

RİESZ UZAYLARININ KARELERİ

Fatma BİLİCİ

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MAYIS 2011
ANKARA**

Fatma BİLİCİ tarafından hazırlanan “RIESZ UZAYLARININ KARELERİ” adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof. Dr. Bahri TURAN
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Şafak ALPAY
Matematik Anabilim Dalı, Orta Doğu Teknik Üniversitesi

Prof. Dr. Bahri TURAN
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Ayşe UYAR
Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

09 /06 / 2011

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Fatma BİLİCİ

RİESZ UZAYLARININ KARELERİ**(Yüksek Lisans Tezi)****Fatma BİLİCİ****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Mayıs 2011****ÖZET**

Bu tezde, bir E Riesz uzayının karesi üzerine çalışılmıştır. Önce ispatlarda temel olan Riesz uzaylarında fonksiyonel hesap hakkında inceleme yapılmış, sonra bir Riesz uzayının karesinin varlığı verilerek E ile E nin karesi arasında örgü operasyonlarına bağlı ilişki çıkarılmıştır. Son olarak E ile E nin karesinin üzerindeki projeksiyonlar karşılaştırılarak bunların ideal merkezleri arasındaki ilişki elde edilmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.095**Anahtar Kelimeler : Riesz uzayı, örgü homomorfizmi, f -cebiri, fonksiyonel hesap, kare, merkez.****Sayfa Adedi : 97****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Bahri TURAN**

SQUARES OF RIESZ SPACES**(M.Sc. Thesis)****Fatma BİLİCİ****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****May 2010****ABSTRACT**

In this thesis, it has been studied on the square of any Riesz space E . Firstly, functional calculus on Riesz spaces that is the basis of proofs has been researched. Then by giving the theorem of existence square of any Riesz space, the relationship between E and its square depending upon the lattice operations has been presented. Finally, comparing projections on E and its square, the relationship among the ideal center of these has been obtained.

Science Code : 204.1.095

Key Words : Riesz space, lattice homomorphism, f -algebra, functional calculus, square, center.

Page Number : 97

Adviser : Prof. Dr. Bahri TURAN

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken bilgi ve tecrübelerini benimle paylaşan, değerli eleştiri ve fikirleri ile beni yönlendiren sayın hocam Prof. Dr. Bahri TURAN'a ve çalışma süresince manevi desteklerini esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1. Riesz Uzayları.....	3
2.2. Operatörler ve Örgü Homomorfizması.	11
2.3. f -Cebirleri ve Özellikleri.....	24
3. RİESZ UZAYLARINDA FONKSİYONEL HESAP	27
4. ALMOST f -CEBİRLERİ: DEĞİŞME ÖZELLİĞİ VE CAUCHY-SHWARTZ EŞİTSİZLİĞİ.....	60
5. RIESZ UZAYLARININ KARELERİ	72
6. SONUÇ	95
KAYNAKLAR	96
ÖZGEÇMİŞ	97

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$A \uparrow$	Yukarı yönlendirilmiş küme
A^d	A kümesinin dik tümleyeni
$A \perp B$	Dik kümeler
B_x	x tarafından üretilen band
$\mathcal{B}(E)$	E 'deki bandların kümesi
$T(E)$	T 'nin taşıyıcısı
E^+	E uzayının pozitif kısmı
$E \oplus F$	İki Riesz uzayının direkt toplamı
I_x	x tarafından üretilen ideal
$L(E, F)$	Operatörlerin vektör uzayı
$L_b(E, F)$	Sıra sınırlı operatörler uzayı
$Orth(E)$	E üzerinde tanımlı orthomorfizmaların kümesi
$\mathcal{P}(E)$	E üzerinde tanımlı projeksiyonların kümesi
$ T $	T 'nin modülü (mutlak değeri)
x^+	x 'in pozitif kısmı
x^-	x 'in negatif kısmı
$ x $	x 'in modülü (mutlak değeri)
$x_\alpha \uparrow x$	Yukarı yönlendirilmiş ve supremumu x olan ağ
$x_\alpha \downarrow x$	Aşağı yönlendirilmiş ve infimumu x olan ağ
$x \vee y$	x ile y 'nin supremumu
$x \wedge y$	x ile y 'nin infimumu

Simgeler**Açıklama**

$x \perp y$

Birbirine dik elemanlar

$[x, y]$

Sıralı aralık

$\mathcal{Z}(E)$

Merkez operatörlerin kümesi

1. GİRİŞ

Banach örgülerinin kareleri ilk olarak [11] da Lazonovsky tarafından verilmiş, benzer yaklaşımla [9] de Krivine de çalışma yapmıştır. Daha sonra [13] de Szulga fonksiyonel hesap teorisini kullanarak düzgün tam Riesz uzaylarının karesini vermiştir.

İncelediğimiz çalışmada Riesz cebirleri, bi-örgü homomorfizmleri ve fonksiyonel hesap kullanılarak Riesz uzaylarının karesi verilirken aşağıdaki kare tanımı temel alınmıştır.

E Arşimedsel Riesz uzayı olsun.

- (i) $\odot: E \times E \rightarrow E^\odot$ ortosimetrik bi-örgü homomorfizmdir.
- (ii) F Riesz uzayı için, $T: E \times E \rightarrow F$ ortosimetrik bi-örgü homomorfizm ise bir tek $T^\odot \circ \odot = T$ olacak şekilde $T^\odot: E^\odot \rightarrow F$ örgü homomorfizmi vardır.

Bu şartları sağlayacak şekilde $E^\odot$ Riesz uzayı varsa buna E 'nin *karesi* denir ve $(E^\odot, \odot)$ ile gösterilir.

Riesz uzaylarının karesinin varlığı, farklı yaklaşımlarla elde edilebilirliği verilmiş sonra da bunların örgü izomorfizmleri altında tek olduğu elde edilmiştir. Ayrıca E Riesz uzaylarının örgü özellikleriyle karesinin örgü özellikleri arasındaki ilişki incelenmiştir.

İkinci bölümde konu için alt yapı oluşturacak tanım ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde [6] den Riesz uzaylarında ve yarı asal f -cebirlerinde fonksiyonel hesap incelenmiş ve bu çalışma için oldukça kullanışlı olan Teorem 3.15 ve Teorem 3.25 verilmiştir.

Dördüncü bölümde [3] den bi-örgü homomorfizlerin özellikleri ve bundan yararlanılarak elde edilen bazı özellikler incelenmiştir.

Beşinci bölümde öncelikle [8]'da Fremlin tarafından tanıtılan tensor çarpımı yardımıyla [5] den Riesz uzaylarının karesi için varlık teoremi, f -cebirleri teorisiyle ve Szulga yöntemiyle karelerin elde edilmesi verilmiştir. Daha sonra Riesz uzayının kendisi ile karesi arasındaki ilişki incelenmiştir. [10] dan bir Riesz uzayı ile karesi arasındaki örgü operasyonlarına bağlı ilişki incelenerek merkezleri arasında örgü izomorfizmi bulunmuştur.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamız için gerekli olan temel kavramlar ve bazı sonuçlar verilmiştir.

2.1. Riesz Uzayları

2.1.1. Tanım

E boştan farklı bir küme olsun. E üzerinde tanımlı “ $\leq$ ” bağıntısı aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, “ $\leq$ ” bağıntısına *(kısmi) sıralama bağıntısı*, $(E, \leq)$ ikilisine *(kısmi) sıralı küme* denir.

- a) Her $x \in E$ için $x \leq x$ (yansıma özelliği)
- b) Her $x, y \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq x$ iken $x = y$ (ters simetri özelliği)
- c) Her $x, y, z \in E$ için $x \leq y$ ve $y \leq z$ iken $x \leq z$ (geçişme özelliği)

2.1.2. Tanım

$(E, \leq)$ kısmi sıralı küme ve $A \subseteq E$ olsun

- a) Her $x \in E$ için $x \leq a$ ($a \leq x$) olacak şekilde bir $a \in E$ varsa buna A ’nın bir *üst (alt) sınırı* denir. A ’nın bir üst (alt) sınırı varsa, A ’ya *üstten (alttan) sınırlı küme* denir. A ’nın hem üst hem de alt sınırı varsa A ’ya *sıra sınırlı küme* denir.
- b) A ’nın üst sınırlarının en küçüğü (büyüğü) varsa, buna A *kümesinin üst sınırlarının en küçüğü (büyüğü)* ya da *supremumu (infimumu)* denir ve $\sup A$ ($\inf A$) ile gösterilir.

c) Her $x \in E$ için $x \leq a$ ($a \leq x$) olacak şekilde bir $a \in A$ varsa a 'ya A 'nın *en büyük (küçük) elemanı* veya *maksimal (minimal) elemanı* denir ve $\max A$ ($\min A$) ile gösterilir.

A yerine $\{x, y\}$ kümesi alınırsa $\sup\{x, y\} = x \vee y$ ve $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ şeklinde gösterilir.

2.1.3. Tanım

$(E, \leq)$ sıralı bir küme olmak üzere, her $x, y \in E$ için $x \vee y \in E$ ve $x \wedge y \in E$ ise E kümesine *örgü* denir.

2.1.4. Tanım

$(E, \leq)$ örgü olsun. Her $x, y, z \in E$ için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ sağlanıyorsa E 'ye *dağılmalı örgü* denir.

2.1.5. Tanım

$(E, \leq)$ örgü olsun. E 'nin en küçük elemanı varsa buna *sıfır (null) eleman* denir ve θ ile gösterilir. E 'nin en büyük elemanı varsa buna *birim (unit) eleman* denir ve e veya I ile gösterilir.

2.1.6. Tanım

$(E, \leq)$ null ve birimi olan dağılmalı örgü olsun. $x \in E$ olmak üzere $x \wedge x' = \theta$ ve $x \vee x' = e$ olacak şekilde x' varsa buna x 'in *tamlayanı* denir.

2.1.7. Tanım

a) $(E, \leq)$ dağılmalı örgü olsun. E 'nin null ve birim elemanı var ve E 'deki her elemanın tamlayanı varsa E 'ye *Boole cebiri* denir.

b) E ve F Boole cebiri, $T : E \rightarrow F$ fonksiyon olmak üzere, T aşağıdaki şartları sağlıyorsa T 'ye Boole cebiri izomorfizmi denir.

- Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = Tx \wedge Ty$ ve $T(x \vee y) = Tx \vee Ty$
- Her $x \in E$ için $T(x') = (Tx)'$
- T , birebir ve örten

2.1.8. Tanım

E gerçel vektör uzayı ve üzerindeki sıralama bağıntısı “ $\leq$ ” olmak üzere, her $x, y, z \in E$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $x \leq y$ iken,

a) $x + z \leq y + z$

b) $\alpha x \leq \alpha y$

koşullarını sağlayan E uzayına *sıralı vektör uzayı* denir. E sıralı vektör uzayının $x \geq 0$ bağıntısını sağlayan elemanlarına *pozitif eleman*, $E^+ = \{x \in E : x \geq 0\}$ kümesine de E 'nin *pozitif kısmı* denir.

2.1.9. Önerme

E sıralı vektör uzayı ve $V \subseteq E$ alt vektör uzayı ise E 'den gelen sıralama ile V sıralı alt vektör uzayıdır.

2.1.10. Tanım

E sıralı vektör uzayı olmak üzere her $x, y \in E$ için $x \vee y \in E$ veya $x \wedge y \in E$ oluyorsa E uzayına *Riesz uzayı* denir.

2.1.11. Tanım

E Riesz uzayı ve $G \subseteq E$ alt vektör uzayı olsun. Her $x, y \in G$ için $x \vee y \in G$

veya $x \wedge y \in G$ oluyorsa G 'ye E 'nin *Riesz alt vektör uzayı* denir.

Örnek

(i) (Ω, τ) topolojik uzay olmak üzere

$$C(\Omega) = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon}\}$$

kümesi

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

noktasal sıralaması ile Riesz uzayıdır.

(ii) (Ω, τ) topolojik uzay olmak üzere

$$C^0(\Omega) = \{f \mid f: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ sürekli fonksiyon ve } f(0) = 0\}$$

kümesi

$$f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in \Omega \text{ için } f(x) \leq g(x)$$

noktasal sıralamasıyla Riesz uzayıdır.

(iii) $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı, gerçel değerli, sürekli ve pozitif homojen (her $x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$ için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$) fonksiyonların kümesi olmak üzere, bu küme $C(\mathbb{R}^n)$ den gelen noktasal sıralamayla Riesz alt uzayıdır.

(iv) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı, sürekli ve polinomsal artan fonksiyonların kümesi olsun. Yani sürekli bir fonksiyonun $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kümesinin elemanı olması için gerekli ve yeterli koşul $|f| \leq M(1 + |e_1| + \dots + |e_n|)^m$ olacak biçimde $m \in \mathbb{N}$ ve $0 \leq M \in \mathbb{R}$ olmasıdır. Bu küme $C(\mathbb{R}^n)$ den gelen noktasal sıralamayla Riesz alt uzayıdır.

2.1.12. Tanım

Bir Riesz uzayının boştan farklı ve üstten sınırlı (sayılabilir) her altkümesinin supremumu veya boştan farklı ve alttan sınırlı (sayılabilir) her altkümesinin infimumu varsa bu uzaya *Dedekind tam* (σ – *Dedekind tam*) Riesz uzayı denir.

2.1.13. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $x, y, z \in E$ olmak üzere, aşağıdaki önermeler doğrudur [1].

- 1) $x \vee y = -[(-x) \wedge (-y)]$ ve $x \wedge y = -[(-x) \vee (-y)]$
- 2) $x + y = (x \wedge y) + (x \vee y)$
- 3) $x + (y \vee z) = (x + y) \vee (x + z)$ ve $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$
- 4) $\lambda \geq 0$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) $\lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y$ ve $\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y$

2.1.14. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere $x^+ = x \vee 0$, $x^- = (-x) \vee 0$ ve $|x| = x \vee (-x)$ elemanlarına sırasıyla x 'in *pozitif kısmı*, *negatif kısmı* ve *modülü* (mutlak değeri) denir. x^+ , x^- , $|x| \in E^+$ dir.

2.1.15. Teorem

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere aşağıdakiler sağlanır [1].

$$1) \quad x = x^+ - x^-$$

$$2) \quad |x| = x^+ + x^-$$

$$3) \quad x^+ \wedge x^- = 0$$

Ayrıca $x = y - z$ ve $y \wedge z = 0$ ise $y = x^+$, $z = x^-$ dir.

2.1.16. Teorem

E Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Aşağıdaki önermeler doğrudur [1].

$$1) \quad x \vee y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \text{ ve } x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

$$2) \quad |x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$$

$$3) \quad |x| \vee |y| = \frac{1}{2}(|x + y| + |x - y|)$$

$$4) \quad |x| \wedge |y| = \frac{1}{2}(|x + y| - |x - y|)$$

2.1.17. Sonuç

E sıralı vektör uzayı olsun. Aşağıdakiler denktir [1].

i) E Riesz uzayıdır.

ii) Her $x \in E$ için $x^+ \in E$

iii) Her $x \in E$ için $x^- \in E$

iv) Her $x \in E$ için $|x| \in E$

2.1.18. Teorem

E Riesz uzayı, $x, y, z \in E$ olsun. Aşağıdakiler sağlanır [1].

$$1) \quad \|x\| - \|y\| \leq \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$2) \quad |x \vee z - y \vee z| \leq |x - y| \text{ ve } |x \wedge z - y \wedge z| \leq |x - y|$$

$$3) \quad \text{Eğer } x, y, z \geq 0 \text{ ise } x \wedge (y + z) \leq (x \wedge y) + (x \wedge z)$$

2.1.19. Tanım

E Riesz uzayı ve $x, y \in E$ olsun. Eğer $|x| \wedge |y| = 0$ ise x ile y birbirine diktir denir ve bu durum $x \perp y$ biçiminde gösterilir.

$\emptyset \neq A \subseteq E$ olmak üzere, $A^d = \{x \in E : \text{her } y \in A \text{ için } x \perp y\}$ kümesine A kümesinin

dik tümleyeni denir. $A, B \subseteq E$ alındığında her $x \in A$ ve her $y \in B$ için $x \perp y$ oluyorsa A ile B kümeleri birbirine diktir denir ve $A \perp B$ biçiminde gösterilir.

2.1.20. Tanım

E Riesz uzayı ve $A, B \subseteq E$ olmak üzere, aşağıdaki tanımlamaları yazabiliriz.

$$a) \quad A^+ = \{a^+ : a \in A\}$$

$$b) \quad A^- = \{a^- : a \in A\}$$

$$c) \quad |A| = \{|a| : a \in A\}$$

d) $x \in E, x \vee A = \{x \vee a : a \in A\}$

e) $x \in E, x \wedge A = \{x \wedge a : a \in A\}$

f) $A \vee B = \{a \vee b : a \in A, b \in B\}$

g) $A \wedge B = \{a \wedge b : a \in A, b \in B\}$

2.1.21. Teorem

E bir Riesz uzayı ve $\emptyset \neq A \subseteq E$ olsun. Eğer $\sup A$ var ise her $x \in E$ için $\sup (x \wedge A)$ var ve $\sup (x \wedge A) = x \wedge \sup A$ 'dır. Eğer $\inf A$ var ise her $x \in E$ için $\inf (x \vee A)$ var ve $\inf (x \vee A) = x \vee \inf A$ 'dır [1].

2.1.22. Teorem

$\Lambda \neq \emptyset$ bir küme ve üzerinde “ $\leq$ ” bağıntısı verilsin. Aşağıdaki önermeler sağlanırsa Λ kümesine “ $\leq$ ” bağıntısıyla (yukarı) yönlendirilmiş küme denir.

a) Her $\lambda \in \Lambda$ için $\lambda \leq \lambda$

b) Her $\lambda, \alpha, \beta \in \Lambda$ için $\lambda \leq \beta$ ve $\beta \leq \alpha$ iken $\lambda \leq \alpha$

c) Her $\lambda, \beta \in \Lambda$ için $\lambda \leq \alpha$ ve $\beta \leq \alpha$ olacak şekilde bir $\alpha \in \Lambda$ vardır.

2.1.23. Tanım

$(\Lambda, \leq)$ yönlendirilmiş kümesinden herhangi bir X kümesine tanımlı her fonksiyona X içinde bir $a\check{g}$ (net) denir.

2.1.24. Tanım

(x_λ) , E Riesz uzayında bir ağ olmak üzere her $x_\alpha, x_\beta \in (x_\lambda)$ için E 'deki sıralamaya göre $x_\alpha \leq x_\gamma$ ve $x_\beta \leq x_\gamma$ olacak şekilde bir $x_\gamma \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) ağı *yukarı yönlendirilmiştir* denir ve $x_\lambda \uparrow$ şeklinde gösterilir. $x_\lambda \uparrow$ ve $\sup(x_\lambda) = x$ elemanı E içinde varsa $x_\lambda \uparrow x$ biçiminde gösterilir.

Benzer şekilde her $x_\alpha, x_\beta \in (x_\lambda)$ için E 'deki sıralamaya göre $x_\gamma \leq x_\alpha$ ve $x_\gamma \leq x_\beta$ olacak şekilde $x_\gamma \in (x_\lambda)$ varsa (x_λ) ağı *aşağı yönlendirilmiştir* denir ve $x_\lambda \downarrow$ şeklinde gösterilir. $x_\lambda \downarrow$ ve $\inf(x_\lambda) = y$ elemanı E içinde varsa $x_\lambda \downarrow y$ biçiminde gösterilir. (x_λ) ağı yerine herhangi bir $A \subseteq E$ altkümesi alındığında, $A \uparrow$ ve $\sup A = x$, E içinde varsa $A \uparrow x$ biçiminde gösterilir. $A \downarrow$ ve $\inf A = y$, E içinde varsa $A \downarrow y$ biçiminde gösterilir.

2.1.25. Tanım

E Riesz uzayında her $x \in E^+$ için $n \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere, $\frac{1}{n}x \downarrow 0$ ise E 'ye *Arşimedsel* (Archimedsel) Riesz uzayı denir.

2.2. Operatörler ve Örgü Homomorfizması

2.2.1. Tanım

E ve F iki vektör uzayı ve $T : E \rightarrow F$ dönüşüm olsun. Her $x, y \in E$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x)$$

koşulları sağlanıyorsa T 'ye *lineer dönüşüm* adı verilir. Lineer dönüşüm yerine operatör kelimesi, $T(x)$ yerine Tx gösterimi de kullanılabilir.

2.2.2. Teorem

$f, f_1, \dots, f_n$ X vektör uzayı üzerinde tanımlı lineer fonksiyoneller olsun. $f = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n$ olacak şekilde $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ var olması için gerekli ve yeterli koşul $\bigcap_{i=1}^n \text{Ker}(f_i) \subseteq \text{Ker}(f)$ olmasıdır [1].

2.2.3. Tanım

E ve F iki sıralı vektör uzayı $T: E \rightarrow F$ operatör olsun. Her $x \in E^+$ için $Tx \geq 0$ oluyorsa T operatörüne *pozitif operatör* denir ve $T \geq 0$ veya $0 \leq T$ biçiminde gösterilir.

2.2.4. Tanım

E ve F Riesz uzayları olmak üzere, E 'den F içine tanımlanan bütün operatörlerin kümesi $L(E, F)$ ile gösterilir.

Her $S, T \in L(E, F)$ için “ $S \leq T \Leftrightarrow T - S \geq 0$ ” şeklinde tanımlanan sıralama bağıntısı ile $L(E, F)$ sıralı vektör uzayıdır.

2.2.5. Tanım

E ve F Riesz uzayları olsun. $T: E \rightarrow F$ operatörü için $T \vee (-T)$ varsa bu supremuma T operatörünün *modülü* denir ve $|T|$ ile gösterilir.

2.2.6. Sonuç

E ve F Riesz uzayları, $T: E \rightarrow F$ operatör olmak üzere $|T|$ var ise her $x \in E^+$ için,

$$|Tx| \leq |T|(x)$$

eşitsizliği sağlanır [1].

2.2.7. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp Ty$ oluyorsa, T 'ye *dikliği koruyan operatör* denir.

2.2.8. Tanım

E Riesz uzayı olsun. $[x, y] = \{z \in E : x \leq z \leq y\}$ kümesine *sıralı aralık*, $A \subseteq E$ için $A \subset [x, y]$ olacak şekilde $x, y \in E$ varsa A 'ya *sıra sınırlı küme* denir.

2.2.9. Sonuç

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olmak üzere, A 'nın sıra sınırlı olması için gerekli ve yeterli koşul $A \subseteq [-x, x]$ olacak şekilde en az bir $x \in E^+$ elemanının var olmasıdır [1].

2.2.10. Tanım

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Eğer T operatörü E 'deki her sıra sınırlı kümeyi F 'deki sıra sınırlı kümeye dönüştürüyorsa T operatörüne *sıra sınırlı operatör* denir.

E 'den F 'ye tanımlanan bütün sıra sınırlı operatörlerin kümesi $L_b(E, F)$ ile gösterilir. $T_1, T_2 \in L_b(E, F)$ için " $T_1 \leq T_2 \Leftrightarrow$ her $x \in E_+$ için $T_1(x) \leq T_2(x)$ " sıralama bağıntısıyla $L_b(E, F)$ bir sıralı vektör uzayıdır. E Dedekind tam ise $L_b(E)$ Dedekind tamdır.

2.2.11. Sonuç

Her pozitif operatör sıra sınırlıdır.

2.2.12. Tanım

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun.

- a) Her $y \in E$ ve $x \in A$ için $|y| \leq |x|$ iken $y \in A$ oluyorsa A 'ya *katı küme* denir.
- b) A, E 'nin katı alt uzayı ise A 'ya E içinde *(sıra) ideal* denir.
- c) A, E 'de ideal ve her $(x_n) \subseteq A$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) için $\sup(x_n) = x \in E$ iken $x \in A$ oluyorsa, A 'ya E içinde σ – *ideal* denir.
- d) A, E 'de ideal ve her $B \subseteq A$ için $\sup B = b \in E$ iken $b \in A$ oluyorsa, A ideale E içinde *band* denir.
- e) $\phi \neq A \subseteq E$ altkümesini kapsayan en küçük Riesz alt uzayına (ideale/banda) A *kümesinin ürettiği Riesz alt uzayı (ideal/band)* denir. A kümesinin ürettiği ideal I_A ile A kümesinin ürettiği band ise B_A ile gösterilir.

