



T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİCCİ EĞRİLİĞİ SABİT OLAN CAYLEY ÇİZGELERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YONCA ÜNVER

EYLÜL 2022

YONCA ÜNVER

MATEMATİK ANABİLİM DALI

EYLÜL 2022

RİCCİ EĞRİLİĞİ SABİT OLAN CAYLEY ÇİZGELERİ

Yonca ÜNVER

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

EYLÜL 2022

Yüksek Lisans Tezi Kabul ve Onay Sayfası

Yonca ÜNVER tarafından hazırlanan “RİCCİ EĞRİLİĞİ SABİT OLAN CAYLEY ÇİZGELERİ” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI

MATEMATİK Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Başkan: Doç. Dr. Elif TAN

Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Üye: Doç. Dr. Tefik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

Tez Savunma Tarihi: 31/08/2022

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Yonca ÜNVER

30/09/2022

RİCCİ EĞRİLİĞİ SABİT OLAN CAYLEY ÇİZGELERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Yonca ÜNVER

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
EYLÜL -2022

ÖZET

Lin, Lu ve Yau tarafından tanıtılan (kaba) Ricci eğriliği, lokal olarak sonlu çizgeler üzerinde bir izomorfizm invaryantı sunmaktadır. Bu nedenle, Ricci eğrilikleri bilinen çizge ailelerine ait bir katalog oluşturmak önemlidir. Eğriliklerin hesaplanmasında kullanılan önemli araçlardan biri eşleşme koşuludur. Bu tezin amacı, eşleşme koşulunu kullanarak Ricci eğriliği sabit olan Cayley çizge aileleri oluşturmaktır.

Sayfa Adedi	: 30
Anahtar Kelimeler	: Döngüsel çizge, Cayley çizgesi, Ricci eğriliği, Eşleşme koşulu
Danışman	: Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI

CAYLEY GRAPHS WITH CONSTANT RICCI CURVATURE

(M. Sc. Thesis)

Yonca ÜNVER

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

September-2022

ABSTRACT

The (coarse) Ricci curvature introduced by Lin, Lu, and Yau provides a useful isomorphism invariant on locally finite graphs. Therefore, it is important to build up a catalogue for graph families with known Ricci curvatures. One of the important tools used in calculating curvatures is the matching condition. The goal of this thesis is to construct Cayley graph families with constant Ricci curvature using the matching condition.

Page Number : 30
Keywords : Circulant graph, Cayley graph, Ricci curvature, Matching condition
Supervisor : Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca her türlü desteği ile yanımda olan ve Çizge Teorisi ile tanışıp bu alanda tarafıma çalışma yapma fırsatı veren tez danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Mehmet DAĞLI'ya teşekkür ederim. Değerli bilgi ve deneyimlerini benden esirgemeyen kıymetli hocam Doç. Dr. Tefik Şahin'e ve bu süreçte maddi ve manevi olarak her zaman yanımda olan sevgili eşim Durmuş ÜNVER'e minnettarım.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLER DİZİNİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Çizge Kavramı	3
2.2. Döngüsel Çizgeler	5
2.3. Cayley Çizgeleri	6
2.4. Çizgelerde İzomorfizm	7
3. ÇİZGELERDE RİCCİ EĞRİLİĞİ	8
3.1. Olasılık Dağılımı: ε -yuvarı	8
3.2. Çizgelerin Ricci Eğrilikleri	10
3.3. Eşleşme Koşulu	13
3.4. Genişletilmiş Eşleşme Koşulu	18
4. SABİT EĞRİLİKLİ CAYLEY ÇİZGELERİ	21
5. SONUÇ	27
KAYNAKLAR	28
ÖZGEÇMİŞ	30

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Bir çizgenin diyagram ile gösterimi	3
Şekil 2.2. P_1 , P_2 ve P_3 yolları	4
Şekil 2.3. C_3 , C_4 ve C_5 döngüleri	4
Şekil 2.4. K_3 , K_4 ve K_5 tam çizgeleri	4
Şekil 2.5. C_{10} döngüsü ya da döngüsel çizgesi	5
Şekil 2.6. $C_{10}(1, 3, 5)$ çizgesi	5
Şekil 2.7. $C_{10}(1, 2, 3, 4, 5)$ döngüsel çizgesi ya da K_{10} tam çizgesi	5
Şekil 2.8. $\Gamma(D_3, S)$ Cayley çizgesi	6
Şekil 2.9. K_4 tam çizgesinin farklı gösterimleri	7
Şekil 2.10. İzomorfik olmayan iki çizge	7
Şekil 3.1. Altı tane komşusu olan bir x köşesi üzerindeki olasılık dağılımı	9
Şekil 3.2. Bir x köşesi üzerindeki olasılık dağılımı	9
Şekil 3.3. Bir y köşesi üzerindeki olasılık dağılımı	9
Şekil 3.4. C_5 döngüsünün farklı iki köşesi üzerindeki olasılık dağılımları	12
Şekil 3.5. Eşleşme koşulu	13
Şekil 3.6. $C_{10}(1, 2, 3, 5)$ çizgesi	14
Şekil 3.7. Genelleştirilmiş eşleşme koşulu	18
Şekil 3.8. $C_{10}(1, 4)$ çizgesi	19
Şekil 3.9. $C_{10}(1)$ döngüsü	20
Şekil 4.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q, J)$ Cayley çizgesi	23
Şekil 4.2. A_1 ile B_1 arasındaki eşleşme	26
Şekil 4.3. A_2 ile B_2 arasındaki eşleşme	26

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$G = (V, E)$	Köşeler kümesi V , kenarlar kümesi E olan çizge
$V(G)$	G çizgesinin köşeler kümesi
$E(G)$	G çizgesinin kenarlar kümesi
x^E	x köşesinin komşular kümesi
δ	Tüm köşelerin ortak derecesi
P_n	Yol çizgesi
C_n	Döngü
K_n	Tam çizge
$K_{m,n}$	İki parçalı tam çizge
$C_n(J)$	Döngüsel çizge
$\Gamma(H, J)$	Cayley çizgesi
$\mathbb{Z}_n$	Tamsayıların n modülüne göre toplamsal grubu
D_n	Mertebesi $2n$ olan dihedral grup
$\cong$	İzomorfizm
$B_x(\varepsilon)$	Manifoldlarda ε -yuvarı
b_x^ε	Çizgelerde ε -yuvarı
$d(u, v)$	u ve v köşeleri arasındaki uzaklık
A_{uv}	u köşesinden v köşesine taşınan kütle miktarı
$W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon)$	İki yuvar arasındaki Wasserstein uzaklığı
κ	Ricci eğriliği

1. GİRİŞ

Manifoldlar, eğrilerin ve yüzeylerin yüksek boyutlara genellemesidir. Çizgeler, doğası gereği manifoldlardan çok farklı yapılardır. Birçok araştırmacı, manifoldlar üzerinde tanımlı olan yapıların çizgeler üzerine taşınıp taşınmayacağını araştırmaktadır. Bu yapılardan biri eğrilik kavramıdır. Son yıllarda, genel metrik uzaylar üzerinde uygulanabilecek çeşitli eğrilik kavramları ortaya atılmıştır. Bu tezde özel olarak Ricci eğriliği üzerinde durulacaktır.

Ricci eğriliği kavramına çizgeler üzerinde ilk olarak Chung ve Yau (1996) tarafından yapılan çalışmada rastlanır. Daha sonra Ollivier (2009) tarafından metrik uzaylar üzerinde Markov zincirlerine kadar uzanan (kaba) Ricci eğriliği tanımı yapılmıştır. Literatüre “Ollivier’in Ricci eğriliği” olarak geçen bu tanımla ilgili olarak çizgeler üzerinde çok sayıda çalışma yapılmıştır. Örneğin Bhattacharya ve Mukherjee (2015) tarafından iki parçalı çizgeler ile içerdikleri döngü uzunlukları en az 5 olan çizgelerin eğrilikleri hesaplanmıştır. Ayrıca bunun ekonomi, sağlık, lojistik ve yapay sinir ağları gibi birçok alanda uygulamaları bulunmaktadır (Li ve diğerleri, 2022; Sandhu ve diğerleri, 2015; Sandhu, Georgiou & Tannenbaum, 2016).

Ollivier (2009) tarafından yapılan Ricci eğriliği tanımı Lin, Lu ve Yau (2011) tarafından modifiye edilmiştir. Bu bağlamda, merkezi bir x köşesi olan ve b_x^ε ile temsil edilen ε -yuvarı,

$$b_x^\varepsilon(v) = \begin{cases} 1 - \varepsilon, & v = x \\ \frac{\varepsilon}{|x^E|}, & v \in x^E \\ 0, & v \notin \{x\} \cup x^E \end{cases}$$

biçimindeki bir olasılık dağılımı olarak tanımlanmıştır. Burada x^E ile x köşesinin komşuları temsil edilmektedir. Herhangi bir $\{x, y\}$ kenarı için b_x^ε yuvarını b_y^ε yuvarına optimal olarak taşıma maliyeti $W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon)$ olmak üzere $\{x, y\}$ kenarının Ricci eğriliği

$$\kappa(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon} (1 - W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon)) \right)$$

formülü ile verilmiştir. Her ne kadar bu tanım, Ollivier’in tanımına yakın olsa da farklı çizge aileleri için farklı eğrilikler ortaya çıkmaktadır. Lin, Lu ve Yau tarafından yapılan bu tanımdan sonra Ollivier Ricci eğriliği için elde edilen sonuçlara paralel olarak yapılan birçok çalışmaya rastlanmaktadır. Ricci eğriliği kavramının yönlendirilmiş çizgelere uyarlaması ise Yamada (2019) tarafından yapılmıştır.

Döngüsel çizgelerin Lin, Lu ve Yau bağlamındaki Ricci eğriliklerini sınıflandırma çalışması Smith (2014) tarafından önerilmiştir. Bükülmüş 4-regüler torus olarak adlandırılan çizgelerin bilgisayar mimarisindeki önemli uygulamaları olduğu gerçeğinden hareketle Smith bunların

döngüsel olup olmadığını sormuştur. Sonlu sayıdaki istisnalar dışında bükülmüş torusun eğriliğinin 0 olduğu bilinmektedir. Bu nedenle, Ricci eğriliği pozitif olan kenarlara sahip döngüsel çizgeler, yine sonlu sayıdaki istisnalar dışında, bükülmüş bir torus ile izomorfik olamaz. Bu gözlemden hareketle Smith, döngüsel çizgelerin Ricci eğriliklerine ait bir katalog oluşturulmasını ve pozitif eğriliğe sahip olanların belirlenmesini önermiştir. Aynı çalışmada, eğriliği sabit aileler bulmuş ve bunların bazıları için “eşleşme koşulu”ndan yararlanmıştır.

