



**RIEMANN MANİFOLDLARINDA
BURULMALI BAĞLANTI**

Yüksek Lisans Tezi

Mustafa KIR

Eskişehir 2020

RIEMANN MANİFOLDLARINDA BURULMALI BAĞLANTI

Mustafa KIR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat LİMONCU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Kasım 2020

ÖZET

RIEMANN MANİFOLDLARINDA BURULMALI BAĞLANTI

Mustafa KIR

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Kasım 2020

Danışman: Prof. Dr. Murat LİMONCU

Bu tez çalışmasında Riemann manifoldlarında Levi-Civita bağlantısı ve bir 1-form kullanılarak burulmalı bir bağlantının tanımına ve özelliklerine yer verilmiştir. Levi-Civita bağlantısının belirlemiş olduğu eğrilik tensörü ile, bu çalışmada tanımlanan burulmalı bağlantının belirlemiş olduğu eğrilik tensörünün belirli şartlar altında eşit olduğu ispatlanmıştır. Burulmalı bağlantı kullanılarak elde edilen eğrilik tensörünün sağladığı bazı eşitlikler not edilmiştir.

Anahtar Sözcükler: Levi-Civita Bağlantısı, Burulma Tensörü, Burulmalı Bağlantı, Eğrilik Tensörü

ABSTRACT

TORSIONAL CONNECTION ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

Mustafa KIR

Department of Mathematics

Programme in Geometry

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, November 2020

Supervisor: Prof. Dr. Murat LİMONCU

In this thesis, the definition and properties of a torsional connection are included using the Levi-Civita connection and a 1-form on Riemannian manifolds. It is proved that the curvature tensor determined by the Levi-Civita connection and the curvature tensor determined by the torsion connection defined in this study are equal under certain conditions. Some equations provided by the curvature tensor obtained using the torsional connection are noted.

Keywords: Levi-Civita Connection, Torsion Tensor, Torsional Connection, Curvature Tensor

TEŞEKKÜR

Tez çalışmam boyunca beni yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof. Dr. Murat LİMONCU'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mustafa KIR



20/11/2020

ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarında bilimsel etik ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmamın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal programı”yla tarandığını ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçları kabul ettiğimi bildiririm.

Mustafa KIR

İÇİNDEKİLER

BAŞLIK SAYFASI	i
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR	v
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ . .	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	viii
1 GİRİŞ	1
2 MANİFOLDLARDA TENSÖR ALANLARI	2
2.1 Tanjant Vektör ve Kotanjant Vektör	2
2.2 Vektör Alanı, Lie Parantezi ve 1-Formlar	4
2.3 Tensör Alanları	10
2.4 Tensörlerin Çarpımı, Bileşenleri ve Kontraksiyonu	12
3 RIEMANN MANİFOLDU VE LEVİ-CIVİTA BAĞLANTISI	15
3.1 Riemann Metriği ve Bağlantı	15
4 BURULMALI BAĞLANTI	25
5 SONUÇ	30
KAYNAKÇA	31
ÖZGEÇMİŞ	

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

M	: n -boyutlu diferansiyellenebilir manifold
$T_p M$	: M manifoldunun p -noktasındaki tanjant uzayı
$\Gamma(TM)$	: M manifoldu üzerindeki vektör alanları kümesi
$\Gamma(T^*M)$	: M manifoldu üzerindeki 1-formlar kümesi
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	: M manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir fonksiyonlar kümesi
$\mathcal{T}_s^r(M)$	: M manifoldu üzerindeki (r, s) -tipinden tensör alanları kümesi
∇	: M manifoldu üzerindeki Levi-Civita bağlantısı
X, Y, Z, U	: M manifoldu üzerinde vektör alanları
$\nabla_X Y$	: Y vektör alanının X vektör alanı yönündeki kovaryant türevi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
A	: 1-form
g	: Riemann metrik tensörü
(M, g)	: Riemann manifoldu
$\tilde{\nabla}$	: Burulmalı bağlantı
R	: Eğrilik tensörü

1 GİRİŞ

Riemann Geometrisi'nin temel teoremine göre herhangi bir Riemann manifoldu üzerinde adına Levi-Civita bağlantısı denilen burulmasız ve metrik ile uyumlu tek bir bağlantı vardır [6]. Bu bağlantı ile tanımlanan eğrilik tensörüne de Riemann eğrilik tensörü denir.

