

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ



RİBBON ÇATIYA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

Baran ANIL

Yüksek Lisans Tezi

MATEMATİK ANABİLİM DALI

OCAK, 2021

T.C.
FIRAT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

RİBBON ÇATIYA GÖRE MANYETİK EĞRİLER

Tez Yazarı
Baran ANIL

Danışman
Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU

OCAK, 2021
ELAZIĞ

T.C.
FIRATÜNİVERSİTESİ
FENBİLİMLERİENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Başlığı: Ribbon Çatıya Göre Manyetik Eğriler
Yazarı: Baran ANIL
İlk Teslim Tarihi: 12.1.2021
Savunma Tarihi: 29.1.2021

TEZ ONAYI

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına göre hazırlanan bu tez aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından değerlendirilmiş ve akademik dinleyicilere açık yapılan savunma sonucunda OYBİRLİĞİ ile kabul edilmiştir.

Danışman:	Doç. Dr. Mustafa YENEROĞLU Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	<i>İmza</i> Onayladım
Başkan:	Prof. Dr. Vedat ASİL Fırat Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım
Üye:	Prof. Dr. Talat KÖRPİNAR Muş Üniversitesi, Fen Fakültesi	Onayladım

Bu tez, Enstitü Yönetim Kurulunun/...../20..... tarihli toplantısında tescillenmiştir.

İmza
Doç. Dr. Kürşat Esat ALYAMAÇ
Enstitü Müdürü

BEYAN

Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım “Ribbon Çatıya Göre Manyetik Eğriler”yüksek lisans tezimin içindeki bütün bilgilerin doğru olduğunu, bilgilerin üretilmesi ve sunulmasında bilimsel etik kurallarına uygun davrandığımı, kullandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi, maddi ve manevi desteği olan tüm kurum/kuruluş ve kişileri belirttiğimi, burada sunduğum veri ve bilgileri unvan almak amacıyla daha önce hiçbir şekilde kullanmadığımı beyan ederim.

29.01.2021

Baran ANIL



ÖNSÖZ

Manyetik eğriler diferansiyel geometri ve fizik gibi bilimsel alanlarında geniş bir çalışma olanağı sunmaktadır. Özellikle farklı çatılara göre bu eğrileri oluşturup bunlarla ilgili karakterizasyonlar yapmak mümkündür. Bu çatılarda en bilineni Frenet çatısıdır. Bu çatının tek dezavantajı eğrinin üçüncü mertebeye kadar türevin sürekli olmasıdır. Bundan dolayı yeni çatılara ihtiyaç duyulmuştur. Ribbon çatısı, eğrinin ikinci türevinin sıfır olması halinde bile çalışabilen bir çatıdır.

Bu çalışmanın hazırlanmasında her türlü yardımını esirgemeyen değerli hocam Doç.Dr. Mustafa YENEROĞLU'na ve desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Vedat ASİL'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu günlere gelmemde büyük pay sahibi olan aileme üzerimdeki emeklerinden dolayı saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Baran ANIL

ELAZIĞ, 2021

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖNSÖZ.....	iv
İÇİNDEKİLER	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
ŞEKİLLER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	3
3. MANYETİK EĞRİLER.....	9
3.1. e–Manyetik Eğriler	9
3.2. f– Manyetik Eğriler	13
3.3. g– Manyetik Eğriler	21
4. SONUÇLAR	27
KAYNAKLAR.....	28
ÖZGEÇMİŞ	

ÖZET

Ribbon Çatıya Göre Manyetik Eğriler

Baran ANIL

Yüksek Lisans Tezi

FIRAT ÜNİVERSİTESİ
Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı
Ocak 2021, Sayfa ix+28

Öklid uzayında eğriler teorisinde farklı çatılara göre birçok çalışma yapılmıştır. Birçok bilim adamı bu teoride Frenet çatı, Bishop çatı, Adapted çatı, Ribbon çatı gibi çatıları çalışmıştır. Bu çatılar eğriler ile ilgili karakterizasyonlarda bize yardımcı olur.

Bu çalışmada, 3-boyutlu Öklid uzayında Ribbon çatıya göre manyetik eğriler incelenmiştir. Bu çatıya göre f-manyetik eğriler ve g-manyetik eğrileri verilmiştir

Anahtar Kelimeler: Frenet çatısı, Manyetik eğriler, Ribbon çatı, Öklid uzayı

ABSTRACT

Magnetic Curves According to the Ribbon Frame

Baran ANIL

Master's Thesis

FIRAT UNIVERSITY
Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics
January 2021, Page ix + 28

Many studies have been done according to different frames of the theory of curves in Euclidean Space. Many scientists have studied frames such as Frenet frame, Bishop frame, Adapted frame, Ribbon Frame in this theory. These frames help us in the characterization of curves.

In this study, magnetic curves according to Ribbon frame in 3-dimensional Euclidean space are investigated. f-magnetic curves and g-magnetic curves according to this frame are given.

Keywords: Frenet Frame, Magnetic curves, Ribbon frame, Euclidean Space

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 3.1. Parçacığın Φf Lorentz kuvveti etkisindeki hareketi	19
Şekil 3.2. Parçacığın Φf Lorentz kuvvet etkisi ile oluşan dairesel helis hareketi	20
Şekil 3.3. Parçacığın Φf Lorentz kuvvet etkisi ile oluşan slant helis hareketi	20



SİMGELER VE KISALTMALAR

$C^\infty(M, \mathbb{R})$	: Diferansiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
∇	: Levi-Civita koneksiyonu
$\Phi(X)$	: Lorentz kuvveti fonksiyonu
L	: Ribbon iç uzunluğu
$\mathbb{R}$	: Reel uzay
$\mathbb{E}$	: Öklid uzayı
$\chi(M)$	: Tanjant uzayı
s	: Birim hız parametresi
$R(s)$	: Ortogonal matris
$\theta(s)$	: Ribbon merkez eğrisi
$A(s)$	: Birim vektör alanı
α	: $\mathbb{E}^n$ uzayında birim hızlı eğri
$T(s)$	: Teğet vektör alanı
$N(s)$	: Normal vektör alanı
$B(s)$	: Binormal vektör alanı
τ	: 3-boyutlu Öklid uzayında burulma noktası
κ	: 3-boyutlu Öklid uzayında eğrilik fonksiyonu

1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında bir eğrinin teğet, asli normal ve Binormal vektörlerinden oluşan Frenet çatısı bu eğrinin diferansiyel geometrisinin çalışılabilmesi için en iyi bilinen ortonormal çatıdır. Bir uzay eğrisinin şekli, eğrinin eğrilik ve burulması ile tamamen belirlenir. Dolayısıyla bir eğrinin tamamen incelenebilmesi için en azından üçüncü mertebeye kadar sürekli türevlenebilmesi gerekir. Birçok araştırmacı eğrilerin özelliklerini karakterize etmek ve hesap yapmak için Frenet çatısını kullanır. Frenet çatısı sadece differansiyellenebilir eğriler için tanımlanabilir. Bunun için alternatif çatılara ihtiyaç duyulmuştur, bu yüzden Frenet çatısının eksik kaldığı yerde Ribbon çatıyı kullanmışlardır.

Manyetik eğriler diferansiyel geometri ve fizik gibi bilimsel alanlarda birçok uygulama alanına sahiptir ve bu bilimsel alanlarda çok büyük oranda önemli rol oynadığını söyleyebiliriz. Manyetik alanı, hareket halindeki elektrik yüküne etki eden Lorentz kuvveti ile tanımlayabiliriz. Yüklü olan bir parçacık **B** manyetik alanı içerisine girdiği zaman bu parçacığın Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenir ve bu etkiyle Lorentz kuvveti dediğimiz kuvvet açığa çıkar. Bu nedenle parçacık bu girmiş olduğu alanın içinde bir yörünge izlemeye başlar. Çizmiş olduğu yörünge manyetik eğriyi oluşturur. Başka bir deyişle manyetik eğriyi daha detaylı şöyle anlatabiliriz. Lorentz kuvveti, fizikte elektromanyetizmada; elektromanyetik alanların oluşturduğu noktasal yükler üzerindeki manyetik ve elektrik kuvvetlerin bileşkesidir. **B** (manyetik alan), **E**(elektrik alan), **v** (hız), **q** (yüklü parçacık) olsun ve Lorentz kuvvetine olan etkisini şöyle formülüze edebiliriz:

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Görüldüğü üzere Lorentz kuvveti manyetik alanın vektörü ile parçacığın hız vektörünün çarpımı bize bu iki vektörün birbirine dik olduğunu gösteriyor. Bu iki vektör manyetik alana paralel bir şekilde hareket etmiş olsaydı o zaman manyetik kuvvet sıfır olurdu. İki vektörün birbirine dik olması Lorentz kuvvetinin en büyük değeri aldığını gösterir. Bu iki vektör yani manyetik kuvvet ile parçacığın hızının birbirine dik olması parçacığın büyüklüğünü değil sadece ve sadece yönünü değiştirir. Bundan dolayıdır ki parçacığın manyetik alan içerisinde dairesel hareketler yaptığını gösterir[1].

v (hız) yüklü parçacığın, **B** (manyetik alan) girdiği zaman Serret-Frenet vektörleri bu alandan etkilenirler ve bu etki ile beraber Lorentz kuvveti dediğimiz kuvvet açığa çıkar. Kuvvetin açığa çıkmasıyla birlikte bir yörünge takip eder. Bu yörüngeye manyetik eğri adı verilir [2,3].

T (teğet vektör alanı), manyetik alana paralelse Lorentz kuvveti sıfır olur ve paralel bir şekilde ilerler. **T**, manyetik alana dik olması durumunda Lorentz kuvveti maksimum olur

vedairesel bir yörünge izler.Eğer $\mathbf{T}$, manyetik alanla sabit bir açı yapıyorsa Lorentz kuvvetinin etkisi parçacığa helis eğrisi şeklinde bir yörünge oluşturur [4].