Eşleşme koşulu, Ricci eğriliği sabit olan aileler oluşturmak için kullanılabilecek çok önemli bir koşuldur. Fakat her çizge bu koşulu sağlamak zorunda değildir. Bu nedenle Dağlı, Ölmez ve Smith (2019) tarafından “genişletilmiş eşleşme koşulu” tanıtılarak sabit eğrilikli döngüsel çizge aileleri bulunmuştur. Yine aynı çalışmada, $p_i > 3$ ve $i \neq j$ için $(p_i, p_j) = 1$ olmak üzere $(\mathbb{Z}_n, +)$ grubunun mertebesi olan n tamsayısının

$$n = p_1 p_2 \cdots p_m$$

biçimindeki çarpımsal ayrışımı kullanılarak eşleşme koşulunu sağlayan ve böylelikle de sabit eğriliğe sahip aileler oluşturulmuştur.

Bilindiği üzere mertebesi n olan her Abelyan grup $(\mathbb{Z}_n, +)$ olmak zorunda değildir. Abelyan Grupların Temel Teoremine göre sonlu her Abelyan grup, her birinin mertebesi bir asal sayı kuvveti olan devirli grupların dış direkt toplamına izomorfiktir. Bu tezde, $(\mathbb{Z}_n, +)$ dışındaki Abelyan gruplar kullanılarak oluşturulan Cayley çizgelerinin eğriliklerinin hesaplanması hedeflenmiştir. Bu bağlamda, n tamsayısının çarpımsal ayrışımında kullanılan $(p_i, p_j) = 1$ koşulu kaldırıldığında veya p_i tamsayılarından sadece bir tanesinin 2 ve diğerlerinin 3’den büyük seçilmesi durumunda eşleşme koşulunu sağlayan aileler olduğu gösterilmiştir. Elde edilen sonuçlar Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 ile ifade edilmiştir. Bu sonuçlar ile literatüre katkıda bulunulduğu değerlendirilmektedir.

Bu tez çalışması şu şekilde organize edilmiştir. Bölüm 2’de Çizge Teorisinin temel kavramları üzerinde durulmuştur. Bunun yanı sıra döngüsel çizgeler ile Cayley çizgelerinin tanımları verilmiştir. Bölüm 3’te Lin ve diğerleri (2011) tarafından tanımlanan Ricci eğriliği verilmiş ve onu hesaplamak için kullanılan eşleşme ve genelleştirilmiş eşleşme koşullarına değinilmiştir. Özgün olan Bölüm 4’te ise eşleşme koşulunu sağlayan Cayley çizge aileleri oluşturulmuş ve bunlar Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 ile ifade edilmiştir. Edle edilen sonuçlar Bölüm 5’te özetlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çizge teorisinin temel kavramlarına kısaca bir göz atılacaktır. Daha ayrıntılı bir bilgi edinmek için örneğin Diestel (2017), West (2000) ve Wilson (2010) incelenebilir.

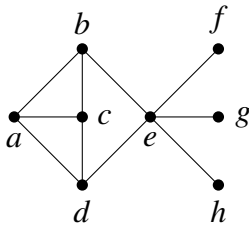
2.1. Çizge Kavramı

Tanım 2.1 V sonlu bir küme ve $E \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V, u \neq v\}$ olmak üzere $G = (V, E)$ sıralı ikilisine (basit) bir **çizge** veya **graf** denir. Buradaki V kümesi G 'nin **köşeleri**, E kümesi G 'nin **kenarları** olarak adlandırılır. Ayrıca $|V|$ sayısına G 'nin mertebesi, $|E|$ sayısına G 'nin büyüklüğü denir. Genellikle bir G çizgesinin köşeleri $V(G)$, kenarları ise $E(G)$ ile gösterilir.

Kısalık açısından $\{u, v\}$ kenarı uv ile temsil edilir. Eğer $uv \in E$ ise u ve v köşelerine **komşu** köşeler denir. Bu durumda u ve v köşeleri, uv kenarına **bitişiktir**. Aynı köşeye bitişik olan kenarlar komşudur. Bir köşenin komşu sayısına o köşenin **derecesi** denir. Eğer E kümesinin elemanları, iki elemanlı altkümeler yerine sıralı ikililer yani $E \subseteq \{(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$ seçilirse yönlü çizgeler elde edilir. Yönlü çizgelerdeki (u, v) kenarı $u \rightarrow v$ şeklinde yazılabilir.

Tanım 2.2 Her köşesinin derecesi aynı, örneğin r , olan bir çizgeye **r -regüler çizge** denir.

Çizgeleri temsil etmek için diyagramlar kullanılabilir. Bunun için çizgenin herbir köşesi bir nokta ile gösterilir. Çizgenin kenarları ise bitişik oldukları köşeler arasında çizilen çizgilerle temsil edilir. Örneğin, $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ ve $E = \{ab, ac, ad, bc, be, cd, de, ef, eg, eh\}$ ile verilen $G = (V, E)$ çizgesi aşağıdaki biçimde çizilebilir.



Şekil 2.1. Bir çizgenin diyagram ile gösterimi

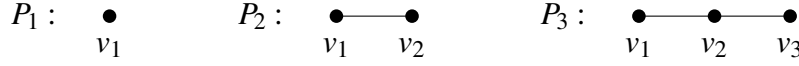
Tanım 2.3 $G = (V, E)$ çizgesi verilsin. Eğer $V(H) \subseteq V(G)$ ve $E(H) \subseteq E(G)$ ise H çizgesine G 'nin bir **alt çizgesi** denir ve $H \subseteq G$ yazılır. Eğer H alt çizgesi her $u, v \in V(H)$ için

$$uv \in E(G) \implies uv \in E(H)$$

koşulunu sağlıyor ise **indirgenmiş alt çizge** olarak adlandırılır.

Tanım 2.4 Köşeleri $v_1, v_2, \dots, v_n$ olan ve $v_1v_2, v_2v_3, \dots, v_{n-1}v_n$ kenarlarından oluşan çizgeye **yol çizgesi** denir. Bu çizge P_n ile gösterilir. Bir yolun içerdiği kenar sayısı, onun uzunluğudur.

Aşağıda, uzunlukları 0, 1 ve 2 olan yol çizgeleri verilmiştir.

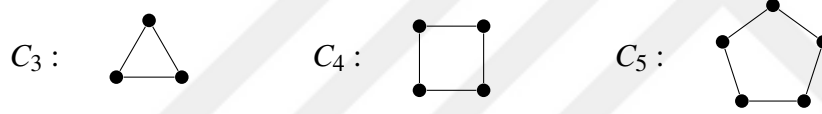


Şekil 2.2. P_1 , P_2 ve P_3 yolları

Tanım 2.5 Her u ve v köşesine karşılık bir $u - v$ yolu içeren çizgeye **bağlantılı**; aksi hâlde **bağlantısız** çizge denir.

Tanım 2.6 P_n yol çizgesine v_nv_1 kenarı eklenerek elde edilen çizge C_n ile gösterilir ve buna uzunluğu n olan **döngü** denir.

Aşağıda, uzunlukları sırasıyla 3, 4 ve 5 olan döngüler verilmiştir.

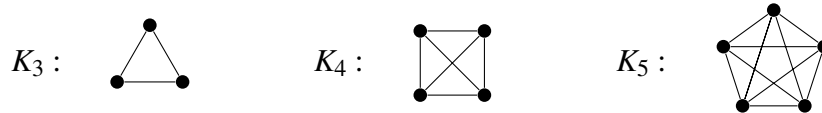


Şekil 2.3. C_3 , C_4 ve C_5 döngüleri

Tanım 2.7 Bütün köşeleri birbirine komşu olan çizgelere **tam çizgeler** denir.

Aslında n tane köşesi olan tam çizgeler birbirinin aynısıdır. Bu nedenle n köşeli tam çizgeler K_n ile gösterilir. Dikkat edilirse K_n tam çizgesinin $\frac{n(n-1)}{2}$ tane kenarı vardır.

Köşe sayıları sırasıyla 3, 4 ve 5 olan tam çizgeler aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.4. K_3 , K_4 ve K_5 tam çizgeleri

Tanım 2.8 X ile Y ayrık iki küme ve $V(G) = X \cup Y$ olsun. Eğer X ve Y kümeleri kendi içlerinde komşusuz fakat her $x \in X$ ve her $y \in Y$ için $xy \in E(G)$ ise G çizgesine **iki parçalı tam çizge** denir. Eğer $|X| = m$ ve $|Y| = n$ ise G yerine $K_{m,n}$ kullanılır.

Şimdi sıklıkla kullanacağımız döngüsel çizge ve Cayley çizgelerinin tanımlarına göz atalım.

2.2. Döngüsel Çizgeler

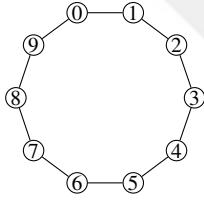
Bazı çizge aileleri çok fazla simetriye sahiptir. Bu ailelerden bir tanesi döngüsel çizgelerdir.

Tanım 2.9 Tamsayıların n modülüne göre toplama işlemi altında oluşturdukları toplamsal grubu $(\mathbb{Z}_n, +)$ ya da kısaca $\mathbb{Z}_n$ ile gösterelim. $J \subseteq \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \subseteq \mathbb{Z}_n$ olmak üzere

$$V = \mathbb{Z}_n \quad \text{ve} \quad E = \{\{x, x+d\} : x \in \mathbb{Z}_n, d \in J\}$$

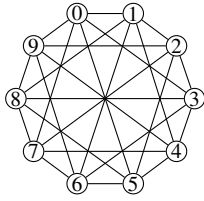
kümeleri ile tanımlı $C_n(J) = (V, E)$ çizgesine **döngüsel çizge** denir. Buradaki J kümesi **bağlantı** kümesi ya da **sıçrama** kümesi olarak adlandırılır.

Örnek 2.1 $G = \mathbb{Z}_n$ ve $J = \{1\}$ için uzunluğu n olan C_n döngüsü elde edilir. Örneğin $n = 10$ için elde edilen döngü aşağıda verilmiştir. Sonuçta her döngü aslında döngüsel bir çizgedir.



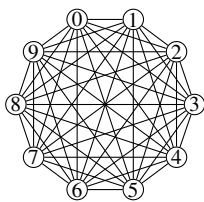
Şekil 2.5. C_{10} döngüsü ya da döngüsel çizgesi

Örnek 2.2 $G = \mathbb{Z}_{10}$ ve $J = \{1, 3, 5\}$ için elde edilen $C_{10}(1, 3, 5)$ çizgesi aşağıda verilmiştir.



Şekil 2.6. $C_{10}(1, 3, 5)$ çizgesi

Örnek 2.3 $G = \mathbb{Z}_{10}$ ve $J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ için elde edilen $C_{10}\{1, 2, 3, 4, 5\}$ çizgesi aslında K_{10} tam çizgesidir. Sonuç olarak K_n tam çizgesi döngüseldir.



Şekil 2.7. $C_{10}(1, 2, 3, 4, 5)$ döngüsel çizgesi ya da K_{10} tam çizgesi

2.3. Cayley Çizgeleri

Döngüsel çizgeleri genelleyen Cayley çizgeleri ya da Cayley renk çizgeleri, isimlerini ünlü matematikçi Arthur Cayley'den alır. Bu çizgeler, grupları geometrik olarak temsil eder.