Riemann manifoldlarında yer alan bu kavramlar fizik teorilerinde de kullanılmaktadır. Buna en bilindik örnek Einstein'ın genel görelilik teorisidir [5], [6]. Bu teoriye göre uzay-zaman 4 boyutlu bir yarı-Riemann manifold olarak alınır. Bu teoride herhangi bir madde dağılımı uzay-zaman eğriliğine kaynaklık eder. Bu yaklaşımın eşdeğerlik ilkesi gereğince bir test parçacığının (uzay-zaman eğriliğine etki etmeyen bir cisim) uzay-zaman jeodezikleri üzerinde hareket ettikleri kabul edilir. Böylece kütle çekim (gravitasyon) kuvveti kavramının yerine uzay-zaman eğriliğinin etkisi ortaya konulmuş olmaktadır.

Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş bölümü olup, ikinci bölümde n -boyutlu türevlenebilir manifoldlar üzerindeki bazı tanım, teorem ve sonuçlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde Levi-Civita bağlantısı tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde ise Levi-Civita bağlantısı ve bir 1-form kullanılarak burulmalı bir bağlantının tanımına ve özelliklerine yer verilmiştir. Levi-Civita bağlantısının belirlemiş olduğu eğrilik tensörü ile, bu çalışmada tanımlanan burulmalı bağlantının belirlemiş olduğu eğrilik tensörünün belirli şartlar altında birbirlerine eşit olduğu ispatlanmıştır. Burulmalı bağlantı kullanılarak elde edilen eğrilik tensörünün sağladığı bazı eşitlikler not edilmiştir.

2 MANİFOLDLARDA TENSÖR ALANLARI

Bu bölümde n -boyutlu türevlenebilir manifoldlar üzerinde diferansiyel hesap yapılabilmesini sağlayan vektör alanı, 1-form ve tensör alanı gibi bazı kavramları özetleyeceğiz. Bu kavramlarla ilgili detaylı bilgi için [1], [2], [4], [6] numaralı kaynaklara başvurulabilir.

Tanım 2.0.1. n -boyutlu türevlenebilir bir M manifoldu aşağıdaki koşulları sağlayan bir topolojik uzaydır.

1. M Hausdorff ve ikinci sayılabilir (yani sayılabilir bir tabana sahip) bir topolojik uzaydır.
2. Her bir $p \in M$ için $p \in M$ noktasını içeren bir $\mathcal{U} \subset M$ açık kümesi vardır öyle ki $\varphi : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \mathcal{U}' = \varphi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^n$ homeomorfizmadır. Yani M yerel olarak $\mathbb{R}^n$ dir.
3. $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ olmak üzere $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{U}'$ ve $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}'$ homeomorfizmaları verildiğinde

$$\psi := \varphi \circ \phi^{-1} : \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

olarak tanımlana ψ fonksiyonu ve onun tersi olan

$$\psi^{-1} = \phi \circ \varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \phi(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de C^∞ sınıfından fonksiyonlardır.

$\mathcal{U} \subset M$ kümesine koordinat komşuluğu, φ 'ye de (yerel) koordinat sistemi denir. Her $p \in \mathcal{U}$ için $\varphi(p) = (x^1(p), \dots, x^n(p)) \in \mathbb{R}^n$ yazılır. $(\mathcal{U}, \varphi)$ ikilisine kart (chart) ve $\{(\mathcal{U}, \varphi)\}$ ailesine atlas denir. Manifoldlar için bilindik örnekler $\mathbb{R}^2$ de çember (1-küre) ve $\mathbb{R}^3$ de küre (2-küre) dir. Türevlenebilir manifoldların ve ona verilebilecek örneklerin ayrıntıları için [3], [4], [5] numaralı kaynaklara başvurulabilir.