2.2.13. Sonuç

Her (sıra) ideal bir Riesz alt uzayıdır [1].

2.2.14. Teorem

A ve $B \subseteq E$ de ideal ise $A \cap B$ ve $A + B \subseteq E$ de idealdir [1].

2.2.15. Tanım

E Riesz uzayı ve G, E nin Riesz alt uzayı olsun. Eğer her $0 < x \in E$ için $0 < y \leq x$ olacak şekilde bir $y \in G$ varsa G ye E içinde *sıra yoğun (order dense)* denir.

2.2.16. Teorem

E Riesz uzayı, $A \subseteq E$ ideal olsun [1].

- (i) A nın E de sıra yoğun olması için gerekli ve yeterli koşul $A^d = \{0\}$ olmasıdır.
- (ii) $A \oplus A^d$ ideli E içinde sıra yoğundur.
- (iii) A ideali A^{dd} içinde sıra yoğundur.

2.2.17. Teorem

E Arşimedsel Riesz uzayı, $\phi \neq A \subseteq E$ olsun. $B_A = A^{dd}$ dir. Bu durumda A band ise

$A = A^{dd}$ dir [1].

2.2.18. Teorem

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. I_A, A 'nın ürettiği ideali göstermek üzere,

$$I_A = \{x \in E : \exists x_1, x_2, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R^+ \ni |x| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i |x_i|, n \in N\} \text{ 'dir [1].}$$

2.2.19. Sonuç

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ olsun. $A = \{x\}$ ise ürettiği ideal şöyledir [1].

$$I_A = I_x = \{y \in E : \exists \lambda \in R^+, |y| \leq \lambda |x|\}$$

2.2.20. Teorem

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ ideal olmak üzere B_A aşağıdaki gibidir [1].

$$B_A = \{x \in E : \exists (x_\alpha) \subseteq A^+, 0 \leq x_\alpha \uparrow |x|\}$$

2.2.21. Sonuç

E Riesz uzayı ve $A \subseteq E$ ideal olsun. B_A , A 'nın ürettiği band olmak üzere,

$$A = \{x\} \Rightarrow B_A = B_x = \{y \in E : |y| \wedge n |x| \uparrow |y|\}$$

olur [1].

2.2.22. Tanım

E Riesz uzayı ve $0 < e \in E$ olsun.

a) $I_e = E$ ise e 'ye *güçlü birim (strong unit)* denir.

b) $B_e = E$ ise e 'ye *zayıf birim (weak unit)* denir.

2.2.23. Tanım

E Riesz uzayında bir B bandı için $E = B \oplus B^d$ ise B 'ye *projeksiyon band* denir. Bir Riesz uzayında her band, projeksiyon band ise bu uzaya *projeksiyon özelliğine sahiptir* denir.

Dedekind tam Riesz uzayları projeksiyon özelliğine sahiptir [1].

2.2.24. Tanım

E Riesz uzayı ve $x \in E$ olmak üzere, x in ürettiği band olan B_x projeksiyon band ise x 'e *projeksiyon eleman*, B_x bandına da *esas band* denir. Bir Riesz uzayında her eleman projeksiyon eleman ise bu uzaya *esas projeksiyon özelliğine sahiptir* denir.

2.2.25. Tanım

E Riesz uzayı olsun.

- a) $P : E \rightarrow E$ operatör olmak üzere $P^2 = P$ ise P 'ye *projeksiyon* denir. P , E Riesz uzayı üzerinde projeksiyon ve pozitif operatör ise, P 'ye *pozitif projeksiyon* denir.
- b) $B \subseteq E$ projeksiyon band olsun. Bu durumda her $x \in E$ için $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in B$ ve $x_2 \in B^\perp$ için $P_B : E \rightarrow E$, $x \rightarrow x_1$ biçiminde tanımlanan P_B operatörüne *band (sıra) projeksiyon* denir.

P_B pozitif projeksiyondur. Benzer şekilde $P_{B^\perp} : E \rightarrow E$, $x \rightarrow x_2$ biçiminde tanımlı $P_{B^\perp}$ projeksiyonu da pozitifdir [1].

2.2.26. Sonuç

E Riesz uzayındaki her projeksiyon banda karşılık bir band projeksiyon vardır [1].

2.2.27. Teorem

E Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir [1].

- 1) T sıra projeksiyondur.
- 2) $I : E \rightarrow E$ birim operatör olmak üzere T projeksiyon ve $0 \leq T \leq I$ 'dir.
- 3) Her $x, y \in E$ için $Tx \perp y - Ty$ 'dir.

2.2.28. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere $A, B \subseteq E$, projeksiyon band ise $A^\perp, A \cap B$ ve $A + B$ de projeksiyon bandı ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır [1].

$$1) \quad P_{A^d} = I - P_A$$

$$2) \quad P_{A \cap B} = P_A \circ P_B = P_B \circ P_A$$

$$3) \quad P_{A+B} = P_A + P_B - P_{A \cap B} = P_A + P_B - P_A \circ P_B$$

2.2.29. Teorem

E Riesz uzayı olmak üzere $A, B \subseteq E$, projeksiyon band ise aşağıdakiler denktir [1].

$$1) \quad A \subseteq B$$

$$2) \quad P_A \circ P_B = P_B \circ P_A = P_A$$

$$3) \quad P_A \leq P_B$$

E Arşimedse Riesz uzayı olmak üzere $\mathcal{B}(E)$, E 'deki bandların kümesi olsun. $A, B \in \mathcal{B}(E)$ için “ $A \leq B \Leftrightarrow A \subseteq B$ ” sıralamasıyla $\mathcal{B}(E)$ Boole cebiridir [14].

E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere $\mathcal{P}(E)$, E üzerindeki band projeksiyonların kümesi olsun. $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(E)$ için “ $P_1 \leq P_2 \Leftrightarrow \forall x \in E^+, P_1(x) \leq P_2(x)$ ” sıralamasıyla $\mathcal{P}(E)$ Boole cebiridir [14].

2.2.30. Teorem

E Dedekind tam Riesz uzayı olmak üzere

$$\varphi : \mathcal{B}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$$

$$B \mapsto \varphi(B) = P_B$$

dönüşümü Boole cebiri izomorfizmidir [14].

2.2.31. Tanım

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ bir operatör olsun.

- a) $\{x_\alpha\} \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere, $|x_\alpha - x| \leq y_\alpha \downarrow 0$ olacak şekilde $\{y_\alpha\} \subseteq E^+$ ağı varsa $\{x_\alpha\}$ ağı x elemanına *sıra (order) yakınsar* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{o} x$ biçiminde gösterilir.
- b) $\{x_\alpha\} \subseteq E$ için E' 'de $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ iken F' 'de $Tx_\alpha \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T operatörüne *sıra sürekli operatör* denir.
- c) $(x_n) \subseteq E$ için $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere E' 'de $x_n \xrightarrow{o} 0$ iken F' 'de $Tx_n \xrightarrow{o} 0$ oluyorsa T operatörüne σ - *sıra sürekli operatör* denir.

T pozitif operatör olmak üzere T 'nin sıra sürekli olması için gerekli ve yeterli şart $x_\alpha \downarrow 0$ iken $Tx_\alpha \downarrow 0$ (ya da $0 \leq x_\alpha \uparrow x$ iken $Tx_\alpha \uparrow Tx$) olmasıdır.

2.2.32. Tanım

E Riesz uzay olsun.

- a) $(x_n) \subseteq E$ ve $x \in E$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve her $n \geq n_0$ için $|x_n - x| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde $u \in E^+$ varsa (x_n) dizisi x elemanına *u-düzgün (uniformly) yakınsar* denir. (x_n) dizisi x elemanına *u-düzgün* yakınsıyorsa (x_n) dizisi *göreceli düzgün yakınsar* denir ve $x_\alpha \xrightarrow{r,u} x$ biçiminde gösterilir.
- b) $(x_n) \subseteq E$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ve her $n, m \geq n_0$ için $|x_n - x_m| \leq \varepsilon u$ olacak şekilde bir $u \in E^+$ varsa (x_n) dizisine *u- düzgün (uniformly) Cauchy dizisi* denir.

- c) $A \subseteq E$ olmak üzere her $(x_n) \subseteq A$ dizisi için $x_n \xrightarrow{r.u} x$ iken $x \in A$ oluyorsa A 'ya *düzgün (uniformly) kapalı küme* denir.
- d) Her $u \in E^+$ için E içinde herhangi u - düzgün Cauchy dizisi u -düzgün limite sahip ise E 'ye *düzgün (uniformly) tam küme* denir.

2.2.33. Lemma

E Arşimedsel Riesz uzayı ve A, E 'nin Riesz alt uzayı olsun.

- (i) A 'nın düzgün kapanışı $\bar{A}$ olmak üzere, $\bar{A}$ E 'nin Riesz alt uzayıdır ve $\bar{A} \subseteq I_A$ dır [4].
- (ii) E düzgün tam ise $\bar{A}$ da düzgün tamdır. A düzgün tam ise $\bar{A} = A$ dır [4].

2.2.34. Lemma

E Arşimedsel Riesz uzayı ve A, E 'nin Riesz alt uzayı olsun. $T: E \rightarrow E$ dönüşümü $T(A) \subseteq \bar{A}$ olacak şekilde pozitif lineer operatör ise $T(\bar{A}) \subseteq \bar{A}$ dır [6].

2.2.35. Tanım

E ve F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere, her $x, y \in E$ için $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ oluyorsa, T 'ye *örgü (Riesz) homomorfizması* denir.

2.2.36. Sonuç

Her örgü homomorfizması pozitif operatördür [1].

2.2.37. Sonuç

E, F Riesz uzayları ve $T: E \rightarrow F$ örgü homomorfizması olsun. $T(E) \subseteq F$ Riesz alt uzayıdır [1].

2.2.38. Teorem

E ve F iki Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ bir operatör olmak üzere aşağıdaki önermeler birbirine denktir [1].

- 1) T operatörü örgü homomorfizmasıdır
- 2) Her $x \in E$ için $T(x^+) = (Tx)^+$
- 3) Her $x, y \in E$ için $T(x \wedge y) = T(x) \wedge T(y)$
- 4) Her $x, y \in E$ için E uzayı içinde $x \wedge y = 0$ ise F uzayı içinde $T(x) \wedge T(y) = 0$
- 5) Her $x \in E$ için $T|x| = |Tx|$

2.2.39. Sonuç

Her sıra (band) projeksiyon örgü homomorfizmasıdır.

2.2.40. Sonuç

E ve F Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ operatör olmak üzere T örgü homomorfizması ise $Ker(T) = \{x : Tx = 0\}$ düzgün kapalı idealdir.

2.2.41. Tanım

E ve F Riesz uzayı, $T : E \rightarrow F$ örgü homomorfizması olsun. T birebir ve örtense T 'ye örgü izomorfizmi denir. E 'den F 'ye örgü izomorfizmi varsa, E ve F Riesz izomorfiktir denir.

2.2.42. Teorem

E ve F Riesz uzayları, $T : E \rightarrow F$ birebir ve örten operatör olmak üzere T 'nin örgü izomorfizmi olması için gerekli ve yeterli koşul T ve T^{-1} operatörlerinin pozitif olmasıdır.

2.2.43. Tanım

E Riesz uzayı ve $T : E \rightarrow E$ operatör olmak üzere E 'nin her bir B bandı için $T(B) \subseteq B$ oluyorsa, T 'ye *band koruyan operatör* denir.

2.2.44. Teorem

E Arşimedsel Riesz uzayı ve $T : E \rightarrow E$ operatör olsun. B_x , x 'in ürettiği band olmak üzere aşağıdakiler denktir.

- 1) T , band koruyandır.
- 2) $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ dir.
- 3) $x \in E$ iken $Tx \in B_x$ dir.

2.2.45. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere $T : E \rightarrow E$ sıra sınırlı ve band koruyan operatör ise T 'ye *orthomorfizma* denir. E üzerindeki orthomorfizmaların kümesi $Orth(E)$ ile gösterilir.

$T : E \rightarrow E$ sıra sınırlı operatör ise Teorem 2.2.44'den T 'nin orthomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in E$ için $x \perp y$ iken $Tx \perp y$ olmasıdır.

$$Orth(E) = \{T \mid T : E \rightarrow E \text{ sıra sınırlı ve band koruyan operatör}\}$$

$$= \{T \mid T \in L_b(E) : x \perp y \Rightarrow Tx \perp y\}$$

$Orth(E)$, $L_b(E)$ nin bir alt vektör uzayıdır. $L_b(E)$ den indirgenen noktasal sıralama ile $Orth(E)$ bir sıralı vektör uzayıdır.

2.2.46. Teorem

E Arşimedsel Riesz uzayı ise $Orth(E)$ Arşimedsel Riesz uzayıdır.

Her $S, T \in Orth(E)$ ve her $x \in E^+$ için,

$$(S \vee T)(x) = S(x) \vee T(x) \text{ ve } (S \wedge T)(x) = S(x) \wedge T(x)$$

sağlanır [1].

2.2.47. Teorem

E Arşimedsel Riesz uzayı olsun. $T \in L_b(E)$ dönüşümünün orthomorfizma olması için gerekli ve yeterli koşul E içinde her düzgün kapalı ideali sabit bırakmasıdır [1].

2.2.48. Tanım

E Riesz uzayı olmak üzere, $Orth(E)$ içinde birim operatörün ürettiği ideale E 'nin *merkezi* denir ve $Z(E)$ ile gösterilir.

$$Z(E) = \{T \in L_b(E) : |T| \leq \lambda I\}, \exists \lambda \in R^+$$

şeklindedir. $T \in Z(E)$ ise T 'ye *merkez operatör* denir.

2.2.49. Sonuç

E Riesz uzayı olsun. $P(E)$, E üzerindeki band projeksiyonların kümesi olmak üzere,

$P(E) \subseteq Z(E) \subseteq Orth(E) \subseteq L_b(E)$ 'dir.

2.3. f -Cebirleri ve Özellikleri

2.3.1 Tanım

E Riesz uzayı ve birleşmeli bir cebir olsun. Eğer her $u, v \in E^+$ için $uv \geq 0$ oluyorsa E 'ye *Riesz cebiri* (Örgü sıralı cebir) denir.

E Riesz cebiri olmak üzere $u, v \in E$ için $u \wedge v = 0$ iken her $w \in E^+$ için $(wu) \wedge v = (uw) \wedge v = 0$ oluyorsa E 'ye f -cebir denir.

Örnek

- (i) $L_b(L)$ Riesz uzayı olduğunda bileşke işlemine göre Riesz cebiridir.
- (ii) X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli bütün fonksiyonların kümesi $\mathbb{R}^X$ noktasal çarpma ile birimli bir f -cebiridir.
- (iii) X boştan farklı bir topolojik uzay olmak üzere X üzerinde tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların kümesi $C(X)$ birimli bir f -cebiridir.
- (iv) L Arşimedsel Riesz uzayı olmak üzere $Orth(L)$ ve $Z(L)$ fonksiyonların bileşke işlemine göre birer birimli Arşimedsel f -cebirleridir.
- (v) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kümesi fonksiyonların çarpımı işlemine göre f -cebiridir.
- (vi) $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı altkümelerinde $\lim_{t \downarrow 0} f(tx)t^{-1}$ limitine düzgün olarak sahip olan fonksiyonlar uzayı $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin. $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n), \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ kümesinin f -altcebiridir.

2.3.2. Tanım

E bir f -cebiri ve $u \in E$ olsun. Eğer en az bir k doğal sayısı için $u^k = 0$ iken $u \neq 0$ oluyorsa E 'ye *yarı-asal (semiprime) f -cebiri* denir.

E f -cebirinin yarı-asal olması için gerekli ve yeterli koşul $u^2 = 0$ iken $u \neq 0$ olmasıdır.

2.3.3. Teorem

E Riesz cebiri olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır.

- (i) $x \leq y$ ve $0 \leq u \in E$ için $ux \leq uy$ ve $xu \leq yu$ dur.
- (ii) E 'de $0 \leq u \leq v$ ve $0 \leq p \leq q$ ise $up \leq vq$ dur.
- (iii) $0 \leq u \in E$ ise her $x, y \in E$ için $u(x \vee y) \geq (ux) \vee (uy)$, $(x \vee y)u \geq (xu) \vee (yu)$, $u(x \wedge y) \leq (ux) \wedge (uy)$ ve $(x \wedge y)u \leq (xu) \wedge (yu)$ dur.
- (iv) Her $x, y \in E$ için $|xy| \leq |x||y|$, $(xy)^+ \leq x^+y^+ + x^-y^-$ ve $(xy)^- \leq x^+y^- + x^-y^+$ dir.

2.3.4. Teorem

E f -cebiri olmak üzere aşağıdaki özellikler vardır [15].

- (i) $x, y \in E$ ve her $0 \leq u \in E$ için $u(x \vee y) = (ux) \vee (uy)$, $(x \vee y)u = (xu) \vee (yu)$, $u(x \wedge y) = (ux) \wedge (uy)$ ve $(x \wedge y)u = (xu) \wedge (yu)$ dur.
- (ii) Her $x, y \in E$ için $|xy| = |x||y|$, $(xy)^+ = x^+y^+ + x^-y^-$ ve $(xy)^- = x^+y^- + x^-y^+$ dir.
- (iii) E 'de $x \perp y$ ve $z \in E$ ise $xz \perp y$ ve $zx \perp y$ dir.

(iv) E' de $x \perp y$ ise $xy = 0$ dır.

(v) Her $x \in E$ için $x^2 \geq 0$ ve $xx^+ \geq 0$ dır.

(vi) Her $0 \leq x, y \in E$ için $(xy) \vee (yx) \leq x^2 \vee y^2$ ve $x^2 \wedge y^2 \leq (xy) \wedge (yx)$ dir.

(vii) Her $0 \leq x, y \in E$ için $(x \vee y)^2 = x^2 \vee y^2$ ve $(x \wedge y)^2 = x^2 \wedge y^2$ dir.

2.3.5. Teorem

E f -cebiri ve A, E' nin f -altcebiri ise A 'nın göreceli düzgün kapanışı da f -altcebirdir.

3. RİESZ UZAYLARINDA FONKSİYONEL HESAP

Herhangi bir Riesz uzayı olan E üzerinde tanımlı reel değerli örgü homomorfizmleri E 'nin noktalarını ayırıyorsa E 'ye temsil edilebilir denir. [4] Teorem 2.2 den sayılabilir elemanlar tarafından üretilen herhangi bir Arşimedsel Riesz uzayı temsil edilebilirdir.

Şimdi bazı notasyonları verelim. E Riesz uzayı için E üzerinde tanımlı reel değerli sıfırdan farklı örgü homomorfizmlerin kümesi $H(E)$ ile gösterilsin. E 'nin boştan farklı herhangi altkümesi D için E 'nin D tarafından üretilen Riesz alt uzayı $\langle D \rangle$ ile gösterilsin. [4] Teorem 2.2 den $a_1, \dots, a_n \in E$ için $H(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)$, $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ 'nin noktalarını ayırır.

Çarpma işlemini koruyan fonksiyonlara çarpımsal fonksiyon denir. E Arşimedsel f -cebiri olmak üzere E üzerinde tanımlı reel değerli çarpımsal örgü homomorfizmlerin kümesi $H_m(E)$ ile gösterilsin. Ayrıca, E 'nin boştan farklı herhangi altkümesi D için E 'nin D tarafından üretilen f -altcebiri $\langle\langle D \rangle\rangle$ ile gösterilsin.

3.1. Önerme

E Arşimedsel Riesz uzayı olsun.

- (i) $w \in H(E)$ ise, her $T \in Orth(E)$ ve her $x \in E$ için $w(Tx) = \tilde{w}(T)w(x)$ olacak biçimde $\tilde{w} \in H_m(Orth(E))$ vardır ve tektir.
- (ii) $H(E)$, E 'nin noktalarını ayırıyorsa bu durumda $H_m(Orth(E))$ de $Orth(E)$ 'nin noktalarını ayırır.

İspat

- (i) $w \in H(E)$ olsun. $T \in Orth(E)$ olmak üzere

$$w_T: E \rightarrow R$$

$$x \rightarrow w_T(x) = w(Tx)$$

şeklinde tanımladığımız dönüşümün anlamlı, iyi tanımlı ve lineer olduğu aşıkardır.

Düzgün kapalı ideal olan $Ker(w) = \{x \in E : w(x) = 0\}$ için Teorem 2.2.47 den $T(Ker(w)) \subseteq Ker(w)$ dir. Bu durumda w_T dönüşümünün tanımından;

$$x \in Ker(w) \Rightarrow T(x) \in Ker(w)$$

$$\Rightarrow w(Tx) = w_T(x) = 0$$

$$\Rightarrow x \in Ker(w_T)$$

olur. Buradan $Ker(w) \subseteq Ker(w_T)$ dir. Teorem 2.2.2 den $w_T = \tilde{w}(T)w$ olacak şekilde $\tilde{w}(T) \in R$ vardır ve tektir. Şimdi $T \in Orth(E)$ operatörü için elde edilen bu eşitlikteki $\tilde{w}(T)$ reel sayısına λ denirse

$$\tilde{w}: Orth(E) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$T \rightarrow \tilde{w}(T) = \lambda$$

biçiminde tanımlı $\tilde{w}$ bir fonksiyon olur. Şimdi çarpımsal örgü homomorfizmi olduğu gösterilmelidir.

- $T_1, T_2 \in Orth(E)$ ve $x \in E$ için

$$w_{T_1}: E \rightarrow R, \quad w_{T_1}(x) = w(T_1(x))$$

$$w_{T_2}: E \rightarrow R, \quad w_{T_2}(x) = w(T_2(x))$$

olsun.

$$Ker(w) \subseteq Ker(w_{T_1}) \Rightarrow \exists \lambda_1 \in R \text{ var: } w_{T_1} = \lambda_1 w$$

$$Ker(w) \subseteq Ker(w_{T_2}) \Rightarrow \exists \lambda_2 \in R \text{ var: } w_{T_2} = \lambda_2 w$$

$$w_{T_1+T_2}: E \rightarrow R, w_{T_1+T_2}(x) = w((T_1 + T_2)(x))$$

olmak üzere w, T_1 ve T_2 dönüşümlerinin lineer olmasından

$$w_{T_1+T_2}(x) = w((T_1 + T_2)(x)) = w(T_1(x)) + w(T_2(x))$$

$$= \lambda_1 w(x) + \lambda_2 w(x)$$

$$= (\lambda_1 + \lambda_2)w(x)$$

olur ve buradan $\tilde{w}(T_1 + T_2) = \lambda_1 + \lambda_2 = \tilde{w}(T_1) + \tilde{w}(T_2)$ dır.

$T \in Orth(E)$, $x \in E$ ve $\lambda' \in \mathbb{R}$ için

$$w_T: E \rightarrow R, w_T(x) = w(Tx)$$

$$w_{\lambda'T}: E \rightarrow R, w_{\lambda'T}(x) = w(\lambda'T(x))$$

olsun.

$$Ker(w) \subseteq Ker(w_T) \Rightarrow \exists \lambda \in R \text{ var: } w_T = \lambda w$$

olmak üzere w dönüşümü lineer olduğundan $w_{\lambda'T}(x) = w(\lambda'T(x)) = \lambda'w(T(x)) = \lambda'\lambda w(x)$ olur ve buradan $\tilde{w}(\lambda'T) = \lambda'\lambda = \lambda'\tilde{w}(T)$ dır. Yani $\tilde{w}$ lineerdir.

- $T \in Orth(E)$ için $|T| \in Orth(E)$ dir. $x \in E$ için,

$$w_T: E \rightarrow R, w_T(x) = w(Tx)$$

$$w_{|T|}: E \rightarrow R, w_{|T|}(x) = w(|T|x)$$

olsun.

$$Ker(w) \subseteq Ker(w_T) \Rightarrow \exists \lambda \in R \text{ var: } w_T = \lambda w$$

$$Ker(w) \subseteq Ker(w_{|T|}) \Rightarrow \exists \mu \in R \text{ var: } w_{|T|} = \mu w$$

w örgü homomorfizmi olduğundan ve Teorem 2.2.46 dan $x \in E^+$ için

$$\mu w(x) = w_{|T|}(x) = w(|T|(x)) = w(|T(x)|) = |w(T(x))| = |\lambda| |w(x)| = |\lambda| w(x)$$

bulunur. Buradan $\tilde{w}(|T|) = \mu = |\lambda| = |\tilde{w}(T)|$ elde edilir. Yani $\tilde{w}$ örgü homomorfizmidir.