Tanım 2.10 Birim elemanı e olan sonlu bir H grubu verilsin. $\emptyset \neq S \subset H$ ve $e \notin S$ olmak üzere köşeleri H grubunun elemanları olan ve kenarları

$$hh' \in E \iff h^{-1}h' \in S$$

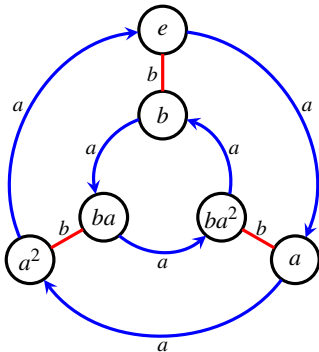
kuralı ile tanımlı çizgeye **Cayley çizgesi** denir. Bu çizge $\Gamma(H, S)$ ile gösterilir.

Bir başka deyişle $\Gamma(H, S)$ çizgesinin kenarları $\{h, hs\}$ formundadır. Eğer $\langle S \rangle = H$ yani S kümesi H grubunu üretirse $\Gamma(H, S)$ bağlantılı; aksi hâlde bağlantısızdır. Eğer s elemanının mertebesi 2 yani $s^2 = e$ ise $xss = x$ olacağı için çizgede $x \rightarrow xs$ kenarına ek olarak $xs \rightarrow x$ kenarı da vardır. Bu durumda x ile xs arasındaki yönlü iki kenar yerine, yönsüz tek bir kenar çizmek tercih edilebilir. Eğer S kümesi simetrik yani $S = S^{-1} = \{s^{-1} : s \in S\}$ ise $\Gamma(H, S)$ yönsüzdür. Cayley çizgesi bir diyagram ile gösterilirken her bir s elemanı için farklı renk kullanılarak kenarlar renklendirilebilir.

Örnek 2.4 Eşkenar bir üçgenin tüm dönme ve yansıma simetrilerinden oluşan

$$D_3 = \langle a, b : a^3 = b^2 = e, ab = ba^{-1} \rangle$$

dihedral grubunu ele alalım. Birbirinden farklı elemanları $\{e, a, b, ba, a^2, ba^2\}$ olan bu grup değişmeli olmayan en küçük gruptur. Eğer $S = \{a, b\}$ seçilir ise aşağıdaki yönlendirilmiş $\Gamma(D_3, S)$ Cayley çizgesi elde edilir.

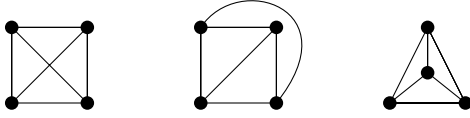


Şekil 2.8. $\Gamma(D_3, S)$ Cayley çizgesi

Yukarıdaki şekilde a için mavi renk, b için kırmızı renk kullanılmıştır. Buna göre $x \rightarrow xs$ formundaki kenarlar mavi, $x \rightarrow xb$ formundaki kenarlar ise kırmızı ile temsil edilmiştir.

2.4. Çizgelerde İzomorfizm

Bir çizgeyi göstermenin sabit bir kuralı yoktur. Bir başka deyişle, bir çizge birçok farklı şekilde çizilebilir. Örneğin aşağıdaki diyagramların hepsi aynı çizgeyi temsil etmektedir.



Şekil 2.9. K_4 tam çizgesinin farklı gösterimleri

Bu diyagramlardan hareketle, çizgelerde izomorfizm kavramı verilebilir.

Tanım 2.11 G ve H herhangi iki çizge olsun. Her $u, v \in V(G)$ için

$$uv \in E(G) \iff \varphi(u)\varphi(v) \in E(H)$$

olacak şekilde birebir ve örten bir $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ fonksiyonu var ise G ve H çizgeleri **izomorfiktir** denir ve $G \cong H$ yazılır. Aksi durumda G ile H izomorfik değildir.

Köşe ve kenar sayıları küçük olan çizgelerin izomorfik olup olmadıkları belirlemek kolaydır. Ancak bu sayılar arttıkça iş zorlaşır. Bu durumda çizgelerin farklı özellikleri tespit edilerek karar verilmeye çalışılabilir. Örneğin, aşağıdaki iki çizgenin köşe ve kenar sayıları aynıdır. Her iki çizgede derecesi 2 olan üç tane köşe, derecesi 3 olan iki tane köşe ve derecesi 4 olan bir tane köşe vardır. Üstelik her iki çizge de ikişer adet üçgen yani uzunluğu 3 olan döngü içermektedir. Dikkat edilirse soldaki üçgenlerde derecesi 2 olan tek bir köşe, sağdaki üçgenlerde ise derecesi 2 olan iki tane köşe vardır. O hâlde bu çizgeler izomorfik değildir.



Şekil 2.10. İzomorfik olmayan iki çizge

İki çizgenin izomorfik olmadıklarını göstermek için invaryantlar yani izomorfizm altında değişmeyen özellikler kullanılabilir. Ricci eğriliği bu invaryantlardan biridir. Önümüzdeki bölümde, döngüsel çizgelerin ve Cayley çizgelerinin Ricci eğrilikleri incelenecektir.

3. ÇİZGELERDE RİCCİ EĞRİLİĞİ

Bu bölümde, manifoldlar üzerinde tanımlı Ricci eğrilik kavramı gözden geçirilecek ve bunun çizgeler üzerine uyarlanmasından bahsedilecektir.

Boyutu n olan tam ve diferansiyellenebilir M Riemann manifoldu verilsin. Bu manifoldun bir x noktasındaki tanjant uzay üzerinde bulunan bir v birim vektörünü ele alalım. $\delta, \varepsilon > 0$ olmak üzere δv vektörünün bitiş noktası y olsun. $B_x(\varepsilon)$ ve $B_y(\varepsilon)$ ile merkezleri x ve y noktalarında bulunan ve yarıçapları ε olan yuvarları temsil edelim. Eğer paralel taşıma ile x ve y arasındaki jeodezik üzerinden $B_x(\varepsilon)$ yuvarı $B_y(\varepsilon)$ yuvarına gönderilirse noktalar ortalama olarak

$$d(x, y) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2(n+2)} Ric(v) + O(\varepsilon^3 + \varepsilon^2 \delta) \right)$$

kadar yer değiştirir. Buradaki $Ric(v)$ değerine v boyunca Ricci eğriliği denir.

Bu konuda daha detaylı bir bilgi edinmek için Ollivier (2010) incelenebilir.

Benzer bir eğrilik tanımını çizgeler üzerine yapabilmek için “yuvar” kavramına ve yuvarlar arasındaki “uzaklık” fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. Şimdi bunu inceleyelim.

3.1. Olasılık Dağılımı: ε -yuvarı

$G = (V, E)$ ve $x \in V$ olmak üzere x köşesinin komşularını x^E ile temsil edelim:

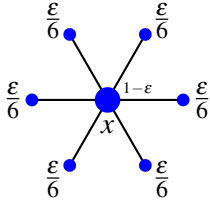
$$x^E = \{y \in V : \{x, y\} \in E\}.$$

Tanım 3.1 $0 < \varepsilon < 1$ olmak üzere

$$b_x^\varepsilon(v) = \begin{cases} 1 - \varepsilon, & v = x \\ \frac{\varepsilon}{|x^E|}, & v \in x^E \\ 0, & v \notin \{x\} \cup x^E \end{cases}$$

ile tanımlı olasılık dağılımına x köşesi üzerindeki ε -yuvarı denir.

Yukarıda tanım, manifoldlardaki yuvar kavramının çizgelere taşınması olarak düşünülebilir. Aşağıda, altı tane komşusu olan bir x köşesi üzerindeki ε -yuvarı yani olasılık dağılımı temsil edilmiştir. Aslında $b_x^\varepsilon(v)$ değeri, v köşesi üzerinde bulunan yük veya kütle miktarı olarak düşünülebilir. Bu kütlelerin toplamlarının 1 olduğuna dikkat edilmelidir.

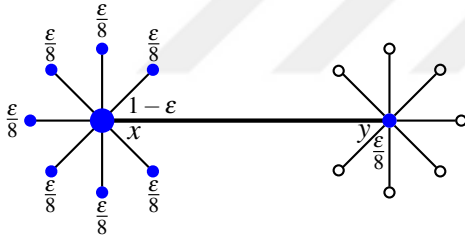


Şekil 3.1. Altı tane komşusu olan bir x köşesi üzerindeki olasılık dağılımı

Özetleyecek olursak bir x köşesi üzerindeki ε -yuvarı, bir manifoldun x noktasındaki ε -yuvarına benzer. Ricci eğriliğini tanımlayabilmek için geriye b_x^ε ve b_y^ε yuvarları arasında bir uzaklık kavramına ihtiyaç duyulur. Bunun için metrik uzaylardaki olasılık dağılımları üzerinde bir uzaklık fonksiyonu olan Wasserstein uzaklığı kullanılabilir.

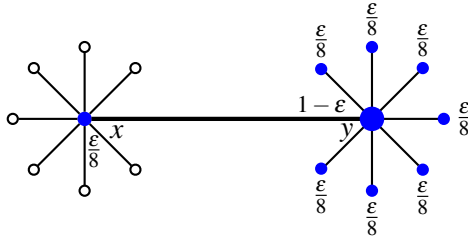
Tanım 3.2 G bir çizge ve $x, y \in V(G)$ olsun. $W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon)$ değeri, b_x^ε olasılık dağılımını b_y^ε olasılık dağılımı üzerine taşımanın **minimum maliyeti** olarak tanımlanır. Taşıma işlemi sırasında ortaya çıkan maliyet “Maliyet = Yük $\times$ Uzaklık” formülü ile bulunur.

Örnek 3.1 Aşağıda, 8 komşusu olan bir x köşesi üzerindeki olasılık dağılımı temsil edilmiştir.



Şekil 3.2. Bir x köşesi üzerindeki olasılık dağılımı

Bu dağılımı, aşağıda verilen y köşesi üzerindeki dağılıma, yani b_x^ε yuvarını b_y^ε yuvarına taşımanın minimum maliyeti $W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon)$ ile temsil edilir.



Şekil 3.3. Bir y köşesi üzerindeki olasılık dağılımı

İki tane yuvar arasındaki uzaklık kavramını artık bildiğimize göre Ricci eğriliğini çizgeler üzerinde tanımlayabiliriz.

3.2. Çizgelerin Ricci Eğrilikleri

Metrik uzaylar üzerindeki Ricci eğriliği tanımı Ollivier (2009) tarafından yapılmıştır. Manifoldlar üzerindeki eğrilikten ayırt edebilmek için bu eğriliğe kaba Ricci eğriliği de denir. Ollivier, $(b_x)_{x \in X}$ olasılık ölçü ailesine sahip olan bir (X, d) bir metrik uzayı üzerinde verilen herhangi iki x ve y noktası için $\kappa(x, y)$ ile temsil edilen Ricci eğriliğini

$$W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon) = (1 - \kappa(x, y)) d(x, y)$$

formülü ile tanımlamıştır. Bu tanım Lin ve diğerleri (2011) tarafından lokal olarak sonlu çizgelere aşağıdaki biçimde modifiye edilmiştir.