Manyetik alan günümüzde birçok alanda karşımıza çıkmaktadır. Mesela; pusulanın çalışmasında, jeneratörlerde, elektrikle çalışan motorlarda vs. kullanım alanı vardır. Bu alanda 3-boyutlu Riemann manifoldlarında Barros ve Romeo manyetik alanların yörüngelerini ele almıştır ve incelemiştir [4,5]. Daha sonraki yıllarda bazı bilim insanları da manyetik alanları incelemiştir. Ling Xu ve David Mould parçacık üzerinde var olan yükün zaman içerisinde sürekli değişkenlik göstermesi, birden çok farklı eğrilere sahip çok karmaşık yörüngeler çizdiğini savundular ve buldukları yönteme manyetik eğrileri de katarak ağaç gövdesini, saç telini, yanan bir ateşin çizileceğini gösterdiler [6]. Körpınar ve Demirkol 3D Riemannian manifoldlarda manyetik eğrileri vermişlerdir [7]. Ayrıca Z.Özdemir, İ.Gök, Y.Yaylı and N.Ekmekci de yine manyetik eğrileri incelemiştir [8].

Ribbon teorisi DNA ve protein çalışmalarında uygulanabilir. G.S. Chirikjian DNA düğümünü bu teori yardımıyla incelemiştir [9]. Bohr ve Markvorsen bazı özel eğrileri ribbon çatıya göre vermişti [10].

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Tanım 2.1: Differansiyellenebilir bir manifold M olsun. O zaman aşağıdaki dönüşümü verilsin

$$g: \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

Bu dönüşümle birlikte aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa M üzerinde Riemann metriği veya diğer bir deyişle Riemann manifoldu denir [13].

i) g simetrik yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için $g(X, Y) = g(Y, X)$

ii) g bilineer yani $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$g(fX + hY, Z) = fg(X, Z) + hg(Y, Z)$$

iii) g pozitif tanımlı yani $\forall X \in \chi(M)$ için $g(X, X) \geq 0$

Tanım 2.2: M Riemann manifoldu ve ∇ , M üzerinde Riemann koneksiyonu olsun.

$\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ ve $\forall f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \nabla : \chi(M) \times \chi(M) \\ (X, Y) \rightarrow \nabla(X, Y) = \nabla_X Y \end{aligned}$$

ile tanımlı dönüşümü

$$i) \quad \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$$

$$ii) \quad \nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$$

$$iii) \quad \nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$$

$$iv) \quad \nabla_X(fY) = f \nabla_X Y + X(f)Y$$

yukarıda belirttiğimiz dört maddedeki özellikleri sağlıyorsa ∇ ya M üzerinde tanımlı afin koneksiyonu veya kovaryant türev denir[12].

Tanım 2.3: A boş olmayan bir küme ve V A üzerinde bir vektör uzayı V olsun.

$$f: A \times A \rightarrow V$$

$$(P, Q) \rightarrow f(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$$

Fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa A ya V ile birleşmiş afin uzayı denir [11].

$$i) \quad \forall P, Q, R \in A \text{ için } f(P, Q) + f(Q, R) = f(P, R)$$

$$ii) \quad \forall P \in A \text{ ve } \forall \alpha \in V \text{ olmak üzere } \alpha = \overrightarrow{PQ} \text{ olup, } Q \in A \text{ noktası vardır.}$$

Tanım 2.4: A reel bir afin uzay ve bu afin uzayla birleşen bir vektör uzayı da V olsun.

V vektör uzayında x ve y vektör uzaylarını göz önüne alalım.

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \text{ ve } y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in V \text{ olmak üzere}$$

$$\langle , \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rightarrow \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

dönüşümüne Öklid anlamında iç çarpım denir [12].

Tanım 2.5: $I, \mathbb{R}$ de açık bir alt küme ve $\mathbb{E}^n$ de n- boyutlu Öklid uzayı olsun.

$$\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$$

dönüşümü differansiyellenebilir ise α ya $\mathbb{E}^n$ de bir eğri ve $t \in I$ da α eğrisinin parametresi denir [12].

Tanım 2.6: (M, g) bir Riemann manifoldu ve M üzerinde bir afin koneksiyonu ∇ olsun. Aşağıda verilen koşulları sağlaması durumunda ∇ ya M nin Levi Civita Koneksiyonu denir [16].

$$\forall X, Y, Z \in \chi(M) \text{ olmak üzere;}$$

$$i \quad \nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

$$ii \quad \nabla g(X, Y) = g(\nabla_X Y, X) + g(X, \nabla_Y Y)$$

Tanım 2.7: (M, g) Riemann manifoldu ve ∇ da M üzerinde Levi Civita Koneksiyonu olsun.

$$X, Y, Z \in \chi(M)$$

$$R: \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

$$(X, Y, Z) \rightarrow R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

dönüşümüne Riemann eğrilik tensörü denir [14].

Tanım 2.8: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eğrisi verilsin. $\forall t \in I$ için $\alpha'(t) \neq 0$ ise α eğrisine regüler eğri denir [15].

Tanım 2.9: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha = \alpha(t)$ olmak üzere $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} = 1$ ise α eğrisine birim hızlı eğri denir [15]

Tanım 2.10: α her mertebeden diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Bu durumda $\Psi = \{\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(r)}\}$ sistemi lineer bağımsız ve $\forall \alpha^{(k)}, k > r$ için $\alpha^{(k)} \in \text{Sp}\{\Psi\}$ olmak üzere Ψ den elde edilen $\{V_1, V_2, V_3, \dots, V_r\}$ ortonormal sistemine, M eğrisinin Frenet r – ayaklısı alanı denir [12].

Tanım 2.11: $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi, $t \in I$ için

Teğet vektörün alanı:

$$T(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t)$$

Normal vektör alanı:

$$N(t) = \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|}$$

Binormal vektör alanı:

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\mathbf{a}'(t) \wedge \mathbf{a}''(t)}{\|\mathbf{a}'(t) \wedge \mathbf{a}''(t)\|}$$

Verilen bu vektörlerin oluşturduğu $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ vektör alanlarına Frenet 3 – ayaklısı denir [12].

Tanım 2.12 : $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisinin Frenet vektör alanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ olsun

$$\tau: I \rightarrow \mathbb{R}, \tau(s) = -\langle \mathbf{B}'(s), \mathbf{N}(s) \rangle$$

Fonksiyonuna α eğrisinin burulma fonksiyonu denir. $\tau(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki burulması denir [15].

Tanım 2.13: $\mathbb{R}^3$ uzayında birim hızlı $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eğrisi için,

$$\kappa: I \rightarrow \mathbb{R}, \kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

fonksiyonuna α eğrisinin eğrilik fonksiyonu denir. $\kappa(s)$ sayısına eğrinin $\alpha(s)$ noktasındaki eğriliği denir [15].

Tanım 2.14: s , yay parametresi olmak üzere, $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(s) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ eğrisinin Frenet formülleri aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{T}'(s) = \kappa(s) \mathbf{N}(s)$$

$$\mathbf{N}'(s) = -\kappa(s) \mathbf{T}(s) + \tau(s) \mathbf{B}(s)$$

$$\mathbf{B}'(s) = -\tau(s) \mathbf{N}(s)$$

ve

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{T} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{B}, \mathbf{B} \rangle = 1$$

$$\langle \mathbf{T}, \mathbf{N} \rangle = \langle \mathbf{T}, \mathbf{B} \rangle = \langle \mathbf{N}, \mathbf{B} \rangle = 0$$

$$\kappa = \kappa(s) = \|\mathbf{T}'(s)\|$$

$$\tau = \tau(s) = -\langle \mathbf{N}, \mathbf{B}' \rangle$$

$\kappa_1 = \kappa$ ve $\kappa_2 = \tau$ bundan sonra yerlerine bu simgeleri kullanabiliriz [12].

Tanım 2.15: $\gamma: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin Frenet elemanları $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}, \kappa, \tau\}$ olsun. $\bar{\mathbf{w}} = \tau \mathbf{T} + \kappa \mathbf{B}$ vektör alanına γ eğrisinin Darboux vektör alanı denir.

$$\mathbf{w}(s) = \frac{\bar{\mathbf{w}}}{\|\bar{\mathbf{w}}(s)\|} = \frac{1}{\sqrt{\kappa^2(s) + \tau^2(s)}} (\tau(s) \mathbf{T}(s) + \kappa(s) \mathbf{B}(s))$$

vektörüne γ eğrisinin Darboux göstergesi denir [12].

Tanım 2.16: $\mathbb{E}^{n+1}$ de M hiperyüzeyi üzerindeki bir eğri $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. $\alpha: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisinin her noktasındaki ivme vektörü M hiperyüzeyine ortogonal ise α eğrisine M yüzeyinde geodezik eğri denir [12].

Tanım 2.17: n boyutlu bir reel uzayda $(\mathbb{R}^n)\mathbf{u}$ vektörü ele alalım. Bu $\mathbf{u}$ vektörünün boyuna vektörün normu denir. $\|\mathbf{u}\|$ ile gösterilir [13].

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

Tanım 2.18: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ bir eğri ve $\forall s \in I$ yay parametresi olsun. $\forall s \in I$ olsun. $\alpha'(s)$ hız vektörü olarak tanımlayalım. Bir $\mathbf{U}$ sabit vektörünün hız vektörü ile sabit açı yapmak şartıyla oluşan çizgiler bütününe helis denir [15].

$$\|\mathbf{T}(s)\| = \|\vec{\mathbf{U}}\| = 1$$

$$\langle \mathbf{T}(s), \vec{\mathbf{U}} \rangle = \cos \theta$$

Tanım 2.19: $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^3$ regüler eğrisi verilmiş olsun. α eğrisinin $\mathbf{N}(s)$ birim vektörü bir $\mathbf{u}$ sabit vektörü ile sabit bir φ açısı yapıyorsa yani $\forall t \in I$ için $\langle \mathbf{N}(t), \mathbf{u} \rangle = \cos \varphi$ eşitliği sağlanıyorsa α eğrisine slant helis denir [17].

