



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RIESZ UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OKAN KÖSE

OCAK

OKAN KÖSE

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK 2025

RIESZ UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Okan KÖSE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Sabahattin ILBIRA

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2025

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Okan KÖSE tarafından hazırlanan “Riesz Uzaylarında İstatistiksel Yakınsaklık” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sabahattin ILBIRA
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Başkan: Doç. Dr. Abdullah AYDIN
Matematik Anabilim Dalı, Muş Alparslan Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Üye: Prof. Dr. Öznur KULAK
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

Tez Savunma Tarihi: 10/01/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....
Doç. Dr. Ümit YILDIRIM
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Okan KÖSE

10/01/2025

RIESZ UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

(Yüksek Lisans Tezi)

Okan KÖSE

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2025

ÖZET

Matematikte Riesz uzayı, boştan farklı her sonlu alt kümesi bir supremuma ve bir infumuma sahip sıralı vektör uzayı olarak tanımlıdır. Riesz uzayları fonksiyonel analizde çalışılan temel kavramlardan olmakla birlikte fizikte ve iktisatta uygulama alanları bulan bir konudur. Riesz uzayında tanımlı dizilerin istatistiksel yakınsaklığı, istatistiksel limit noktaları ve istatistiksel yığılma noktalarıyla ilgili literatürde çalışmalar mevcuttur. İstatistiksel yakınsaklık, istatistiksel limit ve istatistiksel yığılma noktaları ile Riesz uzayı arasındaki bağlantıyı supremum ve infimum özellikleri ile sağlamış bulunmaktadır. İstatistiksel sıra yakınsaklığı ilk olarak her u -düzgün Cauchy dizisi için olan versiyonu Zafer Ercan tarafından ‘A Characterization Of u -Uniformly Completeness Of Riesz Spaces In Terms Of Statistical u -Uniformly Pre-Completeness’ adlı çalışmasında incelenmiştir. Şençimen ve Pehlivan ‘Statistical Order Convergence In Riesz Space’ adlı çalışmalarında literatürde daha yaygın kullanılan esasında Zafer Ercan’ ın yukarıda bahsi geçen çalışmasında geçen tanımın özel hali olan Riesz uzaylarında istatistiksel sıra yakınsaklığı tanımını ve istatistiksel monoton yakınsaklık kavramları üzerinde durmuşlardır. Diğer taraftan Abdullah Aydın, Muhammed Çınar ve Mikail Et ‘The λ -Statistical Convergence in Riesz Spaces’ adlı çalışmalarında belirli özellikleri sağlayan pozitif skaler λ_n skaler dizisi üzerinden λ -istatistiksel yakınsaklık kavramını ortaya koymuş ve temel özellikleri incelemişlerdir. Son olarak Mehmet Küçükarslan ve Abdullah Aydın ‘Deferred statistical order convergence in Riesz spaces’ adlı çalışmalarında Riesz uzaylarındaki bir dizi için deferred istatistiksel sıra yakınsaklık kavramını tanımlamışlardır. Bu çalışmada temel bilgiler verildikten sonra Riesz uzaylarındaki dizinin istatistiksel yakınsamasıyla ilgili tanımların derlemesi yapılacak ve bu konularla alakalı temel sonuçlar tanıtılacaktır.

STATISTICAL CONVERGENCE IN RIESZ SPACES

(M. Sc. Thesis)

Okan KÖSE

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2025

ABSTRACT

In mathematics, a Riesz space is defined as an ordered vector space in which every non-empty finite subset has a supremum and an infimum. Riesz spaces are fundamental concepts studied in functional analysis and have applications in physics and economics. There is extensive literature on the statistical convergence of sequences defined in Riesz spaces, as well as statistical limit points and statistical accumulation points. Statistical convergence has established a connection between statistical limit and statistical accumulation points and Riesz spaces through the properties of supremum and infimum. Statistical order convergence in Riesz spaces was first studied by Zafer Ercan in his paper "A Characterization of u -Uniformly Completeness of Riesz Spaces in Terms of Statistical u -Uniformly Pre-Completeness" for the version that holds for every u -regular Cauchy sequence. Şençimen and Pehlivan focused on the definition of statistical order convergence in Riesz spaces and the concepts of statistical monotonic convergence in their papers "Statistical Order Convergence In Riesz Space," which essentially is a special case of the definition introduced by Zafer Ercan in his aforementioned work and is more widely used in the literature. On the other hand, Abdullah Aydın, Muhammed Çınar, and Mikail Et introduced the concept of λ -statistical convergence in Riesz spaces and investigated its fundamental properties in their papers "The λ -Statistical Convergence in Riesz Spaces" using a positive scalar sequence that satisfies certain properties. Finally, Mehmet Küçükaslan and Abdullah Aydın introduced the concept of deferred statistical order convergence in Riesz spaces in their papers "Deferred statistical order convergence in Riesz spaces.". After providing basic information in this thesis, we will compile the definitions related to the statistical convergence of a sequence in Riesz spaces and introduce the fundamental results related to these topics.

Page Number	: 39
Keywords	: Sequences, Riesz spaces, Statistical convergence, Order convergence
Supervisor	: Asst. Prof. Dr. Sabahattin ILBIRA

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince ve tez çalışmamın her aşamasında bana yardımcı olan, bilgi birikimini benimle paylaşan, eleştirileriyle yol gösteren danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Sabahattin ILBIRA hocama ve beni çalışmaya teşvik eden, motivasyonumu artıran ve her zaman yanımda olan aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL BİLGİLER	3
2.1. Riesz Uzayı	3
2.1.1. Kısmi sıralı kümeler	3
2.1.2. Vektör uzayları	5
2.1.3. Riesz uzayları	5
2.2. Yakınsaklık	8
2.2.1. Reel dizilerin yakınsaklığı	8
2.2.2. Reel dizilerin istatistiksel yakınsaklığı	9
2.2.3. Reel dizilerin λ -istatistiksel yakınsaklığı	10
2.2.4. Reel dizilerin deferred istatistiksel yakınsaklığı	10
2.2.5. Riesz uzaylarında yakınsaklık	11
3. RIESZ UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ	13
3.1. Önbilgi	13
3.2. Riesz Uzaylarında İstatistiksel u -Düzgün Yakınsaklık	13
3.3. Riesz Uzaylarında İstatistiksel Sıra Yakınsaklık	15

3.3.1. İstatistiksel monoton yakınsaklık	15
3.3.2. İstatistiksel sıra yakınsaklık	18
3.4. Riesz Uzaylarında λ -İstatistiksel Yakınsalık	23
3.4.1. λ - İstatistiksel monoton diziler	23
3.4.2. λ - İstatistiksel sıra yakınsaklık	27
3.5. Riesz Uzaylarında Deferred İstatistiksel Sıra Yakınsaklık	29
3.5.1. Riesz uzaylarında deffered istatistiksel azalan	29
3.5.2. Riesz uzaylarında deferred istatistiksel sıra yakınsaklık	30
KAYNAKLAR	37
ÖZGEÇMİŞ	39

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler

Açıklama

 $\mathbb{R}$

Reel Sayılar Kümesi

 $\mathbb{N}$

Doğal Sayılar Kümesi

 $\delta(A)$

A kümesinin doğal yoğunluğu

 $|A|$

A kümesinin eleman sayısı

 $x \vee y$

x ve y nin supremumu

 $x \wedge y$

x ve y nin infimumu

 $\in$

elemanındır işareti

 $\downarrow^{st}$

istatistiksel monoton azalan

 $\uparrow^{st}$

istatistiksel monoton artan

 $x_n \downarrow x$

(x_n) aşağı yönlendirilmiş bir dizi olup infimumu x dir

 $x_n \uparrow x$

(x_n) yukarı yönlendirilmiş bir dizi olup supremumu x dir

 K^c

K kümesinin tümleyeni

 θ

sıfır vektörü

 x^+

x ve θ nın (vektör uzayının sıfırı) supremumu

 x^-

x ve θ nın (vektör uzayının sıfırı) supremumu

 $|x|$

x ve $-x$ in supremumu

Kısaltmalar

Açıklama

st_o – yakınsak

istatistiksel sıra yakınsak

smi

istatistiksel monoton artan

smd

istatistiksel monoton azalan

h.h.h.n

hemen hemen her n

1. GİRİŞ

Riesz uzayı kavramı (vektör kafesi olarak da adlandırılır) ilk olarak F. Riesz tarafından ortaya konulmuştur (Riesz, 1928). O zamandan beri birçok kişi konuyu geliştirdi. İlk teoriye katkılar H. Freudenthal tarafından (Freudenthal, 1936) çalışmasında ve L.V. Kantorovich tarafından (Kantorovitch, 1937) çalışmasında geldi. İstatistiksel yakınsama fikri ilk olarak (Zygmund, 1959)(monografisinin ilk baskısında 1935'te) ve dizilerin istatistiksel yakınsaması kavramı Wrocław Üniversitesi Polonya, 1949'da düzenlenen konferansta (Steinhaus, 1951) çalışmasında Steinhaus tarafından tanıtıldı. (Fast, 1951) ve (Steinhaus, 1951) çalışmalarında bu fikri bağımsız olarak geliştirdi. İstatistiksel yakınsama, bir reel dizinin yakınsamasının bir genellemesidir. Ancak, Riesz uzayları üzerindeki istatistiksel yakınsama kapsamlı bir şekilde incelenmemiştir.

Tez çalışmasındaki temel çeşitlerden ilki, istatistiksel u -düzgün yakınsaktır. (Ercan, 2009) çalışmasında bir Riesz uzayda istatistiksel u -düzgün yakınsak dizi kavramını tanıttı. (Ercan, 2009) çalışmasında Sıra yakınsama ile birlikte istatistiksel yakınsama ele alındı. (Ercan, 2009) çalışmasında faydalı bilgiler sunmaktadır.

Tez çalışmasındaki temel çeşitlerden bir diğeri, Riesz uzaylarında "sıra yakınsama"dır. Riesz uzaylarında sıra yakınsama ile istatistiksel yakınsama arasındaki bazı ilişkiler vardır. (Zaanen, 2012) kitabı sıra yakınsama çalışmalarının temel aracı olmak üzere, (Şençimen ve Pehlivan, 2012) çalışmasında faydalı bilgiler sunulmaktadır.

Tez çalışmasındaki temel çeşitlerden biri, (Aydın, Çınar ve Et, 2021) istatistiksel yakınsamanın yararlı ve klasik bir aracı olan çalışmada λ -yoğunluk özelliğini kullanarak Riesz uzayları üzerinde istatistiksel yakınsama kavramı tanıtılması amaçlamıştır.

Son yıllarda, araştırmacılar, Riesz uzaylarında farklı istatistiksel yakınsama biçimlerini keşfetmeye odaklandılar. Tez çalışmasındaki temel çeşitlerden sonuncusu olan, (Küçükaslan ve Aydın, 2024) çalışmasında Riesz uzaylarında deferred istatistiksel yakınsama kavramı sunulması amaçlanmaktadır. Özellikle sıra yakınsama ile deferred istatistiksel sıra yakınsama arasındaki bağlantılar incelenip ve diğer çeşitli istatistiksel yakınsama türlerini sürece dahil edilmiştir. Dahası, Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsama teorisinin daha geniş çerçevesi hakkında değerli bilgiler sağlanmıştır.

Tez çalışmamızın amacı bir Riesz uzayında istatistiksel sıra yakınsama çeşitlerini tanıtmak, belirtilen çalışmaları, aslına sadık kalarak, inceleyip, elde edilen bilgileri birleştirmektir. Bu bağlamda istatistiksel yakınsaklık çalışmalarını bir araya getirmeye çalışıyoruz.

Çalışmalarımızı şu şekilde özetleyebiliriz. 2 Bölümünde, Dizi, Riesz uzayları, istatistiksel

yakınsama ile ilgili bazı ön tanımlar ve temel bilgiler tezde konu bütünlüğü sağlamak için sunulmuştur. 3 Bölümünde, istatistiksel yakınsama çeşitleri öncelikle bir bütün olarak verilip, istatistiksel yakınsama çeşitlerine ait kavramlar tanıtılmıştır. İlerleyen süreçte bir Riesz uzayında istatistiksel yakınsaklık çeşitleri ayrı ayrı incelenmiş, tanıtılmıştır ve istatistiksel yakınsaklık çeşitleri harmanlanarak bir başucu tezi oluşturulmaya çalışılmıştır.



2. TEMEL BİLGİLER

Bu bölümde konu için önemli ve gerekli olan Kısmi sıralı küme, vektör uzayı, Riesz uzayı, yakınsaklık ve istatistiksel yakınsaklık çeşitleri hakkında temel oluşturan bilgiler verilecektir.

2.1. Riesz Uzayı

Bu bölümde tez için gerekli olan Riesz uzayını oluşturan temel bilgilere yer verilecektir.

2.1.1. Kısmi sıralı kümeler

2.1 Tanım (Bir küme üzerinde bağıntı) X boştan farklı herhangi bir küme olsun. $X \times X$ kümesinin herhangi bir alt kümesine X içinde bir bağıntı denir. Bağıntı R harfi ile gösterilir.

2.2 Tanım (Kısmi sıralama bağıntısı) R , X üzerinde bir bağıntı olsun. R , aşağıda verilen yansıma, geçişme ve ters simetri koşullarını sağlıyorsa, R bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı denir.

- (Yansıma) Her $x \in X$ için $(x, x) \in R$.
- (Ters simetri) Her $x, y \in X$ için $(x, y) \in R$ ve $x \neq y$ olduğunda $(y, x) \in R$.
- (Geçişme) Her $x, y, z \in X$ için $(x, y) \in R$ ve $(y, z) \in R$ olduğunda $(x, z) \in R$.

Eğer R bağıntısı X üzerinde kısmi sıralama ve $x, y \in X$ ise, $(x, y) \in R$ ifadesi yerine $x \leq y$ ya da $y \geq x$ veya xRy yazılabilir. Üzerinde kısmi sıralama bağıntısı bulunan kümeye *sıralı küme* adı verilir. $x \geq y$ veya $x \leq y$ şartı sağlanıyorsa x ve y 'nin *karşılaştırılabilir* olduğunu söyleriz. Ne $y \geq x$ ne de $x \leq y$ değilse o zaman x ve y *karşılaştıramaz* denir. Herhangi $x, y \in X$ çifti karşılaştırılabilir bir çiftse, kısmi sıralamaya *doğrusal sıralama* veya *katı sıralama* denir. X kısmi sıralı bir küme ve Y , X 'in boş olmayan bir altkümesi olsun. X 'teki kısmi sıralama, Y üzerinde kısmi sıralama tanımlanmasına olanak sağlar, yani x ve y , Y 'nin elemanları ise Y 'de $x \leq y$ olması için gerek ve yeter şart X 'de $x \leq y$ olmasıdır.