- $T_1, T_2 \in Orth(E)$ ve $x \in E$ için

$$w_{T_1}: E \rightarrow R, \quad w_{T_1}(x) = w(T_1(x))$$

$$w_{T_2}: E \rightarrow R, \quad w_{T_2}(x) = w(T_2(x))$$

olsun.

$$Ker(w) \subseteq Ker(w_{T_1}) \Rightarrow \exists \lambda_1 \in R \text{ var: } w_{T_1} = \lambda_1 w$$

$$Ker(w) \subseteq Ker(w_{T_2}) \Rightarrow \exists \lambda_2 \in R \text{ var: } w_{T_2} = \lambda_2 w$$

$T_2 x = y$ denirse $w_{T_2}(x) = w(T_2 x) = w(y) = \lambda_2 w(x)$ olur ve $y \in E$ olmasından

$$w_{T_1 T_2}(x) = w(T_1 T_2(x)) = w(T_1(T_2(x))) = w(T_1(y)) = \lambda_1 w(y) = \lambda_1 \lambda_2 w(x)$$

bulunur. Öyleyse $\tilde{w}(T_1 T_2) = \lambda_1 \lambda_2 = \tilde{w}(T_1) \tilde{w}(T_2)$ eşitliğinden $\tilde{w}$ çarpımsaldır.

Bu durumda $\tilde{w} \in H_m(Orth(E))$ dir.

(ii) $H(E)$, E 'nin noktalarını ayırsın. $T_1, T_2 \in Orth(E)$ ve $T_1 \neq T_2$ olsun. En az bir $0 \neq x \in E$ için $T_1(x) \neq T_2(x)$ dir. (i) den $w \in H(E)$ için $wT_1 = \tilde{w}(T_1)w$ ve $wT_2 = \tilde{w}(T_2)w$ olacak şekilde en az bir $\tilde{w} \in H_m(Orth(E))$ vardır. $H(E)$, E 'nin noktalarını ayırdığından $wT_1 \neq wT_2$ dir. Buradan $\tilde{w}(T_1) \neq \tilde{w}(T_2)$ olur. Bu durumda $H_m(Orth(E))$, $Orth(E)$ nin noktalarını ayırır.

Lemma 3.2:

E Arşimedsel f-cebiri ve $w \in H(E)$ olsun. Her $x, y \in E$ için $w(xy) = \alpha w(x)w(y)$ olacak şekilde $\alpha \geq 0$ reel sayısı vardır ve tektir.

İspat

$w \in H(E)$ ise Önerme 3.2'den her $x \in E$ ve her $T \in Orth(E)$ için

$$w(Tx) = \tilde{w}(T)w(x) \quad (*)$$

olacak şekilde $\tilde{w} \in H_m(Orth(E))$ vardır ve tektir.

$x \in E$ için M_x ile gösterilen çarpım dönüşümü sıra sınırlıdır. $y, z \in E$ ve $y \perp z$ olsun. E f-cebiri olduğundan Teorem 2.3.4' den $|M_x(y)|\wedge|z| = |xy|\wedge|z| = 0$ olur. Buradan $M_x \in Orth(E)$ dir. Aynı şekilde $M_y \in Orth(E)$ dir. (*) eşitliğinden

$$w(M_x(y)) = w(xy) = \tilde{w}(M_x)w(y)$$

$$w(M_y(y)) = w(xy) = \tilde{w}(M_y)w(x)$$

eşitlikleri elde edilir. $w(x) = 0$ veya $w(y) = 0$ olması durumunda her $\alpha \in \mathbb{R}$ için eşitlik sağlanır. $w(x) \neq 0$ ve $w(y) \neq 0$ için

$$\frac{\tilde{w}(M_x)}{w(x)} = \frac{\tilde{w}(M_y)}{w(y)} = \alpha$$

olarak belirlenirse buradan $w(xy) = \alpha w(x)w(y)$ olacak şekilde α reel sayısı bulunmuş olur. Ayrıca her $x \in E$ için w dönüşümünün pozitif olmasından ve Teorem 2.3.4 den $0 \leq w(x^2) = \alpha w(x)w(x) = \alpha(w(x))^2$ dır. Buradan $\alpha \geq 0$ dır.

3.3. Tanım

E Arşimedsel f -cebiri ve $w \in H(E)$ olsun. Her $x, y \in E$ için $w(xy) = 0$ ise w dönüşümü *singülerdir* denir.

$w \in H(E)$ dönüşümünün singüler olması için gerekli ve yeterli koşul Lemma 3.2' de $w(xy) = \alpha w(x)w(y)$ eşitliğinde $\alpha = 0$ olmasıdır.

3.4. Lemma

E yarı-asal Arşimedsel f -cebiri için $H(E)$, E 'nin noktalarını ayırsın. Bu durumda $H(E)$ 'deki singüler olmayan örgü homomorfizmleri de E 'nin noktalarını ayırır.

İspat

$H(E)$, E 'nin noktalarını ayırsın. $x \in E^+, x \neq 0$ olsun. E yarı-asal f -cebiri olduğundan $x > 0$ iken $x^2 > 0$ dır. $H(E)$, E 'nin noktalarını ayırdığından $w(x^2) > 0$ olacak şekilde en az bir $w \in H(E)$ vardır. Lemma 3.2'den $w(x^2) = \alpha w(x)w(x) > 0$ olacak biçimde $\alpha > 0$ reel sayısı vardır. Buradan w singüler değildir ve $w(x) \neq 0$ olduğundan $H(E)$ 'deki singüler olmayan örgü homomorfizmleri de E 'nin noktalarını ayırır.

3.5. Sonuç

E Arşimedsel f -cebiri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

- (i) Her $w \in H(E)$ singüler olmayan örgü homomorfizmi için αw çarpımsal olacak şekilde $\alpha > 0$ reel sayısı vardır ve tektir.

- (ii) E yarı-asal f -cebiri ve $H(E)$, E 'nin noktalarını ayırıyorsa, $H_m(E)$ de E 'nin noktalarını ayırır.

İspat

- (i) $w \in H(E)$ singüler olmasın. Lemma 3.2'den her $x, y \in E$ için $w(xy) = \alpha w(x)w(y)$ olacak şekilde $0 < \alpha$ reel sayısı vardır ve tektir. Burada w singüler olmadığından α sıfırdan farklıdır ve $(\alpha w)(xy) = \alpha w(xy) = \alpha^2 w(x)w(y) = (\alpha w)(x)(\alpha w)(y)$ eşitliğinden αw çarpımsaldır.

- (ii) E yarı-asal f -cebiri ve $H(E)$, E 'nin noktalarını ayırsın. Lemma 3.4'den $H(E)$ 'deki singüler olmayan örgü homomorfizmleri de E 'nin noktalarını ayırır. Buradan $0 < x \in E$ için $0 < w(x)$ olacak şekilde singüler olmayan bir $w \in H(E)$ vardır. (i)'den αw çarpımsal olacak şekilde $0 < \alpha$ reel sayısı vardır ve tektir. O halde $(\alpha w)(x) \neq 0$ olup $H_m(E)$, E 'nin noktalarını ayırır.

3.6. Lemma

E Arşimedsel f -cebiri ve D , E 'nin sayılabilir bir altkümesi olsun. Bu durumda $\langle\langle D \rangle\rangle$ f -cebiri sayılabilir bir küme tarafından üretilen Riesz uzayına eşittir ve $H(\langle\langle D \rangle\rangle)$, $\langle\langle D \rangle\rangle$ 'nin noktalarını ayırır.

İspat

$D \subseteq E^+$ olsun.

$$S = \{a_1 a_2 \dots a_n : a_j \in D, j = 1, 2, \dots, n; n \in \mathbb{N}\}$$

olarak tanımlanan küme E^+ nin altkümesidir ve sayılabilir. $S \subseteq \langle\langle D \rangle\rangle$ olmasından $\langle S \rangle \subseteq \langle\langle D \rangle\rangle$ dir.

$$L = \{x \in E : xS \subseteq \langle S \rangle\}$$

kümesi E' nin alt uzayıdır. $x \in L$ olsun. Bu durumda her $y \in S \subseteq E^+$ için $xy \in \langle S \rangle$ dir. Buradan $|x|y = |xy| \in \langle S \rangle$ olur. Dolayısıyla L, E' nin Riesz alt uzayıdır. L Riesz alt uzay ve $S \subseteq L$ olduğundan $\langle S \rangle \subseteq L$ dir. Böylece $\langle S \rangle S \subseteq \langle S \rangle$ dir. Benzer şekilde

$$M = \{x \in E : x\langle S \rangle \subseteq \langle S \rangle\}$$

kümesi E' nin Riesz alt uzayıdır ve $\langle S \rangle S \subseteq \langle S \rangle$ olduğundan $S \subseteq M$ dir. Buradan $\langle S \rangle \subseteq M$ olup $\langle S \rangle \langle S \rangle \subseteq \langle S \rangle$ bulunur. Böylece $\langle S \rangle, E'$ nin f -altcebiridir.

$D \subseteq \langle S \rangle$ ve $\langle S \rangle$ f -altcebir olduğundan $\langle\langle D \rangle\rangle \subseteq \langle S \rangle$ dir. Böylelikle $\langle\langle D \rangle\rangle = \langle S \rangle$ dir. Dolayısıyla $\langle\langle D \rangle\rangle$ sayılabilir bir kümenin ürettiği Riesz uzayına eşit olduğundan temsil edilebilirdir. Yani $H(\langle\langle D \rangle\rangle), \langle\langle D \rangle\rangle'$ nin noktalarını ayırır.

3.7. Sonuç

E Arşimedsel yarı asal f -cebiri ve D, E' nin sayılabilir bir altkümesi ise $H_m(\langle\langle D \rangle\rangle), \langle\langle D \rangle\rangle'$ nin noktalarını ayırır.

İspat

D, E' nin sayılabilir bir altkümesi ise Lemma 3.6 dan $H(\langle\langle D \rangle\rangle), \langle\langle D \rangle\rangle'$ nin noktalarını ayırır. Sonuç 3.5(ii) den $H_m(\langle\langle D \rangle\rangle), \langle\langle D \rangle\rangle'$ nin noktalarını ayırır.

E Arşimedsel f -cebiri ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ olsun. Sabit terimi olmayan bir f reel polinomu için $x_1, x_2, \dots, x_n$ reel değişkenleri yerine $a_1, \dots, a_n$ değişkenleri alınarak E nin $f(a_1, \dots, a_n)$ elemanı elde edilir.

3.8. Önerme

E yarı-asal Arşimedsel f -cebiri ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ olsun. f ve g fonksiyonları n değişkenli, sabit terimsiz, reel polinomlar ve $f^{-1}(\{0\}) \subseteq g^{-1}(\{0\})$ olsun. O halde $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ iken $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ dir.

İspat

$w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle)$ ve $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ olsun. $w(a_1), \dots, w(a_n) \in R$ için w çarpımsal ve lineer olduğundan $f(w(a_1), \dots, w(a_n)) = w(f(a_1, \dots, a_n)) = 0$ dır. Hipotezden $f^{-1}(\{0\}) \subseteq g^{-1}(\{0\})$ olduğundan $g(w(a_1), \dots, w(a_n)) = 0$ dır. Buradan herhangi $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle)$ için $w(g(a_1, \dots, a_n)) = 0$ bulunur. Sonuç 3.7 den $g(a_1, \dots, a_n) = 0$ dır.

3.9. Tanım

E Arşimedsel Riesz uzayı olmak üzere $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ ve $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ verilsin. Her $w \in \mathcal{H}(\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_n))$ olacak şekilde bir $b \in E$ varsa $f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ E ' dedir denir ve $b = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ile gösterilir.

$b = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ve L, E 'nin $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ elemanlarını içeren Riesz alt uzayı ise her $w \in H(L)$ için $w(b) = f(w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_n))$ olur. Buradan aşağıdaki lemma kolaylıkla elde edilir.

3.10. Lemma

E Arşimedsel Riesz uzayı, $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ ve $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için $b = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olacak şekilde $b \in E$ varsa tektir.

İspat

$f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Her $w \in H(\langle a_1, \dots, a_n, b_1, b_2 \rangle)$ için $w(b_1) = f(w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_n))$ ve $w(b_2) = f(w(a_1), w(a_2), \dots, w(a_n))$ olacak şekilde $b_1, b_2 \in E$ olsun. Bu durumda $w(b_1) = w(b_2)$ olup ve $H(\langle a_1, \dots, a_n, b_1, b_2 \rangle)$, $\langle a_1, \dots, a_n, b_1, b_2 \rangle$ nin noktalarını ayırdığından $b_1 = b_2$ dir.

3.11. Lemma

E Arşimedsel Riesz uzayı, $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in E$ için $G \subseteq H(\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle)$ ve her $w \in G$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olsun. $G, \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$ nin noktalarını ayırsın. O zaman $b = f(a_1, \dots, a_n)$ dir.

İspat

$e = |a_1| + |a_2| + \dots + |b|$, $\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$ nin güçlü birimidir.

$$\Omega = \{w \in H(\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle) : w(e) = 1\}$$

olmak üzere $x_1, x_2 \in \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$ için $x_1 \neq x_2$ olsun. Bu durumda $H(\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle)$, $\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$ ' nin noktalarını ayırdığından en az bir $w \in H(\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle)$ için $w(x_1) \neq w(x_2)$ dir. Burada w dönüşümü sıfırdan farklıdır ve $w(e) \neq 0$ dir. $\lambda \in \mathbb{R}$ için $w(e) = \lambda$ denirse $w_0 = \frac{w}{\lambda}$ için $w_0(x_1) \neq w_0(x_2)$ ve $w_0 \in \Omega$ olur. Dolayısıyla $\Omega, \langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle$ nin noktalarını ayırır.

(*) Ayrıca $b = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olması için gerekli ve yeterli koşul her $w \in \Omega$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olmasıdır.

($\Rightarrow$) $b = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ olsun. Tanım 3.9' den her $w \in H(\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olduğundan her $w \in \Omega$ için de $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir.

($\Leftarrow$) Her $w \in \Omega$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olsun. $w \in H(\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle)$ alalım. w dönüşümünün sıfır olması durumunda ispat aşıkardır. $w \neq 0$ olsun. $w_0 \in \Omega$ için $w = \lambda w_0$ olacak şekilde $\lambda \in \mathbb{R}$ vardır. Bu durumda $w_0(b) = f(w_0(a_1), \dots, w_0(a_n))$ ve f fonksiyonu pozitif homojen olduğundan $\lambda w_0(b) = f(\lambda w_0(a_1), \dots, \lambda w_0(a_n))$ olur. Buradan $b = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dir.

Şimdi $\Lambda = \{w(e)^{-1}w : w \in G, w(e) \neq 0\}$ olsun. Herhangi $x \in \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$ ve $w \in H(\langle a_1, a_2, \dots, a_n, b \rangle)$ için

$$\hat{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \hat{x}(w) = w(x)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm anlamlı ve iyi tanımlıdır.

$$\Phi: \langle \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \rangle \rightarrow \mathbb{R}^\Omega$$

$$x \rightarrow \Phi(x) = \hat{x}$$

şeklinden tanımlı dönüşüm anlamlı, iyi tanımlı ve lineerdir. Bu dönüşümün $\langle \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \rangle$ 'den R^Ω içine örgü izomorfizm olduğunu gösterelim. $\hat{x}, \hat{y} \in R^\Omega$ için $\hat{x} = \hat{y}$ olsun. Her $w \in \Omega$ için $\hat{x}(w) = \hat{y}(w)$ dir ve buradan $w(x) = w(y)$ dir. Ω , $\langle \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \rangle$ ' nin noktalarını ayırdığından $x = y$ olur. Bu durumda Φ dönüşümü birebirdir. $x \in \langle \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \rangle$ ve her $w \in \Omega$ için w örgü homomorfizmi olduğundan $|\widehat{x}|(w) = w(|x|) = |w(x)| = |\hat{x}(w)| = |\hat{x}|(w)$ dir. Öyleyse Φ örgü homomorfizmidir. Yani Φ dönüşümü örgü izomorfizmdir.

Ω üzerinde $\{\hat{x} : x \in \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\}$ fonksiyonları tarafından üretilen zayıf topoloji düşünülürse bu topolojiye göre Ω Kompakt Hausdorff uzaydır. Λ , $\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$ nin noktalarını ayırdığından Λ , Ω içinde yoğundur.

$w \in \Omega$ için $\bar{\Lambda} = \Omega$ olduğundan $\{w_\alpha\} \in \Lambda$ neti vardır ve $w_\alpha \rightarrow w$ zayıf topolojiye göre yakınsar. Hipotezden $\hat{b}(w_\alpha) = f(\hat{a}_1(w_\alpha), \dots, \hat{a}_n(w_\alpha))$ dir ve f sürekli olduğundan

$$\hat{b}(w_\alpha) = f(\hat{a}_1(w_\alpha), \dots, \hat{a}_n(w_\alpha)) \Rightarrow w_\alpha(b) = f(w_\alpha(a_1), \dots, w_\alpha(a_n))$$

$$\Rightarrow \lim_\alpha (w_\alpha(b)) = \lim_\alpha (f(w_\alpha(a_1), \dots, w_\alpha(a_n)))$$

$$\Rightarrow w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$$

bulunur. O halde her $w \in \Omega$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir ve (*) dan $f(a_1, \dots, a_n)$ dir.

3.12. Sonuç

E Arşimedsel Riesz uzayı, $L \subseteq E$, $a_1, \dots, a_n, b \in L$ ve $H(L), L$ 'nin noktalarını ayıracak şekilde E 'nin Riesz alt uzayı olsun. $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ ve her $w \in H(L)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ ise $b = f(a_1, \dots, a_n)$ dir.

İspat

Lemma 3.11 de G yerine $H(L)$ düşünülürse ispatı açıktır.

Verilen $a_1, \dots, a_n \in E$ elemanları için $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ şu şekilde tanımlansın;

$$\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) : f(a_1, \dots, a_n) \text{ } E' \text{ de vardır} \}$$

Ayrıca $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ olmak üzere $e_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$ ($j = 1, \dots, n$) şeklinde tanımlanan e_j fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ üzerinde sürekli ve pozitif homojen olduğundan her $j = 1, \dots, n$ için $e_j \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ dir. Bu fonksiyonların ürettiği Riesz alt uzayı F_N ile gösterilsin.

3.13. Önerme

E Arşimedsel Riesz uzayı, $a_1, \dots, a_n \in E$ verilsin. O zaman $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n), \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ 'nin Riesz alt uzayıdır ve $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ 'den E içine $\Phi(f) = f(a_1, \dots, a_n)$ şeklinde tanımlı dönüşüm örgü homomorfizmidir.

İspat

Her $j = 1, 2, \dots, n$ için $e_j \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olup her $w \in H(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)$ için $e_j(w(a_1), \dots, w(a_n)) = w(a_j)$ olacak şekilde $a_j \in E$ olduğundan $e_j(a_1, \dots, a_n) \in E$ de vardır ve böylece $e_j \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ dir. Bu durumda $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) \neq \emptyset$ dir.

$\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ nin $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ 'nin Riesz alt uzayı olduğunu göstermek için $f, g \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ olsun. Bu durumda $b_1 = f(a_1, \dots, a_n)$ ve $b_2 = g(a_1, \dots, a_n)$ E 'de vardır. Tanım 3.9 dan her $w \in H(\langle a_1, \dots, a_n, b_1, b_2 \rangle)$ için $w(b_1) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ ve $w(b_2) = g(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir. w dönüşümünün lineer olmasından $w(b_1 + b_2) = w(b_1) + w(b_2) = f(w(a_1), \dots, w(a_n)) + g(w(a_1), \dots, w(a_n)) = (f+g)(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olur. Buradan $b_1 + b_2 = (f + g)(a_1, \dots, a_n)$ bulunur ve böylece $f + g \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ dir. $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $f \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ için $\lambda f \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ ve $|f| \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ olduğu benzer yolla gösterilebilir. Bu durumda $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$, $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ 'nin Riesz alt uzayıdır.

Φ dönüşümünün örgü homomorfizmi olduğunu göstermek için $f \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ olsun. $f(a_1, \dots, a_n) \in E$ 'de vardır ve her $w \in H(\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olacak şekilde $b \in E$ vardır. w örgü homomorfizmi ve $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ Riesz alt uzay olmasından

$$|f|(w(a_1), \dots, w(a_n)) = |f(w(a_1), \dots, w(a_n))| = |w(b)| = w(|b|)$$

olacak şekilde bir $|b| \in E$ bulunduğu için $|b| = |f|(a_1, \dots, a_n)$ yazılır. Buradan

$$\Phi(|f|) = |f|(a_1, \dots, a_n) = |b| = |f(a_1, \dots, a_n)| = |\Phi(f)|$$

olur. Bu durumda Φ dönüşümü örgü homomorfizmidir.

3.14. Önerme

E Arşimedsel Riesz uzayı, $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ verilsin.

$$(i) \quad F_N \subseteq \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n),$$

$$\Phi: F_N \rightarrow E$$

$$f \rightarrow \Phi(f) = f(a_1, \dots, a_n)$$

Şeklinde tanımlı dönüşüm örgü homomorfizmidir ve $\Phi(e_j) = a_j$ ($j = 1, \dots, n$) eşitliği ile tektir. Ayrıca $\Phi(F_N) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dir.

$$(ii) \quad E \text{ düzgün tam ise } \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) \text{ de düzgün tamdır.}$$

İspat

(i) Her $j = 1, 2, \dots, n$ için $e_j \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ olduğundan $F_N \subseteq \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ dir. Önerme 3.13 deki $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) \rightarrow E$ dönüşümü örgü homomorfizmi olduğundan $\Phi: F_N \rightarrow E$ dönüşümü örgü homomorfizmidir. Şimdi $T: F_N \rightarrow E$ örgü homomorfizmi olsun ve $j = 1, \dots, n$ için $Te_j = a_j$ sağlansın. $G = \{f \in F_N: \Phi f = Tf\}$ kümesi F_N nin Riesz alt uzayıdır. $j = 1, 2, \dots, n$ için $\Phi e_j = Te_j$ olmasından $F_N \subseteq G$ dir. Bu durumda $F_N = G$ olup $T = \Phi$ dir. Böylelikle Φ dönüşümü $\Phi e_j = a_j$ eşitliği ile tektir.

Φ dönüşümü örgü homomorfizmi olduğundan $\Phi(F_N)$ E 'nin Riesz alt uzayı olup $j = 1, \dots, n$ için $a_j \in \Phi(F_N)$ olmasından $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq \Phi(F_N)$ dir. Benzer şekilde $\Phi^{-1}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle) \subseteq \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ nin Riesz alt uzayıdır. $j = 1, \dots, n$ için $e_j \in \Phi^{-1}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)$ olduğundan $F_N \subseteq \Phi^{-1}(\langle a_1, \dots, a_n \rangle)$ dir ve $\Phi(F_N) \subseteq \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ olur. Bu durumda $\Phi(F_N) = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ dir.

(ii) E düzgün tam olsun. $v = |e_1| + |e_2| + \dots + |e_n| \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ nin güçlü birimidir. $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ deki düzgün topoloji v -düzgün topolojidir. $v \in F_N$ ve $v(a_1, \dots, a_n) = |a_1| + \dots + |a_n|$ dir. $u = |a_1| + \dots + |a_n|$ olsun. $\{f_m\}_{m=1}^\infty \subseteq \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ bir Cauchy dizisi ve bir $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için f_m, f 'e v -düzgün yakınsak olsun. Φ örgü homomorfizmi olduğundan $\{\Phi(f_m)\}_{m=1}^\infty \subseteq E$ 'de u -Cauchy dizisidir. E düzgün tam olduğundan $\Phi(f_m)$ E 'nin bir b elemanına u -düzgün yakınsaktır.

$f_m(a_1, \dots, a_n) = b_m$ diyelim. $L = \langle a_1, \dots, a_n, b, b_1, b_2, \dots \rangle$ için $H(L), L$ 'nin noktalarını ayırır. Herhangi $w \in H(L)$ için $w(b_m) = f_m(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir. w örgü homomorfizmi ve f dönüşümü sürekli olduğundan $w(b_n) \rightarrow w(b)$ ve $f_n(w(a_1), \dots, w(a_n)) \rightarrow f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olur. Buradan $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir. Sonuç 3.12 den $b = f(a_1, \dots, a_n)$ olur. Tanım 3.9 dan $f(a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ olduğu için $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ düzgün tamdır.

