X_0)^{-1} X_0' W y_0$$

$$Var(\hat{b}) = s^2 (X_0' W X_0)^{-1}$$

ve

$$\hat{s}^2 = \frac{(y_0 - X_0 \hat{b})' W (y_0 - X_0 \hat{b})}{n - p} \quad (3.19)$$

olarak belirleyebiliriz.

$X = W^{1/2} X_0$, $y = W^{1/2} y_0$ ı kullanarak EKK ifadelerini belirleyebiliriz.

$$\hat{b} = (X' X)^{-1} X' y$$

şeklinde

$$Var(\hat{b}) = s^2 (X' X)^{-1}$$

ve

$$\hat{s}^2 = \frac{(y - X \hat{b})' (y - X \hat{b})}{n - p}$$

dir.

Benzer olarak, verilen X_* , y_* ve V , Bölüm 2.2 nin sonuçlarına göre $V = L_0 D L_0'$, $X_0 = L_0^{-1} X_*$ ve $y_0 = L_0^{-1} y_*$ şeklinde düzenleyerek genelleştirilmiş EKK ifadelerini belirleyebiliriz.

$$\hat{b} = (X_*' V^{-1} X_*)^{-1} X_*' V^{-1} y_*$$

olup

$$Var(\hat{b}) = s^2 (X_*' V^{-1} X_*)^{-1}$$

ve

$$\hat{s}^2 = \frac{(y_* - X_* \hat{b})' V^{-1} (y_* - X_* \hat{b})}{n - p} \quad (3.20)$$

şeklindedir. (Plackett (1972)). Alternatif olarak,

$$L = L_0 D^{1/2}$$

tanımlarsak,

$$\begin{aligned} V &= L_0 D L_0' \\ &= L_0 D^{1/2} D^{1/2'} L_0' \\ &= L L' \end{aligned}$$

olur.

$$\begin{aligned} X &= W^{1/2} X_0 \\ &= (D^{-1})^{1/2} L_0^{-1} X_* \\ &= (D^{1/2})^{-1} L_0^{-1} X_* \\ &= L^{-1} X_* \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} y &= W^{1/2} y_0 \\ &= (D^{-1})^{1/2} L_0^{-1} y_* \\ &= (D^{1/2})^{-1} L_0^{-1} y_* = (D^{-1})^{1/2} \\ &= L^{-1} y_* \end{aligned} \quad (3.21)$$

düzenleyerek genelleştirilmiş EKK ifadelerini de belirleyebiliriz.

3.6. Householder Dönüşümleri ile Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

Sıradan EKK tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{b} &= (X'X)^{-1} X'y \\ e &= y - X\hat{b}\end{aligned}\tag{3.22}$$

ye bağlı olarak

$$e'e' = \sum_{i=1}^n e_i^2\tag{3.23}$$

rezidü kareler toplamını minimum yapan $\hat{b}$ nin değeridir ve $\hat{e}$ da

$$\hat{e} = y - X\hat{b}$$

ifadesinin minimum değeridir.

$X = L^{-1}X_*$ ve $y = L^{-1}y_*$ olduğunda genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi

$$\begin{aligned}\hat{b} &= (X_*'V^{-1}X_*)^{-1}X_*'V^{-1}y_* \\ &= (X'X)^{-1}X'y \\ &= (X_*'(L')^{-1}L^{-1}X_*)^{-1}X_*'(L')^{-1}L^{-1}y_* \\ &= (X_*'(LL')^{-1}X_*)^{-1}X_*'(LL')^{-1}y_* \\ \hat{b} &= (X_*'V^{-1}X_*)^{-1}X_*'V^{-1}y_*\end{aligned}\tag{3.24}$$

dir.

$$e = y - X\hat{b}$$

$$= L^{-1}y_* - L^{-1}X_* b$$

$$= L^{-1}(y_* - X_* b)$$

olup

$$Le = LL^{-1}(y_* - X_* b)$$

$$Le = y_* - X_* b$$

ya da

$$X_* b + Le = y_*$$

a bağlı $\hat{e}\hat{e}$ yi minimum yapan b nin değeridir. $[X_* \ y_* \ L] : n \times (n+p+1)$ matrisine p Householder dönüşüm matrislerinin bir dizisini uygulayarak,

$$Q'[X_* \ y_* \ L] = \begin{bmatrix} U & t_1 & Q_1' L \\ 0 & t_2 & Q_2' L \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

matrisine sahip oluruz ki burada

$$Q = [Q_1 \ Q_2]$$

matrisi ilk p kolunu ve kalan $n-p$ kolunu olarak parçalanmış $n \times n$ tipinde ortonormal matris, $U: p \times p$ sıfır üst üçgensel matris, $t_1: p \times 1$ ve $t_2: (n-p) \times 1$ şeklinde vektörlerdir.

$[L'Q_1 \ L'Q_2] : n \times n$ matrisine $n-p$ Householder dönüşümlerinin bir dizisini uygulayarak

$$P_0'[L'Q_2 \ L'Q_1] = \begin{bmatrix} S_{22}' & S_{12}' \\ 0 & S_{11}' \end{bmatrix}$$

matrisine sahip oluruz ki burada $P_0 = [P_2 \ P_1]$ ilk $n-p$ ve kalan p kolonu olarak parçalı $n \times n$ ortonormal matris, $S_{22}' : (n-p) \times (n-p)$ üst üçgensel matris, $S_{12}' : (n-p) \times p$ matris ve $S_{12}' : p \times p$ şeklinde matristir. Sonuç olarak,

$$g_1 = P_1' e \quad , \quad g_2 = P_2' e \quad \text{ve} \quad g_0 = P_0' e$$

olsun. $\hat{b}$,

$$X_* b + L e = y_*$$

$$Q' X_* b + Q' L P_0 P_0' e = Q' y_*$$

a bağlı olarak

$$g' g = e' P_0 P_0' e$$

$$= e' e$$

yi minimum yapan b nin değeridir.

$$\text{Bu } \hat{b} = (X' X)^{-1} X' y$$

$$Q_1' X_* b + Q_1' L P_2 g_2 + Q_1' L P_1 g_1 = Q_1' y_*$$

ve

$$Q_2' X_* b + Q_2' L P_2 g_2 + Q_2' L P_1 g_1 = Q_2' y_*$$

bağlı ya da

$$U b + S_{12} g_2 + S_{11} g_1 = t_1$$

ve

$$S_{22} g_2 = t_2$$

ye bağlı

$$g_2' g_2 + g_1' g_1$$

i minimum yapan b nın değeridir.

S_{22} köşegen üzerindeki sıfır olmayan elemanları ile alt üçgensel matristir öyle ki g_2

$$S_{22} g_2 = t_2$$

de ileriye dönük elimine ile elde edilebilir.

g_2 için bu değer ile

$$e'e = g_2' g_2 + g_1' g_1$$

minimum yapılır. Böylece,

$$Ub + S_{12} g_2 + S_{11} g_1 = t_1$$

olduğundan $g_1=0$ ile

$$X_* b + L e = y_*$$

e bağılı olarak $\hat{\hat{e}}$ yi minimum yapan b nin değeri

$$Ub = t_1 - S_{12} g_2 \quad (3.26)$$

de geri yerine yazma ile elde edilebilir. (Ouellette, (1981))

3.7. Householder Yönteminin Yeniden İncelenmesi

3.6 bölümündeki yöntem $A_0 = [X_* \ y_* \ L]$ nin yapısının kullanımını gerçekleştirmediğinden dolayı etkin değildir. Aslında bu yöntem X_* ı tanımlayan $Q_0 = [Q_2 \ Q_1]$ $n \times n$ ortonormal matrisin transpozu ile A_0 matrisini soldan çarpar fakat L yi bozar;

$$Q_0' [X_* \quad y_* \quad L] = \begin{bmatrix} 0 & t_2 & Q_2' L \\ U & t_1 & Q_1' L \end{bmatrix}$$

$n \times n$ $Q_0' L$ matrisi, $n \times n$ ortonormal P_0 matrisi ile sağdan çarpılarak alt üçgensel forma dönüştürülür ki burada $Q_0' A_0$ matrisi ile

$$P_{00} = \begin{bmatrix} I_{n+p} & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}$$

$(n+p+1) \times (n+p+1)$ ortonormal matris sağdan çarpılır.

Böylece, S_{11} alt üçgensel matris değil fakat S_{22} alt üçgensel matris olmak üzere

$$Q_0' [X_* \quad y_* \quad L] P_{00} = \begin{bmatrix} 0 & t_2 & S_{22} & 0 \\ U & t_1 & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}$$

dir. L nin alt üçgenselliğini korumak için Givens dönüşümlerini kullanan bir alternatif yöntem Paige tarafından geliştirildi. Orijinal formunda, bu yöntem

$$Q_0' [X_* \quad y_* \quad L] P_{00} = \begin{bmatrix} 0 & t_2 & S_{22} & 0 \\ U & t_1 & S_{12} & S_{11} \end{bmatrix}$$

formunun bir matrisini üretir ki burada K , S_{11} ve S_{22} nin hepsi alt üçgensel matrislerdir. Bununla birlikte, amaçlarımız için Paige's yöntemini değiştirmek daha uygundur. F , $FF' = V$ yi sağlayan üst üçgensel matris ve U , T_{11} T_{22} üst üçgensel matrisler olmak üzere

$$Q' [X_* \quad y_* \quad L] P_* = \begin{bmatrix} U & t_2 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & t_1 & 0 & T_{22} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

formunun bir matrisini üretir.

