



**ÇİZGE, DÜĞÜM ÇİZGESİ VE ÇİZGE
MATRİSLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER
VE UYGULAMALARI**

Melike AYDIN

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Ana Bilim Dalı**

Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

2024

Her hakkı saklıdır.



**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**ÇİZGE, DÜĞÜM ÇİZGESİ VE ÇİZGE MATRİSLERİ ARASINDAKİ
İLİŞKİLER VE UYGULAMALARI**

Melike AYDIN

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Ana Bilim Dalı: Matematik

Erzurum

2024

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

16/07/2024

İmzası

Melike AYDIN

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÇİZGE, DÜĞÜM ÇİZGESİ VE ÇİZGE MATRİSLERİ ARASINDAKİ İLİŞKİLER VE UYGULAMALARI

Melike AYDIN

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Çizge teori günümüzde veri analizi, bilgisayar bilimleri, elektrik elektronik gibi pek çok alanda kullanılmaktadır. Çizgelerin cebirsel temsili için komşuluk, yönlü komşuluk, derece, Laplacian gibi farklı metotlarla matrislerle eşlendiği bilinmektedir. Ayrıca yine pek çok alanda uygulaması olan düğümler göz önüne alındığında bu düğümlere Tait metoduyla çizgelerin eşlendiği de bilinmektedir. Bu çalışmada bu iki unsurun birleştirilmesi hedeflenmiştir. Yani ilk olarak bir düğüme karşılık gelen çizge ve bu çizgeye karşılık gelen matrisler ve tersi olarak bir matrise karşılık gelen çizge ve bu çizgeye karşılık gelen düğümü elde etmek hedeflenmiştir. Bu çalışmanın ilk iki bölümünde literatür bilgisi verilmiştir. Üçüncü bölümde, çizge ve düğüm ile ilgili temel kavramlar ve teoremlerden bahsedilmiştir. Dördüncü bölümde çizgelerden matris elde etme metotlarından bahsedilmiştir. Ayrıca bir düğümden Tait metoduyla çizgenin elde edilişi açıklanmıştır. Beşinci bölümde, bir düğümden düğüm çizgesi yardımıyla matrisin nasıl elde edileceği ve tersine bir matristen bu matrise karşılık gelen çizge yardımıyla düğümün nasıl elde edileceği gösterilmiştir. Ayrıca bu bölümde günlük hayatımızda karşımıza çıkabilecek problemlerin basit uygulamalarına yer verilmiştir. Altıncı ve son bölümde ise çizgelerin renklendirilmesi ile düğümlerin renklendirilmesi arasında bir ilişkinin olmadığı sonucu elde edilmiştir. Ayrıca $(2,n)$ tor düğümlerine karşılık gelen komşuluk ve yönlü komşuluk matrisleri formülize edilmiştir.

2024, 44 sayfa

Anahtar Kelimeler: Çizge, Düğüm çizgesi, Komşuluk matrisi, Yönlü komşuluk matrisi

ABSTRACT

MS. Thesis

RELATIONS AMONG THE GRAPH, KNOT GRAPH AND MATRICES OF GRAPH AND APPLICATIONS

Melike AYDIN

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Maths

Supervisor: Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI

Graph theory is used in many fields such as data analysis, computer science, electrical and electronics. It is known that graphs are mapped to matrices with different methods such as neighborhood, directed neighborhood, degree, Laplacian for algebraic representation. It is also known that graphs are mapped to knots using the Tait method, which has many applications in many fields. This study aims to combine these two factors. In other words, firstly, it is aimed to obtain the graph corresponding to a knot and the matrices corresponding to this graph, and conversely, to obtain the graph corresponding to a matrix and the knot corresponding to this graph. In the first two sections of this paper, literature information is given. In the third section, basic concepts and theorems about graphs and knots are introduced. In the fourth section, the methods of obtaining matrices from graphs are discussed. In the fifth section, it is shown how to obtain a matrix from a knot with the help of a knot graph and conversely how to obtain a knot from a matrix with the help of the corresponding graph. In addition, simple applications of problems that we may encounter in our daily lives are included in this chapter. In the sixth and last section, it is concluded that there is no correlation between the coloring of graphs and the coloring of knots. Moreover, the neighborhood and directional neighborhood matrices corresponding to $(2,n)$ tor knots are formulated.

2024, 44 pages

Keywords: Graph, Knot graph, Neighborhood matrix, Directional neighborhood matrix

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışma, Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde hazırlanmıştır.

Bu tez konusunda çalışmamı sağlayan, çalışmalarım ve bu tezin hazırlanışında yardımlarını esirgemeyen çok değerli hocam Prof. Dr. Ceren Sultan ELMALI'ya en içten dileklerle teşekkür ederek saygılarımı sunarım.

Bu çalışma sürecinde bilgi ve desteğini esirgemeyen Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Öğretim Üyesi değerli hocalarım Prof. Dr. Abdullah KOPUZLU ve Prof. Dr. Tamer UĞUR'a sonsuz teşekkürlerimi bildirmekten onur duyarım. Ayrıca benim eğitimim süresince ve bu tez aşamasında hiçbir zaman desteklerini esirgemeyen başta annem olmak üzere bütün aile fertlerime de teşekkür ederim.

Melike AYDIN
Temmuz 2024

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
1.GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. TEMEL KAVRAMLAR	8
3.1. Çizge ve Çizgeyle İlgili Temel Kavramlar	8
3.2. Çizgelerin Düzlemselliği.....	16
3.3. Çizgelerin Boyanması	21
3.4. Topolojik Kavramlar	22
4. MATERYAL ve YÖNTEM	27
4.1. Çizgelerin Matris Gösterimi.....	27
4.2. Düğüm Çizgesi.....	30
4.2.1. Düğüm çizgesinin elde edilişi	31
5. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA	33
5.1. Düğümünden Matris Elde Edilmesi	33
5.2. Matristen Düğümün Elde Edilmesi	34
5.3. Günlük Hayattaki Bazı Problemlere Karşılık Gelen Uygulamalar	35
6. SONUÇ ve ÖNERİLER	39
KAYNAKLAR	43

SİMGELER VE KISALTMALAR

<u>Simgeler</u>	<u>Açıklama</u>
C_n	Döngü çizge
$\hat{K}$	K düğümünün iz düşümü
$K_{m,n}$	2 parçalı çizge
K_n	n köşeli tam çizge
N_n	n köşeli boş çizge
$\mathbb{R}^3$	Üç boyutlu Öklid uzayı
S^1	1 – boyutlu küre
S^3	$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ şekilde oluşturulan uzay
$\chi(G)$	G çizgesinin kromatik sayısı
π	K düğümünün standart iz düşümü

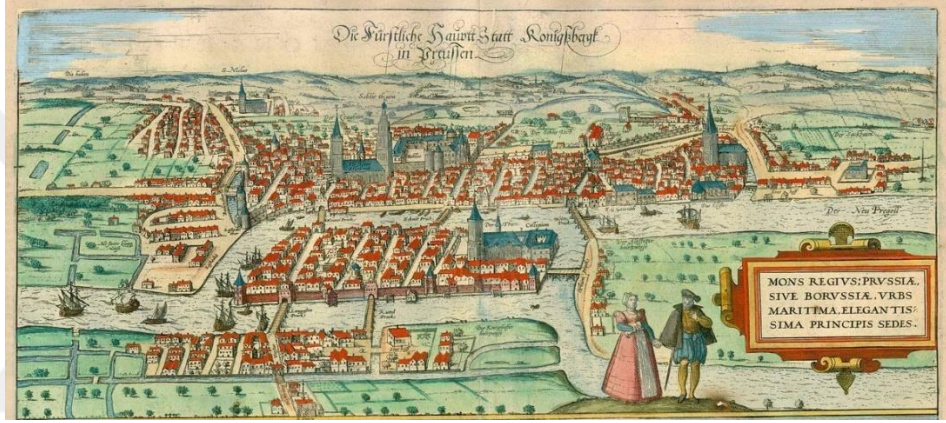
ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1. Königsberg'in kuşbakışı görünümü.....	1
Şekil 1.2. Pregel Nehri ve Yedi Köprüsü.....	2
Şekil 1.3. M.Ö. 1700'lerde bir Anadolu tüccarının damga mührü	3
Şekil 3.1. 5 köşeli, 4 kenarlı çizge	8
Şekil 3.2. İlmek	9
Şekil 3.3. Çoklu kenar bulunduran çizge	9
Şekil 3.4. Bir köşenin derecesini gösteren çizge	10
Şekil 3.5. m uzunluklu bir yürüyüş.....	10
Şekil 3.6. G çizgesinde yol, tur ve yürüyüşü gösteren çizge	11
Şekil 3.7. Basit çizge.....	11
Şekil 3.8. Çoklu çizge	12
Şekil 3.9. Pseudo çizge	12
Şekil 3.10. Bağlantılı ve bağlantısız çizge	12
Şekil 3.11. K_4 çizgesi.....	13
Şekil 3.12. K_3 çizgesi.....	13
Şekil 3.13. 2–dereceli G_1 ve G_2 çizgeleri	13
Şekil 3.14. İki parçalı çizge	14
Şekil 3.15. $K_{1,3}$ çizge	14
Şekil 3.16. Yönlü G çizgesi	14
Şekil 3.17. İzomorfik iki çizge.....	15
Şekil 3.18. Alt çizge.....	15
Şekil 3.19. Düzlemsel çizgeler.....	16
Şekil 3.20. Düzlemsel olmayan çizge	16
Şekil 3.21. Evler ve karşılarında yer alan doğalgaz, elektrik ve su kaynakları	16
Şekil 3.22. Üç tesisat problemine karşılık gelen çizge	17
Şekil 3.23. $K_{3,3}$ çizgesinin uzunluğu olan $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow u$ döngüsü	18
Şekil 3.24. K_5 düzlemsel olmayan çizge	18
Şekil 3.25. Homeomorfik iki çizge	19
Şekil 3.26. İzomorfik iki çizge.....	19
Şekil 3.27. G çizgesinin düzlemselliği.....	20

Şekil 3.28. Çizge ve çizge boyama örneği.....	21
Şekil 3.29. C_7 ve C_6 döngü çizgeler.....	22
Şekil 3.30. Düğüm ve iz düşümü.....	24
Şekil 3.31. Bir düğümün iz düşümü	24
Şekil 3.32. Bir iz düşüm üzerinde katlı noktalar.....	25
Şekil 3.33. Regüler diyagramlar	25
Şekil 3.34. Meridyen μ ve boylam λ	26
Şekil 3.35. Üçlü renklendirme kuralı.....	26
Şekil 4.1. Trefoil düğümü ve çizgesi	31
Şekil 4.2. Çizgeden düğüm elde etme.....	32
Şekil 5.1. Herhangi bir düğüm ve renklendirmesi	33
Şekil 5.2. Düğüme karşılık gelen çizge	33
Şekil 5.3. Matrise karşılık gelen çizge.....	35
Şekil 5.4. Çizgeden düğüm elde edilmesi.....	35
Şekil 5.5. 7 sıvıya denk gelen şekil.....	36
Şekil 5.6. Çizgenin renklendirilmesi.....	37
Şekil 5.7. Çizgeye denk gelen düğüm.....	37
Şekil 5.8. Aynı derse kayıtlı olan bir öğrencinin olup olmadığını gösteren şekil.....	38
Şekil 5.9. Şekil 5.8 yardımıyla elde edilen çizge ve bu çizgenin 4- renk ile boyanmış hali.	38
Şekil 6.1.5 ₁ düğümüne denk gelen yönlü çizge.....	39
Şekil 6.2. 7 ₁ düğümüne denk gelen yönlü çizge.....	40

1.GİRİŞ

Çağlar boyunca insanların merak ve keşfetme dürtüsü kendilerine her zaman yepyeni şeyler üretebilme yetisini doğurmuştur. Bugün hala popülerliğini koruyan ve birçok alanda kullanılan çizge teori de böyle bir merakın güzel bir sonucudur. Çizge teorisinin çıkış noktası şimdi Rusya’da Kaliningrad ismini alan Königsberg kentinin sakinleri olmuştur. Pregel Nehri şehrin içinden geçmektedir ve şehri dört parçaya ayırmaktadır. 18.yüzyıldaki haliyle Pregel Nehri şehri iki büyük adaya ayırmakta ve bu adalar Pregel Nehrinin kuzey ve güney kıyılarına yedi köprü ile birbirine bağlıdır.



Şekil 1.1. Königsberg’in kuşbakışı görünümü

Königsberg’liler pazar yürüyüşleri sırasında köprüleri sayısız defa geçerken kendilerine eğlence olsun diye bir bilmece sordular: Acaba yedi köprünün hepsini yalnızca bir kez geçmeyi içeren bir şehir turu yapabilir miydiler?

