



**RIEMANN İNTEGRALLER
YARDIMIYLA KOORDİNATLARDA
ÇEŞİTLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Kübra ÖNAY

**Yüksek Lisans Tezi
Matematik Anabilim Dalı
Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR**

**2021
Her hakkı saklıdır**

**T.C.
AĞRI İBRAHİM ÇEÇEN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**RIEMANN İNTEGRALLER YARDIMIYLA KOORDİNATLARDA
ÇEŞİTLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER**

Kübra ÖNAY

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**AĞRI
2021**

Her hakkı saklıdır

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

RIEMANN İNTEGRALLER YARDIMIYLA KOORDİNATLARDA ÇEŞİTLİ İNTEGRAL EŞİTSİZLİKLER

Kübra ÖNAY

Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

Bu tezde, konveks fonksiyonlar dikdörtgensel bölge üzerinde incelenerek bu fonksiyonlar için koordinatlarda çeşitli integral eşitsizlikleri elde edilmiştir. Birinci bölüm konveks fonksiyonlar ve eşitsizlik teorisi için kısa bir tarihsel bakış içermekte olup, literatürde mevcut çalışmalar ile ilgili bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, konveks fonksiyonlar için temel tanım ve kavramlar yer almakla beraber, konveks fonksiyon sınıfları arasındaki ilişkiye değinilmiştir. Koordinatlarda konveks fonksiyonlarla ilgili temel tanım ve kavramlar, bu fonksiyon sınıfları için elde edilmiş çeşitli integral eşitsizlikleri ve ispat yöntemleri üçüncü bölümde verilmiştir. Daha sonra bu bölümde koordinatlarda integral eşitsizlikleri için detaylı bir literatür bilgisi sunulmuştur. Dördüncü bölümde ise öncelikle yeni bir integral özdeşliği ortaya konmuş ardından bu eşitlik yardımıyla dikdörtgensel bölge üzerinde konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizliklere ilişkin sonuçlar elde edilmiştir.

2021, 75 sayfa

Anahtar Kelimeler: Eşitsizlikler, koordinatlarda integral eşitsizlikler, konveks fonksiyon, m –konveks fonksiyon, s –konveks fonksiyon, h –konveks fonksiyon.

ABSTRACT

Master Thesis

VARIOUS INTEGRAL INEQUALITIES ON THE COORDINATES VIA RIEMANN INTEGRALS

Kübra ÖNAY

Ağrı İbrahim Çeçen University

Institute of Graduate Studies

Department of Mathematics

Supervisor : Prof. Dr. Ahmet Ocak AKDEMİR

In this thesis, convex functions are examined on the rectangular region and various integral inequalities are obtained for these functions in coordinates. The first chapter contains a brief historical overview for convex functions and inequality theory, and information about the existing studies in the literature is given. In the second chapter, basic definitions and concepts for convex functions are included, and the relationship between convex function classes is mentioned. Basic definitions and concepts related to convex functions in coordinates, various integral inequalities and proof methods for these function classes are given in the third chapter. Then, in this section, detailed literature information for integral inequalities in coordinates is presented. In the fourth chapter, firstly, a new integral identity is presented, and then with the help of this equation, results regarding new integral inequalities for convex functions on the rectangular region are obtained.

2021, 75 pages

Keywords: Inequalities, integral inequalities on the coordinates, convex function, m –convex function, s –convex function, h –convex function.

TEŞEKKÜR

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum bu çalışma Ağrı İbrahim Çeçen Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Yüksek Lisans tez çalışmamın başlangıcından bu yana, bu alanda çalışmamı destekleyen, bütün enerjisi ve engin birikimiyle beni motive eden, çalışmalarımnda eşsiz katkıları bulunan, bana bilimsel çalışma ve düşünme yeteneğini aşılayan saygıdeğer danışman hocam,

Sayın Prof. Dr. Ahmet Ocak Akdemir'e;

teşekkür ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca; öğrenim hayatım boyunca sabırla, güvenle ve ilgiyle hep yanımda olan desteklerini hiç eksik etmeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Kübra ÖNAY

Temmuz 2021

İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	i
ABSTRACT.....	ii
TEŞEKKÜR.....	iii
SİMGELER DİZİNİ.....	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. KURAMSAL TEMELLER	3
2.1. Genel Kavramlar	3
2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler	9
3. MATERYAL ve YÖNTEM	13
3.1. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar.....	13
3.2. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı İntegral Eşitsizlikler	18
4. ARAŞTIRMA BULGULARI	36
5. TARTIŞMA ve SONUÇ	61
KAYNAKÇA.....	62

SİMGELER DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}_+$	Pozitif reel sayılar kümesi
I	$\mathbb{R}$ 'de bir aralık
I°	I 'nın içi
$L_1[a, b]$	$[a, b]$ aralığında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$L_2(\Delta)$	Δ bölgesi üzerinde ikinci mertebeden integrallenebilen fonksiyonların kümesi
f'	f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi
$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}$	f fonksiyonunun t ve s 'ye göre kısmi türevi
$K_m(b)$	m –konveks fonksiyonların sınıfı
$K_m^\alpha(b)$	(α, m) –konveks fonksiyonların sınıfı
$SX(h, I)$	h –konveks fonksiyonların sınıfı
$SV(h, I)$	h –konkav fonksiyonların sınıfı
K_s^2	İkinci anlamda s –konveks fonksiyonların sınıfı
$\max$	Maksimum
$\min$	Minimum
$Q(I)$	Godunova-Levin fonksiyonu
$P(I)$	P –fonksiyon
$\mathcal{L}(I)$	Log-konveks fonksiyonlar sınıfı
$\mathcal{C}(I)$	Konveks fonksiyonlar sınıfı
$QC(I)$	Quasi–konveks fonksiyonlar sınıfı
$J(I)$	Jensen–konveks fonksiyonlar sınıfı
$SX(h, \Delta)$	Δ üzerinde h –konveks fonksiyonlar sınıfı
$SV(h, \Delta)$	Δ üzerinde h –konkav fonksiyonlar sınıfı
$QC(\Delta)$	Δ üzerinde quasi–konveks fonksiyonlar sınıfı
$J(\Delta)$	Δ üzerinde Jensen–konveks fonksiyonlar sınıfı
$JQC(\Delta)$	Δ üzerinde Jensen– quasi–konveks fonksiyonlar sınıfı
$W(\Delta)$	Δ üzerinde Wright–konveks fonksiyonlar sınıfı

$WQC(\Delta)$

Δ üzerinde Wright–quasi–konveks fonksiyonlar sınıfı

$\left\| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right\|_{\infty}$

f 'nin t, s 'ye göre kısmi türevinin sonsuz normu



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Aralık üzerinde konveks fonksiyon.....	5
Şekil 3.1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ ve $g(x, y) = e^x + y^4$ konveks fonksiyonları.....	20



1. GİRİŞ

Eşitsizlikler matematiğin bütün dallarında olduğu gibi mühendisliğin çeşitli dallarında, fizikte, nümerik integrasyonda, istatistikte, optimizasyon teorisinde ve yaklaşım teorisinde önemli bir yere sahiptir. Bu yüzden birçok araştırmacının ilgisini çekmiş ve eşitsizlik teorisi tarihsel gelişimini diğer birçok alanla ilişkili olarak bugüne kadar sürdürmüştür. Eşitsizlik teorisine ilişkin ilk çalışma Hardy, Littlewood ve Pólya tarafından 1934 yılında yazılan “Inequalities” adlı kitaptır. Bu kitapta eşitsizlikler konusu detaylı bir şekilde incelenerek birçok yeni eşitsizlik ve bu eşitsizliklerle ilgili uygulamalar verilmiştir. E.F. Beckenbach and R. Bellman (1961) tarafından 1934-1960 döneminde eşitsizlikler üzerine elde edilen bazı ilginç sonuçları içeren “Inequalities” adlı ikinci kitap yazılmıştır. Daha sonra bu iki kitapta yer almayan yeni konuları içeren “Analytic Inequalities” adlı kitap 1970 yılında Mitrinović tarafından yazılmıştır. Bu çalışmaların yanısıra Mitrinović *et al.* (1993) tarafından yazılan “Classical and New Inequalities in Analysis”, Pachpatte (2005) tarafından yazılan “Mathematical Inequalities” adlı kitaplar da eşitsizlikler konusunda yeni sonuçlar içeren ve bu konuda literatüre katkıda bulunan eserler arasında sayılabilir. Son yıllarda Sever S. Dragomir, V. Lakshmikantham ve Ravi P. Agarwal gibi araştırmacılar tarafından bu konuda çok sayıda kitap, makale ve monografi oluşturulmuştur.

Eşitsizlik teorisiyle yakından ilişkili konveks fonksiyon kavramı için birçok çalışma yapılmış ve çok sayıda integral eşitsizliği elde edilmiştir. Bugün en önemli integral eşitsizliklerinden biri konveks fonksiyonlar için Hadamard (veya Hermite-Hadamard) integral eşitsizliğidir. Hermite (1822-1901), bu eşitsizliği Ekim 1881 de, Journal Mathesis dergisine ispatsız olarak göndermiştir. Bu çalışmadan yaklaşık yirmi yıl sonra J.L.W.V. Jensen tarafından Jensen eşitsizliği ortaya atıldı (1905-1906). Bu iki çalışma ile popüler hale gelen konveks fonksiyonlar için integral eşitsizlikleri konusu günümüze kadar birçok araştırmacının ilgisini çekmiştir.

1900’lü yılların başından günümüze bu alanda çalışan araştırmacılar tarafından farklı türden konveks fonksiyon sınıfları elde edilerek bu fonksiyon sınıflarının özellikleri

incelenmiş ve çok sayıda integral eşitsizliği elde edilmiştir. Beckenbach and Bellman (1961) ve Mitrinović (1970) gibi pek çok araştırmacı, konveks fonksiyonlar için eşitsizlikler konusunu kitaplarında ele almışlardır. Sadece konveks fonksiyonlar için eşitsizlikleri içeren ilk kaynak (Convex Functions: Inequalities) 1987 yılında J. Pečarić tarafından yazılmıştır. Ayrıca Roberts and Varberg (1973), Pečarić *et al.* (1992), Niculescu and Persson (2006) gibi pek çok kişi konveks fonksiyonlar üzerinde eşitsizliklerle ilgi çok sayıda çalışma yapmışlardır. Bu çalışmaların bir kısmını integral eşitsizlikleri oluşturmaktadır.