3.8. Givens Yöntemi ile Genelleştirilmiş En Küçük Kareler Tahmin Edicisi

$P = [P_1 \ P_2]$ ve $Q = [Q_1 \ Q_2]$ matrisleri ilk p ve kalan $n-p$ kolonları olarak parçalanmış $n \times n$ ortonormal matrisler olsun.

$$g_1 = P_1' e, \ g_2 = P_2' e \text{ ve } g = P' e$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_* & y_* & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{p+1} & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U & t_1 & T_{11} & T_{12} \\ 0 & t_2 & 0 & T_{22} \end{bmatrix}$$

ile

$$A = \begin{bmatrix} X_* & y_* & F \end{bmatrix}$$

$n \times (n + p + 1)$ matrisi çift üst üçgensel forma değiştirilir.

$$\hat{b} = (X_*' V^{-1} X_*)^{-1} X_*' V^{-1} y_*$$

olup

$$Q' X_* b + Q' F P P' e = Q' y_*$$

dir ya da

$$U b + T_{11} g_1 + T_{12} g_2 = t_1 \quad \text{ve}$$

$$T_{22} g_2 = t_2$$

bağlı olarak

$$g'g = g_1'g_1 + g_2'g_2$$

yi minimum yapan b nın değeridir ve

$$(n-p) \hat{s}^2 = (y_* - X_* \hat{b})' V^{-1} (y_* - X_* \hat{b})$$

da $e'e = g'g$ nin minimum değeridir.

Şimdi $g_2 = T_{22}^{-1}t_2$ ve $g_1=0$ olmak üzere

$$\hat{b} = U^{-1}(t_1 - T_{12}g_2) \quad (3.28)$$

dir.

$$(n-p)\hat{s}^2 = g_2'g_2$$

ve

$$Var(\hat{b}) = s^2 (U^{-1}T_{11})(U^{-1}T_{11})' \quad (3.29)$$

bulunur.

4. LİNEER OLMAYAN EKK PROBLEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

4.1. Giriş

Bu bölüme kadar olan kısımda Y değişkeninin $X_1, X_2, \dots, X_p$ değişkenlerinin tümü ile lineer ilişkili olduğunu varsaydık.

$$Y = X_1 b_1 + X_2 b_2 + \dots + X_p b_p$$

ve gözlenmiş ilişki

$$Y_i = X_{i1} b_1 + X_{i2} b_2 + \dots + X_{ip} b_p + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ye EKK in yöntemini uygulayarak bilinmeyen parametreler $b_1, b_2, \dots, b_p$ yi tahmin ettik. Bu bölümde, bu varsayımları bekleteceğiz ve bu ilişkinin lineer olmamasına izin vereceğiz.

4.2. Lineer Olmayan EKK Problemlerinin Ardışık Çözümü

$$Y_i = X_{i1} b_1 + X_{i2} b_2 + X_{i2}^2 b_3 + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.1)$$

ya da

$$Y_i = X_{i1} b_1 + X_{i2} b_2 + X_{i2} b_2^2 + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

e sahip olabiliriz.

Bu örneklerden ilkinde

$$X_{i3} = X_{i2}^2 \quad (4.3)$$

tanımlayabiliriz ve

$$Y_i = X_{i1} b_1 + X_{i2} b_2 + X_{i3} b_3 + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.4)$$

denkleminde EKK yöntemini uygulayarak b_1, b_2 ve b_3 ün tahminlerini tatminkar şekilde elde edebiliriz.

Fakat aynı yolla $b_3 = b_2^2$ tanımlayarak ikinci örneği çözmeyi denersek, b_3 ün tahmin edicisi b_2 nin tahmin edicisinin karesine eşit olmayabilir.

Bu örnekleri genelleştirerek varsayalım ki gözlenmiş Y değeri bilinmeyen parametreler $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_p$ ile lineer olmayan bir ilişki içindedirler.

$$Y_i = f_i(b_1, b_2, \dots, b_p) + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.5)$$

dir. Burada f e eklenmiş i alt sembolü f_i ; $X_1, X_2, \dots, X_p$ nin i -inci gözlenmiş değerinin bir fonksiyonu olduğunu belirtir.

$b_1, b_2, \dots, b_p$ tahminlerimiz tekrar bir ardışık yöntemden elde edilir: Varsayalım ki $b_1, b_2, \dots, b_p$ için yaklaşık $b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_p^{(k)}$ değerlerine sahibiz. $b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_p^{(k)}$ hakkında bir Taylor serisinde $f_i(b_1, b_2, \dots, b_p)$ yi genişletebiliriz ve lineer ilişki elde edebiliriz.

$$Y_i \cong f_i^{(k)} + z_{i1}^{(k)} g_1^{(k)} + z_{i2}^{(k)} g_2^{(k)} + \dots + z_{ip}^{(k)} g_p^{(k)} + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

burada

$$f_i^{(k)} = f_i(b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_p^{(k)})$$

$$z_{ij}^{(k)} = z_{ij}(b_1^{(k)}, b_2^{(k)}, \dots, b_p^{(k)})$$

ve

$$g_j^{(k)} = b_j - b_j^{(k)} \quad (4.6)$$

dir. Burada

$$z_{ij}(b_1, b_2, \dots, b_p) = \frac{\partial f_i(b_1, b_2, \dots, b_p)}{\partial b_j}$$

b_j ye göre $f_i(b_1, b_2, \dots, b_p)$ nin kısmi türevidir. Örneğin,

$$f_i(b_1, b_2) = X_{i1}b_1 + X_{i2}b_2 + X_{i3}b_2^2$$

ise

$$z_{i1}(b_1, b_2) = X_{i1}$$

dir ve

$$z_{i2}(b_1, b_2) = X_{i2} + 2X_{i3}b_2$$

dir. Öyleki

$$z_{i1}^{(k)} = X_{i1}$$

ve

$$z_{i2}^{(k)} = X_{i2} + 2X_{i3}b_2^{(k)}$$

dır. Bu denklemleri birleştirerek

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} f_1^{(k)} \\ f_2^{(k)} \\ \vdots \\ f_n^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{11}^{(k)} & Z_{12}^{(k)} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{1p}^{(k)} \\ Z_{21}^{(k)} & Z_{22}^{(k)} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{2p}^{(k)} \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & & \cdot \\ Z_{n1}^{(k)} & Z_{n2}^{(k)} & \cdot & \cdot & \cdot & Z_{np}^{(k)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1^{(k)} \\ \gamma_2^{(k)} \\ \vdots \\ \gamma_p^{(k)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1^{(k)} \\ e_2^{(k)} \\ \vdots \\ e_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

ya da

$$y \cong f^{(k)} + Z^{(k)} g^{(k)} + e$$

ya da

$$y - f^{(k)} \cong Z^{(k)} g^{(k)} + e$$

na sahip oluruz. Öyleki

$$c^{(k)} = (Z^{(k)'} Z^{(k)})^{-1} Z^{(k)'} (y - f^{(k)})$$

ile

$$g^{(k)} = b - b^{(k)}$$

olmak üzere

$$y - f^{(k)} \cong Z^{(k)} g^{(k)} + e$$

$$(Z^{(k)'} Z^{(k)})^{-1} Z^{(k)'} (y - f^{(k)}) = (Z^{(k)'} Z^{(k)})^{-1} Z^{(k)'} Z^{(k)} g^{(k)}$$

$$c^{(k)} = g^{(k)}$$

$$c^{(k)} = b - b^{(k)}$$

$$c^{(k)} + b^{(k)} = b \tag{4.7}$$

olacağından b için bir geliştirilmiş tahmin elde edebiliriz.

$$b^{(k+1)} = b^{(k)} + c^{(k)}$$

Bu ardışık yöntem sonunda ilk $b^{(0)}$ değeri rezidü kareler toplamını

$$\sum_{i=1}^n [(y_i - f_i(b))]^2$$

minimum yapan b nin değerine yeterli şekilde yakınsa o değere bir noktada birleşecektir.

5. LİNEER EKK PROBLEMLERİNİN ARDIŞIK ÇÖZÜMLERİ

5.1. Giriş

4. Bölümde lineer olmayan EKK problemlerinin ardışık çözümleri incelendi. Bu bölümde ise genelleştirilmiş ve sıradan lineer EKK problemlerinin ardışık çözümleri incelenecektir.