Tanım 2.20 (Ribbon Çatı): Ribbon ve merkez eğrisi $w(s)$ ve $\theta(s)$ gib iki sürekli fonksiyon tarafından oluşturulur. Burada $s \in [0, L]$ aralığında tanımlıdır ve L Ribbonun iç uzunluğudur. Bu aralıkta her s için $\theta(s) \in [0, \pi]$ olduğunu varsayalım. Böylece s için $\sin(\theta(s)) > 0$ dır. Ribbona teğet bir alan olan ve Ribbon merkez eğrisini $\theta(s)$ açı ile tanımlayacağız. Bu yapıda en önemli olan $\mathbf{A}(s)$ birim vektör alanıdır ve bu vektör alanı $\theta(s)$ açısına bağlı olarak tanımlanır. Böylece $\mathbf{A}(s)$ ve $w(s)$ birlikte

$$\mathbf{D}(s) = w(s)\mathbf{A}(s)$$

Darboux vektörünü oluşturur. Kabul edelim ki $\{\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)\}$ bir ortonormal vektör sistemi olsun. Bu sistemimin diferensiyeli aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{e}'(s) = w(s)\mathbf{A}(s) \times \mathbf{e}(s)$$

$$\mathbf{f}'(s) = w(s)\mathbf{A}(s) \times \mathbf{f}(s) \tag{2.1}$$

$$\mathbf{g}'(s) = w(s)\mathbf{A}(s) \times \mathbf{g}(s)$$

Burada $\mathbf{A}(s)$, $\mathbf{e}(s)$ ve $\mathbf{g}(s)$ cinsinden aşağıdaki gibi yazılır:

$$\mathbf{A}(s) = \cos(\theta(s))\mathbf{e}(s) + \sin(\theta(s))\mathbf{g}(s) \tag{2.2}$$

(2.1) ve (2.2) den

$$\mathbf{e}'(s) = w(s)\sin(\theta(s))\mathbf{f}(s)$$

$$\mathbf{f}'(s) = -w(s)\sin(\theta(s))\mathbf{e}(s) + w(s)\cos(\theta(s))\mathbf{g}(s) \tag{2.3}$$

$$\mathbf{g}'(s) = -w(s)\cos(\theta(s))\mathbf{f}(s)$$

yazılabilir. Burada s yay parametresidir.

$$R'(s) = R(s) \Xi(s)$$

Burada R(s) ortogonal matristir.

$$\Xi(s) = \begin{bmatrix} 0 & -w(s) \sin(\theta(s)) & 0 \\ w(s) \sin(\theta(s)) & 0 & -w(s) \cos(\theta(s)) \\ 0 & w(s) \cos(\theta(s)) & 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Ribbon merkez eğrisinin İki temel eğrilik $\kappa_1(s), \kappa_2(s)$ ve iki temel doğrultmanı $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ olmak üzere

$$\kappa_1(s) = \frac{-w(s)}{\sin(\theta(s))}, \quad \kappa_2(s) = 0$$

$$\mathbf{t}_1(s) = \sin(\theta(s))\mathbf{e}(s) - \cos(\theta(s))\mathbf{g}(s), \mathbf{t}_2(s) = \mathbf{A}(s) \quad (2.5)$$

Euler teoremine göre merkez çizgisinin normal eğriliği

$$\kappa_n(s) = \kappa_1(s)\sin^2(\theta(s)) + \kappa_2(s)\cos^2(\theta(s)) = -w(s)\sin(\theta(s)) \quad (2.6)$$

Olur. Merkez eğrisinin eğrilik ve torsiyonu sırasıyla aşağıdaki gibidir [10]:

$$\begin{aligned} \text{i} \quad \kappa(s) &= \|\mathbf{e}'(s)\| = |w(s)| \sin(\theta(s)) \\ \text{ii} \quad \tau(s) &= \langle (\mathbf{e}(s) \times \mathbf{e}'(s)), \mathbf{e}''(s) \rangle = w(s)\cos(\theta(s)) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Tanım 2.21 (Ribbon Çatı ile Frenet-Serret İlişkisi):

Ribbon çatı da $w(s) \neq 0$ olduğunda $\kappa(s)$ pozitif olur böylece bir tek $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$ Frenet-Serret çatısı ve aynı şekilde bir tek Darboux vektörü vardır öyle ki

$$\mathbf{D}(s) = \tau(s)\mathbf{T}(s) + \kappa(s)\mathbf{B}(s) = w(s)\mathbf{A}(s)$$

ve Frenet-Serret çatısı için bir ani dönme vektörüdür. Her zaman ribbon çatı da $\mathbf{T}(s) = \mathbf{e}(s)$ dir. Varsayalım ki $[0, L]$ aralığının bir $[a, b]$ alt aralıklarında ki tüm s için $w(s) \neq 0$ olsun. Sadece iki olasılık vardır [10]:

- i Eğer $\mathbf{N}(a) = \mathbf{f}(a)$ ise $\mathbf{N}(s) = \mathbf{f}(s), \mathbf{B}(s) = \mathbf{g}(s)$ ve $\mathbf{D}(s) = w(s)\mathbf{A}(s)$, $s \in [a, b]$
- ii $\mathbf{N}(a) = -\mathbf{f}(a)$ ise $\mathbf{N}(s) = -\mathbf{f}(s), \mathbf{B}(s) = -\mathbf{g}(s)$ ve $\mathbf{D}(s) = w(s)\mathbf{A}(s)$, $s \in [a, b]$

Tanım 2.22: M kesitsel eğriliği sabit olan uzay eğrisi $\gamma = \gamma(t): I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$ olsun. $\mathbf{T}(t)$, γ eğrisinin birim teğet vektör alanı ve hızı da $v(t) = \|\gamma'(t)\|$ olmak üzere eğrinin Frenet formülleri Tanım 2.14 de verilmiştir. M de γ nın varyasyonu

$$\Gamma: I \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

$$(t, z) \rightarrow \Gamma(t, z)$$

$$\Gamma(t,0)=\gamma(t)$$

olarak tanımlanır.

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial z} = \mathbf{V}(t)$$

şeklinde tanımlı vektör alanı da varyasyon vektör alanıdır. Eğer

$$\frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \tau^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \kappa^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

şartını sağlıyorsa $\gamma(s)$ boyunca $\mathbf{V}(s)$ vektör alanına Killing vektör alanı denir. Burada $v = \|\mathbf{V}(s)\|$, s de yay parametresidir [5].

Tanım 2.23: $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında $\alpha(s)$ eğrisinin birim teğet vektör alanı $\mathbf{T}=\alpha'(s)$ olsun. $\mathbf{T}$ vektör alanı belirli bir u vektörü ile sabit açı yapıyorsa $\alpha(s)$ eğrisine genel helis denir [12].

Tanım 2.24: $\gamma(s)$ nin silindir helis olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{\tau}{\kappa}\right)(s)$ nin sabit olmasıdır. Eğer τ ve κ sıfırdan farklı sabitler ise helise dairesel helis denir [17].

Teorem 2.25: M manifoldu üzerinde $\mathbf{X}$ ve $\mathbf{Y}$ vektör alanları olsun. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$L_{\mathbf{X}}f = \mathbf{X}(f)$$

$$(L_{\mathbf{X}}\mathbf{Y})P = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]_P$$

dir [14].

Teorem 2.26: $M(C)$, 3-boyutlu reel bir uzay ve

$$\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow M$$

$$s \rightarrow \gamma(s)$$

regüler bir eğri olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlaması halinde bir lineer sistem belirtir ve bu sistem bir killing vektör alanı ifade eder [5]:

- 1) $V(\vartheta^2) = \frac{\partial \vartheta^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \vartheta g(\nabla_e V, e)$
- 2) $V((w \sin \theta)^2) = \frac{\partial (w \sin \theta)^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = 2(w \sin \theta) g(\nabla_e^2 V, f) - 4(w \sin \theta)^2 g(\nabla_e V, e) + 2C(w \sin \theta) g(V, f)$
- 3) $V((w \cos \theta)^2) = \frac{\partial (w \cos \theta)^2}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{w \cos \theta}{w \sin \theta} g(\nabla_e^3 V, g) - \frac{w \cos \theta (w \sin \theta)'}{(w \sin \theta)^2} g(\nabla_e^2 V + CV, g) + \frac{w \cos \theta}{w \sin \theta} (C + w \sin \theta^2) g(\nabla_e V, g) - (w \cos \theta)^2 g(\nabla_e V, e)$

3. MANYETİK EĞRİLER

3.1. e—Manyetik Eğriler

Tanım 3.1 : Lorentz eşitliğini sağlayan γ eğrisine M üzerinde e – manyetik eğri denir.

$$\nabla_{\gamma'} \mathbf{e} = \Phi(\mathbf{e}) = \mathbf{V} \times \mathbf{e} \quad (3.1)$$

Bu tanımdan yararlanarak ribbon çatıya göre manyetik eğrileri göstereceğiz.

Önerme 3.2 : γ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu (M, g) üzerinde birim hızlı bir e -manyetik eğri ve bu eğrinin Serret-Frenet elemanları $\{e, f, g, w \sin \theta, w \cos \theta\}$ olsun. O halde ribbon çatıya göre matrisini şöyle gösteririz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \sin \theta & 0 \\ -w \sin \theta & 0 & w \cos \theta \\ 0 & -w \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e}' = w \sin \theta \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}' = -w \sin \theta \mathbf{e} + w \cos \theta \mathbf{g}$$

$$\mathbf{g}' = -w \cos \theta \mathbf{f}$$

Önerme 3.3 : γ eğrisi 3- boyutlu riemann manifoldu (M, g) üzerinde birim hızlı bir e -manyetik eğri ve bu eğrinin Serret-Frenet elemanlarının Lorentz kuvveti ile ilişkilendirirsek ribbon çatıya göre matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{e}) \\ \Phi(\mathbf{f}) \\ \Phi(\mathbf{g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \sin \theta & 0 \\ -w \sin \theta & 0 & \Omega_3 \\ 0 & -\Omega_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Burada Ω_3 belirli bir fonksiyondur.

