

**T.C.
BURDUR MEHMET AKİF ERSOY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

REGÜLER HAHN DIRAC OPERATÖRÜ

Sibel YAYLA TUNÇ

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

BURDUR, 2025

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin ilgili hükümleri uyarınca Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “**Regüler Hahn Dirac Operatörü**” başlıklı bu tezin;

- Kendi çalışmam olduğunu,
- Sunduğum tüm sonuç, doküman, bilgi ve belgeleri bizzat ve bu tez çalışması kapsamında elde ettiğimi,
- Bu tez çalışmasıyla elde edilmeyen bütün bilgi ve yorumlara atıf yaptığımı ve bunları kaynaklar listesinde usulüne uygun olarak verdiğimi,
- Kullandığım verilerde değişiklik yapmadığımı,
- Tez çalışması ve yazımı sırasında patent ve telif haklarını ihlal edici bir davranışımın olmadığını,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü bu üniversite veya diğer bir üniversitede başka bir tez çalışması içinde sunmadığımı,
- Bu tezin planlanmasından yazımına kadar bütün safhalarda bilimsel etik kurallarına uygun olarak davrandığımı,

bildirir, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul edeceğimi beyan ederim.

12/08/2025

(İmza)

Sibel YAYLA TUNÇ

ÖNSÖZ

Bu araştırma için beni yönlendiren, karşılaştığım zorlukları bilgi ve tecrübesi ile aşmamda yardımcı olan değerli Danışman Hocam **Prof. Dr. Hüseyin TUNA**'ya teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatımın her aşamasında beni her anlamda destekleyen anneme, babama, biricik oğlum Kerem'e ve sevgili eşim Şükrü TUNÇ'a çok teşekkür ederim.

Ağustos, 2025

Sibel YAYLA TUNÇ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖNSÖZ	ii
İÇİNDEKİLER.....	ii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	iii
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
1.GİRİŞ	1
2. GENEL BİLGİLER	4
3.MATERYAL VE YÖNTEM	21
3.1 Öz Eşlenik Hahn Dırac Sistemi.....	21
3.2 Green Fonksiyon ve Öz Fonksiyon Açılım Formülü	24
4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA	31
5. SONUÇ VE ÖNERİLER	34
KAYNAKLAR.....	36

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathcal{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathcal{H}$	: Hilbert Uzayı
$\mathcal{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathcal{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$W_{q,\omega}[f, g]$	: f ile g fonksiyonlarının $q - \omega$ Wronskian'ı
$\int$	: İntegral
$D_{q,w} f(t)$	: Hahn fark operatörü
$\Delta_w f(t)$	: İleri fark operatörü
$D_q f(t)$	: q -fark operatörü
$C_{q,w}$	: Hahn-Kosinüs fonksiyonu
$S_{q,w}$	: Hahn-Sinüs fonksiyonu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Regüler Hahn Dirac Operatörü

Sibel YAYLA TUNÇ

Burdur Mehmet Akif Ersoy Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

Ağustos, 2025

Dirac denklemi, modern fizik tarihinde devrim niteliğinde bir atılım olarak değerlendirilmektedir. Rölatif kuantum mekaniğinin temel taşlarından biri olan bu denklem, yalnızca elektronun yarı-spin ($\text{spin}=\frac{1}{2}$) özelliğini tutarlı bir biçimde açıklamakla kalmamış, aynı zamanda teorik düzlemde karşıt parçacıkların (antiparçacıklar) varlığını öngörerek parçacık fiziğinde yeni bir paradigmanın oluşumuna zemin hazırlamıştır. Ayrıca, hidrojen atomunun spektrumuna ilişkin ince yapı düzeltmelerinin açıklanmasında da dikkate değer bir başarı sağlamıştır.

Bu tez çalışmasında, klasik Dirac denkleminin bir genellemesi olarak değerlendirilebilecek Hahn–Dirac denklemi ele alınmaktadır. Çalışmanın giriş kısmında, konunun tarihsel arka planı detaylı bir şekilde irdelenmiş ve konunun kavranmasına katkı sunacak teorik ön bilgiler sistematik bir biçimde aktarılmıştır. Bunun yanı sıra, ilerleyen bölümlerde analizlerde kullanılacak temel matematiksel kavramlar ve öncül sonuçlar sunulmuştur.

Tezin ikinci ve üçüncü bölümlerinde Hahn–Dirac denklemi kapsamlı bir şekilde ele alınmış; denklemin yapısal özellikleri, matematiksel karakteristikleri ve fiziksel yorumları derinlemesine incelenmiştir. Son bölümde ise, söz konusu denkleme karşılık gelen Hahn–Dirac operatörünün disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri araştırılmış ve bu genişlemeler sınır koşulları bağlamında formüle edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Hahn fark operatörü, Hahn-Dirac sistemi, simetrik operatör, kendine eş operatör, dissipatif operatör, sınır değer uzayı

ABSTRACT

M. Sc. Thesis

Regular Hahn Dirac Operator

Sibel YAYLA TUNÇ

Burdur Mehmet Akif Ersoy University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Hüseyin TUNA

August, 2025

The Dirac equation is regarded as a revolutionary milestone in the history of modern physics. As one of the foundational pillars of relativistic quantum mechanics, this equation not only provides a consistent explanation of the electron's spin- $\frac{1}{2}$ property but also predicts the existence of antiparticles, thereby opening a new era in theoretical physics. Furthermore, it has demonstrated remarkable success in accounting for the fine structure corrections observed in the hydrogen atom spectrum.

In this thesis, we consider the Hahn–Dirac equation, which can be viewed as a generalization of the classical Dirac equation. The introductory section provides a comprehensive account of the historical development of the subject, accompanied by essential theoretical preliminaries that facilitate a deeper understanding of the topic. Additionally, fundamental mathematical concepts and results that will be utilized in subsequent chapters are systematically presented.

The second and third chapters of the thesis offer a detailed examination of the Hahn–Dirac equation, focusing on its structural characteristics, mathematical properties, and physical interpretations. In the final chapter, the dissipative, accretive, and self-adjoint extensions of the Hahn–Dirac operator associated with the equation are investigated, and these extensions are expressed in terms of boundary conditions.

Keywords: Hahn difference operator, Hahn-Dirac system, symmetric operator, dissipative operator, boundary value space

1. GİRİŞ

Operatör teorisi, fonksiyonel analiz ve kuantum mekaniği gibi pek çok matematiksel ve fiziksel disiplinin temelini oluşturan kritik bir alandır. Bu bağlamda, simetrik operatörlerin genişlemeleri konusu, yalnızca kuramsal matematik açısından değil, aynı zamanda uygulamalı matematik ve teorik fizik için de derin ve çok yönlü sonuçlara sahip bir araştırma sahası olarak ön plana çıkmaktadır. Simetrik operatörlerin genişleme teorisi, özellikle kuantum mekaniğinde gözlemlenebilir niceliklerin matematiksel modellenmesi açısından vazgeçilmez bir rol oynamaktadır.

Bu alandaki ilk sistematik ve kapsamlı çalışmalar, J. von Neumann tarafından gerçekleştirilmiştir. Von Neumann, 1929 yılında yayımladığı çığır açıcı çalışmasında, bir simetrik operatörün hangi koşullar altında kendine eş (öz-adjoint) bir genişlemeye sahip olabileceğini belirlemiş ve bu genişlemelerin yapısal olarak nasıl inşa edileceğini matematiksel olarak ortaya koymuştur (Von Neumann, 1929). Bu temel sonuçlar, operatör teorisinin modern gelişimine yön vermiş ve sonraki araştırmalar için güçlü bir teorik zemin oluşturmıştır.

Von Neumann'ın öncülük ettiği bu araştırma sahası, ilerleyen yıllarda birçok seçkin matematikçinin katkılarıyla zenginleşmiş ve derinleşmiştir. Özellikle Krein, (1947;1952), Rellich, (1951), Birman, (1956), Vishik, (1952) ve Phillips, (1959) gibi araştırmacılar, simetrik operatörlerin farklı türdeki genişlemelerine ilişkin önemli sonuçlar elde ederek konunun teorik altyapısını önemli ölçüde geliştirmişlerdir. Bu katkılar, operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesine ve diferansiyel operatörler bağlamında yeni uygulamaların ortaya çıkmasına olanak sağlamıştır.

Bu çerçevede, 1969 yılında Rofe-Beketov tarafından önerilen yaklaşım, simetrik operatörlerin genişlemelerini lineer bağıntılar (linear relations) aracılığıyla ele alarak mevcut kuramsal çerçeveye yenilikçi bir perspektif kazandırmıştır (Rofe-Beketov, 1969). Rofe-Beketov'un yöntemi, daha sonra pek çok araştırmacı tarafından geliştirilmiş ve özellikle simetrik diferansiyel operatörlerin kendine eş genişlemelerinin sınır koşulları cinsinden ifade edilmesine yönelik çalışmalara öncülük etmiştir. Bu doğrultuda literatürde önemli katkılar, Gorbachuk ve Gorbachuk, (1984), Bairamogly, (1976), Allahverdiev, (1995; 2013; 2014; 2016; 2019), Tuna, (2013), Tuna ve Bayrak, (2018), Tuna ve Allahverdiev, (2018) ile Kholkin, (1981) tarafından sunulmuştur.

Bahsi geçen çalışmalar, özellikle tekil diferansiyel operatörler bağlamında, simetrik operatörlerin spektral teorisine önemli katkılar sağlamış ve bu teorinin kuantum mekaniğinde uygulama alanı bulmasına olanak tanımıştır. Bu nedenle, simetrik operatörlerin genişleme teorisi, yalnızca saf matematik açısından değil, aynı zamanda uygulamalı matematik ve teorik fizik disiplinlerinde de geniş bir etki alanına sahiptir ve günümüzde de yoğun bir şekilde araştırılmaya devam etmektedir.

Hahn, (1949;1983) aşağıdaki şekilde tanımlanan fark operatörü $D_{q,\omega}$ 'yi tanımlamıştır.

$$D_{q,\omega}f(t) := \begin{cases} \frac{f(qt + \omega) - f(t)}{(qt + \omega) - t}, & t \neq \omega_0, \\ f'(\omega_0), & t = \omega_0, \end{cases} \quad (1.1)$$

Burada sabitler $q \in (0,1)$, $\omega > 0$ olup $\omega_0 := \frac{\omega}{1-q}$ dir.

Bu ifade f fonksiyonu ω_0 da türevi alınabilir ise geçerlidir. Bu durumda $D_{q,\omega}f$ 'ye f 'nin q, ω deki türevi diyoruz. Bu operatör iki önemli operatör tanımını genişletir: Bunlardan birisi ileri fark operatörüdür.

$$\Delta_\omega f(t) := \frac{f(t+\omega) - f(t)}{(t+\omega) - t}, \quad \omega > 0 \quad (1.2)$$

(Birchaff, 1911; Bird, 1936; Jordan, 1965; Jagerman, 2000). Diğeri ise Jackson q -fark operatörü

$$D_q f(t) := \frac{f(qt) - f(t)}{t(q - 1)}. \quad (1.3)$$

Burada $q \in (0,1)$ sabittir (Jackson, 1908;1910; Gasper vd., 1990; Andrews vd., 1999; İsmail, 2005; Abu-Risha vd., 2007). Hahn fark operatörüyle ilgili olarak yapılan çalışmalara literatürde geniş bir şekilde yer verilmiştir. Annaby vd., (2012) söz konusu operatörün kapsamlı bir analizini sunmuşlardır. Hamza ve Ahmed, (2013) ise genel birinci dereceden q, ω -başlangıç değer problemlerinin çözümünün varlığı ve tekliğine yönelik araştırmalar gerçekleştirmiş ve ayrıca lineer Hahn fark denklemleri teorisini incelemişlerdir.

Son yıllarda, Annaby vd., (2018) tarafından q, ω -Sturm–Liouville teorisi geliştirilmiş; düzenli ortamlar için q, ω -Sturm–Liouville problemlerine ilişkin örnekleme teoremleri ise Annaby ve Hassan, (2018) tarafından elde edilmiştir. Ayrıca, kesirli Hahn kalkülüsü üzerine de önemli çalışmalar yapılmıştır (Brikshavana ve Sitthiwiratham, 2017; Patanarapeelert vd., 2018; Patanarapeelert ve Sitthiwiratham, 2018). Bu bağlamda, Allahverdiev ve Tuna, (2017) tek boyutlu Dirac sisteminin aşağıdaki q -parametrelili bir versiyonunu literatüre kazandırmışlardır. q -Dirac sisteminin, asimptotik formüllerinin özdeğerleri ve öz fonksiyonları Hira, (2018) de araştırılmış ve Hira, (2019) da örnekleme teorisi elde edilmiştir.

Hahn-Dirac sistemi

$$\begin{cases} -\frac{1}{q} D_{1-\frac{w}{q}} y_2 + p(t) y_1 = \lambda y_1, \\ D_{q, \omega} y_1 + r(t) y_2 = \lambda y_2, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$k_{11} y_1(0) + k_{12} y_2(0) = 0, \quad (1.5)$$

$$k_{21} y_1(a) + k_{22} y_2(aq^{-1}) = 0, \quad (1.6)$$

ile tanımlanır. Burada $k_{ij}(i, j = 1, 2)$ reel sayılardır,

$\omega_0 \leq t \leq a < \infty, \lambda \in \mathbb{C}, p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$ *fonksiyonları* $[\omega_0, a]$ üzerinde tanımlı ve süreklidir. Bu sistemin temel spektral özellikleri Allahverdiev ve Tuna, (2019a, b; 2021) ve Hira, (2020) tarafından incelenmiştir.