5.2. Genelleştirilmiş EKK Tahmin Edicilerinin Ardışık Olarak Geliştirilmesi

X_* tüm kolon ranklı ve V , pozitif definite matris olduğu zaman Bölüm 3.4. de $\hat{b}$ nın genelleştirilmiş EKK tahmin edicisi olarak

$$\hat{b} = (X_*' V^{-1} X_*)^{-1} X_*' V^{-1} y_*$$

verildi. $\hat{b}$

$$X_*' V^{-1} X_* \hat{b} = X_*' V^{-1} y_* \quad \text{ya da}$$

$$X_*' V^{-1} (y_* - X_* \hat{b}) = 0$$

eşitliklerinin çözümüdür. Burada

$$a = V^{-1} (y_* - X_* b)$$

$$Va = y_* - X_* b$$

$$Va + X_* b = y_*$$

olmak üzere $b = \hat{b}$

$$X_*'a = 0$$

ın çözümüdür.

Bu denklemleri birleştirerek X_* , tüm kolon ranklı ve V , pozitif definite matris olduğu zaman b nın genelleştirilmiş EKK tahmin edicileri

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

denklemini ile tanımlanır. Bu denklem X_* tüm kolon rankından daha azına sahip olduğu ve V pozitif definit olmadığı zaman genelleştirilmiş EKK tahmin edicisini tanımlamak için kullanılabilir.

$a^{(1)}$ ve $b^{(1)}$ hemen hemen bu denklemi sağlayan a ve b nin değerleri ve $d = a - a^{(1)}$ ve $c = b - b^{(1)}$ olsun. Sonra daha kesin bir çözüm $d = d^{(1)}$ ve $c = c^{(1)}$ için

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d + a^{(1)} \\ c + b^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix}$$

ya da

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \end{bmatrix}$$

çözülerek ve bu düzeltmeler $a^{(1)}$ ve $b^{(1)}$ e eklenerek elde edilebilir.

$$a^{(2)} = a^{(1)} + d^{(1)}$$

$$b^{(2)} = b^{(1)} + c^{(1)}$$

bu ardışık yöntem yeterli şekilde kesin sonuçlar elde edilene kadar devam ettirilebilir. Böylece aşağıdaki genel yönteme sahip oluruz:

1. $a^{(1)}$ ve $b^{(1)}$ için

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(1)} \\ b^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix}$$

çözülür.

2. $i = 1, 2, \dots, n$ için

$$\begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{(i)} \\ c^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_* \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} V & X_* \\ X_*' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{(i)} \\ b^{(i)} \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

çözülür ve $d^{(i)}, c^{(i)}$ için

$$a^{(i+1)} = a^{(i)} + d^{(i)}$$

$$b^{(i+1)} = b^{(i)} + c^{(i)}$$

düzenlenir. Eğer $a^{(0)} = 0$ ve $b^{(0)} = 0$ tanımlarsak ikinci ifade içindeki ilk aşama ihmal edilebilir ve $i = 1, 2, \dots$ için yerine $i = 0, 1, \dots$ için ikinci ifade uygulanır. (Rao ve Toutenburg (1995))

5.3. Sıradan EKK Tahmin Edicisinin Ardışık Olarak Geliştirilmesi

Sonuç bulmadaki kolaylık için $V=I_n$ varsayacağız ve standart lineer modelde b nın sıradan EKK tahmin edicisi $\hat{b}$ nın ardışık değerlendirmesinin sınırlanması üzerinde duracağız. Bu bölümde $e = y - Xb$ tanımlayarak

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y$$

nın Bölüm 4.2. deki ardışık yöntemle

$$X'Xb = X'y \quad \text{ya da} \quad X'e = 0$$

ın çözümü olduğunu inceleyeceğiz. Bölüm 4.2. deki ardışık yönteme göre;

1. $e^{(0)} = 0$ ve $b^{(0)} = 0$ belirlenir
2. $i = 0, 1, 2, \dots$ için

$$\begin{bmatrix} I & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{(i)} \\ c^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(i)} \\ b^{(i)} \end{bmatrix}$$

çözülür ve bu bağlamda $d^{(i)}$ ve $c^{(i)}$ için

$$e^{(i+1)} = e^{(i)} + d^{(i)}$$

$$b^{(i+1)} = b^{(i)} + c^{(i)}$$

düzenlenir.

$$\begin{aligned} f^{(i)} &= y - e^{(i)} - Xb^{(i)} & \text{ve} \\ g^{(i)} &= -X'e^{(i)} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(i)} \\ b^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(i)} \\ g^{(i)} \end{bmatrix}$$

ve $d^{(i)}$ ve $c^{(i)}$ için

$$\begin{bmatrix} I & X \\ X' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d^{(i)} \\ c^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(i)} \\ g^{(i)} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

eşitliğini ya da

$$d^{(i)} + X c^{(i)} = f^{(i)} \quad \text{ve} \quad X' d^{(i)} = g^{(i)} \quad (5.4)$$

eşitliklerini çözmemiz gerekir. Fakat

$$X c^{(i)} = f^{(i)} - d^{(i)} \quad \text{ve} \quad d^{(i)} = f^{(i)} - X c^{(i)} \text{ şeklindedir ki}$$

$$\begin{aligned} (X'X)^{-1} X'X c^{(i)} &= (X'X)^{-1} X' (f^{(i)} - d^{(i)}) \\ &= (X'X)^{-1} (X'f^{(i)} - X'd^{(i)}) \\ c^{(i)} &= (X'X)^{-1} (X'f^{(i)} - g^{(i)}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

olur. Böylece β için ardışık yöntem oluşur:

$$\begin{aligned} e^{(0)} &:= 0 \quad b^{(0)} := 0 \\ i &= 0, 1, 2, \dots \text{ için} \\ f^{(i)} &:= y - e^{(i)} - X b^{(i)} \\ g^{(i)} &:= -X' e^{(i)} \\ c^{(i)} &= (X'X)^{-1} (X'f^{(i)} - g^{(i)}) \\ d^{(i)} &:= f^{(i)} - X c^{(i)} \\ e^{(i+1)} &:= e^{(i)} + d^{(i)} \\ b^{(i+1)} &:= b^{(i)} + c^{(i)} \end{aligned} \quad (5.6)$$

burada $c^{(i)}$ yeteri kadar küçük olduğu zaman tekrarlama durur.

Bölüm 1.5. in notasyonlarında $X = Q_1 U$ ve $y = Q_1 v + Q_2 t$ dir. Buna göre,

$$\begin{aligned}
c^{(i)} &= (X'X)^{-1}(Xf^{(i)} - g^{(i)}) \\
&= (U'U)^{-1}(Xf^{(i)} - g^{(i)}) \\
&= U^{-1}(U')^{-1}(Xf^{(i)} - g^{(i)}) \\
&= U^{-1}[(U')^{-1}Xf^{(i)} - (U')^{-1}g^{(i)}] \\
c^{(i)} &= (U)^{-1}(k^{(i)} - h^{(i)})
\end{aligned}$$

dir ki burada $h^{(i)} = (U')^{-1}g^{(i)}$ ve $k^{(i)} = Q_1' f^{(i)}$ dir.

Diğer yandan

$$d^{(i)} = f^{(i)} - Xc^{(i)}$$

$$Q_1' d^{(i)} = Q_1' f^{(i)} - Q_1' Xc^{(i)}$$

$$Q_1' d^{(i)} = k^{(i)} - U c^{(i)} = h^{(i)}$$

ve

$$d^{(i)} = f^{(i)} - Xc^{(i)}$$

$$Q_2' d^{(i)} = Q_2' f^{(i)} - Q_2' Xc^{(i)} \quad (Q_2' X = 0)$$

$$= Q_2'(y - e^{(i)} - Xb^{(i)})$$

$$= Q_2'y - Q_2'e^{(i)} - Q_2'Xb^{(i)}$$

$$= Q_2'(Q_1v + Q_2t) - Q_2'(y - Xb^{(i)})$$

$$= Q_2'Q_1v + Q_2'Q_2t - Q_2'y - Q_2'Xb^{(i)} = I - I = I$$

$$Q_2' d^{(i)} = Q_2' f^{(i)} = I^{(i)}$$

elde edilir ve

$$Q_1' d^{(i)} = h^{(i)} \Rightarrow d^{(i)} = Q_1 h^{(i)}$$

$$Q_2' d^{(i)} = I^{(i)} \Rightarrow d^{(i)} = Q_2 I^{(i)}$$

dır ve böylece algoritma oluşturulur:

$$e := 0$$

$$b := 0$$

$$i = 0, 1, 2, \dots \text{ için}$$

$$f := y - e - Xb$$

$$g := -X'e, \quad h := (U')^{-1}g$$

$$k := Q_1' f, \quad l := Q_2' f$$

$$c = (U)^{-1}(k - h)$$

$$d := Q_1 h + Q_2 l$$

$$e := e + d$$

$$b := b + c \tag{5.7}$$

Bu algoritmalarından ilki Fletcher'e (1975) ve ikincisi Björck'e (1967, 1968) ve Björck ve Golub'e (1967) aittir. Eğer hesaplamalarda tek duyarlılık aritmetik kullanılırsa algoritmaların her ikisi de $\hat{b}$ nın değerini $b^{(1)} = U^{-1}(U')^{-1}X'y$ ve $b^{(1)} = (U')^{-1}v$ in ilk tahminlerine yakın bir değer olarak verecektir. Fakat çift duyarlılık aritmetik kullanılırsa algoritmaların her ikisi de $\hat{b}$ nın tam değerini verecektir. Fletcher kendi karşılaştırmalı çalışmasında, kendi algoritmasının Björck in algoritmasından daha fazla ardışık işlem olduğunu fakat daha kısa sürede daha hızlı bir şekilde bu amacı başardığını buldu.