İspat : γ eğrisi (M, g) 3- boyutlu riemann manifoldu üzerinde bir e —manyetik eğri ve bu eğrinin ribbon elemanları $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, w \sin \theta, w \cos \theta\}$ olsun.

$$\Phi(\mathbf{e}) = sp\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$$

olduğundan

$$\Phi(\mathbf{e}) = \beta \mathbf{e} + \omega \mathbf{f} + \delta \mathbf{g} \quad (3.3)$$

yazılabilir. Buradan $\Phi(\mathbf{e})$ nin her iki yanı $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{e} \rangle = \beta \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + \omega \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle + \delta \langle \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle$$

elde ederiz.

$$\langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{e} \rangle = \beta$$

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \beta$$

$$w \sin \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle = \beta$$

$$0 = \beta$$

bulunur. Bulduğumuz değer (3.3) de yerine yazılırsa

$$\Phi(\mathbf{e}) = \omega \mathbf{f} + \delta \mathbf{g} \quad (3.4)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.4) eşitliğinin her iki yanını $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{f} \rangle = \omega$$

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle = \omega$$

$$w \sin \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \omega$$

$$w \sin \theta = \omega$$

bulunur. Buradan bulduğumuz değer (3.4) de yerine yazılırsa.

$$\Phi(\mathbf{e}) = w \sin \theta \mathbf{f} + \delta \mathbf{g} \quad (3.5)$$

olur. Son olarak (3.5) eşitliği $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{g} \rangle = w \sin \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle + \delta \langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle$$

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{e}, \mathbf{g} \rangle = \delta$$

$$w \sin \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \delta$$

$$0 = \delta$$

bulunur. Böylece

$$\Phi(\mathbf{e}) = w \sin \theta \mathbf{f} \quad (3.6)$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\Phi(\mathbf{f}) = \beta \mathbf{e} + \omega \mathbf{f} + \delta \mathbf{g} \quad (3.7)$$

yazabiliriz. Buradan (3.7) eşitliğinin her iki yanını $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \Phi(\mathbf{f}), \mathbf{e} \rangle = \beta \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + \omega \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle + \delta \langle \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle$$

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle = \beta$$

elde ederiz. Buradan

$$-w \sin \theta \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \beta$$

$$-w \sin \theta = \beta$$

bulunur. Bulduğumuz değer yerine yazılırsa

$$\Phi(\mathbf{f}) = -w\sin\theta\mathbf{e} + \omega\mathbf{f} + \delta\mathbf{g}$$

elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{f})$ in her iki yanını $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle\Phi(\mathbf{f}),\mathbf{f}\rangle = -w\sin\theta\langle\mathbf{e},\mathbf{f}\rangle + \omega\langle\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle + \delta\langle\mathbf{g},\mathbf{f}\rangle$$

olur. Buradan

$$\langle\nabla_{\gamma'}\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle = \omega$$

$$-w\sin\theta\langle\mathbf{e},\mathbf{f}\rangle + w\cos\theta\langle\mathbf{g},\mathbf{f}\rangle = \omega$$

$$0 = \omega$$

elde edilir. Böylece

$$\Phi(\mathbf{f}) = -w\sin\theta\mathbf{e} + \delta\mathbf{g}$$

bulunur. Bu son eşitliğin her iki yanını $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutulur ise

$$\langle\Phi(\mathbf{f}),\mathbf{g}\rangle = -w\sin\theta\langle\mathbf{e},\mathbf{g}\rangle + \delta\langle\mathbf{g},\mathbf{g}\rangle$$

$$(\nabla_{\gamma'}\mathbf{f},\mathbf{g}) = \delta$$

elde ederiz. Buradan

$$-w\sin\theta\langle\mathbf{e},\mathbf{g}\rangle + w\cos\theta\langle\mathbf{g},\mathbf{g}\rangle = \delta$$

$$\Omega_3 = \delta$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi(\mathbf{f}) = -w\sin\theta\mathbf{e} + \Omega_3\mathbf{g} \quad (3.8)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\Phi(\mathbf{g}) = \beta\mathbf{e} + \omega\mathbf{f} + \delta\mathbf{g} \quad (3.9)$$

eşitliğini gözönüne alalım. Öncelikle eşitliğin her iki yanını $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutalım:

$$\langle\Phi(\mathbf{g}),\mathbf{e}\rangle = \beta\langle\mathbf{e},\mathbf{e}\rangle + \omega\langle\mathbf{f},\mathbf{e}\rangle + \delta\langle\mathbf{g},\mathbf{e}\rangle \text{ elde ederiz. Buradan}$$

$$(\Phi_{\gamma'}\mathbf{g},\mathbf{e}) = \beta$$

$$-w\cos\theta\langle\mathbf{f},\mathbf{e}\rangle = \beta$$

$$0 = \beta$$

olur. Bulduğumuz değeri (3.8) eşitliğinde yerine yazarsak

$$\Phi(\mathbf{g}) = \omega\mathbf{f} + \delta\mathbf{g}$$

elde edilir. Bu son eşitliğin her iki yanını $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\langle\Phi(\mathbf{g}),\mathbf{f}\rangle = \omega\langle\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle + \delta\langle\mathbf{g},\mathbf{f}\rangle$$

$$(\nabla_{\gamma'}\mathbf{g},\mathbf{f}) = \omega$$

$$-w\cos\theta\langle\mathbf{f},\mathbf{f}\rangle = \omega$$

$$-\Omega_3 = \omega$$

ve buradan

$$\Phi(\mathbf{g}) = -\Omega_3\mathbf{f} + \delta\mathbf{g}$$

elde edilir. Son olarak $\Phi(\mathbf{g})$, $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutarsak

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle = -\Omega_3 \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle + \delta \langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle$$

$$-w \cos \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \delta$$

$$0 = \delta$$

olur. O halde

$$\Phi(\mathbf{g}) = -\Omega_3 \mathbf{f} \quad (3.10)$$

elde edilir. Böylece Lorentz kuvveti ile ribbon çatı arasındaki ilişkiyi göstermiş olduk. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.4: Birim hızlı γ manyetik eğrisi $\mathbf{V}$ manyetik alanının yörüngesi olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{V}$ manyetik alanın γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilmesidir:

$$\mathbf{V} = \Omega_3 \mathbf{e} + w \sin \theta \mathbf{g} \quad (3.11)$$

İspat: γ eğrisi $\mathbf{V}$ manyetik alanın yörünge olsun. O zaman ribbon çatıya göre

$$\mathbf{V} = a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g}$$

Yazılabilir. Diğer yandan

$$\mathbf{V} \times \mathbf{e} = \Phi(\mathbf{e}) = -w \sin \theta \mathbf{f}$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \times \mathbf{e} &= (a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g}) \times \mathbf{e} \\ &= a_1 \mathbf{e} \times \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} \times \mathbf{e} + a_3 \mathbf{g} \times \mathbf{e} \\ &= -a_2 \mathbf{g} + a_3 \mathbf{f} \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$-a_2 \mathbf{g} + a_3 \mathbf{f} = -w \sin \theta \mathbf{f}$$

$$a_2 = 0, a_3 = -w \sin \theta$$

elde edilir. Şimdi buradan a_1 i hesaplayalım:

$$\Phi(\mathbf{V}) = 0$$

olmak üzere

$$\Phi(a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g}) = 0$$

$$a_1 \Phi(\mathbf{e}) + a_2 \Phi(\mathbf{f}) + a_3 \Phi(\mathbf{g}) = 0$$

(3.6), (3.8) ve (3.10) eşitlikleri yukarıdaki denklem de yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$a_1 = \Omega_3$$

bulunur. O halde

$$\mathbf{V} = \Omega_3 \mathbf{e} + w \sin \theta \mathbf{g}$$

elde edilir.

3.2.f– Manyetik Eğriler

Tanım 3.5: Lorentz eşitliğini sağlayan γ eğrisine Müzerinde **f**-manyetik eğri denir.

$$\nabla_{\gamma'} \mathbf{f} = \Phi(\mathbf{f}) = \mathbf{V} \times \mathbf{f} \quad (3.12)$$

Bu tanımdan yararlanarak ribbon çatıya göre **f**-manyetik eğrileri göstereceğiz.

Önerme 3.6: γ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu (M, g) üzerinde birim hızlı bir **f**-manyetik eğri ve bu eğrinin Serret–Frenet elemanları $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, w \sin \theta, w \cos \theta\}$ olsun. O halde ribbon çatıya göre matrisini şöyle gösteririz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \sin \theta & 0 \\ -w \sin \theta & 0 & w \cos \theta \\ 0 & -w \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\mathbf{e}' = w \sin \theta \mathbf{f}$$

$$\mathbf{f}' = -w \sin \theta \mathbf{e} + w \cos \theta \mathbf{g}$$

$$\mathbf{g}' = -w \cos \theta \mathbf{f}$$

Önerme 3.7: γ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu (M, g) üzerinde birim hızlı bir **f**-manyetik eğri ve bu eğrinin Serret-Frenet elemanlarının Lorentz kuvveti ile ilişkilendirirsek, ribbon çatıya göre matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{e}) \\ \Phi(\mathbf{f}) \\ \Phi(\mathbf{g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \sin \theta & \Omega_1 \\ -w \sin \theta & 0 & w \cos \theta \\ -\Omega_1 & -w \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Burada Ω_1 belirli bir fonksiyondur.

İspat: γ eğrisi (M, g) 3-boyutlu riemann manifoldu üzerinde bir **f**-manyetik eğri ve bu eğrinin Ribbon elemanları $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, w \sin \theta, w \cos \theta\}$ olsun.

$$\Phi(\mathbf{e}) = sp\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\} \text{ olduğundan}$$

$$\Phi(\mathbf{e}) = a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.15)$$

yazılabilir. Buradan $\Phi(\mathbf{e})$ nin her iki yanı $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{e} \rangle = a_1 \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + a_2 \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle + a_3 \langle \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle$$

$$\langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{e} \rangle = a_1$$

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = a_1$$

$$\langle w \sin \theta \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle = a_1,$$

$$w \sin \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle = a_1, \quad a_1 = 0$$

olur. Böylece

$$\Phi(\mathbf{e}) = a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.16)$$

elde edilir. (3.16) eşitliğinin her iki yanını $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutulur gerekli işlemler yapılırsa.