Bu tez çalışmasında regüler durumda (1.4) denklemi ele alınmıştır. Bu denkleme karşılık gelen operatörler için sınır değer uzayı inşa edildi. Sınır koşulları yardımıyla tüm maksimal disipatif, akretif ve kendine eş genişlemeleri elde edilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

$q \in (0,1), \omega > 0$ sabit olsun $\omega_0 := \omega/(1-q)$, ve I reel sayılar kümesinin ω_0 'ı kapsayan bir alt aralığı olsun. $h(t) := qt + \omega, t \in I$ olsun. O zaman,

$$\omega_0 = \lim_{k \rightarrow \infty} (h \circ h \circ \dots \circ h)(t) \quad \text{dir.}$$

Tanım 2.1. f, I aralığı üzerinde tanımlanmış bir fonksiyon olsun. f ω_0 'da diferansiyellenebilir fonksiyon olmak üzere Hahn fark operatörü,

$$D_{q,\omega}f(t) := \begin{cases} \frac{f(qt + \omega) - f(t)}{(qt + \omega) - t}, & t \neq \omega_0 \\ f'(\omega_0), & t = \omega_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

ifadesi ile tanımlanır. $D_{q,\omega}f(\omega_0)$ ifadesine f fonksiyonunun q, ω -türevi denir. Eğer $D_{q,\omega}f(\omega_0)$ türevi mevcutsa f fonksiyonuna I üzerinde q, ω -diferansiyellenebilir denir (Hahn, 1983).

Eğer f, g fonksiyonu, $t \in I$ noktasında q, ω -diferansiyellenebilir ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$D_{q,\omega}(\alpha f + \beta g)(t) = \alpha D_{q,\omega}f(t) + \beta D_{q,\omega}g(t), \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

$$D_{q,\omega}(fg)(t) = D_{q,\omega}(f(t))g(t) + f(qt + \omega)D_{q,\omega}g(t),$$

$$D_{q,\omega} \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{(D_{q,\omega}f(t))g(t) - f(t)D_{q,\omega}g(t)}{g(t)g(qt + \omega)}, g(t)g(qt + \omega) \neq 0,$$

(Annaby vd., 2012).

$D_{q,\omega}$ fark operatörünün sağ tersi Annaby vd. tarafından (Annaby vd., 2012) Jackson – Nörlund toplamaları cinsinden şu şekilde tanımlanmıştır:

Tanım 2.2. $a, b \in I$ ve $[k]_q := \frac{1-q^k}{1-q}, k \in \mathbb{N}$ olsun. a dan b ye f fonksiyonu q, ω - integrali şu şekilde tanımlanır.

$$\int_a^b f(t) d_{q,\omega} t := \int_{\omega_0}^b f(t) d_{q,\omega} t - \int_{\omega_0}^a f(t) d_{q,\omega} t, \quad (2.2)$$

$$\int_{\omega_0}^x f(t) d_{q,\omega} t := (x(1-q) - \omega \sum_{k=0}^{\infty} q^k f(xq^k + \omega[k]_q)), \quad x \in I, \quad (2.3)$$

(2.2) eşitliğindeki seriler $x = a$ ve $x = b$ noktalarında yakınsaktır. Bu durumda, f fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde q, ω -integrallenebilir denir ve (2.3) eşitliğinin sağ tarafındaki toplam Jackson – Nörlund toplamı olarak adlandırılır.

f, g sürekli fonksiyonları için q, ω - kısmi integrasyon formülü,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) D_{q,\omega} g(t) d_{q,\omega} t &= f(t) g(t) \Big|_a^b \\ &- \int_a^b D_{q,\omega} (f(t)) g(qt + \omega) d_{q,\omega} t, \quad a, b \in I \end{aligned} \quad (2.4)$$

ile verilir (Annaby vd., 2012).

Aşağıdaki ilişki doğrudan $D_{q,\omega}$ tanımından gelmektedir.

$$(D_{q,\omega} f)(h^{-1}(t)) = D_{\frac{1-\omega}{q}, \frac{\omega}{q}} f(t), \quad (2.5)$$

Burada $h^{-1}(t) := \frac{t-\omega}{q}, t \in I$. q, ω -tipi ürün formülü şu şekilde verilir. $a > 0$ sabit ve $L_{q,\omega}^2(\omega_0, a)$, $[\omega_0, a]$ üzerinde tanımlanan:

$$\|f(\cdot)\| = \left(\left(\int_{\omega_0}^a |f(t)|^2 d_{q,\omega} t \right)^{1/2} < \infty \right)$$

koşulunu sağlayan tüm kompleks değerli fonksiyonların kümesi olsun $L_{q,\omega}^2(\omega_0, a)$ uzayı aşağıdaki iç çarpımı ile ayrılabilir bir Hilbert uzayıdır.

$$\langle f, g \rangle := \int_{\omega_0}^a f(t) \overline{g(t)} d_{q,\omega} t, \quad f, g \in L_{q,\omega}^2(\omega_0, a), \quad (2.6)$$

(Annaby vd., 2018).

$C_{q,\omega}^2(\omega_0, a)$, $D_{q,\omega} y(\cdot)$ fonksiyonlarının ω_0 da sürekli olduğu tüm $y(\cdot)$ fonksiyonlarından oluşan $L_{q,\omega}^2(\omega_0, a)$ nın bir alt uzayı olsun. $H_{q,\omega}$ Hilbert uzayı :

$$H_{q,\omega} := \left\{ y(\cdot) = \begin{pmatrix} y_1(\cdot) \\ y_2(\cdot) \end{pmatrix}, y_1, y_2 \in C_{q,\omega}^2(\omega_0, a) \right\}$$

$$\langle y(\cdot), z(\cdot) \rangle_{H_{q,\omega}} := \int_{\omega_0}^a y^\top(t) z(t) d_{q,\omega} t, \quad (2.7)$$

iç çarpımı ile tanımlanır. Burada T matris transpozesi işlemi ifade eder.

Tanım 2.3. $y(\cdot) = \begin{pmatrix} y_1(\cdot) \\ y_2(\cdot) \end{pmatrix}, z(\cdot) = \begin{pmatrix} z_1(\cdot) \\ z_2(\cdot) \end{pmatrix} \in H_{q,\omega}$ olsun. O halde,

$y(\cdot)$ and $z(\cdot)$ nin q, ω - Wronskian 'ı şu şekilde tanımlanır.

$$W_{q,\omega}(y, z)(t) := y_1(t) z_2(h^{-1}(t)) - z_1(t) y_2(h^{-1}(t)). \quad (2.8)$$

Teorem 2.4. q, ω - Dirac denkleminin (1.4) q, ω -Wronskian çözümleri t ve λ dan bağımsızdır.

İspat: $y(t, \lambda) = \begin{pmatrix} y_1(t, \lambda) \\ y_2(t, \lambda) \end{pmatrix}$ ve $z(t, \lambda) = \begin{pmatrix} z_1(t, \lambda) \\ z_2(t, \lambda) \end{pmatrix}$ q, ω -Dirac denkleminin (1.4) iki çözümü olsun. (2.8) den aşağıdakini elde ederiz,

$$\begin{aligned} & D_{q,\omega} W_{q,\omega}(y, z)(t, \lambda) \\ &= D_{q,\omega} (z_2(h^{-1}(t), \lambda)) y_1(t, \lambda) + z_2(t, \lambda) D_{q,\omega} y_1(t, \lambda) \\ &\quad - D_{q,\omega} (y_2(h^{-1}(t), \lambda)) z_1(t, \lambda) - y_2(t, \lambda) D_{q,\omega} z_1(t, \lambda). \end{aligned} \quad (2.9)$$

$y(t, \lambda)$ ve $z(t, \lambda)$ q, ω - Dirac denkleminin (1.4) çözümleri olduğundan

$$D_{q,\omega} W_{q,\omega}(y, z)(t, \lambda) = 0. \quad (2.10)$$

elde edilir. Dolayısıyla, $W_{q,\omega}(y, z)(t, \lambda)$ sabittir (Hira, 2020).

Teorem 2.5: $\lambda \in \mathcal{C}$ için, q, ω -Dirac denkleminin (1.4), aşağıdaki başlangıç koşulları altında tek bir çözümü $\phi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(t, \lambda) \\ \phi_2(t, \lambda) \end{pmatrix}$ vardır:

$$\phi_1(\omega_0, \lambda) = c_1, \quad \phi_2(\omega_0, \lambda) = c_2, \quad (2.11)$$

Öyleyse $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$.

İspat:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, \lambda) &= \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t, \lambda) \\ \varphi_{12}(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{q, \omega}(t, \lambda) \\ -\sqrt{q} S_{q, \omega}(t, \sqrt{q} \lambda) \end{pmatrix}, \\ \varphi_2(t, \lambda) &= \begin{pmatrix} \varphi_{21}(t, \lambda) \\ \varphi_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{q, \omega}(t, \lambda) \\ C_{q, \omega}(t, \sqrt{q} \lambda) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

olsun. Burada

$$C_{q, \omega}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2} (t(1-q) - \omega)^{2n}}{(q; q)_{2n}},$$

ve

$$S_{q, \omega}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)} (t(1-q) - \omega)^{2n+1}}{(q; q)_{2n+1}}, \quad t \in$$

ile tanımlanan Hahn kosinüs ve Hahn sinüs fonksiyonlarıdır. O zaman

$$\varphi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t, \lambda) \\ \varphi_2(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \varphi_{11}(t, \lambda) + c_2 \varphi_{21}(t, \lambda) \\ c_1 \varphi_{12}(t, \lambda) + c_2 \varphi_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

Fonksiyonu $p(t) = r(t) = 0$ için q, ω -Dirac denkleminin (1.4) temel çözüm kümesidir.

$W_{q, \omega}(\varphi_1, \varphi_2)(., \lambda) \equiv 1$ dir.

Aşağıdaki ardışık yaklaşımların dizisini şu şekilde tanımlansın:

$$\{\psi_m(., \lambda)\}_{m=1}^{\infty} = \begin{pmatrix} \psi_{m1}(., \lambda) \\ \psi_{m2}(., \lambda) \end{pmatrix}_{m=1}^{\infty}$$

$$\psi_1(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t, \lambda) \\ \psi_{12}(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \varphi_{11}(t, \lambda) + c_2 \varphi_{21}(t, \lambda) \\ c_1 \varphi_{12}(t, \lambda) + c_2 \varphi_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

$$\psi_{m+1}(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{(m+1)1}(t, \lambda) \\ \psi_{(m+1)2}(t, \lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_{11}(t, \lambda) + q \int_{\omega_0}^t \{ \varphi_{21}(t, \lambda) \varphi_{11}(h(s), \lambda) \\ - \varphi_{11}(t, \lambda) \varphi_{21}(h(s), \lambda) \} p(h(s)) \psi_{m1}(h(s), \lambda) d_{q, \omega} s \\ + \int_{\omega_0}^t \{ \varphi_{21}(t, \lambda) \varphi_{12}(s, \lambda) - \varphi_{11}(t, \lambda) \varphi_{22}(s, \lambda) \} r(s) \psi_{m2}(s, \lambda) d_{q, \omega} s \\ \psi_{12}(t, \lambda) + q \int_{\omega_0}^t \{ \varphi_{22}(t, \lambda) \varphi_{11}(h(s), \lambda) \\ - \varphi_{12}(t, \lambda) \varphi_{21}(h(s), \lambda) \} p(h(s)) \psi_{m1}(h(s), \lambda) d_{q, \omega} s \\ + \int_{\omega_0}^t \{ \varphi_{22}(t, \lambda) \varphi_{12}(s, \lambda) - \varphi_{12}(t, \lambda) \varphi_{22}(s, \lambda) \} r(s) \psi_{m2}(s, \lambda) d_{q, \omega} s \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

$m = 1, 2, 3, \dots$ $\lambda \in \mathcal{C}$ sabiti için, t den bağımsız olarak aşağıdaki gibi $B(\lambda), A_1, A_2$ ve A pozitif sayıları bulunmaktadır.

$$\begin{aligned} |p(t)| &\leq A_1, |r(t)| \leq A_2, A = \max\{A_1, A_2\}, \\ |\varphi_{ij}(t, \lambda)| &\leq \sqrt{\frac{B(\lambda)}{2}} i, j = 1, 2, t \in [\omega_0, a]. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$K(\lambda) := (|c_1| + |c_2|) \sqrt{\frac{B(\lambda)}{2}} \text{ olsun.}$$