- $\mathbb{R}$ üzerindeki bilinen sıralama ile doğrusal sıralamadır.
- $X = \mathbb{R}^2$ üzerinde koordinat bazlı sıralama şu şekilde tanımlıdır: $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$ dersek $x \leq y$ olması için gerek ve yeter koşul $x_1 \leq y_1$ ve $x_2 \leq y_2$ olmasıdır. Bu sıralama da karşılaştırlamaz elemanlar olduğundan (mesela $(1, 1)$ ve $(1, 2)$) katı sıralama değildir.
- S boş olmayan bir küme olsun ve X, S 'nin tüm alt kümelerinin kümesi yani kuvvet kümesi

olsun.

A ve B , X 'in noktaları ise, aşağıdaki bağıntıya göre kısmi sıralıdır.

$$A \leq B \iff A \subseteq B \quad (2.1)$$

S 'nin boş altkümesinin X 'in bir noktası olduğunu görülür. S sonsuz bir küme ise X , birçok karşılaştırılmaz eleman içerir.

X sıralı bir küme ve A , X 'nin boş olmayan bir altkümesi olsun. Bir $u \in X$, her $a \in A$ için $u \geq a$ olacak şekilde ve ayrıca başka bir $v \in X$, $v \geq a$ olduğunda $v \geq u$ ise A kümesinin supremumu (veya en küçük üst sınırı) vardır denir. A nın en fazla bir supremumu var olduğu açıktır, ve $\sup A$ ile gösterilir.

X kısmen sıralı olsun. $x_0 \in X$ noktası için $x_0 \leq x$ eşitsizliğinde $x_0 = x$ ise x_0 elemanına X 'in maksimum elemanı olarak adlandırılır. Diğer bir deyişle x_0 'dan kesinlikle daha büyük bir eleman yoksa x_0 elemanına X 'in maksimum elemanı denir.

Her $x \in X$ için $x_0 \in X$ elemanı olacak şekilde bir $x_0 \in X$ elemanı varsa o zaman x_0 , X 'in en büyük elemanı olarak adlandırılır.

Bu durumda x_0 aynı zamanda X 'in maksimal bir elemanıdır ve bu eleman varsa tek maksimal elemandır.

Tersine eğer x , X 'in tek maksimal elemanı ise, o zaman x_0 X 'in en büyük elemanı olmak zorunda değildir.

Benzer şekilde, X nin boş olmayan bir A altkümesi için infimum (veya en büyük alt sınır) tanımı verilebilir, ve $\inf A$ ile gösterilir.

Özel olarak $u, v \in X$ olmak üzere $A = \{u, v\}$ ise $\sup A = u \vee v$; $\inf A = u \wedge v$ ile göstereceğiz.

2.3 Tanım (Kafes) X sıralı bir küme olsun. Eğer X üzerindeki sıralamaya göre her u, v elemanı $u \vee v$ ve $u \wedge v$ sahip ve bu elemanlar X 'de bulunuyorsa ise X kümesine bir kafes (latis) denir.

- $\mathbb{R}$ bilinen sıralama ile hem tam sıralı hem de kafestir.
- $\mathbb{R}^2$ üzerinde koordinatsal sıralamayı düşünersek bir kafestir.

2.1.2. Vektör uzayları

2.4 Tanım (Vektör uzayı) V boş olmayan bir küme ve F bir cisim, $+$: $V \times V \rightarrow V$ ve $\cdot$: $F \times V \rightarrow V$ işlemleri tanımlı olsun. Her $u, v, w \in V; a, b \in F$ için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa V kümesine F üzerinde vektör uzayı denir.

1. $u + (v + w) = (u + v) + w$,
2. $u + v = v + u$,
3. Her $v \in V$ için bir $\theta \in V$ vardır ki $v + \theta = \theta + v = v$,
4. Her $v \in V$ için bir $(-v) \in V$, vardır ki $v + (-v) = (-v) + v = \theta$,
5. $a \cdot (b \cdot v) = (ab) \cdot v$
6. $1 \cdot v = v$
7. $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
8. $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$

V, F cismi üzerinde vektör uzayı olmak üzere V kümesinin elemanlarına vektör; F bağıntısındaki değerler skaler denir. Ayrıca $+$: $V \times V \rightarrow V$ işlemi vektör toplamı; $\cdot$: $F \times V \rightarrow V$ işlemi skaler çarpım olarak adlandırılır.

- n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ uzayı bilinen koordinatsal toplama ve reel skalerle çarpma ile reel bir vektör uzayıdır.
- Boş olmayan nokta kümesi X üzerinde tüm reel fonksiyonların vektör uzayı E olsun. E için noktasal toplama ve skaler çarpma $x \in X, a \in \mathbb{R}$ verildiğinde $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ve $(af)(x) = af(x)$ olarak tanımlansın. Bu durumda E bir vektör uzayıdır.

2.1.3. Riesz uzayları

Bu bölümde Riesz uzayları konusundaki temel bilgileri hatırlatacağız. Daha detaylı bilgi için (Zaanen, 2012) kaynaklarına bakılabilir.

E reel bir vektör uzayı ve E üzerinde ' $\leq$ ' kısmi sıralama bağıntısı tanımlı olsun. E üzerindeki sıralama vektör uzayı yapısıyla uyumlu ise yani

- (i) $f \leq g$ ise $f + h \leq g + h$, her $h \in E$ için,

(ii) $\theta \leq f$ ise $\theta \leq \alpha f$, her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için,

koşulları sağlanıyorsa E ye *sıralı vektör uzayı* denir.

Koşul (ii) şu şekilde de ifade edilebilir: $f \leq g$ ise $\alpha f \leq \alpha g$, her $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$ için.

2.5 Tanım (Riesz uzayı) E sıralı vektör uzayı ' $\leq$ ' kısmi sıralamasına göre bir kafes ise, o zaman E 'e Riesz uzayı veya bir vektör kafesi denir.

E Riesz uzayı ise uzayın sıfır elemanı θ ile gösterilecektir. Şimdi Riesz uzaylarının bazı örneklerini sunuyoruz.

- n -boyutlu $\mathbb{R}^n$ üzerinde koordinat bazlı sıralamayı düşünelim. Daha açıkçası, $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$ için $x \leq y$ olması için gerek ve yeter şart $x_k \leq y_k$, $k = 1, \dots, n$ tanımlayabiliriz. O zaman $\mathbb{R}^n$ bir Riesz uzayıdır.
- $\mathbb{R}^2$ 'deki sıralama koordinat bazlı sıralamadan farklı olarak da tanımlanabilir: $(x_1, x_2) \leq (y_1, y_2)$, $x_1 \leq y_1$ veya $x_1 = y_1$, $x_2 \leq y_2$ olduğunda olsun. Sözlük sıralama denen bu sıralama ile $\mathbb{R}^2$ bir Riesz uzayıdır.
- Boştan farklı X kümesi üzerinde tüm reel fonksiyonların vektör uzayı E olsun. Noktasal toplama ve skaler çarpma işlemlerini $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ve $(af)(x) = af(x)$ tüm $x \in X$ olarak tanımlayalım. E üzerinde sıralamayı $f \leq g$ gerek ve yeter şart her $x \in X$ için $f(x) \leq g(x)$ sağlanması olarak tanımlayalım. Bu sıralama ile E Riesz uzayıdır.

2.6 Tanım E bir Riesz uzayı olsun. Herhangi bir $f \in E$ için;

$$f^+ = f \vee \theta, \quad f^- = (-f) \vee \theta, \quad |f| = f^+ \vee f^- \quad (2.2)$$

sırasıyla f nin pozitif kısmı, negatif kısmı ve mutlak değeri olarak adlandırılır.

E 'nin $\theta \leq u$ özelliğini sağlayan elemanlarına *pozitif elemanlar* veya *pozitif vektörler* denir. E 'nin $E_+ = \{u \in E : \theta \leq u\}$ altkümese E 'nin *pozitif konisi* veya kısaca *konisi* denir. Pozitif koni aşağıda vereceğimiz 3 özelliği sağlamaktadır:

- $E + E = \{u + v : u, v \in E\}$ olmak üzere, $E + E \subset E$ dir.
- $\lambda \in \mathbb{R}$ için, $\lambda E = \{\lambda u : u \in E\}$ olmak üzere $\lambda E \subset E$ dir,

c) $-E = \{-u : u \in E\}$ olmak üzere, $E \cap (-E) = \emptyset$ dir.

E reel vektör uzayının a), b), c) özelliklerini sağlayan herhangi bir C altkümeye E' nin konisi denir. C , E' nin bir konisi olsun. $u \leq v$ ancak ve ancak $u - v \in C$ şartıyla tanımlanan bağıntısına göre E bir sıralı vektör uzayıdır ve C de onun pozitif konisidir.

Bu kavramlar ile ilgili tezimizde kullanacağımız bazı temel özellikleri ifade edeceğiz daha detaylı bilgi için (Luxemburg and Zaanen, 1971; Zaanen, 2012; Aliprantis and Burkinshaw, 2006) kaynaklarına bakılabilir.

2.1 Teorem (Luxemburg ve Zaanen, 1971) E bir Riesz uzayı olsun. Her f, g , ve h için,

(i) (Birkhoff Eşitliği) $|f \vee h - g \vee h| + |f \wedge h - g \wedge h| = |f - g|$ olur.

(ii) (Birkhoff Eşitsizliği) $|f \vee h - g \vee h| \leq |f - g|$, $|f \wedge h - g \wedge h| \leq |f - g|$ olur.

(iii) $|f^+ - g^+| \leq |f - g|$, $|f^- - g^-| \leq |f - g|$ olur.

2.2 Teorem (Aliprantis and Burkinshaw, 2006) E Riesz uzayında herhangi $x, y, z \in E$ için

(i) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$.

(ii) $x + y = x \vee y + x \wedge y$.

(iii) $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$ ve $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$

(iv) $\alpha \geq 0$ olmak üzere $\alpha(x \wedge y) = \alpha x \wedge \alpha y$ ve $\alpha(x \vee y) = \alpha x \vee \alpha y$

2.2. Yakınsaklık

Bu bölümde, reel dizilerin en temel özelliklerinden bazılarını işaret edeceğiz.

2.7 Tanım $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesine tanımlanan her fonksiyona reel dizi denir.

- $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = n^2$ ifadesi dizi belirtir.
- $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, a(n) = \frac{1}{n}$ ifadesi dizi belirtir.

2.1 Uyarı Reel dizileri göstermek için $f(n), a(n)$ yerine $(f_n), (a_n)$ kullanılır.

2.2.1. Reel dizilerin yakınsaklığı

2.8 Tanım (a_n) reel sayılar dizisi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı; $n \geq n_0$ için $|a_n - L| < \varepsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde bulunabiliyorsa (a_n) , L ye yakınsaktır, L ye de (a_n) nin limiti denir.

- $(a_n) = (\frac{1}{n})$ ifadesi yakınsak dizi belirtir.
- (x_n) reel sayılar dizisini

$$x_n = \begin{cases} n, & \text{eğer } n = k^2 \text{ ise,} \\ 0, & \text{eğer } n \neq k^2 \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. (x_n) yakınsak olmayan bir dizi örneğidir.

(a_n) reel sayılar dizisi için $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) olması durumunda *monoton artan* (*monoton azalan*) denir. (a_n) dizisi *üstten* (*alttan*) *sınırlı* olması her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < M$ ($a_n > M$) olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ sayısının var olmasıdır.

2.3 Teorem Monoton artan (azalan) bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart üstten (alttan) sınırlı olmasıdır.

Öncelikle (a_n) dizisinin monoton artan (azalan) her $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} > a_n$ ($a_{n+1} < a_n$) olması demektir.

(a_n) dizisi üstten (alttan) sınırlı olması her $n \in \mathbb{N}$ için $a_n < M$ ($m < a_n$) olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{R}$) sayısının var olmasıdır.

$(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ için,

- $n+1 > n$ olduğundan $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ yani $a_{n+1} < a_n$ demek olduğundan $\left(\frac{1}{n}\right)$ monoton azalandır,
- Her $n \in \mathbb{N}$ için $0 < \frac{1}{n}$ olduğundan $\frac{1}{n}$ alttan sınırlıdır.

Dolayısıyla $\left(\frac{1}{n}\right)$ dizisi yakınsaktır.

2.2.2. Reel dizilerin istatistiksel yakınsaklığı

Doğal yoğunluk, istatistiksel yakınsaklığın tanımında temel bir rol oynar. Bu bölüme doğal yoğunluğu tanımlayarak başlıyoruz.

2.9 Tanım $A \subset \mathbb{N}$ boştan farklı bir altküme olsun. $x \in \mathbb{N}$ için $A(x)$, x den küçük veya ona eşit A da olan elemanların kümesi yani $A(x) = \{a \in A \mid a \leq x\}$ olsun. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n}$ limiti varsa; bu limite A nın asimptotik (doğal) yoğunluğu denir. $\delta(A)$ ile gösterilir.

2.1 Örnek $A = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$ kümesi için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n}} = 0 \text{ olduğundan } \delta(A) = 0 \text{ olur.}$$

Eğer $\delta(K)$ varsa, o zaman K^c , $\mathbb{N}$ 'de K kümesinin tümleyeni olmak üzere $\delta(K^c) = 1 - \delta(K)$ dır (Niven, Zuckerman and Montgomery, 1991). Eğer (f_n) için doğal yoğunluğu sıfır olan bir küme dışındaki her $n \in \mathbb{N}$ için P özelliğini sağlıyorsa f_n dizisi hemen hemen her n için P özelliğini sağlıyor denir (Fridy, 1985). Bunu h.h.h.n olarak kısaltacağız .

Şimdi ilk defa sistematik şekilde (Fast, 1951) çalışmasında incelenen, reel sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık tanımını verelim.

2.10 Tanım (Reel dizilerin istatistiksel yakınsaklığı) (a_n) reel sayılar dizisi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $\delta(k \in \mathbb{N} : |a_k - L| \geq \varepsilon) = 0$, yani

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |a_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0$$

ise (a_n) dizisi L ye istatistiksel yakınsar denir.

2.2 Uyarı İstatistiksel yakınsaklık ile bilinen yakınsaklığı karşılaştırdığımızda; yakınsak her

dizi istatistiksel yakınsaktır ama, aşağıdaki örnekte görüldüğü üzere istatistiksel yakınsak olan bir dizi, yakınsak dizi olmayabilir.

2.2 Örnek (f_n) reel sayılar dizisini

$$f_n = \begin{cases} k, & \text{eğer } k = n^2 \text{ ise,} \\ 0, & \text{eğer } k \neq n^2 \text{ ise,} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu dizi istatistiksel yakınsak, fakat yakınsak değildir.

2.2.3. Reel dizilerin λ -istatistiksel yakınsaklığı

(λ_n) , pozitif skalerlerin azalmayan $\lambda_1 = 1$ ve $\lambda_{n+1} \leq \lambda_n + 1$ özelliklerini sağlayan bir dizi olsun. Bu durumda $I_n := [n - \lambda_n + 1, n]$ aralıklarını düşünebiliriz.