6. EKK TAHMİN EDİCİLERİ İÇİN KANONİK İFADELER VE UYGULAMA

6.1. Giriş

Bu bölümde standart lineer modelin EKK tahmin edicileri için kanonik ifadeleri, β ve s^2 nin yansız tahmin edicilerini ve β nın minimum varyanslı yansız tahmin edicisini inceleyeceğiz. Gerçek bir veri kümesi üzerinde Householder dönüşümü matrislerinin regresyon uygulamasını gerçekleştireceğiz.

6.2. Standart Lineer Modelin Kanonik Formu

Bilindiği üzere en küçük kareler tahmini (EKK), regresyon analizinde bilinmeyen parametrelerin kestirilmesi için kullanılan en yaygın kestirim yöntemlerinden biridir. EKK tahmin edicisini hesaplamak için kullanılan birçok yöntem vardır; Cholesky ayrışımı (üçgensel faktörlere ayırma) , QR ayrışımı (ortogonal faktörlere ayırma) gibi. QR ayrışımı denklem sayısı bilinmeyen sayısından çok olan lineer denklem sistemlerinin çözümlerinde kullanılır. QR ayrışımında Q ve R yi hesaplamak için iki temel metot Gram-Schmidt ve Householder dönüşümleridir. Biz burada Householder yöntemini kullanacağız.

Householder yöntemi $n \times p$ X matrisini üst üçgensel forma değiştiren p tane Householder dönüşüm matrisinin çarpımı olarak $n \times n$ ortonormal Q matrisini üretir

$$Q = H_1 H_2 \dots H_{p-1} H_p$$

dir. Bu yöntemin

1. Aşama : $X^{[1]} = H_1'$ in ilk kolonunda köşegen altındakiler sıfır olacak şekilde $n \times n$ ortonormal H_1 matrisi seçilir, $X_{k_1}^{[1]} = 0$, $k = 2, 3, \dots, n$ için.

2. Aşama : $X^{[2]} = H_2'$ in ilk iki kolonunda köşegen altındakiler sıfır olacak şekilde $n \times n$ ortonormal H_2 matrisi seçilir. $X_{k_1}^{[2]} = 0$, $k = 2, 3, \dots, n$ ve $X_{k_2}^{[2]} = 0$, $k = 3, 4, \dots, n$ için.

i. Aşama : $X^{[i]} = H_i'$ in ilk i kolonunun köşegen altındakiler sıfır olacak şekilde $n \times n$ ortonormal H_i matrisi seçilir.

p. Aşama : $X^{[p]} = H_p'$ in tüm p kolonunun köşegen altındakiler sıfır olacak şekilde $n \times n$ ortonormal H_p matrisi seçilir.

U , bir üst üçgensel matris olmak üzere

$$X^{[p]} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix}$$

formundadır.

$$\begin{aligned} X^{[p]} &= H_p' X^{[p-1]} \\ &= H_p' H_{p-1}' X^{[p-2]} \\ &= H_p' H_{p-1}' \dots H_2' X^{[1]} \\ &= H_p' H_{p-1}' \dots H_2' H_1' X \\ X^{[p]} &= Q' X \end{aligned}$$

elde edilir ve $Q = H_1 H_2 \dots H_{p-1} H_p$, $Q'Q = I_n$ ve $QQ' = I_n$ dir.

Şimdi bunu bir örnek üzerinde inceleyelim.

Örnek : New York Nehirleri Verisi (Chatterjee ve ark. (2000))

New York'ta 20 nehir üzerinde su kirliliğini incelemek üzere yapılan bir araştırmayı ele alalım.

Tablo 1. New York Nehirlerinde Su Kirliliği Çalışması için Değişkenler

Değişken	Tanım
Y	İlkbahar, yaz ve sonbahar ayları süresince düzenli aralıklarla alınan örneklemelere dayalı nitrojen konsantrasyonu ortalaması (mg/litre)
X ₁	Tarım: Tarımsal kullanımda sürekli olarak arazi alanının yüzdesi
X ₂	Orman: Orman arazisinin yüzdesi
X ₃	Yerleşim Yerleri: Yerleşim yeri kullanımında arazi alanının yüzdesi
X ₄	Ticari/Endüstriyel: Ticari ya da endüstriyel kullanımda arazi alanının yüzdesi

Tablo 2. New York Nehirleri Verisi (Chatterjee ve ark. (2000))

Satır	Nehir	Y	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄
1	Olean	1.10	26	63	1.2	0.29
2	Cassadaga	1.01	29	57	0.7	0.09
3	Oatka	1.90	54	26	1.8	0.58
4	Neversink	1.00	2	84	1.9	1.98
5	Hackensack	1.99	3	27	29.4	3.11
6	Wappinger	1.42	19	61	3.4	0.56
7	Fishkill	2.04	16	60	5.6	1.11
8	Honeoye	1.65	40	43	1.3	0.24
9	Susquehanna	1.01	28	62	1.1	0.15
10	Chenango	1.21	26	60	0.9	0.23
11	Tioughnioga	1.33	26	53	0.9	0.18
12	West Canada	0.75	15	75	0.7	0.16
13	East Canada	0.73	6	84	0.5	0.12
14	Saranac	0.80	3	81	0.8	0.35
15	Ausable	0.76	2	89	0.7	0.35
16	Black	0.87	6	82	0.5	0.15
17	Schoharie	0.80	22	70	0.9	0.22
18	Raquette	0.87	4	75	0.4	0.18
19	Oswegatchie	0.66	21	56	0.5	0.13
20	Cohocton	1.25	40	49	1.1	0.13

$$H = I - 2 \frac{uu^T}{u^T u} \quad (6.1)$$

$$u = x + \text{sign}(x_1) \|x_1\|_2 e_1 \quad (6.2)$$

Her bir Householder matrisi yukarıdaki gibi hesaplanır. Burada x , X matrisinin birinci kolonu ve x_1 , x in ilk elemanıdır. Buna göre örneğimize bakalım.

$u_1 = 26 +$	$\sqrt{26^2 + 29^2 + \mathbf{K} + 40^2}$	1
29		0
54		0
2		0
3		0
19		0
16		0
40		0
28		0
26		0
26		0
15		0
6		0
3		0
2		0
6		0
22		0
4		0
21		0
40		0

$$u_1 = \begin{bmatrix} 133.9400 \\ 29.0000 \\ 54.0000 \\ 2.0000 \\ 3.0000 \\ 19.0000 \\ 16.0000 \\ 40.0000 \\ 28.0000 \\ 26.0000 \\ 26.0000 \\ 15.0000 \\ 6.0000 \\ 3.0000 \\ 2.0000 \\ 6.0000 \\ 22.0000 \\ 4.0000 \\ 21.0000 \\ 40.0000 \end{bmatrix}$$

$$H_1 = I_{20} - 2 \frac{u_1 u_1'}{u_1' u_1}$$

H_1 = Kolon 1-7

-0.2409	-0.2687	-0.5003	-0.0185	-0.0278	-0.1760	-0.1482
-0.2687	0.9418	-0.1083	-0.0040	-0.0060	-0.0381	-0.0321
-0.5003	-0.1083	0.7983	-0.0075	-0.0112	-0.0710	-0.0598
-0.0185	-0.0040	-0.0075	-0.9997	-0.0004	-0.0026	-0.0022
-0.0278	-0.0060	-0.0112	-0.0004	0.9994	-0.0039	-0.0033
-0.1760	-0.0381	-0.0710	-0.0026	-0.0039	0.9750	-0.0210
-0.1482	-0.0321	-0.0598	-0.0022	-0.0033	-0.0210	0.9823
-0.3706	-0.0802	-0.1494	-0.0055	-0.0083	-0.0526	-0.0433
-0.2594	-0.0562	-0.1046	-0.0039	-0.0058	-0.0368	-0.0310
-0.2409	-0.0522	-0.0971	-0.0036	-0.0054	-0.0342	-0.0288
-0.2409	-0.0522	-0.0971	-0.0036	-0.0054	-0.0342	-0.0288
-0.1390	-0.0301	-0.0560	-0.0021	-0.0031	-0.0197	-0.0166
-0.0556	-0.0120	-0.0224	-0.0008	-0.0012	-0.0079	-0.0066
-0.0278	-0.0060	-0.0112	-0.0004	-0.0006	-0.0039	-0.0033
-0.0185	-0.0120	-0.0224	-0.0008	-0.0012	-0.0079	-0.0066
-0.0556	-0.0120	-0.0224	-0.0008	-0.0012	-0.0079	-0.0066
-0.2038	-0.0441	-0.0822	-0.0030	-0.0046	-0.0289	-0.0243
-0.0371	-0.0080	-0.0149	-0.0006	-0.0008	-0.0053	-0.0044
-0.1946	-0.0421	-0.0784	-0.0029	-0.0044	-0.0276	-0.0232
-0.3706	-0.0802	-0.1494	-0.0055	-0.0083	-0.0526	-0.0443