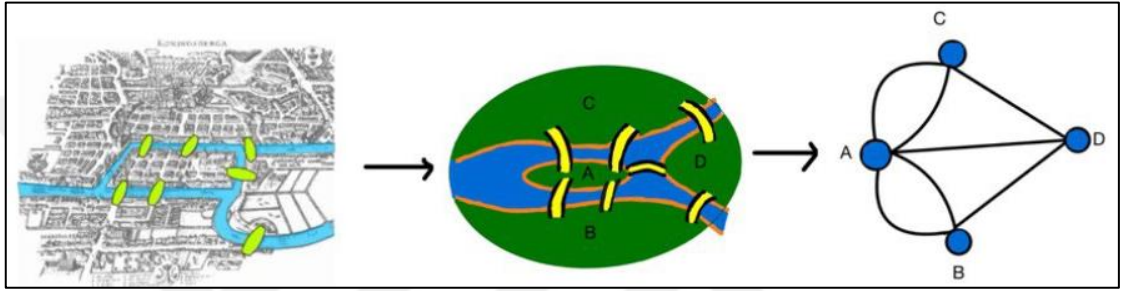
Bu soruya St.Petersburg’daki Euler çözüm üretene kadar hiç kimse bir cevap bulamamıştır. Euler, sorunun ne cebir ne sayma ile ilişkilendirebilmiş ancak geometri ile ilgili olabileceğini fark etmiş ve Leibniz’in konum geometrisi ile ilgisi olduğunu düşünmüştür.

Euler, Rusya St.Petersburg Fen Bilimleri Akademisine “Konum Geometrisi ile İlgili Bir Sorunun Çözümü” konulu bir konferans vermiştir ve yedi köprü arasında böyle bir tur yapılamayacağını ispat etmiştir. Euler, makalesinde içinde uzaklık ve ölçü

1. GİRİŞ

kavramı olmayan yepyeni bir geometriden söz etmiştir ve böylece topoloji ve çizge teorisinin kapılarını aralamıştır.

Euler, çözüme başlarken şehrin planı ve izlenilen yol seçiminin çözümle ilgisi olmadığını fark etmiştir. Önemli olan tek şey, nehrin hangi kıyısında olduğu veya hangi kara kütlelerinde olduğu ile ilgilidir. Böylece şehrin haritasını önemsemeden, kara kütlelerini köşelerle ve bunlar arasında köprüleri hatlarla göstererek Şekil 1.2'deki gibi düzenli bir çizgeye dönüştürmüştür.



Şekil 1.2. Pregel Nehri ve Yedi Köprüsü

Şekil 1.2'de gösterildiği gibi her bir köprü (yol) yalnızca bir defa geçilecekse, o zaman her bir kara kütlesi (köşe) kendisine bağlı çift sayıda bağlantıya sahip olması gerekir. Bunun nedeni ise gayet açıktır. Bir köşeden başlayan birinin aynı köşeye farklı bir bağlantıdan geri dönebilmesi için, bu köşeye dönen ayrı bir bağlantının olması gerekir. Yani bir köşeyi bir kez ziyaret ederseniz iki bağlantıya, iki kez ziyaret ederseniz dört bağlantıya ihtiyaç vardır. Kendilerine tek sayıda bağlantıya sahip olan köşeler yürüyüşün başladığı ve bittiği köşelerdir.

Şekil 1.2'ye bakarak böyle bir yürüyüşün gerçekleşemeyeceği anlaşılabilir. Her düğüme tek sayıda bağlantı vardır. Burada esasen Euler her bağlantıdan tam olarak bir kez geçerek bir çizgede gezinme olasılığının, düğümlerin bağlı olduğu bağlantı sayısına bağlı olduğunu göstermiştir. Eğer B ya da D köşesi çift bağlantıya sahip olsaydı böyle bir tur mümkün olabilirdi. Euler'in bu yaklaşımı ne kadar karmaşık olursa olsun her çizge için kullanışlıdır.

İnsanlık tarihi boyunca hayatı kolaylaştıran bir yöntem olarak kullanılmış düğümler ise çizgelerden daha eski bir geçmişe dayanır. Düğümlerin insan hayatındaki

önemi neredeyse her alanda kendini göstermiştir. Özellikle zamanı belirleme, hesaplamalar tutma, köprü ve ev yapımı, balık tutmak için ağ yapımında düğümler kullanılmıştır. Bilinen en eski düğüm örneği Şekil 1.3'te gösterildiği gibi Anadolu'da yaşamış bir tüccarın Mezopotamyalılarla yapmış olduğu ticaret sırasında kullanmış olduğu mühür söylenebilir. Günlük hayatta olduğu gibi düğümler çeşitli hikayeler ve sembolizm alanında da rastlanır.

Örneğin; Fatih Sultan Mehmet'in kavuğundaki tor düğümleri görülebilir. Benzer şekilde Budizm'in sembolü olarak kullanılan 7_4 düğümüdür. Düğümler efsanelere de konu olmuştur. Frigya kralı Gordious'un attığı düğüm "Gordion Düğümü" olarak isimlendirilir ve düğümü çözenin Asya'nın hükümdarı olacağına inanılır. Düğümler aynı zamanda sanatta da kullanılır. Türk düğümü olarak bilinen "Gördes Düğümü" halı dokumada kullanılan bir düğüm çeşididir. Bu kadar insanlıkla iç içe olan düğümlerin elbette matematiksel olarak çalışma alanı da olmuştur. Düğüm teorisi, topolojinin önemli bir alt alanı olarak günümüzde çok önemli çalışmalarla popüleritesini korumaktadır.



Şekil 1.3. M.Ö. 1700'lerde bir Anadolu tüccarının damga mührü

Bu tezde çizge teoriyle ilgili temel kavramlar verildikten sonra, çizge teori, düğüm çizgeleri ve matrisler arasındaki ilişkiler incelenecektir. Literatür özetinden de anlaşılacağı üzere çizgelere çeşitli yollarla matrisler eşlenmektedir. Ayrıca, topolojik olarak önemli bir yere sahip olan düğümlere de Tait metoduyla çizgeler karşılık gelmektedir. Bu çalışmada temel olan düşünce ise bu iki ana unsuru birleştirmektedir.

1. GİRİŞ

Yani, bir düğüme karşılık matrisi elde ederek düğümlere bir matris karşılık getirmek hedeflenmiştir.



2. KAYNAK ÖZETLERİ

Çizge teorisindeki birçok gelişme belirli problemleri çözme teşebbüsünün bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Euler (1736), “Köningsberg Köprüleri” ile çizge teorisinin temellerini atmıştır. Silvester (1822), çizge sözcüğünü kullanan ilk kişidir. Kirchhoff (1845), elektrik devrelerinde akım ve gerilim hesabı üzerine oluşturduğu meşhur kuramları yayımlamıştır. Guthrie (1852), meşhur dört renk problemini ortaya atmıştır. Problem uzun süre çözülememiş Londralı bir avukat olan Kempe (1879) bu probleme yönelik doğru olduğu kabul edilen bir ispat vermiştir. Ancak Heawood (1890), Kempe’nin hatasını bulmuş ve 5 renk teoremini elde edebilecek kadar göstermiş, problemi diğer yüzeylere genellemiştir. Illinois Üniversitesi’nden Appel and Haken (1976) tarafından dört renk teoremi ispatlanmıştır. Uzun süreli bilgisayar ortamında süren hesaplamalar sonucunda harita renklendirmesinde dört rengin gerekli ve yeterli olduğunu kanıtlamışlardır. Bu ispat, bilgisayarların grafiksel hesaplamalarının önemli bir örneği olarak kabul edilir. 20. yüzyılda ise çizge teorisi, bipartite çizgeler ve eşleştirme problemleri gibi önemli konuları kapsamıştır. Özellikle matematiksel modelleme, işe alım problemleri ve ağ akışı problemleri gibi uygulamalı alanlarda büyük öneme sahip olmuştur. Günümüzdeki popülaritesinin en önemli nedeni, kendi başına zarif bir matematik disiplini olmasının yanı sıra, çizge teorisinin sosyal ağ analizi, bilgisayar bilimi, özellikle internet ve sosyal medyanın yükselişiyle birlikte çizge teorisi algoritmaları ve kavramları, veri analizi, veri madenciliği ve makine öğrenimi gibi alanlarda temel kullanım aracı haline gelmiştir (Biggs et al. 1986).

Çizgelerin matrislerle eşlenmesi (matris temsili) ise çizge teorisinin önemli bir çalışma alanı olmuştur. Bir çizgeyi matrisle gösterebilmek çizgelerin cebirsel temsili için uygun araçlar olmuştur. Çizge problemlerinin analizini yapmada matris temsili hem teorik hem de uygulamalı alanlarda oldukça kullanışlıdır. Çizgelerin matris temsili üzerine ilk çalışmalar yapan ve özellikle determinant ve matrislerle ilgilenen Sylvester olmuştur. Sylvester (1840), çizgelerin temsili için temel kuralları belirlemiştir. Cayley (1850), çizge teori ve matris arasındaki ilişkiye dair çalışmalar yapmıştır. 19. yüzyılın sonlarında ise, komşuluk matrisi çizgelerin matrislerle temsili için en çok kullanılan matris olmuştur. Komşuluk matrisi, bir çizgenin düğümleri arasındaki bağlantıları ikili

(0 veya 1) değerlerle temsil eder. 20.yüzyılın başlarında Laplace matrisi ,çizgelerin yapısal özelliklerini analiz etmede kullanılmıştır.

Tutte (1950), çizgelerin matris gösterimi üzerine önemli katkılarda bulunmuş ve “Tutte polinomu” olarak bilinen ve çizgelerin matris temsili hakkında bir polinom kazandırmıştır. 20. yüzyılın ortalarında çizge matrislerinin bilgisayar uygulamalarında, ağ analizi ve algoritma geliştirmede kullanılması çok önemli bir gelişme olmuştur. 20. yüzyılın sonlarında çizgelerin spektral teorisi ve matris temsilleri çizgelerin yapısal özellikleriyle nasıl bağlantılı olduğu araştırılmıştır. Günümüzde ise çizgelerin matrislerle eşlenmesi, matematiksel araştırmalar başta olmak üzere bilgisayar biliminde algoritmaların geliştirilmesinde büyük ölçekli ağların analizinde, sosyal ağ analizlerinde, makine öğreniminde ve veri bilimi alanlarında yaygın şekilde kullanılmaktadır (Harary 1969).

Düğüm teorisi, matematiksel anlamda ise geometrik topolojinin alt dalı olarak çalışır. İlk olarak düğümlerin izine Vondermonde (1771) yayınladığı bir makalesinde rastlanmıştır. Vondermonde, düğümleri konumların geometrisi ile ilişkilendirmiştir. Uzaklıkla ilgilenmemiş, büyük ölçüde anlamaya çalıştığı şey konum ve konum özellikleri olmuştur. Gauss (1833), düğümlerin ve düğümlerden oluşan bağların bağlanma sayısını integral yardımıyla tanımlamıştır ve bu düğümlerin ilk değişmezi olarak bilinmektedir. Thomson (1867), atomların düğüm benzeri yapılar olduğunu öne sürmüş ve dönemin matematik ve fizikçileri düğüm teorisi üzerine çalışmalar yapmıştır.

Tait (1876), düğümleri sınıflandırmak için ilk sistematik çalışmaları yapmıştır. 10 geçide kadar olan tüm düğümleri sınıflandırmış ve tablo oluşturmuştur. Bunu yaparken ki inancı, aynı zamanda elementlerin bir tablosunu oluşturduğu düşüncesinden kaynaklanmıştır. Düğümlerin regüler iz düğümleri 2- boyutlu S küresini her biri açık bir diske homeomorf birkaç bölgeye böler. Düğüm teorisi çalışmalarında, bu bölgeleri, Tait metodu da denilen siyah beyaz ya da bölge-bölgesiz gibi ifadelerle iki farklı sınıfa ayıran bir metot kullanılır. Bunu literatüre ilk olarak kazandıran Bankwitz (1930) olmuştur (Thurston 1997).

Niven (1883), düğümlerin topolojik sınıflandırmasında katkıda bulunmuştur. Bu çalışmalar düğüm teorisinin sistematik bir şekilde gelişmesini sağlamıştır. Maxwell (1899), düğüm teorisinin mekani ve elektromanyetik teoriye uygulanması üzerine çalışmıştır (Adams 2004).