$M \subset \mathbb{N}$ olsun. M nin λ -yoğunluğu, $\delta_\lambda(M)$ ile gösterilir ve

$$\delta_\lambda(M) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : k \in M\}| \quad (2.3)$$

ile tanımlıdır (Mursaleen, 2000).

2.11 Tanım (λ -istatistiksel yakınsaklık) (x_n) reel dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n} |\{k \in I_n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (2.4)$$

ise (x_n) , L ye λ -istatistiksel yakınsaktır denir, $S_\lambda - \lim x_n = L$ ile gösterilir. Diğer bir deyişle $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - L| \geq \varepsilon\}$ kümesinin λ -yoğunluğu sıfır ise (x_n) dizisi L ye λ -istatistiksel yakınsar.

$\lambda_n = n$ durumunda λ -istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklığın aynı kavramlar olduğu görülür.

2.2.4. Reel dizilerin deferred istatistiksel yakınsaklığı

(Agnew, 1932) çalışmasında Agnew, $x = (x_n)$ reel (kompleks) dizisi için deferred Cesàro ortalaması kavramını aşağıdaki gibi tanımlamıştır: $p = \{p(n)\}$ ve $q = \{q(n)\}$ negatif olmayan

$$p(n) < q(n) \quad \text{ve} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} q(n) = \infty$$

özelliklerini sağlayan diziler olmak üzere

$$(D_{p,q}x)_n = \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} x_k, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (2.5)$$

K , $\mathbb{N}$ Doğal Sayılar kümesinin bir alt kümesi olsun ve $K_{p,q}(n)$ ile $\{k : p(n) < k \leq q(n), k \in K\}$ kümesi gösterilsin.

$$\delta_{p,q}(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} |K_{p,q}(n)|, \quad (2.6)$$

limiti var olduğunda, bu limit K kümesinin *deferred yoğunluğu* olarak tanımlanır. Burada dikey çizgiler $K_{p,q}(n)$ kümesinin eleman sayısını belirtir. Özel olarak $q(n) = n$ ve $p(n) = 0$ durumunu düşündüğümüzde K nin doğal yoğunluğunun elde edildiği görülür.

2.12 Tanım (Deferred istatistiksel yakınsaklık) $x = (x_k)$ reel dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} |\{p(n) < k \leq q(n) : |x_k - L| \geq \varepsilon\}| = 0 \quad (2.7)$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L ye deferred istatistiksel yakınsar denir, $St_{p,q} - \lim x = L$ ile gösterilir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $q(n) = n$ ve $p(n) = 0$ alırsak deferred istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık ile aynıdır (Küçükaslan ve Yılmaztürk, 2016).

2.2.5. Riesz uzaylarında yakınsaklık

E bir Riesz uzayı olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinden E ye tanımlı bir fonksiyona E Riesz uzayında bir dizi denir.

2.3 Örnek Riesz uzayındaki dizi örneği olarak aşağıdaki $f : \mathbb{N} \rightarrow E$ fonksiyonu verilebilir. E Riesz uzayı olarak $\mathbb{R}^2$ üzerinde koordinat bazlı sıralamayı düşünelim. E Riesz uzayında $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_n = \begin{cases} \theta, & \text{eğer } (2k-1)^2 \leq n < (2k)^2 \text{ ise,} \\ (1, 2), & \text{diğer durumda ise,} \end{cases} \quad (2.8)$$

E de bir dizidir.

E Riesz uzayındaki sıralamayı ' $\leq$ ' ile gösterelim. E 'de bir (f_n) dizisi için $f_n \leq f_{n+1}$ ($f_n \geq f_{n+1}$) olması durumunda *monoton artan* (*monoton azalan*) olarak adlandırılır, $f_n \uparrow$ ($f_n \downarrow$) ile gösterilir.

E Riesz uzayı ve $f_n \uparrow$ olsun. Bir $f \in E$ için $\sup f_n = f$ ise (f_n) dizisi f ye monoton artarak yakınsar denir ve $f_n \uparrow f$ ile gösterilir. E Riesz uzayı ve $f_n \downarrow$ olsun. Benzer şekilde bir $f \in E$ için $\inf f_n = f$ ise (f_n) dizisi f ye monoton azalarak yakınsar denir ve $f_n \downarrow f$ ile gösterilir.

2.13 Tanım (Riesz uzayında monoton yakınsaklık) E Riesz uzayı ve f_n , E de dizi olsun. Eğer $n \rightarrow \infty$ için $f_n \uparrow f$ veya $f_n \downarrow f$ ise (f_n) dizisi f ye *monoton yakınsaktır* denir.

2.4 Örnek $\mathbb{R}^2$ üzerinde koordinat bazlı sıralama bağıntısı ile Öklid uzayında bu duruma örnek olan (f_n) dizisi aşağıda verilmiştir:

$$f_n = \begin{cases} (-n, -n), & \text{eğer } n \text{ tek kare ise,} \\ (-n, n), & \text{eğer } n \text{ çift kare ise,} \\ (1 - \frac{1}{n}, 0), & \text{diğer durum,} \end{cases} \quad (2.9)$$

2.14 Tanım (Riesz uzayında sıra yakınsaklık) E Riesz uzayında (f_n) dizisini düşünelim. E de bir $p_n \downarrow \theta$ dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n - f| \leq p_n$ olacak şekilde bulunabiliyorsa (f_n) dizisi f ye *sıra yakınsaktır* denir ve $f_n \xrightarrow{ord} f$ ile gösterilir.

Riesz uzaylarında monoton yakınsamanın, sıra yakınsamanın özel bir durumu olduğuna dikkat çekelim.

Her $n \in \mathbb{N}$ için f_n , $[f, g]$ aralığında ise yani $f \leq f_n \leq g$ özelliğini taşıyorsa, E Riesz uzayında (f_n) dizisi *sıra sınırlıdır* denir.

3. RIESZ UZAYLARINDA İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsaklık çeşitlerini anlatan makaleler, aslına sadık kalınarak incelenecektir. İncelemeler başlıklar halinde sunulacaktır.

3.1. Önbilgi

Tezimizin amacı Riesz uzaylarında istatistiksel yakınsaklık çeşitlerinin incelenmesi ve bu yakınsaklık çeşitlerinde temel sonuçların verilmesidir. Bu tezin ileriki safhalarında Riesz uzayları üzerindeki istatistiksel yakınsaklık çeşitleri aşağıdaki sıra ile incelenecektir.

1. (Ercan, 2009) çalışmasındaki istatistiksel u - düzgün yakınsaklık,
2. (Şençimen ve Pehlivan, 2012) çalışmasındaki istatistiksel monoton yakınsaklık ve istatistiksel sıra yakınsaklık,
3. (Aydın, Çınar ve Et, 2021) çalışmasındaki λ -istatistiksel monoton yakınsaklık ve λ -istatistiksel sıra yakınsaklık,
4. (Küçükaslan ve Aydın, 2024) çalışmasındaki deferred istatistiksel sıra yakınsaklık.

Makaleleri ile belirtilen dört adet İstatistiksel yakınsaklık çeşidi bulunmaktadır. Tezimizde makaleler aslına sadık kalacak şekilde incelenerek, İstatistiksel yakınsaklık tanıtılmaya ve bir araya toplanmaya çalışılmıştır. Tüm kavram ve örnekler makalelerden alınmak ve aslına sadık kalınmak şartıyla tez çalışmasında kullanılmıştır.

3.2. Riesz Uzaylarında İstatistiksel u -Düzgün Yakınsaklık

E bir Riesz uzayı, $u, x \in E$ ve $\theta < u$ ve (x_n) E Riesz uzayında bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı $n \geq n_0$ için $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde eşitsizliği varsa (x_n) dizisinin, x 'e u -düzgün yakınsak denir (Luxemburg and Zaanen, 1971).

Riesz uzayları ve istatistiksel yakınsaklık kavramları ilk olarak Zafer Ercan tarafından (Ercan, 2009) çalışmasında ilişkilendirilmiştir. Bu bölümde (Ercan, 2009) çalışmasında geçen tanım ve sonuçlardan dizilerin istatistiksel yakınsaklık konusuyla ilişkili olanlarına odaklanılarak inceleme yapılacaktır. Yukarıda ifade edilen Riesz uzaylarında u -düzgün yakınsaklık kavramının istatistiksel versiyonu aşağıdaki gibi verilmiştir.

3.1 Tanım (İstatistiksel u -Düzgün Yakınsaklık) $p > 0$ bir reel sayı ve E bir Riesz uzayı, $\theta < u \in E$ pozitif eleman ve (x_n) , E Riesz uzayında bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} |\{k : k \leq n, (|x_k - x| - \varepsilon u)^+ > \theta\}| = 0 \quad (3.1)$$

oluyorsa (x_n) dizisi, p -istatistik dizidir denir, $(x_n) \xrightarrow{p-st} x(u)$ olarak gösterilir. Eğer $p = 1$ ise (x_n) dizisi istatistiksel u -düzgün yakınsak dizi olarak adlandırılır.

Konuyu destekleyecek şekilde aşağıdaki teoremi paylaşıyoruz.

3.1 Teorem α reel sayı ve E bir Riesz uzayı olsun. $(x_n) \xrightarrow{st} x(u)$ ve $(y_n) \xrightarrow{st} y(v)$ özelliğine sahip iki diziyi düşünelim. O zaman $(\alpha x_n + y_n) \xrightarrow{st} \alpha x + y(u+v)$ ve $(x_n \vee y_n) \xrightarrow{st} x \vee y(u+v)$ durumları elde edilir. Özel olarak $x_n^+ \xrightarrow{st} x^+(u)$, $x_n^- \xrightarrow{st} x^-(u)$ ve $|x_n| \xrightarrow{st} |x|(u)$ olur.

E Riesz uzayında eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\theta \leq x \leq n^{-1}y$ iken $x = \theta$ gerektiriyorsa, E ye *Arşimedyen* denir. Önceki teoremi düşündüğümüzde şu ortaya çıkar; Arşimedyen Riesz uzayında istatistiksel limit tektir.

3.1 Sonuç Bir Riesz uzayının Arşimedyen olması için gerek ve yeter şart her $\theta \leq u$ için her istatistiksel u -düzgün yakınsak dizinin limitinin tek olmasıdır.

Kanıt E bir Arşimedyen Riesz uzayı ve $x_n \xrightarrow{st} x(u)$ ve $x_n \xrightarrow{st} y(u)$ olacak şekilde iki dizi olsun. Dolayısıyla $|x_n - x| + |x_n - y| \xrightarrow{st} \theta(u)$ olur. Bir $0 < \varepsilon$ için $\theta < (|x - y| - \varepsilon u)^+$ olduğunu kabul edelim. Bu ise her n için, $\theta < (|x_n - x| + |x_n - y| - \varepsilon u)^+$ olur, ki bu bir çelişkidir. Buradan her $0 < \varepsilon$ için $|x - y| \geq \varepsilon u$ olur, bu ise $x = y$ olur.

Tersine her n için, $\theta \leq x \leq n^{-1}y$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x_n = x \xrightarrow{st} x(y)$ ve $x_n = x \xrightarrow{st} \theta(y)$ olur. Limit tek olduğundan $x = \theta$ sonucu ortaya çıkar. $\square$

(Ercan, 2009) çalışmasındaki tanımı temel alarak, (Şençimen ve Pehlivan, 2012) çalışmasında Riesz uzaylarındaki istatistiksel sıra yakınsak çeşidi çalışılmıştır.

3.3. Riesz Uzaylarında İstatistiksel Sıra Yakınsaklık

Riesz uzaylarında istatistiksel sıra yakınsaklık kavramını, (Şençimen ve Pehlivan, 2012) makalesini inceleyerek tanıtacağız. Riesz uzayları üzerindeki istatistiksel monoton yakınsaklık kavramı tanıtılmıştır. Bu kavramın reel dizilerdeki karşılığına bir genelleme sunularak temel özellikleri incelenmiştir. Aslında, bu bölümde sonuçlarını incelediğimiz makale istatistiksel yakınsaklık çeşitlerini kapsamlı alan temel makalemiz olmuştur. Tezimizin konusu gereği (Şençimen ve Pehlivan, 2012) alıntı yaptığımız makalede, aslına sadık kalarak aşağıda istatistiksel sıra yakınsaklık çeşidini inceleyeceğiz.

3.3.1. İstatistiksel monoton yakınsaklık

3.2 Tanım (İstatistiksel Monoton Dizi) E bir Riesz uzayı ve (f_n) , E de bir dizi olsun. Eğer $\delta(K) = 1$ olan $K = \{n_1 < n_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ indis kümesi her $n_k \in K$ için (f_{n_k}) artan olacak şekilde varsa (f_n) dizisi istatistiksel monoton artandır (kısaca smi) denir.

Benzer şekilde $\delta(K) = 1$ olan $K = \{n_1 < n_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ alt kümesi her $n_k \in K$ için (f_{n_k}) azalan olacak şekilde varsa (f_n) dizisi istatistiksel monoton azalandır (kısaca smd) denir.

Bu durumlar sırasıyla $f_n \uparrow^{st}$ ve $f_n \downarrow^{st}$ ile gösterilir.

Bir smi veya smd dizisine istatistiksel monotonik dizi adı verilir. Bir smi dizisinin, E 'de azalan veya karşılaştırılamayan elemanlarından oluşan bir alt dizi içerebileceğini, böyle bir alt dizinin indis kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olacağına dikkat ediniz. Benzer durum smd dizisi için de geçerlidir. Makaleden alıntı yaparak aşağıdaki durumları incelemeye devam ediyoruz.

3.2 Teorem E bir Riesz uzayı ve (f_n) , E 'de bir dizi olsun. H.h.h.n için $f_n = g_n$ olacak şekilde monoton bir (g_n) dizi mevcut ise, o zaman (f_n) dizisi istatistiksel monotondur denir.

3.3 Teorem E bir Riesz uzayı ve (f_n) E 'de bir dizi olsun. Aşağıdakiler durumlar sağlanır:

- (i) eğer (f_n) smi dizi ise $\delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \not\leq f_{n+1}\} = 0$ olur,
- (ii) eğer (f_n) smd dizi ise $\delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \not\geq f_{n+1}\} = 0$ olur,

Kanıt (i) (f_n) , E Riesz uzayında bir smi dizi olsun. O halde $\delta(K) = 1$ olan $K = \{n_1 < n_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi (f_{n_k}) artan olacak şekilde mevcuttur. $\delta\{n \in K : f_n \leq f_{n+1}\} \subset \delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \leq f_{n+1}\}$ durumu varolduğundan $\delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \leq f_{n+1}\} = 1$ olur, dolayısıyla tümleyeni $\{n \in \mathbb{N} : f_n \not\leq f_{n+1}\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır.

(ii) Bu kısım (i)'e benzerdir. □

Yukarıdaki teoremin tersi genel olarak geçerli değildir, aksine örnek olarak aşağıdaki örnek verilebilir.