Tanım 3.3 $G = (V, E)$ bir çizge olsun. Herhangi bir $xy \in E$ kenarının **Ricci eğriliği**

$$\kappa(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon)}{\varepsilon}$$

ile tanımlanır. Her kenarı aynı eğriliğe sahip çizgelere **sabit Ricci eğrilikli çizgeler** denir.

Ricci eğriliği tüm kenarlar üzerinde tanımlıdır:

Teorem 3.1 $\kappa(x, y)$ limiti her zaman vardır (Lin ve diğerleri, 2011).

Ricci eğriliğini hesaplamak için iki tane olasılık dağılımı arasındaki Wasserstein uzaklığını bilmek gerekir. Bu ise bir lineer optimizasyon problemidir. Bu problem **asıl problem** olarak adlandırılır ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

Asıl Problem: $P(x, y)$

- Minimum $\sum_{(u,v) \in V^2} A_{uv} d(u, v)$.
- Koşul: $\sum_{v \in V} A_{uv} = b_x^\varepsilon(u)$ ve $\sum_{u \in V} A_{uv} = b_y^\varepsilon(v)$.

Yukarıdaki ifadede, A_{uv} sembolü ile u köşesinden v köşesine taşınan kütle miktarı temsil edilir. Bu problemi çözmek için tüm taşıma planları göz önünde bulundurulmalıdır.

Yukarıdaki lineer optimizasyon problemine karşılık gelen ve $D(x, y)$ ile gösterilen dual bir problem vardır. Bu problem aşağıdaki biçimde verilir:

Dual Problem: $D(x, y)$

- Maximum $\sum_{v \in V} [b_x^\varepsilon(v) - b_y^\varepsilon(v)] f(v)$.
- Koşul: $|f(u) - f(v)| \leq d(u, v)$.

Tanım 3.4 Yukarıdaki şartı sağlayan $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna **1-Lipschitz** fonksiyon denir.

Tüm 1-Lipschitz fonksiyonlarının kümesi $\mathcal{L}$ ve tüm taşıma planlarının kümesi $\mathcal{C}$ olsun. Buna göre Wasserstein uzaklığını bulmak için ya

$$W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon) = \inf_{A \in \mathcal{C}} \sum_{(u,v) \in V^2} A_{uv} d(u, v)$$

asıl problemi ya da

$$W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon) = \sup_{f \in \mathcal{L}} \sum_{v \in V} [b_x^\varepsilon(v) - b_y^\varepsilon(v)] f(v)$$

dual problemi çözümlidir. Yukarıdaki infimum veya supremum değerini doğrudan bulmak yerine farklı bir çözüm yöntemi benimsemek mümkündür. Dikkat edilirse her taşıma planı, asıl problem yani Wasserstein uzaklığı için bir üst sınır verir:

$$W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon) \leq \sum_{(u,v) \in V^2} A_{uv} d(u, v).$$

Buna karşılık her 1-Lipschitz fonksiyonu ise dual problem yani Wasserstein uzaklığı için bir alt sınır verir:

$$\sum_{v \in V} [b_x^\varepsilon(v) - b_y^\varepsilon(v)] f(v) \leq W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon).$$

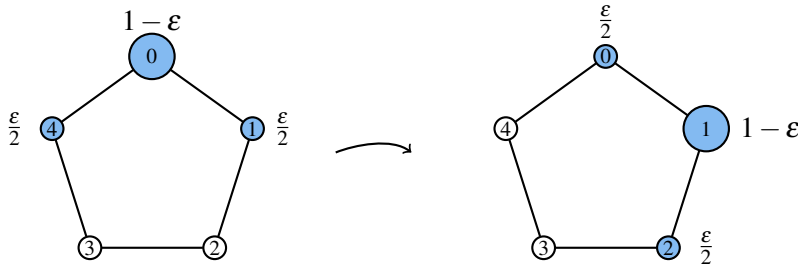
Eğer üst sınır ile alt sınır örtüştürülebilir ise optimal çözüm bulunmuş olur. Bir başka deyişle

$$\sum_{(u,v) \in V^2} A_{uv} d(u, v) \leq W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon) \leq \sum_{v \in V} [b_x^\varepsilon(v) - b_y^\varepsilon(v)] f(v)$$

olacak şekilde bir taşıma planı ile 1-Lipschitz f fonksiyonu bulunabilir ise optimal çözüm yani Wasserstein uzaklığı elde edilmiş olur.

Yukarıda bahsedilen metod kullanılarak sabit eğrilikli birçok aile bulunmuştur (Dağlı ve diğerleri, 2019; Smith, 2014). Bunlardan bazıları yeri geldikçe incelenecektir.

Örnek 3.2 C_5 döngüsü üzerinde $\kappa(0, 1)$ Ricci eğriliğini hesaplayalım. Bunun için öncelikle $W(b_0^\varepsilon, b_1^\varepsilon)$ Wasserstein uzaklığı bulunmalıdır. Aşağıdaki şeklin solunda, 0 köşesi üzerindeki b_0^ε olasılık dağılımı verilmiştir. Sağında ise 1 köşesi üzerindeki olasılık dağılımı verilmiştir.



Şekil 3.4. C_5 döngüsünün farklı iki köşesi üzerindeki olasılık dağılımları

Hatırlanacağı üzere $W(b_0^\varepsilon, b_1^\varepsilon)$ Wasserstein uzaklığı, b_0^ε dağılımını b_1^ε dağılımına taşımanın minimum maliyetidir. Taşıma işlemi, 0 köşesi üzerindeki kütlenin $1 - \frac{3\varepsilon}{2}$ birimini 1 köşesine doğrudan ve 4 köşesi üzerindeki kütlenin tamamını yani $\frac{\varepsilon}{2}$ birimini 2 köşesine 3 nolu köşe üzerinden taşıyarak yapılabilir. Bu taşıma işleminin maliyeti $W(b_0^\varepsilon, b_1^\varepsilon)$ için bir üst sınırdır. Buna göre asıl problemden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$W(b_0^\varepsilon, b_1^\varepsilon) \leq \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right) \cdot 1 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cdot 2 = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Şimdi, $f : \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu aşağıdaki biçimde tanımlayalım:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	1	0	0	1	2

Dikkat edilirse f fonksiyonu 1-Lipschitzdir. Buna göre dual problemden aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$W(b_0^\varepsilon, b_1^\varepsilon) \geq \sum_{v \in \mathbb{Z}_5} [b_x^\varepsilon(v) - b_y^\varepsilon(v)] f(v) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Asıl ve dual problemlerden elde edilen sınırlara göre optimal çözüm

$$W(b_0^\varepsilon, b_1^\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

biçimindedir. Sonuç olarak $\{0, 1\}$ kenarının Ricci eğriliği

$$\kappa(0, 1) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - W(b_0^\varepsilon, b_1^\varepsilon)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - \frac{\varepsilon}{2})}{\varepsilon} = \frac{1}{2}$$

olarak bulunur.

3.3. Eşleşme Koşulu

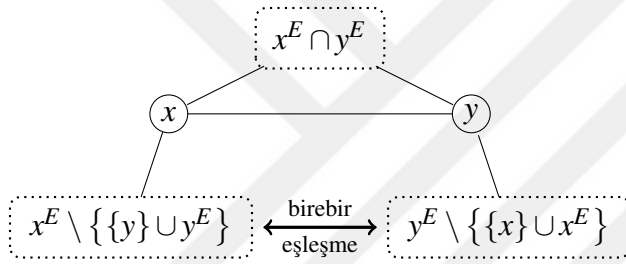
Bazı çizgelerin eğriliklerini hesaplamakta ve daha genel olarak sabit Ricci eğriliğine sahip aileler oluşturmakta kullanılan önemli yöntemlerden biri eşleşme koşuludur. Bu koşul Smith (2014) tarafından verilmiştir. Şimdi bunu inceleyelim.

Tanım 3.5 $G = (V, E)$ ve $xy \in E$ olsun. Eğer

$$x^E \setminus \{\{y\} \cup y^E\} \quad \text{ve} \quad y^E \setminus \{\{x\} \cup x^E\}$$

kümeleri arasında birebir eşleşme var ise xy kenarı **lokal eşleşme koşulunu sağlar** denir. Tüm kenarları lokal eşleşme koşulunu sağlayan çizge **global eşleşme koşulunu sağlar**.

Yukarıdaki tanım, şekilsel olarak aşağıda gösterilmiştir.



Şekil 3.5. Eşleşme koşulu

Eşleşme koşulunu sağlayan çizgelerin Ricci eğriliklerini hesaplamak kolaydır. Eğer çizge δ -regüler ise x üzerindeki kütlelerin $1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\delta}$ kadarı xy kenarı üzerinden y köşesine taşınır. Maliyeti arttırmamak için $x^E \cap y^E$ kümesi üzerinde bulunan kütleler olduğu yerde bırakılır. Son olarak $x^E \setminus \{\{y\} \cup y^E\}$ kümesi üzerinde bulunan kütle, onlarla birebir eşleşmeyi sağlayan kenarlar üzerinden direkt olarak $y^E \setminus \{\{x\} \cup x^E\}$ kümesi üzerindeki kütleyle gönderilir. Bu taşıma probleminin maliyetinden

$$W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon) \leq \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\delta}\right) \cdot 1 + (\delta - 1 - |x^E \cap y^E|) \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = 1 - (2 + |x^E \cap y^E|) \frac{\varepsilon}{\delta}$$

üst sınırı elde edilir. $W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon)$ değerine bir alt sınır bulmak için

$$f(v) = \begin{cases} 1, & v = x \\ -1, & v \in y^E \setminus x^E \\ 0, & v \notin \{x\} \cup y^E \end{cases}$$

biçiminde tanımlı 1-Lipschitz fonksiyonu kullanılır ise

$$W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon) \geq \left(1 - \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\delta}\right) \cdot 1 + (\delta - 1 - |x^E \cap y^E|) \cdot \frac{\varepsilon}{\delta} = 1 - (2 + |x^E \cap y^E|) \frac{\varepsilon}{\delta}$$

elde edilir. Böylelikle $W(b_x^\varepsilon, b_y^\varepsilon) = 1 - (2 + |x^E \cap y^E|) \frac{\varepsilon}{\delta}$ olmalıdır.

Bu bilgiler ışığında aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2 Lokal eşleşme koşulunu sağlayan bir xy kenarının Ricci eğriliği

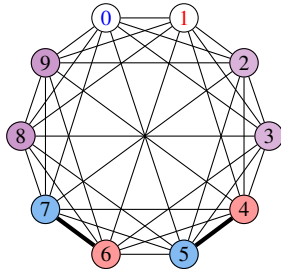
$$\kappa = \frac{|x^E \cap y^E| + 2}{\delta}$$

ile verilir. Buradaki δ sayısı, x ve y köşelerinin derecesidir (Smith, 2014).

Üçgen içermeyen bir çizgede, birbirine komşu olan iki köşenin ortak komşuları yoktur. Buna göre yukarıdaki teorem kullanılarak aşağıdaki sonuç kolaylıkla çıkarılabilir.

Sonuç 3.1 Üçgen içermeyen ve global eşleşme koşulunu sağlayan δ -regüler bir çizgenin Ricci eğriliği $\frac{2}{\delta}$ ile verilir (Smith, 2014).