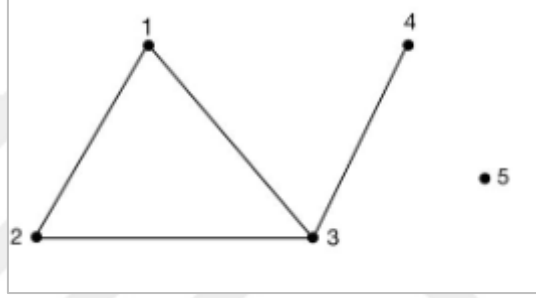
Artin (1920), düğüm teorisi üzerinde uygulamaları üzerinde çalışmıştır. Alexander (1923), her düğümün kapalı bir örgü tarafından temsil edileceğini kanıtlamıştır. Düğümler için ilk polinom değişmezi olan Alexander polinomunu tanımlamıştır. Bu polinom düğümlerin matematiksel analizinde önemli bir yer tutmuştur. Reidemeister (1927), düğüm teorisinin topolojik temelini güçlendiren üç temel hareketi tanımlamıştır. Weyl (1930), düğüm teorisinin topolojik ve geometrik temellerini genişleten önemli çalışmalar yapmış ve 3-boyutlu uzayda kolaylıkla çalışılmasını sağlamıştır. Fox (1954), düğümlerin homolojik özelliklerini incelemiştir. Conway (1956), düğümlerin sınıflandırmasını kolaylaştırmıştır. Kodaira (1957), düğüm teorisinin diferansiyel topoloji ile ilişkisini incelemiştir. Haken (1960), bir düğümün aşikâr olup olmadığını belirleyen bir algoritma bulmuştur. Whitehead (1960), düğüm teorisinin geometrik yapısını inceleyen çalışmalar yapmıştır. Jones (1984), “Jones polinomu”nu tanımlamış, bu polinom başta Kaufman Braket polinomu, Homfly polinomu olmak üzere birçok düğüm polinomlarının temelini oluşturmuş ve Jones (1990), bu çalışmaları nedeniyle Fields madalyası almıştır. Thurston (1980), hiperbolik düğümlerin geometrik yapısı üzerine çalışmalar yapmıştır. Witten (1990), Kuantum alan teorisine Jones polinomu ilişkilerini tarif etmiştir. Kontsevich (1994), düğüm bağ değişmezini ortaya koymuştur. Gauss ’un bağlanma sayısını genellemiştir. 20. yüzyılın sonlarında ise düğüm teorisinin biyoloji, fizik, kimya alanları ve uygulamalarıyla ilgili çalışmalar artmıştır. Günümüzde ise düğüm teorisi hem matematikte hem de uygulamalı bilimlerde aktif olarak çalışılan bir araştırma alanıdır. DNA yapısı, genetik, bilgisayar, algoritmaları gibi çeşitli konularda düğüm teorisinin uygulamaları vardır (Livingston 1993).

3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde tez için gerekli olan temel kavramlar ve gösterimler verilecektir.

3.1. Çizge ve Çizgeyle İlgili Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1: Elemanları köşe olarak adlandırılan sonlu, boştan farklı $V = \{1, 2, \dots, n\}$ köşeler kümesi ve elemanları kenarlar olarak isimlendirilen sonlu E kenarlar kümesinden oluşan (V, E) ikili yapısına çizge denir ve $G = (V, E)$ ile gösterilir (Büyükköse vd 2021).



Şekil 3.1. 5 köşeli, 4 kenarlı çizge

Şekil 3.1'deki çizgenin köşeleri; $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ve çizgenin kenarları;

$$E = \{(1,2), (1,3), (2,3), (3,4)\}$$

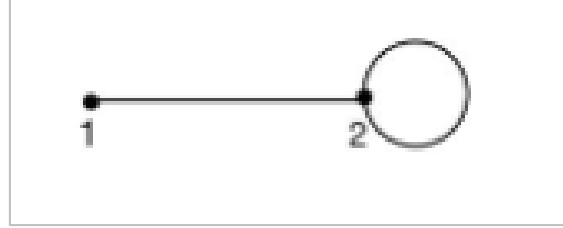
kümesidir.

Tanım 3.1.2: G çizgesinin iki köşe noktaları arasında bir kenar varsa bu iki köşe noktalarına komşu köşe noktaları denir. İki kenarın ortak bir köşe noktası varsa eğer bu kenarlara da bitişik kenarlar denir (Büyükköse vd 2021).

Şekil 3.1'de 1 köşesinin komşuları 2 ve 3 köşeleri iken, 4 köşesi komşusu değildir. Benzer şekilde (1,2) kenarıyla (1,3) kenarı bitişik kenarlardır.

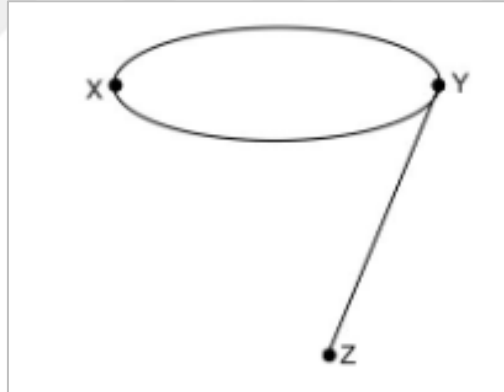
Tanım 3.1.3: Kenar bağlantısı olmayan köşeye ayrık (izole) nokta denir. Şekil 3.1’de 5 köşesi ayrık köşe noktasıdır (Büyükköse vd 2021).

Tanım 3.1.4: Başlangıç ve bitiş noktası aynı olan kenar ilmek olarak isimlendirilir. Şekil 3.2’de 2 köşesinde bir ilmek vardır (Büyükköse vd 2021).



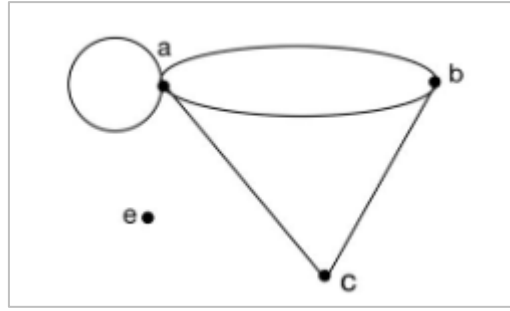
Şekil 3.2. İlmek

Tanım 3.1.5: Başlangıç ve bitişi aynı köşeler olan kenarlara paralel veya çoklu kenarlar denir (West 2005).



Şekil 3.3. Çoklu kenar bulunduran çizge

Tanım 3.1.6: $G = (V, E)$ çizgenin herhangi bir i köşesine bağlı kenar sayısına i köşesinin derecesi denir ve $d(i)$ şeklinde gösterilir (Gross and Yellen 2017).



Şekil 3.4. Bir köşenin derecesini gösteren çizge

Şekil 3.4'te $d(a) = 5$, $d(b) = 3$, $d(c) = 2$, $d(e) = 0$ dır.

En büyük çizge derecesi ise çizgenin derecesidir. Şekil 3.4'te çizgenin derecesi 5'tir.

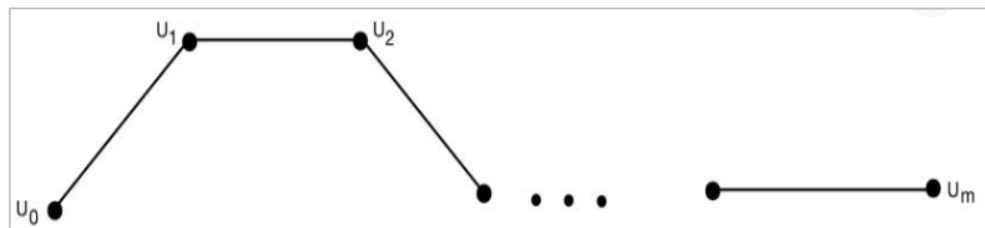
Tanım 3.1.7: Bir G çizgesinin mertebesi köşe sayısı kadardır. $|V(G)|$ ile gösterilir. Bu çizgenin boyutu ise kenar sayısı kadardır. $|E(G)|$ ile gösterilir.

Şekil 3.4'te çizgenin mertebesi 4 ve boyutu 5 tir (Gross and Yellen 2017).

Tanım 3.1.8: Bir $G = (V, E)$ çizgesinde $U_0, U_1, \dots, U_m \in V$ olmak üzere,

$$U_0 \ U_1, U_1 \ U_2, \dots, U_{m-1} \ U_m$$

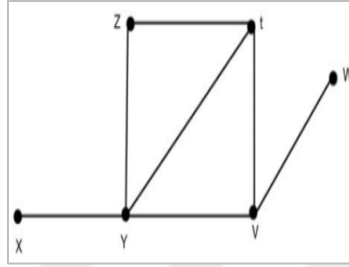
şeklinde ardışık kenarlar bitişik veya aynı olacak biçimdeki kenarların sonlu dizisine G içinde U_0 ve U_m köşelerini birleştiren bir yürüyüş denir (Diestel 2000).



Şekil 3.5. m uzunluklu bir yürüyüş

Tanım 3.1.9: G çizgesinde bir yürüyüşün tüm kenarları farklı ise bu yürüyüşe bir tur denir. Eğer turun köşe noktaları da farklıysa o zaman bu tura yol denir.

Son olarak yürüyüş, turun başlangıç ve bitiş noktaları aynı ise bu yürüyüş ve tura sırasıyla kapalı yürüyüş ve kapalı tur denir (Diestel 2000).

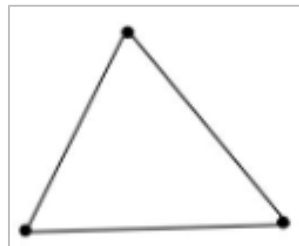


Şekil 3.6. G çizgesinde yol, tur ve yürüyüşü gösteren çizge

Şekil 3.6.'da xy , yz , yv , kenarları $(x \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow v)$ bu çizge içinde x köşesinden v köşesine bir yürüyüş olur. Bu yürüyüşte yz iki kez kullanıldığından bu yürüyüş bir tur değildir. xy , yt , tv , vw kenarları $(x \rightarrow y \rightarrow t \rightarrow v \rightarrow w)$ farklı olduğundan bu x ve w köşelerini birleştiren tur olur. t köşesi iki kez kullanıldığından bir yol olamaz. xy , yz , zt , tv kenarları $(x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow t)$ her bir köşe noktası farklı olduğundan x ve v köşelerini birleştiren bir yol olur.

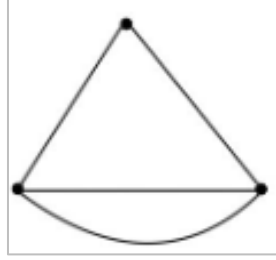
Tanım 3.1.10: $n \geq 3$ olmak üzere n tane $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ köşeden ve $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}$ kenarlarından oluşan çizgeye döngü çizge denir ve C_n ile gösterilir (Büyükköse vd 2021).

Tanım 3.1.11: Bir çizgede çoklu kenar ve ilmek bulunmuyorsa bu çizgeye basit çizge denir (Diestel 2000).



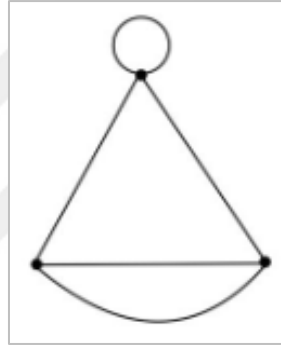
Şekil 3.7. Basit çizge

Tanım 3.1.12: İki köşe arasında birden fazla kenar bulunan kısaca çoklu kenar içeren çizgeye çoklu çizge denir (Büyükköse vd 2021).



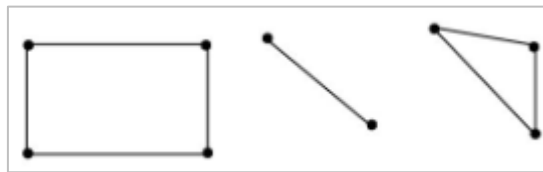
Şekil 3.8. Çoklu çizge

Tanım 3.1.13: Çoklu kenar ve ilmek içeren çizgeye pseudo çizge denir (Büyükköse vd 2021).



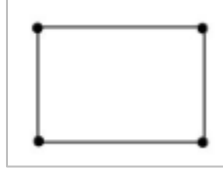
Şekil 3.9. Pseudo çizge

Tanım 3.1.14: Bir G çizgesinde bir köşeden başka bir köşeye gidilebiliyorsa bu G çizgesine birleştirilmiş veya bağlantılı, aksi halde bağlantısız çizge denir (West 2005).



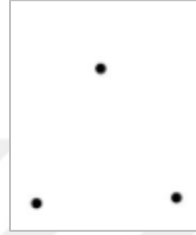
Şekil 3.10. Bağlantılı ve bağlantısız çizge

Tanım 3.1.15: Basit bir çizgenin herhangi iki köşesi arasında bir kenar bulunuyorsa kısaca her bir köşe çifti bağlantılı ise bu çizgeye tam çizge denir ve n düğümlü bir çizge K_n ile gösterilir (Chartrand and Zhang 2012).



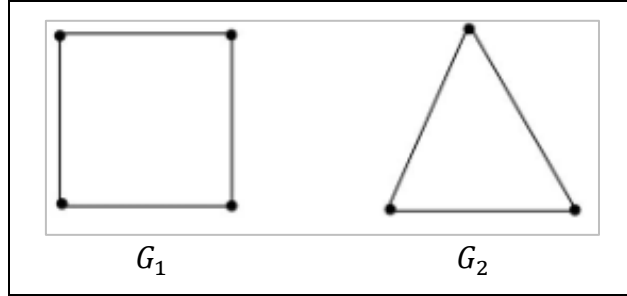
Şekil 3.11. K_4 çizgesi

Tanım 3.1.16: Sadece izole nokta içeren çizgeye boş çizge denir ve n köşeli bir boş çizge N_n ile gösterilir. Boş çizgenin kenarlar kümesi boştur (Büyükköse vd 2021).