Bu çalışmada, koordinatlarda konveks fonksiyonlar ve farklı türleri detaylı olarak incelenmiştir. Çalışmanın ikinci bölümünde konveks fonksiyonlar ile ilgili bazı temel tanım ve özellikler, konveks fonksiyonların ile ilgili birkaç sonuç ve farklı türden bazı konveks fonksiyon sınıfları için integral eşitsizlikler verilmiştir. Üçüncü bölümde koordinatlarda konveks fonksiyonlara ilişkin tanımlar ve bu fonksiyon sınıflarına ait bazı integral eşitsizlikler verilmiştir.

Çalışmanın dördüncü bölümünde ise çalışmada kullanılan yeni bir integral eşitliği ve ispatı verilmiş olup bu eşitlik yardımıyla konveks fonksiyonlar için koordinatlarda integral eşitsizlikler elde edilmiştir. Sonuçların ispatlarında elde edilen integral eşitliği, iki katlı integraller için Hölder ve Power mean eşitsizlikleri ve konveks fonksiyon tanımı kullanılmıştır.

2. KURAMSAL TEMELLER

2.1. Genel Kavramlar

İlk olarak çalışmanın temelini oluşturacak bazı temel kavramlar sunulacaktır.

Tanım 2.1.1. (Konveks küme): L bir lineer uzay $A \subseteq L$ ve $x, y \in A$ keyfi elemanlar olmak üzere

$$B = \{z \in L: z = \alpha x + (1 - \alpha)y, \quad 0 \leq \alpha \leq 1\} \subseteq A$$

oluyorsa A kümesine konveks küme denir.

Tanım 2.1.2. (J –konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık olmak üzere her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

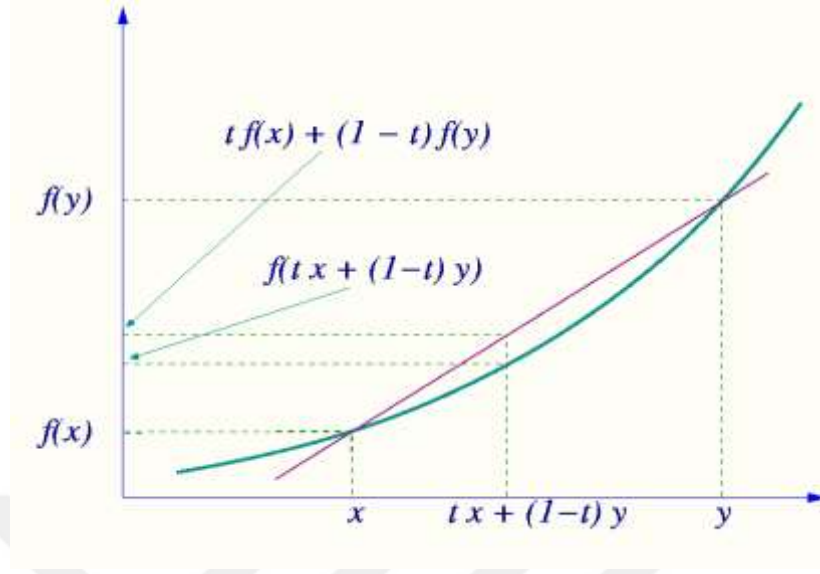
şartını sağlayan f fonksiyonuna I üzerinde Jensen anlamında konveks veya J –konveks fonksiyon denir (Mitrinović 1970).

Tanım 2.1.3. (Konveks fonksiyon): $I, \mathbb{R}'$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere her $x, y \in I$ ve $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y)$$

şartını sağlayan f fonksiyonuna konveks fonksiyon denir (Pečarić *et al.* 1992).

I üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonunun konveks olması demek geometrik olarak $(a, f(a))$ ve $(b, f(b))$ noktalarını içeren I üzerindeki doğru parçasının f 'nin grafiğinin üst kısmında yer almasıdır (Bakınız Şekil 2.1).



Şekil 2.1. Aralık üzerinde konveks fonksiyon

Tanım 2.1.4. (m –konveks fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b], t \in [0, 1]$ ve $m \in [0, 1]$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna m –konvektir denir (Toader 1988).

Tanım 2.1.5. ((α, m) –konveks fonksiyon): $f: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $b > 0$ olsun. Her $x, y \in [0, b], t \in [0, 1]$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$ için

$$f(tx + m(1-t)y) \leq t^\alpha f(x) + m(1-t^\alpha)f(y)$$

şartı sağlanıyorsa f fonksiyonuna (α, m) –konvektir denir (Miheşan 1993).

Burada $(\alpha, m) \in \{(0,0), (\alpha, 0), (1,0), (1,m), (1,1), (\alpha, 1)\}$ seçilirse, sırasıyla artan, α –starshaped (α –yıldızıl), starshaped (yıldızıl), m –konveks, konveks ve α –konveks fonksiyon sınıfları elde edilir.

Tanım 2.1.6. (Godunova-Levin fonksiyonu): Negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I, \lambda \in (0, 1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1 - \lambda}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Godunova-Levin fonksiyonu veya $Q(I)$ sınıfına aittir denir.

Bu tanıma denk olarak; $f \in Q(I)$ ve $x, y, z \in I$ ise, bu takdirde

$$f(x)(x - y)(x - z) + f(y)(y - x)(y - z) + f(z)(z - x)(z - y) \geq 0$$

eşitsizliği sağlanır (Godunova-Levin 1985).

Tanım 2.1.7. (P – fonksiyonu): Negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I$,

$\lambda \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq f(x) + f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye P – fonksiyonu veya $P(I)$ sınıfına aittir denir (Dragomir *et al.* 1995).

Tanımlardan açıkça görüleceği üzere, tüm negatif olmayan monoton ve negatif olmayan konveks fonksiyonlar $Q(I)$ sınıfına aittir. Ayrıca $Q(I) \supset P(I)$ ve $P(I)$ sınıfından fonksiyonlar negatif olmayan monoton, konveks ve quasi–konveks fonksiyonlardan meydana gelmektedir.

Tanım 2.1.8. (Birinci anlamda s –konveks fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha^s + \beta^s = 1$

ve $s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye birinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^1 ile gösterilir (Hudzik and Maligranda 1994).

Tanım 2.1.9. (İkinci anlamda s –konveks fonksiyon): $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$ ve

$s \in (0,1]$ olmak üzere tüm $u, v \in \mathbb{R}_+$ için $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha u + \beta v) \leq \alpha^s f(u) + \beta^s f(v)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye ikinci anlamda s –konveks fonksiyon denir. Bu fonksiyonların sınıfı K_s^2 ile gösterilir (Breckner 1978).

Tanım 2.1.10. (h –konveks fonksiyon): $h: J \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Negatif olmayan $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $x, y \in I, \alpha \in (0,1)$ olmak üzere

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq h(\alpha)f(x) + h(1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye h –konveks fonksiyon veya $SX(h, I)$ sınıfına aittir denir (Varosanec 2007).

Bu eşitsizlik yön değiştirirse, bu durumda f 'ye h –konkav fonksiyon veya $SV(h, I)$ sınıfına aittir denir. Eğer $h(\alpha) = \alpha$ alınırsa, bu takdirde tüm negatif olmayan konveks fonksiyonlar $SX(h, I)$ sınıfına ve tüm negatif olmayan konkav fonksiyonlar $SV(h, I)$ sınıfına aittir; $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ alınırsa, $SX(h, I) = Q(I)$; $h(\alpha) = 1$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq P(I)$ ve $h(\alpha) = \alpha^s$, $s \in (0,1)$ alınırsa $SX(h, I) \supseteq K_s^2$ olacağı açıktır.

Tanım 2.1.11. x, y pozitif sayılarının r . kuvvetlerine göre kuvvet ortalaması

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1 - \lambda)y^r)^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \text{ ise} \\ x^\lambda y^{1-\lambda}, & r = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.12. Pozitif f fonksiyonu her $x, y \in [a, b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında r –konveks fonksiyon denir (Gill et al. 1997).

Bu tanımdan 0 –konveks fonksiyonların $\log$ –konveks fonksiyonlar ve 1 –konveks fonksiyonların bilinen konveks fonksiyonlar olduğu sonucuna kolaylıkla ulaşılabilir.

r –konvekslik tanımı

$$f^r(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \begin{cases} (\lambda f^r(x) + (1 - \lambda)f^r(y))^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \text{ ise} \\ [f(x)]^\lambda [f(y)]^{1-\lambda}, & r = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

biçiminde genişletilmiştir (Pearce *et al.* 1998).

Tanım 2.1.13. (Quasi–konveks fonksiyon): $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $S \subset \mathbb{R}^n$ boştan farklı konveks küme olsun. $\forall x, y \in S$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye quasi–konveks fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye kesin quasi–konveks fonksiyon denir. Aynı şartlar altında

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye quasi–konkav fonksiyon ve

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \max\{f(x), f(y)\}$$

ise f 'ye kesin quasi–konkav fonksiyon denir (Dragomir and Pearce 1998).

Tanım 2.1.14. f hem quasi–konveks hem de quasi–konkav ise f 'ye quasi monotoniktir denir (Greenberg and Pierskalla 1971).

Not: Her konveks fonksiyon aynı zamanda quasi–konvekstir. Ama her quasi–konveks fonksiyon konveks olmayabilir.

Tanım 2.1.15. $I, \mathbb{R}$ 'de bir aralık ve $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\log f$ konveks ise veya her $x, y \in I$ and her $\alpha \in [0,1]$ için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq [f(x)]^\alpha [f(y)]^{(1-\alpha)}$$

ise f 'ye $\log$ –konveks fonksiyon ve bu eşitsizlik ters çevrilirse f 'ye $\log$ –konkav fonksiyon denir (Pečarić *et al.* 1992).

Tanım 2.1.16. Beta fonksiyonu

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt, \quad x, y > 0$$

şeklindedir. Bu eşitlik Euler tipi Beta integral fonksiyonu yada birinci çeşit Euler integrali olarak adlandırılır (Dragomir *et al.* 2000).

Teorem 2.1.17. (İntegraller için Hölder eşitsizliği): $p > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|^p$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Benzer şekilde iki katlı integraller için Hölder eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x, y)g(x, y)| dx dy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x, y)|^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b \int_a^b |g(x, y)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Ayrıca Hölder eşitsizliğinin bir sunucu olan power mean eşitsizliği de aşağıdaki gibi ifade edilir.