Örnek 3.3 Aşağıda verilen çizge için $\kappa(0, 1)$ eğriliğini hesaplayalım.



Şekil 3.6. $C_{10}(1, 2, 3, 5)$ çizgesi

Dikkat edilirse $0^E = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9\}$ ve $1^E = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$ olduğu görülebilir. Buradan $0^E \cap 1^E = \{2, 3, 8, 9\}$ ve böylece

$$0^E \setminus \{1^E \cup \{1\}\} = \{5, 7\} \quad \text{ve} \quad 1^E \setminus \{0^E \cup \{0\}\} = \{4, 6\}$$

bulunur. Yukarıda, 0 köşesinin komşuları mavi, 1 köşesinin komşuları kırmızı ile boyanmıştır. Bunların ortak komşuları doğal olarak bu iki rengin birleşimi olan mor rengini almıştır.

Birbirleri arasında taşıma yapılacak 5 ve 7 ile 4 ve 6 köşeleri eşleşme koşulunu sağlar. Bu eşleşme yukarıda kalın çizgiler ile belirtilmiştir. Bu çizge aslında global eşleşme koşulunu

da sağlar. Sonuç olarak

$$\kappa = \frac{|x^E \cap y^E| + 2}{\delta} = \frac{4 + 2}{7} = \frac{6}{7}.$$

Eşleşme koşulu, grupların cebirsel özellikleri ile birlikte kullanılarak Ricci eğriliği sabit çizge aileleri oluşturulabilir. Bu şekilde Dağlı ve diğerleri (2019) tarafından sabit eğrilikli Cayley ve döngüsel çizge aileleri elde edilmiştir. Şimdi bu aileleri inceleyelim.

Hatırlanacağı üzere Ricci eğriliği bir çizge invariantıdır. Eğer H toplamsal bir grup, $S \subset H$ ve $0 \notin S = -S$ ise her $h \in H$ için

$$R_+(h) : H \rightarrow H; x \mapsto x + h$$

dönüşümü $\Gamma(H, S)$ üzerinde bir otomorfizmdir. Bu nedenle, bir Cayley çizgesinin $\{h, s + h\}$ kenarına ait Ricci eğriliğini hesaplamak için $\{e, s\}$ kenarının eğriliğini hesaplamak yeterlidir.

Teorem 3.3 H sonlu bir Abelyan grup ve $K \leq H$ olsun. Eğer $S = H \setminus K$ ise $\Gamma(H, S)$ Cayley çizgesinin eğriliği

$$\kappa = \frac{2 + |H| - 2|K|}{|H| - |K|}$$

ile verilir (Dağlı ve diğerleri, 2019).

İspat. H grubunun birim elemanı e olsun. Her $s \in S$ için

$$e^E \setminus (\{s\} \cup s^E) = (s + K) \setminus \{s\} \quad \text{ve} \quad s^E \setminus (\{e\} \cup e^E) = K \setminus \{e\}$$

olduğu gösterilebilir. Her $k \in K \setminus \{e\}$ için k ile $s + k$ köşeleri arasında bir kenar vardır. Bu nedenle yukarıdaki iki küme eşleşme koşunu sağlar. Buna göre

$$\kappa(e, s) = \frac{2 + |e^E \cap s^E|}{\delta} = \frac{2 + |H| - 2|K|}{|H| - |K|}$$

bulunur. Hatırlanacağı üzere $R_+(h)$ dönüşümü $\Gamma(H, S)$ üzerinde bir çizge otomorfizmdir. Üstelik, bu Cayley çizgesine ait herbir kenar $\{h, s + h\} = \{e, s\} + h$ formunda olduğu için

$$\kappa(h, s + h) = \kappa(e, s)$$

elde edilir. □

Bu teorem özel olarak $(\mathbb{Z}_n, +)$ toplamsal grubuna uygulanabilir. Bu grubun altgrupları n tamsayısı çarpanlara ayrılarak bulunur. Böylelikle seçilen J kümeleri altgrup tümleyenleridir.

Sonuç 3.2 Kabul edelim ki p ile q pozitif tamsayılar, $p \neq 1$ ve $n = pq$ olsun. $J = \mathbb{Z}_n \setminus \langle p \rangle$ olmak üzere $C_n(J)$ dögüsel çizgesinin Ricci eğriliği

$$\kappa = \frac{q(p-2)+2}{q(p-1)}$$

formülü ile verilir (Dağlı ve diğerleri, 2019).

Örnek 3.4 Kabul edelim ki $n = 12$, $p = 3$ ve $q = 4$ olsun. Eğer $H = \mathbb{Z}_{12}$, $K = \langle 3 \rangle = \{0, 3, 6, 9\}$ ve $J = \mathbb{Z}_{12} \setminus \langle 3 \rangle$ seçilirse $C_{12}(J)$ çizgesinin Ricci eğriliği

$$\kappa = \frac{4(3-2)+2}{4(3-1)} = \frac{3}{4}$$

olarak bulunur.

Örnek 3.5 Eğer $n = n \cdot 1$ şeklinde yazılırsa $p = n$ ve $q = 1$ seçilebilir. Buna göre $J = \mathbb{Z}_n \setminus \langle n \rangle$ bağlantı kümesine karşılık $C_n(J) = K_n$ tam çizgesi elde edilir. O hâlde K_n çizgesinin eğriliği

$$\kappa = \frac{1(n-2)+2}{1(n-1)} = \frac{n}{n-1}$$

biçimindedir.

Yukarıdaki örneklerde kullanılan J bağlantı kümeleri, $\mathbb{Z}_n$ toplamsal grubunun altgruplarının tümleyenleri olarak seçilmiştir. Burada akla gelen soru, J kümesinin iki veya daha fazla sayıda altgrupun birleşimlerinin tümleyeni olarak seçilmesi durumunda eğriliğin sabit olup olmayacağıdır. Bilindiği üzere iki altgrupun birleşimi bir altgrup olmak zorunda değildir. Bu nedenle Teorem 3.3 bu tür bağlantı kümelerinde işe yaramaz. Üstelik, altgrup birleşimlerinin tümleyeni olan bağlantı kümeleri ile $\mathbb{Z}_n$ içinde çalışmak oldukça karmaşıktır. Bu nedenle $\mathbb{Z}_n$ yerine, ona izomorfik olan direk toplamalar ile çalışmak işi kolaylaştırabilir. Daha açık olarak eğer $n = p_1 p_2 \cdots p_m$ ve her $i \neq j$ için $(p_i, p_j) = 1$ ise

$$\mathbb{Z}_n \rightarrow \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m}; x \mapsto (x \bmod p_1, x \bmod p_2, \dots, x \bmod p_m) \quad (3.1)$$

dönüşümü bir izomorfizmdir. Buna göre $\mathbb{Z}_n$ yerine $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m}$ ile çalışmak işleri kolaylaştırabilir.

Örnek 3.6 $\mathbb{Z}_6$ grubunu ele alalım. Dikkat edilirse $6 = 2 \cdot 3$ ve $\text{ebob}(2, 3) = 1$ olduğu için $\mathbb{Z}_6$ ile $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3$ grupları izomorfiktir. Bu iki grup arasındaki izomorfizm

$$\mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3; x \mapsto (x \bmod 2, x \bmod 3)$$

ile verilir. Çin Kalan Teoremi kullanılarak bu dönüşümün tersinin

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \rightarrow \mathbb{Z}_6; (a, b) \mapsto (3a + 4b) \bmod 6$$

olduğu görülebilir.

Şimdi $i \neq j$ için $\text{ebob}(p_i, p_j) = 1$ olmak üzere $n = p_1 p_2 \cdots p_m$ olduğunu kabul edelim. Her i için $p_i \mid n$ olduğundan

$$\langle p_i \rangle = \{lp_i : l = 0, 1, \dots, n/p_i\}$$

kümesi $\mathbb{Z}_n$ grubunun bir altgrubudur. Eğer

$$S = \langle p_1 \rangle \cup \langle p_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle p_m \rangle \quad \text{ve} \quad J = \mathbb{Z}_n \setminus S$$

seçilirse $J \subset \mathbb{Z}_n$ kümesinin Eşitlik 3.1'de verilen dönüşüm altındaki izomorfik görüntüsünün

$$J' = \{(j_1, j_2, \dots, j_m) : \forall 1 \leq k \leq m, j_k \neq 0\}$$

olduğu görülebilir. Böylelikle $C_n(J)$ ve $C_n(J')$ çizgeleri izomorfiktir.

Teorem 3.4 Kabul edelim ki $n = p_1 p_2 \cdots p_m$, $p_i > 3$ ve $i \neq j$ için $(p_i, p_j) = 1$ olsun. Eğer $S = \langle p_1 \rangle \cup \langle p_2 \rangle \cup \cdots \cup \langle p_m \rangle$ ve $J = \mathbb{Z}_n \setminus S$ ise $C_n(J)$ döngüsel çizgesinin Ricci eğriliği

$$\kappa = \frac{2 + \prod_{i=1}^m (p_i - 2)}{\prod_{i=1}^m (p_i - 1)}$$

formülü ile verilir (Dağlı ve diğerleri, 2019).

Örnek 3.7 Kabul edelim ki $n = 20$, $p_1 = 4$, $p_2 = 5$ olsun. Eğer $G = \mathbb{Z}_{20}$, $S = \langle 4 \rangle \cup \langle 5 \rangle$ ve $J = \mathbb{Z}_{20} \setminus S$ seçilirse $C_{20}(J)$ çizgesinin Ricci eğriliği

$$\kappa = \frac{2 + (4 - 2)(5 - 2)}{(4 - 1)(5 - 1)} = \frac{2}{3}$$

olarak bulunur.

Teorem 3.3 ve Teorem 3.4 ile eşleşme koşulunu sağlayan çizgelerden sabit eğrilikli aileler üretilir. Fakat her çizge eşleşme koşulunu sağlamak zorunda değildir. Örnek 3.2'de eğriliği hesaplanan C_5 döngüsü bunlardan biridir. Bu nedenle eşleşme koşulundan farklı koşullara ihtiyaç duyulur. Önümüzdeki bölümde bunlardan başka birine bakılacaktır.

3.4. Geniştirilmiş Eşleşme Koşulu

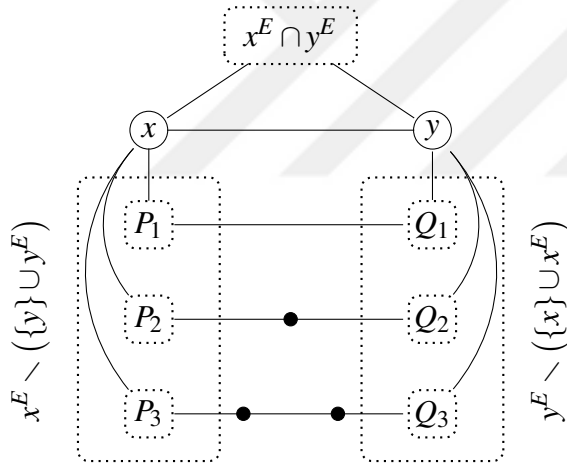
Eşleşme koşulu $x^E \setminus \{\{y\} \cup y^E\}$ ile $y^E \setminus \{\{x\} \cup x^E\}$ kümeleri arasında kenarlar (yani uzunluğu 1 olan yollar) üzerinden birebir bir eşleme olmasına dayanır. Fakat her zaman böyle bir eşleşme var olmayabilir. Böyle durumlarda, eşleşme için uzunlukları 2 veya 3 olan yollar kullanılmak zorunda kalınabilir. Buna göre aşağıdaki tanım yapılabilir.