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{f} \rangle &= a_2 \\ -\langle \mathbf{e}, \Phi(\mathbf{f}) \rangle &= a_2 \\ -\langle \mathbf{e}, \nabla_{\gamma'} \mathbf{f} \rangle &= a_2 \\ -\langle \mathbf{e}, -w \sin \theta \mathbf{e} + w \cos \theta \mathbf{g} \rangle &= a_2 \\ w \sin \theta &= a_2 \end{aligned}$$

bulunur. Bulduğumuz a_2 değerini (3.16) da yerine yazarsak

$$\Phi(\mathbf{e}) = w \sin \theta \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.17)$$

elde ederiz. Şimdi de (3.17) yi $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{g} \rangle &= \langle -w \sin \theta \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle + a_3 \langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle \\ \langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{g} \rangle &= a_3 \\ \Omega_1 &= a_3 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\Phi(\mathbf{e}) = w \sin \theta \mathbf{f} + \Omega_1 \mathbf{g} \quad (3.18)$$

elde edilmiş olur. Şimdi

$$\Phi(\mathbf{f}) = a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.19)$$

yazılabilir. Buradan $\Phi(\mathbf{f})$ her iki yanını $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa gerekli işlemler yapılırsa

$$a_1 = -w \sin \theta$$

bulunur. a_1 değerini yerine yazılırsa

$$\Phi(\mathbf{f}) = -w \sin \theta \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.20)$$

elde edilir. Buradan (3.20) eşitliği $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa yani

$$\langle \Phi(\mathbf{f}), \mathbf{f} \rangle = -w \sin \theta \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle + a_2 \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle + a_3 \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{f}), \mathbf{f} \rangle &= a_2, \quad \langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = a_2 \\ \langle -w \sin \theta \mathbf{e} + w \cos \theta \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle &= a_2 \\ 0 &= a_2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan a_2 yerine yazılırsa

$$\Phi(\mathbf{f}) = -w \sin \theta \mathbf{e} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.21)$$

elde edilir. Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{f})$ nin her iki yanını $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle &= -w \sin \theta \langle \mathbf{e}, \mathbf{g} \rangle + a_3 \langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle \\ \langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle &= a_3 \\ \langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle &= \langle -w \cos \theta \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = -w \cos \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle \\ -w \cos \theta &= a_3 \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\Phi(\mathbf{f}) = -w \sin \theta \mathbf{e} - w \cos \theta \mathbf{g} \quad (3.22)$$

elde edilir.

$\Phi(\mathbf{g}) = \text{sp}\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ olmak üzere

$$\Phi(\mathbf{g}) = a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.23)$$

yazılabilir. Şimdi $\Phi(\mathbf{g})$ nin her iki yanını $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$\langle \Phi(\mathbf{g}), \mathbf{e} \rangle = a_1 \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + a_2 \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle + a_3 \langle \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle$$

elde ederiz. Buradan

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{g}, \Phi(\mathbf{e}) \rangle &= -a_1 \\ \langle \mathbf{g}, -w \sin \theta \mathbf{f} + \Omega_1 \mathbf{g} \rangle &= -a_1 \\ -\Omega_1 &= a_1 \end{aligned}$$

bulunur. a_1 değerini yerine yazarsak

$$\Phi(\mathbf{g}) = -\Omega_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.24)$$

elde edilir. $\Phi(\mathbf{g})$ nin her iki yanını $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutulur yani

$$\langle \Phi(\mathbf{g}), \mathbf{f} \rangle = -\Omega_1 \langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle + a_2 \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle + a_3 \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\mathbf{g}), \mathbf{f} \rangle &= a_2 \\ \langle \mathbf{g}, \Phi(\mathbf{f}) \rangle &= -a_2 \\ \langle \mathbf{g}, -w \sin \theta \mathbf{e} + w \cos \theta \mathbf{g} \rangle &= -a_2 \\ -w \sin \theta \langle \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle + w \cos \theta \langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle &= -a_2 \\ -w \cos \theta &= a_2 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\Phi(\mathbf{g}) = -\Omega_1 \mathbf{e} - w \cos \theta \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g} \quad (3.25)$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.25) in her iki yanı $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$0=a_3$$

olur. Böylece

$$\Phi(\mathbf{g})=-\Omega_1\mathbf{e}-w\cos\theta\mathbf{f} \quad (3.26)$$

elde edilir.

Böylece Lorentz kuvveti ile Frenet vektörleri arasındaki ilişkiyi ribbon çatıya göre göstermiş olduk. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.8: Birim hızlı γ manyetik eğrisi $\mathbf{V}$ manyetik alanının yörüngesi olması için gerek ve yeter şart $\mathbf{V}$ manyetik alanın γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilmektedir:

$$\mathbf{V}=w\cos\theta\mathbf{e}-\Omega_1\mathbf{f}+w\sin\theta\mathbf{g} \quad (3.27)$$

İspat: γ eğrisi $\mathbf{V}$ manyetik alanın yörünge olsun. Önerme (3.5) ve Önerme (3.6) dan (3.27) eşitliği kolaylıkla gösterilebilir.

$$\mathbf{V}=a_1\mathbf{e}+a_2\mathbf{f}+a_3\mathbf{g}$$

$$\mathbf{V}\times\vec{\mathbf{f}}=\Phi(\vec{\mathbf{f}})=-w\sin\theta\vec{\mathbf{e}}-w\cos\theta\vec{\mathbf{g}} \quad (3.28)$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{V}\times\mathbf{f} &= (a_1\mathbf{e}+a_2\mathbf{f}+a_3\mathbf{g})\times\mathbf{f} \\ &= a_1\mathbf{e}\times\mathbf{f}+a_2\mathbf{f}\times\mathbf{f}+a_3\mathbf{g}\times\mathbf{f} \\ \mathbf{V}\times\mathbf{f} &= a_1\mathbf{g}-a_2\mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.29)$$

dir. (3.28) ve (3.29) dan

$$a_1=w\cos\theta, \quad a_3=w\sin\theta$$

bulunur. Şimdi a_2' yi hesaplayalım.

$$\Phi(\mathbf{V})=0 \quad (3.30)$$

olduğundan

$$\Phi(a_1\mathbf{e}+a_2\mathbf{f}+a_3\mathbf{g})=0$$

$$a_1\Phi(\mathbf{e})+a_2\Phi(\mathbf{f})+a_3\Phi(\mathbf{g})=0$$

bu son ifade de (3.18), (3.22) ve (3.26) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w\cos\theta(w\sin\theta\mathbf{f}+\Omega_1\mathbf{g})+a_2(-w\sin\theta\mathbf{e}+w\cos\theta\mathbf{g})+w\sin\theta(-\Omega_1\mathbf{e}-w\cos\theta\mathbf{f}) &= 0 \\ (w^2\cos\theta\sin\theta-w^2\sin\theta\cos\theta)\mathbf{f}+(w\cos\theta\Omega_1+a_2w\cos\theta)\mathbf{g} &+ \\ (-a_2w\sin\theta-w\sin\theta\Omega_1)\mathbf{e} &= 0 \end{aligned}$$

$$(w\cos\theta\Omega_1 + a_2w\cos\theta)\mathbf{g} - (a_2w\sin\theta + w\sin\theta\Omega_1)\mathbf{e} = 0$$

$$w\cos\theta\Omega_1 + a_2w\cos\theta = 0, a_2w\sin\theta + w\sin\theta\Omega_1 = 0$$

$$a_2 = -\Omega_1, a_2 = -\Omega_1$$

bulunur. Sonuç olarak

$$\mathbf{V} = w\cos\theta\vec{\mathbf{e}} - \Omega_1\vec{\mathbf{f}} + w\sin\theta\vec{\mathbf{g}}$$

elde edilir.

Teorem 3.9: M , 3 boyutlu reel uzayda $(M(C), g)$ üzerinde kesitsel eğriliği olan bir manifold ve $\mathbf{V}$, M üzerinde killing vektör alanı olsun. $(M(C), g, \mathbf{V})$ nin $\mathbf{f}$ -manyetik yörüngelerinin eğrilik ve burulmasına bağlı olarak aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\left[\frac{1}{w\sin\theta} \left(\left(\frac{C\Omega_1 - \Omega_1''}{w\cos\theta} \right)' - \Omega_1'w\cos\theta + Cw\sin\theta \right) \right]' + w\sin\theta \frac{C\Omega_1 - \Omega_1''}{w\cos\theta} = 0, \Omega_1 = -\frac{(w\cos\theta)'}{w\sin\theta} \quad (3.31)$$

İspat: $\mathbf{V}$, M üzerinde Killing vektör alanı olsun. Bu durumda (3.27) eşitliğinin s ye göre türevini alırsak

$$\nabla_e \mathbf{V} = ((w\cos\theta)' + \Omega_1w\sin\theta)\mathbf{e} - \Omega_1'\mathbf{f} + ((w\sin\theta)' - w\cos\theta\Omega_1)\mathbf{g} \quad (3.32)$$

bulunur. Bulduğumuz bu sonucun türevini alıp Ribbonun türev formüllerini kullanırsak

$$\nabla_e^2 \mathbf{V} = \Omega_1'w\sin\theta\mathbf{e} + (-\Omega_1'w\cos\theta((w\sin\theta)' - w\cos\theta\Omega_1))\mathbf{f} + (((w\sin\theta)' - w\cos\theta\Omega_1)'\Omega_1'w\cos\theta)\mathbf{g} \quad (3.33)$$

elde etmiş oluruz. Tanım2.22 ve Teorem2.26 deki 1.özellikle ile birlikte (3.33) eşitliğini bir arada gözönüne alırsak,

$$\Omega_1 = -\frac{(w\cos\theta)'}{w\sin\theta} \quad (3.34)$$

Bulunur. (3.32) ve (3.33) sonuçlarıyla beraber Tanım2.22 ve Teorem2.26 deki 2.özellik kullanırsak aşağıdaki sonucu elde etmiş oluruz:

$$\Omega_1'' + w\cos\theta((w\sin\theta)' - (w\cos\theta)\Omega_1) + g(R(\mathbf{V}, \mathbf{e})\mathbf{e}, \mathbf{f}) = 0$$

$$g(R(\mathbf{V}, \mathbf{e})\mathbf{e}, \mathbf{f}) = Cg(\mathbf{V}, \mathbf{f}) = 0$$