Bu bölümde F_N 'nin $H(\mathbb{R}^n)$ içinde düzgün yoğun olmasını kullanacağız. Gerçekten $S = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = 1\}$ kümesi için $f \rightarrow f|_S$ dönüşümü $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ den $\mathcal{C}(S)$ üzerine örgü izomorfizmdir. S Kompakt metrik uzay ve F_N, S 'nin noktalarını ayırır. Stone-Weierstrass teoreminden $\overline{F_N} = \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ dir.

3.15. Teorem

E düzgün tam Riesz uzayı ve $a_1, \dots, a_n \in E$ olsun. O zaman $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) = \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$,

$$\Phi: \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \rightarrow E$$

$$f \rightarrow \Phi(f) = f(a_1, \dots, a_n)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm örgü homomorfizmdir ve $\Phi(e_j) = a_j$ eşitliği ile tektir. Ayrıca $\Phi[\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)] = \overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$ dir (Burada $\overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}, u = |a_1| + \dots + |a_n|$ olmak üzere $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ 'nin E içinde u -düzgün kapanışdır).

İspat

Önerme 3.14 den $F_N \subseteq \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ dir. $\overline{F_N} \subseteq \overline{\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)} = \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ ve $\overline{F_N} = \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olmasından $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ olur. Önerme 3.13 den $\Phi: \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \rightarrow E$ dönüşümü örgü homomorfizmdir ve $\Phi(e_j) = a_j$ eşitliği ile tektir.

$v = |e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|$ olsun. $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \subseteq E$ Riesz alt uzayı için Lemma 2.2.33 den $\overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$ E 'nin u -düzgün kapalı Riesz alt uzayıdır. Φ örgü

homomorfizmi olduğundan $\Phi^{-1}(\overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle})$, $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ 'nin v -düzgün kapalı Riesz alt uzayıdır. $j = 1, \dots, n$ için $e_j \in \Phi^{-1}(\overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle})$ olduğundan $F_N \subseteq \Phi^{-1}(\overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle})$ dir ve $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \bar{F}_N \subseteq \Phi^{-1}(\overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle})$ olur. Bu durumda $\Phi[\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)] = \overline{\langle a_1, \dots, a_n \rangle}$ dir.

Yarı-asal f -Cebirlerinde Fonksiyonel Hesap

$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı, $x_1, x_2, \dots, x_n$ terimli sabit terimi olmayan polinom fonksiyonların cebirini $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ ile gösterelim. Herhangi $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ için $p(a_1, \dots, a_n) \in E$ elemanını $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerleri yerine $a_1, a_2, \dots, a_n$ değerleri konularak elde edilir. $p \rightarrow p(a_1, \dots, a_n)$ dönüşümü $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ 'den E içine cebir homomorfizmi tanımlar. Bu bölümde fonksiyonel hesap daha geniş fonksiyon sınıflarında çalışılmıştır.

3.16. Lemma

E yarı-asal Arşimedsel f -cebiri, $a_1, \dots, a_n \in E$ ve $p \in \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ olsun. Bir $b \in E$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $b = p(a_1, \dots, a_n)$
- (ii) Her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için $w(b) = p(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir.

İspat

(i $\Rightarrow$ ii) $b = p(a_1, \dots, a_n)$ olsun. Her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için w dönüşümünün çarpımsal ve lineer olmasından $w(a_1), \dots, w(a_n) \in \mathbb{R}$ için $p(w(a_1), \dots, w(a_n)) = w(p(a_1, \dots, a_n)) = w(b)$ olur.

(ii $\Rightarrow$ i) Her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için $w(b) = p(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olsun. Aynı şekilde w çarpımsal ve lineer olduğundan $w(b) = w(p(a_1, \dots, a_n))$ olur. Sonuç 2.7

den $H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$, $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ 'nin noktalarını ayırdığından $b = p(a_1, \dots, a_n)$ olur.

3.17. Tanım

E Arşimedesel yarı-asal f -cebiri ve $C^0(\mathbb{R}^n) = \{f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \mid f(0) = 0\}$ olmak üzere, $a_1, \dots, a_n \in E$ ve $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ olsun. Her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olacak şekilde $b \in E$ varsa $f(a_1, \dots, a_n)$, E 'de vardır ve $b = f(a_1, \dots, a_n)$ ile gösterilir.

Lemma 3.10' de olduğu gibi burada da $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ ve $a_1, \dots, a_n \in E$ için $b = f(a_1, \dots, a_n)$ olacak şekilde bir $b \in E$ varsa tek olduğu açıktır.

3.18. Lemma

E Arşimedesel yarı-asal f -cebiri, $a_1, \dots, a_n, b \in E$ ve $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ olsun. Λ , $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ 'nin noktalarını ayıran $H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ 'nin bir altkümesi ve her $w \in \Lambda$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olsun. O zaman $b = f(a_1, \dots, a_n)$ dir.

İspat

$\Omega = H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ olsun. Her $w \in \Omega$ için

$$\hat{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$w \rightarrow \hat{x}(w) = w(x)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm anlamlı ve iyi tanımlıdır.

$$\Phi: \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle \rightarrow \mathbb{R}^\Omega$$

$$x \rightarrow \Phi(x) = \hat{x}$$

şeklinden tanımlı dönüşüm anlamlı, iyi tanımlı ve lineerdir. Bu dönüşümün $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ 'den R^Ω içine çarpımsal örgü izomorfizmi olduğunu gösterelim. $\hat{x}, \hat{y} \in R^\Omega$ için $\hat{x} = \hat{y}$ olsun. Her $w \in \Omega$ için $\hat{x}(w) = \hat{y}(w)$ dir ve buradan $w(x) = w(y)$ dir. $\Omega, \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ ' nin noktalarını ayırdığından $x = y$ olur. Bu durumda Φ dönüşümü birebirdir. $x \in \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ ve her $w \in \Omega$ için w örgü homomorfizmi olduğundan $|\widehat{x}|(w) = w(|x|) = |w(x)| = |\hat{x}(w)| = |\hat{x}|(w)$ dir. Öyleyse Φ örgü homomorfizmidir. $x, y \in \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ ve her $w \in \Omega$ için w çarpımsal olduğundan $\widehat{xy}(w) = w(xy) = w(x)w(y) = \hat{x}(w)\hat{y}(w) = (\hat{x}\hat{y})(w)$ dir. O halde Φ çarpımsaldır. Yani Φ dönüşümü çarpımsal örgü izomorfizmidir.

$$A = \{\hat{x} : x \in \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle\}$$

olmak üzere A 'nın Ω üzerinde izdüşel topolojisi zayıf topolojidir. $0 \leq x \in \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ olmak üzere $\Omega(x) = \{w \in \Omega : \hat{x}(w) > 0\}$ nin Ω için taban olduğunu gösterelim.

$0 \leq x \in \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ için $\Omega(x, \alpha) = \{w \in \Omega : \hat{x}(w) > \alpha\}$ olsun. Öncelikle $\Omega(x, \alpha) = \Omega(z)$ olacak şekilde $0 \leq z \in \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ elemanının varlığını gösterelim. $u = |a_1| + \dots + |a_n| + |b|$ olsun. Her $w \in \Omega$ için $w(u) > 0$ dir. $\alpha \in R$ olmak üzere $w \in \Omega(x, \alpha)$ olsun. Her $x \in \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ için

$$\hat{x}(w) = w(x) > \alpha \Rightarrow w(x) - \alpha > 0$$

$$\Rightarrow w((xu - \alpha u)^+) > 0$$

olmasından $w \in \Omega((xu - \alpha u)^+)$ olur. Yani $\Omega(x, \alpha) \subseteq \Omega((xu - \alpha u)^+)$ dir. Şimdi $w \in \Omega((xu - \alpha u)^+)$ olsun.

$$w((xu - \alpha u)^+) > 0 \Rightarrow (w(xu - \alpha u))^+ > 0$$

$$\Rightarrow w(xu - \alpha u) > 0$$

$$\Rightarrow w(x) > \alpha$$

olmasından $w \in \Omega(x, \alpha)$ olur. Yani $\Omega((xu - \alpha u)^+) \subseteq \Omega(x, \alpha)$ dır. Bu durumda $\Omega(x, \alpha) = \Omega(z)$ olacak şekilde $z = (xu - \alpha u)^+$ elemanı vardır.

$$S = \{(-\infty, \beta), (\alpha, \infty): \alpha, \beta \in R\}$$

kümesi $\mathbb{R}$ üzerindeki alışılmış topoloji $\mathbb{R}^*$ için bir alt tabandır.

$$\sigma = \{\hat{x}^{-1}(V): V \in S, \hat{x} \in A\} = \{\hat{x}^{-1}(-\infty, \beta), \hat{x}^{-1}(\alpha, \infty): \alpha, \beta \in R, \hat{x} \in A\}$$

$$= \{\hat{x}^{-1}(\alpha, \infty): \alpha \in R, \hat{x} \in A\}$$

$$= \{\{w \in \Omega: \hat{x}(w) > \alpha\}: \alpha \in R, \hat{x} \in A\}$$

$$= \{\{w \in \Omega: \hat{x}(w) > 0\}: \alpha \in R, \hat{x} \in A^+\}$$

$$= \{\Omega(x): \alpha \in R, \hat{x} \in A^+\}$$

Bu durumda Φ dönüşümü örgü izomorfizmi olduğundan $\Omega(x)$ de Ω üzerindeki zayıf topoloji için bir alt tabandır.

$$\Omega(x_1) \cap \dots \cap \Omega(x_n) = \Omega(x_1 \wedge \dots \wedge x_n) = \Omega(x)$$

olduğundan $\Omega(x)$, Ω için bir tabandır.

Ω üzerindeki zayıf topolojiye τ denirse, $\bar{\Lambda} = \Omega$ olması için gerek ve yeter koşul her $U \in \tau$ için $\Lambda \cap U \neq \emptyset$ olmasıdır. σ alt taban olduğundan her $U \in \sigma$ için $\Lambda \cap U \neq \emptyset$ olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Herhangi $U \in \sigma$ olsun. O zaman en az bir $\hat{x} \in A^+$ için $U = \Omega(x) = \{w \in \Omega: \hat{x}(w) > 0\}$ olur. $x = 0$ için $\Omega(x) = \emptyset$ olur. $0 \neq x \in \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$ için $\Lambda, \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle$ nin noktalarını ayırdığından en az bir $w_0 \in \Lambda$ için $w_0(x) \neq 0$ ve w_0 pozitif olduğundan $w_0(x) > 0$ dır. Bu durumda $w_0 \in U$ olup $\Lambda \cap U \neq \emptyset$ dır. O halde Λ, Ω içinde yoğundur.

$w \in \Omega$ olsun. $\bar{\Lambda} = \Omega$ olduğundan $w \in \bar{\Lambda}$ dir. Bu durumda Λ içinde en az bir $\{w_\alpha\}$ neti $w_\alpha \rightarrow w$ olacak şekilde vardır. Hipotezden $w_\alpha(b) = f(w_\alpha(a_1), \dots, w_\alpha(a_n))$ dir. Buradan $\hat{b}(w_\alpha) = f(\hat{a}_1(w_\alpha), \dots, \hat{a}_n(w_\alpha))$ olur. A tarafından üretilen Ω üzerindeki zayıf topoloji düşünülürse f fonksiyonunun sürekli olmasından $\hat{b}(w) = f(\hat{a}_1(w), \dots, \hat{a}_n(w))$ dir. Bu durumda her $w \in \Omega = H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir ve bu da Tanım 3.17 den $b = f(a_1, \dots, a_n)$ olması demektir.

3.19. Sonuç

E Arşimedsel yarı-asal f -cebiri, $a_1, \dots, a_n, b \in E$ ve $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ verilsin. Aşağıdaki ifadeler denktir.

- (i) $b = f(a_1, \dots, a_n)$
- (ii) E 'nin $a_1, \dots, a_n, b$ elemanlarını içeren ve $H_m(A)$, A 'nın noktalarını ayıracak şekilde A f -altcebiri vardır ve her $w \in H_m(A)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir.
- (iii) E 'nin $a_1, \dots, a_n, b$ elemanlarını içeren herhangi f -altcebiri A olmak üzere her $w \in H_m(A)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir.

İspat

(i $\Rightarrow$ ii) $b = f(a_1, \dots, a_n)$ olsun. O zaman Tanım 3.17 den her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir. $A = \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ alındığında her $w \in H_m(A)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ sağlanmış olur.

(ii $\Rightarrow$ iii) E 'nin $a_1, \dots, a_n, b$ elemanlarını içeren ve $H_m(A)$, A 'nın noktalarını ayıracak şekilde bir A f -altcebiri var olsun ve her $w \in H_m(A)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ sağlansın. Lemma 3.18 den $b = f(a_1, \dots, a_n)$ bulunur (Tanım 3.17'e göre). E 'nin $a_1, \dots, a_n, b$ elemanlarını içeren herhangi f -altcebiri B olsun. $D = \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ denirse her $w \in H_m(B)$ için $w|_D \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$

olduğundan Tanım 3.17 den $w \mid_D (b) = f(w \mid_D (a_1), \dots, w \mid_D (a_n))$ olur. Böylece her $w \in H_m(B)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir.

(iii $\Rightarrow$ i) E 'nin $a_1, \dots, a_n, b$ elemanlarını içeren herhangi f -altcebiri A olmak üzere her $w \in H_m(A)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olsun. Buradan $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ de E 'nin $a_1, \dots, a_n, b$ elemanlarını içeren herhangi f -altcebiri olduğundan her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olur. O halde Tanım 3.17 den $b = f(a_1, \dots, a_n)$ dir.

Verilen $a_1, \dots, a_n \in E$ elemanları için $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ şu şekilde tanımlansın

$$\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) = \{f \in C^0(\mathbb{R}^n) : f(a_1, \dots, a_n) \text{ } E' \text{ de vardır} \}$$

3.20. Önerme

E Arşimedsel yarı-asal f -cebiri, $a_1, \dots, a_n \in E$ verilsin. Bu durumda $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$, $C^0(\mathbb{R}^n)$ 'nin f -altcebiridir ve

$$\Phi: \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) \rightarrow E$$

$$f \rightarrow \Phi(f) = f(a_1, \dots, a_n)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm çarpımsal örgü homomorfizmidir.

İspat

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ için $e_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) şeklinde tanımlı dönüşümler $C^0(\mathbb{R}^n)$ 'nin elemanları olup $a_1, \dots, a_n \in E$ için $e_j(a_1, \dots, a_n) \in E$ 'de vardır. Bu durumda $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) \neq \emptyset$ dir.

$\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ kümesinin $C^0(\mathbb{R}^n)$ 'nin Riesz alt uzayı olduğu Önerme 3.13 deki gibi kolayca görülür. $f, g \in \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ için $f(a_1, \dots, a_n) = b$ ve $g(a_1, \dots, a_n) = c$ E 'de vardır. Tanım 3.17 den her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b, c \rangle\rangle)$ için $w(b) =$

$f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ ve $w(c) = g(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir. w çarpımsal olduğu için $(fg)(w(a_1), \dots, w(a_n)) = w(b).w(c) = w(bc)$ olur ve buradan $(fg)(a_1, \dots, a_n) = bc$ dir. Böylece $fg \in \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ olup $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$, $C^0(\mathbb{R}^n)$ 'nin f -altcebiridir.

Φ dönüşümünün çarpımsal örgü homomorfizmi olduğunu göstermek için $f, g \in \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ olsun. $f(a_1, \dots, a_n) = b$ ve $g(a_1, \dots, a_n) = c$ E 'de vardır ve her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b, c \rangle\rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ ve $w(c) = g(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir. $\Phi(fg) = (fg)(a_1, \dots, a_n) = bc = \Phi(f)\Phi(g)$ olduğundan Φ çarpımsaldır. w örgü homomorfizmi ve $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ Riesz alt uzay olmasından her $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, |b| \rangle\rangle)$ için

$$w(|b|) = |w(b)| = |f(w(a_1), \dots, w(a_n))| = |f|(w(a_1), \dots, w(a_n))$$

olacak şekilde bir $|b| \in E$ bulunduğu için $|b| = |f|(a_1, \dots, a_n)$ dir ve buradan

$$\Phi(|f|) = |f|(a_1, \dots, a_n) = |b| = |f(a_1, \dots, a_n)| = |\Phi(f)|$$

olur. Bu durumda Φ dönüşümü çarpımsal örgü homomorfizmidir.

3.21. Önerme

E yarı-asal Arşimedsel f -cebiri ve $a_1, \dots, a_n \in E$ olsun. $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ dir ve $f \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ için Tanım 3.9 ile Tanım 3.17 çakışır.

İspat

$f \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ olsun. $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ 'nin tanımından $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ dir ve her $w \in H(\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olacak şekilde $b \in E$ vardır. Her $w' \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için $\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle = A$ denirse $w' \upharpoonright_A (b) = f(w' \upharpoonright_A (a_1), \dots, w' \upharpoonright_A (a_n))$ olur. Buradan $f \in \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ ve Tanım 3.17'e göre $b = f(a_1, \dots, a_n)$ dir. Bu durumda $\mathcal{F}(a_1, \dots, a_n) \subseteq \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ dir.

Şimdi $f \in \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olsun. Sonuç 3.5 den her $w \in H(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ singüler olmayan örgü homomorfizmleri için $\alpha w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ olacak şekilde $0 < \alpha$ reel sayısı vardır. $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ 'nin tanımından $\alpha w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ için $\alpha w(b) = f(\alpha w(a_1), \dots, \alpha w(a_n))$ olacak şekilde $b \in E$ vardır. f pozitif homojen olduğundan $w(b) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olur. Lemma 3.6 dan $H(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$, $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ 'nin noktalarını ayırır. Lemma 3.4 den $H(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ 'de singüler olmayan örgü homomorfizmleri $\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ 'nin noktalarını ayırır. Lemma 3.11'den $f \in \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ ve Tanım 3.9'a göre $b = f(a_1, \dots, a_n)$ dir. O halde $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{F}(a_1, \dots, a_n)$ bulunur.

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ için $e_j(x_1, \dots, x_n) = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyonlar tarafından üretilen f -cebiri A_N ile gösterilsin.

3.22. Önerme

E Arşimedsel yarı-asal f -cebiri, $a_1, \dots, a_n \in E$ olsun.

(i) $A_N \subseteq \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$,

$$\Phi: A_N \rightarrow E$$

$$f \rightarrow \Phi(f) = f(a_1, \dots, a_n)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm çarpımsal örgü homomorfizmidir ve $\Phi(e_j) = a_j$ ($j = 1, \dots, n$) eşitliği ile tektir. Ayrıca $\Phi(A_N) = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dir.

(ii) E düzgün tam ise $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ de düzgün tamdır.

İspat

(i) $w \in H_m(\langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle)$ alalım. $j = 1, \dots, n$ için $e_j(a_1, \dots, a_n) = a_j$ olacak şekilde $a_j \in E$ olduğundan $e_j \in \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ dir. Buradan $A_N \subseteq \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ f -

altcebiridir. Önerme 3.20 den $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) \rightarrow E$ çarpımsal örgü homomorfizmi olduğundan $\Phi: A_N \rightarrow E$ çarpımsal örgü homomorfizmidir. Tekliği önerme 3.14 de olduğu gibi kolayca görülür.

Φ çarpımsal örgü homomorfizmi olduğundan $\Phi(A_N)$ de E 'nin f -altcebiridir. $j = 1, \dots, n$ için $\Phi(e_j) = a_j$ olduğundan $a_1, \dots, a_n \in \Phi(A_N)$ dir. Buradan $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle \subseteq \Phi(A_N)$ dir. Diğer taraftan $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle, E$ 'nin f -altceberi olduğundan $\Phi^{-1}(\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle), \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ 'nin f -altcebiridir. $j = 1, \dots, n$ için $e_j \in \Phi^{-1}(\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle)$ olduğundan $A_N \subseteq \Phi^{-1}(\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle)$ olur. Buradan $\Phi(A_N) \subseteq \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ dir. Böylece $\Phi(A_N) = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ bulunur.

(ii) E düzgün tam olsun. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ içinde bir dizi ve bir $f \in C^0(\mathbb{R}^n)$ elemanına göreceli düzgün yakınsak olsun. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}, \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ içinde düzgün Cauchy dizisidir. Önerme 3.20 den $\varphi: \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) \rightarrow E$ çarpımsal örgü homomorfizmi olduğundan $\{\Phi(f_k)\}_{k=1}^{\infty} E$ içinde düzgün Cauchy dizisidir. E düzgün tam olduğundan $\Phi(f_k)$ E 'nin bir b elemanına göreceli düzgün yakınsaktır. $\Phi(f_k) = f_k(a_1, \dots, a_n) = b_k$ olsun. $L = \langle\langle a_1, \dots, a_n, b, b_1, b_2, \dots \rangle\rangle$ olmak üzere $H_m(L)$, L 'nin noktalarını ayırır ve her $w \in H_m(L)$ için $w(b_k) = f_k(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir. w örgü homomorfizmi ve f fonksiyonu sürekli olduğundan $w(b_k) \xrightarrow{r.u.} w(b)$ ve $f_k(w(a_1), \dots, w(a_n)) \xrightarrow{r.u.} f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ olur. Buradan $w(b) = f(a_1, \dots, a_n)$ olup Lemma 3.18 den $b = f(a_1, \dots, a_n)$ dir. Bu durumda Tanım 3.17 den $f \in \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ olduğundan $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ düzgün tamdır.

$f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı altkümelerinde $\lim_{t \downarrow 0} f(tx)t^{-1}$ limitine düzgün olarak sahip olan fonksiyonların uzayı $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilsin. Burada her $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ için $f(0) = 0$ dir. Bu küme $C(\mathbb{R}^n)$ den gelen sıralamayla Riesz alt uzaydır ve fonksiyonların çarpımı işlemine göre f -cebiridir. Dahası $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ için $f_1(x) = \lim_{t \downarrow 0} f(tx)t^{-1}$ olarak tanımlanırsa $f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olduğu aşağıda gösterilmiştir.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, f_1(x) = \lim_{t \downarrow 0} f(tx)t^{-1}$ fonksiyonu anlamlı ve iyi tanımlıdır. Sürekli ve pozitif homojen olduğunu göstermeliyiz. $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}, \mathbb{R}^n$ de $x \in \mathbb{R}$ noktasına göreceli

düzgün yakınsak bir dizi olsun. f fonksiyonunun sürekli olmasından $n = \frac{1}{t}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
 \lim_{m \rightarrow \infty} f_1(x_m) &= \lim_{m \rightarrow \infty} (\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}x_m\right)n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{m \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}x_m\right)n) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f\left(\frac{1}{n}x\right)n\right) \\
 &= \lim_{t \downarrow 0} f(tx)t^{-1} = f_1(x)
 \end{aligned}$$

$0 < \lambda$ reel sayısı ($\lambda = 0$ için pozitif homojen olduğu aşıkardır) ve $h = \lambda t$ için,

$$\begin{aligned}
 f_1(\lambda x) &= \lim_{t \downarrow 0} f(\lambda tx)t^{-1} \\
 &= \lim_{t \downarrow 0} \lambda \frac{f(\lambda tx)}{\lambda t} \\
 &= \lim_{h \downarrow 0} \lambda f(hx)h^{-1} \\
 &= \lim_{h \downarrow 0} f(hx)h^{-1} = \lambda f_1(x)
 \end{aligned}$$

3.23. Lemma

$\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ noktasal sıralamaya göre düzgün tam f-cebiridir.

İspat

$\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ düzgün tam olduğundan $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 'nin $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ 'de düzgün kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 'de bir $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ elemanına göreceli düzgün yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda her $0 < \varepsilon$ sayısı ve bir $f_0 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)^+$ için $|f_n - f| \leq \varepsilon f_0$ dir. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ 'de olduğundan $|f_n| \leq M(1 + |e_1| + \dots + |e_n|)^m$ ve

$|f_0| \leq K(1 + |e_1| + \dots + |e_n|)^k$ olacak şekilde m, k doğal sayıları ve $0 \leq M, 0 \leq K$ reel sayıları vardır. $t = \max\{m, k\}$ olmak üzere

$$|f| \leq |f_n| + |f_n - f|$$

$$\leq M(1 + |e_1| + \dots + |e_n|)^N + \varepsilon K(1 + |e_1| + \dots + |e_n|)^k$$

$$\leq (M + \varepsilon K)(1 + |e_1| + \dots + |e_n|)^t$$

olduğundan $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dir. Dolayısıyla $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ düzgün tamdır.