Tanım 3.6 $G = (V, E)$ ve $xy \in E$ olsun. Eğer P_i kümesindeki her köşe, uzunluğu i olan bir yol ile Q_i kümesindeki bir tek köşe ile eşleşecek şekilde

$$\begin{aligned} x^E \setminus \{\{y\} \cup y^E\} &= P_1 \uplus P_2 \uplus P_3 \\ y^E \setminus \{\{x\} \cup x^E\} &= Q_1 \uplus Q_2 \uplus Q_3 \end{aligned}$$

ayrık birleşimleri var ise xy kenarı **genelleştirilmiş eşleşme koşulunu sağlar** denir.

Aşağıda, genelleştirilmiş eşleşme koşulunu sağlayan bir xy kenarının lokal yapısı verilmiştir.



Şekil 3.7. Genelleştirilmiş eşleşme koşulu

Yukarıdaki şekle dikkat edilirse P_1 ve Q_1 kümelerindeki köşeler standart eşleşme koşulunu sağlar. Buna karşılık P_2 ile Q_2 kümelerindeki köşeler, uzunlukları 2 olan yollar üzerinden birbirleriyle eşleşir. Benzer şekilde P_3 ile Q_3 kümelerindeki köşeler, uzunlukları 3 olan yollar üzerinden birbirleriyle eşleşir. Dikkat edilirse x köşenin komşuları, y köşesinin komşularına en fazla 3 birim uzaklıkta olabilir. Bu nedenle eşleme yapmak için uzunlukları 4 olan yollar kullanılamaz.

Tanım 3.7 Her kenarı lokal olarak genelleştirilmiş eşleşme koşulunu sağlayan çizge global olarak **genelleştirilmiş eşleşme koşulunu sağlar** denir.

Bu koşulun 2. tip ve 3. tip olarak adlandırılan iki özel hâli vardır. Şimdi bunları inceleyelim.

Tanım 3.8 $G = (V, E)$ ve $xy \in E$ olsun. Eğer

1. $P_2 = \{p\}$
2. $Q_2 = \{q\}$
3. $d(p, Q_1) \geq 2$
4. $d(q, P_1) \geq 2$
5. $P_3 = Q_3 = \emptyset$

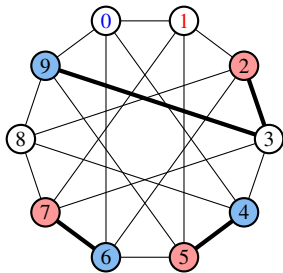
ise xy kenarı **2. tip genişletilmiş eşleşme koşulunu sağlar** denir. Burada $d(p, Q_1)$ ile p köşesinin Q_1 kümesine olan uzaklığı ve $d(q, P_1)$ ile q köşesinin P_1 kümesine olan uzaklığı temsil edilmektedir.

Teorem 3.5 2. tip eşleşme koşulunu sağlayan bir xy kenarının eğriliği

$$\kappa = \frac{|x^E \cap y^E| + 1}{\delta}$$

ile verilir (Dağlı ve diğerleri, 2019).

Örnek 3.8 Aşağıda verilen $C_{10}(1, 4)$ çizgesinin her kenarı 2. tip eşleşme koşulunu sağlar. Örneğin, $\{0, 1\}$ kenarı için $P_2 = \{9\}$, $Q_2 = \{2\}$ ve $P_3 = Q_3 = \emptyset$ olduğu görülebilir.



Şekil 3.8. $C_{10}(1, 4)$ çizgesi

Bu çizgenin birbirine komşu olan her x ve y köşesi için $x^E \cap y^E = \emptyset$ olduğundan

$$\kappa(x, y) = \frac{|x^E \cap y^E| + 1}{\delta} = \frac{1}{4}$$

elde edilir.

Tanım 3.9 $G = (V, E)$ ve $xy \in E$ olsun. Eğer

1. $P_3 = \{p\}$
2. $Q_3 = \{q\}$
3. $d(p, Q_1) \geq 2$
4. $d(q, P_1) \geq 2$
5. $P_2 = Q_2 = \emptyset$

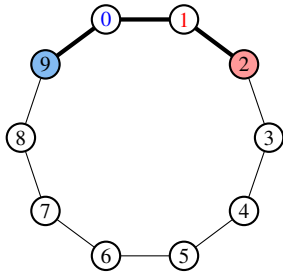
ise xy kenarı **3. tip genişletilmiş eşleşme koşulunu sağlar** denir.

Teorem 3.6 3. tip eşleşme koşulunu sağlayan bir xy kenarının eğriliği

$$\kappa = \frac{|x^E \cap y^E|}{\delta}$$

ile verilir (Dağlı ve diğerleri, 2019).

Örnek 3.9 Aşağıda verilen $C_{10}(1)$ döngüsünün her kenarı 3. tip eşleşme koşunu sağlar. Örneğin $\{0, 1\}$ kenarı için $P_3 = \{9\}$, $Q_3 = \{2\}$ ve $P_2 = Q_2 = \emptyset$ olduğu görülebilir.



Şekil 3.9. $C_{10}(1)$ döngüsü

Bu döngünün birbirine komşu olan her x ve y köşesi için $x^E \cap y^E = \emptyset$ olduğundan

$$\kappa(x, y) = \frac{|x^E \cap y^E|}{\delta} = 0$$

elde edilir.

Bu noktaya kadar ele alınan teorem ve örnekler literatürde mevcuttur. Önümüzdeki bölümde, Teorem 3.4'nin genişletilmesine dayanarak sabit eğrilikli yeni çizge aileleri oluşturulacaktır.

4. SABİT EĞRİLİKLİ CAYLEY ÇİZGELERİ

Abelyan Grupların Temel Teoremine göre sonlu her Abelyan grup, mertebeleri asal sayı kuvvetleri olan devirli grupların dış direkt toplamına izomorfiktir. Bir başka deyişle, p_i sayıları birbirinden farklı olmak zorunda olmayan asal sayılar olmak üzere sonlu her Abelyan grup

$$\mathbb{Z}_{p_1^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{n_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_k^{n_k}}$$

formundaki bir gruba izomorfiktir. Buradaki $p_1^{n_1}, p_2^{n_2}, \dots, p_k^{n_k}$ kuvvetleri, verilen Abelyan grup tarafından tek bir şekilde belirlenir. Mertebeleri aynı olan bu formdaki tüm gruplar, izomorfizm sınıfları olarak adlandırılır.

Genel olarak p bir asal sayı olmak üzere k pozitif tamsayısının her parçalanışına karşılık, p^k mertebeli bir tane grup vardır. Bir başka deyişle, n_i sayıları birer pozitif tamsayı olmak üzere

$$k = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$$

ise

$$\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_2}} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p^{n_s}}$$

grubu, mertebesi p^k olan bir Abelyan gruptur. Örneğin mertebesi p^3 olan Abelyan gruplar

$$\mathbb{Z}_{p^3}, \quad \mathbb{Z}_{p^2} \oplus \mathbb{Z}_p \quad \text{veya} \quad \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$$

gruplarından birine izomorfiktir. Üstelik bu üç grup kendi aralarında izomorfik değildir.

Örnek 4.1 Mertebesi $600=2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ olan Abelyan gruplar aşağıdakilerden birine izomorfiktir:

- (a) $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25}$,
- (b) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25}$,
- (c) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_{25}$,
- (d) $\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$,
- (e) $\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$,
- (f) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$.

Dikkat edilirse 2 ve 3 ve 5 ikişer ikişer aralarında asal olduğu için (a)'daki grup $\mathbb{Z}_{600}$ ile izomorfiktir. Bunun dışındakiler devirli değildir. Detaylar için Gallian (2012) incelenebilir.

Hatırlanacağı üzere $\mathbb{Z}_n$ grubunun altgrup birleşimlerinin tümleyenleri kullanılarak Teorem 3.4 ile oluşturulan çizge aileleri, n tamsayısının $n = p_1 p_2 \cdots p_m$ formundaki çarpımsal ayrışımına dayanır. Bu yazılıştta, p_i tamsayıları üzerinde iki tane koşul bulunmaktadır. Bunlar:

- (1) $p_i > 3$,
- (2) $i \neq j$ için $(p_i, p_j) = 1$.

Bu koşullardan birincisi, ispatta kullanılan eşleşme koşulunun geçerli olması için gereklidir. Aslında $p_1 = 3$ için farklı bir eşleşmenin var olabileceği bir sanı olarak bırakılmıştır (Dağlı ve diğerleri, 2019). İkinci koşul ise $\mathbb{Z}_n$ grubunun $\mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m}$ grubuna izomorfik olması için gereklidir. Fakat Abelyan Grupların Temel Teoreminden bildiğimiz üzere mertebesi n olan değişmeli tek grup $\mathbb{Z}_n$ değildir. Burada belirtmek gerekirse $\mathbb{Z}_n$ yerine başka bir grup kullanıldığında döngüsel olmaktan ziyade bir Cayley çizgesi elde edilir. Şimdi buna bir örnek verelim.

Asal olmak zorunda olmayan bir q tamsayısı verilsin. Mertebesi $n = q^2$ olan $H = \mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q$ Abelyan grubunu ele alalım. $H_1 = \mathbb{Z}_q \oplus \{0\}$ ve $H_2 = \{0\} \oplus \mathbb{Z}_q$ kümeleri, H grubunun $\mathbb{Z}_q$ ile izomorfik altgruplarıdır. $S = H_1 \cup H_2 = \{(h_1, h_2) : h_1 = 0 \text{ veya } h_2 = 0\}$ olmak üzere

$$J = H \setminus S = \{(j_1, j_2) : j_1 \neq 0, j_2 \neq 0\}$$

kümesini seçelim. Bu kümenin $\delta = (q-1)^2$ tane elemanının olduğu ve ayrıca $q > 2$ için H grubunu ürettiği görülebilir. Bu nedenle $\Gamma(H, J)$ çizgesi $q > 2$ olduğunda bağlantılıdır ve δ -regülerdir. Şimdi, $\{(0, 0), (j_1, j_2)\}$ kenarının eğriliğine bakalım. Dikkat edilirse