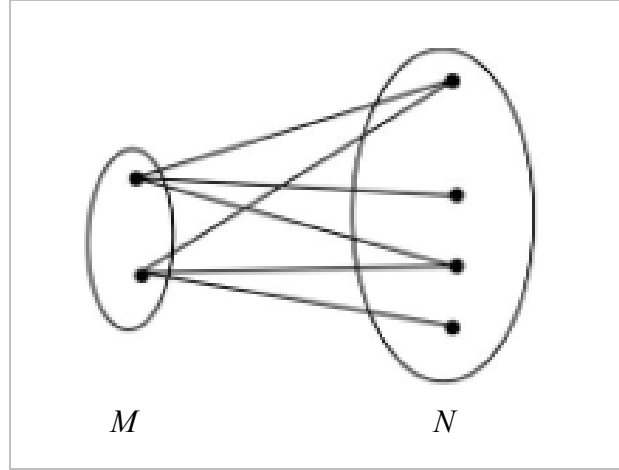
Şekil 3.12. N_3 çizgesi

Tanım 3.1.17: Her bir köşesi aynı dereceye sahip olan çizgeye regüler çizge denir. Eğer her bir noktası k dereceye sahipse özel olarak k – dereceli çizge denir (Aldous and Wilson 2003).



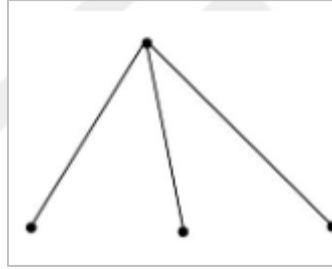
Şekil 3.13. 2–dereceli G_1 ve G_2 çizgeleri

Tanım 3.1.18: Çizgenin köşeler kümesi, her bir köşesi aynı kümedeki diğer köşeler ile komşu olmayacak şekil M ve N gibi iki ayrık kümeye bölünebiliyorsa bu çizgeye iki parçalı çizge denir. İki parçalı çizge $M \cap N = V$ olmak üzere $G = (M, N, E)$ şeklinde gösterilir (Diestel 2000).



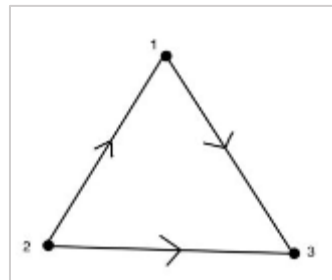
Şekil 3.14. İki parçalı çizge

Tanım 3.1.19: $|M| = m$ ve $|N| = n$ olmak üzere $G = (M, N, E)$ iki parçalı çizge için her $i \in M$ köşesinin derecesi $d_i = n$ ve her $j \in N$ köşesinin derecesi $d_j = m$ oluyorsa bu çizgeye iki parçalı tam çizge denir ve $K_{m,n}$ ile gösterilir (Büyükköse vd 2021).



Şekil 3.15. $K_{1,3}$ çizge

Tanım 3.1.20: Bir G çizgenin her bir kenarına yön verilerek oluşturulan çizgeye yönlü çizge denir. Yön, başlangıç noktasından bitim noktasına doğru verilir (Diestel 2000).



Şekil 3.16. Yönlü G çizgesi

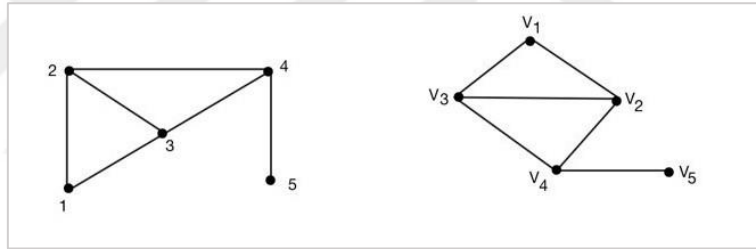
G çizgesinin köşeler ve kenarlar kümesi sırayla $V = \{1,2,3\}$, $E = \{\{2,1\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$ dir.

Tanım 3.1.21: $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki çizge olsun. G_1 ve G_2 çizgelerinin köşeleri ve kenarları arasında onların özelliğini koruyacak şekilde 1-1 dönüşüm varsa, G_1 ve G_2 çizgelerine izomorfik çizgeler denir ve $G_1 \cong G_2$ ile gösterilir (Büyükköse vd 2021).

Bu tanıma göre $f: V_1 \rightarrow V_2$ çizge izomorfizmi ise

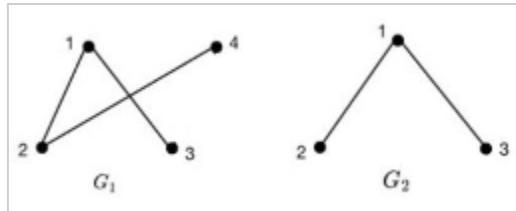
i) f , 1-1 ve örten

ii) $\{a, b\} \in E_1$ olacak şekilde $\forall a, b \in V_1$ için $\{f(a), f(b)\} \in E_2$ dir.



Şekil 3.17. İzomorfik iki çizge

Tanım 3.1.22: $G = (V, E)$ çizgenin içerdiği bazı köşeler ve kenarlardan oluşan çizgeye G 'nin alt çizgesi denir. $G_1 = (V_1, E_1)$ ve $G_2 = (V_2, E_2)$ iki çizge olmak üzere eğer $V_2 \subseteq V_1$ ve $E_2 \subseteq E_1$ oluyorsa G_2 çizgesine G_1 'in bir alt çizgesi denir (Diestel 2000).

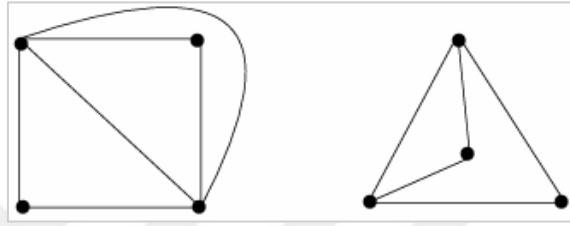


Şekil 3.18. Alt çizge

3.2. Çizgelerin Düzlemselliği

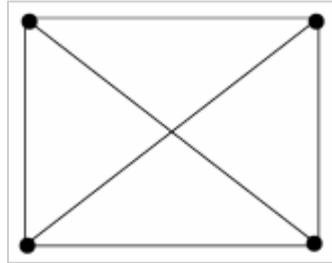
Düzlemsel çizgeler günlük hayatta da karşılaşılan problemlerin çözümünde rahatlıkla kullanılabilir.

Tanım 3.2.1: Düzlem üzerinde kesişmeler olmadan çizilebilen çizgelere düzlemsel çizge denir. Geometrik olarak her ikisinin de bitişik olduğu bir köşe dışında iki kenarın kesişmediği çizgedir (Akyar 2021).

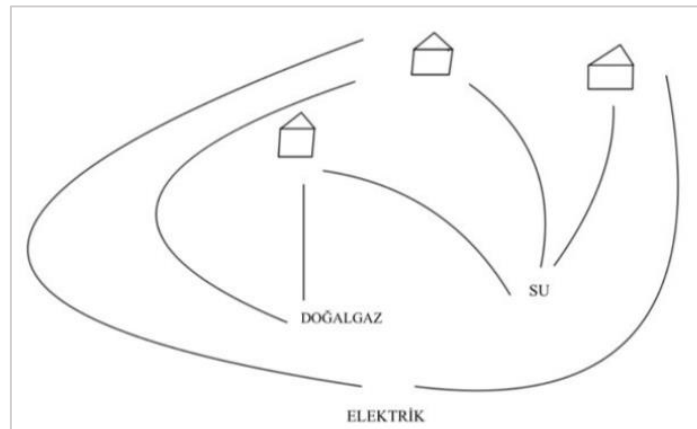


Şekil 3.19. Düzlemsel çizgeler

Düzlemsel çizgeler olduğu gibi düzlemsel olmayan çizgeler de vardır.



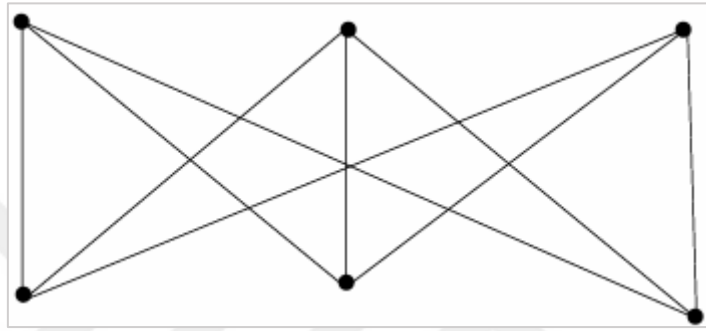
Şekil 3.20. Düzlemsel olmayan çizge



Şekil 3.21. Evler ve karşılarında yer alan doğalgaz, elektrik ve su kaynakları

Şekil 3.21’de verildiği gibi üç ev ve bu evlerin karşısında da doğalgaz, elektrik, su kaynakları yer almaktadır. Her bir ev birbiriyle karşılaşmayı istemediği için evlerinden bu üç kaynağın her birine birbirleriyle kesişmeyen yollar yapmak istiyorlar. Bu mümkün müdür?

Bu problem çizge teorisinin kavramıyla ifade edilebilir. Evler ve kaynaklar çizgenin köşeleri yolları da kenarları olarak düşünülürse aşağıdaki çizge çizilir.



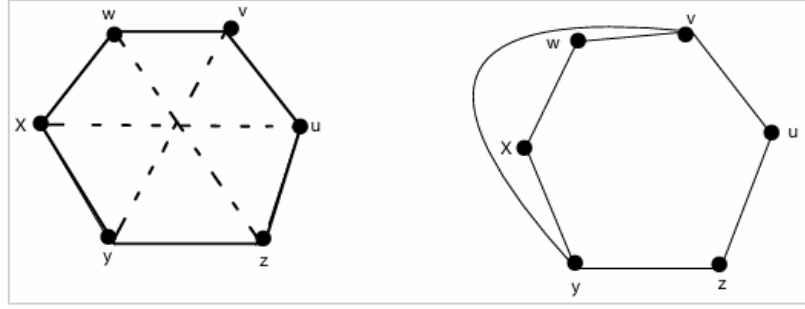
Şekil 3.22. Üç tesisat problemine karşılık gelen çizge

Şekil 3.22’ye karşılık gelen $K_{3,3}$ çizgesi olup düzlemsel çizge değildir. Bu nedenle verilen üç tesisat probleminin çözümü mümkün değildir. $K_{3,3}$ çizgesinin düzlemsel çizge olmadığı geometrik bir yaklaşımla gösterilsin.

Teorem 3.2.1: $K_{3,3}$ düzlemsel çizge değildir.

İspat: Teoremin kanıtı geometrik yaklaşımla gösterilecektir. İlk olarak $K_{3,3}$ ’ün düzlemsel olduğu kabul edilsin. $K_{3,3}$ uzunluğu 6 olan bir döngü bulundurur.

Bu döngü $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow u$ şeklinde gösterilirse şekil 3.23’te gösterildiği gibi düzlemde altıgen olarak çizilebilir.

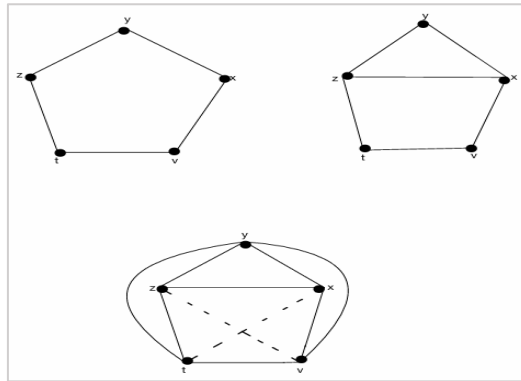


Şekil 3.23. $K_{3,3}$ çizgesinin uzunluğu olan $u \rightarrow v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow u$ döngüsü

$K_{3,3}$ çizgesinde her köşenin derecesi 3 olup, çizgenin 9 kenarı vardır. Çizge düzlemsel kabul edildiğinden eksik kalan kenarlar da birbiriyle kesişmeden çizilmelidir. Çizgenin ux kenarı için iki seçenek söz konusudur.