3.1 Örnek $\mathbb{R}^2$ yi koordinat bazlı sıralama bağıntısıyla düşünelim ve (f_n) bu uzayda bir dizi olsun. E de $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$f_n = \begin{cases} \theta, & \text{eğer } (2k-1)^2 \leq n < (2k)^2 \text{ ise,} \\ (1, 2), & \text{diğer durumda ise,} \end{cases} \quad (3.2)$$

dizisi olsun. Dolayısıyla $\delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \not\leq f_{n+1}\} = 0$ olur. Ancak $\delta(K) = 1$ ve her $n_k \in K$ için (f_{n_k}) artan olacak şekilde bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi mevcut değildir, yani (f_n) smi değildir.

3.3 Tanım (İstatistiksel Monoton Yakınsaklık) E bir Riesz uzayı ve (f_n) , E Riesz uzayında bir dizi olsun. Eğer $\delta(K) = 1$ olan bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi için $\sup_{k \in \mathbb{N}} (f_{n_k}) = f$ olacak şekilde artan (f_{n_k}) dizisi varsa, (f_n) dizisi f ye artarak istatistiksel monoton yakınsar denir, $f_n \uparrow^{st} f$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, eğer $\delta(K) = 1$ olan bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi için $\inf_{k \in \mathbb{N}} (f_{n_k}) = f$ olacak şekilde azalan (f_{n_k}) dizisi varsa (f_n) dizisi f ye azalarak istatistiksel monoton yakınsar denir. $f_{n_k} = f$ ise $f_n \downarrow^{st} f$ gösterilir.

Eğer $f_n \uparrow^{st} f$ veya $f_n \downarrow^{st} f$ ise, o zaman (f_n) dizisi, f 'ye istatistiksel monoton yakınsaktır denir.

Monoton yakınsamanın istatistiksel monoton yakınsamayı gerektirdiğine dikkat edelim, ancak aşağıdaki örnekte görülebileceği gibi, genel olarak bunun tersi geçerli değildir.

3.2 Örnek $\mathbb{R}^2$ uzayını koordinat bazlı sıralama ile düşünelim. Şimdi bu uzaydaki bir (f_n) dizisini şu şekilde tanımlayalım:

$$f_n = \begin{cases} (n, n), & \text{eğer } n = k^2 \text{ ise,} \\ (1 - \frac{1}{n}, 0), & \text{eğer } n \neq k^2 \text{ ise,} \end{cases} \quad (3.3)$$

Böylece $k \in \mathbb{N}, n \neq k^2$ olmak üzere $f_n \uparrow^{st} (1, 0)$ elde ederiz. Diziyi incelediğimizde (f_n) dizisi monoton değildir. Ancak istatistiksel monotondur.

3.1 Uyarı Eğer $f_n \uparrow f$ ise $n_1 < n_2 < \dots < \dots$ olmak üzere (f_{n_k}) her alt dizi için $f_{n_k} \uparrow f$ olduğu bilinmektedir. Benzer durum azalan bir dizi için de söz konusudur. Ancak bu durum istatistiksel monoton yakınsama söz konusu olduğunda geçerli değildir. Örneğin, bir önceki örnekteki diziyi göz önünde bulunduralım. $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $n_k = k^2$ için (f_{n_k}) alt dizisinin, bir supremumu yoktur.

Ayrıca bir smi dizisi, azalan veya karşılaştırılamayan elemanların bir alt dizisini içerebilir. $\mathbb{R}^2$ koordinat bazlı sıralama uzayında bu duruma örnek olan (f_n) dizisi aşağıda verilmiştir:

$$f_n = \begin{cases} (-n, -n), & \text{eğer } n \text{ tek kare ise,} \\ (-n, n), & \text{eğer } n \text{ çift kare ise,} \\ (1 - \frac{1}{n}, 0), & \text{diğer durum,} \end{cases} \quad (3.4)$$

Benzer durumlar smd dizileri için de geçerlidir. Aşağıdaki teoremden, istatistiksel monoton yakınsak dizinin istatistiksel limitini tek olduğunu göstereceğiz.

3.4 Teorem E bir Riesz uzayı ve (f_n) , E 'de bir dizi olsun. Eğer $f_n \downarrow^{st} f$ ise, o zaman $\delta\{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\} = 1$ olmak üzere (f_{n_k}) her azalan alt dizi için $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_{n_k} = f$ dir. Benzer şekilde, eğer $f_n \uparrow^{st} f$ ise o zaman $\delta\{n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots\} = 1$ olmak üzere (f_{n_m}) her artan alt dizi için $\sup_{m \in \mathbb{N}} f_{n_m} = f$ dir.

Kanıt Teoremin ilk kısmını ispatlayacağız. Diğer kısım benzer şekilde kanıtlanabilir. $f_n \downarrow^{st} f$ olsun. O zaman bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\} \subset \mathbb{N}$, $\delta(K) = 1$ için (f_{n_k}) azalandır ve $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_{n_k} = f$ dir. Şimdi $L = \{m_1 < m_2 < \dots < m_l < \dots\} \subset \mathbb{N}$, $\delta(L) = 1$ için (f_{m_l}) azalan olacak şekilde $K \neq L$ kümesi olsun. Eğer böyle bir L kümesi yoksa ispatlanacak bir şey yoktur. Biz $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_{m_k} = f$ olduğunu göstereceğiz. İlk olarak, her $k \in \mathbb{N}$ için $f_{n_k} \geq f$ ve $\delta(K \cap L) = 1$ olduğundan K ve L kümeleri hemen hemen eşittir. Şimdi $n_k \in K$ ve $m_l \in L$ üzerinde $n_k = m_l$ olacak şekilde seçebiliriz. Buradan $f_{n_k} = f_{m_l}$ olur. Böylece $\{f_{m_1} \geq f_{m_2} \geq \dots \geq f_{m_l}\} = f_{n_k} \geq f$ olur. Bu şekilde sonsuz sayıda birbirine eşit olan indis çifti bulabiliriz. Böyle devam ederek her $k \in \mathbb{N}$ için $f_{m_k} \geq f$ elde ederiz. Dolayısıyla $f \in E$, (f_{m_k}) alt dizinin bir alt sınırıdır. Şimdi (f_{m_k}) 'nin başka bir alt sınırının olduğunu düşünelim, bunu $g \in E$ ile gösterelim. Yani her $k \in \mathbb{N}$ için $f_{m_k} \geq g$ olsun. O zaman bir $k \in \mathbb{N}$ için $f_{n_{k_1}}$ elemanı, $f_{n_{k_1}} = f_{m_k} \geq g$ olacak şekilde bulabiliriz. Bu şekilde devam edersek, $(f_{n_{k_1}}, f_{n_{k_2}}, \dots)$ olacak şekilde oluşturulan (f_{n_k}) dizisinin $f_{n_{k_1}}$ alt dizisinin, g alt sınırı olur. $f_{n_k} \downarrow^{st} f$ olduğundan (f_{n_k}) 'nin her alt dizisinin infimumu f 'tir. Dolayısıyla $g \leq f$ elde edilir. g keyfi olduğundan $\inf_{k \in \mathbb{N}} f_{m_k} = f$ olur. $\square$

3.5 Teorem (i) Eğer $f_n \uparrow^{st} f$ ve $\alpha \geq 0$ ise $\alpha f_n \uparrow^{st} \alpha f$ olur. Benzer durum, bir smd dizisi için de geçerlidir.

(ii) Eğer $p_n \downarrow^{st} \theta$ ve $q_n \downarrow^{st} \theta$ ise $(p_n + q_n) \downarrow^{st} \theta$ olur.

(iii) E Riesz uzayında $p_n \downarrow^{st} \theta$ özelliğindeki bir (p_n) dizisi ve $\delta(K) = 1$ olan $K = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi olacak şekilde, $n \in K$ için $\theta \leq r_n \leq p_n$ eşitsizliği varsa (r_n) smd olur. Bu durumda $r_n \downarrow^{st} \theta$ elde edilir. Eğer (r_n) smi ise, o zaman h.h.h. n için $r_n = \theta$ olur.

Kanıt (i) 3.3 Tanımdan anlaşılmaktadır.

(ii) $p_n \downarrow^{st} \theta$ ve $q_n \downarrow^{st} \theta$ iki dizi olsun. O halde $\delta(K) = 1$ olan bir $K = \{n_1 < n_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi ve $\inf_{k \in \mathbb{N}} p_{n_k} = \theta$ olan (p_{n_k}) azalan dizisi vardır. Buradan $\delta(L) = 1$ olan $L = \{m_1 < m_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi ve $\inf_{k \in \mathbb{N}} q_{m_k} = \theta$ olan (q_{m_k}) azalan dizisi vardır. Şimdi $\delta(K \cap L) = 1$ olan $(K \cap L) = \{l_1 < l_2 < \dots < \dots\}$ kümesini ele alalım. Burada her $k \in \mathbb{N}$ için $(p_{l_k} + q_{l_k}) \geq \theta$ olur. Bu nedenle $(p_{l_k} + q_{l_k})$ dizisi azalandır. $h \neq \theta$ olacak şekilde h , bu dizinin bir alt sınırı olsun. Bundan dolayı $k \in \mathbb{N}$ için $l \leq l_k$, burada $l \in K \cap L$ sabittir, $h \leq p_{l_k} + q_{l_k} \leq p_l + q_{l_k}$ var ve dolayısıyla $h \leq \inf_{k \in \mathbb{N}} (p_l + q_{l_k}) = p_l$ dir. Son ifade her $l \in K \cap L$ için geçerlidir ve dolayısıyla $h \leq \inf_{l \in K \cap L} p_l = \theta$ için $\inf_{k \in \mathbb{N}} (p_{l_k} + q_{l_k}) = \theta$ olur. Bu da $(p_n + q_n) \downarrow^{st} \theta$ olduğunu belirtir.

(iii) Hipoteze göre $\delta(L) = \delta(M) = 1$ olan $L = \{l_1 < l_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ ve $M = \{m_1 < m_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ iki küme ve $\inf_{n \in \mathbb{N}} p_{l_n} = \theta$ olmak üzere (p_{l_n}) ve (r_{m_n}) azalan dizileri vardır. Şimdi $\delta(S) = 1$ olan $S = K \cap L \cap M$ kümesini düşünelim. Her $s \in S$ için $\theta \leq r_s \leq p_s \downarrow^{st} \theta$ yazılabileceğinden (r_s) azalandır. Buradan $r_s \downarrow^{st} \theta$ olur, bu da $r_n \downarrow^{st} \theta$ olduğunu belirtir. Şimdi (r_n) 'nin smi olduğunu varsayalım. Daha sonra $\delta(T) = 1$ olan $T = \{t_1 < t_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ bir kümesi vardır, dolayısıyla (r_{t_n}) artandır. O halde $K \cap T \cap L$ kümesini alırsak $\delta(K \cap T \cap L) = 1$ dir ve her bir $j, n \in K \cap T \cap L$ için $j \leq n$ ve $\theta \leq r_j \leq r_n \leq p_n \downarrow^{st} \theta$ yı elde ederiz. Böylece her $n \in K \cap T \cap L$ h.h.h. n için $r_n = \theta$ olduğunu belirtir. $\square$

İstatistiksel monoton yakınsaklık, daha genel bir yakınsamanın, yani aşağıda tanıttığımız istatistiksel sıra yakınsamasının özel bir durumudur.

3.3.2. İstatistiksel sıra yakınsaklık

3.4 Tanım (Şençimen ve Pehlivan, 2012) E bir Riesz uzayı, (f_n) , E de bir dizi ve $f \in E$ olsun. E de $p_n \downarrow^{st} \theta$ özelliğindeki bir (p_n) dizisi ve $\delta(K) = 1$ olan $K = \{n_1 < n_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ indis kümesi, her $n_k \in K$ için $|f_{n_k} - f| \leq p_{n_k}$ olacak şekilde varsa, (f_n) dizisi E de f ye istatistiksel sıra yakınsaktır denir ve $f_n \xrightarrow{st-ord} f$ olarak gösterilir. f ye (f_n) nin istatistiksel sıra limiti denir.

Şimdi 2.14 Tanımda verilen sıra yakınsaklık ile yukarıda verdiğimiz istatistiksel sıra yakınsaklığı karşılaştıralım. Sıra yakınsak dizi aynı zamanda istatistiksel sıra yakınsak olduğu görülür, fakat aşağıdaki örnekte bu önermenin tersinin geçerli olmadığı görülür.

3.3 Örnek $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesini alışlagelmiş sıralama ile ele alalım. $\mathbb{R}$ 'de (f_n) dizisini $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$f_n = \begin{cases} n^2, & \text{eğer } n = k^2, \\ \frac{1}{n+1}, & \text{diğer durum,} \end{cases} \quad (3.5)$$

$\mathbb{R}$ de (p_n) dizisini,

$$p_n = \begin{cases} n, & \text{eğer } n = k^2, \\ \frac{1}{n}, & \text{diğer durum,} \end{cases} \quad (3.6)$$

olarak seçersek, $p_n \downarrow^{st} \theta$ olur. $K = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ tam kare değildir}\} \cup \{1\}$ olarak alırsak $\delta(K) = 1$ dir ve her $n \in K$ için $|f_n - \theta| \leq p_n$ elde ederiz. Dolayısıyla $f_n \xrightarrow{st-ord} \theta$ olur.

İstatistiksel sıra yakınsak bir dizinin sıra sınırlı olması gerekmediğine dikkat edelim ve istatistiksel sıra yakınsak bir dizinin bir alt dizisinin, istatistiksel sıra yakınsak olması gerekmediği de belirtilmelidir. Bu durum aşağıdaki örnekte görülebilir.

3.4 Örnek (f_n) , $\mathbb{R}$ 'de şu şekilde tanımlanan bir dizi olsun:

$$f_n = \begin{cases} n-1, & \text{eğer } n = k^2, \\ n, & \text{eğer } n \text{ asal,} \\ \frac{1}{n+1}, & \text{diğer durum,} \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ de (p_n) dizisini,

$$p_n = \begin{cases} n, & \text{eğer } n = k^2, \\ \frac{1}{n}, & \text{diğer durum,} \end{cases}$$

olarak seçersek, $p_n \downarrow^{st} \theta$ olur. $K = \{n \in \mathbb{N} : n \text{ asal sayısı değildir}\}$ olarak alırsak ve her $n \in K$ için $|f_n - \theta| \leq p_n$ elde ederiz. Dolayısıyla $f_n \xrightarrow{st-ord} \theta$ olur.

Aşağıdaki teoremden istatistiksel sıra yakınsama için gerek ve yeter şart sunulmaktadır.

3.6 Teorem E bir Riesz uzayı ve (f_n) , E 'de bir dizi olsun. O zaman (f_n) dizisi $f \in E$ ye istatistiksel sıra yakınsak olması için gerek ve yeter şart h.h.h.n için $f_n = g_n$ olan (g_n) dizisi f ye sıra yakınsak olacak şekilde vardır.