Bu durumda (2.16) dan,

$$|\psi_{11}(t, \lambda)| \leq K |\psi_{12}(t, \lambda)| \leq K(\lambda).$$

Matematiksel tümevarımı kullanarak aşağıdaki ispatı yapıyoruz:

$$\begin{aligned} |\psi_{(m+1)1}(t, \lambda) - \psi_{m1}(t, \lambda)| &\leq \prod_{n=1}^m (1 + q^n) K(\lambda) \frac{(AB(\lambda)(t(1-q) - \omega))^m}{(q; q)_m}, \\ |\psi_{(m+1)2}(t, \lambda) - \psi_{m2}(t, \lambda)| &\leq \prod_{n=1}^m (1 + q^n) K(\lambda) \frac{(AB(\lambda)(t(1-q) - \omega))^m}{(q; q)_m}, \end{aligned}$$

$$m=1,2,\dots \quad (2.17)$$

İlk olarak, üçgen eşitsizliğinden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} & |\psi_{21}(t, \lambda) - \psi_{11}(t, \lambda)| \\ & \leq q \left| \int_{\omega_0}^t \{ \varphi_{21}(t, \lambda) \varphi_{11}(h(s), \lambda) \right. \\ & \quad \left. - \varphi_{11}(t, \lambda) \varphi_{21}(h(s), \lambda) \} p(h(s)) \psi_{11}(h(s), \lambda) d_{q, \omega} s \right| \\ & \quad + \left| \int_{\omega_0}^t \{ \varphi_{21}(t, \lambda) \varphi_{12}(s, \lambda) - \varphi_{11}(t, \lambda) \varphi_{22}(s, \lambda) \} r(s) \psi_{12}(s, \lambda) d_{q, \omega} s \right| \\ & \leq q B(\lambda) A K(\lambda) \int_{\omega_0}^t d_{q, \omega} s + B(\lambda) A K(\lambda) \int_{\omega_0}^t d_{q, \omega} s \\ & \leq q A B(\lambda) K(\lambda) \frac{(t(1-q) - \omega)}{1-q} + A B(\lambda) K(\lambda) \frac{(t(1-q) - \omega)}{1-q} \\ & \leq A B(\lambda) K(\lambda) \frac{(t(1-q) - \omega)}{1-q} (1+q). \end{aligned}$$

Bazı m ler için (2.17)'un doğru olduğunu kabul edelim. O halde

$$\begin{aligned}
& |\psi_{(m+2)1}(t, \lambda) - \psi_{(m+1)1}(t, \lambda)| \\
& \leq q \left| \int_{\omega_0}^t \{\psi_{21}(r, \lambda)\varphi_{11}(h(s), \lambda) - \psi_{11}(t, \lambda)\varphi_{21}(h(s), \lambda)\} p(h(s)) \right. \\
& \quad \left. x(\psi_{(m+1)1}(h(s), \lambda) - \psi_{m1}(h(s), \lambda)) d_{q, \omega^s} \right| \\
& \quad + \left| \int_{\omega_0}^t \{\varphi_{21}(r, \lambda)\varphi_{12}(s, \lambda) \right. \\
& \quad \left. - \varphi_{11}(r, \lambda)\psi_{22}(s, \lambda)\} r(s)(\psi_{(m+1)2}(s, \lambda) - \psi_{m2}(s, \lambda)) d_{q, \omega^s} \right| \\
& \leq qB(\lambda)A \int_{\omega_0}^t |(\psi_{(m+1)1}(h(s), \lambda) - \psi_{m1}(h(s), \lambda)) d_{q, \omega^s}| \\
& \quad + B(\lambda)A |(\psi_{(m+1)2}(s, \lambda) - \psi_{m2}(s, \lambda)) d_{q, \omega^s}| \\
& \leq qAB(\lambda)K(\lambda) \frac{(AB(\lambda))^m}{(q; q)_m} \prod_{n=1}^m (1 + q^n) \int_{\omega_0}^t (h(s)(1 - q) - \omega)^m d_{q, \omega^s} \\
& \quad + AB(\lambda)K(\lambda) \frac{(AB(\lambda))^m}{(q; q)_m} \prod_{n=1}^m (1 + q^n) \int_{\omega_0}^t (s(1 - q) - \omega)^m d_{q, \omega^s} \\
& \leq qK(\lambda) \frac{(AB(\lambda))^{m+1}}{(q; q)_m} \prod_{n=1}^m (1 + q^n) (t(1 - q) - \omega)^{m+1} \frac{q^m}{1 - q^{m+1}} \\
& \quad + K(\lambda) \frac{(AB(\lambda))^{m+1}}{(q; q)_m} \prod_{n=1}^m (1 + q^n) (t(1 - q) - \omega)^{m+1} \frac{1}{1 - q^{m+1}} \\
& \leq \prod_{n=1}^{m+1} (1 + q^n) K(\lambda) \frac{(AB(\lambda)(t(1 - q) - \omega))^{m+1}}{(q; q)_{m+1}}.
\end{aligned}$$

Bu yüzden, (2.17) eşitsizliği her $m \in N$ için doğrudur. (2.17) de sağ taraftaki terimlerin yakınsamasını garantilemek için ek olarak aşağıdakini varsayıyoruz.

$$|t - \omega_0| < \frac{1}{|AB(\lambda)(1 - q)|}, t \in [\omega_0, a]. \quad (2.18)$$

Dolayısıyla, Weierstrass testine göre aşağıdaki seriler

$$\begin{aligned}
& \psi_{11}(t, \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{(m+1)1}(t, \lambda) - \psi_{m1}(t, \lambda) \\
& \psi_{12}(t, \lambda) + \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{(m+1)2}(t, \lambda) - \psi_{m2}(t, \lambda)
\end{aligned} \quad (2.19)$$

$[\omega_0, a]$ aralığında düzgün biçimde yakınsar.

$$\psi_{m+1}(r, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{(m+1)1}(t, \lambda) \\ \psi_{(m+1)2}(t, \lambda) \end{pmatrix}$$

serinin m 'inci kısmi toplamaları dizisi olduğundan, $\psi_{m+1}(\cdot, \lambda)$, düzgün biçimde

$\phi(\cdot, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(\cdot, \lambda) \\ \phi_2(\cdot, \lambda) \end{pmatrix}$ fonksiyonuna $[\omega_0, a]$ aralığında yaklaşıp. Ayrıca, m üzerinde tümevarım yoluyla da $\psi_{mi}(t, \lambda)$ ve $D_{q,\omega}\psi_{mi}(t, \lambda)$ ($i = 1, 2$)nin ω_0 da sürekli olduğunu kanıtlayabiliriz. Burada

$$\begin{aligned} D_{q,\omega}\psi_{(m+1)1}(t, \lambda) &= c_1 D_{q,\omega}\varphi_{11}(t, \lambda) + c_2 D_{q,\omega}\varphi_{21}(t, \lambda) \\ &+ q \int_{\omega_0}^t \{D_{q,\omega}(\varphi_{21}(t, \lambda))\varphi_{11}(h(s), \lambda) \\ &- D_{q,\omega}(\varphi_{11}(r, \lambda))\varphi_{21}(h(s), \lambda)\} p(h(s))\psi_{m1}(h(s), \lambda) d_{q,\omega}s \\ &+ \int_{\omega_0}^t \{D_{q,\omega}(\varphi_{21}(t, \lambda))\varphi_{12}(s, \lambda) - D_{q,\omega}(\varphi_{11}(t, \lambda))\varphi_{22}(s, \lambda)\} r(s)\psi_{w2}(s, \lambda) d_{q,\omega}s \\ D_{q,\omega}\psi_{(m+1)2}(t, \lambda) &= c_1 D_{q,\omega}(\varphi_{12}(t, \lambda)) + c_2 D_{q,\omega}\varphi_{22}(t, \lambda) \\ &+ q \int_{\omega_0}^t \{D_{q,\omega}(\varphi_{22}(t, \lambda))\varphi_{11}(h(s), \lambda) \\ &- D_{q,\omega}(\varphi_{12}(r, \lambda))\varphi_{21}(h(s), \lambda)\} p(h(s))\psi_{m1}(h(s), \lambda) d_{q,\omega}s \\ &+ \int_{\omega_0}^t \{D_{q,\omega}(\varphi_{22}(t, \lambda))\varphi_{12}(s, \lambda) - D_{q,\omega}(\varphi_{12}(t, \lambda))\varphi_{22}(s, \lambda)\} r(s)\psi_{m2}(s, \lambda) d_{q,\omega}s \end{aligned} \quad (2.20)$$

(2.21)

$m = 1, 2, 3, \dots$ Dolayısıyla, $\phi_i(\cdot, \lambda)$ ve $D_{q,\omega}\phi_i(\cdot, \lambda)$ ($i = 1, 2$) fonksiyonları, ω_0 da süreklidir, yani $\phi(\cdot, \lambda) \in C_{q,\omega}^2(\omega_0, a)$ dir. (2.15)'de $m \rightarrow \infty$ olsun, o zaman

$\phi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(t, \lambda) \\ \phi_2(t, \lambda) \end{pmatrix}$ elde ederiz.

Burada

$$\begin{aligned} \phi_1(t, \lambda) &= c_1 \varphi_{11}(t, \lambda) + c_2 \varphi_{21}(t, \lambda) \\ &+ q \int_{\omega_0}^t \{\varphi_{21}(t, \lambda)\varphi_{11}(h(s), \lambda) \\ &- \varphi_{11}(t, \lambda)\varphi_{21}(h(s), \lambda)\} p(h(s))\phi_1(h(s), \lambda) d_{q,\omega}s \\ &+ \int_{\omega_0}^t \{\varphi_{21}(t, \lambda)\varphi_{12}(s, \lambda) - \varphi_{11}(t, \lambda)\varphi_{22}(s, \lambda)\} r(s)\phi_2(s, \lambda) d_{q,\omega}s, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned}
\phi_2(t, \lambda) &= c_1 \varphi_{12}(t, \lambda) + c_2 \varphi_{22}(t, \lambda) \\
&+ q \int_{\omega_0}^t \{ \varphi_{22}(t, \lambda) \varphi_{11}(h(s), \lambda) \\
&- \varphi_{12}(t, \lambda) \varphi_{21}(h(s), \lambda) \} p(h(s)) \phi_1(h(s), \lambda) d_{q, \omega} s \\
&+ \int_{\omega_0}^t \{ \varphi_{22}(t, \lambda) \varphi_{12}(s, \lambda) - \varphi_{12}(t, \lambda) \varphi_{22}(s, \lambda) \} r(s) \phi_2(s, \lambda) d_{q, \omega} s.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Artık, (2.11)'e konu olan $\phi(\cdot, \lambda)$ fonksiyonunun q, ω -Dirac denklemini ϕ çözduğunu ispatlıyoruz.

$\phi_1(\omega_0, \lambda) = c_1$ ve $\phi_2(\omega_0, \lambda) = c_2$ elde edilir. (2.22)'den

$$\begin{aligned}
D_{q, \omega} \phi_1(t, \lambda) &= c_1 D_{q, \omega} \varphi_{11}(t, \lambda) + c_2 D_{q, \omega} \varphi_{21}(t, \lambda) \\
&+ q \int_{\omega_0}^t \{ D_{q, \omega}(\varphi_{21}(t, \lambda)) \varphi_{11}(h(s), \lambda) \\
&- D_{q, \omega}(\varphi_{11}(t, \lambda)) \varphi_{21}(h(s), \lambda) \} p(h(s)) \phi_1(h(s), \lambda) d_{q, \omega} s \\
&+ \int_{\omega_0}^t \{ D_{q, \omega}(\varphi_{21}(t, \lambda)) \varphi_{12}(s, \lambda) - D_{q, \omega}(\varphi_{11}(t, \lambda)) \varphi_{22}(s, \lambda) \} r(s) \phi_2(s, \lambda) d_{q, \omega} s \\
&+ \{ \varphi_{21}(h(t), \lambda) \varphi_{12}(t, \lambda) - \varphi_{11}(h(t), \lambda) \varphi_{22}(t, \lambda) \} r(t) \phi_2(t, \lambda).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Elde edilir. (2.13), q, ω -Dirac denkleminin $p(t) = 0 = r(t)$ için temel çözüm kümesi olduğundan, aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$D_{q, \omega} \phi_1(t, \lambda) = \lambda \phi_2(t, \lambda) - r(t) \phi_2(t, \lambda). \tag{2.25}$$

q, ω -Dirac denklemindeki (1.4) diğer denklemin geçerliliği de benzer şekilde kanıtlanır.

Teklik için $Y(t, \lambda) = \begin{pmatrix} Y_1(t, \lambda) \\ Y_2(t, \lambda) \end{pmatrix}$ ve $Z(t, \lambda) = \begin{pmatrix} Z_1(t, \lambda) \\ Z_2(t, \lambda) \end{pmatrix}$ nin q, ω -Dirac denkleminin (2.11) koşulu ile birlikte iki çözümü olduğunu varsayalım, q, ω -Dirac denkleminin kısmi integrasyonu uygulandığında,

$$Y_1(t, \lambda) = c_1 + \int_{\omega_0}^t (\lambda - r(s)) Y_2(s, \lambda) d_{q, \omega} s \tag{2.26}$$

$$Y_2(t, \lambda) = c_2 + q \int_{\omega_0}^t (p(h(s)) - \lambda) Y_1(h(s), \lambda) d_{q, \omega} s, \tag{2.27}$$

ve

$$Z_1(t, \lambda) = c_1 + \int_{\omega_0}^t (\lambda - r(s)) Z_2(s, \lambda) d_{q, \omega} s, \quad (2.28)$$

$$Z_2(t, \lambda) = c_2 + q \int_{\omega_0}^t (p(h(s)) - \lambda) Z_1(h(s), \lambda) d_{q, \omega} s, \quad (2.29)$$

elde edilir. $Y(t, \lambda), Z(t, \lambda), P(t)$ ve $r(t)$, ω_0 'da sürekli olduğundan, aşağıdaki gibi $N_{\lambda, t}, M_{\lambda, t}$ pozitif sayıları elde edilir.