Sonuç 2.1.18. (Power Mean eşitsizliği): $q \geq 1$ olsun. f ve g , $[a, b]$ aralığında tanımlı reel fonksiyonlar, $|f|$ ve $|g|^q$, $[a, b]$ aralığında integrallenebilir fonksiyonlar ise

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_a^b |f(x)| dx \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b |f(x)||g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Benzer şekilde iki katlı integraller için power mean eşitsizliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\int_a^b \int_a^b |f(x, y)g(x, y)| dx dy \leq \left(\int_a^b \int_a^b |f(x, y)| dx dy \right)^{1-\frac{1}{q}} \left(\int_a^b \int_a^b |f(x, y)||g(x, y)|^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Reel sayılar için temel eşitsizliklerden bir tanesi de üçgen eşitsizliğidir.

Teorem 2.1.19. (Üçgen eşitsizliği): Herhangi x, y reel sayıları için

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|,$$

$$||x| - |y|| \leq |x + y|,$$

ve tümevarım metoduyla

$$|x_1 + \dots + x_n| \leq |x_1| + \dots + |x_n|$$

eşitsizlikleri geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

Teorem 2.1.20. (Üçgen eşitsizliğinin integral versiyonu): $f, [a, b]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a < b)$$

eşitsizliği geçerlidir (Mitrinović *et al.* 1993).

2.2. Farklı Türden Bazı Konveks Fonksiyonlar İçin İntegral Eşitsizlikler

Teorem 2.2.1. $I, \mathbb{R}$ de bir aralık, $a, b \in I$ ve $a < b$ olmak üzere $f: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Bu taktirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği literatürde konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği olarak bilinir (Pečarić *et al.* 1992).

Teorem 2.2.2. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $m \in (0,1]$ olmak üzere m -konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b$ ve $f \in L_1[am, b]$ ise bu takdirde;

$$\frac{1}{m+1} \left[\int_a^{mb} f(x)dx + \frac{mb-a}{b-ma} \int_{ma}^b f(x)dx \right] \leq (mb-a) \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir 2002).

Teorem 2.2.3. $f \in Q(I)$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Bu takdirde

$$p(x) = \frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2}, x \in I$$

olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{4}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

ve

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b p(x)f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizlikleri geçerli olur (Dragomir *et al.* 1995).

Teorem 2.2.4. $f \in P(I)$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $f \in L_1[a, b]$ olsun. Bu takdirde;

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq 2[f(a)+f(b)]$$

eşitsizliği geçerlidir (Dragomir *et al.* 1995).

Teorem 2.2.5. c pozitif bir sayı, $f, g \in SX(ch, I)$, $a, b \in I$, $a < b$ ve $fg \in L_1([a, b])$ olsun. Bu takdirde;

$$\frac{1}{2ch\left(\frac{1}{2}\right)}(fg)\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (fg)(x)dx \leq c[(fg)(a) + (fg)(b)] \int_0^1 h(\alpha)d\alpha$$

eşitsizliği geçerlidir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Teorem 2.2.6. $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(\alpha, m) \in (0, 1]^2$ olmak üzere (α, m) –konveks fonksiyon olsun. Eğer $0 \leq a < b$ ve $f \in L_1[am, b]$ ise bu takdirde;

$$\frac{1}{mb-a} \int_a^{mb} f(x)dx + \frac{1}{b-ma} \int_{ma}^b f(x)dx \leq \frac{1}{\alpha+1} [(1+\alpha m)(f(a) + f(b))]$$

eşitsizliği geçerlidir (Set *et al.* 2011).

İkinci anlamda s –konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliği aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 2.2.7. $s \in (0, 1)$ olmak üzere $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ ikinci anlamda s –konveks bir fonksiyon, $a, b \in [0, \infty)$ ve $a < b$ olsun. $f \in L_1[a, b]$ ise

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

olur.

İkinci eşitsizlikteki olabilecek en iyi sabit $k = 1/(s+1)$ ‘dir. (Dragomir and Fitzpatrick 1999).

Teorem 2.2.8. $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $a < b$ ve $f, g: [a, b] \rightarrow [0, \infty)$ iki konveks fonksiyon olsun. Bu durumda

$$M(a, b) = f(a)g(a) + f(b)g(b)$$

ve

$$N(a, b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$$

olmak üzere

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b)$$

dir (Pachpatte 2003).



3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlarla İlgili Genel Kavramlar

Çalışma boyunca $\Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2] \subset \mathbb{R}^2$ ve $\kappa_1 < \kappa_2$, $\tau_1 < \tau_2$ olarak alınacaktır.

Tanım 3.1.1. (Koordinatlarda konveks fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere eğer

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)z, \lambda y + (1 - \lambda)w) \leq \lambda f(x, y) + (1 - \lambda)f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde konvektir denir (Dragomir 2001).

$\forall x \in [\kappa_1, \kappa_2]$ ve $\forall y \in [\tau_1, \tau_2]$ için eğer

$$f_y: [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(u) = f(u, y)$$

ve

$$f_x: [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(v) = f(x, v)$$

kısmi dönüşümleri konveks ise $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konvektir.

Lemma 3.1.1. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her konveks fonksiyon koordinatlarda konvektir, fakat tersi genelde doğru değildir (Dragomir 2001).

Örnek 3.1.1. $f: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $f(x, y) = xy$ şeklinde tanımlansın. Bu fonksiyon koordinatlarda konveks olmasına rağmen $[0, 1]^2$ de konveks değildir (Dragomir 2001).

Koordinatlarda Konveks fonksiyon tanımına denk bir tanım şu şekilde yapılabilir:

Tanım 3.1.2. (Koordinatlarda konveks fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer

$$f(tx + (1-t)y, su + (1-s)w) \leq tsf(x, u) + s(1-t)f(y, u) \\ + t(1-s)f(x, w) + (1-t)(1-s)f(y, w)$$

eşitsizliği her $t, s \in [0,1]$ ve $(x, u), (x, w), (y, u), (y, w) \in \Delta$ için sağlanıyorsa f 'ye Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon denir (Latif and Alomari 2009b).

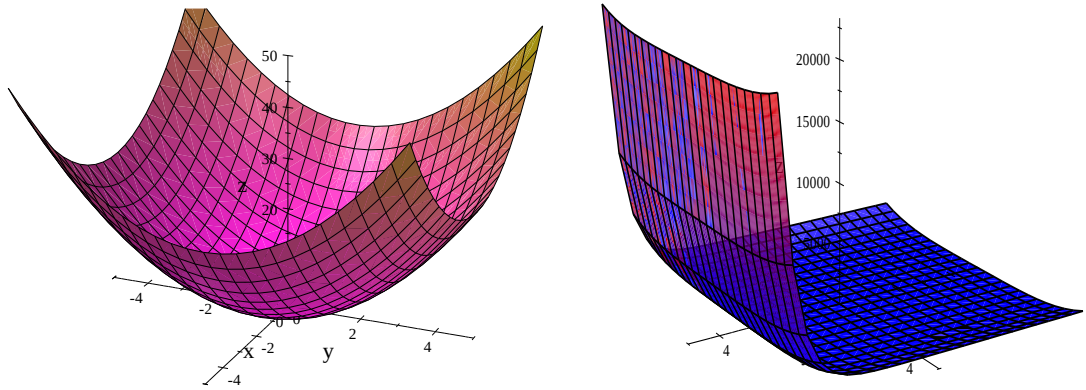
Lemma 3.1.2. $f: \Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}_+$ şeklinde tanımlansın. Eğer f iki kez diferensiyellenebilir ise f 'nin koordinatlarda konveks olması için gerek ve yeter şart

$$f_y: [\kappa_1, \kappa_2] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(u) = f(u, y)$$

ve

$$f_x: [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(v) = f(x, v)$$

şeklinde tanımlı kısmi dönüşümler için $f_x'' \geq 0$ ve $f_y'' \geq 0$ olmasıdır (Latif and Alomari 2009b).



Şekil 3.1. $f(x, y) = x^2 + y^2$ ve $g(x, y) = e^x + y^4$ konveks fonksiyonları

Lemma 3.1.3. $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı koordinatlarda konveks iki fonksiyon ve $\alpha \geq 0$ olsun. Bu takdirde $f + g$ ve αf koordinatlarda konvekstir (Latif and Alomari 2009b).

Lemma 3.1.4. $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı koordinatlarda konveks iki fonksiyon olsun. Bu takdirde fg koordinatlarda konvektir (Latif and Alomari 2009b).

Tanım 3.1.3. (Koordinatlarda m –konveks fonksiyon): $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta_1$ ve $m, t \in [0, 1]$ için eğer

$$f(tx + (1 - t)z, ty + m(1 - t)w) \leq tf(x, y) + m(1 - t)f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ_1 üzerinde m –konvektir denir (Özdemir *et al.* 2010).

$\forall x \in [0, b]$ ve $\forall y \in [0, d]$ için eğer

$$f_y: [0, b] \rightarrow \mathbb{R}, f_y(u) = f(u, y)$$

ve

$$f_x: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}, f_x(v) = f(x, v)$$

kısmi dönüşümleri m –konveks ise $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda m –konvektir.

Lemma 3.1.5. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her m –konveks fonksiyon $m \in [0, 1]$ için koordinatlarda m –konvektir (Özdemir *et al.* 2010).

Tanım 3.1.4. (Koordinatlarda (α, m) –konveks fonksiyon): $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta_1$ ve $(\alpha, m) \in [0, 1]^2, t \in [0, 1]$ için

$$f(tx + (1 - t)z, ty + m(1 - t)w) \leq t^\alpha f(x, y) + m(1 - t^\alpha)f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ_1 üzerinde (α, m) –konvektir denir (Özdemir *et al.* 2010).

Bu tanımda $(\alpha, m) = \{(1, m), (1, 1)\}$ alınması durumunda sırasıyla koordinatlarda m –konveks fonksiyonlar sınıfı ve koordinatlarda konveks fonksiyonlar sınıfı elde edilir.

Lemma 3.1.6. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlanan her (α, m) –konveks fonksiyon $(\alpha, m) \in [0,1]^2$ için koordinatlarda (α, m) –konvektir (Özdemir *et al.* 2010).

Tanım 3.1.5. (Koordinatlarda ikinci anlamda s –konveks fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $s \in (0, 1], \lambda \in [0, 1]$ için

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)z, \lambda y + (1 - \lambda)w) \leq \lambda^s f(x, y) + (1 - \lambda)^s f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde ikinci anlamda s –konvektir denir (Alomari and Darus 2008a).

Lemma 3.1.7. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde tanımlı her s –konveks fonksiyon koordinatlarda s –konvektir (Alomari and Darus 2008a).

Tanım 3.1.6. (Koordinatlarda birinci anlamda s –konveks fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta, \alpha^s + \beta^s = 1, s \in (0, 1]$ ve $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f(\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta w) \leq \alpha^s f(x, y) + \beta^s f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde birinci anlamda s –konvektir denir (Alomari and Darus 2008b).