Kanıt ($\implies$) Bu kısım 3.4 Tanımdan açıkça anlaşılmaktadır.

($\impliedby$) H.h.h.n için $f_n = g_n$ ve $g_n \xrightarrow{ord} f$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \downarrow \theta$ (dolayısıyla $p_n \downarrow^{st} \theta$) ve $|g_n - f| \leq p_n$ olacak şekilde (p_n) dizisi vardır. Böylece,

$$\{n \leq m : |f_n - f| \not\leq p_n\} \subset \{n \leq m : f_n \not\leq g_n\} \cup \{n \leq m : |g_n - f| \not\leq p_n\} \quad (3.7)$$

olarak yazılabilir.

$g_n \xrightarrow{ord} f$ olduğundan 3.7 in sağ tarafındaki ikinci küme boşdur. Dolayısıyla

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{n \leq m : |f_n - f| \not\leq p_n\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m} |\{n \leq m : |f_n - \theta| \not\leq g_n\}|$$

eşitsizliği vardır. Böylece, $\delta\{n \in \mathbb{N} : |f_n - f| \not\leq p_n\} = 0$, yani $(f_n) \xrightarrow{st-ord} f$ elde edilir. $\square$

3.7 Teorem E bir Riesz uzayı olsun. Aşağıdakiler geçerlidir:

- (i) İstatistiksel sıra limiti varsa tektir.
- (ii) İstatistiksel sıra limiti doğrusaldır.
- (iii) İstatistiksel monoton yakınsaklık, istatistiksel sıra yakınsamayı gerektirir.
- (iv) Eğer (f_n) , E 'de $(f_n) \xrightarrow{st-ord} f$ olacak şekilde bir dizi ve h.h.h.n için $f_n \geq g$ ise $f \geq g$ dir.

Kanıt (i) (f_n) , E 'de bir dizi olsun. $(f_n) \xrightarrow{st-ord} f$ ve $(f_n) \xrightarrow{st-ord} g$ olduğunu varsayalım. Bu durumda E de, $p_n \downarrow^{st} \theta$ ve $q_n \downarrow^{st} \theta$ özelliklerine sahip (p_n) ve (q_n) dizileri ve $\delta(K) = 1$ olan $K = \{n_1 < n_2 < \dots < \dots\}$ kümesi, her $n_k \in K$ için $|f_{n_k} - f| \leq p_{n_k}$ ve $|f_{n_k} - g| \leq q_{n_k}$ olacak şekilde vardır. $\theta \leq |f - g| \leq |f_{n_k} - f| + |f_{n_k} - g| \leq p_{n_k} + q_{n_k}$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlik her $k \in \mathbb{N}$ için geçerli olduğundan $|f - g| = 0$ olur, bu da $f = g$ yi gerektirir.

(ii) (f_n) , E Riesz uzayında bir dizi olsun.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olarak $(f_n) \xrightarrow{st-ord} f$ istatistiksel sıra limitinin doğrusallığını gösterelim.

Doğrusallık için ilk durum olan $\alpha(f_n) \xrightarrow{st-ord} \alpha f$ bu ifade aşıkardır.

Doğrusallık için ikinci durumu göstermek için (g_n) , E 'de $(g_n) \xrightarrow{st-ord} g$ olacak şekilde bir dizi alalım.

O zaman $\delta\{n \in \mathbb{N} : |f_n - f| \not\leq p_n\} = 0$ ve $\delta\{n \in \mathbb{N} : |g_n - g| \not\leq q_n\} = 0$ özellikleri olan $p_n \downarrow \theta$ ve $q_n \downarrow \theta$ olacak şekilde (p_n) ve (q_n) dizileri vardır.

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n - f + g_n - g| \not\leq p_n + q_n\} \subset [\{n \in \mathbb{N} : |f_n - f| \not\leq p_n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : |g_n - g| \not\leq q_n\}]$$

ifadesini yazabiliriz.

Böylece $\delta\{n \in \mathbb{N} : |(f_n + g_n) - (f + g)| \not\leq p_n + q_n\} = 0$ eşitliği elde edilir. 3.5 Teorem (ii) den $(p_n + q_n) \downarrow \theta$ elde ederiz. Bu durum $(f_n) + (g_n) \xrightarrow{st-ord} f + g$ anlamına gelir.

(iii) 3.3 Tanım ve 3.4 Tanımlarından elde edilir. □

3.8 Teorem (Sıkıştırma Teoremi) E bir Riesz uzayı ve E de (f_n) , (g_n) ve (h_n) dizileri olsun. $\delta(K) = 1$ olan K kümesi, her $n \in K \subset \mathbb{N}$ için $f_n \leq g_n \leq h_n$ eşitsizliği, $(f_n) \xrightarrow{st-ord} f$ ve $(h_n) \xrightarrow{st-ord} f$ sağlayacak şekilde varsa, (g_n) dizisi için $(g_n) \xrightarrow{st-ord} f$ olur.

Kanıt E bir Riesz uzayında $\delta(L) = \delta(M) = 1$ olan $L, M \subseteq \mathbb{N}$ iki kümenin elemanları için $p_n \downarrow \theta$ ile $q_n \downarrow \theta$ özelliklerini sağlayan, (p_n) ve (q_n) dizilerini düşünelim. L kümesi için $p_n \downarrow \theta$ olduğundan $|f_n - f| \leq p_n$ eşitsizliği vardır. M kümesi için $q_n \downarrow \theta$ dizisinin özelliğinden $|h_n - f| \leq q_n$ eşitsizliği vardır. Bu iki eşitsizlik durumlarından, $\delta(L \cap M \cap K) = 1$ olan kesişim kümesinde her bir $n \in L \cap M \cap K$ için, $|g_n - f| \leq p_n + q_n$ eşitsizliği vardır. Dolayısıyla $\delta\{n \in \mathbb{N} : |g_n - f| \leq p_n + q_n\} = 1$ elde ederiz. Burada 3.5 Teorem (ii) den $(p_n + q_n) \downarrow^{\theta} \theta$ elde ederiz. 3.5 Teorem (ii) den $(g_n) \xrightarrow{st-ord} f$ olduğu anlamına gelir. □

3.5 Tanım E bir Riesz uzayı ve (f_n) , E de bir dizi olsun. Eğer $\delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \notin [f, g]\} = 0$ olacak şekilde $[f, g]$ gibi bir sıra aralığı varsa, (f_n) dizisi istatistiksel sıra sınırlıdır denir.

Sıra sınırlı bir dizinin istatistiksel sıra sınırlı olduğu açıktır, ancak bunun tersi geçerli değildir (bkz. 3.2 Örnek).

3.9 Teorem (Ayrışma) E bir Riesz uzayı ve (f_n) , E 'de bir dizi olsun. Eğer (f_n) istatistiksel sıra sınırlı ise (g_n) sıra sınırlı, $\delta\{n \in \mathbb{N} : h_n \neq \theta\} = 0$ ve $(f_n) = (g_n) + (h_n)$ özelliklerini sağlayacak E de (g_n) ve (h_n) dizileri vardır.

Kanıt (f_n) , E 'de istatistiksel sıra sınırlı bir dizi olsun. $\delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \notin [f, g]\} = 0$ olacak şekilde bir $[f, g]$ sıra aralığı vardır. $K = \{n \in \mathbb{N} : f_n \notin [f, g]\}$ olarak alalım.

$$g_n = \begin{cases} \theta, & \text{eğer } n \in K, \\ f_n, & \text{eğer } n \notin K, \end{cases} \quad (3.8)$$

ve

$$h_n = \begin{cases} f_n, & \text{eğer } n \in K, \\ \theta, & \text{eğer } n \notin K, \end{cases} \quad (3.9)$$

olarak tanımlayalım. Bu tanımına göre (g_n) sıra sınırlıdır, $\delta\{n \in \mathbb{N} : h_n \neq \theta\} = 0$ ve $(f_n) = (g_n) + (h_n)$ elde edilir. $\square$

3.10 Teorem Bir E Riesz uzayında istatistiksel sıra yakınsak bir dizi, istatistiksel sıra sınırlıdır.

Kanıt 3.4 Tanımdan E bir Riesz uzayı ve E de (p_n) , $p_n \downarrow^{st} \theta$ özelliğine sahip dizi olsun. 3.4 tanımdan E bir Riesz uzayı, f_n E de bir dizi ve $f \in E$ olsun. E de $p_n \downarrow^{st} \theta$ özelliğindeki bir (p_n) dizisi ve $\delta(K) = 1$ olan $K = \{n_1 < n_2 < \dots < \dots\} \subset \mathbb{N}$ kümesi, her $n \in K$ için $|f_n - f| \not\leq p_n$ olacak şekilde varsa (f_n) , E 'de istatistiksel sıra dizi olduğunu biliyoruz. $p_n \downarrow^{st} \theta$ özelliğinden dolayı (p_n) dizisi istatistiksel azalarak sıfıra yakınsayan bir dizi olduğundan, $[(p_n), \theta]$ aralığı oluşur. 3.5 Tanımdan E bir Riesz uzayı ve (f_n) , E 'de bir dizi olsun. Eğer $\delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \notin [f, g]\} \neq 0$ olacak şekilde $[f, g]$ gibi bir sıra aralığı varsa, O zaman (f_n) dizisi istatistiksel sıra sınırlı olduğunu biliyoruz. $\delta\{n \in \mathbb{N} : f_n \notin [p_n, \theta]\} = 0$ yoğunluğu elde edildiğinden, f_n istatistiksel sıra yakınsak dizisi, istatistiksel sıra sınırlıdır. $\square$

3.4. Riesz Uzaylarında λ -İstatistiksel Yakınsalık

Bu bölümde (Aydın, Çınar ve Et, 2021) çalışmasındaki, λ -istatistiksel monoton ve λ -istatistiksel sıra yakınsaklık kavramları ve bu kavramla ilgili limit sonuçları incelenecektir.

3.4.1. λ -İstatistiksel monoton diziler

Bu kısımda (Aydın, Çınar ve Et, 2021) çalışmasında yer alan λ -yoğunluğu kavramlarını kullanarak Riesz uzaylarında λ -istatistiksel monoton dizi kavramını tanıtmayla başlıyoruz.

3.6 Tanım E bir Riesz uzayı ve (x_n) , E de bir dizi olsun. Doğal sayılar kümesinin $\delta_\lambda(M) = 1$ olan $M = \{n_1 < n_2 \dots\}$ alt indis kümesi her $m \in \mathbb{N}$ için $(x_{n_m})_{m \in \mathbb{N}}$ monoton azalan (artan) olacak şekilde varsa (x_n) dizisine λ -istatistiksel azalan (artan) dizi denir. Ayrıca bir $x \in E$ için $\inf(x_n) = x$ ($\sup(x_n) = x$) ise, (x_n) dizisi x e istatistiksel monoton azalarak (artarak) yakınsar denir ve $x_n \downarrow^{\lambda_{st}} x$ ($x_{n_m} \uparrow^{\lambda_{st}} x$) ile gösterilir.

Eğer $x_{n_m} \downarrow^{\lambda_{st}} x$ ya da $x_{n_m} \uparrow^{\lambda_{st}} x$ ise, E de (x_n) dizisi x e λ -istatistiksel monoton yakınsaktır denir.

3.11 Önerme Riesz uzayında her monoton dizi λ -istatistiksel monotondur.

Kanıt E Riesz uzayında (x_n) dizisi monoton azalan bir dizi olsun (monoton artan durumu benzer şekildedir). 3.6 Tanımdaki $\delta_\lambda(M) = 1$ özelliğinde $M = \{n_1 < n_2 \dots < n_m < \dots\}$ alt kümesini $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin kendisi olarak seçelim. Bu durumda her $m \in \mathbb{N}$ için (x_{n_m}) dizisi azalan ve $\delta_\lambda(M) = 1$ olur. Bu durumda (x_n) dizisinin λ -istatistiksel azalan olduğu anlamına gelir. $\square$

3.11 Önermeden tersi genel olarak geçerli değildir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği ele alıyoruz.

3.5 Örnek Riesz uzayı olarak $E = \mathbb{N}$ olsun, ve (x_k) dizisi, E Riesz uzayında aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$x_k := \begin{cases} 1, & \text{eğer } n - \lfloor \sqrt{\lambda_n} \rfloor + 1 \leq k \leq n, \\ k, & \text{diğer durumda.} \end{cases} \quad (3.10)$$

(x_k) dizisi, λ -istatistiksel artan bir dizidir, ancak monoton artan değildir.

Sıra yakınsama, λ -istatistiksel monoton yakınsamayı gerektirmez, çünkü sıra yakınsak dizi monoton olmak zorunda değil. Fakat bu durum ile ilgili aşağıdaki önermeyi sunabiliriz.

3.12 Önerme Riesz uzaylarındaki her sıra yakınsak azalan dizi, sıra limitine λ - istatistiksel yakınsaktır.

Kanıt E Riesz uzayı ve E de (x_n) , $x \in E$ ye sıra yakınsayan bir dizi olsun. Dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için E de bir $(y_n) \downarrow \theta$ dizisi $|x_n - x| \leq y_n$ eşitsizliğini sağlar şekilde vardır. y_n azalan olduğundan 3.11 Önermeden (y_n) dizisinin λ - istatistiksel monoton dizidir. Yani, $(y_n) \downarrow^{\lambda st} \theta$ olur. Dolayısıyla, doğal sayıların $\delta_\lambda(M) = 1$ özelliğindeki M alt kümesi, her $m \in \mathbb{N}$ için $(y_{n_m}) \downarrow \theta$ olacak şekilde vardır. Bu da $(x_{n_m}) \downarrow x$ olmasını gerektirir. $\square$

3.13 Önerme E Riesz uzayında (x_n) dizisi, λ -istatistiksel artan bir dizi ise, $\{n \in \mathbb{N} : x_n \not\leq x_{n+1}\}$ kümesinin λ -yoğunluğu sıfıra eşittir.

Kanıt E Riesz uzayı, (x_n) dizisi E de λ -istatistiksel artan bir dizi olsun. $\delta_\lambda(M) = 1$ olan $M = \{n_1 < n_2, \dots\} \subset \mathbb{N}$ bir alt kümesi her $m \in \mathbb{N}$ için (x_n) dizisi monoton artan, yani her $m \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq x_{n+1}$ olacak şekilde vardır. Kümelerin tümleyen özelliğinden $\{n \in \mathbb{N} : x_n \not\leq x_{n+1}\} \subseteq \mathbb{N} - M$ olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\delta_\lambda(\mathbb{N} - M) = 0$ olduğundan $\delta_\lambda\{n \in \mathbb{N} : x_n \not\leq x_{n+1}\} = 0$ olur. $\square$

3.2 Sonuç Eğer (x_n) dizisi λ -istatistiksel azalan bir dizi ise, $\delta_\lambda\{n \in \mathbb{N} : x_n \not\leq x_{n+1}\} = 0$ olur.