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |Y_i(h^n(t), \lambda)| = N_{i\lambda, t}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |Z_i(h^n(t), \lambda)| = \vec{N}_{i\lambda, t},$$

$$N_{\lambda, t} = \max\{N_{i\lambda, t}, \vec{N}_{i\lambda, t}\}, i = 1, 2, \quad (2.30)$$

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda - r(h^n(t))| = M_{1\lambda, t}, \sup_{n \in \mathbb{N}} |\lambda - p(h^n(t))| = M_{2\lambda, t},$$

$$M_{\lambda, t} = \max\{M_{1\lambda, t}, M_{2\lambda, t}\}. \quad (2.31)$$

Bunu matematiksel tümevarımla kanıtlayabiliriz.

$$|Y_1(t, \lambda) - Z_1(t, \lambda)| \leq 2q^{\lfloor \frac{k^2}{4} \rfloor} M_{\lambda, t}^k N_{\lambda, t} \frac{(t(1-q) - \omega)^k}{(q; q)_k} \quad (2.32)$$

$$|Y_2(t, \lambda) - Z_2(t, \lambda)| \leq 2q^{\frac{1}{8}\{2k^2 + 4k + (-1)^{k+1} + 1\}} M_{\lambda, t}^k N_{\lambda, t} \frac{(t(1-q) - \omega)^h}{(q; q)_k} \quad (2.33)$$

$k \in N, t \in [\omega_0, a]$. Nitekim, eğer (2.32), $k \in N$ de sağlanırsa, o halde (2.26) ve (2.28) den aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & |Y_1(t, \lambda) - Z_1(t, \lambda)| \\ & \leq M_{\lambda, t} 2q^{\frac{1}{8}\{2k^2 + 4k + (-1)^{k+1} + 1\}} \frac{M_{\lambda, t}^k N_{\lambda, t}}{(q; q)_k} \int_{\omega_0}^t (s(1-q) - \omega)^k d_{q, \omega} s \\ & = 2q^{\frac{1}{8}\{2k^2 + 4k + (-1)^{k+1} + 1\}} \frac{M_{\lambda, t}^{n+1} N_{\lambda, t}}{(q; q)_k} \sum_{n=1}^{\infty} (t(1-q) - \omega) q^n q^{nk} (t(1-q) - \omega)^k \\ & = 2q^{\frac{1}{8}\{2k^2 + 4k + (-1)^{k+1} + 1\}} N_{\lambda, t} \frac{(M_{\lambda, t} (t(1-q) - \omega))^{k+1}}{(q; q)_{k+1}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Benzer şekilde, eğer (2.33), $k \in N$ de sağlanırsa, o halde (2.27) ve (2.29) den aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
& |Y_2(t, \lambda) - Z_2(t, \lambda)| \\
& \leq q M_{\lambda, t} 2q^{\left[\frac{k^2}{4}\right]} \frac{M_{\lambda, t}^k N_{\lambda, t}}{(q; q)_k} \int_{\omega_0}^t (h(s)(1-q) - \omega)^k d_{q, \omega} s \\
& = 2q q^{\left[\frac{k^2}{4}\right]} \frac{M_{\lambda, t}^{k+1} N_{\lambda, t}}{(q; q)_k} \sum_{n=1}^{\infty} (t(1-q) - \omega) q^n q^{(n+1)k} (t(1-q) - \omega)^k \\
& = 2q^{k+1 + \left[\frac{k^2}{4}\right]} N_{\lambda, t} \frac{(M_{\lambda, t} (t(1-q) - \omega))^{k+1}}{(q; q)_{k+1}}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Bu yüzden, (2.32) ve (2.33), $(k+1)$ de geçerlidir. Dolayısıyla, (2.32) ve (2.33), tüm $k \in \mathbb{N}$ için doğrudur zira, (2.30) ten $k=0$ da sağlanmaktadır.

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2q^{\left[\frac{k^2}{4}\right]} M_{\lambda, t}^k N_{\lambda, t} \frac{(t(1-q) - \omega)^k}{(q; q)_k} = 0, \tag{2.36}$$

ve

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 2q^{\frac{1}{8}\{2k^2 + 4k + (-1)^{k+1} + 1\}} M_{\lambda, t}^k N_{\lambda, t} \frac{(t(1-q) - \omega)^k}{(q; q)_k} = 0, \tag{2.37}$$

o halde tüm $t \in [\omega_0, a]$ için $Y_1(t, \lambda) = Z_1(t, \lambda)$ ve $Y_2(t, \lambda) = Z_2(t, \lambda)$ yani, $Y(t, \lambda) = Z(t, \lambda)$. Bu teklifi kanıtlıyor (Hira, 2020).

Teorem 2.6: Eğer λ_1 ve λ_2 q, ω -Dirac sisteminin (1.4) -(1.6) iki farklı özdeğeriye, bu durumda ilgili öz fonksiyonlar $y(t, \lambda_1)$ ve $z(t, \lambda_2)$ ortogonaldır, yani,

$$\int_{\omega}^a y^\top(t, \lambda_1) z(t, \lambda_2) d_{q, \omega} t = \int_{\omega_0}^a \{y_1(t, \lambda_1) z_1(t, \lambda_2) + y_2(t, \lambda_1) z_2(t, \lambda_2)\} d_{q, \omega} t = 0, \tag{2.38}$$

burada $y^\top = (y_1, y_2)$.

İspat: $y(t, \lambda_1)$ ve $z(t, \lambda_2)$, q, ω -Dirac sisteminin (1.4) -(1.6) çözümleri olduğundan

$$\begin{cases} -\frac{1}{q} D_{\frac{1}{q}, -\omega} y_2(t, \lambda_1) + \{p(t) - \lambda_1\} y_1(t, \lambda_1) = 0, \\ D_{q, \omega} y_1(t, \lambda_1) + \{r(t) - \lambda_1\} y_2(t, \lambda_1) = 0, \end{cases}$$

ve

$$\begin{cases} -\frac{1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} z_2(t, \lambda_2) + \{p(t) - \lambda_2\} z_1(t, \lambda_2) = 0, \\ D_{q, \omega} z_1(t, \lambda_2) + \{r(t) - \lambda_2\} z_2(t, \lambda_2) = 0. \end{cases}$$

Sırasıyla z_1, z_2 yi $-y_1$ ve $-y_2$ ile çarpıp ve birbirine eklersek aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} (y_2(t, \lambda_1)) z_1(t, \lambda_2) + D_{q, \omega} (y_1(t, \lambda_1)) z_2(t, \lambda_2) \\ & + \frac{1}{q} D_{\frac{1}{q}, \frac{-\omega}{q}} (z_2(t, \lambda_2)) y_1(t, \lambda_1) - D_{q, \omega} (z_1(t, \lambda_2)) y_2(t, \lambda_1) \\ & = \lambda_1 \{y_1(t, \lambda_1) z_1(t, \lambda_2) + y_2(t, \lambda_1) z_2(t, \lambda_2)\} \\ & - \lambda_2 \{y_1(t, \lambda_1) z_1(t, \lambda_2) + y_2(t, \lambda_1) z_2(t, \lambda_2)\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

O zaman, şu elde edilir:

$$\begin{aligned} & D_{q, \omega} \{y_1(t, \lambda_1) z_2(h^{-1}(t), \lambda_2) - y_2(h^{-1}(t), \lambda_1) z_1(t, \lambda_2)\} \\ & = (\lambda_1 - \lambda_2) \{y_1(t, \lambda_1) z_1(t, \lambda_2) + y_2(t, \lambda_1) z_2(t, \lambda_2)\}. \end{aligned} \quad (2.40)$$

q, ω -entegrasyonun (2.40) sonuçlarına uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} & (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\omega_0}^a \{y_1(t, \lambda_1) z_1(t, \lambda_2) + y_2(t, \lambda_1) z_2(t, \lambda_2)\} d_{q, \omega} t \\ & = \{y_1(t, \lambda_1) z_2(h^{-1}(t), \lambda_2) - y_2(h^{-1}(t), \lambda_1) z_1(t, \lambda_2)\} \Big|_{\omega_0}^a. \end{aligned} \quad (2.41)$$

(1.5) ve (1.6) sınır koşullarından sağ taraf sıfır olur ve şu sonuç elde edilir;

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\omega_0}^a y^\top(t, \lambda_1) z(t, \lambda_2) d_{q, \omega} t = 0. \quad (2.42)$$

$\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğundan teorem böylece ispatlanmış olur (Hira, 2020).

Teorem 2.7: q, ω -Dirac sisteminin (1.4) -(1.6) özdeğerleri reeldir.

İspat: Aksini yani q, ω -sisteminin (1.4) -(1.6) reel olmayan bir özdeğeri olduğunu varsayalım. $y(t, \lambda_0)$ buna karşılık gelen (en az bir değişkeni sıfırdan farklı olan) bir

özfonksiyon olsun. $\bar{\lambda}_0$ ayrıca $\bar{y}(t, \bar{\lambda}_0)$ özfonksiyonuna karşılık gelen bir özdeğerdir. Önceki teoremden $\lambda_0 \neq \bar{\lambda}_0$ olduğu için;

$$\int_{\omega_0}^a \{|y_1(t, \lambda_0)|^2 + |y_2(t, \lambda_0)|^2\} d_{q, \omega} t = 0. \quad (2.43)$$

Bu yüzden $y(t, \lambda_0) = 0$ ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, λ_0 reel olmak zorundadır (Hira, 2020).

Teorem 2.8. q, ω -Dirac sisteminin (1.4)- (1.6) özdeğerleri basittir.

İspat: $\phi(t, \lambda) = \begin{pmatrix} \phi_1(t, \lambda) \\ \phi_2(t, \lambda) \end{pmatrix}$ olsun q, ω -Dirac denkleminin (1.4) aşağıdaki koşulları sağlayan bir çözümü olsun

$$\phi_1(\omega_0, \lambda) = k_{12}, \quad \phi_2(\omega_0, \lambda) = -k_{11}. \quad (2.44)$$

(1.5) sınır koşulunu sağladığı açıktır. q, ω -Dirac sisteminin (1.4)- (1.6) özdeğerlerini bulmak için, bu fonksiyonu (1.6) sınır koşuluna eklemeli ve elde edilen denklemin köklerini bulmalıyız. Böylece, $\phi(t, \lambda)$ fonksiyonu sınır koşuluna (1.6) koyarak aşağıdaki karakteristik fonksiyon elde edilir.

$$\Delta(\lambda) = k_{21}\phi_1(a, \lambda) + k_{22}\phi_2(h^{-1}(a), \lambda). \quad (2.45)$$

Bu durumda,

$$\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda} = k_{21} \frac{\partial \phi_1(a, \lambda)}{\partial \lambda} + k_{22} \frac{\partial \phi_2(h^{-1}(a), \lambda)}{\partial \lambda}.$$

λ_0 çift özdeğer ve $\phi^0(t, \lambda_0)$ karşılık gelen özfonksiyonlardan biri olsun. Bu durumda,

$$\Delta(\lambda_0) = 0, \quad \frac{d\Delta(\lambda_0)}{dx} = 0$$

koşulları aynı anda yerine getirilmelidir. Yani,

$$k_{21}\phi_1^0(a, \lambda_0) + k_{22}\phi_2^0(h^{-1}(a), \lambda_0) = 0, \quad (2.46)$$

$$k_{21}\frac{\partial\phi_1^0(a, \lambda_0)}{\partial\lambda} + k_{22}\frac{\partial\phi_2^0(h^{-1}(a), \lambda_0)}{\partial\lambda} = 0. \quad (2.47)$$

ve k_{21} ve k_{22} aynı anda sıfır olamayacağından, buradan şu sonuç çıkarılır:

$$\phi_1^0(a, \lambda_0)\frac{\partial\phi_2^0(h^{-1}(a), \lambda_0)}{\partial\lambda} - \phi_2^0(h^{-1}(a), \lambda_0)\frac{\partial\phi_1^0(a, \lambda_0)}{\partial\lambda} = 0. \quad (2.48)$$

Şimdi, q, ω -Dirac denklemini (1.4) λ ya göre türevini alırsak, şu denklem elde edilir.

$$\begin{cases} -\frac{1}{q}D_{\frac{1}{q}, -\frac{w}{q}}\left(\frac{\partial y_2(t, \lambda)}{\partial\lambda}\right) + (p(t) - \lambda)\frac{\partial y_1(t, \lambda)}{\partial\lambda} = y_1(t, \lambda). \\ D_{q, w}\left(\frac{\partial y_1(t, \lambda)}{\partial\lambda}\right) + (r(t) - \lambda)\frac{\partial y_2(t, \lambda)}{\partial\lambda} = y_2(t, \lambda). \end{cases} \quad (2.49)$$

q, w -Dirac denklemini (1.4) ve (2.49) sırasıyla $\frac{\partial y_1(t, \lambda)}{\partial\lambda}, \frac{\partial y_2(t, \lambda)}{\partial\lambda}, -y_1(t, \lambda) - y_2(t, \lambda)$ ile çarparak, bunları birlikte toplayarak ve q, ω entegrasyonu uygulayarak, şu denklem elde edilir.

$$\begin{aligned} & \left\{ y_2(h^{-1}(t), \lambda)\frac{\partial y_1(t, \lambda)}{\partial\lambda} - y_1(t, \lambda)\frac{\partial y_2(h^{-1}(t), \lambda)}{\partial\lambda} \right\} \Big|_{\omega_0}^a \\ &= \int_{\omega_0}^a \{(y_1(t, \lambda))^2 + (y_2(t, \lambda))^2\} d_{q, \omega} t. \end{aligned} \quad (2.50)$$

$\lambda = \lambda_0$ koyarak, $\frac{\partial\phi_1'(t, \lambda_0)}{\partial\lambda} \Big|_{t=\omega_0} = \frac{\partial\phi_2'(t, \lambda_0)}{\partial\lambda} \Big|_{t=\omega_0} = 0$ dikkate alarak ve (2.48) eşitliğini kullanarak şu denklem elde edilir:

$$\int_{\omega_0}^a \{(\phi_1^0(t, \lambda_0))^2 + (\phi_2^0(t, \lambda_0))^2\} d_{q, \omega} t = 0.$$

Bu nedenle $\phi_1^0(t, \lambda_0) = \phi_2^0(t, \lambda_0) = 0$ olması imkansızdır. Dolayısıyla λ_0 basit özdeğerdir (Hira, 2020).