- ux kenarı altıgenin içinde kalır. Bu durumda çizge düzlemsel olarak kabul edildiğinden vy kenarının (ux kenarı ve diğer kenarlarla kesişmemesi için) altıgenin tamamen dışında olması gerekir. Bu durumda da wz kenarının diğer kenarlarla kesişmeden çizilebilmesi mümkün olmaz. Bu ise $K_{3,3}$ çizgenin düzlemsel olmasıyla çelişir.
- ux kenarı altıgenin tamamen dışında kalır. Bu durumda benzer olarak vy kenarının altıgeninin tamamen içinde kalması gerekir. Ancak bu kez wz kenarının diğer kenarlarla kesişmeden çizilebilmesi mümkün değildir.

Böylece $K_{3,3}$ çizgesi düzlemsel çizge olamaz. Benzer şekilde K_5 çizgesi de düzlemsel değildir.

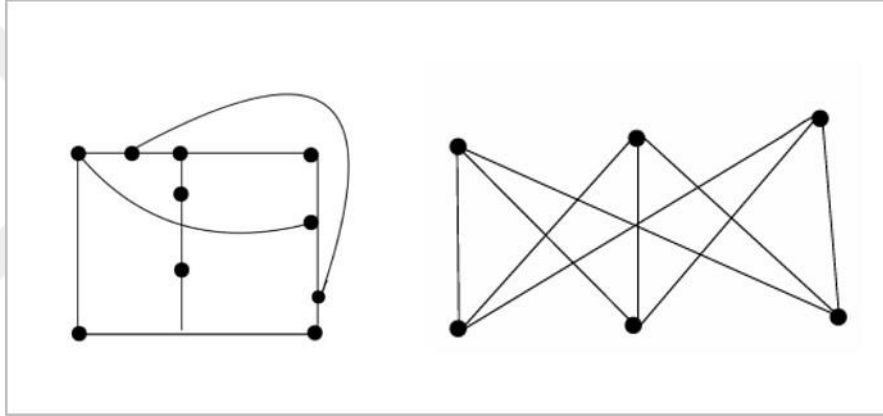


Şekil 3.24. K_5 düzlemsel olmayan çizge

3. TEMEL KAVRAMLAR

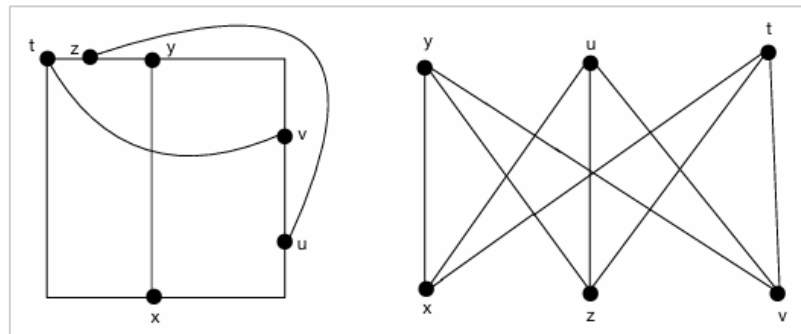
Düzlemsel bir çizgenin her alt çizgesinin de düzlemsel olacağı ve düzlemsel olmayan bir alt çizgeye sahip bir çizgenin de düzlemsel olamayacağı açıktır. $K_{3,3}$ ve K_5 'i alt çizge olarak içeren çizgeler düzlemsel olmayacağı açıktır. Bu iki çizge, düzlemsel olmayan çizgelerin temel yapıtaşlarıdır çünkü düzlemsel olmayan herhangi bir çizge, bu iki çizgeden en az birini içermek zorundadır.

İki çizge verildiğinde bu çizgelerden birine derecesi 2 olan yeni köşe noktalar eklenerek ya da derecesi 2 olan köşe noktalar silinerek diğerine izomorfik hale getirilebiliyorsa bu çizgelere homeomorfik çizgeler denir. Burada derecesi 2 olan köşe noktalar silinirken bu köşe noktaların bağlı olduğu kenarlar çizgeden silinmeyip, birbirine yapıştırılmaktadır.



Şekil 3.25. Homeomorfik iki çizge

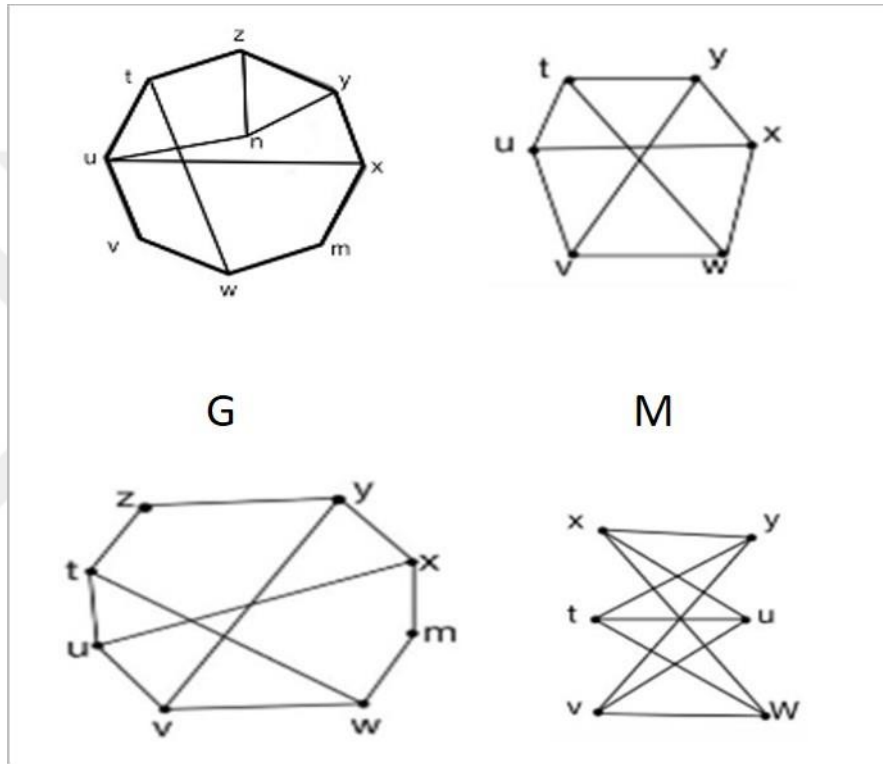
Şekil.3.25 ile verilen çizgelerden soldaki çizgenin derecesi 2 olan tüm köşe noktaları silinirse ve geriye kalan derecesi 3 olan köşe noktalar şekil 3.26 ile gösterildiği gibi isimlendirilecek olursa iki çizge birbirine izomorfik olur.



Şekil 3.26. İzomorfik iki çizge

Teorem 3.2.2: (Kuratowski Teoremi) Bir çizgenin düzlemsel olması için gerek ve yeter koşul K_5 veya $K_{3,3}$ çizgilerine homeomorfik olan bir alt çizge bulundurmamasıdır (Akyar 2021).

Teoremin ispatı oldukça uzun olduğu için ispata burada yer verilmeyecektir. Ancak bu teoremle verilen herhangi bir çizgenin düzlemsel olup olmadığını kolaylıkla görülebilir.



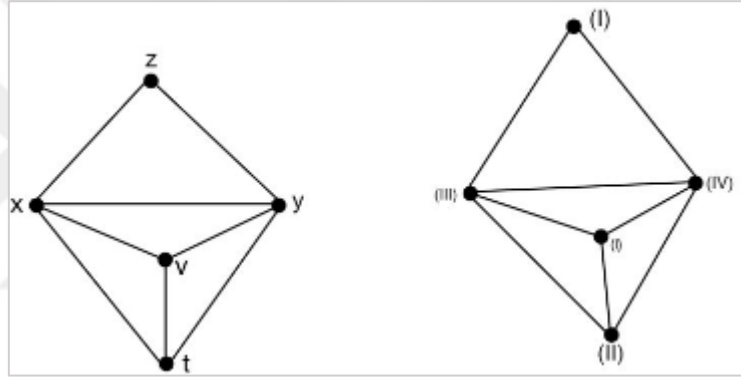
Şekil 3.27. G çizgesinin düzlemselliği

Şekil 3.27’de verilen G çizgesi düzlemsel bir çizge değildir. G çizgesinin n köşe noktası ve bu köşe noktasına bağlı olan kenarlar silinerek elde edilen alt çizge M ile gösterilecek olursa, M ile $K_{3,3}$ çizgesi homeomorfik olur. Gerçekten, M çizgesinin derecesi 2 olan tüm köşe noktaları silinecek olursa geriye 6 köşe noktalı, $K_{3,3}$ çizgesine izomorfik olan alt çizge kalır. Kuratowski teoremine göre düzlemsel çizge değildir.

3.3. Çizgelerin Boyanması

Çizgeleri boyamak; çatışma, anlaşmazlık gibi durumları içeren problemleri kolaylıkla çözmemizi sağlar. Çizgelerin köşe noktaları belli bir kurala göre boyanarak, boyandığı renge göre gruplandırılır, aynı grupta olan köşe noktalar çatışan nesneleri temsil eden köşe noktalar olacaktır.

Tanım 3.3.1: Bir G çizgesi ilmek içermeyen ve komşu köşeler farklı olacak şekilde her köşeyi k renkle boyanabiliyorsa G çizgesi k – boyanabilirdir. Eğer G çizgesi k -boyanabilir fakat $(k-1)$ – boyanabilir değilse G çizgesi k – kromatik denir ve $\chi(G) = k$ ile gösterilir (Akyar 2021).



Şekil 3.28. Çizge ve çizge boyama örneği

Şekil 3.28’de verilen G çizgesi 4 – renk boyanabilir bir çizgedir. x, y, v, t köşeleri ikişer ikişer komşu olduğundan 3 – renk ile komşu noktalar farklı renklerde boyanamaz. Bu sebeple $\chi(G) = 4$ olur.

Eğer G çizgesi k – renk boyanabilirse köşelerin sayısı yeterliyse $(k+1)$ – renkte boyanabilir. Şekil 3.28’de çizge 5 renk boyanabilir.

Teorem 3.3.1: G çizgesinin tüm köşe noktalarının derecelerinin en büyüğü

Δ ise G grafi $(\Delta + 1)$ – renk ile boyanabilir.

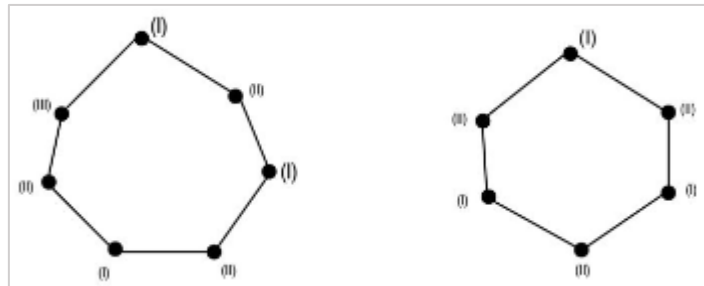
İspat: G çizgesinin köşe sayısı üzerinden tümevarımla yapalım. G , n köşeli basit bir çizge olsun $n=1$ ise $\Delta=0$ olup doğruluğu açıktır. Kabul edelim ki, n 'den daha az olan çizgeler için teorem doğru olsun. Herhangi bir U köşesini ve ona bağlı kenarları silerek kalan çizge $(n-1)$ köşeli çizge, komşu köşeler farklı olacak şekilde $(\Delta+1)$ – renk boyanabilir. Başlangıçta silinen köşenin en fazla Δ komşusu olduğundan başlangıçta n köşeli çizge de $(\Delta+1)$ – renk ile boyanmış olur. O halde ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.3.1'den herhangi bir çizge için, $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde K_n tam çizge için $\chi(K_n) = n = \Delta(K_n) + 1$ olur. Yine C_n döngü çizgeleri için kromatik sayısı,

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2, & n \text{ çift ise} \\ 3, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

şeklinde elde edilebilir.

Örneğin,



Şekil 3.29. C_7 ve C_6 döngü çizgeleri

Şekil 3.29'da C_7 çizgesi 3- renkle, C_6 çizgesi 2 – renkle boyanabilir

3.4. Topolojik Kavramlar

Bu bölümde topolojik kavramlarla ilgili temel tanımlar verilecektir.

Tanım 3.4.1: X bir topolojik uzay, boştan farklı bir küme olmak üzere, τ da X in alt kümelerinin bir sınıfı olsun. Eğer τ aşağıdaki şartları sağlıyorsa τ ya X üzerinde bir topoloji denir.

i) $X, \emptyset \in \tau$

ii) τ ya ait olan kümelerin herhangi bir sayıdaki birleşimi yine τ ya ait olmalıdır.

iii) τ ya ait olan kümelerin sonlu sayıdaki kesişimleri yine τ ya ait olmalıdır.

X ile birlikte τ ya topolojik uzay denir ve (X, τ) ile gösterilir (Koçak 2020).

Tanım 3.4.2: Bir topolojik uzay (X, τ) ve $A \subset X$ olsun. τ' nun elemanlarına açık küme denir (Karaca 2021).