Kolon 8-14

−0.3706	−0.2594	−0.2409	−0.2409	−0.1390	−0.0556	−0.0278
−0.0802	−0.0562	−0.0522	−0.0522	−0.0301	−0.0120	−0.0060
−0.1494	−0.1046	−0.0971	−0.0971	−0.0560	−0.0224	−0.0112
−0.0055	−0.0039	−0.0036	−0.0036	−0.0021	−0.0008	−0.0004
−0.0083	−0.0058	−0.0054	−0.0054	−0.0031	−0.0012	−0.0006
−0.0526	−0.0368	−0.0342	−0.0342	−0.0197	−0.0079	−0.0039
−0.0443	−0.0310	−0.0288	−0.0288	−0.0166	−0.0066	−0.0033
0.8893	−0.0775	−0.0719	−0.0719	−0.0415	−0.0166	−0.0083
−0.0775	0.9458	−0.0504	−0.0504	−0.0291	−0.0116	−0.0058
−0.0719	−0.0504	0.953	−0.0468	−0.0270	−0.0108	−0.0054
−0.0719	−0.0504	−0.0468	−0.9532	−0.0270	−0.0108	−0.0054
−0.0415	−0.0291	−0.0270	−0.0270	0.9844	−0.0062	−0.0031
−0.0166	−0.0116	−0.0108	−0.0108	−0.0062	0.9975	−0.0012
−0.0083	−0.0058	−0.0054	−0.0054	−0.0031	−0.0012	0.9994
−0.0055	−0.0039	−0.0036	−0.0036	−0.0021	−0.0008	−0.0004
−0.0166	−0.0116	−0.0108	−0.0108	−0.0062	−0.0025	−0.0012
−0.0609	−0.0426	−0.0396	−0.0396	−0.0228	−0.0091	−0.0046
−0.0111	−0.0077	−0.0072	−0.0072	−0.0042	−0.0017	−0.0008
−0.0581	−0.0407	−0.0378	−0.0378	−0.0218	−0.0087	−0.0044
−0.1107	−0.0775	−0.0719	−0.0719	−0.0415	−0.0166	−0.0083

Kolon 15-20

−0.0185	−0.0556	−0.2038	−0.0371	−0.1946	−0.3706
−0.0040	−0.0120	−0.0441	−0.0080	−0.0421	−0.0802
−0.0075	−0.0224	−0.0822	−0.0149	−0.0784	−0.1594
−0.0003	−0.0008	−0.0030	−0.0006	−0.0029	−0.0055
−0.0004	−0.0012	−0.0046	−0.0008	−0.0044	−0.0083
−0.0026	−0.0079	−0.0289	−0.0053	−0.0276	−0.0526
−0.0022	−0.0066	−0.0243	−0.0044	−0.0232	−0.0443
−0.0055	−0.0166	−0.0609	−0.0111	−0.0581	−0.1107
−0.0039	−0.0116	−0.0426	−0.0077	−0.0407	−0.0775
−0.0036	−0.0108	−0.0396	−0.0072	−0.0378	−0.0719
−0.0036	−0.0108	−0.0396	−0.0072	−0.0378	−0.0719
−0.0021	−0.0062	−0.0228	−0.0042	−0.0218	−0.0415
−0.0008	−0.0025	−0.0091	−0.0017	−0.0087	−0.0166
−0.0004	−0.0012	−0.0046	−0.0008	−0.0044	−0.0083
0.9997	−0.0008	−0.0030	−0.0006	−0.0029	−0.0055
−0.0008	0.9975	−0.0091	−0.0017	−0.0087	−0.0166
−0.0030	−0.0091	0.9665	−0.0061	−0.0320	−0.0609
−0.0006	−0.0017	−0.0061	0.9989	−0.0058	−0.0111
−0.0029	−0.0087	−0.0320	−0.0058	0.9695	−0.0581
−0.0055	−0.0166	−0.0609	−0.0111	−0.0581	0.8893

[illegible]

$$X^{[1]} = H_1' X$$

$$X^{[1]} =$$

-107.9352	-194.3302	-5.7507	-1.1755
0.0010	1.2842	-0.8049	-0.2273
0.0019	-77.7467	-1.0023	-0.0108
0.0001	80.1574	1.7962	1.9581
0.0001	21.2363	29.2443	3.0772
0.0007	24.4965	2.4140	0.3521
0.0006	29.2602	4.7697	0.9349
0.0014	-33.8494	-0.7758	-0.1977
0.0010	8.2054	-0.3530	-0.1564
0.0009	10.0479	-0.4492	-0.0545
0.0009	3.0479	-0.4492	-0.1045
0.0005	46.1815	-0.0784	-0.0041
0.0002	72.4726	0.1886	0.0544
0.0001	75.2363	0.6443	0.3172
0.0001	85.1575	0.5962	0.3281
0.0002	70.4726	0.1886	0.0844
0.0008	27.7328	-0.2417	-0.0207
0.0001	67.3151	0.1924	0.1362
0.0008	15.6541	-0.5898	-0.0998
0.0014	-27.8494	-0.9758	-0.3077

Aynı yöntemle

$H_2 =$ Kolon 1-8

1	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.0714	0.3566	-0.3677	-0.0974	-0.1124	-0.1342	0.1553
0	0.3566	0.8813	0.1224	0.0324	0.0374	0.0447	-0.0517
0	-0.3677	0.1224	0.8738	-0.0334	-0.0386	-0.0461	0.0533
0	-0.0974	0.0324	-0.0334	0.9911	-0.0102	-0.0122	0.0141
0	-0.1124	0.0374	-0.0386	-0.0102	0.9882	-0.0141	0.0163
0	-0.1342	0.0447	-0.0461	-0.0122	-0.0141	0.9832	0.0195
0	0.1553	-0.0517	0.0533	0.0141	0.0163	0.0195	0.9775
0	-0.0376	0.0125	-0.0129	-0.0034	-0.0039	-0.0047	0.0055
0	-0.0461	0.0153	-0.0158	-0.0042	-0.0048	-0.0058	0.0067
0	-0.0140	0.0047	-0.0048	-0.0013	-0.0015	-0.0018	0.0020
0	-0.2118	0.0705	-0.0727	-0.0193	-0.0222	-0.0265	0.0307
0	-0.3324	0.1107	-0.1141	-0.0302	-0.0349	-0.0416	0.0482
0	-0.3451	0.1149	-0.1184	-0.0314	-0.0362	-0.0432	0.0500
0	-0.3906	0.1300	-0.1341	-0.0355	-0.0410	-0.0489	0.0566
0	-0.3233	0.1076	-0.1109	-0.0294	-0.0339	-0.0405	0.0468
0	-0.1272	0.0423	-0.0437	-0.0116	-0.013	-0.0159	0.0184
0	-0.3088	0.1028	-0.1060	-0.0281	-0.0324	-0.0387	0.0447
0	-0.0718	0.0239	-0.0246	-0.0065	-0.0075	-0.0090	0.0104
0	0.1277	-0.0425	0.0438	0.0116	0.0134	0.0160	-0.0185

Kolon 8-14

0	0	0	0	0	0	0
-0.0376	-0.0461	-0.0140	-0.2118	-0.3324	-0.3451	-0.3906
0.0125	0.0153	0.0047	0.0705	0.1107	0.1149	0.1300
-0.0129	-0.0158	-0.0048	-0.0727	-0.1141	-0.1184	-0.1341
-0.0034	-0.0042	-0.0013	-0.0193	-0.0302	-0.0314	-0.0355
-0.0039	-0.0048	-0.0015	-0.0222	-0.0349	-0.0362	-0.0410
-0.0047	-0.0058	-0.0018	-0.0265	-0.0416	-0.0432	-0.0489
0.0055	0.0067	0.0020	0.0307	0.0482	0.0500	0.0566
0.9987	-0.0016	-0.0005	-0.0074	-0.0117	-0.0121	-0.0137
-0.0016	0.9980	-0.0006	-0.0091	-0.0143	-0.0148	-0.0168
-0.0005	-0.0006	0.9998	-0.0028	-0.0043	-0.0045	-0.0051
-0.0074	-0.0091	-0.0028	0.9581	-0.0657	-0.0682	-0.0772
-0.0117	-0.0143	-0.0043	-0.0657	0.8968	-0.1071	-0.1212
-0.0121	-0.0148	-0.0045	-0.0682	-0.1071	0.8888	-0.1258
-0.0137	-0.0168	-0.0051	-0.0772	-0.1212	-0.1258	0.8576
-0.0114	-0.0139	-0.0042	-0.0639	-0.1003	-0.1041	-0.1179
-0.0045	-0.0055	-0.0017	-0.0252	-0.0395	-0.0410	-0.0464
-0.0108	-0.0133	-0.0040	-0.0611	-0.0958	-0.0995	-0.1126
-0.0025	-0.0031	-0.0009	-0.0142	-0.0223	-0.0231	-0.0262
0.0045	0.0055	0.0017	0.0253	0.0396	0.0411	0.0466