$\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ 'nin düzgün tam olduğunu göstermek için $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ içinde düzgün kapalı olduğu göstermek yeterlidir. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ 'de bir dizi ve $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ elemanına göreceli düzgün yakınsak olsun. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$, $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ 'de düzgün Cauchy dizisidir. $\lim_{t \downarrow 0} f_n(tx)t^{-1} = g_n(x)$ olsun. $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ 'nin elemanıdır. En az bir $f_0 \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)^+$ ve her $0 < \varepsilon$ sayısı için $\mathbb{R}^n$ uzayının bir sınırlı altkümesinde

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon f_0(x) \Rightarrow \left| \frac{f_n(tx)}{t} - \frac{f_m(tx)}{t} \right| \leq \varepsilon \frac{f_0(tx)}{t}$$

$$\Rightarrow \lim_{t \downarrow 0} \left| \frac{f_n(tx)}{t} - \frac{f_m(tx)}{t} \right| \leq \lim_{t \downarrow 0} \varepsilon \frac{f_0(tx)}{t}$$

$$\Rightarrow \left| \lim_{t \downarrow 0} \frac{f_n(tx)}{t} - \lim_{t \downarrow 0} \frac{f_m(tx)}{t} \right| \leq \varepsilon \lim_{t \downarrow 0} \frac{f_0(tx)}{t}$$

$$\Rightarrow |g_n(x) - g_m(x)| \leq \varepsilon \lim_{t \downarrow 0} \frac{f_0(tx)}{t}$$

olur. $\lim_{t \downarrow 0} \frac{f_0(tx)}{t} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ düzgün tam olduğundan $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ dizisi $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ içinde bir g elemanına göreceli düzgün yakınsar. O halde

$$\lim_{t \downarrow 0} (f(tx)t^{-1}) = \lim_{t \downarrow 0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(tx)t^{-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{t \downarrow 0} f_n(tx)t^{-1})$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$$

olmasından $\mathbb{R}^n$ uzayının bir sınırlı altkümesinde $\lim_{t \downarrow 0} (f(tx)t^{-1})$ limiti vardır. Bu durumda $f \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ olup $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ 'nin düzgün tamdır.

3.24. Önerme

$$(i) \quad \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) = \overline{\langle \langle 1, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$$

$$(ii) \quad \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) = \overline{\langle \langle e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$$

İspat

(i) $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ düzgün tam olduğundan $\overline{\langle \langle 1, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$, $\mathbf{1}$ birim elemanı ile düzgün tam f -cebiridir. $u = \mathbf{1} + |e_1| + \dots + |e_n|$ olsun. O zaman $u \geq \mathbf{1}$ dir ve u^{-1} , $\overline{\langle \langle 1, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ 'de vardır ([15], Teorem 146.3.).

$0 \leq f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ olsun. O zaman $0 \leq f \leq M^{-1}u^n$ olacak şekilde $0 < M \in \mathbb{R}$ ve $n \in \mathbb{N}$ vardır. $h = M^{-1}fu^{-n-1}$ olarak tanımlanırsa $0 \leq h \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ dir. $h \in \overline{\langle \langle 1, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$0 < \varepsilon$ sayısı için $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\|x\|_1 \geq C$ iken $u^{-1}(x) < \varepsilon$ olacak biçimde $0 < C$ sayısı vardır. Ayrıca Stone-Weierstrass teoreminden $\|x\|_1 \leq C$ iken $|p(x) - h(x)| < \varepsilon$ olacak biçimde $p \in \overline{\langle \langle 1, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ vardır. $g = |p| \wedge u^{-1}$ alınırsa $g \in \overline{\langle \langle 1, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ dir. $\|x\|_1 \leq C$ için,

$$|g(x) - h(x)| = \left| |p| \wedge u^{-1} - h \right|(x) \leq |(|p| \wedge u^{-1})(x) - (h \wedge u^{-1})(x)|$$

$$\leq |(|p| - h)(x)| = \left| |p|(x) - h(x) \right|$$

$$\leq \varepsilon \mathbf{1}(x)$$

$$\|x\|_1 \geq C \text{ için,}$$

$$|g(x) - h(x)| = \left| |p| \wedge u^{-1} - h \right|(x) \leq |(|p| \wedge u^{-1})(x)| + |h(x)|$$

$$\leq |u^{-1}(x)| + |u^{-1}(x)|$$

$$< \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \right) \mathbf{1}(x) = \varepsilon \mathbf{1}(x)$$

O halde her $x \in \mathbb{R}^n$ için $|g(x) - h(x)| < \varepsilon \mathbf{1}(x)$ olduğundan $|g - h| < \varepsilon \mathbf{1}$ dir. Bu durumda $h \in \overline{\langle \langle \mathbf{1}, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ olduğundan $f \in \overline{\langle \langle \mathbf{1}, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ dir.

(ii) $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) = \bar{F}_N = \overline{\langle e_1, \dots, e_n \rangle}$ olduğu daha önce gösterilmişti. Buradan $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n) \subseteq \overline{\langle \langle e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ dir. $f \in \mathcal{A}(R^n)$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f_1(x) = \lim_{t \downarrow 0} f(tx) t^{-1}$ denirse $f_1 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ dir. $g = f - f_1$ olsun. $g \in \overline{\langle \langle e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ olduğunu göstermek ispat için yeterli olacaktır. f fonksiyonunun sürekli olmasından $x \in \mathbb{R}^n$ ve $u = tx$ için;

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} g(x) \|x\|_1^{-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\|x\|_1} - \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(tx)}{t\|x\|_1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{f(x)}{\|x\|_1} - \lim_{u \downarrow 0} \frac{f(u)}{\|u\|_1} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

dir. O halde

$$h(x) = \begin{cases} g(x) \|x\|_1^{-1}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ nin elemanıdır ve $g = (|e_1| + \dots + |e_n|)h$ dir.

(i) den $h \in \overline{\langle \langle \mathbf{1}, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ olduğundan $g \in (|e_1| + \dots + |e_n|) \overline{\langle \langle \mathbf{1}, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$ dir.

$$(|e_1| + \dots + |e_n|) \langle \langle \mathbf{1}, e_1, \dots, e_n \rangle \rangle \subseteq \langle \langle e_1, \dots, e_n \rangle \rangle \subseteq \overline{\langle \langle e_1, \dots, e_n \rangle \rangle}$$

ve Lemma 2.2.34'den $(|e_1| + \dots + |e_n|)\overline{\langle\langle \mathbf{1}, e_1, \dots, e_n \rangle\rangle} \subseteq \overline{\langle\langle e_1, \dots, e_n \rangle\rangle}$ olur. Bu durumda $g \in \overline{\langle\langle e_1, \dots, e_n \rangle\rangle}$ olduğundan $f \in \overline{\langle\langle e_1, \dots, e_n \rangle\rangle}$ dir.

3.25. Teorem

E düzgün tam yarı-asal f -cebiri ve $a_1, a_2, \dots, a_n \in E$ olsun. O zaman $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$

$$\Phi: \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \rightarrow E$$

$$f \rightarrow \Phi(f) = f(a_1, \dots, a_n)$$

şeklinde tanımlı dönüşüm çarpımsal örgü homomorfizmidir ve $\Phi(e_j) = a_j$ eşitliği ile tektir. Ayrıca $\Phi[\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)] = \overline{\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle}$ dir.

İspat

Önerme 3.22(ii) den E düzgün tam olduğundan $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ de düzgün tamdır. $j = 1, \dots, n$ için $e_j \in \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ olduğundan $\langle\langle e_1, \dots, e_n \rangle\rangle \subseteq \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ dir. Buradan $\overline{\langle\langle e_1, \dots, e_n \rangle\rangle} \subseteq \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ dir. Önerme 3.24(ii) den $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ dir.

Önerme 3.20 de $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ 'den E 'ye tanımlı çarpımsal örgü homomorfizmini göz önünde bulundurulursa $\Phi: \mathcal{A}(\mathbb{R}^n) \rightarrow E$, $\Phi(f) = f(a_1, \dots, a_n)$ şeklinde tanımlı dönüşüm çarpımsal örgü homomorfizmidir ve $\Phi(e_j) = a_j$ eşitliği ile tektir.

$\overline{\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle}$, E 'nin kapalı f -altcebiri ve Φ örgü homomorfizmi olduğundan $\Phi^{-1}(\overline{\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle})$ da $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ 'nin kapalı f -altcebidir. $j = 1, \dots, n$ için

$e_j \in \Phi^{-1}(\overline{\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle})$ dir. $\langle\langle e_1, \dots, e_n \rangle\rangle \subseteq \overline{\langle\langle e_1, \dots, e_n \rangle\rangle} \subseteq \Phi^{-1}(\overline{\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle})$ olur ve buradan $\Phi[\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)] = \Phi(\overline{\langle\langle e_1, \dots, e_n \rangle\rangle}) \subseteq \overline{\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle}$ dir. Diğer taraftan $\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)$ düzgün tam olduğundan $\Phi[\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)]$ de düzgün tamdır. $j = 1, \dots, n$ için $a_j \in \Phi[\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)]$ olduğundan $\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle \subseteq \overline{\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle} \subseteq \Phi[\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)]$ olur. Dolayısıyla $\Phi[\mathcal{A}(\mathbb{R}^n)] = \overline{\langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle}$ dir.

3.26. Teorem

E düzgün tam Riesz uzayı ve $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olsun.

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n) \quad a_1, \dots, a_n \in E$$

dönüşümü

(i) Göreceli düzgün yakınsamaya göre

(ii) E üzerinde herhangi yerel katı vektör uzayı topolojisine göre

süreklidir.

İspat

$x \in E^n$ ve $s \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|x\| = |x_1| \vee |x_2| \vee \dots \vee |x_n|$$

$$\|s\| = |s_1| \vee |s_2| \vee \dots \vee |s_n|$$

olsun. $\varepsilon > 0$ ve $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için öncelikle

$$|f(a+x) - f(a)| \leq \varepsilon \|a\| + C_\varepsilon \|x\|, \quad (a, x \in E^n)$$

olacak şekilde $0 < C_\varepsilon$ sayısının varlığı gösterelim.

$$A = \{(s, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : \|s\| \vee \|t\| = 1, |f(s+t) - f(s)| \geq \varepsilon \|s\|\}.$$

$z = (x, y) \in \bar{A}$ olsun. Bu durumda A içinde en az bir $z_n = (x_n, y_n)$ dizisi $z_n \rightarrow z$ olacak biçimde vardır. Normun ve lattice operasyonlarının sürekliliğinden

$$(x_n, y_n) \rightarrow (x, y) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y_n) = (x, y)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (\|x_n\|, \|y_n\|) = (\|x\|, \|y\|)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \vee \|y_n\| = \|x\| \vee \|y\|$$

$$\Rightarrow \|x\| \vee \|y\| = 1 \quad (*)$$

$(z_n) \subseteq A$ olduğundan $|f(x_n + y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \|x_n\|$ eşitsizliği vardır. f fonksiyonunun sürekli olmasından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n + y_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \Rightarrow \left| \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n + y_n) - \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \right| \geq \varepsilon \|x\|$$

$$\Rightarrow |f(x + y) - f(x)| \geq \varepsilon \|x\| \quad (**)$$

(*) ve (**) dan $z = (x, y) \in A$ dır. Buradan A kapalıdır. Aynı zamanda A kümesi sınırlı olduğundan $\mathbb{R}^{2n}$ içinde kompakt bir altkümedir. Her $(s, t) \in A$ için $\|t\| \neq 0$ dır ve

$$h(s, t) = \frac{|f(s+t) - f(s)| - \varepsilon \|s\|}{\|t\|}$$

şeklinde tanımlanan h fonksiyonunun A dan $\mathbb{R}$ içine sürekli bir fonksiyon olduğunu görmek kolaydır. A kompakt olduğundan sürekli bir fonksiyon altındaki görüntüsünün bir maksimumu vardır. Buna C_ε denilirse

$$\frac{|f(s+t) - f(s)| - \varepsilon \|s\|}{\|t\|} \leq C_\varepsilon$$

olur. Bu eşitsizlik düzenlenirse her $(s, t) \in A$ için $|f(s + t) - f(s)| \leq \varepsilon \|s\| + C_\varepsilon \|t\|$ olur. $(s, t) \in \mathbb{R}^{2n}$ için $(s, t) = (0, 0)$ olması durumunda bu eşitsizlik sağlanır. $(s, t) \neq (0, 0)$ olsun.

$$z = \left(\frac{s}{\|s\| \vee \|t\|}, \frac{t}{\|s\| \vee \|t\|} \right)$$

olarak alınırsa $z \in A$ olur. Bu durumda

$$\left| f\left(\frac{s+t}{\|s\| \vee \|t\|}\right) - f\left(\frac{s}{\|s\| \vee \|t\|}\right) \right| \leq \varepsilon \frac{\|s\|}{\|s\| \vee \|t\|} + C_\varepsilon \frac{\|t\|}{\|s\| \vee \|t\|}$$

$$\Rightarrow |f(s + t) - f(s)| \leq \varepsilon \|s\| + C_\varepsilon \|t\|, \quad (s, t) \in \mathbb{R}^{2n}$$

bulunur.

(i) $u \in E^+$ olmak üzere $x_1, \dots, x_n \in E$ ve $x = (x_1, \dots, x_n) \in [-\delta u, \delta u]$ olsun. $\delta = \varepsilon C_\varepsilon^{-1}$ alınırsa $\|x\| \leq \varepsilon C_\varepsilon^{-1} u$ olur. Ayrıca $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ olduğundan Teorem 3.15 den $a = (a_1, \dots, a_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n$ olmak üzere $f(a + x) = b$ ve $f(a) = c$ E içinde vardır. Öyleyse Tanım 3.9 dan her $w \in H(\langle a_1 + x_1, \dots, a_n + x_n, b, c \rangle)$ için $w(b) = f(w(a_1 + x_1), \dots, w(a_n + x_n))$ ve $w(c) = f(w(a_1), \dots, w(a_n))$ dir.

$$(w(a_1), \dots, w(a_n)), (w(a_1 + x_1), \dots, w(a_n + x_n)) \in \mathbb{R}^n \text{ için}$$

$$|f(w(a_1 + x_1), \dots, w(a_n + x_n)) - f(w(a_1), \dots, w(a_n))|$$

$$\leq \varepsilon (|w(a_1)| \vee \dots \vee |w(a_n)|) + C_\varepsilon (|w(x_1)| \vee \dots \vee |w(x_n)|)$$

$$\Rightarrow w|f(a_1 + x_1, \dots, a_n + x_n) - f(a_1, \dots, a_n)| \leq w(\varepsilon \|a\| + C_\varepsilon \|x\|) \leq w(\varepsilon \|a\| + \varepsilon u)$$

bulunur. $H(\langle a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n, b, c \rangle)$, $\langle a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_n, b, c \rangle$ 'nin noktalarını ayırdığından $|f(a + x) - f(a)| \leq \varepsilon (\|a\| + u)$ olur. Böylelikle her $f \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ için $(a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$ dönüşümü göreceli düzgün yakınsamaya göre süreklidir.

(ii) τ, E 'de yerel katı vektör uzayı topolojisi olsun. $a \in E^n$ ve sıfırın bir katı τ -komşuluğu U olsun. $x_1, \dots, x_n \in W$ iken $|f(a+x) - f(a)| \in U$ olacak şekilde sıfırın bir W katı komşuluğunun var olduğunu gösterelim.

Sıfırın bir W_0 katı komşuluğunu $n+1$ tanesi için $W_0 + \dots + W_0 \subset U$ olacak biçimde ve $\varepsilon > 0$ sayısını $\varepsilon \|a\| \in W_0$ olacak biçimde seçelim. C_ε için $W = C_\varepsilon^{-1} W_0$ olsun. n tane W_0 komşuluk için

$$x_1, \dots, x_n \in W \Rightarrow C_\varepsilon \|x\| \in W_0 + \dots + W_0$$

olduğundan $n+1$ tane W_0 komşuluğu için $\varepsilon \|a\| + C_\varepsilon \|x\| \in W_0 + \dots + W_0 \subset U$ olur. Daha önce gösterdiğimiz $|f(a+x) - f(a)| \leq \varepsilon \|a\| + C_\varepsilon \|x\|$ eşitsizliğinden $|f(a+x) - f(a)| \in U$ bulunur. Bu durumda E 'de herhangi yerel katı vektör uzayı topolojisine göre $(a_1, \dots, a_n) \mapsto f(a_1, \dots, a_n)$ dönüşümü süreklidir.

4. ALMOST f -CEBİRLERİ: DEĞİŞME ÖZELLİĞİ VE CAUCHY-SCHWARZ EŞİTSİZLİĞİ

4.1. Tanım

E bir Riesz cebiri olmak üzere $u, v \in E$ için $u \wedge v = 0$ iken $uv = 0$ oluyorsa E 'ye almost f -cebiri denir.

4.2. Tanım

E ve F Riesz uzayı, $T: E \times E \rightarrow F$ bi-lineer dönüşüm olsun.

$x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ iken $T(x, y) = 0$ ise T dönüşümü ortosimetriktir denir.

4.3. Teorem

S Kompakt Hausdorff uzay olmak üzere E , $C(S)$ 'nin düzgün yoğun Riesz alt uzayı ve F Arşimedsel Riesz uzayı olsun. $A: E \times E \rightarrow F$ ortosimetrik pozitif bi-lineer dönüşüm ve $E^2 := Sp\{fg : f, g \in E\}$ olsun. O halde

$$A(f, g) = B(fg) \quad (f, g \in C(S))$$

olacak şekilde $B: E^2 \rightarrow F$ artan lineer dönüşüm vardır.

İspat

F Dedekind tam olsun. O halde F düzgün tamdır. Bu durumda A dönüşümü ortosimetrik pozitif bi-lineer $C(S) \times C(S) \rightarrow F$ dönüşümüne genişletilebilir ([12], Önerme 1). Böylece $E = C(S)$ olarak kabul edilebilir.

$$B: C(S) \rightarrow F$$

$$h \rightarrow B(h) = A(\mathbf{1}, h),$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm lineer ve pozitifdir. Ayrıca S kompakt küme olduğundan normal kümedir.

$f, g \in C(S)$ için $h = fg$ olsun. $A(f, g) = A(1, h)$ eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $X \subseteq S$ olmak üzere $\varepsilon > 0$, $s, t \in X$ ve $f, g, h \in C(S)$ için

$$|f(s) - f(t)| < \varepsilon, \quad |g(s) - g(t)| < \varepsilon, \quad |h(s) - h(t)| < \varepsilon$$

oluyorsa X 'e S 'nin small altkümesi denir.

İddia 1: $u_1, u_2, \dots, u_n \in C(S)$ elemanlarını $\sum u_i = 1$ ve $S_i = \{s \in S : u_i(s) \neq 0\} \neq \emptyset$ kümesi small olacak şekilde seçebiliriz.

$f, g, h \in C(S)$ fonksiyonları sürekli ve S kompakt olduğundan $f(S), g(S), h(S)$ kompakttır. $A = f(S) \cup g(S) \cup h(S)$ kompakt olduğundan A bütünüyle sınırlıdır. Bu durumda $\varepsilon > 0$ için $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ olacak şekilde en az bir $n \in \mathbb{N}$ ve $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$ vardır. $i = 1, \dots, n$ için $B_i = B(x_i, \frac{\varepsilon}{2})$ denirse $f^{-1}(B_i), g^{-1}(B_i), h^{-1}(B_i)$ açık kümedir ve $T_i = f^{-1}(B_i) \cap g^{-1}(B_i) \cap h^{-1}(B_i)$ açık kümedir.

$$s, t \in T_i \implies s, t \in f^{-1}(B_i)$$

$$\implies f(s), f(t) \in B_i$$

$$\implies |f(s) - f(t)| = |f(s) - x_i + x_i - f(t)| \leq |f(s) - x_i| + |f(t) - x_i| < \varepsilon$$

olur. Aynı şekilde g ve h fonksiyonları için $|g(s) - g(t)| < \varepsilon$, $|h(s) - h(t)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlandığından $i = 1, \dots, n$ için T_i small kümedir. $A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B_i$ ve $f(S) \subseteq A$ olmasından $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B_i)$ dir. Aynı şekilde $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n g^{-1}(B_i)$ ve $S \subseteq \bigcup_{i=1}^n h^{-1}(B_i)$ dir. Buradan

$$S \subseteq (\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(B_i)) \cap (\bigcup_{i=1}^n g^{-1}(B_i)) \cap (\bigcup_{i=1}^n h^{-1}(B_i))$$

$$= \bigcup_{i=1}^n (f^{-1}(B_i) \cap g^{-1}(B_i) \cap h^{-1}(B_i))$$

$$= \bigcup_{i=1}^n T_i$$

olur. Bu durumda $\bigcup_{i=1}^n T_i = S$ dir. S kümesinin $\{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ açık örtüsü için

$$\text{i) } \sum_{i=1}^n u_i(x) = 1$$

$$\text{ii) } u_i(x) = 0, x \in T_i'$$

olacak şekilde $u_1, u_2, \dots, u_N \in C(S)^+$ vardır [7].

(i)'den $\sum_{i=1}^n u_i = \mathbf{1}$ olacak şekilde $u_1, u_2, \dots, u_N \in C(S)^+$ vardır ve (ii)'den

$$T_i' \subseteq S_i' = \{s \in S : u_i(s) = 0\} \Rightarrow S_i \subseteq T_i$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^n S_i \subseteq \bigcup_{i=1}^n T_i = S$$

Öyleyse $S_i = \{s \in S : u_i(s) \neq 0\}$ small kümedir ve boştan farklıdır.

İddia 2: $i = 1, 2, \dots, n$ için $s_i \in S_i$ ve

$$f' = \sum_{i=1}^n f(s_i) u_i(x) \quad , \quad g' = \sum_{i=1}^n g(s_i) u_i(x) \quad , \quad h' = \sum_{i=1}^n h(s_i) u_i(x)$$

olsun. Bu durumda

$$\|f - f'\|_\infty < \varepsilon, \quad \|g - g'\|_\infty < \varepsilon, \quad \|h - h'\|_\infty < \varepsilon$$

olur.

$$\|f - f'\|_\infty = \sup\{|f(x) - f'(x)| : x \in S\}$$

$x \in S_i'$ için $u_i(x) = 0$ ve S_i small küme olduğundan $x \in S_i$ için $|f(x) - f(s_i)| < \varepsilon$ olur.

Keyfi $x \in S$ için

$$\begin{aligned}
 |f(x) - f'(x)| &= |f(x) \sum_{i=1}^n u_i(x) - \sum_{i=1}^n f(s_i) u_i(x)| \\
 &= |\sum_{i=1}^n (f(x) - f(s_i)) u_i(x)| \\
 &\leq \sum_{i=1}^n |f(x) - f(s_i)| u_i(x) \\
 &= |f(x) - f(s_1)| u_1(x) + \dots + |f(x) - f(s_n)| u_n(x) \\
 &< \varepsilon u_1(x) + \varepsilon u_2(x) + \dots + \varepsilon u_n(x) \\
 &= \varepsilon
 \end{aligned}$$

olur. O halde $\|f - f'\|_\infty < \varepsilon$ olup diğerleri de benzer biçimde gösterilir.

İddia 3: $|A(f, g)| \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty A(\mathbf{1}, \mathbf{1})$ eşitsizliği sağlanır.