2.1 Tanjant Vektör ve Kotanjant Vektör

Tanım 2.1.1. M bir manifold ve $p \in M$ olsun. Aşağıdaki iki koşulu sağlayan

$$v_p := C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \rightarrow v_p(f)$$

fonksiyonuna $p \in M$ noktasında bir tanjant vektör denir. Her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için;

1. $v_p(af + g) = av_p(f) + v_p(g)$ ($\mathbb{R}$ -lineerlik)
2. $v_p(fg) = v_p(f) \cdot g(p) + v_p(g) \cdot f(p)$ (Leibniz Kuralı)

dir.

$p \in M$ noktasındaki bütün tanjant vektörlerin kümesi T_pM ile gösterilir. Bu kümeye, M 'nin p noktasındaki tanjant uzayı denir. T_pM üzerinde toplama işlemi

$$+ : T_pM \times T_pM \rightarrow T_pM$$

her $u_p, v_p \in T_pM$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $(v_p + u_p)(f) = v_p(f) + u_p(f)$ ve dışardan çarpma işlemi de

$$\cdot : \mathbb{R} \times T_pM \rightarrow T_pM$$

her $a \in \mathbb{R}$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $v_p \in T_pM$ için $(av_p)(f) = av_p(f)$ olarak tanımlandığında T_pM n -boyutlu bir vektör uzayı yapısına sahip olur.

M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki bir koordinat sistemi $\xi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ olsun. $\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$ ile gösterilen

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x^i}|_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}|_p = \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}|_{(\xi(p))} \quad (1 \leq i \leq n)$$

olarak tanımlansın. Bu fonksiyon $p \in M$ noktasında bir tanjant vektördür (bkz.[6] s.7). Burada $u^1, \dots, u^n$ fonksiyonları $\mathbb{R}^n$ nin doğal koordinat fonksiyonlarıdır [6].

Teorem 2.1.2. n -boyutlu bir M manifoldunun $p \in M$ noktasındaki bir koordinat sistemi $\xi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ olsun. Bu durumda $\{\frac{\partial}{\partial x^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}|_p\}$ kümesi T_pM için bir taban oluşturur. $w_p \in T_pM$ olmak üzere

$$w_p = \sum_{i=1}^n w_p(x^i) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p$$

şeklinde yazılır.

İspatı için (bkz.[6] s.8).

Şimdi de kotanjant uzayı ne demektir onu tanımlayalım.

Tanım 2.1.3. $p \in M$ noktasındaki n -boyutlu tanjant uzayı T_pM olsun. T_pM vektör uzayının T_p^*M ile gösterilen dual uzayına (ki bu uzay da n -boyutludur) $p \in M$

noktasında kotanjant uzay denir. T_p^*M 'nin elemanlarına $p \in M$ noktasında kotanjant vektör adı verilir. O halde bir $\theta_p \in T_p^*M$ kotanjant vektörü dual uzay kavramı tanımından dolayı

$$\theta_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$$

$$v_p \mapsto \theta_p(v_p)$$

biçiminde bir $\mathbb{R}$ -lineer fonksiyondur. Yani her $v_p, w_p \in T_pM$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$1. \theta_p(v_p + w_p) = \theta_p(v_p) + \theta_p(w_p)$$

$$2. \theta_p(\lambda v_p) = \lambda \theta_p(v_p) \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

dir.

2.2 Vektör Alanı, Lie Parantezi ve 1-Formlar

Tanım 2.2.1. Bir vektör alanı,

$$V : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_pM$$

biçiminde M manifoldunun her bir $p \in M$ noktasına

$$p \mapsto v_p \in T_pM$$

v_p -tanjant vektör eşleyen bir fonksiyon olarak tanımlanır. Yani manifoldtaki her bir p noktasına, bir tanjant vektör karşılık getiren bir fonksiyondur.

Bu tanımın doğrultusunda tanjant vektör tanımı kullanılarak bir vektör alanı her $p \in M$ için $V : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, $f \mapsto V(f)$, $(V(f))(p) = V_p(f)$ biçiminde tanımlanan bir türevleme olarak da ele alınabilir. Dolayısıyla her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $a \in \mathbb{R}$ için:

$$1. V(fg) = V(f)g + fV(g)$$

$$2. V(af + g) = aV(f) + V(g)$$

özellikleri sağlanır. Her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $V(f) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olması gerektiğinden V -vektör alanı C^∞ sınıfından vektör alanı olarak adlandırılır. Vektör alanı dendiğinde, C^∞ - sınıfından vektör alanı anlaşılacaktır. M üstünde tanımlanan tüm vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ ile gösterilecektir. Vektör alanları kümesi $\Gamma(TM)$, birimli ve değişmeli $C^\infty(M, \mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modül yapısına sahiptir. Bu modülün toplama ve dışardan çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır ve ilgili sekiz aksiyomu sağlar. Toplama işlemi $+$: $\Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ her $p \in M$ için