Kolon 15-20

0	0	0	0	0
-0.3233	-0.1272	-0.3088	-0.0718	0.1277
0.1076	0.0423	0.1028	0.0239	-0.0425
-0.1109	-0.0437	-0.1060	-0.0246	0.0438
-0.0294	-0.0116	-0.0281	-0.0065	0.0116
-0.0339	-0.0133	-0.0324	-0.0075	0.0134
-0.0405	-0.0159	-0.0387	-0.0090	0.0160
0.0468	0.0184	0.0447	0.0104	-0.0185
-0.0114	-0.0045	-0.0108	-0.0025	0.0045
-0.0139	-0.0055	-0.0133	-0.0031	0.0055
-0.0042	-0.0017	-0.0040	-0.0009	0.0017
-0.0639	-0.022	-0.0611	-0.0142	0.0253
-0.1003	-0.0395	-0.0958	-0.0223	0.0396
-0.1041	-0.0410	-0.0995	-0.0231	0.0411
-0.1179	-0.0464	-0.1126	-0.0262	0.0466
0.9025	-0.0384	-0.0932	-0.0217	0.0385
-0.0384	0.9849	-0.0367	-0.0085	0.0152
-0.0932	-0.0367	0.9110	-0.0207	0.0368
-0.0217	-0.0085	-0.0207	0.9952	0.086
0.0385	0.0152	0.0368	0.0086	0.9848

olarak elde edilir. Diğer Householder matrisleri de aynı yolla bulunabilir.

6.3. Householder Yönteminin Regresyon Analizine Uygulanması

$y = n \times 1$ gözlemler vektörü

$X = n \times p$ bilinenler matrisi

$b = p \times 1$ parametre vektörü

$e = n \times 1$ hatalar vektörü

olmak üzere çoklu standart lineer regresyon modeli

$$y = Xb + e$$

$$E(e) = 0$$

$$E(ee') = s^2 I_n$$

göz önüne alalım. $Q_1'X = U$ $p \times p$ üst üçgensel matris ve $Q_2'X = 0$ $(n-p) \times p$ sıfır matris olmak üzere ilk p kolonu ve kalan $(n-p)$ kolonu olarak parçalanmış $Q = [Q_1 \ Q_2]$ $n \times n$ ortonormal matrisinin transpozunu bu modele uygulayalım. (Draper ve Smith (1981))

$$y = Xb + e$$

$$Q'y = Q'Xb + Q'e$$

$v = Q_1'y$, $h = Q_1'e$, $p \times 1$ vektörler ve $t = Q_2'y$, $z = Q_2'e$ $(n-p) \times 1$ vektörler olmak üzere

$$\begin{bmatrix} v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} h \\ z \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

modeline sahip oluruz.

$$x = \begin{bmatrix} h \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1' \\ Q_2' \end{bmatrix} e = Q'e \quad (6.4)$$

dır öyle ki

$$E(x) = E(Q'e) = Q'E(e) = Q' \cdot 0 = 0 \quad (6.5)$$

ve

$$\begin{aligned} E(xx') &= E(Q'ee'Q) = Q'E(ee')Q \\ &= Q'(s^2 I_n)Q = s^2 Q'Q = s^2 I_n \end{aligned} \quad (6.6)$$

elde edilir. Böylece

$$E \begin{bmatrix} h \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad E \left\{ \begin{bmatrix} h \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h' & z' \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} s^2 I & 0 \\ 0 & s^2 I_{n-p} \end{bmatrix}$$

ya da alternatif olarak,

$$v = Ub + h \quad E(h) = 0 \quad E(hh') = s^2 I_p$$

ve

$$t = z \quad E(z) = 0 \quad E(zz') = s^2 I_{n-p}$$

olmak üzere standart lineer modelin kanonik formu

$$\begin{bmatrix} v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} h \\ z \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

olarak verilir.

Standart lineer modelin kanonik formu, ilk p kolonu ve kalan (n-p) kolonu olarak parçalı $X' = \begin{bmatrix} X'_A & X'_B \end{bmatrix}$ olmak üzere X ten Q_1 ve

$$\begin{bmatrix} X'_A & X'_B \\ -I_{n-p} & \end{bmatrix}$$

den Q_2 yi elde etmede Laplace yöntemini kullanan Thiele (1889,1897) tarafından geliştirildi.

Şimdi örneğimize tekrar dönelim ve QR ayrışımını elde edelim.

$$[Q,R]=qr(X)$$

Q= Kolon 1-7

−0.2409	−0.0744	0.0204	0.0286	0.5603	−0.1171	−0.0432
−0.2687	−0.0220	0.0330	0.0975	−0.3642	−0.1620	−0.1499
−0.5003	0.3275	−0.0251	−0.2637	−0.5444	−0.0611	−0.1289
−0.0185	−0.3697	0.0087	−0.8696	0.1281	−0.0381	−0.2150
−0.0278	−0.0993	−0.9775	0.0764	0.0145	−0.0779	−0.1438
−0.1760	−0.1232	−0.0581	0.0129	−0.0362	0.9641	−0.0308
−0.1482	−0.1434	−0.1347	−0.1803	−0.1023	−0.0397	0.9399
−0.3706	0.1334	0.0031	−0.0142	0.2452	−0.1137	0.0083
−0.2594	−0.0533	0.0234	0.1023	0.1016	−0.0291	−0.0039
−0.2409	−0.0607	0.0280	0.0377	0.1039	−0.0278	−0.0093
−0.2490	−0.0285	0.0219	0.0491	0.1122	−0.0238	−0.0043
−0.1390	−0.2207	0.0450	0.1290	−0.0213	−0.0404	−0.0204
−0.0556	−0.3366	0.0574	0.1815	−0.1143	−0.0487	−0.0292
−0.0278	−0.3477	0.0438	0.0560	−0.1260	−0.0477	−0.0427
−0.0185	−0.3927	0.0539	0.0734	−0.1458	−0.0525	−0.0463
−0.0556	−0.3274	0.0557	0.1574	−0.1076	−0.0443	−0.0301
−0.2038	−0.1398	0.0357	0.0787	0.0482	−0.0352	−0.0156
−0.0371	−0.3118	0.0525	0.1164	−0.1051	−0.0435	−0.0311
−0.1946	−0.0837	0.0369	0.0710	0.0740	−0.0266	−0.0074
−0.3706	0.1058	0.0152	0.0573	0.2318	−0.0172	0.0119

Kolon 8-14

−0.4016	−0.2614	−0.2448	−0.2478	−0.1178	−0.0165	0.0199
0.0714	−0.1100	−0.0973	−0.0712	−0.2497	−0.3553	−0.3348
−0.2179	−0.0571	−0.0573	−0.0713	0.0813	0.1830	0.1641
0.0430	0.0652	0.0027	0.0280	0.0140	0.0098	−0.1079
0.0081	0.0031	0.0112	0.0082	0.0073	0.0055	−0.0009
−0.0392	−0.0419	−0.0382	−0.0360	−0.0395	−0.0387	−0.0330
−0.0275	−0.0268	−0.0297	−0.0256	−0.0290	−0.0283	−0.0367
0.8555	−0.0694	−0.0662	−0.0711	−0.0001	0.0501	0.0584
−0.0776	0.9387	−0.0543	−0.0546	−0.0385	−0.0242	−0.0099
−0.0706	−0.0549	0.9496	−0.0499	−0.0354	−0.0224	−0.0127
−0.0756	−0.0538	−0.0490	0.9505	−0.0288	−0.0120	−0.0018
−0.0111	−0.0461	−0.0389	−0.0342	0.9327	−0.0856	−0.0715
0.0351	−0.0372	−0.0285	−0.0207	−0.0890	0.8696	−0.1142
0.0455	−0.0259	−0.0218	−0.0127	−0.0822	−0.1246	0.8825
0.0558	−0.0272	−0.0223	−0.0120	−0.0925	−0.1419	−0.1334
0.0336	−0.0356	−0.0278	−0.0201	−0.0857	−0.1254	−0.1109
−0.0456	−0.0531	−0.0472	−0.0447	−0.0520	−0.0532	−0.0412
0.0371	−0.0291	−0.0230	−0.0153	−0.0786	−0.1171	−0.1059
−0.0514	−0.0481	−0.0430	−0.0419	−0.0387	−0.0336	−0.0227
−0.1398	−0.0743	−0.0684	−0.0732	−0.0102	0.0349	0.0482