Tanım 2.9. H bir Hilbert uzayı ve T bu uzayda bir lineer operatör olmak üzere, T' nin tanım kümesi $\mathcal{D}(T)$, H Hilbert uzayında yoğun olsun. Her $h, t \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$(Th, t) = (h, T^*t)$$

eşitliğini sağlayan T^* operatörüne T operatörünün eşlenik operatörü denir. Bu eşitliği sağlayan $t \in H$ vektörler kümesine T' nin tanım kümesi denir ve $K(T^*)$ ile gösterilir. T^* operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $(T^*)^* = T$
- ii. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^*$
- iii. $(T + L)^* = T^* + L^*$
- iv. $(T)^* = L^*T^*$
- v. $\|T^*\| = \|T\|$ (T sınırlı iken) (Naimark, 1968).

Tanım 2.10. $T^* = T$ ise T' ye kendine eş operatör adı verilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.11. Tanım kümesin $D(A)$ olan bir A lineer operatörü için, $f, g \in D(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği sağlanırsa A operatörüne Hermitian ismi verilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.12. $A: D(A) \rightarrow H$ lineer bir operatör ve $D(A)$ tanım bölgesi H Hilbert uzayında yoğun olsun ($\overline{D(A)} = H$). Her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

ise yani $A \subset A^*$ ise, A 'ya simetrik operatör denir (Naimark, 1968).

Tanım 2.13. $D(U)$, U operatörünün tanım bölgesi olmak üzere, her $x, y \in D(U)$ için

$$(Ux, Uy) = (x, y)$$

ise U ya izometrik operatör ismi verilir (Naimark, 1968).

Tanım 2.14. Bir U izometrik operatörünün tanım ve değer kümesi tüm H Hilbert uzayına eşit ise, U operatörüne üniter operatör denir.

Sınırlı bir izometrik U operatörünün üniter olabilmesi için gerek ve yeter şart

$$U^*U = UU^* = I \text{ olmasıdır (Naimark, 1968).}$$

Tanım 2.15. T lineer operatörünün $\mathcal{D}(T)$ tanım kümesi H Hilbert uzayında yoğun olmak üzere, her $h \in \mathcal{D}(T)$ için,

$$\operatorname{Im}(Th, h) \geq 0$$

ise T lineer operatörüne dissipatif (dissipative) operatör denir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984).

Tanım 2.16. K Hilbert uzay, $\Gamma_1, \Gamma_2: D_{A^*} \rightarrow K$ lineer dönüşümler olsun.

- i. $f, g \in D_{A^*}$ için
- ii. $(A^*f, g) - (f, A^*g) = (\Gamma_1f, \Gamma_2g)_K - (\Gamma_2f, \Gamma_1g)_K;$

Keyfi $F_1, F_2 \in K$ için $\Gamma_1f = F_1, \Gamma_2f = F_2$ olacak şekilde bir $f \in D_{A^*}$ vektörü vardır, şartlarını sağlayan (K, Γ_1, Γ_2) üçlüsüne A operatörünün sınır değer uzayı ismi verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984).

Teorem 2.17. $n \leq \infty$ olmak üzere (n, n) indis defektli keyfi simetrik operatör için $\dim K = n$ olmak üzere (K, Γ_1, Γ_2) sınır değer uzayı vardır (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984).

Teorem 2.18. K, H Hilbert uzayında büzülme operatörü ise A^* operatörünün

$$(K - I)\Gamma_1f + i(K + I)\Gamma_2f = 0 \tag{2.51}$$

$$(K - I)\Gamma_1f - i(K + I)\Gamma_2f = 0 \tag{2.52}$$

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlaması sırasıyla A operatörünün maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesidir. Tersine A operatörünün keyfi maksimal disipatif (maksimal akretif) genişlemesi A^* operatörünün (2.51) ve (2.52)

koşulunu sağlayan $f \in D_{A^*}$ vektörlerinin kümesine kısıtlamasıdır ki burada K büzülme operatörü genişleme ile tek türlü belirlenir. H Hilbert uzayı üzerinde A operatörünün maksimal simetrik genişlemesi (2.51), (2.52) koşulu ile belirlenir ki burada K izometrik operatördür. Eğer K üniter operatör ise bu koşullar kendine eş genişleme belirler. Son durumda (2.51), (2.52) koşulları, C, H üzerinde kendine eş operatör olmak üzere $(\cos C)\Gamma_2 f - (\sin C)\Gamma_1 f = 0$ koşuluna denktir. A operatörünün disipatif genişlemelerinin genel formu

$$K(\Gamma_1 f + i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f, \quad \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f \in D_K \quad (2.53)$$

Sırasıyla

$$K(\Gamma_1 f - i\Gamma_2 f) = \Gamma_1 f + i\Gamma_2 f, \quad \Gamma_1 f - i\Gamma_2 f \in D_K \quad (2.54)$$

koşulu ile verilir. Burada K operatörü $f \in D_K$ için

$$\|Kf\| \leq \|f\|$$

sağlayan lineer operatördür. A operatörünün simetrik genişlemeleri ise K izometrik operatör olmak üzere (2.53), (2.54) formülleri ile verilir (Gorbachuk ve Gorbachuk, 1984).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde öz eş eşlenik (self-adjoint) Hahn-Dirac sistemini $L^2_{\omega,q}((\omega_0, a), E)$ de formüle edilecektir ve bu sistemin bazı spektral özellikleri incelenecektir.

3.1 Öz Eşlenik Hahn Dirac Sistemi

Şimdi aşağıdaki Hahn-Dirac sistemini ele alalım.

$$\Gamma(y) := \begin{cases} -q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}y_2 + p(x)y_1, \\ D_{\omega, q}y_1 + r(x)y_2, \end{cases}$$

$$\Gamma(y) = \lambda y, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \omega_0 < x < a < \infty, \quad (3.1)$$

$$\Gamma_1(y) := a_{11}y_1(\omega_0) + a_{12}y_2(\omega_0) = 0, \quad (3.2)$$

$$\Gamma_2(y) := a_{21}y_1(a) + a_{22}y_2(h^{-1}(a)) = 0. \quad (3.3)$$

Burada λ bir karmaşık özdeğer parametresi olup, $a_{ij} (i, j = 1, 2)$ keyfi reel sayılardır ve $p(\cdot), r(\cdot)$ ise $[\omega_0, h^{-1}(a)]$, $h^{-1}(a) = q^{-1}(a - \omega) > a$ tanımlanan gerçek değerli w_0 'da sürekli fonksiyonlardır.

Aşağıdaki iç çarpımı kullanarak vektör değerli fonksiyonların uygun $L^2_{\omega,q}((\omega_0, a); E)E := \mathbb{C}^2$ Hilbert uzayını tanımlayalım:

$$(f, g) := \int_{\omega_0}^a (f(x), g(x))_E d_{\omega, q}x.$$

Şimdi, $\mathcal{D}$ ile $[\omega_0, h^{-1}(a)]$ aralığı üzerinde tanımlanmış, ω_0 noktasında sürekli, (3.2), (3.3) sınır koşullarını karşılayan ve $\Gamma y \in L^2_{\omega,q}((\omega_0, a), E)$ olan vektör değerli $y \in L^2_{\omega,q}((\omega_0, a), E)$ fonksiyonlarının lineer kümesi olarak gösterilir.

Teorem 3.1.1: (3.1) – (3.3) ile tanımlanan sınır-değer problemi biçimsel olarak $L^2_{\omega,q}((\omega_0, a); E)$ te öz-eşleniktir.

İspat: Öncelikle Green formülünü ispatlayalım. $y(\cdot), z(\cdot) \in \mathcal{D}$ olsun, bu durumda aşağıdaki denklemler elde edilir.

$$\begin{aligned}
(\Gamma y, z) - (y, \Gamma z) &= \int_{\omega_0}^a (-q^{-1}D_{-1, q^{-1}}y_2 + p(x)y_1)\bar{z}_1 d_{\omega, q}x \\
&\quad + \int_{\omega_0}^a (D_{\omega, q}y_1 + r(x)y_2)\bar{z}_2 d_{\omega, q}x \\
&\quad - \int_{\omega_0}^a y_1 \overline{(-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}z_2 + p(x)z_1)} d_{\omega, q}x \\
&\quad - \int_{\omega_0}^a y_2 \overline{(D_{\omega, q}z_1 + r(x)z_2)} d_{\omega, q}x \\
&= - \int_{\omega_0}^a [(-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}y_2)\bar{z}_1 + y_2 \overline{(D_{\omega, q}z_1)}] d_{\omega, q}x \\
&\quad + \int_{\omega_0}^a [(D_{\omega, q}y_1)\bar{z}_2 + y_1 \overline{(-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}z_2)}] d_{\omega, q}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_{\omega, q}(\overline{z_1(x)}y_2(h^{-1}(x))) &= (D_{\omega, q}y_2(h^{-1}(x)))\bar{z}_1(x) + y_2(x)\overline{(D_{\omega, q}z_1(x))} \\
&= (-q^{-1}D_{-\omega, q^{-1}}y_2)\bar{z}_1 + y_2\overline{(D_{\omega, q}z_1)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
D_{\omega, q}(\overline{z_2(h^{-1}(x))}y_1(x)) &= \overline{(D_{\omega, q}z_2(h^{-1}(x)))}y_1(x) + \overline{z_2(x)}(D_{\omega, q}y_1(x)) \\
&= \overline{(-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}z_2)}y_1 + \overline{z_2(x)}D_{\omega, q}y_1(x).
\end{aligned}$$

Olduğundan aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned}
(\Gamma y, z) - (y, \Gamma z) &= - \int_{\omega_0}^a D_{\omega, q}(\overline{z_1(x)}y_2(h^{-1}(x))) d_{\omega, q}x \\
&\quad + \int_{\omega_0}^a D_{\omega, q}(y_1(x)\overline{z_2(h^{-1}(x))}) d_{\omega, q}x \\
&= \int_{\omega_0}^a D_{\omega, q}[y_1(x)\overline{z_2(h^{-1}(x))} - \overline{z_1(x)}y_2(h^{-1}(x))] d_{\omega, q}x.
\end{aligned}$$

$[y, z]_x := y_1(x)\overline{z_2(h^{-1}(x))} - \overline{z_1(x)}y_2(h^{-1}(x))$ tanımını yapalım, böylece aşağıdaki denklem elde edilir:

$$(\Gamma y, z) - (y, \Gamma z) = [y, z]_a - [y, z]_{\omega_0}. \quad (3.4)$$

Γ nin biçimsel olarak öz eşlenik olduğunu göstermeye devam ediyoruz. Tüm $y(\cdot), z(\cdot) \in \mathcal{D}$ ler için $(\Gamma y, z) = (y, \Gamma z)$ olduğunu kanıtlamak yeterlidir.

$y(\cdot), z(\cdot) \in \mathcal{D}$ olsun. O halde, (3.4)'e sahibiz ve (3.2) ve (3.3) sınır koşullarından,

$$[y, z]_a = 0 \text{ ve } [y, z]_{\omega_0} = 0 \text{ elde edilir.}$$

Dolayısıyla

$$(\Gamma y, z) = (y, \Gamma z). \quad (3.5)$$

Bu da ispatı tamamlar (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Artık, bir sonraki hedefimiz özdeğerleri ve karşılık gelen öz fonksiyonları belirlemektir:

$$\psi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{11}(x, \lambda) \\ \psi_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix}, \quad \psi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \psi_{21}(x, \lambda) \\ \psi_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

başlangıç koşullarını sağlayan (3.1)'in doğrusal olarak bağımsız çözümleri olsun.

$$\begin{aligned} \psi_{11}(\omega_0, \lambda) &= 1, \psi_{12}(\omega_0, \lambda) = 0, \\ \psi_{21}(\omega_0, \lambda) &= 0, \psi_{22}(\omega_0, \lambda) = 1, \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Bu durumda, sistemin (3.1) her çözümü aşağıdaki formda olacaktır:

$$y(x, \lambda) = K_1 \psi_1(x, \lambda) + K_2 \psi_2(x, \lambda).$$

Burada K_1 ve K_2 x 'e bağlı değildir. Lineer sistemin en az bir değişkeni sıfırdan farklı olan bir çözümünü bulabilirsek,

$$\begin{aligned} K_1 \Gamma_1(\psi_1) + K_2 \Gamma_1(\psi_2) &= 0, \\ K_1 \Gamma_2(\psi_1) + K_2 \Gamma_2(\psi_2) &= 0, \end{aligned}$$

Bu durumda $y(x, \lambda)$ çözümü (3.1)'in özfonksiyonu olarak adlandırılır. Bu yüzden

$\lambda \in \mathbb{R}$, ancak ve ancak

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \Gamma_1(\psi_1) & \Gamma_1(\psi_2) \\ \Gamma_2(\psi_1) & \Gamma_2(\psi_2) \end{vmatrix} = 0,$$

olduğunda bir özdeğerdir. Fonksiyon, (3.1) -(3.3) ile tanımlanan Hahn-Dirac sistemi ile ilişkili karakteristik determinant olarak adlandırılır. (3.1) -(3.3) ile tanımlanan problemin özdeğerleri, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunu sıfırlayan değerlerdir.