3.14 Teorem Riesz uzaylarında $(x_n) \downarrow^{\lambda st} x$ ve $(y_n) \downarrow^{\lambda st} y$ ise $(x_n \vee y_n) \downarrow^{\lambda st} x \vee y$ olur.

Kanıt E Riesz uzayı ve E de $(x_n) \downarrow^{\lambda st} x$ ile $(y_n) \downarrow^{\lambda st} y$ olsun. $\mathbb{N}$ doğalsayılar kümesinin $\delta_\lambda(M_1) = \delta_\lambda(M_2) = 1$ olan M_1 ve M_2 alt kümeleri $x, y \in E$ için $(x_{n_i})_{n_i \in M_1} \downarrow x$ ve $(y_{n_j})_{n_j \in M_2} \downarrow y$ olacak şekilde mevcuttur. $M = M_1 \cap M_2$ kümesini ele alalım. $\delta_\lambda(M_1) + \delta_\lambda(M_2) \leq 1 + \delta_\lambda(M_1 \cap M_2)$ eşitsizliğinden, $\delta_\lambda(M_1 \cap M_2) = 1$ elde ederiz. $\delta_\lambda(M) = 1$ olan M kümesi üzerinde hem (x_n) dizisi hem de (y_n) dizisi monoton azalan olduğundan, M kümesinde $(x_n \vee y_n)$ monoton azalandır. 2.1 Teoremi Birkhoff Eşitsizliğini kullanarak,

$$|x_n \vee y_n - x \vee y| \leq |x_n \vee y_n - y_n \vee x| + |x \vee y_n - x \vee y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \quad (3.11)$$

eşitsizliğini elde edebiliriz.

M kümesi üzerinde $\inf(x_n - x) = \theta$ ve $\inf(y_n - y) = \theta$ olduğundan, $\inf(x_n \vee y_n) = x \vee y$ elde ederiz. Ulaşmak istediğimiz $(x_n \vee y_n) \downarrow^{\lambda st} x \vee y$ sonucunu elde ederiz. $\square$

3.3 Sonuç Eğer $(x_n) \downarrow^{\lambda st} x$ ise aşağıdaki ifadeler geçerlidir:

$$(i) (x_n)^+ \downarrow^{\lambda_{st}} x^+$$

$$(ii) (x_n)^- \downarrow^{\lambda_{st}} x^-$$

$$(iii) |x_n| \downarrow^{\lambda_{st}} |x|.$$

3.15 Teorem $(x_n) \uparrow^{\lambda_{st}} x$ ve $(y_n) \uparrow^{\lambda_{st}} y$ ise $(x_n \vee y_n) \uparrow^{\lambda_{st}} x \vee y$ olur.

Kanıt E Riesz uzayı ve E de $(x_n) \uparrow^{\lambda_{st}} x$ ile $(y_n) \uparrow^{\lambda_{st}} y$ dizileri olsun. $\mathbb{N}$ doğalsayılar kümesinin $\delta_\lambda(M_1) = \delta_\lambda(M_2) = 1$ olan M_1 ve M_2 alt kümeleri $x, y \in E$ için $(x_{n_i})_{n_i \in M_1} \uparrow x$ ve $(y_{n_j})_{n_j \in M_2} \uparrow y$ olacak şekilde mevcuttur. $M = M_1 \cap M_2$ kümesini ele alalım. $\delta_\lambda(M_1) + \delta_\lambda(M_2) \leq 1 + \delta_\lambda(M_1 \cap M_2)$ eşitsizliğinden, $\delta_\lambda(M_1 \cap M_2) = 1$ elde ederiz. $\delta_\lambda(M) = 1$ olan M kümesinde monoton artan olduğundan, $x_n \vee y_n$ de hem (x_n) dizisi hem de (y_n) dizisi monoton artan olduğundan $(x_n \vee y_n)$ monoton artandır. 2.1 Teoremindeki Birkhoff Eşitsizliğinden,

$$|x_n \vee y_n - x \vee y| \leq |x_n \vee y_n - y_n \vee x| + |x \vee y_n - x \vee y| \leq |x_n - x| + |y_n - y| \quad (3.12)$$

eşitsizliğini elde edebiliriz. M kümesi üzerinde $\sup(x_n - x) = \theta$ ve $\sup(y_n - y) = \theta$ olduğundan, $\sup(x_n \vee y_n) = x \vee y$ elde ederiz. Ulaşmak istediğimiz $(x_n \vee y_n) \uparrow^{\lambda_{st}} x \vee y$ sonucu elde ederiz. $\square$

Bundan sonra sadece λ -istatistiksel azalan dizilere odaklanacağız. Riesz uzay teorisinde ortaya çıkan birkaç temel ve faydalı sonuçla devam edeceğiz.

3.16 Önerme E Riesz uzayı ve E de (x_n) ve (y_n) iki dizi olsun. O halde, herhangi bir $x, y \in E$ için;

$$(i) (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x \text{ olaması için gerek ve yeter şart } (x_n - x) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta \text{ olmasıdır,}$$

$$(ii) (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x \text{ ve } (y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} y \text{ ise, } (x_n \wedge y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x \wedge y \text{ olur,}$$

$$(iii) (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x \text{ ise her } \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } (\alpha x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} \alpha x \text{ olur,}$$

$$(iv) (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x \text{ ve } (y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} y \text{ ise, } (x_n + y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} (x + y) \text{ olur,}$$

$$(v) (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x \text{ ve } (x_{n_k}), (x_n) \text{ dizisinin bir alt dizisi olsun. } (x_{n_k}) \text{ azalan dizi ve } \delta_\lambda(\{n_1, n_2, n_3, \dots\}) = 1 \text{ ise } x_{n_k} \downarrow^{\lambda_{st}} x \text{ olur,}$$

$$(vi) (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x \text{ ve } (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} y \text{ ise, } x = y \text{ olur,}$$

(vii) $\theta \leq (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x$ ise $x \in E_+$ olur,

(viii) Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $\theta \leq y_n \leq x_n$, $(x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ ve (y_n) azalan dizi ise $(y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ olur,

(ix) Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için $(x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x$, $(y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} y$ ve $x_n \geq y_n$ ise, $x \geq y$ olur.

Kanıt (i) ve (iii) 3.6 Tanımdan aşıkardır. (ii) 3.6 Tanım ve 2.2 Teoremi kullanarak elde edilebilir.

(iv) E Riesz uzayı ve E de $(x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x$ ve $(y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} y$ olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta_\lambda(M_1) = \delta_\lambda(M_2) = 1$ olan M_1 ve M_2 alt kümeleri (x_n) ve (y_n) dizileri sırasıyla x ve y ye monoton azalan olacak şekilde vardır. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $M = M_1 \cap M_2$ alt kümesini alalım. $\delta_\lambda(M) = 1$ olan M alt kümesi üzerinde $(x_n + y_n)$ dizisinin azalan bir dizidir. M üzerinde $(x_n + y_n) \downarrow x + y$ olduğundan $|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$ eşitsizliğini yazabiliriz. Her monoton dizi, λ -istatistiksel monoton olduğundan $(x_n + y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} (x + y)$ olur.

(v) E Riesz uzayı ve E de $(x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x$ dizi olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta_\lambda(M) = 1$ olan bir M alt kümesinde, (x_{n_m}) dizisi x e azalan monoton dizidir. Dolayısıyla 3.12 Önermesinden $(x_{n_m}) \downarrow^{\lambda_{st}} x$ sonucu çıkar. $\delta_\lambda(K) = 1$ olan $K = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$ kümesi için (x_n) dizisinin azalan (x_{n_k}) alt dizisini düşünelim. $K \neq M$ olsun. Aksi takdirde ispat açıktır. Ayrıca eğer K yoksa ispatlayacak bir şey de yoktur. Şimdi $(x_{n_k}) \downarrow^{\lambda_{st}} x$ olduğunu ispatlayacağız. (x_{n_m}) alt dizisi x 'e azalan monoton olduğundan, tüm $m \in M$ için $(x_{n_m}) \geq x$ durumu vardır. Ayrıca, $J = M \cap K$ kümesinin λ yoğunluğu bire eşit olduğundan, M ve K 'nin hemen hemen birbirine eşit olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla, (x_{n_k}) dizisinin x , alt sınırı olduğundan, (x_{n_k}) dizisinin $(x_{n_{k_j}})$ alt dizisini bulabiliriz. Ayrıca $(x_{n_{k_j}})$ dizisinin monoton azalan olduğu açıktır ve indis kümesinin λ yoğunluğunun bire eşittir. Tüm $j \in \mathbb{N}$ için $(x_{n_{k_j}}) \geq w$ olacak şekilde bir $(x_{n_{k_j}})$ dizisinin, $w \in E$ alt sınırını alalım. M ve L hemen hemen eşit olduğundan, $m_j \in M$ indisi için $(x_{m_j}) = (x_{n_{k_j}}) \geq w$ eşitsizliğini bulabiliriz. x , (x_{n_m}) 'nin infimumu olduğundan $f \geq w$ eşitsizliğini alabiliriz. Sonuç olarak x , $(x_{n_{k_j}})$ dizisinin infimumu olduğundan, $(x_{n_k}) \downarrow^{\lambda_{st}} x$ dizisi elde edilir.

(vi) E Riesz uzayı ve E de $(x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x$ ve $(x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} y$ dizileri olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta_\lambda(M) = \delta_\lambda(K) = 1$ olan M ve K alt kümelerinde sırasıyla x ve y 'e monoton azalan (x_{n_m}) ve (x_{n_k}) alt dizileri vardır. $J = M \cap K$ seçersek, $\delta_\lambda(J) = 1$ elde ederiz. Dolayısıyla (x_{n_j}) alt dizisini düşünebiliriz. (x_{n_j}) alt dizisi hem x e hem de y ye monoton azalandır. Çünkü (x_{n_j}) alt dizisi, hem (x_{n_m}) hem de (x_{n_k}) 'nin bir alt dizisidir. Bu nedenle sıra limitler tek olduğundan $x = y$ elde ederiz.

(vii) $\theta \leq (x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} x$ eşitsizliği olsun. 3.3 Sonucunu kullanarak $(x_n) = (x_n)^+ \downarrow^{\lambda_{st}} = x^+$ elde ederiz. Dolayısıyla (vi) den $x = x^+ \in E_+$ olduğu sonucu çıkar.

(viii) E Riesz uzayı ve E de $(x_n) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ dizisi ve tüm $n \in \mathbb{N}$ için $\theta \leq y_n \downarrow \leq x_n$ eşitsizliği olsun. O zaman $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta_\lambda(M) = 1$ olan M alt kümesinden indisli (x_{n_m}) alt dizisi x e monoton azalan olacak şekilde vardır. Şimdi (y_n) dizisinin (y_{n_m}) alt dizisini düşünelim. O halde tüm $n_m \in M$ için $\theta \leq (y_{n_m}) \leq (x_{n_m})$ eşitsizliği vardır. Dolayısıyla M üzerinde $(x_n) \downarrow \theta$ olduğundan $(y_{n_m}) \downarrow \theta$ elde ederiz.

(ix) Bu önermenin (iii) ve (iv) maddelerini uygulayarak $(x_n - y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} (x - y)$ elde edebiliriz. Ardından (vii) kullanılarak $\theta \leq (x_n - y_n) = (x_n - y_n)^+$ den dolayı, $x - y \in E_+$, yani $x \geq y$ elde ederiz. $\square$

3.4.2. λ -İstatistiksel sıra yakınsaklık

Bu kısımda (Aydın, Çınar ve Et, 2021) makalesinden aslına sadık kalarak Riesz uzayı için λ -İstatistiksel Sıra Yakınsaklık çeşidini incelemeye başlıyoruz.

3.7 Tanım (λ -İstatistiksel Sıra Yakınsaklık) E bir Riesz uzayı ve (x_n) , E 'de bir dizi olsun. E Riesz uzayında $(y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ dizisi ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta_\lambda(M) = 1$ olan M alt kümesi, her $n_m \in M$ için $|x_{n_m} - x| \leq y_{n_m}$ olacak şekilde mevcut ise, (x_n) dizisine λ -istatistiksel sıra yakınsak dizi denir, $(x_n) \xrightarrow{\lambda_{sto}} x$ ile gösterilir.

Riesz uzayında (x_n) dizisi için $\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \not\leq y_n\} = \emptyset$ kümesinin δ_λ yoğunluğu sıfıra eşit olan başka bir $(y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ dizisi varsa o zamanda $(x_n) \xrightarrow{\lambda_{sto}} x$ olur.

3.2 Uyarı λ -istatistiksel monoton yakınsaklık λ -istatistiksel sıra yakınsamayı gerektirir. E bir Riesz uzayında (x_n) dizisi x 'e, λ -istatistiksel azalan dizi olsun. Dolayısıyla, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta_\lambda(M) = 1$ olan bir M alt kümesi üzerinde tanımlı (x_{n_m}) dizisi x 'e monotondur azalandır. Buradan, $(w_{n_m}) := (x_{n_m} - x) \downarrow \theta$ tanımlayabiliriz. 3.12 Önermesinden $(w_{n_m}) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ olur. $|x_{n_m} - x| \leq w_{n_m}$ eşitsizliğinden $x_n \xrightarrow{\lambda_{sto}} x$ elde ederiz.

3.17 Önerme Riesz uzaylarında sıra yakınsaklık bir dizi λ -istatistiksel sıra yakınsaktır.

Kanıt E Riesz uzayında $(x_n) \xrightarrow{ord} x$ dizisi olsun. E Riesz uzayında her $n \in \mathbb{N}$ için $|x_n - x| \leq y_n$ eşitsizliği sağlayan başka bir $(y_n) \downarrow \theta$ dizisi vardır. Şimdi, 3.12 Önermesinden $(y_n) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ olur. Buradan $\delta_\lambda(M) = 1$ olan $M \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesi üzerinde tanımlı $|x_{n_m} - x| \leq y_{n_m}$ eşitsizliğini sağlayan $(y_{n_m}) \downarrow \theta$ dizisi vardır. Dolayısıyla $(x_n) \xrightarrow{\lambda_{sto}} x$ elde ederiz. $\square$

Aşağıda λ -istatistiksel sıra yakınsama ile ilgili temel sonuçlar bulunmaktadır.

3.18 Teorem E bir Riesz uzayı olsun. Aşağıdaki sonuçlar geçerlidir:

(i) $(x_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} x$ ancak ve ancak $(x_n - x) \xrightarrow{\lambda_{st}O} \theta$ ancak ve ancak $|x_n - x| \xrightarrow{\lambda_{st}O} \theta$ dır.

(ii) $\lambda_{st}O$ -limit doğrusaldır.

(iii) $\lambda_{st}O$ -yakınsamasının tek bir limiti vardır.

Kanıt (i) 3.7 Tanımdan kanıtlanır.