Kolon 15-20

0.0330	-0.0177	-0.1950	-0.0011	-0.1982	-0.4019
-0.3774	-0.3413	-0.1740	-0.3146	-0.1174	0.0313
0.1959	0.1730	0.0039	0.1642	-0.0152	-0.1841
-0.1130	-0.0079	0.0045	-0.0379	0.0223	0.0948
0.0032	0.0063	0.0083	0.0080	0.0168	0.0126
-0.0357	-0.0374	-0.0406	-0.0326	-0.0344	-0.0429
-0.0388	-0.0291	-0.0312	-0.0283	-0.0239	-0.0245
0.0694	0.0474	-0.0376	0.0486	-0.0475	-0.1381
-0.0096	-0.0228	-0.0489	-0.0165	-0.0473	-0.0826
-0.0126	-0.0217	-0.0454	-0.0167	-0.0434	-0.0737
-0.0003	-0.0115	-0.0414	-0.0070	-0.0412	-0.0779
-0.0806	-0.0814	-0.0538	-0.0724	-0.0420	-0.0237
-0.1300	-0.1238	-0.0581	-0.1123	-0.0391	0.0161
-0.1333	-0.1194	-0.0513	-0.1105	-0.0318	0.0305
0.8485	-0.1358	-0.0565	-0.1257	-0.0343	0.0384
-0.1261	0.8807	-0.0562	-0.1084	-0.0378	0.0157
-0.0454	-0.0508	0.9486	-0.0438	-0.0446	-0.0533
-0.1204	-0.1116	-0.0501	0.8979	-0.0326	0.0212
-0.0245	-0.0320	-0.0426	-0.0264	0.9610	-0.0567
0.0574	0.0334	-0.0436	0.0367	-0.0518	0.8629

$$R = \begin{bmatrix} -107.9352 & -194.3296 & -5.7507 & -1.1755 \\ 0 & -217.4557 & -5.5408 & -1.5658 \\ 0 & 0 & -29.3489 & -3.1153 \\ 0 & 0 & 0 & -1.6173 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = Q_1 X = \begin{bmatrix} -107.9352 & -194.3296 & -5.7507 & -1.1755 \\ 0.0000 & -217.4557 & -5.5408 & -1.5658 \\ 0.0000 & 0.0000 & -29.3489 & -3.1153 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.6173 \end{bmatrix}$$

$$v = Q_1' y = \begin{bmatrix} -4.6149 \\ -2.0403 \\ -1.8765 \\ -0.4978 \end{bmatrix}$$

$$t = Q_2 y = \begin{bmatrix} -0.2259 \\ 0.2789 \\ 0.7597 \\ 0.2233 \\ -0.1807 \\ 0.0732 \\ 0.2466 \\ -0.1586 \\ 0.0249 \\ 0.1241 \\ 0.0675 \\ 0.1695 \\ -0.2874 \\ 0.2608 \\ -0.2798 \\ -0.1772 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \end{bmatrix} b + \begin{bmatrix} h \\ z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4.6149 \\ -2.0403 \\ -1.8765 \\ -0.4978 \\ -0.2259 \\ 0.2789 \\ 0.7597 \\ 0.2233 \\ -0.1807 \\ 0.0732 \\ 0.2466 \\ -0.1586 \\ 0.0249 \\ 0.1241 \\ 0.0675 \\ 0.1695 \\ -0.2874 \\ 0.2608 \\ -0.2798 \\ -0.1772 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -107.9352 & -194.3296 & -5.7507 & -1.1755 \\ 0.0000 & -217.4557 & -5.5408 & -1.5658 \\ 0.0000 & 0.0000 & -29.3489 & -3.1153 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -1.6173 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \end{bmatrix} b$$

6.3. β ve s^2 nin Yansız Tahmin Edicileri

Bu model bağlamında, β yı

$$\hat{b} = U^{-1}v$$

ile tahmin etmek kabul edilebilir görülüyor.

$$v = Ub + h$$

olduğundan

$$\hat{b} = U^{-1}(Ub + h) = U^{-1}Ub + U^{-1}h$$

$$\hat{b} = b + U^{-1}h \quad (6.8)$$

bulunur. Böylece $\hat{b}$

$$E(\hat{b}) = E(b + U^{-1}h) = b + E(U^{-1}h) = b + U^{-1}E(h)$$

$$E(\hat{b}) = b \quad (6.9)$$

beklenen değerine ve

$$Var(\hat{b}) = E[(\hat{b} - b)(\hat{b} - b)']$$

$$= E[(U^{-1}h)(U^{-1}h)']$$

$$= E[U^{-1}h h'(U^{-1})'] = U^{-1}E(h h')(U^{-1})'$$

$$= U^{-1}s^2 I_p (U^{-1})' = s^2 U^{-1}(U^{-1})'$$

$$= s^2 U^{-1}(U^{-1})' = s^2 (U'U)^{-1}$$

$$Var(\hat{b}) = s^2 (U'U)^{-1} \quad (6.10)$$

varyansına sahiptir. s^2

$$\hat{s}^2 = \frac{t't}{n-p}$$

ile tahmin edilebilir. $t = \zeta$ olduğundan

$$E(z z') = E[tr(z z')] = E[tr(z' z)]$$

$$= tr[E(z' z)] = tr(s^2 I_{n-p})$$

$$= (n-p)s^2 \quad (6.11)$$

olur.

$$E(\hat{s}^2) = \frac{1}{n-p} E(t't) = \frac{1}{n-p} E(z'z) = \frac{1}{n-p} (n-p)s^2 = s^2 \quad (6.12)$$

olduğundan $\hat{s}^2$, s^2 nin yansız tahmin edicisidir.

Örneğimize bakacak olursak

$$\hat{b} = U^{-1}v = \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0.0064 \\ 0.0313 \\ 0.3078 \end{bmatrix} \text{ ve } Var(\hat{b}) = 0.0206$$

dır. $\hat{s}^2 = \frac{t't}{n-p}$ olduğundan $\hat{s}^2 = 0.0743$ dir.

6.4. β nin Minimum Varyans Yansız Lineer Tahmin Edicisi

$Var(\hat{b}) = s^2 (X'X)^{-1} = s^2 (U'U)^{-1}$ varyans matrisi ile sıradan EKK tahmin edicisi ve kanonik EKK tahmin edicisi

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y = U^{-1}v$$

β nin bir yansız tahmin edicisidir. Burada β nin en iyi tahmin edicisini inceleyeceğiz.

A $n \times p$ matris olsun. $b = A'y$ nin elemanları y nin elemanlarının lineer fonksiyonudur ve b , β nin lineer tahmin edicisidir.

$$B = Q_1' A \text{ ve } C = Q_2' A \text{ olsun.}$$

$$b = A'y = A'QQ'y$$

$$= A'(Q_1 Q_1' + Q_2 Q_2')y$$

$$= A'(Q_1 Q_1')y + A'(Q_2 Q_2')y$$

$$= B'v + C't$$

$$= B'(Ub + h) + C'z$$

$$b = B'Ub + B'h + C'z \quad (6.13)$$

bulunur ve

$$E(b) = B'Ub + B'E(h) + C'E(z)$$

$$E(b) = B'Ub \quad (6.14)$$

dır ki ancak ve ancak $B'U = I_p$ ise b , β nin yansız tahmin edicisi olur. Bu da $B' = U^{-1}$ ile mümkündür. Varsayalım ki $B' = U^{-1}$ olsun.

$$b = b + B'h + C'z \Rightarrow b - b = B'h + C'z$$

$$Var(b) = E[(b - b)(b - b)']$$

$$= E[(B'h + C'z)(B'h + C'z)']$$

$$= E[B'h h' B + B'h z' C + C' z h' b + C' z z' C]$$

$$= E(B'h h' B) + E(B'h z' C) + E(C' z h' b) + E(C' z z' C)$$

$$= B' s^2 I_p B + B' \cdot 0 \cdot C + C' \cdot 0 \cdot b + C' s^2 I_{n-p} C$$

$$= s^2 B' B + s^2 C' C$$

$$\text{Var}(b) = s^2 (U'U)^{-1} + s^2 C'C \quad (6.15)$$

varyans matrisine sahiptir. Ancak ve ancak C sıfır olduğunda, pozitif semidefinite matris $s^2 C'C$ sıfır olursa, yansız lineer tahmin edici $b = A'y$ matrisinin varyansı, $\hat{b}$ EKK tahmin edicisinininkinden daha büyüktür ki b EKK tahmin edicisidir. (Berk ve Hwang 1989))

Bu sonuçların ne anlama geldiğini görmek için, $d: p \times 1$ vektör olsun. $d'b$ ve $d'\hat{b}$ nin her ikisi de $d'b$ nin yansız lineer tahmin edicileridir. Fakat $d'\hat{b}$ nin varyansı

$$\text{Var}(d'\hat{b}) = d'[\text{Var}(\hat{b})]d = s^2 d'(U'U)^{-1}d \quad (6.16)$$

ile verilmesine rağmen $d'b$ nin varyansı

$$\begin{aligned} \text{Var}(d'b) &= d'[\text{Var}(b)]d \\ &= s^2 d'(U'U)^{-1}d + s^2 d'C'Cd \\ &= \text{Var}(d'\hat{b}) + s^2 g'g \end{aligned} \quad (6.17)$$

ile verilir ki eğer $g = Cd$ matrisi bir sıfır matris olmazsa $d'b$ nin varyansı $d'\hat{b}$ varyansından açık şekilde büyüktür. Bu nedenle $\hat{b}, \beta$ nin minimum varyanslı yansız lineer tahmin edicisidir. Her ne kadar temel sonuçlar, Markov (1912), problemi tartışmadan yıllar önce Gauss (1823) tarafından kurulduysa da bu sonuç genellikle Gauss-Markov Teoremi olarak bilinir. (Kourouklis ve Paige (1981))