Öte yandan, $\Delta(\lambda)$, λ nın tam fonksiyonudur çünkü her bir $x \in [\omega_0, a]$ sabiti için $\psi_1(x, \lambda)$ ve $\psi_2(x, \lambda)$, λ da tamdır. Dolayısıyla, (3.1) – (3.3) ile tanımlanan Hahn-Dirac sisteminin özdeğerleri, sonlu limit noktaları olmadan en büyük sayılabilir değerlerdir.

3.2 Green Fonksiyon ve Öz Fonksiyon Açılım Formülü

Bu bölümde homojen olmayan aşağıdaki sistemin çözümünü inceleyeceğiz.

$$-q^{-1}D_{-\omega q^{-1}, q^{-1}}y_2 + \{p(x) - \lambda\}y_1 = f_1(x) \quad (3.6)$$

$$D_{\omega, q}y_1 + \{r(x) - \lambda\}y_2 = f_2(x) \quad (3.7)$$

$$a_{11}y_1(\omega_0) + a_{12}y_2(\omega_0) = 0, \quad (3.8)$$

$$a_{21}y_1(a) + a_{22}y_2(h^{-1}(a)) = 0, \quad (3.9)$$

Burada $a_{ij} \in \mathbb{R}(i, j = 1, 2)$ ve $\omega_0 < x < a < \infty$,

$$f(\cdot) = \begin{pmatrix} f_1(\cdot) \\ f_2(\cdot) \end{pmatrix} \in L_{\omega, q}^2((\omega, a); E).$$

Teorem 3.2.1: Eğer λ , (3.1) -(3.3) ile tanımlanan problemin bir özdeğeri değilse, bu durumda homojen olmayan sistem (3.6) -(3.9), $L_{\omega, q}^2((\omega_0, a); E)$ uzayında herhangi bir vektör değerli $f(\cdot)$ fonksiyon için çözülebilir. Buna karşın λ , (3.1) -(3.3) ile tanımlanan problemin bir öz değeriye, bu durumda homojen olmayan sistem (3.6) -(3.9) genellikle çözülemez.

İspat. Aşağıdakileri çözümleri tanımlayalım

$$\varphi_1(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x, \lambda) \\ \varphi_{12}(x, \lambda) \end{pmatrix} \text{ ve } \varphi_2(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \varphi_{21}(x, \lambda) \\ \varphi_{22}(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

Fonksiyonlarını

$$\varphi_1(x, \lambda) = \Gamma_1(\psi_2)\psi_1(x, \lambda) - \Gamma_1(\psi_1)\psi_2(x, \lambda),$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = \Gamma_2(\psi_2)\psi_1(x, \lambda) - \Gamma_2(\psi_1)\psi_2(x, \lambda)$$

ile tanımlayalım. O halde, $\varphi_1(x, \lambda)$ ve φ_2 , (3.1) in çözümleridir öyle ki

$$\psi_1(\omega_0, \lambda) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ -a_{11} \end{pmatrix} \text{ ve } \psi_2(a, \lambda) = \begin{pmatrix} a_{22} \\ -a_{21} \end{pmatrix}.$$

Bu çözümleri kullanarak Green matrisi

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\frac{\varphi_2(x, \lambda)\varphi_1^T(t, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, & \omega_0 \leq t \leq x, \\ -\frac{\varphi_1(x, \lambda)\varphi_2^T(t, \lambda)}{\Delta(\lambda)}, & x < t \leq a \end{cases} \quad (3.10)$$

ile tanımlanır. Şimdi

$$y(x, \lambda) = \int_{\omega_0}^a G(x, t, \lambda) f(t) d_{\omega, q} t \quad (3.11)$$

Fonksiyonun homojen olmayan sistemin (3.6) -(3.9) çözümü olduğunu gösterelim.

Green matrisinin tanımı ile şu ifade edilir.

$$G(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \varphi_{21}(x, \lambda)\varphi_{11}(t, \lambda)\varphi_{21}(x, \lambda)\varphi_{12}(t, \lambda) \\ \varphi_{22}(x, \lambda)\varphi_{11}(t, \lambda)\varphi_{22}(x, \lambda)\varphi_{12}(t, \lambda) \end{pmatrix}, & \omega_0 \leq t \leq x \\ -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{pmatrix} \varphi_{11}(x, \lambda)\varphi_{21}(t, \lambda)\varphi_{11}(x, \lambda)\varphi_{22}(t, \lambda) \\ \varphi_{12}(x, \lambda)\varphi_{21}(t, \lambda)\varphi_{12}(x, \lambda)\varphi_{22}(t, \lambda) \end{pmatrix}, & x < t \leq a. \end{cases}$$

(3.11)'den,

$$y_1(x, \lambda)$$

$$= -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \varphi_{21}(x, \lambda) \int_{\omega_0}^x \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t, \lambda)f_1(t) \\ +\varphi_{12}(t, \lambda)f_2(t) \end{pmatrix} d_{\omega, q} t \quad (3.12)$$

$$- \frac{1}{\Delta(\lambda)} \varphi_{11}(x, \lambda) \int_x^a \begin{pmatrix} \varphi_{21}(t, \lambda)f_1(t) \\ +\varphi_{22}(t, \lambda)f_2(t) \end{pmatrix} d_{\omega, q} t, \quad (3.13)$$

$$y_2(x, \lambda)$$

$$= -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \varphi_{22}(x, \lambda) \int_{\omega_0}^x \begin{pmatrix} \varphi_{11}(t, \lambda)f_1(t) \\ +\varphi_{12}(t, \lambda)f_2(t) \end{pmatrix} d_{\omega, q} t \quad (3.14)$$

$$- \frac{1}{\Delta(\lambda)} \varphi_{12}(x, \lambda) \int_x^a \begin{pmatrix} \varphi_{21}(t, \lambda)f_1(t) \\ +\varphi_{22}(t, \lambda)f_2(t) \end{pmatrix} d_{\omega, q} t \quad (3.15)$$

elde edilir. (3.13)'den şu sonuç çıkar:

$$\begin{aligned}
& D_{\omega,q} y_1(x, \lambda) \\
&= -\frac{1}{\Delta(\lambda)} D_{\omega,q} \varphi_{21}(x, \lambda) \int_{\omega_0}^x \left(\begin{array}{c} \varphi_{11}(t, \lambda) f_1(t) \\ + \varphi_{12}(t, \lambda) f_2(t) \end{array} \right) d_{\omega,q} t \\
&\quad -\frac{1}{\Delta(\lambda)} D_{\omega,q} \varphi_{11}(x, \lambda) \int_x^a \left(\begin{array}{c} \varphi_{21}(t, \lambda) f_1(t) \\ + \varphi_{22}(t, \lambda) f_2(t) \end{array} \right) d_{\omega,q} t \\
&\quad + \frac{1}{\Delta(\lambda)} W(\varphi_1, \varphi_2) f_2(x) \\
&= \frac{1}{\Delta(\lambda)} \{r(x) - \lambda\} \varphi_{22}(x, \lambda) \int_{\omega_0}^x \left(\begin{array}{c} \varphi_{11}(t, \lambda) f_1(t) \\ + \varphi_{12}(t, \lambda) f_2(t) \end{array} \right) d_{\omega,q} t \\
&\quad - \frac{1}{\Delta(\lambda)} \{r(x) - \lambda\} \varphi_{12}(x, \lambda) \int_x^a \left(\begin{array}{c} \varphi_{21}(t, \lambda) f_1(t) \\ + \varphi_{22}(t, \lambda) f_2(t) \end{array} \right) d_{\omega,q} t \\
&\quad + f_2(x) = -\{r(x) - \lambda\} y_2(x) + f_2(x).
\end{aligned}$$

(3.6)in geçerliliği de benzer şekilde ispatlanır. Dolayısıyla (3.11)'deki $y(x, \lambda)$ fonksiyon, (3.6) -(3.7) sisteminin çözümüdür. (3.11)'nın (3.8) -(3.9) sınır koşullarını sağladığı kolayca görülür. (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Teorem 3.2.2: Formülü (3.10) ile tanımlanan Green matrisi aşağıdaki özelliklere sahiptir.

- i. $G(x, t, \lambda)$ Green matrisi tektir, yani homojen olmayan sistem (3.6) – (3.9) için başka bir Green matrisi mevcutsa o halde $G(x, t, \lambda) = \bar{G}(x, t, \lambda)$ ve $L_{\omega,q}^2((\omega_0, a) \times (\omega_0, a); E)$ uzayındadır.
- ii. $G(x, t, \lambda)$, (ω_0, ω_0) noktasında süreklidir.
- iii. $G(x, t, \lambda) = G^T(t, x, \lambda)$
- iv. $\lambda_0, \Delta(\lambda)$ 'nın bir sıfır noktasıdır. O halde $\lambda_0, G(x, t, \lambda)$ matrisinin bir basit kutbu olabilir. Öyleyse şu elde edilir:

$$G(x, t, \lambda) = \frac{-v(x)v^T(t)}{\lambda - \lambda_0} + \tilde{G}(x, t, \lambda),$$

burada, $\tilde{G}(x, t, \lambda)$ λ_0 'ın komşuluğundaki λ 'nın bir analitik fonksiyonudur ve $v(x)$, λ_0 'a karşılık gelen normleştirilmiş bir öz fonksiyonudur.

İspat. Bunun ispatı Hahn-Sturm Liouville denklemi için verilen ispata benzer olduğu için atlıyoruz (Annaby vd., 2018).

Şimdi,

$\Upsilon: \mathcal{D} \subset L^2_{\omega,q}((\omega_0, a); E) \rightarrow L^2_{\omega,q}((\omega_0, a); E)$ operatörünü

$y \in \mathcal{D}$ için $\Upsilon y = \Gamma y$ şeklinde tanımlansın.

Sonraki adımda, Υ operatörünün sonlu limit noktası olmayan sayılabilir bir özdeğerler dizisinin mevcut olduğunu ve karşılık gelen öz fonksiyonların $L^2_{\omega,q}((\omega_0, a); E)$ nin bir ortonormal tabanı oluşturduğu kanıtlanacaktır. Bu yüzden aşağıdaki tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 3.2.3: $\omega_0 \leq x, t \leq a$ koşuluna sahip iki değişkenli $M(x, t)$ matris değer fonksiyonu eğer:

$$\int_{\omega_0}^a \int_{\omega_0}^a \|M(x, t)\|_E^2 d_{\omega,q} x d_{\omega,q} t < +\infty.$$

ise ω, q –Hilbert-Schmidt çekirdeği olarak adlandırılır.

Teorem 3.2.4: A operatörü

$A\{x_i\} = \{y_i\}, i = 1, 2, \dots$ şeklinde tanımlansın.

Burada;

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k, i = 1, 2, \dots \quad (3.16)$$

Eğer

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < +\infty \quad (3.17)$$

İse A operatörü l^2 dizi uzayında kompakttır (Naimark, 1968).

Teorem 3.2.5 (Hilbert-Schmidt). A bir Hilbert uzayında kompakt öz eşlenik bir operatör olsun. O halde, A operatörünün sıfır olmayan $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ özdeğerlere sahip karşılık gelen

$\theta_1, \theta_2, \dots$ ortonormal özvektör sistemi mevcuttur. Öyle ki her $x \in H$ elemanın aşağıdaki formda tek türlü bir gösterimi vardır:

$$x = \sum_n c_n \theta_n + x',$$

Burada $x', Ax^r = 0$ koşulunu ve ayrıca

$$Ax = \sum_n \lambda_n c_n \theta_n,$$

ve sonsuz sayıda sıfırdan farklı özdeğerin olduğu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0 \text{ (Kolmogorov ve Fomin, 1970).}$$

Y operatörünün, (3.1) – (3.3) ile tanımlanan Hahn-Dirac probleminin özdeğerlerine sahip olduğu açıktır. Genelliği kaybetmeden, $\lambda = 0$ bir özdeğer olmadığını varsayabiliriz. O halde $\text{Ker } Y = \{0\}$. Böylece

$$(Yy)(x) = f(x), f(x) \in L_{\omega,q}^2((\omega_0, \alpha); E) \text{ problemin çözümü,}$$

$$y(x) = \int_{\omega_0}^a G(x, t) f(t) d_{\omega,q} t$$

ile verilir. Burada

$$G(x, t) = G(x, t, 0) = \begin{cases} -\frac{\varphi_2(x)\varphi_1^T(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, & \omega_0 \leq t \leq x, \\ -\frac{\varphi_1(x)\varphi_2^T(t)}{W(\varphi_1, \varphi_2)}, & x < y \leq a. \end{cases} \quad (3.18)$$

Teorem 3.2.6: (3.18) ile tanımlanan $G(x, t)$ bir Hilbert-Schmidt çekirdeğidir.

İspat: Formül (3.18) ün üst yarısına göre,

$$\int_{\omega_0}^a d_{\omega,q} x \int_{\omega_0}^x \|G(x, t)\|_E^2 d_{\omega,q} t < +\infty;$$

Ve (3.18)'ün alt yarısına göre,

$$\int_{\omega_0}^a d_{\omega,q} x \int_x^a \|G(x,t)\|_E^2 d_{\omega,q} x d_{\omega,q} t < +\infty$$

Elde ederiz çünkü iç integrali vardır ve $\varphi_{ij}(x)\varphi_{kl}(t)$ ($i, j, k, l = 1, 2$) çarpımlarının lineer bir birleşimidir. Bu çarpımların her biri $L_{\omega,q}^2(\omega_0, a)$ ya ait olduğu için $L_{\omega,q}^2((\omega_0, a); E)$ ye aittir. O halde (3.19) denklemini elde edilir;

$$\int_{\omega_0}^a \int_{\omega_0}^a \|G(x,t)\|_E^2 d_{\omega,q} x d_{\omega,q} t < +\infty, \quad (3.19)$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Teorem 3.2.7: K operatörü aşağıdaki formülle tanımlanır.

$$(Kf)(x) = \int_{\omega_0}^a G(x,t)f(t)d_{\omega,q}t.$$

Bu durumda K , $L_{\omega,q}^2((\omega_0, a); E)$ uzayında kompakt ve öz eşleniktir.