(ii) Skaler çarpım kısmı açıktır. Skaler çarpım kısmının ekleme kısmını aşağıda göstereceğiz. E Riesz uzayında $(x_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} x$ ve $(y_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} y$ dizilerini düşünelim. $\delta\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \not\leq u_n\} = 0$ ve $\delta\{n \in \mathbb{N} : |y_n - y| \not\leq v_n\} = 0$ olan $u_n \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ ve $v_n \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ dizileri vardır.

$$\{n \in \mathbb{N} : |(x_n + y_n) - (x + y)| \not\leq u_n + v_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \not\leq u_n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : |y_n - y| \not\leq v_n\} \quad (3.13)$$

olarak yazılabilir.

3.16 Önerme (iv) yardımı ile $\delta_\lambda\{n \in \mathbb{N} : |(x_n + y_n) - (x + y)| \not\leq u_n + v_n\} = 0$ sonucunu elde ederiz.

(iii) E Riesz uzayı ve E de $(x_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} x$ ve $(x_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} y$ dizileri olsun. O halde , $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta_\lambda(M) = 0$ olan M alt kümesi üzerinde $|x_{n_m} - x| \leq u_{n_m}$ ile $|x_{n_m} - y| \leq v_{n_m}$ eşitsizliklerini sağlayan $u_n \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ ve $v_n \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ alt dizileri vardır. $\theta \leq |x - y| \leq |x - x_{n_m}| + |x_{n_m} - y| \leq u_{n_m} + v_{n_m}$ eşitsizliğine dayanarak, $u_{n_m} \downarrow 0$ ve $v_{n_m} \downarrow 0$ alt dizisi olduğundan $x = y$ elde ederiz. $\square$

3.19 Önerme E Riesz uzayı ve E de (x_n) , (y_n) ve (z_n) dizileri olsun. $\delta_\lambda(M) = 1$ olan $M \subseteq \mathbb{N}$ alt kümesinin her $n \in M$ için $z_n \leq y_n \leq x_n$ eşitsizliği var olsun. E Riesz uzayında $(z_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} \theta$ ve $(x_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} \theta$ ise, $(y_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} \theta$ olur.

Kanıt E bir Riesz uzayında $\delta_\lambda(K) = \delta_\lambda(L) = 1$ olan $K, L \subseteq \mathbb{N}$ iki kümenin elemanları için $p_n \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ ile $q_n \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ özelliklerini sağlayan, (p_n) ve (q_n) dizilerini düşünelim. K kümesi için $p_n \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ olduğundan $|z_n - \theta| \leq p_n$ eşitsizliği vardır. L kümesi için $q_n \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ dizisinin özelliğinden $|x_n - \theta| \leq q_n$ eşitsizliği vardır. Bu iki eşitsizlik durumlarından, $\delta_\lambda(K \cap L \cap M) = 1$ olan kesişim kümesinde her bir $n \in K \cap L \cap M$ için , $|y_n - \theta| \leq p_n + q_n$ eşitsizliği vardır. Dolayısıyla $\delta_\lambda\{n \in \mathbb{N} : |y_n - \theta| \leq p_n + q_n\} = 1$ elde ederiz. Burada 3.18 Teorem (ii) den $(p_n + q_n) \downarrow^{\lambda_{st}} \theta$ elde ederiz. $(y_n) \xrightarrow{\lambda_{st}O} \theta$ olduğu anlamına gelir. $\square$

3.5. Riesz Uzaylarında Deferred İstatistiksel Sıra Yakınsaklık

Riesz uzaylarında deferred istatistiksel sıra yakınsaklık kavramını, (Küçükaslan ve Aydın, 2024) makalesi üzerinden , makaleye sadık kalarak inceleyeceğiz.

3.5.1. Riesz uzaylarında deffered istatistiksel azalan

Negatif olmayan tamsayılardan oluşan (p_n) ve (q_n) dizilerini her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n < q_n$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ olacak şekilde alalım. Bu özelliğe sahip (p_n) ve (q_n) dizilerine deferred özelliğe sahip denir.

3.8 Tanım (Deferred İstatistiksel Azalan Dizi) E bir Riesz uzayı ve (z_n) dizisi E 'de bir dizi olsun. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin $\delta_{p,q}(K) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < k \leq q_n : k \in K\}| = 1$ özelliğindeki bir K alt kümesi $(z_{k_n})_{k_n \in K}$ sıfıra azalacak şekilde bulunabiliyorsa (z_n) dizisi, p ve q 'ya göre θ ya deferred istatistiksel azalan bir dizi denir ve $(z_n) \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ ile gösterilir.

3.3 Uyarı (i) 3.8 Tanımında $(q_n) = n$ ve $(p_n) = \theta$ dizileri alındığında, istatistiksel azalan tanımıyla aynı olmaktadır.

(ii) Eğer (z_n) dizisi monoton azalan ve sıfıra yakınsıyorsa, sıfıra deferred istatistiksel azalandır. Ancak bunun tersi geçerli değildir. Bunu göstermek için $\mathbb{R}^2$ uzayını koordinat bazlı sıralama düşünelim. $(q_n) = n$, $(p_n) = 0$ dizileri ve (z_n) dizilerini, k bir doğal sayı olmak üzere şu şekilde tanımlayalım:

$$z_n := \begin{cases} (0, n^2), & \text{eğer } n = k^3 \text{ ise,} \\ (0, \frac{1}{n^2}), & \text{eğer } n \neq k^3 \text{ ise,} \end{cases} \quad (3.14)$$

Bu durumda $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} (0,0)$ olur. Ancak bu (z_n) dizisinin monoton azalmadığına dikkat edilmelidir.

(iii) E Riesz uzayında sıfıra deferred istatistiksel azalan bir dizi, azalan veya karşılaştırılamayan elemanlarının olduğu alt dizi içerebilir. Böyle bir alt diziye karşılık gelen indis kümesinin, deferred yoğunluğa sıfıra eşittir.

(iv) Riesz uzaylarında, $z_n \downarrow \theta$ ise (z_n) dizisinin, her (z_{k_n}) alt dizisi için $z_{k_n} \downarrow \theta$ olur. Ancak bu özellik deferred istatistiksel monoton azalan diziler için geçerli olmayabilir. Örneğin, yukarıda (ii) de verilen dizileri göz önünde bulunduralım. Bir $j \in \mathbb{N}$ için $k_n = j^3$ olmak üzere (z_{k_n}) alt dizisini düşünersek ne azalandır ne de infimumu vardır.

Yukarıdaki 3.3 Uyarının (iv) maddesinden, genel olarak deferred istatistiksel monoton azalan dizinin herhangi bir alt dizisinin deferred istatistiksel monoton azalan bir dizi olmak zorunda olmadığını ifade edebiliriz. Ancak aşağıdaki teorem buna yönelik olumlu sonuçtur.

3.20 Teorem E bir Riesz uzayı ve (z_n) dizisi E 'de bir dizi olsun. Eğer $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ ise, (z_n) dizisinin, $\delta_{p,q}(K) = 1$ olan K indis kümesinde (z_{k_n}) azalan herhangi (z_{k_n}) alt dizisi de θ ya deferred istatistiksel azalır.

Kanıt E bir Riesz uzayı ve $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$, E de bir dizi olsun. $\delta_{p,q}(K) = 1$ olan $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi $(z_{k_n})_{k_n \in K} \downarrow \theta$ olacak şekilde bulunabilir. Diğer bir $M \subseteq \mathbb{N}$ indis kümesini $K \neq M$, $\delta_{p,q}(M) = 1$ ve (z_n) dizisi M üzerinde azalan olacak şekilde düşünelim. Böyle bir M kümesinin olamayacağını gösterilmesiyle kanıt tamamlanır. $(z_{k_n}) \downarrow \theta$ olduğundan, her $k_n \in K$ için $\theta \leq z_{k_n}$ eşitsizliği mevcuttur. Ayrıca $\delta_{p,q}(K \cap M) = 1$ dir. Sonuç olarak, bazı $k_n \in K$ ve $m_n \in M$ için $k_n = m_n$ elde ederiz. Böylece $z_{m_1} \geq z_{m_2} \geq \dots \geq z_{m_n} = z_{k_n} \geq \theta$ dir. Bu biçimde sonsuz sayıda indis çifti bulabiliriz. Bu süreci devam ettirerek, her $m_n \in M$ için $z_{m_n} \geq \theta$ elde ederiz, yani θ , (z_{m_n}) dizisinin alt sınırıdır. (z_{m_n}) dizisinin diğer bir u alt sınırlarını alalım. Her $m_n \in M$ için $z_{m_n} \geq u$ dir. O zaman bazı $(z_{n_{k_t}})$ yi $m_k \in M$ için $z_{n_{k_t}} = z_{m_k} \geq u$ bulabiliriz. Bu yaklaşımı izleyerek, (z_{k_n}) dizisinin $(z_{n_{k_1}}, z_{n_{k_2}}, \dots)$ alt dizisi $t \in \mathbb{N}$ için u $(z_{n_{k_t}})$ dizisinin bir alt sınırı olacak şekilde elde edebiliriz. $z_{k_n} \downarrow \theta$ olduğundan, (z_{k_n}) nin her alt dizisinin infimumu sıfırdır. Dolayısıyla $u = \theta$ elde ederiz. Bu nedenle $z_{m_n} \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ sonucunu buluruz. $\square$

Bir sonraki sonuç, deferred istatistiksel azalan dizilerin doğrusallık özelliğini ifade eder.

3.21 Önerme E Riesz uzayı ve E de $x_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ ve $y_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. O halde aşağıdaki özellikler geçerlidir:

(i) $(x_n + y_n) \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$.

(ii) $\lambda x_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$.

3.5.2. Riesz uzaylarında deferred istatistiksel sıra yakınsaklık

(p_n) ve (q_n) dizilerini deferred özelliğe sahip diziler olarak seçtiğimizi tekrardan hatırlatalım.

3.9 Tanım (Deferred İstatistiksel Sıra Yakınsaklık) E bir Riesz uzayı ve (x_n) , E de bir dizi olsun. Eğer $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizisi ve $\delta_{p,q}(K) = 1$ olan $K \subseteq \mathbb{N}$ indis kümesi her $k_n \in K$ için $|x_{k_n} - x| \leq z_{k_n}$ eşitsizliği sağlanacak şekilde varsa (x_n) dizisine deferred istatistiksel sıra yakınsak denir, $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ şeklinde gösterilir.

3.4 Uyarı $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ ise $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \not\leq z_n\}) = 0$ olduğunu farkediniz.

3.5 Uyarı 3.9 Tanımda (x_n) dizisinin (z_n) dizisine göre x' e deferred istatistiksel sıra yakınsaması, aynı (z_n) dizisine göre (x_n) dizisinin (x_{k_n}) alt dizisi için $x_{k_n} \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ olmasını gerektirir.

Bunun tersi de doğrudur, yani $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizisi (x_n) dizisinin (x_{k_n}) alt dizisi $x_{k_n} \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ olacak şekilde varsa, o zaman aynı (z_n) dizisine göre $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ olur.

Deferred istatistiksel azalan dizinin, deferred istatistiksel sıra yakınsak olduğu açıktır. Ancak tersi doğru değildir.

3.6 Uyarı $q(n) = n$ ve $p(n) = 0$ olarak düşünelim. Aşağıdaki ifadeler doğrudur:

- (i) Sıra yakınsak bir dizi, sıra limitine deferred istatistiksel sıra yakınsaktır.
- (ii) İstatistiksel sıra yakınsama ve deferred istatistiksel sıra yakınsama birbirine denktir.

Deferred istatistiksel sıra yakınsak bir dizinin bir alt dizisi deferred istatistiksel sıra yakınsaması olmak zorunda olmadığını farkediniz.

3.22 Önerme E Riesz uzayında (x_n) bir dizi olsun. $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ olması için gerek ve yeter şart $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}) = 1$ özelliğine sahip başka bir (y_n) dizisinin $y_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ olacak şekilde var olmasıdır.

Kanıt ($\Leftarrow$) E Riesz uzayında $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}) = 1$ ve $y_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ özelliklerine sahip (y_n) dizisini olsun. Buradan $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizisi ve $\delta_{p,q}(K) = 1$ olan K indis kümesi her $k_n \in K$ için $|y_{k_n} - x| \leq z_{k_n}$ olacak şekilde vardır.

$$\begin{aligned} \{p_n + 1 \leq m \leq q_n : |x_m - x| \not\leq z_m\} &\subseteq \{p_n + 1 \leq m \leq q_n : x_m \neq y_m\} \\ &\cup \{p_n + 1 \leq m \leq q_n : |y_m - x| \not\leq z_m\} \end{aligned}$$

kapsamasından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n + 1 \leq m \leq q_n : |x_m - x| \not\leq z_m\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n + 1 \leq m \leq q_n : |y_m - x| \not\leq z_m\}| \quad (3.15)$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta_{p,q}(\{p_n + 1 \leq m \leq q_n : |y_m - x| \not\leq z_m\}) = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n + 1 \leq m \leq q_n : |x_m - x| \not\leq z_m\}| = 0 \text{ elde edilir. Böylece istenilen } x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$$

sonucu elde edilir.

($\implies$) E Riesz uzayında $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ olacak şekilde (x_n) dizisini alalım. Buradan $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizisi ve $\delta_{p,q}(K) = 1$ olan K indis kümesi her $k_n \in K$, $|x_{k_n} - x| \leq z_{k_n}$ olacak şekilde vardır. $\{n \in \mathbb{N} : x_n = y_n\}$ kümesine L diyelim. $K \cap L$ kümesi üzerinde $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : |y_n - x| = |y_n - x| \leq z_n\}) = 1$ olacağından (y_n) dizisi için $y_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ olur. $\square$

3.23 Önerme Deferred istatistiksel sıra limit doğrusaldır ve tektir.

Kanıt E Riesz uzayında $x_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}(p,q)} x$ ve $x_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}(p,q)} y$ olduğunu varsayalım. Buradan $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizisi ve $\delta_{p,q}(K) = 1$ olan K indis kümesi her $k_n \in K$ için $|x_{k_n} - x| \leq z_{k_n}$ olacak şekilde; $t_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizisi ve $\delta_{p,q}(M) = 1$ olan M indis kümesi $m_n \in M$ için $|x_{m_n} - y| \leq t_{m_n}$ olacak şekilde vardır.

Sonuç olarak her $j_n \in J := K \cap M$ için, $|x - y| \leq |x - x_{j_n}| + |x_{j_n} - y| \leq z_{j_n} + t_{j_n}$ eşitsizliğini elde ederiz. $(z_{j_n} + t_{j_n})_{j_n \in J} \downarrow \theta$ olduğunu kullanarak, $|x - y| = \theta$ elde edilir ve bu ise $x = y$ anlamına gelir. Dolayısıyla x ve y eşittir.