Tanım 3.1.7. (Δ üzerinde h –konveks fonksiyon): $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta, \alpha \in [0, 1]$ ve pozitif bir fonksiyon $h: J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere negatif olmayan $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu eğer

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)z, \alpha y + (1 - \alpha)w) \leq h(\alpha)f(x, y) + h(1 - \alpha)f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde h –konvektir denir. Δ üzerinde h –konveks fonksiyonlar sınıfı $SX(h, \Delta)$ ile gösterilir. Eşitsizlik yön değiştirirse f 'ye Δ üzerinde h –konkav fonksiyon denir ve bu fonksiyonlar sınıfı $SV(h, \Delta)$ ile gösterilir (Latif and Alomari 2009a).

Koordinatlarda h –Konveks fonksiyon tanımı şu şekilde yapılabilir:

Tanım 3.1.8. (Koordinatlarda h –konveks fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall t, s \in [0,1]$ ve $(x, u), (x, w), (y, u), (y, w) \in \Delta$ için

$$f(tx + (1-t)y, su + (1-s)w) \leq h(t)h(s)f(x, u) + h(t)h(1-s)f(x, w) \\ + h(s)h(1-t)f(y, u) + h(1-t)h(1-s)f(y, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde koordinatlarda h –konvektir denir (Latif and Alomari 2009a).

Tanım 3.1.9. Negatif olmayan $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z, \lambda y + (1-\lambda)w) \leq \frac{f(x, y)}{\lambda} + \frac{f(z, w)}{(1-\lambda)}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde Godunova-Levin sınıfından fonksiyon denir (Akdemir and Özdemir 2010).

Lemma 3.1.8. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her Godunova-Levin sınıfına ait fonksiyon koordinatlarda Godunova-Levin sınıfına aittir (Akdemir and Özdemir 2010).

Tanım 3.1.10. Negatif olmayan $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall (x, y), (z, w) \in \Delta$ ve $\lambda \in (0,1)$ için

$$f(\lambda x + (1-\lambda)z, \lambda y + (1-\lambda)w) \leq f(x, y) + f(z, w)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde P –fonksiyon denir (Akdemir and Özdemir 2010).

Lemma 3.1.9. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ şeklinde tanımlı her P –fonksiyon koordinatlarda P –fonksiyondur (Akdemir and Özdemir 2010).

Tanım 3.1.11. (Koordinatlarda Log–konveks fonksiyon): $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $\forall(x, y), (u, v) \in \Delta$ ve $t, s \in [0, 1]$ için

$$f(\alpha x + \beta z, \alpha y + \beta w) \leq [f(x, y)]^\alpha [f(z, w)]^\beta$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f 'ye Δ üzerinde koordinatlarda log–konveks fonksiyon denir (Alomari and Darus 2009).

Alomari and Darus koordinatlarda log–konveks fonksiyonlar için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir.

Sonuç 3.1.1. $f: \Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu koordinatlarda log–konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} \log f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) &\leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \log f(x, y) dx dy \\ &\leq \log \sqrt[4]{f(\kappa_1, \tau_1)f(\kappa_1, \tau_2)f(\kappa_2, \tau_1)f(\kappa_2, \tau_2)} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari and Darus 2009).

3.2. Koordinatlarda Konveks Fonksiyonlar İçin Bazı İntegral Eşitsizlikler

Koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Dragomir tarafından elde edilen Hadamard-tipi eşitsizlikler aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 3.2.1. $f: \Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde;

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) dx + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y\right) dy \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\
&\leq \frac{1}{4} \left[\frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_2) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_1, y) dy + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_2, y) dy \right] \\
&\leq \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{4}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Dragomir 2001).

Benzer yöntemler kullanılarak koordinatlarda s –konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler ispatlanmıştır.

Teorem 3.2.2. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu koordinatlarda s –konveks fonksiyon olsun.

Bu takdirde:

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \\
&\leq 2^{s-2} \left[\frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y\right) dy \right] \\
&\leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\
&\leq \frac{1}{2(s+1)} \left[\frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_2) dx \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_1, y) dy + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_2, y) dy \Bigg] \\
& \leq \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari and Darus 2008a).

Teorem 3.2.3. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu koordinatlarda birinci anlamda s –konveks fonksiyon olsun. Bu takdirde:

$$\begin{aligned}
& f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) dx + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y\right) dy \right] \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\
& \leq \frac{1}{2(s+1)} \left[\frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_2) dx \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_1, y) dy + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_2, y) dy \right] \\
& \leq \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + sf(\kappa_1, \tau_2) + sf(\kappa_2, \tau_1) + s^2 f(\kappa_2, \tau_2)}{(s+1)^2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır (Alomari and Darus 2008b).

Koordinatlarda h –konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiştir.

Teorem 3.2.4. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu koordinatlarda h –konveks fonksiyon, $f \in L_2(\Delta)$ ve $h \in L_1[0,1]$ olsun. Bu takdirde:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\left(h\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) &\leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\ &\leq [f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)] \left(\int_0^1 h(\alpha) d\alpha\right)^2 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Latif and Alomari 2009a).

Özdemir *et al.* 2010 yılındaki çalışmalarında benzer yöntemler kullanarak koordinatlarda m –konveks ve (α, m) –konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.5. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda m –konveks fonksiyon olsun. Eğer $m \in (0, 1]$ ile birlikte $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \infty$ ve $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \infty$ ise

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\ \leq \frac{1}{4(\kappa_2 - \kappa_1)} \min\{v_1, v_2\} + \frac{1}{4(\tau_2 - \tau_1)} \min\{v_3, v_4\} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada

$$\begin{aligned} v_1 &= \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \tau_1) dx + m \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_2}{m}\right) dx, & v_2 &= \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \tau_2) dx + m \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1}{m}\right) dx \\ v_3 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, y) dy + m \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_2}{m}, y\right) dy, & v_4 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, y) dy + m \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1}{m}, y\right) dy \end{aligned}$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2010).

Teorem 3.2.6. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda m –konveks fonksiyon olsun. Eğer $m \in (0, 1]$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \infty$ ve $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \infty$ ile birlikte $f_x \in L_1[0, \tau_2]$, $f_y \in L_1[0, \kappa_2]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) dx + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y\right) dy \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left[\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{f(x, y) + mf\left(x, \frac{y}{m}\right)}{2} dy dx \right. \\
& \quad \left. + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \frac{f(x, y) + mf\left(\frac{x}{m}, y\right)}{2} dx dy \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2010).

Teorem 3.2.7. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda (α, m) -konveks fonksiyon olsun. Eğer $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \infty$ ve $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \infty$ ile birlikte $f_x \in L_1[0, \tau_2]$, $f_y \in L_1[0, \kappa_2]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) dx + \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y\right) dy \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left[\int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{2f(x, y) + m(2^\alpha - 1)\left(f\left(x, \frac{y}{m}\right) + f\left(\frac{x}{m}, y\right)\right)}{2^\alpha} dx dy \right]
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\
& \leq \frac{1}{2(\alpha + 1)(\kappa_2 - \kappa_1)} \min\{w_1, w_2\} + \frac{1}{2(\alpha + 1)(\tau_2 - \tau_1)} \min\{w_3, w_4\}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Burada

$$w_1 = \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \tau_1) dx + \alpha m \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_2}{m}\right) dx,$$

$$\begin{aligned}
w_2 &= \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \tau_2) dx + \alpha m \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1}{m}\right) dx \\
w_3 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, y) dy + \alpha m \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_2}{m}, y\right) dy, \\
w_4 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, y) dy + \alpha m \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1}{m}, y\right) dy
\end{aligned}$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2010).

Teorem 3.2.8. $f: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ koordinatlarda (α, m) –konveks fonksiyon olsun. Eğer $(\alpha, m) \in [0, 1]^2$, $0 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \infty$ ve $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \infty$ ile birlikte $f_x \in L_1[0, \tau_2]$, $f_y \in L_1[0, \kappa_2]$ ise

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\
& \leq \frac{1}{4(\alpha + 1)} \left[\frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \tau_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \tau_2) dx \right. \\
& \quad + \frac{m\alpha}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1}{m}\right) dx + \frac{m\alpha}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_2}{m}\right) dx \\
& \quad + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, y) dy + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, y) dy \\
& \quad \left. + \frac{m\alpha}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1}{m}, y\right) dy + \frac{m\alpha}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_2}{m}, y\right) dy \right]
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2010).

Sarıkaya *et al.* 2010 yılında yaptıkları çalışmada daha önceki çalışmalardan farklı olarak aşağıdaki lemmayı elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.1. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L_2(\Delta)$ ise;

$$\begin{aligned} & \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{4} + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_1, y) dy + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_2, y) dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_2) dx \right] \\ & = \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{4} \int_0^1 \int_0^1 (1-2t)(1-2s) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(t\kappa_1 + (1-t)\kappa_2, s\tau_1 \\ & \quad + (1-s)\tau_2) dt ds \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Sarıkaya *et al.* 2010 yılında yaptıkları çalışmalarında bu eşitliği kullanarak koordinatlarda konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.9. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ koordinatlarda konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy - A \right| \\ & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{4} \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_1, y) dy + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_2, y) dy \right. \\ \left. + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_2) dx \right]$$

şeklindedir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Teorem 3.2.10. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer, $q > 1$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ koordinatlarda konveks ise

$$\left| \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right. \\ \left. + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy - A \right| \\ \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\ \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$A = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_1, y) dy + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_2, y) dy \right. \\ \left. + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_2) dx \right]$$

şeklindedir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Teorem 3.2.11. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilen bir dönüşüm olsun. Eğer, $q \geq 1$ olmak üzere $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ koordinatlarda konveks ise

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy - A \right| \\ & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{16} \\ & \quad \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2} & \left[\frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_1, y) dy + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\tau_2, y) dy \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \kappa_2) dx \right] \end{aligned}$$

şeklindedir (Sarıkaya *et al.* 2010).