İspat. $\psi_i = \psi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ $L_{\omega,q}^2((\omega_0, a); E)$ nin bir tam ve ortonormal bazı olsun. $G(x, t)$ bir Hilbert-Schmidt çekirdeği olduğundan şu şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} x_i &= (f, \psi_i) = \int_{\omega_0}^a (f(t), \psi_i(t))_E d_{\omega,q}t, \\ y_i &= (g, \psi_i) = \int_{\omega_0}^a (g(t), \psi_i(t))_E d_{\omega,q}t, \\ a_{ik} &= \int_{\omega_0}^a \int_{\omega_0}^a (G(x,t)\psi_i(x), \psi_k(t))_E d_{\omega,q}x d_{\omega,q}t. \end{aligned}$$

O halde $L_{\omega,q}^2((\omega_0, a); E)$, izometrik olarak l^2 ile eşlenir. Dolayısıyla, integral operatörümüz bu eşleme ile l^2 uzayında formül (3.16) ile tanımlanan operatöre dönüşür ve (3.19) koşulu, (3.17) koşuluna dönüştürülür. Teorem 3.2.4'e göre, bu operatör kompakttır. Bu nedenle de orijinal operatör kompakttır.

$f, g \in L_{\omega,q}^2((\omega_0, a); E)$, $G(x, t) = G^T(t, x)$ ve $G(x, t)$ gibi $[\omega_0, a] \times [\omega_0, a]$ üzerinde tanımlanan reel değerli bir matris fonksiyonu olsun, bu durumda şu elde edilir:

$$\begin{aligned}
(Kf, g) &= \int_{\omega_0}^a ((Kf)(x), g(x))_E d_{\omega, q} x \\
&= \int_{\omega_0}^a \int_{\omega_0}^a (G(x, t)f(t), g(x))_E d_{\omega, q} t d_{\omega, q} x \\
&= \int_{\omega_0}^a \left(f(t), \int_{\omega_0}^a G(x, t)g(x) d_{\omega, q} x \right)_E d_{\omega, q} t = (f, Kg).
\end{aligned}$$

Böylece, K nın $L^2_{\omega, q}((\omega_0, a); E)$ 'de öz eşlenik operatör olduğu ispatlanmış olur (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

Teorem 3.2.8: Y operatörün özdeğerleri, şu şekilde sıralanabilen $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ sonsuz reel sayılar dizisini oluşturur:

$$|\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_n| < \dots \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Tüm normalleştirilmiş Y özfonksiyonların kümesi $L^2_{\omega, q}((\omega_0, a); E)$ için bir ortonormal baz oluşturur.

İspat. Teorem 3.2.5 ve 3.2.7'ye göre, K operatörünün sıfırdan farklı reel özdeğerlerden oluşan $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$ sonsuz bir dizisi vardır. O halde

$$|\lambda_n| = \frac{1}{|\xi_n|} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty.$$

Ayrıca, $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ye karşılık gelen bir ortonormal öz fonksiyonlar kümesini gösterirse, $y \in \mathcal{D}$ ise o halde bazı $f \in L^2_{\omega, q}((\omega_0, a); E)$ için $Yy = fy$ ve $y = Kf$ dir. Böylece,

$$\begin{aligned}
y = Kf &= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(f, \chi_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(Yy, \chi_n) \chi_n \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(y, Y\chi_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(y, \lambda_n \chi_n) \chi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (y, \chi_n) \chi_n
\end{aligned}$$

(Allahverdiev ve Tuna, 2021).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI VE TARTIŞMA

Bu bölümde, regüler durumda Hahn-Dirac operatörlerini incelemek için bir sınır değer uzayı oluşturulmuş ve bu operatörün tüm maksimal disipatif, akretif, kendine eş ve diğer genişlemeleri elde edilecektir.

$$\sigma_0 < b < \infty \text{ ve}$$

$$Y_1 y(\xi) := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{q} D_{-\frac{\sigma}{q}, \frac{1}{q}} \\ D_{\sigma, q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(\xi) & 0 \\ 0 & r(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Y_1 y(\xi) = \lambda y(\xi), \xi \in (\sigma_0, b), \quad (4.1)$$

Hahn-Dirac sistemi ele alınacak olursa $\lambda \in \mathbb{C}, p(\cdot)$ ve $r(\cdot), [\sigma_0, \theta^{-1}(b)], (\theta(\xi) = q\xi + \sigma)$ aralığı üzerinde tanımlı gerçekteğerli sürekli fonksiyonlardır.

Dirac sisteminden operatörlere geçmek için, $H := L^2_{\sigma, q}((\sigma_0, b); C^2)$ olacak şekilde Hilbert uzayı aşağıdaki iç çarpımla tanımlanır:

$$\langle f, g \rangle := \int_{\sigma_0}^b (f(\xi), g(\xi))_{C^2} d_{\sigma, q} \xi.$$

$x(\xi, \lambda)$ ve $z(\xi, \lambda)$ çözümleri için Green formülü aşağıdaki gibidir:

$$\int_{\sigma_0}^b ((Yx)(\xi), z(\xi))_{C^2} d_{\sigma, q} \xi - \int_{\sigma_0}^b (x(\xi), (Yz)(\xi))_C d_{\sigma, q} \xi = [x, z]_b - [x, z]_{\sigma_0} \quad (4.2)$$

Burada

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in H,$$

ve

$$[x, z]_{\xi} := W_{\sigma, q}(x, \bar{z})(\xi) = x_1(\xi) \overline{z_2(\theta^{-1}(\xi))} - \overline{z_1(\xi)} x_2(\theta^{-1}(\xi))$$

şeklinde tanımlanır (Allahverdiev ve Tuna, 2021).

H 'deki tüm $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ fonksiyonlarının kümesini $D_{\max}$ ile göstereceğiz burada, y_1 ve y_2 σ_0 'da sürekli olup $Y(y) \in H$ 'dir. Maksimal operatör $\Gamma_{\max}$ 'ı $D_{\max}$ üzerinde $\Gamma_{\max} y = Y_y$ eşitliği ile tanımlanır.

$D_{\min}$, aşağıdaki koşulları sağlayan tüm $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in D_{\max}$ vektörlerinin lineer kümesi olsun:

$$y_1(\sigma_0) = y_2(\sigma_0) = y_1(b) = y_2(\theta^{-1}(b)) = 0.$$

Eğer $\Gamma_{\max}$ operatörünü $D_{\min}$ kümesi ile sınırlarsak, bu durumda $\Gamma_{\min}$ minimal operatörü elde edilir. $\Gamma_{\min}^* = \Gamma_{\max}$, ve $\Gamma_{\min}$ 'in kapalı bir simetrik operatör olduğu açıkça görülür (Naimark, 1968).

Teorem 4.1. Ω_1 ve Ω_2 , $D_{\max}$ 'ın C^2 'ye lineer dönüşümleri (4.3) deki gibi tanımlansın :

$$\Omega_1 x = \begin{pmatrix} -x_1(\sigma_0) \\ x_1(b) \end{pmatrix}, \Omega_2 x = \begin{pmatrix} x_2(\sigma_0) \\ x_2(\theta^{-1}(b)) \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Bu durumda $\langle C^2, \Omega_1, \Omega_2 \rangle$, üçlüsü (4.3) deki tanıma göre $\Gamma_{\min}$ operatörünün sınır uzayıdır.

İspat. Her $x, z \in D_{\max}$ için

$$\begin{aligned} \langle \Omega_1 x, \Omega_2 z \rangle - \langle \Omega_2 x, \Omega_1 z \rangle = & -x_1(\sigma_0)\bar{z}_2(\sigma_0) - x_2(\sigma_0)\bar{z}_1(\sigma_0) \\ & + x_1(b)\bar{z}_2(\theta^{-1}(b)) - x_2(\theta^{-1}(b))\bar{z}_1(b) \end{aligned}$$

Böylece aşağıdaki eşitlik bulunur:

$$\langle \Omega_1 x, \Omega_2 z \rangle - \langle \Omega_2 x, \Omega_1 z \rangle = [x, z]_b - [x, z]_{\sigma_0}$$

Green formülü (4.2)'yi kullanarak şu sonuca ulaşırız:

$$\langle \Omega_1 x, \Omega_2 z \rangle - \langle \Omega_2 x, \Omega_1 z \rangle = \langle \Gamma_{\max} x, z \rangle_H - \langle x, \Gamma_{\max} z \rangle_H$$

Yani, sınır değerler uzayı tanımındaki ilk koşul sağlanmış olur. Şimdi ikinci koşulu ispatlayalım. $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in C^2$ olsun.

Bu durumda vektör değerli fonksiyonu

$$y(\xi) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha_1(\xi)u_1(\xi) + \alpha_2(\xi)v_1(\xi) + \beta_1(\xi)u_2(\xi) + \beta_2(\xi)v_2(\xi) \quad (4.4)$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \alpha_1(\xi) &= \begin{pmatrix} a_{11}(\xi) \\ a_{12}(\xi) \end{pmatrix}, \alpha_2(\xi) = \begin{pmatrix} a_{21}(\xi) \\ a_{22}(\xi) \end{pmatrix}, \\ \beta_1(\xi) &= \begin{pmatrix} \beta_{11}(\xi) \\ \beta_{12}(\xi) \end{pmatrix}, \beta_2(\xi) = \begin{pmatrix} \beta_{21}(\xi) \\ \beta_{22}(\xi) \end{pmatrix} \in H \end{aligned}$$

aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}(\sigma_0) &= -1, \alpha_{12}(\sigma_0) = \alpha_{11}(b) = \alpha_{12}(\theta^{-1}(b)) = 0, \\ \alpha_{22}(\sigma_0) &= 1, \alpha_{21}(\sigma_0) = \alpha_{21}(b) = \alpha_{22}(\theta^{-1}(b)) = 0, \\ \beta_{11}(b) &= 1, \beta_{11}(\sigma_0) = \beta_{12}(\sigma_0) = \beta_{12}(\theta^{-1}(b)) = 0, \\ \beta_{22}(\theta^{-1}(b)) &= 1, \beta_{21}(\sigma_0) = \beta_{21}(b) = \beta_{22}(\sigma_0) = 0,\end{aligned}$$

Bu fonksiyon D_{maks} kümesine ait olup $\Omega_1 y = u, \Omega_2 y = v$ koşulunu sağlar. O zaman Teorem 2.18 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2. C^2 de keyfi bir K daralan dönüşümü (contraction) için, Γ_{min} operatörünün $x \in D_{maks}$ olmak üzere

$$(K - I)\Omega_1 x + i(K + I)\Omega_2 x = 0 \quad (4.5)$$

ya da

$$(K - I)\Omega_1 x - i(K + I)\Omega_2 x = 0 \quad (4.6)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar kümesine kısıtlanması sırasıyla Γ_{min} operatörünün maksimal dissipative ve maksimal accretive genişlemesidir.

Tersine Γ_{min} operatörünün her maksimal dissipative(accretive) genişlemesi Γ_{maks} operatörünün (4.5) ((4.6)) koşulunu sağlayan $x \in D_{maks}$ fonksiyonları kümesine kısıtlanmasıdır ve bu genişleme contraction (daralan dönüşüm) K' yi tek türlü olarak belirler. Eğer K bir izometri ise (4.5) ve ((4.6)) koşulları, Γ_{min} operatörünün H uzayındaki maksimal simetrik genişlemelerini verir. Eğer K üniter ise; bu koşullar self-adjoint genişlemeleri tanımlar.

Özel olarak,

$$\begin{aligned}x_1(\sigma_0) - h_1 x_2(\sigma_0) &= 0 \\ x_1(b) - h_2 x_2(\theta^{-1}(b)) &= 0\end{aligned}$$

Sınır koşulları $\text{Im } h_1 \geq 0$ veya $h_1 = \infty$, and $\text{Im } h_2 \geq 0$ veya $h_2 = \infty$ ($\text{Im } h_1 = 0$ veya $h_1 = \infty$, ve $\text{Im } h_2 = 0$ or $h_2 = \infty$) ile birlikte Γ_{min} 'in ayrık sınır koşullarına sahip maksimal disipatif (kendine eş) genişlemelerini tanımlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Dirac sistemi, modern teorik fiziğin temel yapıtaşlarından biri olarak kabul edilmektedir. Bu sistem, elektron spinini doğal bir biçimde tanımlaması, antimaddenin varlığını öngörmesi ve hidrojen atomunun spektrumunu yüksek bir doğrulukla yeniden üretmesi gibi devrim niteliğindeki özellikleriyle öne çıkmaktadır. Paul Dirac tarafından geliştirilen bu denklem, relativistik kuantum mekaniği çerçevesinde parçacıkların davranışlarını anlamada merkezi bir rol oynamış ve kuantum elektrodinamiğinin temellerini atmıştır. Dirac sisteminin sunduğu teorik sonuçlar, yalnızca temel parçacık fiziği alanında değil, aynı zamanda katı hâl fiziği ve kozmoloji gibi çeşitli disiplinlerde de geniş uygulama alanı bulmuştur. Tüm bu nedenlerden ötürü, Dirac sistemi günümüzde hâlen çok sayıda araştırmacının dikkatini çeken ve üzerinde yoğun bilimsel çalışmaların yürütüldüğü bir konu olmaya devam etmektedir.