Buradan

$$\Omega_1'' + w\cos\theta((w\sin\theta)' - w\cos\theta\Omega_1) = C\Omega_1 \quad (3.35)$$

bulunur. Son olarak (3.32) ve (3.33) deki formülleri kullanarak Tanım2.22 ve Teorem2.26 deki(3) eşitliği ile birlikte gözönüne alırsak aşağıdaki eşitliği bulmuş oluruz:

$$\left[\frac{1}{wsin\theta} (((wsin\theta)' - wcos\theta\Omega_1)' - \Omega_1'wcos\theta + Cwsin\theta) \right]' + wsin\theta((wsin\theta)' - wcos\theta\Omega_1) = 0 \quad (3.36)$$

Buradan da (3.34) , (3.35)ve (3.36) formülleri ile birlikte ele aldığımız zaman

$$\left[\frac{1}{wsin\theta} \left(\left(\frac{C\Omega_1 - \Omega_1''}{wcos\theta} \right)' - \Omega_1'wcos\theta + Cwsin\theta \right) \right]' + wsin\theta \frac{C\Omega_1 - \Omega_1''}{wcos\theta} = 0, \quad \Omega_1 = -\frac{(wcos\theta)'}{wsin\theta}$$

elde ederiz.

Sonuç 3.10:3-boyutlu Öklid uzayında γ eğrisi bir f manyetik eğri olduğunu varsayalım. Bu durumda:

i) Eğer Ω_1 sıfırdan farklı sabit ise γ eğrisi $\mathbf{V}$ manyetik vektör alanı olan bir slant helistir.

ii) Eğer Ω_1 sıfır olması halinde γ eğrisi $\mathbf{V}$ manyetik vektör alanı olan dairesel helistir.

İspat: 3-boyutlu Öklid uzayında γ eğrisi bir f -manyetik eğri olarak alalım. Eğer Ω_1 sıfırdan farklı sabit olsun ve α eğrisi de f -manyetik eğri olarak alalım. Böylelikle γ eğrisini (3.34) , (3.35)ve (3.36) formüllerini sağlar ve buradan da

$$\frac{(wcos\theta)'}{wsin\theta} = -\frac{(wsin\theta)'}{wcos\theta} = \Omega_1 \quad (3.37)$$

elde edilir. Böylece

$$(wsin\theta)^2 + (wcos\theta)^2 = \text{sabit}$$

Olup (3.37) formülünden yararlanarak

$$wcos\theta(wsing\theta)' - wsin\theta(wcos\theta)' = -\Omega_1((wsin\theta)^2 + (wcos\theta)^2) = \text{sabit}$$

ya da

$$\frac{(wsin\theta)^2}{(wsin\theta)^2 + (wcos\theta)^2} \left(\frac{wcos\theta}{wsin\theta} \right)' = \Omega_1$$

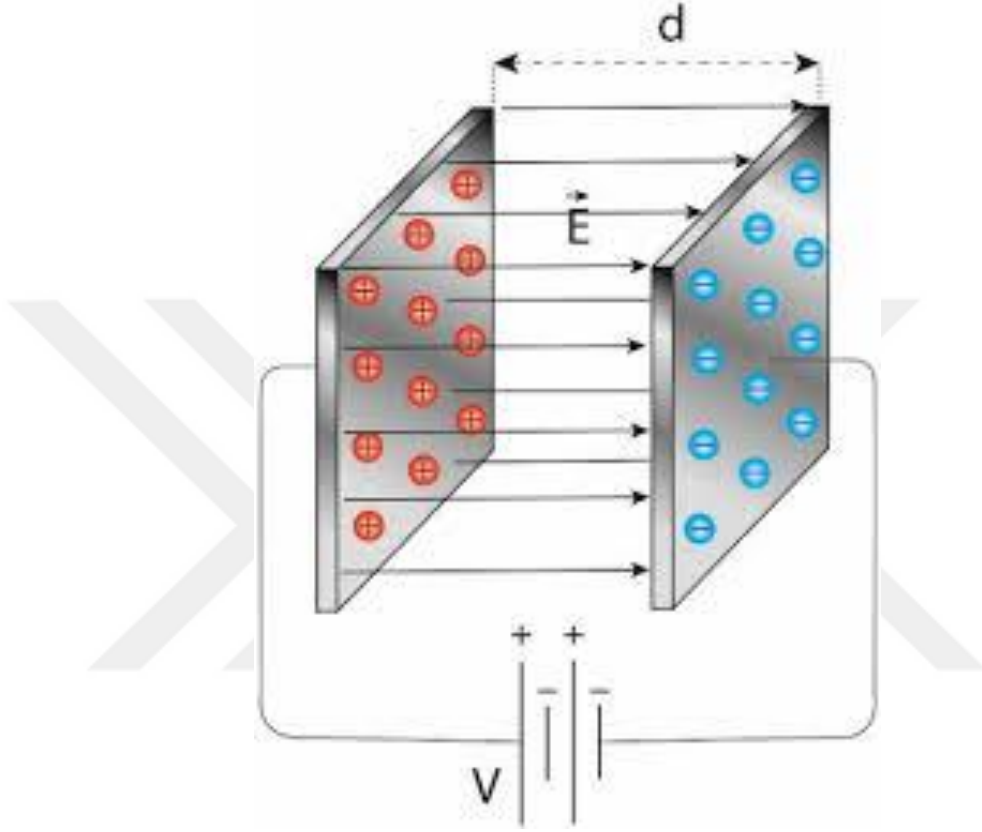
bulunur. O halde buradan görülüyor ki γ eğrisi bir slant helistir. Eğer Ω_1 sıfır olması halinde γ eğrisi (3.37) formülünden bir dairesel helistir.

O halde çıkan sonuçların bir genellemesini yapmak gerekirse fiziksel yorumlarını şöyle verebiliriz:

Sonuç 3.11:Teorem ve tanımlarda da verdiğimiz gibi 3-boyutlu Öklid uzayı üzerinde yüklü olan bir parçacığın normal vektör alanının manyetik bir alan içerisindeki etkisini şu formülle verebiliriz:

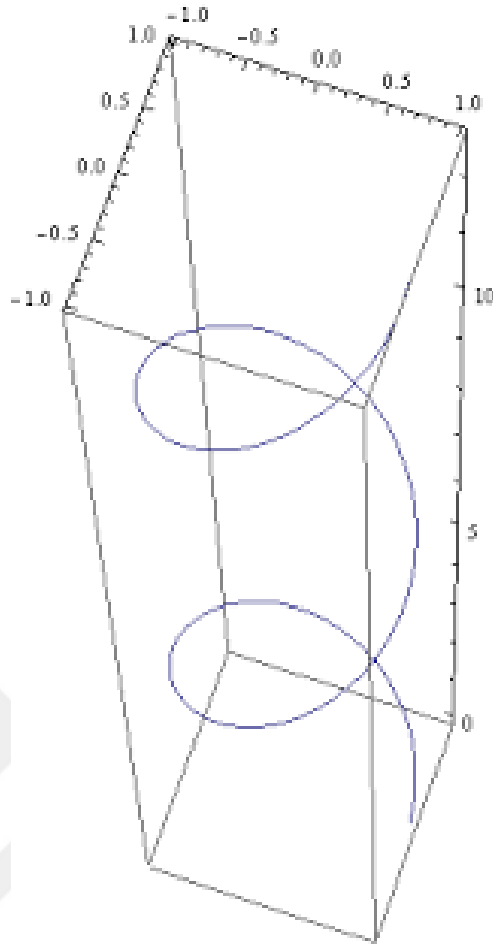
$$\Phi(\mathbf{f}) = \mathbf{V} \times \mathbf{f}$$

Bu formül yardımıyla Lorentz kuvvet yardımı ile yörüngesinin değiştiğini görmüş olacağız. Aşağıdaki şekiller üzerinden, eğer $\mathbf{f}$ normal vektör alanı, $\mathbf{V}$ manyetik alanına paralelse Lorentz kuvvetinin sıfır olacağından paralel ilerler böylelikle şekil 3.1 de ki gibi görsel olarak daha iyi kavramamızda etkili olur ve aşağıdaki gibi gösterilir [Şekil 3.1].



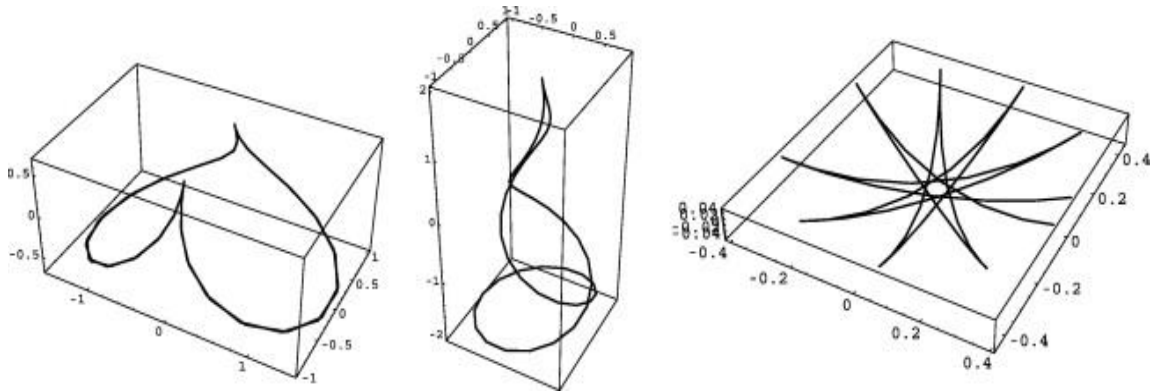
Şekil 3.1. Parçacığın $\Phi(\mathbf{f})$ Lorentz kuvveti etkisindeki hareketi

Eğer $\mathbf{f}$ normal vektör alanı, $\mathbf{V}$ manyetik alanına dik olması durumunda Lorentz kuvveti maksimum olacağından dairesel helis yörüngesi izler böylelikle şekil 3.2 de ki gibi görsel olarak daha iyi kavramamızda etkili olur ve aşağıdaki gibi gösterilir[Şekil 3.2].