Tanım 3.4.3: (X, τ) ve (Y, τ) topolojik uzaylar olmak üzere bir $f: (X, \tau) \rightarrow (Y, \tau)$ fonksiyonu ve bir $x_0 \in X$ noktası verilsin. Eğer $f(x_0)$ ın bir V açık komşuluğu için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde x_0 ın bir U açık komşuluğu varsa f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye bir sürekli fonksiyon denir (Mucuk 2010).

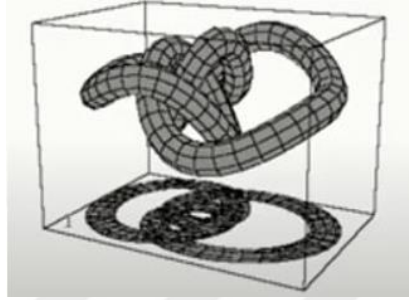
Tanım 3.4.4: X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. X uzayının her U açık kümesi için $f(U)$ kümesi Y uzayında açık ise f fonksiyonuna açık fonksiyon denir (Koçak 2020).

Tanım 3.4.5: İki topolojik uzay arasında verilen $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu birebir, örten sürekli ve tersi f^{-1} de sürekli ise f fonksiyonuna homeomorfizm denir X ve Y topolojik uzaylarına homeomorfik uzaylar denir. X ve Y uzayları homeomorfik ise X ve Y uzaylarına topolojik olarak denk uzaylar denir (Mucuk 2010).

Tanım 3.4.6: X ve Y iki topolojik uzay olmak üzere $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun X topolojik uzayından Y nin $f(X)$ alt uzayına bir homeomorfizm var ise X uzayı Y uzayı içine gömülür ve f fonksiyonuna da gömme fonksiyonu denir (Karaca 2021).

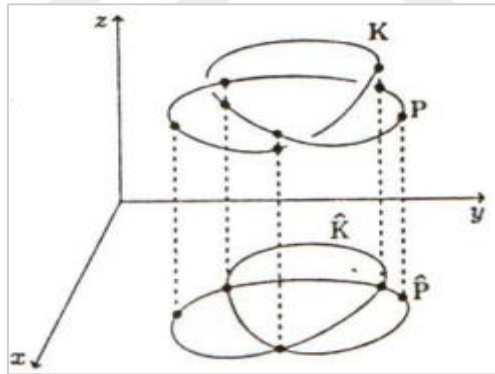
Tanım 3.4.7: Birim çember $S^1 = \{(x, y, z): x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$ ' in $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ e gömülmesine düğüm denir (Burde 2003).

Başka bir ifadeyle düğüm tek bir eğri olarak düşünülebilir. Bu nedenle düğüm uzayda basit, kapalı bir eğridir.



Şekil 3.30. Düğüm ve iz düşümü

Tanım 3.4.8: Şekil 3.31'de görüldüğü gibi $\mathbb{R}^3$ de $P(x, y, z)$ noktasını xy - düzlemindeki $\hat{P}(x, y, 0)$ noktasına izdüşüren dönüşümü π ile gösterilsin.



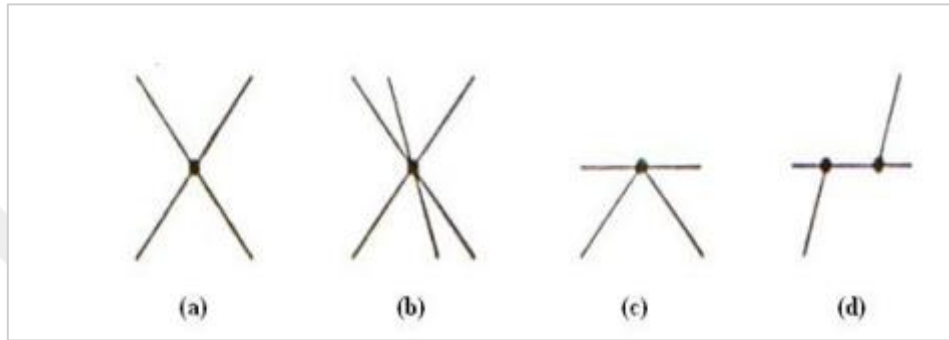
Şekil 3.31. Bir düğümün iz düşümü

K bir düğüm ise $\pi(K) = \widehat{K}$ ye K nın izdüşümü denir. Eğer K yönlendirilmeye sahipse $\widehat{K}$ da K nın yönlendirilmesine bağlı olarak bir yöne sahiptir. Fakat $\widehat{K}$ nın birkaç arakesit noktası olduğundan düzlemde basit kapalı bir eğri değildir. Önseziyle $\widehat{K}$ nın K ya benzerliğini görebilmek için K düğümü üzerinde birkaç basit düğüm hareketi yapmak suretiyle aşağıdaki şartlar uygulansın.

- i) $\widehat{K}$ sonlu sayıda arakesit noktasına sahiptir.

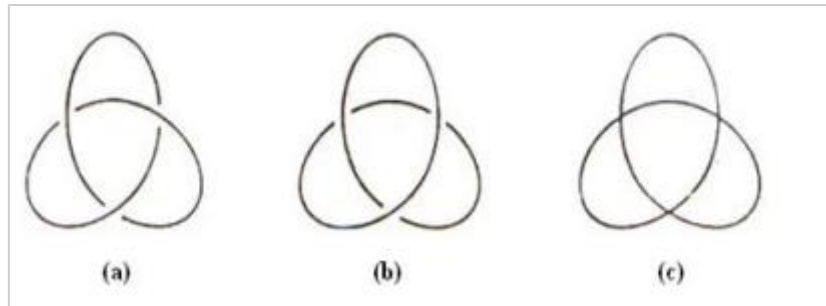
ii) Eğer Q , $\hat{K}$ nın bir arakesit noktası ise Q nın ters görüntüsü K da iki farklı noktaya sahiptir. Kısaca Q , $\hat{K}$ nın bir katlı noktasıdır. (Şekil 3.32 (a)), Şekil 3.32. (b) de gösterildiği gibi ikiden fazla noktaya izin verilmez.

iii) K düğümü poligonal olarak düşünülürse K nın bir köşesi $\hat{K}$ nın bir katlı noktasına dönüşmez. Şekil 3.32. (c) ve (d)' deki örneklerde bir poligonal doğru $\hat{K}$ nın bir köşesine iz düşmüştür. Bu durumların ikisine de müsaade edilmez.



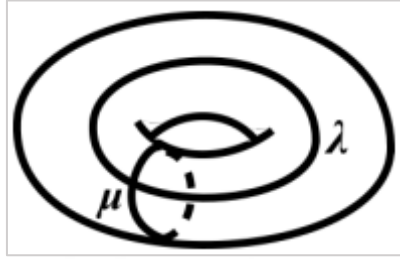
Şekil 3.32. Bir iz düşüm üzerinde katlı noktalar

Yukarıda şartları sağlayan $\hat{K}$ düğümü regüler iz düşümdür. Fakat iz düşümlerle ilgili çalışmalarda katlı noktalar nedeniyle bazı önemli belirsizlikler ortaya çıkar. İz düşümün katlı noktasında düğümün kendi kendisinin altından mı üstünden mi geçtiği belli değildir. Bu belirsizliği ortadan kaldırmak için düğümün kesim noktası işaretlenerek, katlı nokta bölgesinde düğüm bir miktar değiştirilebilir. Bu şekilde düğümün geçit noktasının alttan mı üstten mi geçtiği konusunda orijinaline benzemezse de gerçek görüntüsü çizilebilir. Bu şekilde değiştirilmiş iz düşümler regüler diyagram olarak adlandırılır. Şekil 3.33 (a), (b)'de gösterilmiştir (Murasagi 1996).



Şekil 3.33. Regüler diyagramlar

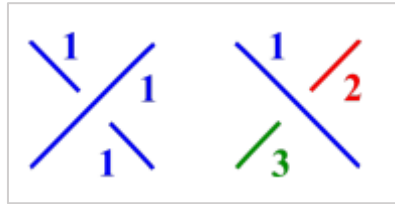
Tanım 3.4.9: Kendisini kesmeyecek, şekilde tor üzerine çizilebilen düğümlere tor düğümleri denir. Genel olarak p ve q aralarında asal olmak şartıyla p kere meridyen ve q kere boylam etrafında dolanan düğüme (p, q) tor düğümü denir. En basit tor düğümü örneği çözükle düğümdür. Tor üzerinde Şekil 3.33'te çizilen μ çözükle düğümü torun meridyeni ve λ çözükle düğümü de torun boylamı olarak adlandırılır (Adams 2004).



Şekil 3.34. Meridyen μ ve boylam λ

Tanım 3.4.10: Bir düğüm eğer aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde renklendirilebiliyorsa üçlü renklendirilebilir denir. Düğümü renklendirmek için;

- 1) En az iki renk kullanılmalı,
- 2) Her çaprazlamasında ya üç yay aynı renk olmalı ya da üçü de farklı renk olmalıdır (Adams 2004).



Şekil 3.35. Üçlü renklendirme kuralı

Teorem 3.4.1: $T_{m,n}$ bir tor düğümü ve p asal olsun.

- i) m ve n her ikisi de tek ise $T_{m,n}$ p -renklendirebilir değildir.
- ii) Eğer m tek ve n çift ise p - renklendirilebilir olması için gerek ve yeter $p|m$ olmasıdır (Breiland et al. 2009).

$T_{m,n}$ tor düğümleri için Teorem 3.4.1 oldukça kullanışlıdır.

4. MATERYAL ve YÖNTEM

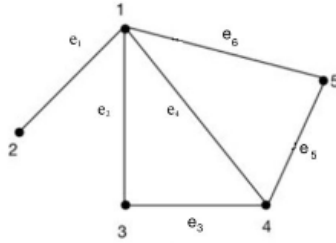
4.1. Çizgelerin Matris Gösterimi

Bir çizgeye sayısal anlamda yaklaşmanın en uygun yollarından biri çizgeyi, matris olarak temsil etmektir. Bu bölümde çizgelerin çeşitli matris gösterimleri gösterilmiştir.

Tanım 4.1.1: G , n köşe ve m kenara sahip bir basit çizge olsun. G çizgesinin etki matrisi;

$M(G) = (m_{i \in J})_{n \times m}$ ile gösterilir ve elemanları; i noktası e_j kenarının bitim (son) noktası ise 1, diğer durumlarda 0 şeklindedir.

G' nin etki matrisinde; satırlar çizgenin köşeleri ve sütunlar ise çizgenin kenarları tarafından indekslenen $n \times m$ tipinde (0,1) matrisidir (Büyükköse vd 2021).



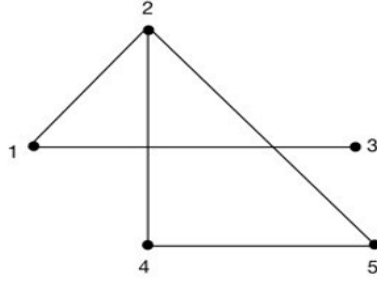
$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tanım 4.1.2: G , n köşeye sahip basit bir çizge olsun. G çizgesinin komşuluk matrisi,

$A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve

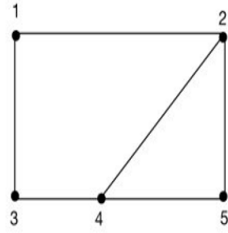
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \sim j \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu matrisin her bir sütun ve satırındaki elemanlarının toplamı ile o satır ve sütuna karşılık gelen köşelerin derecesi bulunur (Bapat 2014).



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 4.1.3: G , n köşeye sahip bir çizge olsun G çizgesinin her köşesinin derecesinin oluşturduğu köşegen matrise G çizgesinin derece matrisi denir ve $D(G) = \text{köş}(d_1, d_2, \dots, d_n)$ ile gösterilir (Bapat 2014).



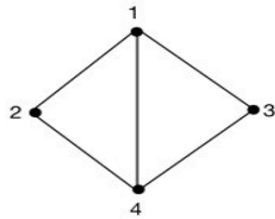
$$D(G) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Tanım 4.1.4: G , n köşeye sahip bir çizge olsun, G çizgesinin Laplacian matrisi,

$L(G) = (l_{ij})_{n \times m}$ ile gösterilir ve

$$l_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \\ -1, & i \sim j \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Laplacian matrisinde $L(G) = D(G) - A(G)$ eşitliği sağlanır (Büyükköse vd 2021).



$$L(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

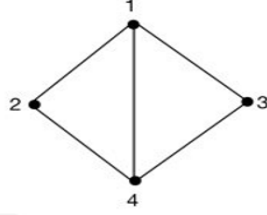
Tanım 4.1.5: G , n köşeye sahip bir çizge olsun. G çizgesinin işaretli Laplacian matrisi,

$Q(G) = (q_{ij})_{n \times m}$ ile gösterilir ve

$$q_{ij} = \begin{cases} d_i, & i = j \\ 1, & i \sim j \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Büyükköse vd 2021).

Ayrıca işaretli Laplacian matrisinde $Q(G) = D(G) + A(G)$ eşitliği sağlanır.