Şimdi deferred istatistiksel sıra limitinin doğrusallığını kanıtlamak için E Riesz uzayında $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ ve $y_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} y$ dizilerini düşünelim. $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \not\leq z_n\}) = 0$ ve $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : |y_n - y| \not\leq t_n\}) = 0$ olacak şekilde $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ ve $t_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizileri olduğu anlamına gelir. Riesz uzaylarında üçgen eşitsizliğini kullanarak $\{n \in \mathbb{N} : |(x_n + y_n) - (x + y)| \not\leq z_n + t_n\} \subseteq \{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \not\leq z_n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : |y_n - y| \not\leq t_n\}$ sonucunu elde ederiz. Buradan $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : |(x_n + y_n) - (x + y)| \not\leq z_n + t_n\}) = 0$ olmasını gerektirir, dolayısıyla $x_n + y_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x + y$ anlamına gelir. $\square$

Aşağıdaki teorem, deferred istatistiksel sıra yakınsama ve kafes özellikleri arasında çeşitli ilişkileri ifade eder.

3.24 Teorem E Riesz uzayında $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ ve $y_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} y$ dizilerini düşünelim. Aşağıdakiler ifadeler geçerlidir:

(i) $x_n \vee y_n, x \vee y$ ye deferred istatistiksel sıra yakınsaktır.

(ii) $x_n \wedge y_n, x \wedge y$ ye deferred istatistiksel sıra yakınsaktır.

(iii) x_n^+, x^+ ye deferred istatistiksel sıra yakınsaktır.

(iv) x_n^-, x^- ye deferred istatistiksel sıra yakınsaktır.

(v) $|x_n|, |x|$ ye deferred istatistiksel sıra yakınsaktır.

Kanıt Diğer durumlar (Aliprantis and Burkinshaw, 2006) çalışmasındaki Teorem 1.7'nin ve 3.23 Önermesinin uygulanması elde edilebileceğinden yalnızca (i) maddesinin kanıtıyla yeteneceğiz. (x_n) ve (y_n) dizileri sırasıyla x ve y ye deferred istatistiksel sıra yakınsak olduğundan $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ ve $t_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizileri ve $\delta_{p,q}(K) = \delta_{p,q}(M) = 1$ olan K ve M indis kümeleri her $k_n \in K$ ve $m_n \in M$ için $|x_{k_n} - x| \leq z_{k_n}$ ve $|y_{m_n} - y| \leq t_{m_n}$ eşitsizliklerini sağlayacak şekilde vardır. $J := N \cap M$ alırsak, (Aliprantis and Burkinshaw, 2006) çalışmasındaki Teorem 1.9 uygulanırsa her $j_n \in J$ için,

$$|x_{j_n} \vee y_{j_n} - x \vee y| \leq |x_{j_n} - x| + |y_{j_n} - y| \leq z_{j_n} + t_{j_n} \quad (3.16)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Buradan

$\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : |x_{j_n} \vee y_{j_n} - x \vee y| \not\leq z_{j_n} + t_{j_n}\}) = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak, $x_n \vee y_n$ 'nin $x \vee y$ 'ye deferred istatistiksel sıra yakınsadığını göstermiş oluruz. $\square$

3.4 Sonuç E Riesz uzayında $E_+ = \{x \in E : \theta \leq x\}$ pozitif konisi, deferred istatistiksel sıra yakınsaması altında kapalıdır.

3.25 Önerme Eğer E Riesz uzayında $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ ve $y_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} y$ dizileri, her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq y_n$ ise $x \geq y$ olur.

Kanıt Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \geq y_n$ olduğunu varsayalım, dolayısıyla her $n \in \mathbb{N}$ için $\theta \leq x_n - y_n \in E_+$ olur. 3.4 Sonucundan $(x_n - y_n) \in E_+$ olması nedeniyle $x_n - y_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x - y \in E_+$ olur. Sonuç olarak $x - y \geq \theta$, yani $x \geq y$ elde ederiz. $\square$

3.26 Teorem Bir Riesz uzayında (x_n) dizisi hem monoton ve hem de deferred istatistiksel sıra yakınsak ise, o zaman (x_n) sıra yakınsaktır.

Kanıt E Riesz uzayında (x_n) dizisi için $(x_n) \downarrow$ ve $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ olsun. $k \in \mathbb{N}$ indisini sabitleyelim. Her $k \leq n$ için $\theta \leq x_k - x_n$ olur, bu ise $x_k - x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x_k - x \geq \theta$ anlamına gelir. Bu ayrıca $x_k \geq x$ 'i verir. Dolayısıyla k keyfi olarak seçilebileceğinden $x, (x_n)$ 'nin alt sınırıdır. Şimdi (x_n) dizisinin başka bir z alt sınırını seçelim. O zaman $x_n - z \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x - z \geq \theta$, bu ise $x \geq z$ olur. Sonuç olarak $(x_n) \downarrow x$ olduğu görülür. $\square$

(Değer, Dovgoshei ve Küçükaslan, 2014) çalışmasındaki Theorem 3.1 de ifade edilen sonuca

benzer bir sonucu deferred istatistiksel sıra yakınsaklık kavramıyla ilişkilendirerek veriyoruz.

3.27 Teorem E Riesz uzayında (x_n) bir dizi ve $(x_{k_n})_{k_n \in K}$, (x_n) dizisinin alt dizisi olsun. Eğer,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < k_n \leq q_n : k_n \in K\}| > 0 \quad (3.17)$$

ve $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ oluyorsa, o zaman $x_{k_n} \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ elde edilir.

Kanıt E Riesz uzayında $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ dizisi olsun. Dolayısıyla E 'de $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st0}} \theta$ dizisi, $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \not\leq z_n\}) = 0$ olacak şekilde vardır.

$$\{p_n < k_n \leq q_n : k_n \in K, |x_{k_n} - x| \not\leq z_n\} \subseteq \{p_n < n \leq q_n : |x_n - x| \not\leq z_n\}$$

olduğu görülür. Tüm n 'ler için $H_n := \{p_n < k_n \leq q_n : k_n \in K\}$ tanımlayarak, yukarıdaki ifadeden

$$\frac{1}{|H_n|} |\{p_n < k_n \leq q_n : k_n \in K, |x_{k_n} - x| \not\leq z_n\}| \leq \frac{1}{|H_n|} |\{p_n < n \leq q_n : |x_n - x| \not\leq z_n\}|$$

olarak elde ederiz.

$x_{k_n} \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ yakınsamasını kanıtlamak için

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|H_n|} |\{p_n < n \leq q_n : |x_n - x| \not\leq z_n\}| = 0$$

göstermek yeterlidir.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{|H_n|}{q_n - p_n} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{p_n < n \leq q_n : |x_n - x| \not\leq z_n\}|}{|H_n|} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{p_n < n \leq q_n : |x_n - x| \not\leq z_n\}|}{q_n - p_n}.$$

eşitsizliği yazabiliriz.

Buradan,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{|H_n|} |\{p_n < n \leq q_n : |x_n - x| \not\leq z_n\}| = 0 \quad (3.18)$$

olur ki $x_n \xrightarrow{D_{st0}(p,q)} x$ elde ederiz. Bulunmaya çalışılan sonuca ulaşmış oluruz. $\square$

3.6 Uyarısında $q(n) = n$ ve $p(n) = 0$ seçimiyle deferred istatistiksel sıra yakınsama ile is-

tatistiksel sıra yakınsama arasında bir ilişki kurulmuştu. Sonraki teoremden yeni bir koşula bağlı olarak, başka bir ilişki kuruyoruz.

3.28 Teorem Eğer $(\frac{p_n}{q_n - p_n})$ dizisi sınırlı ise, istatistiksel sıra yakınsak dizi deferred istatistiksel sıra yakınsak dizidir.

Kanıt E Riesz uzayında $x_n \xrightarrow{st_0} x$ dizisini düşünelim ve $(\frac{p_n}{q_n - p_n})$ sınırlı bir dizi olsun. Dolayısıyla $z_n \downarrow^{st_0} \theta$ dizisi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - x| \not\leq z_k\}| = 0$$

olacak şekilde vardır. (q_n) dizisinin seçiminden $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \infty$ olduğundan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} |\{k \leq q_n : |x_k - x| \not\leq z_k\}| = 0$$

elde edilir.

$$\{p_n < k \leq q_n : |x_k - x| \not\leq z_k\} \subseteq \{k \leq q_n : |x_k - x| \not\leq z_k\}$$

kapsamasından,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{p_n < k \leq q_n : |x_k - x| \not\leq z_k\}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n} (1 + \frac{p_n}{q_n - p_n}) |\{k \leq q_n : |x_k - x| \not\leq z_k\}|$$

(3.19)

eşitsizliğini elde ederiz. Amaçlanan $x_n \xrightarrow{D_{st_0}(p,q)} x$ elde edilmiş olur. $\square$

3.28 Teoreminin tersi genel olarak geçerli olmayabilir. Aşağıdaki örnek ile bunu açıklayabiliriz.

3.6 Örnek $\mathbb{R}^2$ uzayını koordinat bazlı sıralama ile düşünelim. (x_n) , $\mathbb{R}^2$ de her n için,

$$x_n := \begin{cases} (0, \frac{n+1}{2}), & \text{eğer } n \text{ tek ise,} \\ (0, \frac{-n}{2}), & \text{eğer } n \text{ çift ise,} \end{cases}$$

dizisini düşünelim. İlave olarak $(q_n) = (2n)$ ve $(p_n) = (4n)$ dizilerini düşünelim. 3.28 Teoremindeki koşulların sağlandığı ve dolayısıyla $x_n \xrightarrow{D_{st_0}(p,q)} (0,0)$ olduğu görülebilir. Ancak (x_n) istatistiksel sıra yakınsak değildir.

Aşağıdaki teorem Riesz uzaylarında deferred istatistiksel sıra yakınsaklıkla ilgili bir sonucu göstermektedir.

3.29 Teorem Negatif olmayan tamsayılardan oluşan $(p_n), (q_n)$ ve $(p'_n), (q'_n)$ dizi çiftleri deferred özelliğe sahip olacak şekilde seçelim. (x_n) , E Riesz uzayında bir dizi olsun. Eğer $x_n \xrightarrow{D_{st_0}(p',q')} x$ ise ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\{k : p_n < k \leq p'_n\}$ ile $\{k : q'_n < k \leq q_n\}$ kümeleri sonluysa, o zaman E Riesz uzayında $x_n \xrightarrow{D_{st_0}(p,q)} x$ olur.

Kanıt E Riesz uzayında $x_n \xrightarrow{D_{st_0}(p',q')} x$ dizisi olsun. O zaman $z_n \downarrow_{p,q}^{D_{st_0}} \theta$ dizisi $\delta_{p,q}(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - x| \not\leq z_n\}) = 0$ olacak şekilde vardır.

$$\begin{aligned} \{k : p_n < k \leq q_n, |x_n - x| \not\leq z_n\} &= \{k : p_n < k \leq p'_n, |x_n - x| \not\leq z_n\} \\ &\cup \{k : p'_n < k \leq q'_n, |x_n - x| \not\leq z_n\} \cup \{k : q'_n < k \leq q_n, |x_n - x| \not\leq z_n\} \end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınarak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q_n - p_n} |\{k : p_n < k \leq q_n, |x_n - x| \not\leq z_n\}| = 0 \quad (3.20)$$

elde edilir. Bu ifade de $x_n \xrightarrow{D_{st_0}(p,q)} x$ olduğunu gösterir. □

3.5 Sonuç E Riesz uzayında (x_n) bir dizi ve $(p_n), (q_n)$ ve $(p'_n), (q'_n)$ dizi çiftleri deferred özelliğe sahip ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n - p_n}{q'_n - p'_n} = t > 0$ olsun. Eğer $x_n \xrightarrow{D_{st_0}(p',q')} x$ ise, $x_n \xrightarrow{D_{st_0}(p,q)} x$ olur.

KAYNAKLAR

- Agnew, R. P. (1932). On deferred cesàro means. *Annals of Mathematics*, 33(3), 413–421.
- Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. (2006). *Positive operators*. Springer Science and Business Media. (Vol. 119)
- Aydın, A., Çınar, M. and Et, M. (2021). The λ -statistical convergence in Riesz spaces. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 42(13), 3098–3104.
- Değer, U., Dovgoshei, A. and Küçükaslan, M. (2014). On the statistical convergence of metric-valued sequences. *Ukrains' kyi Matematychnyi Zhurnal*, 66(5), 712–720.
- Ercan, Z. (2009). A characterization of u - uniformly completeness of Riesz spaces in terms of statistical u -uniformly precompleteness. *Demonstratio Mathematica*, 42(2), 381–386.
- Fast, H. (1951). Sur la convergence statistique. *Colloquium Mathematicae*, 2(3-4), 241–244.
- Freudenthal, H. (1936). *Teilweise geordnete moduln*. Noord-Hollandsche Uitgevers Maatschappij.
- Fridy, J. A. (1985). On statistical convergence. *Analysis*, 5(4), 301–314.
- Kantorovitch, L. (1937). Lineare halbgeordnete Raume. *Receueil Math.*, 2(1), 121–168.
- Küçükaslan, M. and Yilmaztürk, M. (2016). On deferred statistical convergence of sequences. *Kyungpook mathematical journal*, 56(2), 357–366.
- Küçükaslan, M. and Aydın, A. (2024). Deferred statistical order convergence in Riesz spaces. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 53(5), 1368–1377.
- Luxemburg, W. and Zaanen, A. (1971). *Riesz Spaces I*. North-Holland, Amsterdam.
- Mursaleen, M. (2000). λ -statistical convergence. *Mathematica slovacica*, 50(1), 111–115.
- Niven, I., Zuckerman, H. S. and Montgomery, H. L. (1991). *An introduction to the theory of numbers*. John Wiley and Sons.

Riesz, F. (1928). Sur la décomposition des opérations fonctionnelles linéaires. In Atti del congresso internazionale dei matematici, 1928 (Vol. 3, pp. 143–148).

Zaanen, A. C. (2012). Introduction to operator theory in Riesz spaces. Springer Science and Business Media.

Zygmund, A. (1959). Trigonometric series, cambridge. Press, Cambridge.

Şençimen, C. and Pehlivan, S. (2012). Statistical order convergence in Riesz spaces. Matematica Slovaca, 62(2), 257–270.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Okan KÖSE

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
-----------------	--------------	----------------

Lisans	Balıkesir Üni./İlk. Mat. Öğretmenliği	2008
--------	---------------------------------------	------

İş Deneyimi/Yıl	Çalıştığı Yer	Görevi
-----------------	---------------	--------

2008-2012	Milli Eğitim Bakanlığı	Öğretmen
-----------	------------------------	----------

2012-Devam Ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı	Okul Müdürü
-------------------	------------------------	-------------

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Köse, O. (20 Temmuz 2024). Riesz Uzaylarında İstatistiksel Yakınsaklık. *II. BİLSEL International Scientific Researches Congress Kibyra, Burdur, TURKIYE*