$(V + U)_p = V_p + U_p$. Dışardan çarpma işlemi $\cdot : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ her $p \in M$ için $(f \cdot V)_p = f(p) V_p$ dir.

Şimdi de Lie parantezini tanımlayalım.

Tanım 2.2.2. $X, Y \in \Gamma(TM)$ olsun. X ve Y nin Lie parantezi $[X, Y]$, her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için, $[X, Y](f) = X(Yf) - Y(Xf)$ olarak tanımlanır.

Sonuç 2.2.3. $[X, Y]$, M üzerinde bir vektör alanıdır.

Kanıt. $f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} [X, Y](f + h) &= X(Y(f + h)) - Y(X(f + h)) \\ &= X(Yf + Yh) - Y(Xf + Xh) \\ &= X(Yf) + X(Yh) - Y(Xf) - Y(Xh) \\ &= X(Yf) - Y(Xf) + X(Yh) - Y(Xh) \\ &= [X, Y](f) + [X, Y](h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [X, Y](cf) &= X(Y(cf)) - Y(X(cf)) \\ &= X(cYf) - Y(cXf) \\ &= cX(Yf) - cY(Xf) \\ &= c([X, Y](f)) \end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilmiş olur. Son olarak

$$\begin{aligned} [X, Y](fh) &= X(hY(f) + fY(h)) - Y(hX(f) + fX(h)) \\ &= X(hY(f)) + X(fY(h)) - Y(hX(f)) - Y(fX(h)) \\ &= hX(Y(f)) + X(h)Y(f) + fX(Y(h)) + X(f)Y(h) \\ &= -hY(X(f)) - Y(h)X(f) - fY(X(h)) - Y(f)X(h) \\ &= h(X(Y(f)) - Y(X(f))) + f(X(Y(h)) - Y(X(h))) \\ &= f[X, Y](h) + h[X, Y](f) \end{aligned} \tag{2.1}$$

bulunur ve dolayısıyla $[X, Y] \in \Gamma(TM)$ olur. □

Teorem 2.2.4. Parantez operatörü $[\cdot, \cdot] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$, aşağıdaki özelliklere sahiptir.

1. $X \in \Gamma(TM)$ için

$$[X, X] = 0$$

2. İki-lineerlik; her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$, $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$$

3. Ters-simetriklik; her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

4. Jacobi özdeşliği; her $Y, Z, X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$[Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] + [X, [Y, Z]] = 0$$

Kanıt. Her $X \in \Gamma(TM)$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} [X, X](f) &= X(X(f)) - X(X(f)) \\ &= 0(f) \end{aligned}$$

olur. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için geçerli olduğundan $[X, X] = 0$ dır.

Her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z](f) &= (aX + bY)(Zf) - Z(aX + bY)(f) \\ &= (aX)(Zf) + bY(Zf) - Z((aX)(f) + (bY)(f)) \\ &= (aX)(Zf) + bY(Zf) - Z((aX)f) - Z((bY)f) \\ &= (aX)(Zf) + bY(Zf) - aZ(Xf) - bZ(Yf) \\ &= a(X(Zf) - Z(Xf)) + b(Y(Zf) - Z(Yf)) \\ &= a[X, Z](f) + b[Y, Z](f) \\ &= (a[X, Z] + b[Y, Z])(f) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için geçerli olduğundan

$$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
[Z, aX + bY](f) &= Z((aX + bY)(f)) - (aX + bY)(Zf) \\
&= Z((aX)(f) + Z((bY)(f))) - (aX)(Zf) - bY(Zf) \\
&= Z((aX)f) + Z((bY)f) - (aX)(Zf) - bY(Zf) \\
&= aZ(Xf) + bZ(Yf) - (aX)(Zf) - bY(Zf) \\
&= a(Z(Xf) - X(Zf)) + b(Z(Yf) - Y(Zf)) \\
&= a[Z, X](f) + b[Z, Y](f) \\
&= (a[Z, X] + b[Z, Y])(f)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için geçerli olduğundan

$$[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$$

olur. Daha sonra

$$\begin{aligned}
[X, Y](f) &= X(Y(f)) - Y(X(f)) \\
&= -(Y(X(f)) - X(Y(f))) \\
&= (-[Y, X])(f)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için geçerli olduğundan $[X, Y] = -[Y, X]$ olur. Son olarak