Örnekte

$$\hat{b} = (X'X)^{-1} X'y = \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0.0064 \\ 0.0313 \\ 0.3078 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \hat{b} = U^{-1}v = \begin{bmatrix} 0.0263 \\ 0.0064 \\ 0.0313 \\ 0.3078 \end{bmatrix}$$

$$Var(\hat{b}) = 0.0206 \quad \text{ve} \quad Var(\hat{b}) = 0.0206$$

Şimdi $A: 20 \times 4$ matris alalım.

$$A = \begin{bmatrix} 9.5013 & 0.5789 & 8.3812 & 4.9655 \\ 2.3114 & 3.5287 & 0.1964 & 8.9977 \\ 6.0684 & 8.1317 & 6.8128 & 8.2163 \\ 4.8598 & 0.0986 & 3.7948 & 6.4491 \\ 8.9130 & 1.3889 & 8.3180 & 8.1797 \\ 7.6210 & 2.0277 & 5.0281 & 6.6023 \\ 4.5647 & 1.9872 & 7.0947 & 3.4197 \\ 0.1850 & 6.0379 & 4.2889 & 2.8973 \\ 8.2141 & 2.7219 & 3.0462 & 3.4119 \\ 4.4470 & 1.9881 & 1.8965 & 5.3408 \\ 6.1543 & 0.1527 & 1.9343 & 7.2711 \\ 7.9194 & 7.4679 & 6.8222 & 3.0929 \\ 9.2181 & 4.4510 & 3.0276 & 8.3850 \\ 7.3821 & 9.3181 & 5.4167 & 5.6807 \\ 1.7627 & 4.6599 & 1.5087 & 3.7041 \\ 4.0571 & 4.1865 & 6.9790 & 7.0274 \\ 9.3547 & 8.4622 & 3.7837 & 5.4657 \\ 9.1690 & 5.2515 & 8.6001 & 4.4488 \\ 4.1027 & 2.0265 & 8.5366 & 6.9457 \\ 8.9365 & 6.7214 & 5.9356 & 6.2131 \end{bmatrix}$$

$$b = A'y = \begin{bmatrix} 141.9969 \\ 89.3333 \\ 121.7848 \\ 136.1062 \end{bmatrix}$$

$$B = Q_1' A = \begin{bmatrix} -21.4878 & -15.9751 & -176543 & -21.1830 \\ -16.9054 & -9.4957 & -12.6049 & -14.0134 \\ -6.5270 & 0.5615 & -6.9802 & -5.9561 \\ 2.4172 & 3.2797 & 0.1877 & -0.3815 \end{bmatrix}$$

$$C = Q_2' A = \begin{bmatrix} 2.2351 & -5.0591 & 1.5306 & -3.4708 \\ 1.5201 & -1.6946 & 0.1702 & 0.3359 \\ 1.2134 & -1.2498 & 2.1719 & -3.3794 \\ -7.1155 & 2.5937 & -2.3723 & -2.2133 \\ 1.2252 & -1.3389 & -2.5351 & -2.5292 \\ -2.0731 & -1.6463 & -3.3500 & -0.3138 \\ -0.0099 & -3.2576 & -3.1077 & 2.1228 \\ 1.8372 & 3.4192 & 2.6336 & -3.1434 \\ 3.7045 & 0.2741 & -0.2013 & 1.9203 \\ 2.5133 & 5.7820 & 2.5659 & -0.5506 \\ -3.4179 & 0.8151 & -1.4180 & -3.0328 \\ -1.3173 & 0.1728 & 3.8001 & 0.7065 \\ 2.7299 & 4.4638 & -1.2202 & -0.7524 \\ 4.4802 & 1.7514 & 5.8876 & -1.2560 \\ -1.5826 & -1.3032 & 4.1384 & 1.9090 \\ 1.2517 & 2.8243 & -0.8377 & 0.7364 \end{bmatrix}$$

$$b = B'v + C't = \begin{bmatrix} 141.9969 \\ 89.3333 \\ 121.7848 \\ 136.1062 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \text{Var}(b) = 555.2153$$

$$\text{Var}(b) = 555.2153 > \text{Var}(\hat{b}) = 0.0206$$

$$d = \begin{bmatrix} 7.9482 \\ 9.5684 \\ 5.2259 \\ 8.8014 \end{bmatrix} \text{ olsun.} \quad d' \text{Var}(b) d = 1.4408e + 0.05 > d' \text{Var}(\hat{b}) d = 5.3561$$

7.1. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

En küçük kareler yöntemi bir cebirsel yöntem olarak 1805 yılında Legendre tarafından önerilmiş ve 1809 da Gauss tarafından istatistiksel yöntem olarak doğrulanmıştır. Bu teknik astronomi ve yeryüzü ölçümleri ile ilgili araştırmalarda derhal standart bir yöntem olarak benimsenmiştir. Geçtiğimiz yüz yıl ve öncesinde istatistiksel veri analizi ile ilgili alanlarda ve çok değişkenli istatistiksel yöntemlerin kullanılmasında karşımıza çıkmıştır.

Bu çalışmada en küçük kareler yönteminin temelleri üzerinde duruldu, EKK ve GEKK nın regresyon modellerinin çözümünde nasıl kullanılacağı verildi. Özellikle Householder yönteminin ve Givens yönteminin matrisler yardımıyla enstrumental değişkenler üzerinde kullanılışına dikkat çekildi. Dönüşüm matrisleri yardımıyla lineer regresyon modellerinin çözümü incelendi. Lineer olmayan modeller için ardışık çözüm yöntemleri verildi.

Bu çalışmada inceleyemediğimiz EKK ve genelleştirilmiş EKK ile ilgili değişik alan bilgilerinin de eklenmesiyle başka teorik ve uygulamalı çalışmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

- BJÖRK, A. (1967). Iterative Refinement for Linear Least Squares Solutions I, BIT 7, pp.257-278
- BJÖRK, A. (1968). Iterative Refinement for Linear Least Squares Solutions II, BIT 8, pp.8-30
- BJÖRK, A. ve GOLUB, G.H. (1967). Iterative Refinement for Linear Least Squares Solutions by Householder Transformations, BIT 7, pp.322-337.
- BERK, R. ve HWANG, J.T. (1989) Optimality of the Least Squares Estimator, Journal of Multivariate Analysis 30, 245-254
- CHATTERJEE, S., HADI, A. ve PRICE, B. (2000). Regression Analysis By Example, John Wiley & Sons, Inc. , New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto
- CHEN, J. ve SHAO, J. (1993) Iterative Weighted Least Squares Estimators, The Annals of Statistics, Vol.21, No.2, 1071-1092
- DAVIDSON, RUSSELL ve MACKINNON, JAMES G. (1993), Estimation and Inference in Econometrics, Oxford University Press, New York
- DRAPER, N.R., SMITH, H., (1981) , Applied Regression Analysis, John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester , Brisbane , Toronto
- FAREBROTHER, R. W. (1988) Linear Least Squares Computations, Marcel Dekker, Inc., New York.
- FAREBROTHER, R. W. (1985) Linear unbiased approximators of the disturbances in the standard linear model, Linear Algebra and Its Applications, 67, 259-274.
- FLETCHER, R. H. (1975) On the iterative refinement of least squares solutions, JASA 70, 109-112
- GAUSS, C. F. (1809). Theoria Motus Corporum Coelestium in Sectionibus Conicis Solem Ambientium.
- GROB, J. ve PUNTANEN, S. (2000) Remark On Pseudo-Generalized Least Squares 19(1), 131-133

- KOUROUKLİS, S. ve C.C. PAIGE (1981) A constrained least squares approach to the general Gauss-Markow linear model, JASA 76, 620-625
- OUELLETTE, D. V. (1981) Schur complements and Statistics, Linear Algebra and Its Applications, 36, 187-295
- PLACKETT, R.L. (1950) Some theorems in Least Squares, Biometrika 37, 149-157.
- PLACKETT, R.L. (1972) The discovery of the method and least squares Biometrika 59, 2,p.239
- RAO, C. R. ve TOUTENBURG (1995) Linear Models Least Squares and Alternatives, Springer-Verlag, New York.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılında Adana’da doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Kozan’da tamamladı. 1999 yılında Çukurova Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü’nden mezun oldu. Aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’nda yüksek lisans öğrenimine başladı ve Çukurova Üniversitesi Kozan Meslek Yüksekokulunda öğretim görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2002 yılında Pamukkale Üniversitesi Bekilli Meslek Yüksekokulu’na geçti. 2006 yılında Uludağ Üniversitesi İnegöl Meslek Yüksekokulu’nda başladı ve çalışma hayatına burada devam etmektedir.