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in S\}$$

$$\|g\|_\infty = \sup \{|g(x)| : x \in S\}$$

Her $x \in S$ için

$$|f|(x) = |f(x)| \leq \|f\|_\infty \mathbf{1}(x) \Rightarrow |f| \leq \|f\|_\infty \mathbf{1}$$

$$|g|(x) = |g(x)| \leq \|g\|_\infty \mathbf{1}(x) \Rightarrow |g| \leq \|g\|_\infty \mathbf{1}$$

eşitsizliklerinden

$$|A(f, g)| \leq |A(|f|, |g|)|$$

$$\leq |A(\|f\|_\infty \mathbf{1}, \|g\|_\infty \mathbf{1})|$$

$$= \|f\|_\infty \|g\|_\infty A(\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

bulunur. İkinci ve üçüncü iddiada gösterilen eşitsizlikler kullanılarak aşağıdaki eşitsizlikler bulunur.

$$(1) |A(f, g) - A(f', g')| = |A(f - f', g) + A(f', g - g')|$$

$$\leq |A(f - f', g)| + |A(f', g - g')|$$

$$\leq \|f - f'\|_\infty \|g\|_\infty A(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \|f'\|_\infty \|g - g'\|_\infty A(\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

$$< \varepsilon \|g\|_\infty A(\mathbf{1}, \mathbf{1}) + \varepsilon \|f'\|_\infty A(\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

$$(2) |A(\mathbf{1}, h) - A(\mathbf{1}, h')| \leq \|h - h'\|_\infty A(\mathbf{1}, \mathbf{1}) < \varepsilon A(\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

(3) $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $S_i \cap S_j = \emptyset$ olması durumunda her $s_i \in S_i$ için $u_j(s_i) = 0$ ve her $s_j \in S_j$ için $u_i(s_j) = 0$ dir. Buradan $x \in S_i$ için $u_i \wedge u_j = 0$ ve $x \in S_j$ için $u_i \wedge u_j = 0$ dir. $x \in S/S_i \cup S_j$ için de $u_i \wedge u_j = 0$ ve $S_i \cap S_j = \emptyset$ olduğunda $A(u_i, u_j) = 0$ dir. $S_i \cap S_j \neq \emptyset$ olması durumunda ise en az bir $t \in S_i \cap S_j$ vardır ve $s_i \in S_i, s_j \in S_j$ için

$$|f(s_n) - f(s_m)| \leq |f(s_n) - f(t)| + |f(t) - f(s_m)| < 2\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. A dönüşümünün bi-lineer olmasından

$$|A(f', g') - A(\mathbf{1}, h')| = |\sum_{i,j} f(s_i)g(s_j)A(u_i, u_j) - \sum_{i,j} \mathbf{1}(s_i)h(s_j)A(u_i, u_j)|$$

$$\leq \sum_{i,j} |f(s_i) - \mathbf{1}(s_i)| \cdot |g(s_j)| \cdot A(u_i, u_j)$$

$$\leq 2\varepsilon \|g\|_\infty \sum_{i,j} A(u_i, u_j)$$

$$= 2\varepsilon \|g\|_{\infty} A(\mathbf{1}, \mathbf{1})$$

bulunur.

(1), (2) ve (3) de bulduğumuz eşitsizliklerden

$$0 \leq |A(f, g) - A(\mathbf{1}, h)|$$

$$\leq |A(f, g) - A(f', g')| + |A(\mathbf{1}, h) - A(\mathbf{1}, h')| + |A(f', g') - A(\mathbf{1}, h')|$$

$$\leq \varepsilon A(\mathbf{1}, \mathbf{1}) (3\|g\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} + 1)$$

$K = (3\|g\|_{\infty} + \|f\|_{\infty} + 1) \in \mathbb{R}$, $u = A(\mathbf{1}, \mathbf{1}) \in F$ ve $n \in \mathbb{N}^+$ için $\varepsilon = \frac{1}{Kn}$ alındığında

$$0 \leq |A(f, g) - A(\mathbf{1}, h)| \leq K\varepsilon u = \frac{1}{n} \cdot u$$

olur. F Arşimedsel Riesz uzayı olduğundan $\frac{1}{n} \cdot u \downarrow 0$ dir. O halde $A(f, g) = A(\mathbf{1}, h) = B(fg)$ dir.

Şimdi F Dedekind tam olmayan Arşimedsel Riesz uzayı ve $\hat{F}$, F 'nin Dedekind tamlaması olsun. Bu durumda ispatın ilk kısmından her $f, g \in B$ için $A(f, g) = B(fg)$ olacak şekilde $B: E^2 \rightarrow \hat{F}$ artan lineer dönüşümü vardır. Her $f, g \in B$ için $A(f, g) \in F$ olduğundan $B(fg) \in F$ olur. Dolayısıyla $B: E^2 \rightarrow F$ artan lineer dönüşümü bulunmuş olur.

4.4. Sonuç

E ve F Arşimedsel Riesz uzayları ve $A: E \times E \rightarrow F$ ortosimetrik pozitif bi-lineer dönüşüm olsun. O halde her $f, g \in E$ için

$$A(f, g) = A(g, f) \text{ dir.}$$

İspat

$f, g \in E$ için E_0 E 'nin $\{f, g\}$ tarafından üretilen Riesz altuzayı olsun. $|f| + |g|$, E_0 'in güçlü birimidir. $E_0 = E$ ve bir S kompakt Hausdorff uzayı için E_0 $C(S)$ 'nin düzgün yoğun Riesz altuzayı olarak düşünebiliriz ([1] Teorem 12.28.). O halde Teorem 4.3'den $B: E^2 \rightarrow F$ pozitif lineer dönüşümü

$$A(f, g) = B(fg)$$

olacak şekilde vardır ve $A(f, g) = B(fg) = B(gf) = A(g, f)$ dir.

4.5. Sonuç

Her Arşimedsel almost f -cebiri değişmelidir.

Herhangi X vektör uzayı için Cauchy-Shwarz eşitsizliği şu şekildedir;

$$A(x, x) \geq 0 \quad (x \in X)$$

$$A(x, y) = A(y, x) \quad (x, y \in X)$$

özelliklerini sağlayan $A: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bi-lineer dönüşümü için $x, y \in X$ olmak üzere

$$A(x, y)^2 \leq A(x, x)A(y, x)$$

dir.

Daha önce bu eşitsizlik Arşimedsel yarı-asal f -cebirleri için Huijmans ve Bernau tarafından gösterilmiştir [2] . Burada almost f -cebirleri için sağlandığı gösterilecektir.

4.6. Sonuç

X bir vektör uzayı, F $\bullet$ çarpımıyla Arşimedsel almost f -cebiri olsun. $A: X \times X \rightarrow F$ bi-lineer dönüşümü

$$A(x, x) \geq 0 \quad (x \in X)$$

$$A(x, y) = A(y, x) \quad (x, y \in X)$$

özelliklerini sağlasın. Bu durumda

$$A(x, y) \bullet A(x, y) \leq A(x, x) \bullet A(y, y) \quad (x, y \in X)$$

eşitsizliği vardır.

İspat

$x, y \in X$, $f_0 = A(x, x)$, $g_0 = A(x, y)$, $h_0 = A(y, y)$ olsun. $\lambda \in \mathbb{R}$ için hipotezden $A(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$ dır ve buradan

$$f_0 + 2\lambda g_0 + \lambda^2 h_0 \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

F_0 , F 'nin $\{f_0, g_0, h_0\}$ tarafından üretilen Riesz alt uzayı olsun. $|f_0| + |g_0| + |h_0|$ F_0 'ın güçlü birimi olduğundan, F_0 $C(S)$ 'nin düzgün yoğun Riesz alt uzayına Riesz izomorfik olacak şekilde S kompakt Hausdorff uzayı vardır ([1] Teorem 12.28.). F_0 $C(S)$ 'nin düzgün yoğun Riesz alt uzayına $\hat{F}_0$ dersek

$$T: F_0 \rightarrow \hat{F}_0$$

$$f \rightarrow T(f) = \hat{f}$$

örgü izomorfizmi vardır. Bu durumda

$$\hat{f}_0 + 2\lambda \hat{g}_0 + \lambda^2 \hat{h}_0 \geq 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

olur ve buradan $\hat{g}_0 \hat{g}_0 \leq \hat{f}_0 \hat{h}_0$ eşitsizliği elde edilir.

$$\varphi: \hat{F}_0 \times \hat{F}_0 \rightarrow F$$

$$(\hat{f}, \hat{g}) \rightarrow \varphi(\hat{f}, \hat{g}) = f \bullet g$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün anlamlı, iyi tanımlı ve bi-lineerdir. Pozitif olduğunu göstermek için $\hat{f}, \hat{g} \in \hat{F}_0^+$ olsun. T dönüşümü örten olduğundan $T(f) = \hat{f}$ ve $T(g) = \hat{g}$ olacak şekilde $f, g \in F_0 \subseteq F$ vardır ve T izomorfizm olduğundan T^{-1} pozitif olup buradan $f, g \in F^+$ dır. F almost f -cebiri olduğundan $\varphi(\hat{f}, \hat{g}) = f \bullet g \in F^+$ dır. Ortosimetrik olduğunu göstermek için $\hat{f}, \hat{g} \in \hat{F}_0$ için $\hat{f} \wedge \hat{g} = 0$ olsun. T dönüşümü örten olduğundan. $T(f) = \hat{f}$ ve $T(g) = \hat{g}$ olacak şekilde $f, g \in F_0 \subseteq F$ vardır. T bire-bir ve F almost f -cebiri olduğundan

$$\hat{f} \wedge \hat{g} = T(f) \wedge T(g) = T(f \wedge g) = 0 \Rightarrow f \wedge g = 0$$

$$\Rightarrow f \bullet g = 0$$

olur. Bu durumda Teorem 4.3'den $B: \hat{F}_0^2 \rightarrow F$ artan lineer dönüşümü $f, g \in F_0$ için $\varphi(\hat{f}, \hat{g}) = f \bullet g = B(\hat{f} \hat{g})$ olacak şekilde vardır. O halde $g_0 \bullet g_0 = B(\hat{g}_0 \hat{g}_0) \leq B(\hat{f}_0 \hat{h}_0) = f_0 \bullet h_0$ olur. Buradan $A(x, y) \bullet A(x, y) \leq A(x, x) \bullet A(y, y)$ eşitsizliği elde edilmiş olur.

4.7. Teorem

E ve F Arşimedsel Riesz uzayları ve $A: E \times E \rightarrow F$ ortosimetrik pozitif bi-lineer dönüşüm olsun. O halde $f, g, h \in E^+$ için

$$A(f, g \wedge h) = 0 \Leftrightarrow A(f \wedge g, h) = 0 \quad \text{dır.}$$

İspat

($\Rightarrow$) $f, g, h \in E^+$, $A(f, g \wedge h) = 0$ olsun. E_0, E 'nin $\{f, g, h\}$ elemanları tarafından üretilen Riesz altuzayı olsun. $f + g + h$, E_0 'ın güçlü birimidir. Öyleyse bir S kompakt Hausdorff uzayı için $E_0 \subset C(S)$ 'nin düzgün yoğun Riesz altuzayı olarak ve $E_0 = E$ olarak alabiliriz ([1] Teorem 12.28.). Teorem 4.3'den $A(f, g) = B(fg)$ olacak şekilde $B: E^2 \rightarrow F$ pozitif lineer dönüşüm vardır.

$$\varepsilon_n = \|[(f \wedge g)h - nf(g \wedge h)]^+\|_\infty, (n \in \mathbb{N}) \text{ olsun.}$$

$(f \wedge g)h = 0$ için $A(f \wedge g, h) = B((f \wedge g)h) = 0$ dir. $(f \wedge g)h \neq 0$ olsun.

$$\varepsilon_n = \|[(f \wedge g)h - nf(g \wedge h)]^+\|_\infty$$

$$= \sup \{[(f \wedge g)h - nf(g \wedge h)]^+(x) : x \in S\}$$

$$= \sup \{[(f(x) \wedge g(x))h(x) - nf(x)(g(x) \wedge h(x))]^+ : x \in S\}$$

$$= \sup \{[f(x)h(x) \wedge g(x)h(x) - n(f(x)g(x) \wedge f(x)h(x))]^+ : x \in S\}$$

Genel olarak $a, b \in \mathbb{R}^+$ için $(a - nb)^+ \downarrow 0$ olduğu aşıkardır. O halde $\varepsilon_n \downarrow 0$ dir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(f \wedge g)h - nf(g \wedge h) \leq \varepsilon_n \cdot \mathbf{1}$ n dir. B dönüşümü artan olduğundan

$$0 \leq A(f \wedge g, h) = B((f \wedge g)h)$$

$$\leq nB(f(g \wedge h)) + \varepsilon_n B(\mathbf{1})$$

$$= nA(f, g \wedge h) + \varepsilon_n B(\mathbf{1})$$

bulunur. $A(f, g \wedge h) = 0$ ve $\varepsilon_n \downarrow 0$ olduğundan $A(f \wedge g, h) = 0$ dir. İspatın diğer kısmı da benzer biçimde gösterilir.

4.8. Sonuç

$E, \bullet$ çarpımıyla Arşimedsel almost f -cebiri olsun.

(i) $f, g \in E^+$ ve $(f \wedge g) \bullet (f \wedge g) = 0$ ise $f \bullet g = 0$ dır.

(ii) $f \in E$ ve $f \bullet f = 0$ ise her $g \in E$ için $f \bullet g = 0$ dır.

(iii) $f, g, h \in E$ ve $f \wedge g \wedge h = 0$ ise $f \bullet g \bullet h = 0$ dır.

İspat

$\bullet: E \times E \rightarrow E$, her $x, y \in E$ için $\bullet(x, y) = x \bullet y$ şeklindeki çarpma dönüşümü ortosimetrik pozitif bi-lineer dönüşümdür.

(i) $f, g \in E^+$ ve $(f \wedge g) \bullet (f \wedge g) = 0$ olsun. Teorem 4.7' dan

$$(f \wedge g) \bullet (g \wedge f) = 0 \Rightarrow (f \wedge g \wedge g) \bullet f = 0$$

$$\Rightarrow (f \wedge g) \bullet f = 0$$

$$\Rightarrow f \bullet (f \wedge g) = (f \wedge f) \bullet g = 0$$

$$\Rightarrow f \bullet g = 0$$

bulunur.

(ii) $f \in E$ ve $f \bullet f = 0$ olsun.

E almost f -cebiri olduğundan $f^+ \bullet f^- = 0$ dır.

$$0 = f \bullet f = |f| \bullet |f| \geq (|f| \wedge |g|) \bullet (|f| \wedge |g|) \geq 0$$

olduğundan $(|f| \wedge |g|) \bullet (|f| \wedge |g|) = 0$ olur ve (i)'den

$$|f| \bullet |g| = 0 \Rightarrow |f \bullet g| = 0$$

$$\Rightarrow f \bullet g = 0$$

bulunur.

(iii) $f_0, g_0, h_0 \in E^+$ olmak üzere $f_0 \wedge g_0 \wedge h_0 = 0$ ve $j_0 = f_0 \wedge g_0$ olsun. $\bullet$ dönüşümü ortosimetrik olduğundan $j_0 \bullet h_0 = 0$ dır.

$f * g = f \bullet g \bullet h_0$ ($f, g \in E$) şeklindeki tanımlanan çarpım dönüşümü için

$$(f_0 \wedge g_0) * (f_0 \wedge g_0) = j_0 * j_0 = j_0 \bullet j_0 \bullet h_0 = 0$$

olur ve (i) den $f_0 * g_0 = 0$ dır. Dolayısıyla $f_0 \bullet g_0 \bullet h_0 = 0$ dır.

4.9. Sonuç

$E, \bullet$ çarpımıyla Arşimedsel almost f -cebiri ve $f \bullet E = \{0\}$ olacak şekilde f elemanı yalnızca $f = 0$ olsun. Bu durumda E yarı asal f -cebiridir.

İspat

$f, g, h \in E^+$ için $f \wedge g = 0$ ve $j = f \wedge (g \bullet h)$ olsun.

$$0 \leq j \bullet j = [f \wedge (g \bullet h)] \bullet [f \wedge (g \bullet h)] \leq f \bullet (g \bullet h) = (f \bullet g) \bullet h = 0 \bullet h = 0$$

olduğundan $j \bullet j = 0$ dır. Sonuç 4.8(ii)'den $j \bullet E = \{0\}$ olup hipotezden $j = 0$ dır. Dolayısıyla E yarı asal f -cebiridir.

5. RİESZ UZAYLARININ KARELERİ

5.1. Tanım

E ve F Riesz uzayı, $T: E \times E \rightarrow F$ bi-lineer dönüşüm olsun. Her $x, y \in E^+$ için $x \rightarrow T(x, y)$ ve $y \rightarrow T(x, y)$ örgü homomorfizmi ise T 'ye *bi-örgü homomorfizmi* denir.

5.2. Teorem

E ve F Arşimedsel Riesz uzayı olsun. aşağıdaki önerme doğru olacak şekilde bir tek Arşimedsel Riesz uzayı G ve $\varphi: E \times F \rightarrow G$ bi-örgü homomorfizmi vardır [8].

- H herhangi Arşimedsel Riesz uzayı olmak üzere $\psi: E \times F \rightarrow H$ bi-örgü homomorfizm ise $T \varphi = \psi$ olacak şekilde $T: G \rightarrow H$ örgü homomorfizmi vardır ve tektir.

5.3. Tanım

Teorem 5.2'deki G Riesz uzayına E ile F 'nin *tensör çarpımı* denir ve $E \overline{\otimes} F$ ile gösterilir.

5.4. Teorem

A, L Riesz uzayında ideal olmak üzere $\pi: L \rightarrow L/A$ bölüm dönüşümü örten örgü homomorfizmidir ve $\text{Ker}(\pi) = A$ dır [14].

5.5. Teorem

A, L Riesz uzayında ideal olmak üzere aşağıdakiler denktir [14].

- (i) L/A Arşimedsel Riesz uzayıdır

(ii) A düzgün kapalıdır

5.6. Tanım

E Arşimedsel Riesz uzayı olsun.

(iii) $\odot: E \times E \rightarrow E^\odot$ ortosimetrik bi-örgü homomorfizmdir.

(iv) F Riesz uzayı için, $T: E \times E \rightarrow F$ ortosimetrik bi-örgü homomorfizm ise bir tek $T^\odot \circ \odot = T$ olacak şekilde $T^\odot: E^\odot \rightarrow F$ örgü homomorfizmi vardır.

Bu şartları sağlayacak şekilde $E^\odot$ Riesz uzayı varsa buna E 'nin *karesi* denir ve $(E^\odot, \odot)$ ile gösterilir.

5.7. Teorem

E Arşimedsel Riesz uzayı olsun. O zaman

(i) E 'nin karesi $(E^\odot, \odot)$ vardır.

(ii) $(E^\odot, \odot)$ tektir.

İspat

(i) $A = \{x \overline{\otimes} y: x, y \in E \text{ ve } x \wedge y = 0\}$ olmak üzere A kümesinin $E \overline{\otimes} E$ de ürettiği idealin düzgün kapanışına I diyelim. $E^\odot = E \overline{\otimes} E / I$ olarak tanımlarsak Teorem 5.5'den $E^\odot$ Arşimedsel Riesz uzayıdır. $q: E \overline{\otimes} E \rightarrow E^\odot$ bölüm dönüşümü olmak üzere

$$\odot: E \times E \rightarrow E^\odot$$

$$(x, y) \rightarrow \odot(x, y) = q(x \otimes y)$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm anlamlı, iyi tanımlı ve bi-lineerdir. Şimdi ortosimetrik bi-örgü homomorfizm olduğunu gösterelim.

- $x, y \in E$ olmak üzere $x \wedge y = 0$ olsun. Teorem 5.4'den $Ker(q) = I$ dır. $x \otimes y \in A \subseteq I$ olmasından $\odot(x, y) = q(x \otimes y) = 0$ dır. O halde $\odot$ dönüşümü ortosimetriktir.

- Bi-örgü homomorfizm olduğunu göstermek için $z \in E^+$ ve $x, y \in E$ için $x \wedge y = 0$ olsun. $\otimes$ dönüşümü bi-örgü homomorfizm olduğundan $x \otimes z \wedge y \otimes z = 0$ dır ve q Riesz homomorfizm olduğundan $q(x \otimes z) \wedge q(y \otimes z) = 0$ dır. Buradan $\odot(x, z) \wedge \odot(y, z) = 0$ olur. Benzer şekilde $\odot(z, x) \wedge \odot(z, y) = 0$ bulunur. Dolayısıyla $\odot$ dönüşümü bi-örgü homomorfizmdir.

F Arşimedsel Riesz uzayı olmak üzere $T: E \times E \rightarrow F$ ortosimetrik bi-örgü homomorfizm olsun. Teorem 5.2'den $T^\otimes \circ \otimes = T$ olacak şekilde $T^\otimes: E \overline{\otimes} E \rightarrow F$ örgü homomorfizmi vardır ve tektir.

$$T^\odot: E^\odot \rightarrow F$$

$$q(w) \rightarrow T^\odot(q(w)) = T^\otimes(w)$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün anlamlı olduğunu göstermek için $t \in E^\odot$ olsun. q dönüşümü örten olduğundan $q(w) = t$ olacak şekilde en az bir $w \in E \overline{\otimes} E$ vardır. $T^\otimes$ dönüşümü anlamlı olduğundan $T^\otimes(w) \in F$ dir. O halde $T^\odot$ anlamlıdır. İyi tanımlı olduğunu göstermek için $t_1 = t_2$ olacak şekilde $t_1, t_2 \in E^\odot$ olsun. q dönüşümü örten olduğundan $t_1 = q(w_1)$ ve $t_2 = q(w_2)$ olacak şekilde $w_1, w_2 \in E \overline{\otimes} E$ vardır. Buradan $q(w_1 - w_2) = 0$ dır. O zaman $w_1 - w_2 \in I$ dır. Şimdi herhangi $w \in I$ için $T^\otimes(w) = 0$ olduğunu gösterelim. T dönüşümünün ortosimetrik olmasından,

$$w \in A \Rightarrow \exists x, y \in E \text{ vardır: } w = x \otimes y \text{ ve } x \wedge y = 0$$

$$\Rightarrow T^\otimes(w) = T^\otimes(x \otimes y) = T(x, y) = 0$$

olur. $T^\otimes$ dönüşümünün lineer olmasından,

$$w \in I_A \Rightarrow \exists w_1, w_2, \dots, w_n \in A, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in R^+ : |w| \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot w_i$$

$$\Rightarrow T^\otimes(0) \leq T^\otimes(|w|) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i \cdot T^\otimes(w_i)$$

$$\Rightarrow 0 \leq |T^\otimes(w)| \leq 0$$

Buradan $T^\otimes(w)=0$ dır ($w_i \in A$ olduğundan $T^\otimes(w_i) = 0$ dır).

$$w \in \bar{I}_A \Rightarrow w_n \xrightarrow{\text{r.u.}} w \text{ olacak şekilde } (w_n) \subseteq I_A \text{ vardır}$$

$$\Rightarrow |w_n - w| \leq \varepsilon_n u \text{ olacak şekilde } u > 0 \text{ ve } \varepsilon_n \downarrow 0 \text{ vardır}$$

$$\Rightarrow |T^\otimes(w_n) - T^\otimes(w)| \leq \varepsilon_n T^\otimes(u)$$

$$\Rightarrow T^\otimes(w_n) \rightarrow T^\otimes(w)$$

$$\Rightarrow T^\otimes(w) = 0$$

Böylelikle her $w \in I$ için $T^\otimes(w)=0$ dır. Bu durumda $w_1 - w_2 \in I$ olduğundan

$$T^\otimes(w_1 - w_2) = 0 \Rightarrow T^\otimes(w_1) = T^\otimes(w_2)$$

$$\Rightarrow T^\odot(q(w_1)) = T^\odot(q(w_2))$$

$$\Rightarrow T^\odot(t_1) = T^\odot(t_2)$$

olur. Buradan $T^\odot$ iyi tanımlıdır. q dönüşümünün örgü homomorfizm ve $T^\otimes$ dönüşümünün bi-örgü homomorfizm olmasından $T^\odot$ dönüşümünün örgü homomorfizmi olduğu kolayca görülür. Sonuç olarak $T^\odot: E^\odot \rightarrow F$ dönüşümü $T^\odot \circ \odot = T$ olacak şekilde vardır ve $T^\otimes$ dönüşümünün tekliğinden tektir.

(ii) E Riesz uzayının başka bir karesi (E^0, O) olsun. E 'nin karesi $E^\odot$ için karenin tanımından $O: E \times E \rightarrow E^0$ ortosimetrik dönüşüm olduğundan $So\odot=O$ olacak şekilde $S: E^\odot \rightarrow E^0$ örgü homomorfizmi tek olarak vardır. Ayrıca (E^0, O) , E 'nin karesi olduğundan $\odot: E \times E \rightarrow E^\odot$ ortosimetrik dönüşümü için bir tek $ToO=\odot$ olacak şekilde $T: E^0 \rightarrow E^\odot$ örgü homomorfizmi vardır. Buradan

$$ToSo\odot=ToO=\odot \Rightarrow ToS = I$$

ve

$$SoT oO=So\odot=O \Rightarrow SoT = I$$

olduğundan $(E^0, O) \cong (E^\odot, \odot)$ dir.