Şekil 3.2. Parçacığın $\Phi(\mathbf{f})$ Lorentz kuvvet etkisi ile oluşan dairesel helis hareketi

Eğer $\mathbf{f}$ normal vektör alanı, $\mathbf{V}$ manyetik alanına sabit bir açı oluşturması durumunda Lorentz kuvvetinin de etkisiyle slant helis yörüngesi izler böylelikle şekil 3.3 de ki gibi görsel olarak daha iyi kavramamızda etkili olur ve aşağıdaki gibi gösterilir [Şekil 3.3].



Şekil 3.3. Parçacığın $\Phi(\mathbf{f})$ Lorentz kuvvet etkisi ile oluşan slant helis hareketi

3.3.g– Manyetik Eğriler

Tanım 3.12: γ eğrisinin Binormal vektör alanı Lorentz kuvvetini sağlıyorsa γ eğrisine M üzerinde $\mathbf{g}$ –manyetik eğri denir ve

$$\nabla_{\gamma'} \mathbf{g} = \Phi(\mathbf{g}) = \mathbf{V} \times \mathbf{g} \quad (3.38)$$

Bu tanımdan yararlanarak ribbon çatıya göre manyetik eğrileri göstereceğiz.

Önerme 3.13: γ eğrisi 3-boyutlu riemann manifoldu $(M, \mathbf{g})$ üzerinde birim hızlı bir $\mathbf{g}$ -manyetik eğri ve bu eğrinin Serret–Frenet elemanları $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, w \sin \theta, w \cos \theta\}$ olsun o halde ribbon çatıya göre matrisini şöyle gösteririz:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}' \\ \mathbf{f}' \\ \mathbf{g}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \sin \theta & 0 \\ -w \sin \theta & 0 & w \cos \theta \\ 0 & -w \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

Önerme 3.14: γ eğrisi 3-boyutlu $(M, \mathbf{g})$ manifoldu üzerinde $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, w \sin \theta, w \cos \theta\}$ elemanları ile verilmiş bir $\mathbf{g}$ -manyetik eğri olsun. $\mathbf{g}$ -manyetik eğrisini Lorentz eşitliği ile ilişkilendirirsek ribbon çatı ya göre aşağıda ki matrisi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{bmatrix} \Phi(\mathbf{e}) \\ \Phi(\mathbf{f}) \\ \Phi(\mathbf{g}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_2 & 0 \\ -\Omega_2 & 0 & w \cos \theta \\ 0 & -w \cos \theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Burada Ω_2 belirli bir fonksiyondur.

İspat: γ eğrisi 3-boyutlu Riemann manifoldu (M, g) üzerinde $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}, w \sin \theta, w \cos \theta\}$ elemanlarıyla birlikte $\mathbf{g}$ -manyetik eğri olsun.

$\Phi(\mathbf{e}) \in \text{sp}\{\mathbf{e}, \mathbf{f}, \mathbf{g}\}$ olduğundan

$$\Phi(\mathbf{e}) = \mu \mathbf{e} + \rho \mathbf{f} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.41)$$

yazılabilir. Buradan $\Phi(\mathbf{e})$ her iki yanı $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa yani

$$\langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{e} \rangle = \mu \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + \rho \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle + \sigma \langle \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle$$

işlemi yapılırsa,

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \mu$$

$$w \sin \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle = \mu$$

$$\mu = 0$$

elde edilir. Bulduğumuz bu değeri (3.41) de yerine yazarsak

$$\Phi(\mathbf{e}) = \rho \mathbf{f} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.42)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.42) nin her iki yanını $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\Omega_2 = \rho$$

elde edilir. Bu son ifade (3.42) de yerine yazılırsa

$$\Phi(\mathbf{e}) = \Omega_2 \mathbf{f} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.43)$$

bulunur. Benzer (3.43) eşitliği $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutulursa yani

$$\langle \Phi(\mathbf{e}), \mathbf{g} \rangle = \Omega_2 \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle + \sigma \langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle$$

İşlemi yapılırsa

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{e}, \mathbf{g} \rangle = \sigma$$

$$w \sin \theta \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \sigma$$

$$0 = \sigma$$

olur. Böylece

$$\Phi(\mathbf{e}) = \Omega_2 \mathbf{f} \quad (3.44)$$

elde edilir.

$$\Phi(\mathbf{f}) = \mu \mathbf{e} + \rho \mathbf{f} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.45)$$

yazılabilir. Buradan $\Phi(\mathbf{f})$, her iki yanını $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutulur yani

$$\langle \Phi(\mathbf{f}), \mathbf{e} \rangle = \mu \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + \rho \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle + \sigma \langle \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle$$

yazılırsa

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle = \mu$$

$$-w \sin \theta \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \mu$$

$$-\Omega_2 = \mu$$

elde edilir. Bulduğumuz değeri yerine yazılırsa

$$\Phi(\mathbf{f}) = -\Omega_2 \mathbf{e} + \rho \mathbf{f} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.46)$$

Benzer şekilde $\Phi(\mathbf{f})$ in her iki yanını $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$0 = \rho$$

elde edilir. Bu son ifade (3.46) da yerine yazılırsa

$$\Phi(\mathbf{f}) = -\Omega_2 \mathbf{e} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.47)$$

bulunur. Benzer şekilde (3.47) eşitliğinin her iki yanını $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$w\cos\theta=\sigma$$

elde edilir. Buradan

$$\Phi(\mathbf{f}) = -\Omega_2 \mathbf{e} + w\cos\theta \mathbf{g} \quad (3.48)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\Phi(\mathbf{g}) = \mu \mathbf{e} + \rho \mathbf{f} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.49)$$

ifadesinin her iki yanını $\mathbf{e}$ ile iç çarpıma tabi tutulur yani

$$\langle \Phi(\mathbf{g}), \mathbf{e} \rangle = \mu \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle + \rho \langle \mathbf{f}, \mathbf{e} \rangle + \sigma \langle \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle$$

İşlemi yapılırsa

$$\langle \nabla_{\gamma'} \mathbf{g}, \mathbf{e} \rangle = \mu$$

$$0 = \mu,$$

bulunur. Bulduğumuz bu değeri yerine yazarsak

$$\Phi(\mathbf{g}) = \rho \mathbf{f} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.50)$$

elde edilir. (3.50) eşitliğinin her iki yanını $\mathbf{f}$ ile iç çarpıma tabi tutulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$-w\cos\theta = \rho$$

olur. Bulduğumuz bu değeri yerine yazarsak

$$\Phi(\mathbf{g}) = -w\cos\theta \mathbf{f} + \sigma \mathbf{g} \quad (3.51)$$

elde edilir. (3.51) eşitliğinin her iki yanını son olarak $\mathbf{g}$ ile iç çarpıma tabi tutulur ve gerekli işlemler yapılırsa

$$0 = \sigma$$

olur. O halde

$$\Phi(\mathbf{g}) = -w\cos\theta \mathbf{f} \quad (3.52)$$

elde edilir. Böylece Lorentz kuvveti ile ribbon çatı arasındaki ilişkiyi göre göstermiş olduk. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3.15: Birim hızlı γ manyetik eğri $\mathbf{V}$ manyetik alanın yörüngesi olması için gerek ve yeter şart V manyetik alanı γ eğrisi boyunca aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbf{V} = w\cos\theta \mathbf{e} + \Omega_2 \mathbf{g} \quad (3.53)$$

İspat: γ eğrisi $\mathbf{V}$ manyetik vektör alanının yörüngesi olduğunu varsayalım. Önerme (3.13) ve önerme (3.14) yardımıyla (3.53) eşitliği kolaylıkla gösterilebilir.

$$\mathbf{V} = a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g}$$

olsun.

$$\mathbf{V} \times \vec{\mathbf{g}} = \Phi(\vec{\mathbf{g}}) = -w \cos \theta \vec{\mathbf{f}} \quad (3.54)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \times \mathbf{g} &= (a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g}) \times \mathbf{g} \\ &= a_1 \mathbf{e} \times \mathbf{g} + a_2 \mathbf{f} \times \mathbf{g} + a_3 \mathbf{g} \times \mathbf{g} \\ &= -a_1 \mathbf{f} + a_2 \mathbf{e} \end{aligned}$$

olur. Bu son ifade (3.54) ile birlikte göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} -a_1 \vec{\mathbf{f}} + a_2 \vec{\mathbf{e}} &= -w \cos \theta \vec{\mathbf{f}} \\ -a_1 \vec{\mathbf{f}} &= -w \cos \theta \vec{\mathbf{f}}, \quad a_2 \vec{\mathbf{e}} = 0 \\ a_1 &= w \cos \theta, \quad a_2 = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi a_3 'ü hesaplayalım

$$\Phi(\mathbf{V}) = 0$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \Phi(a_1 \mathbf{e} + a_2 \mathbf{f} + a_3 \mathbf{g}) &= 0 \\ a_1 \Phi(\mathbf{e}) + a_2 \Phi(\mathbf{f}) + a_3 \Phi(\mathbf{g}) &= 0 \end{aligned}$$

olur. Bu son ifade de (3.44), (3.48) ve (3.52) eşitlikleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} w \cos \theta (\Omega_2 \mathbf{f}) + 0(-\Omega_2 \mathbf{e} + w \cos \theta \mathbf{g}) + a_3(-w \cos \theta \mathbf{f}) &= 0 \\ w \cos \theta \Omega_2 \mathbf{f} - a_3 w \cos \theta \mathbf{f} &= 0 \\ w \cos \theta \mathbf{f} (\Omega_2 - a_3) &= 0 \\ a_3 &= \Omega_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\mathbf{V} = w \cos \theta \mathbf{e} + \Omega_2 \mathbf{g}$$

bulunur.