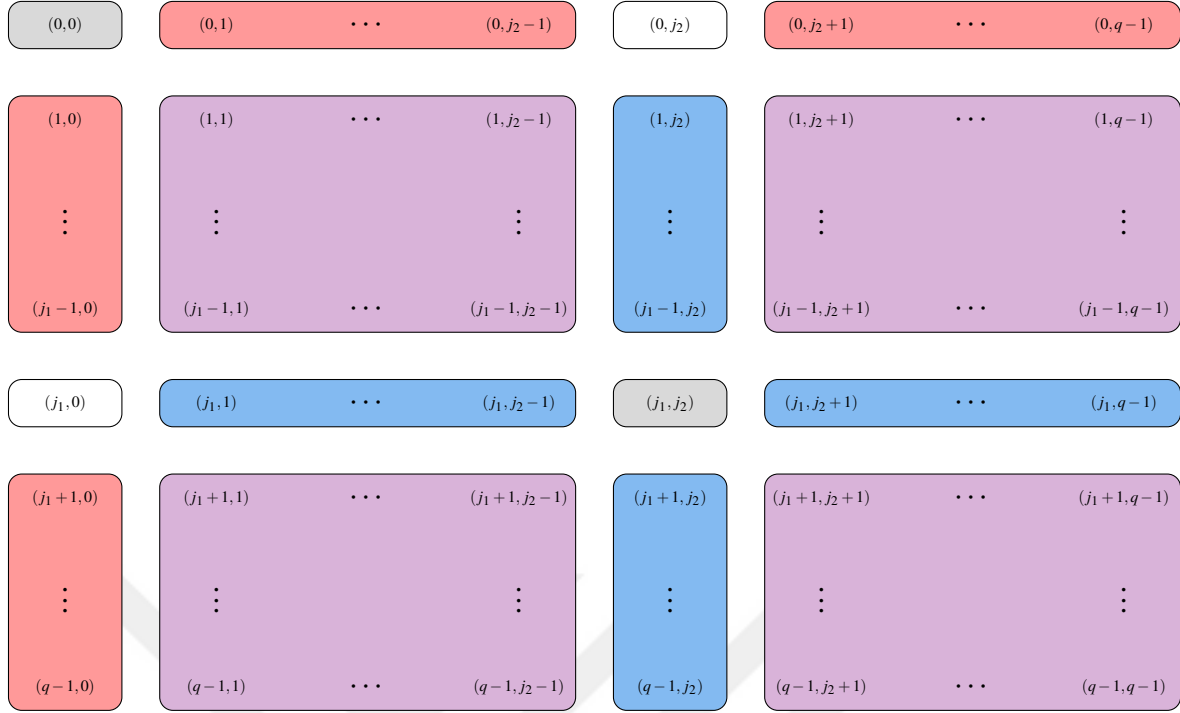
$$(0, 0)^E = \{(j_1, j_2) : j_1 \neq 0, j_2 \neq 0\} \quad \text{ve} \quad (j_1, j_2)^E = \{(a, b) : a \neq j_1, b \neq j_2\}$$

olduğu görülebilir. Buna göre

$$(0, 0)^E \cap (j_1, j_2)^E = \{(a, b) : a \neq 0, j_1 \text{ ve } b \neq 0, j_2\}$$

ve böylelikle $|(0, 0)^E \cap (j_1, j_2)^E| = (q-2)^2$ elde edilir.

Aşağıda, $\Gamma(H, J)$ çizgesinin köşeleri listelenmiştir. Her ne kadar kenarlar çizilmemiş olsa da her köşe, kendi bulunduğu satırda veya sütunda olmayan tüm köşeler ile komşudur. Buna göre $(0, 0)$ köşesinin (j_1, j_2) dışındaki komşuları mavi ve (j_1, j_2) köşesinin $(0, 0)$ dışındaki komşuları kırmızı ile boyanmıştır. Bu iki köşenin ortak komşuları ise hem mavi hem de kırmızı renk ile boyandıkları için doğal olarak mor rengini almıştır. Bir başka deyişle, $(0, 0)^E \setminus \{(j_1, j_2)^E \cup (j_1, j_2)\}$ kümesinin elemanları mavi, $(j_1, j_2)^E \setminus \{(0, 0)^E \cup (0, 0)\}$ kümesinin elemanları kırmızı ve $(0, 0)^E \cap (j_1, j_2)^E$ kümesinin elemanları mor ile temsil edilmiştir.



Şekil 4.1. $\Gamma(\mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q, J)$ Cayley çizgesi

Eşleşme koşulu $(0,0)^E \setminus \{(j_1, j_2)^E \cup (j_1, j_2)\}$ ve $(j_1, j_2)^E \setminus \{(0,0)^E \cup (0,0)\}$ kümeleri arasında bir eşleme arar. Şimdi bunun olup olmadığına bakalım. Eğer $A_1 = \{(a_1, 0) : a_1 \neq 0, j_1\}$, $A_2 = \{(0, a_2) : a_2 \neq 0, j_2\}$, $B_1 = \{(b_1, j_2) : b_1 \neq 0, j_1\}$ ve $B_2 = \{(j_1, b_2) : b_2 \neq 0, j_2\}$ seçilirse

$$(0,0)^E \setminus \{(j_1, j_2)^E \cup (j_1, j_2)\} = A_1 \cup A_2 \quad \text{ve} \quad (j_1, j_2)^E \setminus \{(0,0)^E \cup (0,0)\} = B_1 \cup B_2$$

yazılabilir. Dikkat edilirse A_1 kümesindeki her eleman, B_2 kümesinde bulunan hiçbir eleman ile aynı satırda veya aynı sütunda değildir. O hâlde A_1 kümesindeki her eleman B_2 kümesinin tüm elemanlarına komşudur. Böylelikle $\Gamma(H, J)$ Cayley çizgesinin $A_1 \cup B_2$ altkümesine indirgenmiş alt çizgesi aslında iki parçalı $K_{q-2, q-2}$ tam çizgesine izomorfiktir. Bu nedenle $q > 2$ için eşleşme koşulunu sağlar. Benzer durum $A_2 \cup B_1$ indirgenmiş alt çizgesi için de söz konusudur. Sonuç olarak $(0,0)^E \setminus \{(j_1, j_2)^E \cup (j_1, j_2)\}$ ve $(j_1, j_2)^E \setminus \{(0,0)^E \cup (0,0)\}$ kümeleri arasında bir eşleme vardır. O hâlde bu çizgenin Ricci eğriliği

$$\kappa = \frac{|(0,0)^E \cap (j_1, j_2)^E| + 2}{\delta} = \frac{(q-2)^2 + 2}{(q-1)^2}$$

olmalıdır.

Yukarıdaki örnek, Teorem 3.4'deki $(p_i, p_j) = 1$ koşulunun esnetilebileceğine işaret eder. Şimdi bunu bir teorem ile ifade edelim.

Teorem 4.1 $H = \mathbb{Z}_{p_1} \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{p_m}$ ve $p_i > 3$ olsun. $J = \{(j_1, j_2, \dots, j_m) : j_i \neq 0\}$ olmak üzere $\Gamma(H, J)$ Cayley çizgesinin Ricci eğriliği sabittir ve aşağıdaki formül ile verilir:

$$\kappa = \frac{2 + \prod_{i=1}^m (p_i - 2)}{\prod_{i=1}^m (p_i - 1)}.$$

İspat. $\Gamma(H, J)$ çizgesi toplamsal bir Cayley çizgesi olduğu için sadece $0 = (0, \dots, 0)$ köşesi ile herhangi bir $j = (j_1, \dots, j_m) \in J$ köşesi arasındaki eğriliği hesaplamak yeterlidir. Dikkat edileceği üzere $\delta = |J| = \prod_{i=1}^m (p_i - 1)$ olduğu için $\Gamma(H, J)$ çizgesi δ -regülerdir. Ayrıca

$$0^E = \{(a_1, \dots, a_m) : a_i \neq 0\} \quad \text{ve} \quad j^E = \{(b_1, \dots, b_m) : b_i \neq j_i\}$$

olduğu görülebilir. Buradan $0^E \cap j^E = \{(c_1, \dots, c_m) : c_i \neq 0, j_i\}$ ve böylelikle

$$|0^E \cap j^E| = \prod_{i=1}^m (p_i - 2)$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için $1 \leq k, l \leq m$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0^E \setminus \{\{j\} \cup j^E\} &= \{(a_1, \dots, a_m) : \exists k, a_k = j_k; \forall l, a_l \neq 0\} \setminus \{(j_1, \dots, j_m)\} \\ j^E \setminus \{\{0\} \cup 0^E\} &= \{(b_1, \dots, b_m) : \exists k, b_k = 0; \forall l, b_l \neq j_l\} \setminus \{(0, \dots, 0)\} \end{aligned}$$

kümeleri arasında bir eşleşme olduğu göstermek yeterlidir. Bunun için

$$\begin{aligned} A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} &= \{(a_1, \dots, a_m) : \forall i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, a_i = j_i; \forall l \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, a_l \notin \{0, j_l\}\}, \\ B_{\alpha_1 \dots \alpha_k} &= \{(b_1, \dots, b_m) : \forall i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, b_i = 0; \forall l \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, b_l \notin \{0, j_l\}\}, \end{aligned}$$

kümelerini tanımlayalım. Dikkat edilirse

$$A_{12 \dots m} = \{(j_1, j_2, \dots, j_m)\} \quad \text{ve} \quad B_{12 \dots m} = \{(0, 0, \dots, 0)\}$$

olduğu açıktır. Üstelik $\alpha_1 < \dots < \alpha_k < m$ ve $\beta_1 < \dots < \beta_l < m$ iken en az bir $1 \leq i \leq k$ için $\alpha_i \neq \beta_i$ olduğunda $A_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ ve $A_{\beta_1 \dots \beta_l}$ kümeleri ayrıktır. Aynı durum $B_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ ve $B_{\beta_1 \dots \beta_l}$ kümeleri için de söz konusudur. Böylelikle

$$0^E \setminus \{\{j\} \cup j^E\} = \bigsqcup_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k < m} A_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$$

ve

$$j^E \setminus \{\{0\} \cup 0^E\} = \bigsqcup_{\alpha_1 < \dots < \alpha_k < m} B_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$$

ayrık birleşimleri yazılabilir. Şimdi, $\Gamma(H, J)$ çizgesinin $A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \cup B_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ üzerine indirgenmiş

alt çizgesini ele alalım. Her $(a_1, \dots, a_m) \in A_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ için

$$(a_1, \dots, a_m)^E = \{(b_1, \dots, b_m) \in B_{\alpha_1 \dots \alpha_k} : a_i \neq b_i\}$$

olduğu açıktır. Eğer $i \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ise $a_i = j_i$ ve $b_i = 0$ olduğu için $a_i \neq b_i$ olmalıdır. Eğer $i \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}$ ise $a_i, b_i \in \mathbb{Z}_{p_i} \setminus \{0, j_i\}$ olmalıdır. Bu durumda $\mathbb{Z}_{p_i} \setminus \{0, j_i\}$ içerisinde a_i elemanından farklı olan $p_i - 3$ tane b_i vardır. Buradan

$$|(a_1, \dots, a_m)^E| = \prod_{i \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}} (p_i - 3)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$|(b_1, \dots, b_m)^E| = \prod_{i \notin \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}} (p_i - 3)$$

olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak $\Gamma(H, J)$ çizgesinin $A_{\alpha_1 \dots \alpha_k} \cup B_{\alpha_1 \dots \alpha_k}$ üzerine indirgenmiş alt çizgesi regülerdir ve eşleşme koşulunu sağlar. Buna göre Teorem 3.2'den ispat açıktır. $\square$

Teorem 4.2 $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_{p_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{p_m}$ ve $p_i > 3$ olsun. $J = \{(j_1, j_2, \dots, j_m) : j_i \neq 0\}$ için $\Gamma(H, J)$ Cayley çizgesinin Ricci eğriliği sabittir.