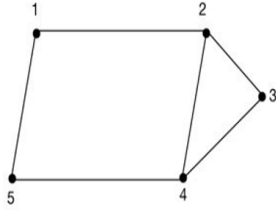


$$Q(G) = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Tanım 4.1.6: G , bağlantılı ve çizge, köşeler kümesi $V(G) = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ ve d_{ij} i ve j köşeleri arasındaki en kısa yolun uzunluğu ise G çizgesinin uzaklık matrisi,

$$D(G) = \begin{cases} d_{ij}, & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Büyükköse vd 2021).



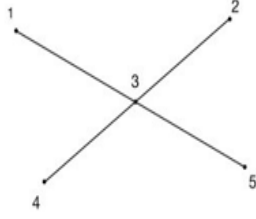
$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 4.1.7: G , n köşeli, bağlantılı bir çizge olmak üzere G çizgesinin $n \times n$ boyutlu Detour matrisi $DM(G) = (d_{ij})_{n \times n}$ şeklinde gösterilir ve

$$d_{ij} = \begin{cases} L(i, j), & i \neq j \\ 0, & i = j \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Bapat 2014).

Burada $L(i, j)$, i ve j köşeleri arasındaki en uzun mesafenin kenar sayısıdır. Yani i ve j köşeleri arasındaki maksimum kenar sayısına sahip yolun uzunluğudur.



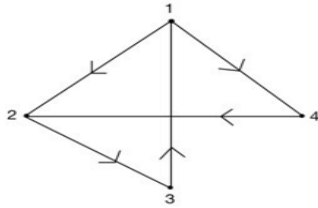
$$M(G) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tanım 4.1.8: G , n köşeli yönlü çizgesi olsun. G yönlü çizgesinin komşuluk matrisi,

$A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ ile gösterilir ve

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \text{ } j \text{ yönlü kenarı için yön } i' \text{ den } j' \text{ ye ise} \\ 0, & \text{aksi durumda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır (Büyükköse vd 2021).



$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

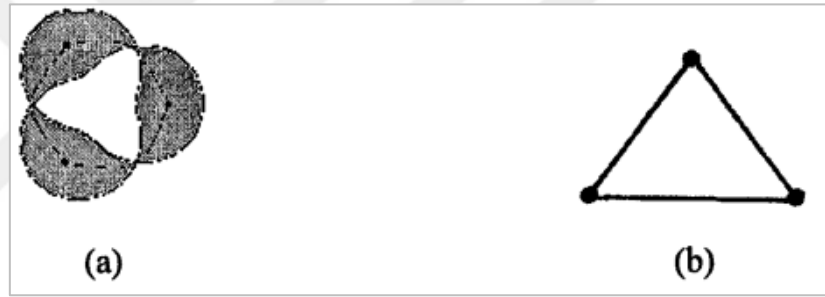
4.2. Düğüm Çizgesi

Düğüm diyagramlarının farklı bir açıdan gösterimi de Peter Tait tarafından gösterilmiştir. Bir düğüm diyagramı, köşeleri kesişimler ve kenarları ardışık kesişimler arasındaki yollar olan bir düzlem çizgesi tanımlar.

Tanım 4.2.1: Bir M düğümünün D regüler diyagramından elde edilen çizgeye M nin düğüm çizgesi denir (Murasugi 1996).

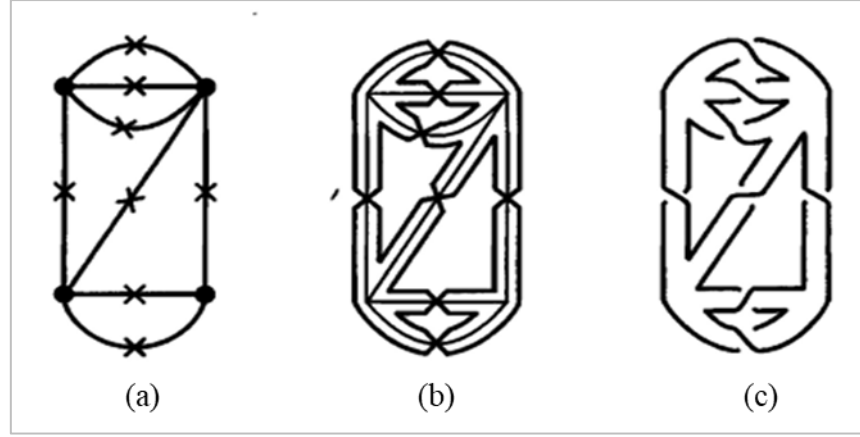
4.2.1. Düğüm çizgesinin elde edilişi

M düğümünün izdüşümü olan $\hat{M}$ düzlemi birkaç alana böler. En dışta bulunan alandan başlayarak, alanları siyah ya da beyaz olarak renklendirilir. En dıştaki alanı siyahla renkle boyansın. Burada temel nokta, ana hatları renklendirdiğimizde komşu olanlar aynı renkte olmaz ve bu şekilde her iki tarafın renkleri aynı olmaz. Her bir beyaz alandan bir nokta seçilip ve bu noktalar beyaz alanların merkezi olmak üzere, iki beyaz alan $\hat{M}$ izdüşümünün V ve V^I kesişme noktalarına sahipse; $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ ortak geçit noktaları oluşur. Bu durumda V ve V^I alanlarını merkezleri bu beyaz alanlarda bulunan $k_1, k_2, \dots, k_\ell$ noktalarından geçen basit yaylarla bağlansın. V ve V^I merkezleri dışında bu yaylar birbiriyle kesişmez. Bu şekilde $\hat{M}$ düğümünden G düzlem çizgesini elde edilir. G nin köşeleri beyaz alanların merkezi olur (Uğur 2002).



Şekil 4.1. Trefoil düğümü ve çizgesi

G çizgesinden M düğümü elde edilebilir. G nin her bir ayrıtının merkezine küçük bir x işareti yerleştirilir (Şekil 4.2 (a)). Bu " x " lerin her birinin bitim noktasından komşu " x " in bitim noktasına G nin ayrıtları boyunca dört çizgi çizilir. Bu işlem her " x " de oluyorsa ortaya çıkmaya başlayan şey, bir düğümün izdüşümü olur. Burada geçit noktalarının durumuyla alakalı bir bilgi mevcut değildir (Şekil 4.2.(b)). Artık, düzlemsel alanlara hangi rengin uygulanacağını belirlenmesi gereklidir. Geçiş noktası bilgileri G çizgesinin işaretinden hareketle çizilebilir. Böylece geçiş noktası bilgisi kaybolur ve düğüm diyagramı elde edilir (Şekil 4.2.(c)) (Murasugi 1996).



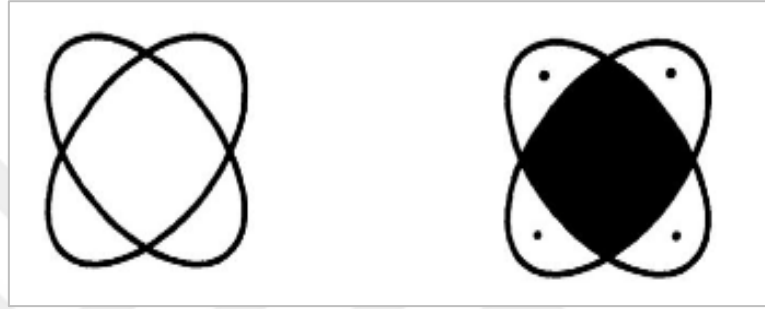
Şekil 4.2. Çizgeden düğüm elde etme



5. ARAŞTIRMA BULGULARI ve TARTIŞMA

5.1. Düğümden Matris Elde Edilmesi

Bu bölümde verilen bir düğüme karşılık gelen çizge ve bu çizgeye karşılık gelen matrisin nasıl elde edileceği gösterilecektir. Düğüme karşılık gelen çizgeyi elde etmek için aşağıdaki işlemler takip edilir.

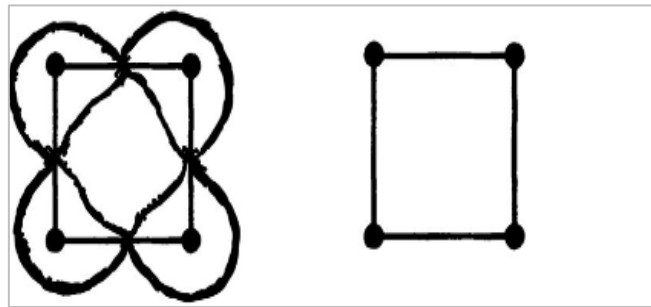


Şekil 5.1. Herhangi bir düğüm ve renklendirmesi

I) Tait metodundaki gibi şekil 5.1'deki düğümü renklendirdikten sonra her bir beyaz bölge içerisinde noktalar seçilir.

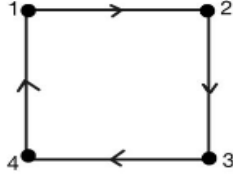
II) İki beyaz bölge ortak geçide sahipse seçilen noktalar kenar aracılığıyla birleştirilir.

III) Her bir kenar sırasıyla ortak geçide karşılık gelir ve böylece düzlemsel çizge elde edilmiş olur.



Şekil 5.2. Düğüme karşılık gelen çizge

Yönlü çizgenin yönlü komşuluk matrisi aşağıdaki gibi bulunur.



$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5.2. Matristen Düğümün Elde Edilmesi

Bu işlemin tersinin karşılığı var mı yani verilen bir matrise karşılık gelen çizgeyi bulduktan sonra bu çizgeye karşılık gelen düğüm elde edilebilir mi sorusunun cevabı aşağıdaki işlemler takip ederek bulunur.

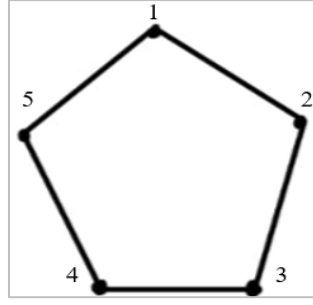
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrisi göz önüne alınsın.

I) Matris 5×5 tipinde olduğundan 5 tane köşeden oluşacaktır.

II) 1. satırdan başlayarak çizge oluşturulur. $a_{11} = 0$ olduğundan 1. köşe ile 2. köşedeilmek yoktur. $a_{12} = 1$ olup 1. köşe ile 2. köşe arasında bir çizgi (kenar) vardır. $a_{13} = 0$, $a_{14} = 0$, $a_{15} = 0$ olup 1. köşe ile 3. köşe, 1. köşe ile 4. köşe ve 1. köşe ile 5. köşe arasında bir bağlantı yoktur.

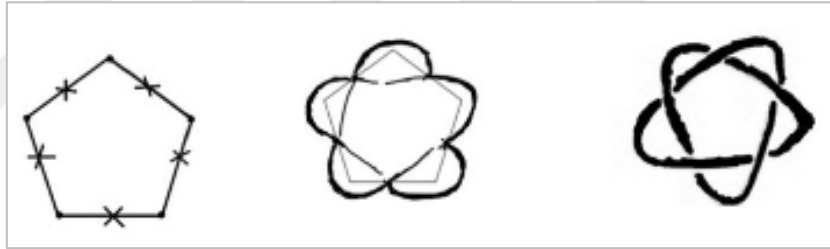
III) Diğer satırlar da benzer şekilde devam edilerek aşağıdaki çizge oluşturulur.



Şekil 5.3. Matrise karşılık gelen çizge

Şimdi oluşan çizgeye karşılık gelen düğüm elde edilsin.

Çizgenin her bir ayrıtının merkezine küçük bir “x” işareti koyduktan sonra bu “x”lerin her birinin son noktasından çizgenin ayrıtı boyunca çizgiler çizilir. Bu işlem de her bir x noktasında olduğundan yavaş yavaş ortaya çıkan şey düğümün izdüşümü olup geçit noktalarını da çizgenin işaretlerinden hareketle artık düğüm elde edilmiş olur.



Şekil 5.4. Çizgeden düğüm elde edilmesi

5.3. Günlük Hayattaki Bazı Problemlere Karşılık Gelen Uygulamalar

Bu bölümde düzlemsel çizgeler, renklendirilmesi ve bunlara karşılık gelen düğümler ile ilgili günlük hayatta karşılaşılan problemlerden bahsedilecektir.

Örnek 5.3.1.

Bir grup kimya bölümü öğrencisi çeşitli X,Y,Z,T,U,V,W sıvılarını belirli sayıda bölmesi bulunan bir kap içerisinde saklamak istemektedir. Bu sıvıların bazılarının bir araya gelmesi şiddetli reaksiyon oluşturmaktadır. Bu nedenle farklı bölmelerde saklanması gerekmektedir. Şekil 5.5’de gösterilen yıldızlar birbirinden ayrı tutulması gereken sıvıları göstermektedir. Buna göre kaç farklı bölmeye ihtiyaç vardır ?