Bu tez çalışmasında, $\sigma_0 < b < \infty$ ve

$$Y_1 y(\xi) := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{9} D \frac{\varepsilon}{q} \frac{1}{q} \\ D_{\sigma,q} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(\xi) & 0 \\ 0 & r(\xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

olmak üzere

$$Y_1 y(\xi) = \lambda y(\xi), \xi \in (\sigma_0, b),$$

Hahn-Dirac sistemi ele alınmıştır.. Burada $\lambda \in \mathbb{C}$, $p(\cdot)$ ve $r(\cdot)$, $[\sigma_0, \theta^{-1}(b)]$, $(\theta(\xi) = q\xi + \sigma)$ aralığı üzerinde tanımlı gerçekteğerli sürekli fonksiyonlardır.

Bu türden denklemlere karşılık gelen minimal operatörler ve maksimal operatörler tanımlandı.

Ω_1 ve Ω_2 , D_{maks} 'tan C^2 'ye lineer dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlandı:

$$\Omega_1 x = \begin{pmatrix} -x_1(\sigma_0) \\ x_1(b) \end{pmatrix}, \Omega_2 x = \begin{pmatrix} x_2(\sigma_0) \\ x_2(\theta^{-1}(b)) \end{pmatrix}.$$

Bu dönüşümler yardımıyla sınır değer uzayı oluşturuldu. Bu kavram yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edildi:

C^2 de keyfi bir K daralan dönüşümü (contraction) için, Γ_{min} operatörünün $x \in D_{maks}$ olmak üzere

$$(K - I)\Omega_1 x + i(K + I)\Omega_2 x = 0 \quad (5.1)$$

ya da

$$(K - I)\Omega_1 x - i(K + I)\Omega_2 x = 0 \quad (5.2)$$

şartlarını sağlayan fonksiyonlar kümesine kısıtlanması sırasıyla Γ_{min} operatörünün maksimal dissipative ve maksimal accretive genişlemesidir.

Tersine Γ_{min} operatörünün her maksimal dissipative(accretive) genişlemesi Γ_{maks} operatörünün (5.1) ((5.2)) koşulunu sağlayan $x \in D_{maks}$ fonksiyonları kümesine kısıtlanmasıdır ve bu genişleme contraction (daralan dönüşüm) K' 'yi tek türlü olarak belirler. Eğer K bir izometri ise (5.1) ve (5.2) koşulları, Γ_{min} operatörünün H uzayındaki maksimal simetrik genişlemelerini verir. Eğer K üniter ise; bu koşullar self-adjoint genişlemeleri tanımlar.

Bu çalışma Hahn-Dirac sistemi singüler durumda ele alınarak genişletilebilir.

KAYNAKLAR

- Abu-Risha, M. H., Annaby, M. H., Ismail, M. E. H. ve Mansour, Z. S., (2007). Linear q -difference equations. *Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen*, 26(4), 481–494.
- Aldwoah, K., (2009). *Generalized time scales and associated difference equations* (Master's thesis). Cairo University.
- Allahverdiev, B. P., (1995). On extensions of symmetric Schrödinger operators with a matrix potentials, *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk Serriya Matematicheskaya* 59, 19-54 (English translet in *Izvestiya Mathematics* 59, 45-62).
- Allahverdiev, B. P., (2003). Spectral analysis of dissipative dirac operators with general boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 283(1), 287–303.
- Allahverdiev, B.P., (2013). Extensions of symmetric second-order difference Operators with matrix coefficients. *Journal of Difference Equations Applications* 19, 5, 839-849.
- Allahverdiev, B.P., (2014). Extensions of symmetric infinite Jacobi operator. *Linear Multilinear Algebra* 62, 9, 1146-1152.
- Allahverdiev, B.P., (2016). Extensions of symmetric singular second-order dynamic operators on time scales. *Filomat* 30, 6, 1475-1484.
- Allahverdiev, B. P. ve Tuna, H., (2017). One-dimensional q -dirac equation. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40(18), 7287–7306.
- Allahverdiev, B. P. ve Tuna, H., (2019a). The spectral expansion for the hahn–dirac system on the whole line. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(3), 1668–1687.
- Allahverdiev, B. P. ve Tuna, H. (2019b) *The parseval equality and expansion formula for singular hahn-dirac system*. In S. Z. Alparslan Gok & D. Aruğaslan Cincin (Eds.), *Emerging applications of differential equations and game theory* (pp. 209–235). Hershey, PA: IGI Global.
- Allahverdiev, B. P. ve Tuna, H., (2021). Spectral analysis of Hahn-Dirac system. *proyecciones antofagasta, On-line*, 40(6), 1547–1567.
- Alvarez-Nodarse, R., (2006). On characterizations of classical polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 196(1), 320–337.
- Andrews, G. E., Askey, R. ve Roy, R., (1999). *Special functions*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Annaby, M. H., Hamza, A. E. ve Aldwoah, K. A., (2012). Hahn Difference operator and associated jackson–nörlund integrals. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 154(1), 133–153.
- Annaby, M. H., Hamza, A. E. ve Makhraresh, S. D., (2018). *A sturm-liouville theory for hahn difference operator*. In X. Li ve Z. Nashed (Eds.), *Frontiers of orthogonal polynomials and q-series* (ss. 35–84). Singapore: World Scientific.
- Annaby, M. A. ve Hassan, H. A., (2018). Sampling theorems for jackson–nörlund transforms associated with hahn-difference operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 464(1), 493–506.
- Bairamogly, M., (1976). Self-adjoint extensions of an operator equation with a singularity, *Izvestiya Akademii Nauk Azerb. SSR Seriya Fiziko-Tekhnicheskiki Matematicheskikh Nauk* 2,140-143.
- Bird, M. T., (1936). On generalizations of sum formulas of the euler–maclaurin type. *American Journal of Mathematics*, 58(3), 487–503.
- Birkhoff, G. D., (1911). General theory of linear difference equations. *Transactions of the American Mathematical Society*, 12(2), 243–284.
- Birman, M.Sh., (1956). On the theory of self-adjoint extensions of positive definite operators. *Mathematical*, 38, 4, 431-450.
- Brikshavana, T. ve Sitthiwiratham, T., (2017). On fractional hahn calculus. *Advances in Difference Equations*, 2017(1), 354.
- Bruk, V. M., (1976). On a class of boundary-value problems with a spectral parameter in the boundary conditions. *Matematicheskii Sbornik*, 100(2), 210–216.
- Calkin, J. W., (1939). Abstract boundary conditions. *Transactions of the American Mathematical Society*, 45(3), 369–442.
- Dobrogowska, A. ve Odziejewicz, A., (2006). Second order q-difference equations solvable by factorization method. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 193(1), 319–346.
- Gasper, G. ve Rahman, M., (1990). *Basic hypergeometric series*. New York: Cambridge University Press.
- Gorbachuk, M. L. ve Gorbachuk, V. I., (1984). *Boundary value problems for operator differential equations*. Kiev: Naukova Dumka,
- Gorbachuk, M. L., Gorbachuk, V. I. ve Kochubei, A. N., (1989). The theory of extensions of symmetric operators and boundary-value problems for differential equations. *Ukrainskii Matematicheskii Zhurnal*, 41(10), 1299–1312. English translation in *Ukrainian Mathematical Journal*, 41(10), 1117–1129. (Also published in *Theory of Operators in Function Spaces and Its Applications*, Naukova Dumka, Kiev, pp. 174–183).

- Hahn, W., (1949). Beiträge zur theorie der heineschen reihen. *Mathematische Nachrichten*, 2(4-6), 340–379.
- Hahn, W., (1949). Über ortogonalpolynome, die-q-differenzenlgleichungen Genügen. *Mathemaische Nachrichten*, 2(1-2), 4-34.
- Hahn, W., (1983). Ein beitrag zur theorie der orthogonalpolynome. *Monatshefte für Mathematik*, 95(1), 19–24.
- Hamza, A. E. ve Ahmed, S. M., (2013). Existence and uniqueness of solutions of hahn difference equations. *Advances in Difference Equations*, 2013(1), 316.
- Hamza, A. E. ve Ahmed, S. A., (2013). Theory of linear hahn difference equations. *Journal of Advances in Mathematics*, 4(2), 440–460.
- Hamza, A. E. ve Makhareh, S. D., (2016). Leibniz's rule and fubini's theorem associated with hahn difference operator. *Journal of Advanced Mathematical*, 12(6), 6335–6345.
- Hira, F., (2018). Eigenvalues and eigenfunctions of q-dirac system. *Journal of Science and Arts*, 45(4), 963–972.
- Hira, F., (2019). Sampling theorem associated with q-dirac system. *Journal of Mathematics and Computer Science*, 9(2), 182–193.
- Hira, F., (2020). Dirac system associated with hahn difference operator. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 43(6), 3481–3497.
- Ismail, M.E.H., (2005). *Classical and quantum orthogonal polynomials in one variable, encyclopedia mathematics applied*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Jackson, F. H., (1908). On Q-functions and a certain difference operator. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh*, 46(2), 253–281.
- Jackson, F. H., (1910). Q-difference equations. *American Journal of Mathematics*, 32(4), 305–314.
- Jackson, F. H., (1910). On Q-definite integrals. *Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, 41, 193–203.
- Jagerman, D. L., (2000). *Difference equations with applications to queues*. New York: Marcel Dekker.
- Jordan, C., (1965). *Calculus of finite differences*. Chelsea, New York.
- Khol'kin, A. M., (1981). Self-adjoint boundary conditions at-infinity for a quasiregular system of even-order differential equations pp. 174-183 in: *Theory of operators in function spaces and its applications*, Naukova Dumka, Kiev
- Krein, M.G., (1947). The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded operators

- and its applications I, *Mathematics Sbornik* 20, 431-495; II, *Mathematics Sbornik* 21, 365-404.
- Krein, M.G., (1952). On the indeterminate case of the Sturm-Liouville boundary-value problem in the interval $(0, \infty)$, *Akademii Nauk SSSR. Serriya Matematicheskaya* 16, 292-324.
- Kwon, K. H., Lee, D. W., Park, S. B. ve Yoo, B. H., (1998). Hahn class orthogonal polynomials. *Kyungpook Mathematical Journal*, 38(2), 259–281.
- Kochubei, A. N., (1975). Extensions of symmetric operators and symmetric binary relations. *Matematicheskie Zametki*, 17(1), 41–48. English translation in *Mathematical Notes*, 17(1), 25–28.
- Kolmogorov, A. N. ve Fomin, S. V., (1970). *Introductory real analysis*. New York: Dover.
- Lesky, P., (2005). *Eine charakterisierung der klassischen kontinuierlichen-, diskreten- und q-orthogonalpolynome*. Aachen: Shaker.
- Levitan, B. M.ve Sargsjan, I. S., (1991). *Sturm-liouville and dirac operators*. Dordrecht: Kluwer.
- Naïmark, M. A., (1968). *Linear differential operators*. New York: Nauka.
- Rellich, F., (1951). Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung', *Mathematische Annalen* 122, 343-368.
- Patanarapeelert, N., Brikshavana, T. ve Sitthiwirattam, T., (2018). On nonlocal dirichlet boundary value problems for sequential caputo fractional hahn integrodifference equations. *Boundary Value Problems*, 2018(1), 6.
- Patanarapeelert, N. ve Sitthiwirattam, T., (2018). On nonlocal robin boundary value problems for riemann–liouville fractional hahn integrodifference equation. *Boundary Value Problems*, 2018(1), 46.
- Petronilho, J., (2007). Generic formulas for the values at the singular points of some special monic classical h_q, ω -orthogonal polynomials. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 205(1), 314–324.
- Philips, R.S., (1959). Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations', *Trans. Amer. Math. Soc.* 90, 193-254; (Russian transl. In *Matematika* 6:4 (1962)11-70).
- Rofe-Beketov, F. S., (1969). Self-adjoint extensions of differential operators in a space of vector valued functions. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 184(5), 1034–1037. English translation in *Soviet Mathematics - Doklady*, 10(1), 188–192.
- Sitthiwirattam, T., (2016). On a nonlocal boundary value problem for nonlinear second order hahn difference equation with two different q, ω -derivatives. *Advances in Difference Equations*, 2016(1), 116.

- Thaller, B., (1992). *The dirac equation*. Berlin: Springer
- Tuna, H. (2013). Lim-3 durumundaki 4. mertebe operatörlerin dissipatif genişlemeleri, *Nevşehir Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 2(2), 75-79.
- Tuna, H. ve Allahverdiev, B. P. (2018). Dissipative extensions of fourth order differential operators, *Thai Journal of Mathematics*, 16(1), 275-285.
- Tuna, H. ve Bayrak, S. (2018). On extensions of singular Fourth- Order Dynamic Operators on Time Scales. *Filomat*, 32(11), 3843–3851.
- Vishik, M.I., (1952). On general boundary-value problems for elliptic differential equations', *Trudy Moskov. Mathematical Obshch*, 1, 187-246.
- Von Neumann, J., (1929). Allgemeine eigenwerttheorie hermitescher funktionaloperatoren. *Mathematische Annalen*, 102(1), 49–131.
- Weidmann, J., (1987). *Spectral theory of ordinary differential operators*. Berlin: Springer.