İspat. $1 \leq k, l \leq m$ olmak üzere bu teorem

$$A = \{(a_1, a_2, \dots, a_m) : \exists k, a_k = 0; \forall l, a_l \neq j_l\} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$$

ve

$$B = \{(b_1, b_2, \dots, b_m) : \exists k, b_k = j_k; \forall l, b_l \neq 0\} \setminus \{(j_1, j_2, \dots, j_m)\}$$

kümeleri arasında bir eşleşme bulma problemidir. Dikkat edilirse

$$A_1 = \{(0, a_2, \dots, a_m) : \exists 2 \leq k \leq m, a_k = 0, \forall 2 \leq l \leq m, a_l \neq j_l\} \setminus \{(0, 0, \dots, 0)\}$$

$$B_1 = \{(1, b_2, \dots, b_m) : \exists 2 \leq k \leq m, b_k = j_k, \forall 2 \leq l \leq m, b_l \neq 0\} \setminus \{(j_1, j_2, \dots, j_m)\}$$

$$A_2 = \{(0, a_2, \dots, a_m) : \forall k, 2 \leq k \leq m, a_k \neq 0, j_k\}$$

$$B_2 = \{(1, b_2, \dots, b_m) : \forall k, 2 \leq k \leq m, b_k \neq 0, j_k\}$$

olarak tanımlı kümeleri için $A = A_1 \cup A_2$ ve $B = B_1 \cup B_2$ yazılabilir. A_1 ile B_1 arasındaki bir eşleşme Teorem 4.1'den dolayı vardır. $\Gamma(H, J)$ Cayley çizgesinin $A_2 \cup B_2$ üzerine indirgenen alt çizgesi

$$d = (n_2 - 3)(n_3 - 3) \dots (n_m - 3)$$

regülerdir. Regüler çizgeler eşleşme koşulunu sağladığı için bu çizgenin eğriliği sabittir. $\square$

Örnek 4.2 $H = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$ ve $J = \{(j_1, j_2, j_3) : j_i \neq 0\}$ olmak üzere $\Gamma(G, J)$ Cayley çizgesi üzerinde $\kappa((0, 0, 0), (1, 3, 4))$ eğriliğini hesaplayalım.

Öncelikle, Teorem 4.2’de verilen kümeleri yazalım:

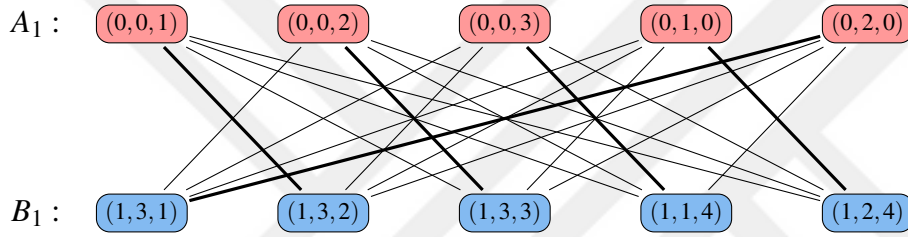
$$A_1 = \{(0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 0, 3), (0, 1, 0), (0, 2, 0)\}$$

$$B_1 = \{(1, 3, 1), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (1, 1, 4), (1, 2, 4)\}$$

$$A_2 = \{(0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 1), (0, 2, 2), (0, 2, 3)\}$$

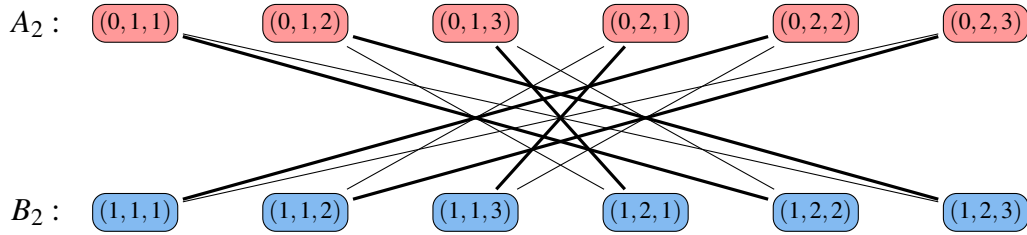
$$B_2 = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 1, 3), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (1, 2, 3)\}$$

Şimdi A_1 ile B_1 kümelerinin eşleşme koşulunu sağladığını gösterelim. $\Gamma(G, J)$ Cayley çizgesinin bu kümelere indirgenmiş olan alt çizgesi aşağıda verilmiştir.



Şekil 4.2. A_1 ile B_1 arasındaki eşleşme

Yukarıda iki parçalı çizge 4-regülerdir ve eşleşme koşulunu sağlar. Örnek eşleşmelerden bir tanesi kalın kenarlar ile belirtilmiştir. Şimdi A_2 ve B_2 kümelerine bakalım:



Şekil 4.3. A_2 ile B_2 arasındaki eşleşme

Yukarıda iki parçalı çizge 2-regülerdir ve eşleşme koşulunu sağlar. Örnek eşleşmelerden bir tanesi yine kalın kenarlar ile belirtilmiştir.

Sonuç olarak $A_1 \cup A_2$ ile $B_1 \cup B_2$ arasında bir eşleşme vardır. O hâlde $\Gamma(H, J)$ Cayley çizgesi eşleşme koşulunu sağlar. Bu nedenle eğriliği sabittir.

5. SONUÇ

Bu tez çalışmasında, Ricci eğriliği sabit olan çizge ailelerinin oluşturulması hedeflenmiştir. Bu yöndeki çalışmalardan bir tanesi Dağlı ve diğerleri (2019) tarafından yapılmıştır. İlgili çalışmada, Ricci eğriliği sabit olan döngüsel çizge aileleri oluşturmak için $\mathbb{Z}_n$ grubunun alt-grup birleşimlerinin tümleyenleri bağlantı kümeleri olarak seçilmiştir. Bu doğrultuda, $p_i > 3$ ve $i \neq j$ için $(p_i, p_j) = 1$ olmak üzere n tamsayısının

$$n = p_1 p_2 \cdots p_m$$

şeklindeki çarpımsal ayrışımı kullanılmıştır. Bu çalışmada, $p_i > 3$ ve $(p_i, p_j) = 1$ koşullarının esnetilip esnetilemeyeceği araştırılmıştır. Teorem 4.1 ile $(p_i, p_j) = 1$ koşulunun kaldırılması hâlinde de sabit eğrilikli çizge ailelerinin oluşacağı görülmüştür. Fakat bu durumda elde edilen çizge aileleri, döngüsel çizgelerden ziyade Cayley çizgeleridir. Teorem 4.2 ile p_i tamsayılarından bir tanesinin 2 ve diğerlerinin 3'ten büyük seçilmesi durumunda da eğriliğin sabit olacağı görülmüştür. Eğer p_i tamsayılarından iki tanesi veya daha fazlası 2 olarak seçilirse elde edilen çizge bağlantısız olacağı için eğrilik sabit olamaz. Son olarak, p_i tamsayılarından birinin veya daha fazlasının 3 olarak seçilmesi durumunda, eğriliğin sabit olup olmadığı belirlenememiştir. Çünkü Teorem 4.1'de kullanılan eşleşme koşulu $p_i = 3$ olması durumunda sağlanmamaktadır. İncelenen küçük çaplı örneklerde, eğriliğin bu durumda da sabit olduğu görülmüş ancak genel bir ispat verilememiştir.

Sonuç olarak, Teorem 4.1 ve Teorem 4.2 ile literatüre katkı sunulduğu değerlendirilmektedir.

KAYNAKLAR

- Bhattacharya, B. B., & Mukherjee, S. (2015). Exact and Asymptotic Results on Coarse Ricci Curvature of Graphs. *Discrete Mathematics*, 338(1), 23–42. <http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2014.08.012>
- Chung, F. R. K. & , Yau, S. T. (1996). Logarithmic Harnack inequalities. *Mathematical Research Letters*, 3, 793–812.
- Dağlı, M., Olmez, O., & Smith, J. D. H. (2019). Ricci curvature, circulants, and extended matching conditions. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 56(1), 201–217. <https://doi.org/10.4134/BKMS.B180179>
- Diestel, R. (2017). *Graph Theory*. Springer Publishing.
- Gallian, J. (2012). *Contemporary Abstract Algebra* (8th ed.). Cengage Learning.
- Li, H., Cao, J., Zhu, J., Liu, Y., Zhu, Q., & Wu, G. (2022). Curvature graph neural network. *Information Sciences*, 592, 50–66. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2021.12.077>
- Lin, Y., Lu, L., & Yau, S. T. (2011). Ricci curvature of graphs. *Tohoku Mathematical Journal*, 63(4), 605–627. <https://doi.org/10.2748/tmj/1325886283>
- Ollivier, Y. (2007). Ricci curvature of metric spaces. *Comptes Rendus Mathematique*, 345(11), 643–646. <https://doi.org/10.1016/j.crma.2007.10.041>
- Ollivier, Y. (2009). Ricci curvature of Markov chains on metric spaces. *Journal of Functional Analysis*, 256(3), 810–864. <https://doi.org/10.1016/j.jfa.2008.11.001>.
- Ollivier, Y. (2010). A survey of Ricci curvature for metric spaces and Markov chains. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 57. <https://doi.org/10.2969/aspm/05710343>
- Smith, J. D. H. (2014). Ricci curvature, circulants, and a matching condition. *Discrete Mathematics*, 329, 88–98. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.04.010>
- Sandhu, R. S., Georgiou, T. T., Reznik, E., Zhu, L., Kolesov, I., Senbabaoglu, Y., & Tannenbaum A. R. (2015). Graph Curvature for Differentiating Cancer Networks. *Scientific Reports*, 5. <https://doi.org/10.1038/srep12323>
- Sandhu, R, S., Georgiou, T. T., & Tannenbaum, A. R. (2016). Ricci curvature: An economic indicator for market fragility and systemic risk. *Science Advances*, 2(5). <https://doi.org/10.1126/sciadv.1501495>

Yamada, T. (2019). The Ricci curvature on directed graphs. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 56(1), 113–125. <https://doi.org/10.4134/JKMS.j180088>

West, D. B. (2000). *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall.

Wilson, R. J. (2010). *Introduction to Graph Theory*. Longman.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Yonca ÜNVER

Eğitim Derecesi Okul/Program Mezuniyet Yılı

Lisans Ondokuz Mayıs Üniversitesi /
Matematik Öğretmenliği 2017

İş Deneyimi/Yıl Çalıştığı Yer Görevi

2018- 2022 MEB/Siverek Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni

2022 - MEB/Kumburgaz Mehmet
Erçağ Anadolu Lisesi Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Ünver Y. & Dağlı M. (2022). Döngüsel Çizgelerin Ricci Eğrilikleri. İzmir Matematik Günleri - IV, 15-17 Haziran 2022, İzmir, Türkiye.