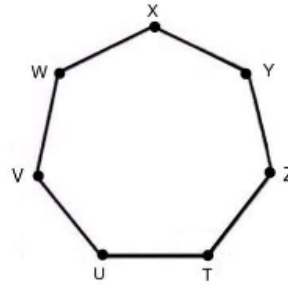
(Birbirleriyle tepkime vermeyen sıvıların aynı bölme içerisinde durmasında sakınca yoktur)

	x	y	z	t	u	v	w
x	-	*	-	-	-	-	*
y	*	-	*	-	-	-	-
z	-	*	-	*	-	-	-
t	-	-	*	-	*	-	-
u	-	-	-	*	-	*	-
v	-	-	-	-	*	-	*
w	*	-	-	-	-	*	-

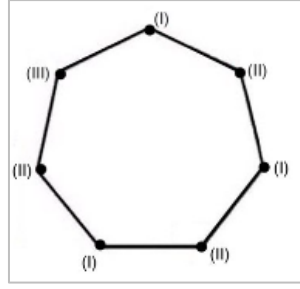
Şekil 5.5. 7 sıvıya denk gelen şekil

Sorunun çözümü çizge boyama yardımıyla kolaylıkla elde edilebilir. Şekil 5.5 matris olarak düşünülürse yıldız olan yerler 1, çizgi olan yerleri 0 olarak komşuluk matrisi oluşturulur.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

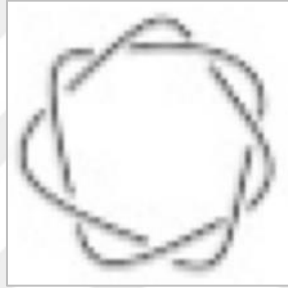


Komşuluk matrisine karşılık gelen çizge çizildiğinde çizgedeki yedi köşe yedi sıvıya denk gelir. Çizge olabildikçe az renk kullanılarak komşu köşeler farklı olacak şekilde Şekil 5.6'daki gibi 3-renk boyanır. Ayrıca Teorem 3.3.1'den C_7 döngü çizgesi olduğundan 3 - renk gereklidir. Bu çizgenin kromatik sayısı 3 tür.



Şekil 5.6. Çizgenin renklendirilmesi

Örneğin; X,Z,U sıvısı bir bölmede Y,T,V sıvıları ikinci bölmede ,W sıvısı ise üçüncü bölmede saklanabilir. Tait metodu ile bu çizgeye karşılık gelen düğüm, aşağıdaki gibi elde edilir.



Şekil 5.7. Çizgeye denk gelen düğüm

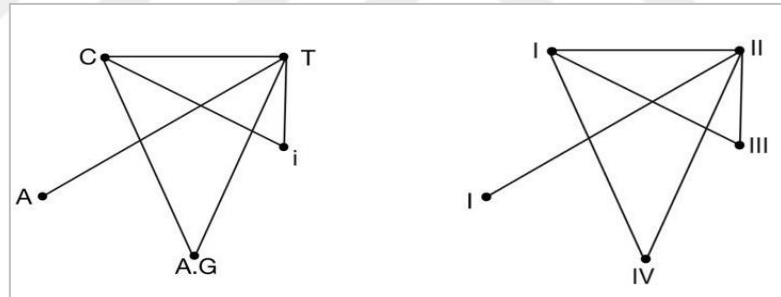
Örnek 5.2

Bir matematik bölümünde Cebir, Topoloji, İstatistik ve A. Geometri derslerinin çizelgesi hazırlanmak istenmektedir. Bazı öğrenciler birden fazla derse katılmak istedikleri için bazı derslerin çakışmaması gerekmektedir. Çakışan dersler 1 ile çakışmayan dersler 0 ile gösterilmektedir. Bu dört dersi düzenleyebilmek için kaç farklı zaman dilimine ihtiyaç vardır?

	Cebir	Topoloji	İstatistik	A.Geometri	Analiz
Cebir	0	1	1	1	0
Topoloji	1	0	1	1	1
İstatistik	1	1	0	0	0
A.Geometri	1	1	0	0	0
Analiz	0	1	0	0	0

Şekil 5.8. Aynı derse kayıtlı olan bir öğrencinin olup olmadığını gösteren şekil

Birden fazla dersi alabilmeleri için çizge boyamadan yararlanılabilir. Şekil 5.8 çizgenin komşuluk matrisi gibi düşünölsün. Dersler çizgenin köşelerini göstermek üzere aynı öğrenci iki dersi de alıyorsa bu derslere karşılık gelen köşeler arasına bir çizgi çizilsin.



Şekil 5.9. Şekil 5.8 yardımıyla elde edilen çizge ve bu çizgenin 4- renk ile boyanmış hali.

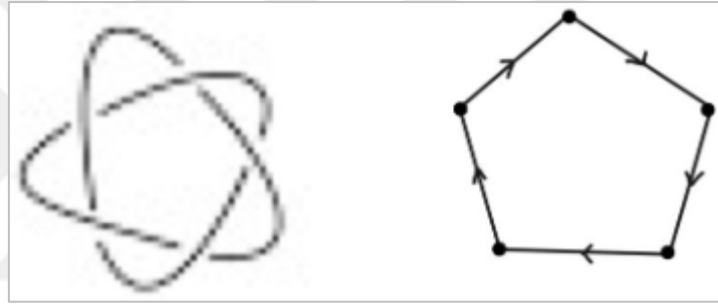
Şekil 5.9'daki çizge düzlemsel çizge değildir. Dikkat edilirse bu çizgeye düğüm karşılık getirilememektedir. Köşeler, roman rakamlarıyla gösterilirse renkler istenilen zaman dilimine denk gelir. Bu durum için kromatik sayı 4 tür ve dolayısıyla 3 zaman dilimine ihtiyaç vardır. Örneğin cebir ve analize aynı zaman diliminde; topoloji, istatistik ve analitik geometri farklı üç zaman diliminde alınabilir.

6. SONUÇ ve ÖNERİLER

Düğümlere karşılık gelen çizgeler göz önüne alınarak bu çizgelere karşılık gelen matrisler elde edilmiştir. Ayrıca günlük hayatta karşımıza çıkacak bazı problemlerin uygulaması yapılmıştır.

1.Sonuç

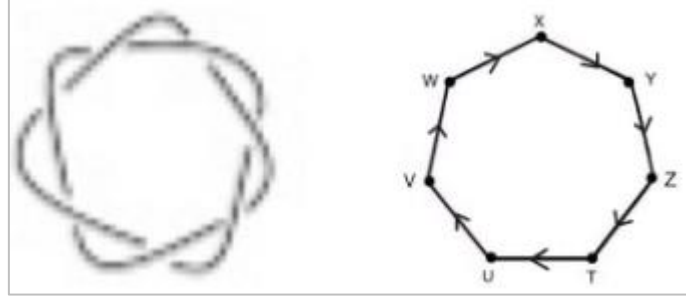
5_1 düğümü (2,5) tor düğümüne karşılık gelen diyagramdır. Teorem 3.4.1 gereğince 3 renk boyanmaz. Ancak buna karşılık gelen çizgeye dikkat edilecek olursa C_5 döngü çizgesinin $\chi(C_5) = 3$ olup 3-renk boyanabilir.



Şekil 6.1. 5_1 düğümüne denk gelen yönlü çizge

2.Sonuç

7_1 düğümü (2,7) tor düğümüne karşılık gelen diyagramdır. Teorem 3.4.1 gereğince 3 renk boyanmaz. Buna karşılık gelen çizgeye dikkat edilecek olursa C_7 döngü çizgesinin $\chi(C_7) = 3$ olup 3- renk boyanabilir.



Şekil 6.2. 7_1 düğümüne denk gelen yönlü çizge

Dikkat edilirse çizgenin renklendirilmesiyle düğümün renklendirilmesi arasında bir ilişki görülmemektedir.

3.Sonuç

5_1 düğümü (2,5) tor düğümüne karşılık gelen diyagram olup buna karşılık gelen 5×5 tipinde yönlü komşuluk matrisi ele alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisin birinci satırdaki ikinci elemanı, ikinci satırdaki üçüncü elemanı, üçüncü satırdaki, dördüncü elemanı 1 ve son satırındaki birinci elemanı 1 dir.

7_1 düğümü (2,7) tor düğümüne karşılık gelen diyagram olup buna karşılık gelen 7×7 tipinde yönlü komşuluk matrisi ele alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisin birinci satırındaki ikinci elemanı, ikinci satırdaki üçüncü elemanı, üçüncü satırdaki, dördüncü elemanı, beşinci satırındaki altıncı elemanı altıncı satırındaki yedinci elemanı 1 ve son satırındaki birinci elemanı 1 dir.

Benzer olarak $(2, n)$ tor düğümlerine karşılık gelen matris,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada 1. satırdaki ikinci elemanı, ikinci satırdaki üçüncü elemanı ve n-1.satırdaki n. elemanı 1 olup n. satırdaki birinci eleman 1 dir.

4.Sonuç

5_1 düğümü $(2,5)$ tor düğümlerine karşılık gelen diyagram olup buna karşılık gelen 5×5 tipinde komşuluk matrisi ele alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisin simetrik matris olduğu görülür. Gerçekten, $a_{12} = 1$, $a_{21} = 1$, $a_{23} = 1$, $a_{32} = 1$, $a_{34} = 1$, $a_{43} = 1$, $a_{15} = 1$, $a_{51} = 1$, $a_{45} = 1$, $a_{54} = 1$ olup ana köşegene göre simetrik elemanları birbirine eşittir.

7_1 düğümü $(2,7)$ tor düğümüne karşılık gelen diyagram olup buna karşılık gelen 7×7 tipinde komşuluk matrisi ele alınırsa

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matrisin simetrik matris olduğu görülür. Benzer olarak $(2,n)$ tor düğümlerine karşılık gelen komşuluk matrisi

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde dir. Matrisin simetrik matris olduğu görülür.

1.Öneri

$(2,n)$ tor düğümleri için matris elde edildi. (m,n) tor düğümlerine genellenebilir mi?

2.Öneri

$(2,n)$ tor düğümleri için benzer bir sonuç Laplacian matrisinde veya etki matrisinde elde edilebilir mi? Eğer elde edilebilirse bu sonuç (m,n) tor düğümlerine genellenebilir mi ?

KAYNAKLAR

- Aldous, J.M. and Wilson, R.J. 2003. Graphs and applications: An introductory approach, Springer Science & Business Media,444 ,London.
- Adams, C.C. 2004. The knot book: An elementary introduction to the mathematical theory of knots, American Mathematical Society ,New York.
- Akyar, E. 2021. Çizge kuramına (Graf teorisine) giriş, Seçkin Yayınevi ,197, Ankara.
- Biggs, N.L. , Lloyd, E.K. and Wilson , R.J. 1986. Graph theory 1736 -1936 , Oxford University Press Inc, 239 ,New York.
- Bapat, R.B. 2014. Graphs and matrices , Springer ,193 ,London.
- Breiland, A.L. ,Oesper, L. and Taalman ,L. 2009. p-Coloring classes of torus knots ,missouri journal of matmetical sciences.
- Burde, G. and Zieschang, H. 2003. Knots, Walter de Gruyter , 559.
- Büyükköse ,Ş. ,Kaya Gök ,G. ,Özkan Kızılırmak ,G. ve Eren , S. 2021. Graf teori ,Nobel Akademik Yayıncılık ,197 ,Ankara.
- Cvetkovic, D.M., Doob ,M. and Sachs ,H. 1999. Spectra of graphs: Theory and application, Wiley, 447 , Almanya.
- Chartrand, G. and Zhang P. 2012. A first course in graph theory , Dover Publications INC, Mineola, New York.
- Diestel , R. 2000. Graph theory , Springer-Verlag ,New York.
- Gross , J.L. and Yellen J. 2017. Handbook of graph theory , Crc Press LLC.
- Harary, F. 1969. Graph theory , Addison-Wesley Publishing Company ,284 ,New York.
- Karaca, İ. 2021. Teorik ve uygulama alanlarıyla topoloji ,Palme yayınevi, 297,Ankara.
- Koçak, M. 2020. Temel ve genel topolojiye giriş ,Nisan Kitabevi ,179 ,Eskişehir.

Livingston ,C. 1993. Knot theory ,Cambridge University Press ,24. ,240.

Mucuk, O. 2010. Topoloji ve kategori , Nobel Yayın Dağıtım , 457 ,Ankara.

Murasugi ,K.1996 ,Knot theory and its applications ,Birkhauser Verlag ,337 ,Boston.

Thurston ,W.P. 1997. Three-dimensional geometry and topology ,Princeton University Press ,Princeton, New Jersey.

Uğur , T. 2002. Düğüm grafları , Doktora tezi ,Atatürk Üniversitesi , Fen Bilimleri Enstitüsü , Matematik Ana Bilim Dalı ,Erzurum.

West ,D.B. 2005. Introduction to graph theory ,Prentice Hall ,260.