Özdemir *et al.* 2011 yılında yaptıkları çalışmada aşağıdaki eşitliği elde etmiş ve bu eşitlik yardımıyla koordinatlarda konveks fonksiyonlar için yeni integral eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Lemma 3.2.2. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\lambda \in [0, 1]$ olmak üzere eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \in L_2[\Delta]$ ise

$$\begin{aligned}
J &= (1-\lambda)^2 f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) + \lambda^2 \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{4} \\
&\quad + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \left[f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_1\right) + f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_2\right) + f\left(\kappa_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \right. \\
&\quad \left. + f\left(\kappa_2, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \right] - (1-\lambda) \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y\right) dy \\
&\quad - (1-\lambda) \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) dx \\
&\quad - \frac{\lambda}{2} \left[\frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} [f(x, \tau_1) + f(x, \tau_2)] dx \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} [f(\kappa_1, y) + f(\kappa_2, y)] dy \right] \\
&\quad + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\
&= \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} K(x)M(y) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) dx dy
\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ve burada

$$K(x) = \begin{cases} x - \left(\kappa_1 + \lambda \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2}\right), & x \in \left[\kappa_1, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}\right) \\ x - \left(\kappa_2 - \lambda \frac{\kappa_2 - \kappa_1}{2}\right), & x \in \left[\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \kappa_2\right] \end{cases}$$

ve

$$M(y) = \begin{cases} y - \left(\tau_1 + \lambda \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}\right), & y \in \left[\tau_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \\ y - \left(\tau_2 - \lambda \frac{\tau_2 - \tau_1}{2}\right), & y \in \left[\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \tau_2\right] \end{cases}$$

dir (Özdemir *et al.* 2011c).

Teorem 3.2.12. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise

$$|J| \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{16} [2\lambda^2 - 2\lambda + 1]^2 \\ \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2011c).

Teorem 3.2.13. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için;

$$|J| \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} [2\lambda^2 - 2\lambda + 1]^2 \\ \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2011c).

Teorem 3.2.14. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ise, $q \geq 1$ için;

$$|J| \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{16} [2\lambda^2 - 2\lambda + 1]^2$$

$$\times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q (\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q (\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q (\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q (\kappa_2, \tau_2)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2011c).

Özdemir *et al.* 2011 yılında aşağıdaki lemmayı oluşturmuş ve koordinatlarda konveks fonksiyonlar için Hadamard-tipi eşitsizlikler elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.3. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L_2[\Delta]$ ise

$$\begin{aligned} I &= f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) - \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y\right) dy \\ &\quad - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) dx \\ &\quad + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy = \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{16} \\ &\quad \times \left[\int_0^1 \int_0^1 ts \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(t \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} + (1-t)\kappa_1, s \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + (1-s)\tau_1 \right) dt ds \right. \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 (t-1)(s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(t\kappa_2 + (1-t) \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, s\tau_2 + (1-s) \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) dt ds \\ &\quad + \int_0^1 \int_0^1 t(s-1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(t \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} + (1-t)\kappa_1, s\tau_2 + (1-s) \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) dt ds \\ &\quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 s(t-1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(t\kappa_2 + (1-t) \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, s \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} + (1-s)\tau_1 \right) dt ds \right] \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ve burada $t, s \in [0,1]$ 'dir (Özdemir *et al.* 2011d).

Teorem 3.2.15. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve I Lemma 3.2.3 te tanımlandığı gibi olmak üzere

$$\begin{aligned}
 & |I| \\
 & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{144} \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right. \\
 & \quad + 4 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_1 \right) \right| \\
 & \quad \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_2 \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_2, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right| \right]
 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2011d).

Teorem 3.2.16. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve I Lemma 3.2.3 te tanımlandığı gibi olmak üzere, $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için;

$$\begin{aligned}
 & |I| \\
 & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{16(p+1)^{\frac{2}{p}}} \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right. \\
 & \quad + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q \\
 & \quad \left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_1 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_2 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_2, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q}{2} \right]^{\frac{1}{q}}
 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2011d).

Teorem 3.2.17. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve I Lemma 3.2.3 te tanımlandığı gibi olmak üzere, $q \geq 1$ için;

$$\begin{aligned}
 & |I| \\
 & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{16} \left[\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_2)}{36} \right. \\
 & \quad + \frac{4 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q}{9} \\
 & \quad \left. + \frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_1 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_2 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_2, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q}{9} \right]^{\frac{1}{q}}
 \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2011d).

Özdemir *et al.* 2012 yılında yaptıkları çalışmada aşağıdaki Lemmayı ve verilen eşitsizlikleri ispatlamışlardır.

Lemma 3.2.4. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L_2[\Delta]$ ise

$$\begin{aligned}
 C &= f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) - \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y\right) dy \\
 &\quad - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f\left(x, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) dx \\
 &\quad + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\
 &= \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} q(x, t) q(y, s) \\
 &\quad \times \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_2 - t}{\kappa_2 - \kappa_1} \kappa_1 + \frac{t - \kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} \kappa_2, \frac{\tau_2 - s}{\tau_2 - \tau_1} \tau_1 + \frac{s - \tau_1}{\tau_2 - \tau_1} \tau_2 \right) dx dy
 \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir ve burada

$$p(x, t) = \begin{cases} t - \kappa_1, & x \in \left[\kappa_1, \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \right) \\ t - \kappa_2, & x \in \left[\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \kappa_2 \right] \end{cases}$$

ve

$$q(y, s) = \begin{cases} s - \tau_1, & y \in \left[\tau_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \\ s - \tau_2, & y \in \left[\frac{\tau_1 + \tau_2}{2}, \tau_2 \right] \end{cases}$$

dir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.18. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve C Lemma 3.2.4' te tanımlandığı gibi olmak üzere

$$|C| \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{64} \\ \times \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|(\kappa_2, \tau_2) \right)$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.19. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve C Lemma 3.2.4 te tanımlandığı gibi olmak üzere, $q > 1$ ve $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ için;

$$\begin{aligned}
& |C| \\
& \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{4(p+1)^{\frac{2}{p}}} \\
& \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.20. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks ve C Lemma 3.2.4 te tanımlandığı gibi olmak üzere, $q \geq 1$ için;

$$\begin{aligned}
& |C| \\
& \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{16} \\
& \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_1, \tau_2) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_1) + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q(\kappa_2, \tau_2)}{4} \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Özdemir *et al.* aynı çalışmalarında aşağıdaki lemmayı ispatlayıp koordinatlarda s –konveks fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Lemma 3.2.5. $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $t, \lambda \in [0,1]$ olmak üzere eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \in L_2[\Delta]$ ise

$$\begin{aligned}
D = & \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + r_2 f(\kappa_1, \tau_2) + r_1 f(\kappa_2, \tau_1) + r_1 r_2 f(\kappa_2, \tau_2)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} \\
& - \left(\frac{r_2}{r_2 + 1} \right) \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, y) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\frac{1}{r_1 + 1} \right) \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, y) dy - \left(\frac{r_2}{r_2 + 1} \right) \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \tau_2) dx \\
& - \left(\frac{1}{r_1 + 1} \right) \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(x, \tau_1) dx + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) dx dy \\
& = \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} \\
& \quad \times \left[\int_0^1 \int_0^1 ((r_1 + 1)t - 1)((r_2 + 1)\lambda - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(t\kappa_2 + (1 - t)\kappa_1, s\tau_2 \right. \\
& \quad \left. + (1 - s)\tau_1) dt d\lambda \right]
\end{aligned}$$

eşitliği $r_1, r_2 \in [0, 1]$ için geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.21. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \right|$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s –konveks ve D , Lemma 3.2.5 te tanımlandığı gibi olmak üzere

$$\begin{aligned}
|D| & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)(s + 1)^2(s + 2)^2} \\
& \quad \times \left(MN \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_1, \tau_1) \right| + LN \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_1, \tau_2) \right| + KM \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_2, \tau_1) \right| \right. \\
& \quad \left. + KL \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_2, \tau_2) \right| \right)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$M = \left(s + 1 + 2(r_1 + 1) \left(\frac{1}{r_1 + 1} \right)^{s+2} - r_1 \right)$$

$$N = \left(s + 1 + 2(r_2 + 1) \left(\frac{1}{r_2 + 1} \right)^{s+2} - r_2 \right)$$

$$L = \left(r_2(s + 1) + 2 \left(\frac{1}{r_2 + 1} \right)^{s+1} - 1 \right)$$

$$K = \left(r_1(s+1) + 2 \left(\frac{1}{r_1+1} \right)^{s+1} - 1 \right)$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.22. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $p > 1$ olmak üzere $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \right|^{\frac{p}{p-1}}$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s –konveks ve D , Lemma 3.2.5 te tanımlandığı gibi olmak üzere

$$|D| \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1) \left(1 + r_1^{\frac{p+1}{p}} \right) \left(1 + r_2^{\frac{p+1}{p}} \right)}{(r_1 + 1)^{\frac{p+1}{p}} (r_2 + 1)^{\frac{p+1}{p}} (p+1)^{\frac{2}{p}}} \times \left(\frac{\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q}{(s+1)^2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $r_1, r_2 \in [0, 1], s \in (0, 1]$ ve $q = \frac{p}{p-1}$ için geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Teorem 3.2.23. $f: \Delta \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu Δ üzerinde ikinci mertebeden diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. $p \geq 1$ olmak üzere $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda} \right|^q$ fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda s –konveks ve D , Lemma 3.2.5 te tanımlandığı gibi olmak üzere

$$|D| \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{(r_1 + 1)(r_2 + 1)} \left(\frac{(1 + r_1^2)(1 + r_2^2)}{4(r_1 + 1)(r_2 + 1)} \right)^{1 - \frac{1}{q}} \times \left(\frac{MN \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q + LN \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q + KM \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q + KL \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial \lambda}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q}{(s+1)^2(s+2)^2} \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği $r_1, r_2 \in [0, 1]$ ve $s \in (0, 1]$ için geçerlidir (Özdemir *et al.* 2012a).

Özdemir *et al.* 2012 yılındaki çalışmalarında koordinatlarda konveks fonksiyonların çarpımlarına ilişkin aşağıdaki eşitsizlikleri elde etmişlerdir.

Teorem 3.2.24. f, g ve $fg \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Negatif olmayan f fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon ve g fonksiyonu $s = \frac{s_1+s_2}{2}$ ve $s_1, s_2 \in (0,1]$ olmak üzere koordinatlarda ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y)g(x, y)dydx \\ & \leq \frac{1}{2}(p^2 + r^2)L(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2) + \frac{1}{2}(pq + rt)M(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2) \\ & \quad + \frac{1}{2}(q^2 + t^2)N(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2) \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada

$$\begin{aligned} L(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2) &= f(\kappa_1, \tau_1)g(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_1)g(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2)g(\kappa_1, \tau_2) \\ & \quad + f(\kappa_2, \tau_2)g(\kappa_2, \tau_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2) &= f(\kappa_1, \tau_1)g(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_1, \tau_2)g(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_1)g(\kappa_2, \tau_2) \\ & \quad + f(\kappa_2, \tau_2)g(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_1)g(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)g(\kappa_1, \tau_2) \\ & \quad + f(\kappa_1, \tau_1)g(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2)g(\kappa_2, \tau_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2) &= f(\kappa_2, \tau_1)g(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_2)g(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_1)g(\kappa_2, \tau_2) \\ & \quad + f(\kappa_1, \tau_2)g(\kappa_2, \tau_1) \end{aligned}$$

ve

$$p = \frac{1}{s_2 + 2}, \quad q = \frac{1}{(s_2 + 1)(s_2 + 2)}, \quad r = \frac{1}{(s_1 + 2)}, \quad t = \frac{1}{(s_1 + 1)(s_1 + 2)}$$

şeklindedir (Özdemir *et al.* 2012b).