Teorem 3.16: M 3-boyutlu reel uzayda $(M(C), g)$ üzerinde C -manifold ve $\mathbf{V}$, M üzerinde killing vektör alanı olduğunu varsayalım. $(M(C), g, \mathbf{V})$ $\mathbf{g}$ -manyetik yörüngelerinin eğrilik burulması aşağıdaki gibidir :

$$2(w \sin \theta)'' + 2(w \sin \theta)(w \cos \theta)^2 + 4\alpha(w \cos \theta)^2 + 4C(w \sin \theta) + (w \sin \theta)^3 = b \quad (3.55)$$

burada b sabit bir sayıdır.

İspat: $\mathbf{V}$, 3-boyutlu Riemann manifoldu üzerinde herhangi bir manyetik vektör alanı olsun. (3.53) eşitliğinin s ye göre türevi alınırsa

$$\nabla_e \mathbf{V} = (w \cos \theta)' \mathbf{e} + w \cos \theta (w \sin \theta - \Omega_2) \mathbf{f} + \Omega_2' \mathbf{g} \quad (3.56)$$

buluruz. Bu son ifadenin bir daha s ye göre türevi alınırsa

$$\nabla_e^2 \mathbf{V} = ((w \sin \theta)(w \cos \theta) \Omega_2 - (w \cos \theta)(w \sin \theta)^2) e + ((w \cos \theta)(w \sin \theta)' - 2(w \cos \theta) \Omega_2') + (\Omega_2'' + (w \cos \theta)^2 (w \sin \theta) - (w \cos \theta)^2 \Omega_2) g \quad (3.57)$$

elde edilir. Tanım 2.22 ve Teorem 2.26 daki 1.özellikle birlikte göz önüne alınırsa,

$$(w \cos \theta)' = 0 \quad (3.58)$$

bulunur. (3.56) ve (3.57) sonuçlarını Tanım 2.22 ve Teorem 2.26 daki 2.özellikle birlikte ele alınırsa

$$(w \cos \theta)(w \sin \theta)' - 2(w \cos \theta) \Omega_2' + g(R(\mathbf{V}, e)e, f) = 0$$

elde edilir. M nin C gibi sabit bir eğriliğini ele alırsak $g(R(\mathbf{V}, e)e, f) = Cg(\mathbf{V}, f) = 0$ olması nedeniyle aşağıdaki sonucu buluruz:

$$\Omega_2 = \frac{w \sin \theta}{2} + \alpha \quad (3.59)$$

Benzer şekilde (3.56) ve (3.57) eşitlikleri ile Tanım 2.22 ve Teorem 2.26 daki 3.özellik birlikte ele alırsak

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{w \sin \theta} (\Omega_2'' + (w \sin \theta)(w \cos \theta)^2 - (w \cos \theta)^2 \Omega_2 + g(R(\mathbf{V}, e)e, g)) \right]' + (w \sin \theta) \Omega_2' \\ & \quad + g(R(\mathbf{V}, e)e, g) = 0 \\ & g(R(\mathbf{V}, e)e, g) = Cg(\mathbf{V}, g) = Cw \sin \theta \text{ ve } g(R(\mathbf{V}, e)f, g) = 0 \\ & \left[\frac{1}{w \sin \theta} \left(\frac{(w \sin \theta)''}{2} + (w \sin \theta)(w \cos \theta)^2 - (w \cos \theta)^2 \left(\frac{w \sin \theta}{2} + \alpha \right) Cw \sin \theta \right) \right]' \\ & \quad + (w \sin \theta) \frac{(w \sin \theta)'}{2} = 0 \\ & \left[\frac{1}{w \sin \theta} (\Omega_2'' + (w \sin \theta)(w \cos \theta)^2 - (w \cos \theta)^2 \Omega_2 + C(w \sin \theta)) \right]' + (w \sin \theta) \Omega_2' \end{aligned} \quad (3.60)$$

bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3.17: 3-boyutlu Öklid uzayında γ eğrisi bir g -manyetik eğri olmak üzere

- i Ω_1 Sıfırdan farklı bir sabit olması halinde γ eğrisi eksen $\mathbf{V}$ manyetik vektör alanı dairesel helistir.
- ii Ω_1 Sıfır olması halinde γ eğrisi çemberdir.

İspat: Sonucun ispatı (3.60) eşitliğinden açıktır.

Şimdi elde edilen sonuçları fiziksel yorumlamasını yapalım:

3-boyutlu Öklid uzayı içinde yüklü bir parçacığı ele alalım ve normal vektör alanın manyetik bir alandan etkilenmesiyle

$$\Phi(\mathbf{g}) = \mathbf{V} \times \mathbf{g}$$

olur. Bu şekilde olmasıyla Lorentz kuvvetinin de etkisiyle yörüngesi değişir. Eğer $\mathbf{g}$ -Binormal vektör alanı, $\mathbf{V}$ manyetik alanın paralel olması halinde Lorentz kuvveti sıfır olur ve parçacık manyetik alanda paralel ilerler.

Eğer $\mathbf{g}$ -Binormal vektör alanının, $\mathbf{V}$ manyetik alanına dik olması durumunda Lorentz kuvvetinin de etkisiyle maksimum seviyede olmasıyla çember eğrisi şeklinde yörünge izlemesine yol açar.

Eğer $\mathbf{g}$ -Binormal vektör alanı, $\mathbf{V}$ manyetik alanına sabit bir açı ile girmesi halinde Lorentz kuvvetinin de etkisiyle, parçacığın dairesel helis eğrisi şeklinde bir yol izlemesine yol açar.

Sonuç 3.18: M , 3-boyutlu bir reel uzayda $(M(C), g)$ üzerinde bir C - manifold ve $\mathbf{V}$, M üzerinde killing vektör alanı olduğunu kabul edelim. Bu durumda $(M(C), g, \mathbf{V})$ $\mathbf{f}$ -manyetik ve $\mathbf{g}$ -manyetik yörüngeleri

- i $C = 1$ için 3-boyutlu $\mathbb{S}^3$ küresi,
- ii $C = -1$ için 3-boyutlu hiperbolik uzay $\mathbb{H}^3$,
- iii $C = 0$ için 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ üzerindedir.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada manyetik eğriler ribbon çatıya göre tanımlanmıştır. Bir ribbon eğrinin Ribbon çatı yardımıyla doğrultman eğrisi tanımlanarak, bu eğrilerin eğrilikleri arasındaki ilişki elde edilmiştir.

Frenet çatısına ve ribbon çatıya göre manyetik eğrilerin tanımlandığı ve γ eğrisinin normal ve Binormal vektörlerinin Lorentz kuvvetinden etkilenmesiyle elde edilen yörüngeler incelenmiş ve bu eğrilerle ilgili bazı karakterizasyonlar elde edilmiştir.

Son olarak benzer düşünceyle Ribbon çatıya göre ribbon eğrisiyle ilişkili yeni manyetik eğriler tanımlanarak, bu eğriler arasındaki ilişkiler araştırılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] J.Synge (1960) Relativity: The General Theory. North Holland, Amsterdam.
- [2] Bozkurt, Z., Gök, İ., Yaylı, Y., Ekmekci, F.N.,(2014). A new Approach for MagneticCurves in Riemannian 3D-Manifolds. J. Math. Phys. 55,1-12.
- [3] Özdemir, Z., Gök, İ., Yaylı, Y., Ekmekci, F.N.,(2015).Notes on Magnetic Curves in 3D semi-Riemannian Manifolds, Turkish Journal of Mathematics.412-426
- [4] Barros, M., Romero, A., (2007).Magnetic vortices. EPL.77,1-5.
- [5] Barros, M.,(1997).General helices and a theorem of lancret, Proceeding of the American Mathematical Society. 125(5),1503-1509.
- [6] Xu, L., Mould, D.,(2009).Magnetic Curves: Curvature-controlled aesthetic Curves using Magnetic fields. Comput.Aesth. Eurograph.Assoc.1-8.
- [7] T.Körpınar and R.Demirkol, (2018).Gravitational magnetic curves on 3D Riemannian manifolds. International Journal of GeometricMethods in Modern Physics, 15(11).
- [8] Z.Özdemir, İ.Gök, Y.Yaylı and N.Ekmekci (2015). Notes on magnetic curves in 3D semi-Riemannian manifolds. Tukish J. Mathematic, 39, 412-426.
- [9] G.S. Chirikjian, Framed curves and knotted DNA, BiochemSoc. Trans. 41 (2013), 635-638
- [10] J. Bohr and S. Markvorsen, Ribbon Crystals, Plosone, 8 (10) (2013).
- [11] Boothby, W.M.,(1975).An introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry. New York, San Francisco, London: Academic Press.
- [12] Hacısalihoğlu, H.H.,(2000).Diferansiyel Geometri.Erten Matbaası, Ankara.
- [13] Hacısalihoğlu, H.H.,(1980).Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. Elazığ.
- [14] O'Neill, B.(1996).Elementary Differential Geometry. New York, London, Usa: Academic Press.
- [15] Sabucuoğlu, A.,(2006). Diferansiyel Geometri. Nobel yayınları. Ankara. 264-277.
- [16] F.Şemin,(1983).Diferansiyel Geometri I. Fen Fakültesi Yayınları, İstanbul Üniversitesi. İstanbul.
- [17] N.Gürhan, (2013).Frenet eğrisi ile bağlantılı eğriler ve uygulamaları. Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yüksek lisans Tezi.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

ARAŞTIRMACI BİLGİLERİ

EĞİTİM BİLGİLER

İlkokul : Atatürk İÖÖ
Ortaokul : Atatürk
Lise : Bornova Hayrettin Duran Lisesi
Lisans : Kars Kafkas Üniversitesi