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]](f) &= X([Y, Z]f) - [Y, Z](Xf) \\
&= X(Y(Zf) - Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)) \\
&= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[Y, [Z, X]](f) &= Y([Z, X]f) - [Z, X](Yf) \\
&= Y(Z(Xf) - X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf)) \\
&= Y(Z(Xf)) - Y(X(Zf)) - Z(X(Yf)) + X(Z(Yf))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
[Z, [X, Y]](f) &= Z([X, Y](f) - [X, Y](Zf)) \\
&= Z(X(Yf) - Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf)) \\
&= Z(X(Yf)) - Z(Y(Xf)) - X(Y(Zf)) + Y(X(Zf))
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son üç eşitlik taraf tarafa toplanırsa

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]](f) + [Y, [Z, X]](f) + [Z, [X, Y]](f) &= 0 \\ \left([X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \right)(f) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için geçerli olduğundan

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad (2.2)$$

olarak bulunur. □

Sonuç 2.2.5. Parantez operatörü iki $\mathbb{R}$ -lineer olmasına karşın iki $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineer değildir: Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve her $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$[hX, Y] = h[X, Y] - Y(h)X$$

ve

$$[X, hY] = h[X, Y] + X(h)Y$$

dir.

Kanıt. Keyfi bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} [hX, Y](f) &= hX(Y(f)) - Y(hX(f)) \\ &= hX(Y(f)) - \left(Y(h)X(f) + hY(X(f)) \right) \\ &= h(X(Y(f)) - Y(h)X(f)) - hY(X(f)) \\ &= h(X(Y(f)) - Y(X(f))) - Y(h)X(f) \\ &= h[X, Y](f) - Y(h)X(f) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için geçerli olduğundan

$$[hX, Y] = h[X, Y] - Y(h)X \quad (2.3)$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} [X, hY](f) &= X(hY(f)) - hY(X(f)) \\ &= \left(X(h)Y(f) + h(X(Y(f))) \right) - hY(X(f)) \\ &= X(h)Y(f) + h(X(Y(f)) - Y(X(f))) \\ &= X(h)Y(f) + h(X(Y(f)) - Y(X(f))) \\ &= h[X, Y](f) + X(h)Y(f) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için geçerli olduğundan

$$[X, hY] = h[X, Y] + X(h)Y \quad (2.4)$$

olarak bulunur. $\square$

Sonuç 2.2.6. M manifoldunun bir $\mathcal{U} \subset M$ komşuluğunda bir $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ koordinat sistemi verilsin. X, Y vektör alanları ($1 \leq i, j \leq n$) olmak üzere $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ olarak seçelim. Bu durumda $[\partial_i, \partial_j] = 0 \in \Gamma(TM)$ dir.

Kanıt. Her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= [\partial_i, \partial_j](f) = \partial_i(\partial_j(f)) - \partial_j(\partial_i(f)) \\ &= 0(f) \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için geçerli olduğundan $[\partial_i, \partial_j] = 0$ olur. $\square$

Bir 1-formun tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.2.7. Bir 1-form,

$$\theta : M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p^* M$$

şeklinde M manifoldunun her bir $p \in M$ noktasına

$$p \mapsto \theta_p \in T_p^*(M)$$

θ_p -kotanjant vektörü eşleyen bir fonksiyon olarak tanımlanır. Yani manifoldun her bir p noktasına, bir kotanjant vektörü karşılık getiren fonksiyondur.