5.8. Teorem

$(G, \bullet)$ Arşimedsel yarı-asal f -cebiri, E G 'nin düzgün tam Riesz alt uzayı ve $E^2 = \{x \bullet y: x, y \in E\}$ olsun. Bu durumda E^2 , G 'nin Riesz alt uzayıdır ve $(E^2, \bullet)$ E 'nin karesidir.

İspat

E^2 'nin G 'nin Riesz alt uzayı olduğunu göstermek için $z_1, z_2 \in E^2$ olsun. Öyleyse $z_1 = x_1 y_1$ ve $z_2 = x_2 y_2$ olacak şekilde $x_1, y_1, x_2, y_2 \in E$ vardır.

$$B = \{u \in \mathbb{R}^4: \|u\| = 1\}$$

$j_1, j_2: B \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını

$$j_1(t) = j_2(t) = \begin{cases} \sqrt{t_1 t_2 + t_3 t_4} & , \quad t_1 t_2 + t_3 t_4 \geq 0 \\ \sqrt{-(t_1 t_2 + t_3 t_4)} & , \quad t_1 t_2 + t_3 t_4 < 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Her $t=(t_1, t_2, t_3, t_4) \in B$ için $j_1(t)j_2(t) = t_1t_2 + t_3t_4$ sağlanır. j_1 ve j_2 fonksiyonlarının $\mathbb{R}^4$ uzayına genişlemesi vardır ve $j_1, j_2 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^4)$ olduğunu görmek kolaydır. Teorem 3.15 den $u = j_1(x_1, y_1, x_2, y_2)$, $v = j_1(x_1, y_1, x_2, y_2)$ olacak şekilde $u, v \in E$ vardır ve Teorem 5.2 [6] dan

$$u \cdot v = j_1(x_1, y_1, x_2, y_2)j_2(x_1, y_1, x_2, y_2)$$

$$= x_1y_1 + x_2y_2$$

$$= z_1 + z_2 \in E^2$$

olur. O halde E^2 alt vektör uzayıdır. $z \in E^2$ için $|z| = |xy| = |x||y| \in E^2$ olduğundan E^2 , G 'nin Riesz alt uzayıdır.

$u \in E^+$ için E_u , u tarafından üretilen ideal olsun. E düzgün tam olduğundan E_u düzgün tamdır. E_u güçlü birimli ve düzgün tam olduğundan $E_u \cong C(X)$ olacak şekilde X kompakt Hausdorff uzayı vardır ([1] Teorem 12.28.). Ayrıca $\bullet : E \times E \rightarrow E^2$ dönüşümünün ortosimetrik bi-örgü homomorfizmi olduğu kolayca görülür. Bu durumda $T: E \times E \rightarrow F$ ortosimetrik bi-örgü homomorfizmi için Teorem 4.3'den $T^\bullet: E^2 \rightarrow F$ artan lineer dönüşümü her $x, y \in E$ için $T^\bullet(xy) = T(x, y)$ olacak şekilde vardır.

İddia: $T^\bullet: E^2 \rightarrow F$ dönüşümü örgü homomorfizmidir.

$x, y \in E$ olsun.

$$f(s, t) = \sqrt{|st|} \operatorname{sgn}(st), \quad s, t \in \mathbb{R}$$

fonksiyonu $\mathcal{A}(\mathbb{R}^2)$ nin elemanıdır ve $f(s, t)|f(s, t)| = st$ dir. Teorem 3.25 den $a = f(x, y)$ olacak şekilde $a \in E$ vardır ve $a \bullet |a| = x \bullet y$ dir. T bi-örgü homomorfizmi olduğundan

$$|T^*(x \bullet y)| = |T^*(a \bullet |a|)| = |T(a, |a|)| = T(|a|, |a|) = T^*(|a| \bullet |a|) = T^*(|x \bullet y|)$$

bulunur. Bu durumda T^* dönüşümü örgü homomorfizmidir. Tanım 5.6 dan $(E^2, \bullet)$ E 'nin karesidir.

Szulga'nın Yapılandırması

$\vartheta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, her $t \in \mathbb{R}$ için $\vartheta(t) = t|t|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm sıra izomorfizmdir. $H, H', J: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri her $s, t \in \mathbb{R}$ için

$$H(s, t) = \vartheta^{-1}(\vartheta(s) + \vartheta(t))$$

$$H'(s, t) = \vartheta(\vartheta^{-1}(s) + \vartheta^{-1}(t))$$

$$J(s, t) = \vartheta^{-1}(st)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $H, H', J \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ dir.

$s, t \in \mathbb{R}$ ve $|s| \wedge |t| = 0$ için $s|t| = t|s| = 0$ olduğundan $\vartheta(s + t) = s|s| + t|t| = \vartheta(s) + \vartheta(t)$ dir. Buradan

$$H(s, t) = H'(s, t) = s + t$$

olur.

E düzgün tam Riesz uzayı olmak üzere Teorem 3.15' den her $x, y \in E$ için $H(x, y)$, $H'(x, y), J(x, y) \in E$ 'de vardır.

5.10. Teorem

E düzgün tam Riesz uzayı olsun. E 'de toplama $+$ ve skalarla çarpma $\bullet$ her $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için şu şekilde tanımlansın;

$$x \tilde{+} y = H(x, y) \quad \text{ve} \quad \lambda \bullet x = \vartheta^{-1}(\lambda)x$$

(i) Bu işlemlerle ve verilen sıralamayla E Riesz uzayıdır. Buna $E^\bullet$ denilirse $J: E \times E \rightarrow E^\bullet$ dönüşümü örten ortosimetrik bi-örgü homomorfizmidir.

F herhangi Arşimedsel Riesz uzayı ise $T: E \times E \rightarrow F$ dönüşümü ortosimetrik, sıra sınırlı, bi-lineer dönüşüm ise $T^\bullet J = T$ olacak şekilde $T^\bullet: E^\bullet \rightarrow F$ sıra sınırlı, lineer dönüşümü vardır ve tektir. Ayrıca T (bi-pozitif) bi-örgü homomorfizmi olması için gerekli ve yeterli koşul $T^\bullet$ (pozitif) örgü homomorfizmi olmasıdır.

(ii) $(E^\bullet, J)$, E 'nin karesidir.

İspat

F herhangi Riesz uzayı ve $T: E \times E \rightarrow F$ ortosimetrik, sıra sınırlı, bi-lineer dönüşüm olsun.

$T^\bullet: E^\bullet \rightarrow F$ dönüşümünü her $x \in E$ için $T^\bullet(x) = T(x, |x|)$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümün anlamlı ve iyi tanımlı olduğu aşikardır.

$u \in E^+$ için E_u , u tarafından üretilen ideal olsun. E düzgün tam olduğundan E_u düzgün tamdır. O halde Teorem 3.15 den her $x, y \in E_u$ için $x \tilde{+} y \in E_u$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda \bullet x \in E_u$ dur. Ayrıca dönüşümler örgü homomorfizmi veya bi-örgü homomorfizmi olduğundan $E = E_u$ varsayabiliriz. Bu işlemlerle ve E ' den gelen sıralamayla $E_u^\bullet = (E_u, \tilde{+}, \bullet, \leq)$ olsun. Aşağıdaki iddiaları ispatlayacağız:

(1) $E_u^\bullet$ Riesz uzayıdır, $E_u \rightarrow E_u^\bullet$, her $x \in E_u$ için $x \rightarrow J(x, u)$ dönüşümü örgü izomorfizmidir.

(2) J ' nin kısıtlaması olan $E_u \times E_u \rightarrow E_u^\bullet$ dönüşümü ortosimetrik bi-örgü homomorfizmidir.

(3) $T^\bullet|_{E_u^\bullet}: E_u^\bullet \rightarrow F$ dönüşümü sıra sınırlı lineer dönüşümdür.

E_u güçlü birimli ve düzgün tam olduğundan $E_u \cong C(X)$ olacak şekilde X kompakt Hausdorff uzayı vardır. Bu izomorfizmde u güçlü birimine $C(X)$ 'in güçlü birimi olan $\mathbf{1}$ sabit fonksiyonu karşılık gelir ([1] Teorem 12.28.).

$$P: C(X) \rightarrow C(X)$$

$$f \rightarrow P(f) = \vartheta o f = f|f|$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün sıra izomorfizm olduğu ϑ 'nin sıra izomorfizm olmasından kolayca görülebilir.

(1) $f, g \in C(X)$ olmak üzere

$$H(f, g) = Ho(f, g) = \vartheta^{-1} o (\vartheta o f + \vartheta o g) = P^{-1}(P(f) + P(g))$$

$$P(f \tilde{+} g) = P(H(f, g)) = P(f) + P(g)$$

$$P(\lambda \bullet f) = \vartheta o (\vartheta^{-1}(\lambda)f) = \lambda P(f)$$

Bu durumda $E_u^\bullet \cong E_u$ olduğundan $E_u^\bullet$ Riesz uzayıdır. Ayrıca

$$J(f, g) = Jo(f, g) = \vartheta^{-1} o (fg) = P^{-1}(fg)$$

$$J(f, u) = J(f, \mathbf{1}) = P^{-1}(f)$$

olmasından $x \rightarrow J(x, u)$ örgü izomorfizmidir.

(2) Her $f, g \in C(X)$ için $J(f, g) = P^{-1}(fg)$ ve P sıra izomorfizm olduğundan $J|_{E_u}$ bimorfizm olduğu açıktır. $f, g \in C(X)$ için $f \wedge g = 0$ olsun. $C(X)$ almost f -cebiri olduğundan $P^{-1}(fg) = J(fg) = 0$ dır. Dolayısıyla $J|_{E_u}$ ortosimetriktir.

(3) Teorem 4.3 den her $f, g \in C(X)$ için $T(f, g) = T(fg, \mathbf{1})$ dir. Buradan $f, g \in C(X)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
T^\bullet(f \tilde{+} g) &= T^\bullet(H(f, g)) = T(H(f, g), |H(f, g)|) \\
&= T(H(f, g) |H(f, g)|, \mathbf{1}) \\
&= T(P(H(f, g)), \mathbf{1}) \\
&= T(P(f) + P(g), \mathbf{1}) \\
&= T(P(f), \mathbf{1}) + T(P(g), \mathbf{1}) \\
&= T(f, |f|) + T(g, |g|) \\
&= T^\bullet(f) + T^\bullet(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T^\bullet(\lambda \bullet f) &= T^\bullet(\vartheta^{-1}(\lambda)f) = T(\vartheta^{-1}(\lambda)f, |\vartheta^{-1}(\lambda)f|) \\
&= T(\vartheta^{-1}(\lambda)f \, |\vartheta^{-1}(\lambda)f|, \mathbf{1}) \\
&= T(P(\vartheta^{-1}(\lambda)f), \mathbf{1}) \\
&= T(\lambda P(f), \mathbf{1}) \\
&= \lambda T(P(f), \mathbf{1}) \\
&= \lambda T(f, |f|) \\
&= \lambda T^\bullet(f)
\end{aligned}$$

bulunur. O halde $T^\bullet|_{E_u^\bullet}$ dönüşümü lineerdir. $f \in C(X)^+$ ve $g \in C(X)$ için $f \leq g$ iken $(f, |f|) \leq (g, |g|)$ dir. T sıra sınırlı olduğundan $|T^\bullet(f)| = |T(f, |f|)| \leq h$ olacak şekilde en az bir $h \in C(X)$ vardır. Buradan $T^\bullet|_{E_u^\bullet}$ dönüşümü sıra sınırlıdır.

$T^\bullet(f) = T(f, |f|) = T(f|f|, \mathbf{1}) = T(P(f), \mathbf{1})$ eşitliğinden $T(f, g) = T(fg, \mathbf{1}) = T(PJ(f, g), \mathbf{1}) = T^\bullet J(f, g)$ dır.

Bütün bunlardan $J: E \times E \rightarrow E^\bullet$ dönüşümü örten ortosimetrik bimorfizmdir ve herhangi Arşimedsel Riesz uzayı F için $T: E \times E \rightarrow F$ dönüşümü ortosimetrik, sıra sınırlı, bi-linear dönüşüm ise $T^\bullet J = T$ olacak şekilde $T^\bullet: E^\bullet \rightarrow F$ sıra sınırlı, lineer dönüşümü vardır.

Ayrıca T dönüşümünün (bi-pozitif) bi-örgü homomorfizmi olması için gerekli ve yeterli koşul $T^\bullet$ dönüşümünün (pozitif) örgü homomorfizmi olmasıdır.

($\Rightarrow$) Öncelikle T bi-örgü homomorfizmi olsun. $x \in E^\bullet$ için $T^\bullet(|x|) = T(|x|, |x|) = |T(x, |x|)| = |T^\bullet(x)|$ olmasından $T^\bullet$ örgü homomorfizmdir.

T bi-pozitif olsun. $0 \leq x \in E^\bullet$ için $T^\bullet(x) = T(x, |x|) \geq 0$ olmasından $T^\bullet$ pozitifdir.

($\Leftarrow$) $T^\bullet$ örgü homomorfizm olsun. $T^\bullet J = T$ eşitliğinde J dönüşümünün bi-örgü homomorfizmi olmasından T 'nin bi-örgü homomorfizmi olduğu açıktır.

Şimdi $T^\bullet$ pozitif olsun. $T^\bullet J = T$ eşitliğinde J dönüşümünün bi-örgü homomorfizmi olmasından T 'nin bi-pozitif olduğu açıktır.

(ii) (i) den ve Tanım 5.6 dan $(E^\bullet, J)$, E 'nin karesidir.

5.11. Teorem

E düzgün tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda

$$\iota: E \rightarrow E^\odot$$

$$x \rightarrow \iota(x) = x \odot |x|$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm dik toplamsal sıra izomorfizmdir. Ayrıca F herhangi bir Riesz uzayı olmak üzere $T: E \times E \rightarrow F$ sıra sınırlı ortosimetrik bi-lineer dönüşümü için $\Phi_T: E^\odot \rightarrow F$ sıra sınırlı lineer operatörü $T = \Phi_T \circ \odot$ olacak biçimde vardır ve her $x \in E$ için $(\Phi_T \circ \odot)(x) = T(x, |x|)$ dir.

İspat

Teorem 5.10 da olduğu gibi E^* 'de toplama $\tilde{+}$ ve skalarla çarpma $\bullet$ her $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için şu şekilde tanımlansın;

$$x \tilde{+} y = H(x, y) \quad \text{ve} \quad \lambda \bullet x = \vartheta^{-1}(\lambda)x$$

Bu işlemlerle ve verilen sıralamayla $E^* = (E, \tilde{+}, \bullet, \leq)$ olsun.

Bu durumda $J: E \times E \rightarrow E^*$ örten ortosimetrik bimorfizmi vardır ve (E^*, J) , E 'nin karesidir. Herhangi bir Riesz uzayı için E 'nin karesi izomorfizm altında tek olduğundan $j \circ J = \odot$ olacak biçimde $j: E^* \rightarrow E^\odot$ örgü izomorfizmi vardır.

$$h: E \rightarrow E^\odot$$

$$x \rightarrow h(x) = j(x)$$

şeklindeki dönüşüm anlamlı ve iyi tanımlıdır. Ayrıca j dönüşümünün örgü izomorfizmi olmasından h sıra izomorfizmdir ve $x \perp y$ olması durumunda $x \tilde{+} y = x + y$ olmasından $h(x + y) = h(x \tilde{+} y) = j(x \tilde{+} y) = j(x) + j(y) = h(x) + h(y)$ dir. Yani h dik toplamsaldır.

Teorem 5.10 ispatında gösterilen $P: C(X) \rightarrow C(X)$, $f \rightarrow P(f) = \vartheta \circ f = f|f|$ sıra izomorfizmi için $J(f, g) = P^{-1}(fg)$ eşitliğinden $J(x, |x|) = x$ dir. $j \circ J = \odot$ olmasından $x \odot |x| = j(J(x, |x|)) = j(x) = h(x)$ dir. Böylece $h = \iota$ dönüşümü dik toplamsal sıra izomorfizmdir.

Şimdi herhangi F Riesz uzayı için $T: E \times E \rightarrow F$ sıra sınırlı ortosimetrik bi-lineer dönüşüm olsun. Teorem 5.10' dan $T^\bullet: E^\bullet \rightarrow F$, $T^\bullet(x) = T(x, |x|)$ şeklinde tanımlı ve $T = T^\bullet \circ J$ olacak biçimde sıra sınırlı lineer dönüşümü vardır ve tektir. $j \circ J = \odot$ ve j örgü izomorfizmi olduğundan $J = j^{-1} \circ \odot$ olur. Buradan $T = T^\bullet \circ j^{-1} \circ \odot$ olur. $\Phi_T = T^\bullet \circ j^{-1}$ olsun. Bu dönüşümün sıra sınırlı olduğu j dönüşümünün örgü izomorfizmi olmasından ve $T^\bullet$ dönüşümünün sıra sınırlı olmasından kolayca görülür. Ayrıca $x, y \in E^\odot$ ve $\lambda \in R$ için

$$\begin{aligned}\Phi_T(x + y) &= T^\bullet(j^{-1}(x + y)) \\ &= T^\bullet(j^{-1}(x) \tilde{+} j^{-1}(y)) \\ &= T^\bullet(j^{-1}(x)) + T^\bullet(j^{-1}(y)) \\ &= \Phi_T(x) + \Phi_T(y)\end{aligned}$$

$$\Phi_T(\lambda x) = T^\bullet(j^{-1}(\lambda x)) = T^\bullet(\lambda \bullet j^{-1}(x)) = \lambda T^\bullet(j^{-1}(x)) = \lambda \Phi_T(x)$$

olduğundan Φ_T lineerdir. Üstelik $T^\bullet$ nın tek olmasından Φ_T tektir.

5.12. Sonuç

E Dedekind tam (σ -Dedekind tam) ise karesi de Dedekind tam (σ -Dedekind tam) dır.

İspat

E Dedekind tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda düzgün tamdır. Riesz uzaylarının kareleri izomorfizm altında tek olduğundan E Riesz uzayının karesi olarak Teorem 5.10 da yapılandırılan $E^\bullet = (E, \tilde{+}, \bullet, \leq)$ alınabilir. E ile $E^\bullet$ arasında sıra izomorfizm olduğu yine aynı teoremin ispatında gösterilmiştir. Bu durumda bir $\varphi: E \rightarrow E^\bullet$ sıra izomorfizmi vardır. $(x_\alpha) \subseteq E^\bullet$ ve $0 \leq x_\alpha \leq x$ olacak şekilde bir net olsun. φ ile φ^{-1} pozitif olduğundan $\varphi^{-1}(0) \leq \varphi^{-1}(x_\alpha) \leq \varphi^{-1}(x)$ olup $0 \leq \varphi^{-1}(x_\alpha) \leq$

$\varphi^{-1}(x)$ dir. $\varphi^{-1}(x_\alpha)$ E içinde net olup E Dedekind tam olduğundan bir $\sup_\alpha \{\varphi^{-1}(x_\alpha)\} = z \in E$ vardır. Buradan her α için $0 \leq \varphi^{-1}(x_\alpha) \leq z$ ve dolayısıyla $0 \leq \varphi(x_\alpha) \leq \varphi(z)$ dir. $\varphi(z)$, (x_α) için bir üst sınırdır. Şimdi başka bir üst sınır $y \in E^*$ olsun. Bu durumda her α için $0 \leq x_\alpha \leq y$ dir. Buradan $0 \leq \varphi^{-1}(x_\alpha) \leq \varphi^{-1}(y)$ olup $\sup_\alpha \{\varphi^{-1}(x_\alpha)\} = z$ olduğundan $z \leq \varphi^{-1}(y)$ dir. $\varphi(z) \leq y$ den $\sup_\alpha \{x_\alpha\} = \varphi(z)$ dir. Sonuç olarak E^* Dedekind tamdır.

Benzer şekilde E σ -Dedekind tam ise karesinin σ -Dedekind tam olduğu kolayca görülür.

5.13. Sonuç

E düzgün tam ise karesi de düzgün tamdır.

İspat

E düzgün tam Riesz uzayı olsun. Riesz uzaylarının kareleri izomorfizm altında tek olduğundan, E' nin karesi olarak Teorem 5.10'da yapılandırılan E^* alınabilir. E ile E^* arasında sıra izomorfizm olduğu yine aynı teoremin ispatında gösterilmiştir. Bu durumda bir $\varphi: E \rightarrow E^*$ sıra izomorfizmi vardır. $(x_n) \subseteq E^*$ Cauchy dizisi ve $x_n \xrightarrow{r.u.} x$ olsun. $\varphi^{-1}(x_n)$ de E' de Cauchy dizisidir. E düzgün tam olduğundan $\varphi^{-1}(x_n) \xrightarrow{r.u.} y$ olacak şekilde $y \in E$ vardır. φ sıra izomorfizm olduğundan $x_n \xrightarrow{r.u.} \varphi(y)$ dir. Limitin tekliğinden $\varphi(y) = x$ olup $x \in E^*$ dir. Dolayısıyla E^* düzgün tamdır.

5.14. Sonuç

E düzgün tam Riesz uzayı olsun. Riesz uzaylarının kareleri izomorfizm altında tek olduğundan, E' nin karesi olarak Teorem 5.10'da yapılandırılan E^* alınabilir. τ , E' de herhangi yerel katı vektör uzayı topolojisi olmak üzere, bu topoloji E^* üzerinde lacol katı vektör uzayı topolojisi tanımlar ve $E \rightarrow E^*$ özdeş dönüşümü topolojik izomorfizmdir.

İspat

x_α , $E^\bullet$ içinde net ve $x \in E^\bullet$ için $E^\bullet$ üzerinde yakınsama şu şekilde olsun: E 'de $H(x_\alpha, -x) \rightarrow 0$ ise $E^\bullet$ 'da $x_\alpha \rightarrow x$. Bu yakınsama $E^\bullet$ üzerinde yerel katı vektör uzayı topolojisi tanımlar. Ayrıca $E^\bullet$ üzerinde tanımlanan toplamadan her $y, z \in E$ için $(H(y, z), -z) = y$ dir. $E^\bullet$ içinde $x_\alpha \rightarrow x$ için tanımlanan yakınsamadan E 'de $H(x_\alpha, -x) \rightarrow 0$ dir. Teorem 3.26'dan $H(H(x_\alpha, -x), x) \rightarrow H(0, x) = x$ dir. Buradan E 'de $x_\alpha \rightarrow x$ dir. Dolayısıyla $E^\bullet$ ve E topolojik izomorfiktir.

E ve F Riesz uzayları olsun.

$$BL_b^o(E; F) = \{T \mid T: E \times E \rightarrow F \text{ ortosimetrik, sıra sınırlı, bi-lineer operatör}\}$$

olsun.

5.15. Teorem

(i) E düzgün tam Riesz uzayı ve F herhangi Riesz uzayı olmak üzere Teorem 5.11 den $T \rightarrow \Phi_T$ dönüşümü $BL_b^o(E; F)$ ve $L_b(E^\odot, F)$ sıralı vektör uzayları arasında izomorfizm tanımlar.

(ii) $\odot: E \times E \rightarrow E^\odot$ bi-örgü homomorfizmi sıra süreklidir.

İspat

(i)

$$\varphi: BL_b^o(E; F) \rightarrow L_b(E^\odot, F)$$

$$T \rightarrow \varphi(T) = \Phi_T$$

Dönüşümü her $T \in BL_b^0(E; F)$ için Teorem 5.11 den $T = \Phi_T \circ \odot$ olacak şekilde $\Phi_T: E^\odot \rightarrow F$ sıra sınırlı lineer dönüşümü tek olarak var olduğundan anlamlı ve iyi tanımlıdır.

$T_1, T_2 \in BL_b^0(E; F)$ ve $T_1 \neq T_2$ olsun. $T_1 = \Phi_{T_1} \circ \odot$ ve $T_2 = \Phi_{T_2} \circ \odot$ olacak biçimde $\Phi_{T_1}, \Phi_{T_2} \in L_b(E^\odot, F)$ vardır. Buradan $\Phi_{T_1} \neq \Phi_{T_2}$ olur. Yani φ dönüşümü birebirdir.