Teorem 3.2.25. f, g ve $fg \in L_2(\Delta)$ olmak üzere $f, g: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları verilsin. Negatif olmayan f fonksiyonu Δ üzerinde koordinatlarda konveks fonksiyon ve g fonksiyonu $s = \frac{s_1+s_2}{2}$ ve $s_1, s_2 \in (0,1]$ olmak üzere koordinatlarda ikinci anlamda s –konveks fonksiyon ise

$$\begin{aligned}
& 2^{s_1+s_2} f\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) g\left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}\right) \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(x, y) g(x, y) dy dx \\
& \quad + \frac{1}{2} (q^2 + t^2 + 2pt + 2qr) L(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2) \\
& \quad + \frac{1}{2} (pq + rt + 2qt + 2rp) M(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2) \\
& \quad + \frac{1}{2} (p^2 + r^2 + 2pt + 2rq) N(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2)
\end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir ve burada $L(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2)$, $M(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2)$, $N(\kappa_1, \kappa_2, \tau_1, \tau_2)$, p, q, r ve t Teorem 3.2.24 deki gibi tanımlanmıştır (Özdemir et al. 2012b).

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Öncelikle araştırma bulgularını elde edebilmek için gerekli olan aşağıdaki integral eşitliğinin sağlandığı gösterilecektir.

Lemma 4.1. $\Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2]$ olmak üzere $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, iki kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L(\Delta)$ ise, aşağıdaki eşitlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
 A &+ \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) du dv \\
 &= \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 (t - 1)(s - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_1, sy + (1 - s)\tau_1) \\
 &\quad + \frac{(x - \kappa_1)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 (t - 1)(1 - s) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_1, sy \\
 &\quad + (1 - s)\tau_2) ds dt \\
 &\quad + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 (t - 1)(s - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_2, sy + (1 - s)\tau_1) ds dt \\
 &\quad + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 (t - 1)(1 - s) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_2, sy + (1 - s)\tau_2) ds dt
 \end{aligned}$$

olur ve burada;

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{(x - \kappa_1)(y - \tau_1)f(\kappa_1, \tau_1) + (x - \kappa_1)(\tau_2 - y)f(\kappa_1, \tau_2)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \\
 &\quad + \frac{(\kappa_2 - x)(y - \tau_1)f(\kappa_2, \tau_1) + (\kappa_2 - x)(\tau_2 - y)f(\kappa_2, \tau_2)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{(x - \kappa_1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv - \frac{(\kappa_2 - x)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(b, v) dv \\
& - \frac{(\tau_2 - y)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_2) du - \frac{(y - \tau_1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du
\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat. Eşitliğin sağ tarafı;

$$\begin{aligned}
I &= \underbrace{\frac{(x - \kappa_1)^2(y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 (t - 1)(s - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_1, sy + (1 - s)\tau_1) ds dt}_{I_1} \\
&+ \underbrace{\frac{(x - \kappa_1)^2(\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 (t - 1)(1 - s) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_1, sy + (1 - s)\tau_2) ds dt}_{I_2} \\
&+ \underbrace{\frac{(\kappa_2 - x)^2(y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 (t - 1)(s - 1) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_2, sy + (1 - s)\tau_1) ds dt}_{I_3} \\
&+ \underbrace{\frac{(\kappa_2 - x)^2(\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 (t - 1)(1 - s) \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_2, sy + (1 - s)\tau_2) ds dt}_{I_4}
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. İfadeler sırasıyla kısmi integrasyon metodu yardımıyla çözülürse:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 (s - 1) \left[\frac{t - 1}{x - a} \frac{\partial f}{\partial s} (tx + (1 - t) \kappa_1, sy \right. \\
&\quad \left. + (1 - s)\tau_1) \right]_0^1 \\
&\quad - \frac{1}{(x - \kappa_1)} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s} (tx + (1 - t) \kappa_1, sy + (1 - s)\tau_1) dt \Bigg] ds \\
&= \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 (s - 1) \left[\frac{1}{(x - \kappa_1)} \frac{\partial f}{\partial s} (\kappa_1, sy + (1 - s)\tau_1) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{(x - \kappa_1)} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s} (tx + (1 - t) \kappa_1, sy + (1 - s)\tau_1) dt \right] ds
\end{aligned}$$

elde edilir. $u = tx + (1 - t)\kappa_1$, $v = sy + (1 - s)\tau_1$ deęişken deęiřtirmeleri ile;

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{(x - \kappa_1)(y - \tau_1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 (s - 1) \left[\frac{t - 1}{x - \kappa_1} \frac{\partial f}{\partial s} (tx + (1 - t) \kappa_1, sy \right. \\
&\quad \left. + (1 - s)\tau_1) \right]_0^1 \\
&\quad - \frac{1}{(x - \kappa_1)} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial s} (tx + (1 - t) \tau_1, sy + (1 - s)\tau_1) dt \Bigg] ds \\
&= \frac{1}{(x - \kappa_1)(y - \tau_1)} f(\kappa_1, \tau_1) - \frac{1}{(x - \kappa_1)(y - \tau_1)^2} \int_{\tau_1}^y f(\tau_1, v) dv \\
&\quad - \frac{1}{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^x f(u, \tau_1) du \\
&\quad + \frac{1}{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2} \int_{\kappa_1}^x \int_{\tau_1}^y f(u, v) dudv
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer yöntemle;

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{(x - \kappa_1)(\tau_2 - y)} f(\kappa_1, \tau_2) - \frac{1}{(x - \kappa_1)(\tau_2 - y)^2} \int_y^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv \\
&\quad - \frac{1}{(x - \kappa_1)^2(\tau_2 - y)} \int_{\kappa_1}^x f(u, \tau_2) du \\
&\quad + \frac{1}{(x - \kappa_1)^2(\tau_2 - y)^2} \int_{\kappa_1}^x \int_{\tau_1}^y f(u, v) dudv,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{(\kappa_2 - x)(y - \tau_1)} f(\kappa_2, \tau_1) - \frac{1}{(\kappa_2 - x)(y - \tau_1)^2} \int_{\tau_1}^y f(\kappa_2, v) dv \\
&\quad - \frac{1}{(\kappa_2 - x)^2(y - \tau_1)} \int_x^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du \\
&\quad + \frac{1}{(\kappa_2 - x)^2(y - \tau_1)^2} \int_x^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^y f(u, v) dudv
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
I_4 &= \frac{1}{(\kappa_2 - x)(\tau_2 - y)} f(\kappa_2, \tau_2) - \frac{1}{(\kappa_2 - x)(\tau_2 - y)^2} \int_y^{\tau_2} f(\kappa_2, v) dv \\
&\quad - \frac{1}{(\kappa_2 - x)^2(\tau_2 - y)} \int_x^{\kappa_2} f(u, \tau_2) du \\
&\quad + \frac{1}{(\kappa_2 - x)^2(\tau_2 - y)^2} \int_x^{\kappa_2} \int_y^{\tau_2} f(u, v) dudv
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadelerin toplamı alınırsa;

$$\begin{aligned}
&I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \\
&= \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[A - (x - \kappa_1) \int_y^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv - (\kappa_2 - x) \int_{\tau_1}^y f(\kappa_1, v) dv \right. \\
& - (\kappa_2 - x) \left[\int_{\tau_1}^y f(\kappa_2, v) dv + \int_y^{\tau_2} f(\kappa_2, v) dv \right] \\
& \quad \left. - (\tau_2 - y) \left[\int_x^{\kappa_1} f(u, \tau_2) du + \int_x^{\kappa_2} f(u, \tau_2) du \right] \right. \\
& - (y - \tau_1) \left[\int_x^{\kappa_1} f(u, \tau_1) du + \int_x^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du \right] + \int_x^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^y f(u, v) dudv \\
& \quad + \int_x^{\kappa_2} \int_y^{\tau_2} f(u, v) dudv \\
& + \int_{\kappa_1}^x \int_{\tau_1}^y f(u, v) dudv + \int_{\kappa_1}^x \int_y^{\tau_2} f(u, v) dudv \\
& = \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left[A - (x - \kappa_1) \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv - (\kappa_2 - x) \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, v) dv \right. \\
& \quad \left. - (\tau_2 - y) \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_2) du - (y - \tau_1) \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du + \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right]
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1. $\Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2]$ olmak üzere $f: \Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2] \rightarrow R$ kısmi diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L(\Delta)$ olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$, Δ üzerinde konveks bir fonksiyon ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{9(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left[\left(\frac{((x - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - x)^2)((y - \tau_1)^2 + (\tau_2 - y)^2)}{4} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right| \right. \\
&+ \left(\frac{(x - \kappa_1)^2((y - \tau_1)^2 + (\tau_2 - y)^2)}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, y) \right| \\
&+ \left(\frac{(\kappa_2 - x)^2((y - \tau_1)^2 + (\tau_2 - y)^2)}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, y) \right| \\
&+ \left(\frac{(y - \tau_1)^2((x - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - x)^2)}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_1) \right| \\
&+ \left(\frac{(\tau_2 - y)^2((x - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - x)^2)}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_2) \right| + ((x - \kappa_1)^2 \\
&+ (y - \tau_1)^2) \left| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right| (\kappa_1, \tau_1) \right| + ((x - \kappa_1)^2 + (\tau_2 - y)^2) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_2) \right| \\
&+ ((\kappa_2 - x)^2 + (y - \tau_1)^2) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, \tau_1) \right| + ((\kappa_2 - x)^2 \\
&+ (\tau_2 - y)^2) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, \tau_2) \right| \Big]
\end{aligned}$$

İspat. Lemma 4.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
&\left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) du dv \right| \\
&\leq \frac{(x - \kappa_1)^2 + (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(t - 1)(s - 1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_1, sy \right. \\
&\quad \left. + (1 - s)\tau_1) \right| ds dt \\
&+ \frac{(x - \kappa_1)^2 + (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(t - 1)(s - 1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1 - t)\kappa_1, sy \right. \\
&\quad \left. + (1 - s)\tau_2) \right| ds dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 + (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy \right. \\
& \quad \left. + (1-s)\tau_1) \right| ds dt \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy \right. \\
& \quad \left. + (1-s)\tau_2) \right| ds dt
\end{aligned}$$

yazılır. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|, \Delta$ üzerinde konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
& \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) du dv \right| \\
& \leq \frac{(x - \kappa_1)^2 + (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 |(s-1)| \\
& \quad \times \left[\int_0^1 (t-1)t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_1) \right| dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^1 (t-1)(1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right| dt \right] ds \\
& = \frac{(x - \kappa_1)^2 + (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 |(1-s)| \\
& \quad \times \left[\int_0^1 (t-1)t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_2) \right| dt \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^1 (t-1)(1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right| dt \Bigg] ds \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 |(1-s)| \\
& \times \left[\int_0^1 (t-1)t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_2) \right| dt \right. \\
& \left. + \int_0^1 (1-t)(1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, sy + (1-s)\tau_2) \right| dt \right] ds
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli integral hesaplamaları yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_c^{\tau_2} f(u, v) \, du dv \right| \\
& \leq \frac{(x - \kappa_1)^2 + (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 |s-1| \left[-\frac{1}{6} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_1) \right| \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_1) \right| \right] ds \\
& + \frac{(x - \kappa_1)^2 + (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 |(1-s)| - \frac{1}{6} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_2) \right| \\
& \quad \left. - \frac{1}{3} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, sy + (1-s)\tau_2) \right| \right] ds \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 |s-1| \left[-\frac{1}{6} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_1) \right| \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{3} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, sy + (1-s)\tau_1) \right| ds \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 + (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 |s-1| \left[-\frac{1}{6} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_2) \right| \right. \\
& \left. -\frac{1}{3} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, sy + (1-s)\tau_2) \right| \right] ds
\end{aligned}$$

bulunur. $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|$ nin Δ üzerinde konveksliği tekrar kullanılarak ve integraller hesaplanarak;

$$\begin{aligned}
& \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) \, du dv \right| \\
& \leq \frac{1}{9(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left[\left(\frac{((x - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - x)^2)((y - \tau_1)^2 + (\tau_2 - y)^2)}{4} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right| \right. \\
& + \left(\frac{(x - \kappa_1)^2((y - \tau_1)^2 + (\tau_2 - y)^2)}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right| \\
& + \left(\frac{(\kappa_2 - x)^2((y - \tau_1)^2 + (\tau_2 - y)^2)}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right| \\
& + \left(\frac{(y - \tau_1)^2((x - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - x)^2)}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right| \\
& + \left(\frac{(\tau_2 - y)^2((x - \kappa_1)^2 + (\kappa_2 - x)^2)}{2} \right) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right| \\
& + (x - \kappa_1)^2(y - \tau_1)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right| + (x - \kappa_1)^2(\tau_2 - y)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right| \\
& + (\kappa_2 - x)^2(y - \tau_1)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right| + (\kappa_2 - x)^2(\tau_2 - y)^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|
\end{aligned}$$

olur ki ispat tamamlanır.

Sonuç 4.1. Teorem 4.1'in şartları altında, eğer; $x = \kappa_1, y = \tau_1$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\kappa_2, \tau_2)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} - \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, v) dv \right. \\ & \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} f(u, \tau_2) du + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right| \\ & \leq \frac{1}{36(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right| + \frac{1}{9(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right| \\ & + \frac{1}{18(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right| + \frac{1}{18(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|. \end{aligned}$$

Sonuç 4.2. Teorem 4.1'in şartları altında, eğer; $x = \kappa_2, y = \tau_2$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\kappa_1, \tau_1)}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} - \frac{1}{\tau_2 - \tau_1} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv \right. \\ & \left. - \frac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right| \\ & \leq \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right| + \frac{1}{9(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right| \\ & + \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right| + \frac{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|. \end{aligned}$$

Sonuç 4.3. Teorem 4.1'in şartları altında, eğer; $x = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$ olarak seçilirse aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{4(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} - \frac{1}{2(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv \right. \\
& - \frac{1}{2(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, v) dv - \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_2) du \\
& \left. - \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right| \\
& \leq \frac{1}{144(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left[\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right| \right. \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_2, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_1 \right) \right| \\
& + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_2 \right) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_1) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_2) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, \tau_1) \right| \\
& \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, \tau_2) \right| \right]
\end{aligned}$$

Teorem 4.2. $\Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2]$ olmak üzere $f: \Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2] \rightarrow R$ kısmi diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L(\Delta)$ olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$, $q > 1$ için Δ üzerinde konveks bir fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned}
& \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right| \\
& \leq \frac{1}{2^{\frac{2}{q}}(p+1)^{\frac{2}{p}}} \times
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + \frac{(x - \kappa_1)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

ve burada $p^{-1} + q^{-1} = 1$ şeklindedir.

İspat. Lemma 4.1 ve integraller için üçgen eşitsizliği kullanılarak;

$$\begin{aligned}
& \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) \, du \, dv \right| \\
& \leq \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(t - 1)(s - 1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(tx + (1 - t)\kappa_1, sy \right. \\
& \quad \left. + (1 - s)\tau_1) \right| \, ds \, dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(x - \kappa_1)^2(\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(tx + (1-t)\kappa_1, sy \right. \\
& \quad \left. + (1-s)\tau_2) \right| ds dt \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2(y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(tx + (1-t)\kappa_2, sy \right. \\
& \quad \left. + (1-s)\tau_1) \right| ds dt \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2(\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(1-s)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(tx + (1-t)\kappa_2, sy \right. \\
& \quad \left. + (1-s)\tau_2) \right| ds dt
\end{aligned}$$

yazılır. İki katlı integraller için Hölder eşitsizliği yardımıyla:

$$\begin{aligned}
& \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) du dv \right| \\
& \leq \frac{(x - \kappa_1)^2(y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)|^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(x - \kappa_1)^2(\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(1-s)|^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_2) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(s-1)|^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(1-s)|^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \times \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy + (1-s)\tau_2) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

elde edilir .

$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$, Δ üzerinde konveks fonksiyon olduğundan $t, s \in [0,1]$ için:

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q \\
& \leq t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q + (1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q \\
& \leq t \left(s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_1) \right|^q \right) \\
& + (1-t) \left(s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, y) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right)
\end{aligned}$$

olur ve

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)|^p ds dt \right)^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{(p+1)^{\frac{2}{p}}}$$

eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 \left\{ ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_1) \right|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, y) \right|^q + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right\} dt ds \right)^{\frac{1}{q}} \\ & = \frac{1}{2^{\frac{2}{q}}} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

sonucuna varılır.

Benzer şekilde:

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_2) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \frac{1}{2^{\frac{2}{q}}} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}, \\ & \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2^{\frac{2}{q}}} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(tx + (1-t)\kappa_2, sy + (1-s)\tau_2) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{1}{2^{\frac{2}{q}}} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizlikleri bulunur. Bu eşitsizlikler kullanılarak;

$$\begin{aligned} & \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) du dv \right| \\ & \leq \frac{1}{(p+1)^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{2}{q}}} \\ & \times \left\{ \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & + \frac{(x - \kappa_1)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right|^q \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\ & + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q \right. \\ & \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{(\kappa_2 - x)^2(\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.4. Teorem 4.2'in şartları altında, $x = \kappa_1$, $y = \tau_1$ veya $x = \kappa_2$, $y = \tau_2$ olarak seçilirse, aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left| f(\kappa_2, \tau_2) \right. \\ & \quad - (\kappa_2 - \kappa_1) \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, v) dv \\ & \quad \left. - (\tau_2 - \tau_1) \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_2) du + \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right| \\ & \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)(p+1)^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{2}{q}}} \\ & \quad \times \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Sonuç 4.5. Teorem 4.2'in şartları altında, $x = \kappa_2$, $y = \tau_2$ olarak alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left| f(\kappa_1, \tau_1) \right. \\
& \quad - (\kappa_2 - \kappa_1) \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv \\
& \quad \left. - (\tau_2 - \tau_1) \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du + \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right| \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)(p+1)^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{2}{q}}} \\
& \quad \times \left(\left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right) \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

Sonuç 4.6. Teorem 4.2'in şartları altında, $x = \kappa_1, y = \tau_2$ olarak alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left| f(\kappa_2, \tau_1) \right. \\
& \quad - (\kappa_2 - \kappa_1) \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, v) dv \\
& \quad \left. - (\tau_2 - \tau_1) \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du + \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right| \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)(p+1)^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{2}{q}}}
\end{aligned}$$

$$\times \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

Sonuç 4.7. Teorem 4.2'in şartları altında, $x = \kappa_2, y = \tau_1$ olarak alınırsa, aşağıdaki eşitsizliği elde ederiz:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} f(\kappa_1, \tau_2) \right. \\ & \quad - (\kappa_2 - \kappa_1) \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv \\ & \quad \left. - (\tau_2 - \tau_1) \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_2) du + \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \right| \\ & \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)(p+1)^{\frac{2}{p}} 2^{\frac{2}{q}}} \\ & \times \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

Sonuç 4.8. Teorem 4.2'in şartları altında, $x = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, y = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2}$ olarak alınırsa, aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(\kappa_1, \tau_1) + f(\kappa_1, \tau_2) + f(\kappa_2, \tau_1) + f(\kappa_2, \tau_2)}{4(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} - \frac{1}{2(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_1, v) dv \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\kappa_2, v) dv \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_2) du - \frac{1}{2(\kappa_2 - \kappa_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} f(u, \tau_1) du \\
& \quad + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) dudv \\
& \leq \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)16(p+1)^{\frac{2}{p}}2^{\frac{2}{q}}} \times \\
& \quad \left\{ \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_1 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_2 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_1, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad + \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_1 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_2, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& \quad \left. + \left(\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}, \tau_2 \right) \right|^q + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \left(\kappa_2, \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} \right) \right|^q \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}
\end{aligned}$$

Teorem 4.3. $\Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2]$ olmak üzere $f: \Delta = [\kappa_1, \kappa_2] \times [\tau_1, \tau_2] \rightarrow R$ kısmi diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \in L(\Delta)$ olsun. Eğer $\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$, $q \geq 1$ için Δ üzerinde konveks bir fonksiyon ise bu durumda aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$\left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) du dv \right| \leq \left(\frac{1}{4} \right)^{1 - \frac{1}{q}}$$

$$\left\{ K \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right|^q + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$+ L \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right|^q + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ M \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right.$$

$$+ N \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q \right.$$

$$\left. \left. + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\}.$$

Burada;

$$K = \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}$$

$$L = \frac{(x - \kappa_1)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}$$

$$M = \frac{(\kappa_2 - x)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}$$

$$N = \frac{(\kappa_2 - x)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)}$$

şeklindedir.