Herhangi $\Phi_T \in L_b(E^\odot, F)$ ve $\odot: E \times E \rightarrow E^\odot$ dönüşümü için $T' = \Phi_T \odot$ olarak alınırsa T' anlamlı ve iyi tanımlıdır. Ayrıca Φ_T lineer ve $\odot$ dönüşümü bi-lineer olmasından T' bi-lineerdir. $x \in E$ ve $y \in E^+$ için $|x| \leq y$ olsun. $\odot$ bi-örgü homomorfizmi olduğundan herhangi $t \in E$ için $\odot(|x|, t) = |\odot(x, t)| \leq \odot(y, t)$ dir ve Φ_T sıra sınırlı olduğundan $|\Phi_T(\odot(x, t))| \leq z$ olacak biçimde $z \in F$ vardır. Buradan $|T'(x, t)| \leq z$ olacak biçimde $z \in F$ var olduğundan T' sıra sınırlıdır. $x, y \in E$ ve $x \wedge y = 0$ olsun. $\odot$ dönüşümü ortosimetrik olduğundan $T'(x, y) = \Phi_T(\odot(x, y)) = 0$ dir. Buradan T' ortosimetriktir. O halde her $\Phi_T \in L_b(E^\odot, F)$ için $\varphi(T') = \Phi_T$ olacak biçimde en az bir $T' \in BL_b^0(E; F)$ olduğundan φ dönüşümü örtendir.

Dolayısıyla φ dönüşümü $BL_b^0(E; F)$ ve $L_b(E^\odot, F)$ sıralı vektör uzayları arasında izomorfizm tanımlar.

(ii) $\odot: E \times E \rightarrow E^\odot$ bimorfizminin sıra sürekli olduğunu göstermek için aşağıda gösterilen eşitsizlikten faydalanılır.

$s, t \in \mathbb{R}$ olmak üzere $J(s, t) = v^{-1}(st) = \sqrt{|st|} \operatorname{sgn}(st)$ fonksiyonunu daha önce tanımlamıştık.

$|s| \leq \max\{|s|, |t|\}$ ve $|t| \leq \max\{|s|, |t|\}$ eşitsizliklerinden $|st| \leq \max\{|s|^2, |t|^2\}$ dir ve buradan $|J(s, t)| = \sqrt{|st|} \leq \max\{|s|, |t|\}$ olur.

Her $x, y \in E$ için $J(x, y)$ E' de olduğundan $|J(x, y)| \leq |x| \vee |y|$ dir. Buradan teorem 5.11 deki j dönüşümü örgü izomorfizmi olduğundan

$$j(|j(x, y)|) \leq j(|x| \vee |y|) = j(|x|) \vee j(|y|) = \iota(|x|) \vee \iota(|y|)$$

olur. Dolayısıyla $|x \odot y| \leq \iota(|x|) \vee \iota(|y|)$ dır.

E' 'de $(x_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ ve $(y_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ olsun. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \downarrow 0$ ve $s_n \downarrow 0$ netleri $|x_n| \leq p_n$ ve $|y_n| \leq s_n$ olacak biçimde vardır. Bulunan eşitsizlikten

$$|\odot (x_\alpha, y_\alpha) - \odot (0, 0)| = |x_\alpha \odot y_\alpha| \leq \iota(|x_\alpha|) \vee \iota(|y_\alpha|) \leq \iota(|p_n|) \vee \iota(|s_n|)$$

olur. $\iota(|p_n|) \vee \iota(|s_n|) \downarrow 0$ olduğundan $\odot (x_\alpha, y_\alpha) \xrightarrow{o} 0$ bulunur. Dolayısıyla bu dönüşüm sıra süreklidir.

5.16. Teorem

F düzgün tam Riesz uzayı olsun. O zaman karesi $(F^o)^\odot = F$ olacak biçimde bir F^o düzgün tam Riesz uzayı vardır ve tektir.

İspat

F üzerinde toplama $\dot{+}$ ve skalarla çarpma $*$ her $x, y \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için şu şekilde tanımlansın

$$x \dot{+} y = H'(x, y) \quad \text{ve} \quad \lambda * x = \vartheta(\lambda)x$$

Bu işlemlerle ve verilen sıralamayla $F^o = (F, \dot{+}, *, \leq)$ olarak alınırsa F^o düzgün tam Riesz uzayı ve $(F^o)^\bullet = F$ olur.

Şimdi herhangi E Riesz uzayı için $h: E^\bullet \rightarrow F$ örgü izomorfizmi olsun. Tanım 3.9'dan $h(H'(x, y)) = H'(h(x), h(y))$ dir ve buradan $h(x \dot{+} y) = h(x) \dot{+} h(y)$ olur. Ayrıca $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere $h(\lambda \bullet x) = \lambda h(x) = h(\lambda x) = \lambda * h(x)$ dir. Bu durumda h , E ile F^o arasında örgü izomorfizmidir. Dolayısıyla F^o izomorfizm altında tektir.

5.17. Teorem

$$\mathcal{L}_{uc}(E) = \{D \subseteq E: D \text{ göreceli düzgün tam alt lattice}\}$$

olmak üzere E düzgün tam Riesz uzayı olsun. Herhangi $L \in \mathcal{L}_{uc}(E)$ için $E^\odot$ dan gelen sıralamayla $\imath(L) = \{x \odot |x|: x \in L\}$ kümesini $\hat{\imath}(L)$ ile tanımlayalım. O halde aşağıdaki ifadeler vardır.

- (1) $L \rightarrow \hat{\imath}(L)$ dönüşümü $\mathcal{L}_{uc}(E)$ ile $\mathcal{L}_{uc}(E^\odot)$ arasında sıra izomorfizmi tanımlar.
- (2) $L \in \mathcal{L}_{uc}(E)$ nin E 'de sıra (yoğun) ideal olması için gerek ve yeter koşul $\hat{\imath}(L)$ nin $E^\odot$ içinde sıra (yoğun) ideal olmasıdır.
- (3) $\hat{\imath}$ dönüşümü $\mathfrak{B}(E)$ ile $\mathfrak{B}(E^\odot)$ arasında örten Boolean izomorfizmi tanımlar.
- (4) $E^\odot$ da $\hat{\imath}(L)$ projeksiyon bandı üzerine bir π band projeksiyonunun var olması için gerekli ve yeterli koşul E de L projeksiyon bandı üzerine bir π' band projeksiyonunun var olmasıdır ve bu durumda her $x, y \in E$ için $\pi(x \odot y) = (\pi'x) \odot y = x \odot (\pi'y) = (\pi'x) \odot (\pi'y)$ dir.
- (5) E nin projeksiyon özelliğine sahip olması için gerekli ve yeterli koşul $E^\odot$ nın da projeksiyon özelliğine sahip olmasıdır. Bu durumda $\pi \in \wp(E)$ için $\pi \rightarrow \pi'$ dönüşümü ile $\wp(E^\odot)$ ve $\wp(E)$ arasında örten Boolean izomorfizmi vardır ve her $x, y \in E$ için $\pi(x \odot y) = (\pi'x) \odot y = x \odot (\pi'y) = (\pi'x) \odot (\pi'y)$ dir.

İspat

Teorem 5.11 ve Teorem 5.9 dan $E^\bullet = E^\odot$ ve $\odot = J$ kabul edebiliriz. O halde $\imath$ dönüşümü yardımıyla her $L \in \mathcal{L}_{uc}(E)$ için $\hat{\imath}(L) = L^\bullet$ dir.

$$(1) \quad \hat{\imath}: \mathcal{L}_{uc}(E) \rightarrow \mathcal{L}_{uc}(E^\odot)$$

$$L \rightarrow \hat{\imath}(L) = \imath(L)$$

dönüşümü $\imath$ dönüşümü sıra izomorfizm olduğundan anlamlı, iyi tanımlı, birebirdir ve lattice operasyonlarını korur. Şimdi örten olduğunu gösterelim. $K \subseteq E^\odot$ düzgün tam alt lattice olsun. Teorem 6.16 dan K° , E de düzgün tam Riesz alt uzayıdır ve $(K^\circ)^\bullet = K$ dir. Bu durumda $\hat{\imath}(K^\circ) = K$ olacak şekilde $K^\circ \in \mathcal{L}_{uc}(E)$ vardır. O halde $\hat{\imath}$ örtendir.

(2)

($\Rightarrow$) $L \in \mathcal{L}_{uc}(E)$, E de sıra yoğun ve $0 < x \in E^\odot$ olsun.

$\imath$ sıra izomorfizm olduğundan $0 < \imath(y) = x$ olacak biçimde $0 < y \in E$ vardır. L , E de sıra yoğun olduğundan $0 < z \leq y$ olacak biçimde $z \in L$ vardır. Buradan $0 < \imath(z) \leq \imath(y) = x$ olup $\imath(z) \in L^\bullet = \hat{\imath}(L)$ dir.

Yani $\hat{\imath}(L)$, $E^\odot$ da sıra yoğundur.

($\Leftarrow$) Benzer biçimde gösterilir.

Yine benzer biçimde $L \in \mathcal{L}_{uc}(E)$, E de ideal olması için gerekli ve yeterli koşul $\hat{\imath}(L)$ nin $E^\odot$ de ideal olmasıdır.

(3) $\mathfrak{B}(E) \rightarrow \mathfrak{B}(E^\odot)$

$$B \rightarrow \hat{\imath}(B) = \imath(B)$$

$B \in \mathfrak{B}(E)$ olsun. Herhangi bir $\{x_\alpha\} \subseteq \hat{\imath}(B)$ olmak üzere bir $x \in E^\odot$ için $\{x_\alpha\} \xrightarrow{o} x$ olsun. $\{x_\alpha\} \subseteq \hat{\imath}(B)$ ve $x \in E^\odot$ olduğundan $\hat{\imath}(y_\alpha) = x_\alpha$ ve $\hat{\imath}(y) = x$ olacak şekilde $y_\alpha \in B$ ve $y \in E$ vardır. Teorem 5.11 de $\imath$ dönüşümü örten sıra izomorfizm olduğundan $y_\alpha \xrightarrow{o} y$ dir. B band olduğundan $y \in B$ dir. Dolayısıyla $\hat{\imath}(y) = x \in \hat{\imath}(B)$ olduğundan $\hat{\imath}(B)$, $\mathfrak{B}(E^\odot)$ de banddir. Öyleyse bu dönüşüm anlamlıdır.

İyi tanımlı, birebir ve örten olması ı dönüşümünün örten sıra izomorfizm olmasından kolaylıkla görülebilir. Lattice operasyonlarını koruduğunu gösterelim.

$B_1, B_2 \in \mathfrak{B}(E)$ için

$$B_1 \leq B_2 \Leftrightarrow B_1 \subseteq B_2$$

sıralamasıyla $\mathfrak{B}(E)$ Boole cebiridir ve $\inf(B_1, B_2) = B_1 \cap B_2$, $\sup(B_1, B_2) = (B_1 + B_2)^{dd}$ ve B_1 bandinin tamlayanı B_1' ile gösterilirse $B_1' = B_1^d$ dir ([14], Teorem 22.7).

$B_1 \cap B_2 \subseteq B_1$ ve $B_1 \cap B_2 \subseteq B_2$ ve ı sıra izomorfizm olduğundan $(B_1 \cap B_2)^* \subseteq B_1^*$ ve $(B_1 \cap B_2)^* \subseteq B_2^*$ dir. $(B_1 \cap B_2)^*$, B_1^* ve B_2^* için bir alt sınırdır. Başka bir alt sınır C^* için $C^* \subseteq (B_1 \cap B_2)^*$ olduğunu görmek kolaydır. Bu durumda $(B_1 \cap B_2)^* = B_1^* \cap B_2^*$ olur. Yani $\hat{\imath}(\inf(B_1, B_2)) = \inf(\hat{\imath}(B_1), \hat{\imath}(B_2))$ dir.

$B_1 \subseteq B_1 + B_2 \subseteq (B_1 + B_2)^{dd}$ ve $B_2 \subseteq B_1 + B_2 \subseteq (B_1 + B_2)^{dd}$ olmasından ve ı sıra izomorfizm olduğundan $B_1^* \subseteq ((B_1 + B_2)^{dd})^*$ ve $B_2^* \subseteq ((B_1 + B_2)^{dd})^*$ dir. $((B_1 + B_2)^{dd})^*$, B_1^* ve B_2^* için bir üst sınırdır. Başka bir üst sınır D^* olsun. $B_1^* \subseteq D^*$ ve $B_2^* \subseteq D^*$ olacağından $B_1 \subseteq D$ ve $B_2 \subseteq D$ olur. D band olduğundan $(B_1 + B_2)^{dd} \subseteq D^{dd} = D$ olur. Buradan $((B_1 + B_2)^{dd})^* \subseteq D^*$ dir. Bu durumda $((B_1 + B_2)^{dd})^* = (B_1^* + B_2^*)^{dd}$ olur. Yani $\hat{\imath}(\sup(B_1, B_2)) = \sup(\hat{\imath}(B_1), \hat{\imath}(B_2))$ dir.

Şimdi bir $B \in \mathfrak{B}(E)$ için $\hat{\imath}(B') = [\hat{\imath}(B)]'$ yani $(B^d)^* = (B^*)^d$ olduğunu gösterelim. $\hat{\imath}(B) = B^*$ için örgü operasyonlarını korunduğundan $B^* \cap (B^d)^* = (B \cap B^d)^* = \{0\}^*$ ve $(B^* + (B^d)^*)^{dd} = ((B + B^d)^{dd})^* = E^*$ dir (Teorem 2.2.16 dan $B + B^d$, E içinde sıra yoğun olduğundan $(B + B^d)^{dd} = E$ dir). Buradan $[\hat{\imath}(B)]' = (B^d)^* = \hat{\imath}(B')$ olur.

O halde bu dönüşüm Boole izomorfizmidir.

(4) $\oplus$ ve $\tilde{\oplus}$, $+$ ve $\tilde{+}$ işlemlerine göre direkt toplamalar olsun. (2) den ve $x \perp y$ iken $x + y = x \tilde{+} y$ olmasından $L \subseteq E$ projeksiyon bandı için $L \oplus L^d = E$ ve $L^\bullet \tilde{\oplus} (L^\bullet)^d = E^\bullet$ dır. Şimdi $E^\bullet$ de $L^\bullet$ üzerine band projeksiyon π ve E de L üzerine band projeksiyon π' olsun. π ve π' lattice homomorfizm olduğundan ve Tanım 3.9'dan her $x, y \in E$ ve $J \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$ için $\pi(J(x, y)) = J(\pi'x, \pi'y)$ dir.

$$x, y \in E \Rightarrow x = x_1 + x_2 \text{ ve } y = y_1 + y_2, \quad x_1, y_1 \in L, \quad x_2, y_2 \in L^d$$

Teorem 5.10'dan $J: E \times E \rightarrow E^\bullet$ dönüşümü ortosimetrik bimorfizm olduğundan

$$J(\pi'x, \pi'y) = J(x_1, y_1) = J(x_1, y) = J(\pi'x, y)$$

$$J(\pi'x, \pi'y) = J(x_1, y_1) = J(x, y_1) = J(x, \pi'y)$$

Bu eşitliklerden $\pi(J(x, y)) = \pi(x \odot y) = (\pi'x) \odot y = x \odot (\pi'y) = (\pi'x) \odot (\pi'y)$ dir.

(5) (4) den aşıkardır.

5.18. Teorem

E düzgün tam Riesz uzayı olsun. Bu durumda $Z(E)$ ile $Z(E^\odot)$ arasında örgü izomorfizmi vardır.

İspat

Toerem 5.17(5) den $h: \wp(E) \rightarrow \wp(E^\odot)$ örten Boole izomorfizmi vardır. $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}^+$ ve $P_1, P_2, \dots, P_n \in \wp(E)$ için $h(\sum_{i=1}^n c_i P_i) = \sum_{i=1}^n c_i h(P_i)$ olduğunu görmek kolaydır. $0 \leq \pi \in Z(E)$ için Freudenthal's Spectral Teoreminden ([1] Teorem 6.8.) $\pi_n = \sum_{i=1}^m c_i P_i$, $c_i \in \mathbb{R}^+$, $P_i \in \wp(E)$ ve $\pi_n \xrightarrow{I-r.u.} \pi$ olacak şekilde $(\pi_n) \subseteq Z(E)$ dizisi vardır. Buradan

$$H: Z(E)_+ \rightarrow Z(E^\odot)_+$$

$$\pi \rightarrow H(\pi) = \lim_n h(\pi_n)$$

dönüşümü tanımlanabilir. Her $0 \leq \pi \in Z(E)$ için $\pi_n = \sum_{i=1}^m c_i P_i$, $c_i \in \mathbb{R}^+$, $P_i \in \mathcal{P}(E)$ ve $\pi_n \xrightarrow{I-r.u.} \pi$ olacak şekilde $(\pi_n) \subseteq Z(E)$ dizisi vardır. $(\pi_n) \subseteq Z(E)$ içinde yakınsak bir dizi olduğundan Cauchy dizisidir ve $h(\pi_n) = \sum_{i=1}^m c_i h(P_i)$ de $Z(E^\odot)$ içinde Cauchy dizisidir. Sonuç 5.13 den $E^\odot$ düzgün tamdır. Bu durumda $Z(E^\odot)$ düzgün tam olduğundan $\lim_n h(\pi_n)$ I -göreceli düzgün yakınsamayla vardır. O halde H dönüşümü anlamlıdır. $\pi_1, \pi_2 \in Z(E)_+$ için $\pi_1 = \pi_2$ olsun. $s_n = \sum_{i=1}^k c_i P_i$, $u_m = \sum_{j=1}^l c_j P_j$, $c_i, c_j \in \mathbb{R}^+$, $P_i, P_j \in \mathcal{P}(E)$ ve $s_n \xrightarrow{I-r.u.} \pi_1$, $u_m \xrightarrow{I-r.u.} \pi_2$ olacak şekilde $(s_n), (u_m) \subseteq Z(E)$ dizileri vardır. $\pi_1 = \pi_2$ olmasından $(s_n - u_m) \xrightarrow{I-r.u.} 0$ olduğu görülür. Bu durumda $h(s_n) - h(u_m) \xrightarrow{I-r.u.} 0$ olup $\lim_n h(s_n) = \lim_m h(u_m)$ dir. Yani $H(\pi_1) = H(\pi_2)$ olduğundan H dönüşümü iyi tanımlıdır. Ayrıca H dönüşümünün bir f -cebir homomorfizmi olduğunu görmek kolaydır.

Şimdi H dönüşümünün örten ve birebir olduğunu gösterelim. $\pi \in Z(E^\odot)_+$ olsun. $\pi_n = \sum_{i=1}^m c_i P_i$, $c_i \in \mathbb{R}^+$, $P_i \in \mathcal{P}(E^\odot)$ ve $\pi_n \xrightarrow{I-r.u.} \pi$ olacak şekilde $(\pi_n) \subseteq Z(E^\odot)$ dizisi vardır. $h^{-1}(\pi_n) \subseteq Z(E)$ Cauchy dizisidir. $Z(E)$ düzgün tam olduğundan $h^{-1}(\pi_n) \xrightarrow{I-r.u.} \pi'$ olacak biçimde $\pi' \in Z(E)_+$ vardır ve $h^{-1}(\pi_n) = \sum_{i=1}^m c_i h^{-1}(P_i)$ dir. Buradan $H(\pi') = \lim_n h(h^{-1}(\pi_n)) = \pi$ olur (I -göreceli düzgün yakınsama ile). O halde H dönüşümü örtendir. Bire bir olduğunu göstermek için $\pi_1, \pi_2 \in Z(E)_+$ için $H(\pi_1) = H(\pi_2)$ iken $\pi_1 = \pi_2$ olduğunu gösterelim. $s_n = \sum_{i=1}^k c_i P_i$, $u_m = \sum_{j=1}^l c_j P_j$, $c_i, c_j \in \mathbb{R}^+$, $P_i, P_j \in \mathcal{P}(E)$ ve $s_n \xrightarrow{I-r.u.} \pi_1$, $u_m \xrightarrow{I-r.u.} \pi_2$ olacak şekilde $(s_n), (u_m) \subseteq Z(E)$ dizileri vardır. $H(\pi_1) = H(\pi_2)$ olduğundan I -göreceli düzgün yakınsamayla $\lim_n h(s_n) = \lim_m h(u_m)$ olup $(h(s_n) - h(u_m)) \xrightarrow{I-r.u.} 0$ dir. Buradan $h^{-1}(h(s_n) - h(u_m)) = (s_n - u_m) \xrightarrow{I-r.u.} 0$ dir. Bu durumda $\lim_n s_n = \lim_m u_m$ olduğundan $\pi_1 = \pi_2$ dir.

Sonuç olarak H dönüşümü f –cebir izomorfizmidir. Her f –cebir izomorfizmi örgü izomorfizmi olduğundan H dönüşümü bir örgü izomorfizmidir. Herhangi $\pi \in Z(E)$ için $\pi = \pi^+ - \pi^-$ olarak yazılabileceğinden

$$\hat{H}: Z(E) \rightarrow Z(E^\odot)$$

$$\pi \rightarrow \hat{H}(\pi) = H(\pi^+) - H(\pi^-)$$

olarak tanımlanan $\hat{H}$ dönüşümü istenileni sağlar.

6. SONUÇ

Bu çalışmada Riesz uzaylarının kareleri üzerine çalışılmıştır. Riesz uzaylarının karelerinin varlığı ve bir Riesz uzayının karesi ile kendisi arasındaki örgü operasyonlarına bağlı ilişki incelenmiştir. Bir Riesz uzayının karesi ve kendisi üzerindeki projeksiyonlar karşılaştırılarak bunların ideal merkezleri arasında örgü izomorfizmi elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., "Positive Operators", *Academic Press*, Orlando, 1-44, 82, 124, 139, 194 (1985).
2. Bernau, S.J., Huijsmans, C.B., "The Schwarz Inequality in Archimedean f -algebras", *Indag. Math.*, 7: 137-148 (1996).
3. Buskes, G., A. van Rooij, "Almost f -algebras: Commutativity and Cauchy-Schwarz Inequality, in Three Papers on Riesz Spaces and Almost f -algebras", *Positivity*, 4: 227-231 (2000)
4. Buskes, G., A. van Rooij, "Small Riesz Spaces", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 105: 523-536 (1989)
5. Buskes, G., A. van Rooij, Squares of Riesz Spaces, *Rocky M. J. Math.*, 31(1): 45-56 (2001).
6. Buskes, G., Pagter, B. de, "Functional Calculus on Riesz Spaces", *Indag. Math. (N.S.)*, 2: 423-436 (1991)
7. Conway, John B., "A Course in Functional Analysis", *Springer-Verlag*, 141 (1990)
8. Fremlin, D.H., "Tensor Products of Archimedean Vector Lattices", *Amer. J. Math.*, 94: 778-798 (1972).
9. Krivine, J.L., Théorèmes de Factorisation Dans Les Espaces Réticulés, *Seminaire Maurey-Schwartz*, Exposé 22-23, (1973-74).
10. Kusraev, Anatoly G., A Radon-Nikodým Type Theorem for Orthosymmetric Bilinear Operators, *Positivity*, 14(2): 225-238 (2008)
11. Lozanovsky, G.Ya., On Topologically Reflexive KB-Spaces, *Dokl. Acad. Nauk Ukrain. SSR*, 158: 516-519 (1964).
12. Scheffold, E., "FF-Banachverbandsalgebren", *Math. Z.*, 177: 193-205 (1981)
13. Szulga, J., (p,r) -convex functions on vector lattices, *Proc. Edinburg Math. Soc. (2)*, 37: 207-226 (1994).
14. Zaanen, A.C., "Riesz Spaces I", *North-Holland Publ. Co.*, Amsterdam, 5, 98, 102, 117, 118, 427 (1971).
15. Zaanen, A.C., "Riesz Spaces II", *North-Holland Publ. Co.*, Amsterdam, 667, 693 (1983).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : BİLİCİ, Fatma

Uyruğu : T.C.

Doğum tarihi ve yeri : 10.08.1984 Ankara

Medeni hali : Bekar

e-mail : fatma.bilici@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniv./Matematik Bölümü	2008
Lise	Alaşehir Lisesi	2001

Yabancı Dil

İngilizce