İspat. Lemmada yer alan eşitlik ve mutlak değerin özelliği kullanılarak:

$$\begin{aligned} & \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) \, du \, dv \right| \\ & \leq \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy \right. \\ & \quad \left. + (1-s)\tau_1) \right| \, ds \, dt \\ & \quad + \frac{(x - \kappa_1)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(1-s)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy \right. \\ & \quad \left. + (1-s)\tau_2) \right| \, ds \, dt \\ & \quad + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy \right. \\ & \quad \left. + (1-s)\tau_1) \right| \, ds \, dt \\ & \quad + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy \right. \\ & \quad \left. + (1-s)\tau_2) \right| \, ds \, dt \end{aligned}$$

yazılır. Çift katlı integraller için power-mean eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) \, du \, dv \right| \\
& \leq \frac{(x - \kappa_1)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \, ds \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q \, ds \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(x - \kappa_1)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \, ds \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(1-s)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_2) \right|^q \, ds \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (y - \tau_1)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(s-1)| \, ds \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q \, ds \, dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \quad + \frac{(\kappa_2 - x)^2 (\tau_2 - y)^2}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(1-s)| \, ds \, dt \right)^{1-\frac{1}{q}} \\
& \quad \times \left(\int_0^1 \int_0^1 |(1-t)(1-s)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy + (1-s)\tau_2) \right|^q \, ds \, dt \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur.

$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} \right|^q$, Δ üzerinde konveks fonksiyon olduğundan, $t, s \in 1$ için:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q \\ & \leq t \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q + (1-t) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q \\ & \leq t \left(s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_1) \right|^q \right) \\ & + (1-t) \left(s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, y) \right|^q + (1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right) \end{aligned}$$

eşitsizlikleri ve

$$\left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| ds dt \right)^{1-\frac{1}{q}} = \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq \left(\int_0^1 \int_0^1 |(t-1)(s-1)| \left\{ ts \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + t(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_1) \right|^q \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + (1-t)s \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, y) \right|^q + (1-t)(1-s) \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right\} ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

elde edilir. Yine benzer şekilde;

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_1, sy + (1-s)\tau_2) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_2) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, y) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy + (1-s)\tau_1) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_1) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, y) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 \int_0^1 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (tx + (1-t)\kappa_2, sy + (1-s)\tau_2) \right|^q ds dt \right)^{\frac{1}{q}} \\
& \leq \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (x, \tau_2) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, y) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s} (\kappa_2, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}$$

bulunur.

Daha sonra bu eşitsizlikleri kullanarak;

$$\left| A + \frac{1}{(\kappa_2 - \kappa_1)(\tau_2 - \tau_1)} \int_{\kappa_1}^{\kappa_2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(u, v) du dv \right| \leq \left(\frac{1}{4} \right)^{1-\frac{1}{q}}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ K \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right|^q + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right. \\
& + L \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, y) \right|^q + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_1, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + M \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_1) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_1) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
& + N \left(\frac{1}{36} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, y) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(x, \tau_2) \right|^q + \frac{1}{18} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, y) \right|^q \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{9} \left| \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial s}(\kappa_2, \tau_2) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \Bigg\}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada konveks fonksiyonlar ve ilişkili eşitsizlikler hakkında detaylı bilgiler verilmiştir. Konveksliğin tarihsel gelişimi ve eşitsizlik teorisinde kullanımı sonucu ortaya çıkan integral eşitsizlikler tanıtılmıştır. Konvekslik kavramının iki boyutlu uzaylardaki modifikasyonu olan koordinatlarda konvekslik kavramı ve türlerine yer verilmiştir.

Literatürde yer alan koordinatlarda konveks fonksiyon türleri ve bu fonksiyon sınıfları için ispatı verilen bazı integral eşitsizliklere değinilmiştir.

Araştırma bulguları kısmında ise ispatı verilen bir integral özdeşliği yardımıyla koordinatlarda konveks fonksiyonlar için elde edilen bazı integral eşitsizlikler oluşturulmuştur. Ayrıca bu eşitsizliklerin bazı özel durumları verilmiş ve indirgenmiş sonuçlar ortaya konmuştur.

Konuyla ilgilenen araştırmacılar farklı integral operatörler yardımıyla yeni integral özdeşlikleri ispat ederek yeni integral eşitsizliklere ulaşabilirler.

KAYNAKÇA

- Akdemir, A.O. and Özdemir M.E., 2010. Some Hadamard-type inequalities for co-ordinated P –convex functions and Godunova-Levin functions, American Institute of Physics Conference Proceedings [ONLINE: <http://scitation.aip.org/dbt/dbt.jsp?KEY=APCPCS&Volume=1309&Issue=1>].
- Alomari, M. and Darus, M., 2008. Co-ordinated s –convex function in the first sense with some Hadamard-type inequalities, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 3 (32), 1557-1567.
- Alomari, M. and Darus, M., 2008. On the Hadamard's inequality for $\log$ –convex functions on the co-ordinates, *Journal of Inequalities and Applications*, Volume 2009 Article ID 283147.
- Beckenbach, E.F. and Bellman, R., 1961. *Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
- Breckner, W.W., 1978. Stetigkeitsaussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen. Raumen, *Publ. Inst. Math.*, 23, 13–20.
- Dragomir, S.S., 2001. On the Hadamard's inequality for convex functions on the co-ordinates in a rectangle from the plane, 5 (4), 775-788.
- Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S., 1999. The Hadamard's inequality for s –convex functions in the second sense, *Demonstratio Math.* 32(4), 687-696.
- Dragomir, S.S., Pečarić, J. And Persson, L.E., 1995. Some inequalities of Hadamard type, *Soochow Journal of Mathematics*, 21 (3), 335-341.
- Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., 1998. Quasi-convex functions and Hadamard's inequality, *Bull. Austral.Math. Soc.*, 57, 377-385.
- Dragomir, S.S., Agarwal, R.P. and Barnett, N.S., 2000. Inequalities for Beta and Gamma Functions via Some Classical and New Integral Inequalities. *J. of Inequal. and Appl.*, 5, 103-165.
- Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pečarić, J., 1997. Hadamard's inequality for r –convex functions, *J. Math. Anal. and Appl.*, 215, 461-470.
- Godunova, E. K., Levin, V. I., 1985. Neravenstva dlja funkicii sirokogo klassa, sodersascego vypuklye, monotonnye i nekotorye drugie vidy funkii. *Vycislitel. Mat. i. Fiz. Mezhvuzov. Sb. Nauc. Trudov*, MGPI, Moskva, pp. 138–142.
- Greenberg, H.J. and Pierskalla, W.P., 1970. A review of quasi convex functions. Reprinted from *Operations Research*, 19, 7.
- Hudzik, H. And Maligranda, L., 1994. Some remarks on s –convex functions, *Aequationes Math.*, 48, 100-111.
- Latif, M.A. and Alomari, M., 2009. On Hadamard-type inequalities for h –convex functions on the co-ordinates, *Int. Journal of Math. Analysis*, 3 (33), 1645-1656.
- Latif, M.A. and Alomari, M., 2009. Hadamard-type inequalities for product two convex functions on the co-ordinates, *International Mathematical Forum*, 4 (47), 2327-2338.
- Miheşan, V.G., 1993. A generalization of the convexity, *Seminar on Functional Equations, Approx. And Convex.*, Cluj-Napoca (Romania).
- Mitrinović, D.S., 1970. *Analytic Inequalities*, Springer-Verlag, Berlin.
- Mitrinović, D.S., Pečarić, J.E. and Fink, A.M., 1993. *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.
- Niculescu, C. and Persson, L.E., 2006. *Convex Functions and Their Applications, A Contemporary Approach*, Springer Science+Business Media, Inc.

- Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Ekinici, A., 2011. New integral inequalities for co-ordinated convex functions, VI. Ufa International Mathematical Conference, Ufa Bashkir State University .
- Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Set, E., 2011. On (h, m) –convexity and Hadamard-type inequalities, 6. Ankara Matematik Günleri, Ankara Hacettepe Üniversitesi.
- Özdemir, M.E., Akdemir, A.O. and Yıldız, C., 2011. On Co-ordinated Quasi-Convex Functions, ONLINE: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1012/1012.3622v1.pdf
- Özdemir, M.E., Kavurmacı, H., Akdemir, A.O. and Avci, M., 2012. Inequalities for convex and s –convex functions on $\Delta = [a, b] \times [c, d]$, Journal of Inequalities and Applications, 2012:20.
- Özdemir, M.E., Latif, M.A. and Akdemir, A.O., 2012. On some Hadamard-type inequalities for product of two s -convex functions on the co-ordinates, Journal of Inequalities and Applications, 2012:21
- Özdemir, M.E., Set, E., and Sarıkaya, M.Z., 2011. Some new Hadamard's type inequalities for co-ordinated m –convex and (α, m) –convex functions, Hacettepe J. of. Math. and Statistics, 40, 219-229.
- Özdemir, M.E., Yıldız, C. and, Akdemir, A.O. 2011. On Co-ordinated Convex Functions, ONLINE: http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/1107/1107.4033v1.pdf
- Pachpatte, B.G., 2003. On some inequalities for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 6, Supplement, Article 1.
- Pearce, C.E.M., Pečarić, J. And Šimić, V., 1998. Stolarsky means and Hadamard's inequality, J. Math. Anal. and Appl., 220, 99-109.
- Pečarić, J., Proschan, F. and Tong, Y.L., 1992. Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press, Inc.
- Roberts, A.W. and Varberg, D.E., 1973. Convex Functions, Academic Press, New York.
- Sarıkaya, M.Z., Set, E., Özdemir, M.E. and Dragomir, S.S., 2010. New some Hadamard's type inequalities for co-ordinated convex functions, Accepted.
- Set, E., Sardari, M., Özdemir, M.E. and Roojin, J., 2009. On generalizations of the Hadamard inequality for (α, m) –convex functions, Kyungpook Math. Journal, Accepted.
- Toader, G., 1984. Some generalizations of the convexity, Proc. Colloq. Approx. Optim., Cluj-Napoca (Romania), 329-338.
- Wright, E.M., 1954. An inequality for convex functions, Amer. Math. Monthly 61, 620-622.
- Varošanec, S., 2007. On h –convexity, J. Math. Anal. And Appl., 326, 303-311.