Bu tanımdan hareketle, vektör alanı tanımı ve kotanjant vektör tanımı kullanılarak bir 1-form her $p \in M$ için $\theta : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$, $V \mapsto \theta(V)$, $(\theta(V))(p) = \theta_p(V_p)$ biçiminde tanımlanan bir $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineer fonksiyon olarak da ele alınabilir. Yani her $V, Z \in \Gamma(TM)$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\theta(fV + Z) = f\theta(V) + \theta(Z)$$

eşitliği sağlanır. Her $V \in \Gamma(TM)$ için $\theta(V) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olması gerektiğinden θ 1-form C^∞ -sınıfından bir 1-form olarak adlandırılır. 1-form dendiğinde, C^∞ -sınıfından bir 1-form anlaşılacaktır. M manifoldu üzerinde 1-formların kümesi $\Gamma(T^*M)$ ile gösterilecektir. 1-formların (kovektör alanlarının) kümesi $\Gamma(T^*M)$, birimli ve değişmeli bir halka üzerinde modül yapısına sahiptir. Bu modülün toplama ve dışardan çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır ve ilgili sekiz aksiyom koşulları sağlanır. Toplama

işlemi $+$: $\Gamma(T^*M) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow \Gamma(T^*M)$ her $p \in M$ için $(\theta + \omega)_p = \theta_p + \omega_p$. Dışardan çarpma işlemi $\cdot$: $C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \Gamma(T^*M) \rightarrow \Gamma(T^*M)$ her $p \in M$ için $(f \cdot \theta)_p = f(p)(\theta_p)$ dir.

Tanım 2.2.8. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. Her $V \in \Gamma(TM)$ için $(df)(V) = V(f)$ olarak tanımlanan $df : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonuna f 'nin diferansiyeli denir.

df 'nin bir 1-form olduğu açıktır: Her $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} df(hX) &= hX(f) \\ &= h df(X) \end{aligned}$$

olur. Daha sonra ise

$$\begin{aligned} df(X + Y) &= (X + Y)(f) \\ &= X(f) + Y(f) \\ &= df(X) + df(Y) \end{aligned}$$

bulunur. Bir $\xi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinat sisteminde

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

dir. $f(x^1, \dots, x^i, \dots, x^n) = x^i$ olarak alındığında, bir $p \in \mathcal{U} \subset M$ için ξ -koordinat sisteminde T_p^*M 'nin $\{dx^1|_p, dx^2|_p, \dots, dx^n|_p\} \subset T_p^*M$ koordinat kovektör tabanı elde edilir.

2.3 Tensör Alanları

Tanım 2.3.1. $r, s \geq 0$ tamsayıları için,

$$T : \Gamma(T^*M)^r \times \Gamma(TM)^s \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

biçimindeki $C^\infty(M, \mathbb{R})$ çok-lineer T fonksiyonuna M manifoldu üzerinde (r, s) -tipinde bir “*tensör alanı*” denir.

Tensör alanları kümesini $\mathcal{T}_s^r(M)$ ile gösterecek olursak $r \geq 1$ olmak üzere $(r, 0)$ tipinde tensör alanları *kontravaryant* tensör alanları, $s \geq 0$ olmak üzere $(0, s)$ tipinden tensör alanları da *kovaryant* tensör alanları olarak isimlendirilir. $(0, 0)$ -tipinden tensör alanları ise C^∞ -sınıfından fonksiyonlar olarak tanımlanır. $\mathcal{T}_s^r(M)$ tensör alanı kümesi bir modül yapısına sahiptir. Yani; $T_1, T_2 \in \mathcal{T}_s^r(M)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$T_1 + T_2 \in \mathcal{T}_s^r(M)$, $fT_1 \in \mathcal{T}_s^r(M)$ biçimindeki toplama ve dışardan çarpma işlemleri her $\theta^1, \dots, \theta^r \in \Gamma(T^*M)$ ve her $X_1, \dots, X_s \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) &= T_1(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \\ &\quad + T_2(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(fT_1)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = fT_1(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \quad (2.6)$$

olarak tanımlıdır. $C^\infty(M, \mathbb{R})$ halkası üzerinde ilgili sekiz koşul sağlanır.

Örnek 2.3.2. $\delta(\theta, X) = \theta(X)$ eşitliğiyle tanımlanan

$$\delta : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

fonksiyonunun M manifoldu üzerinde $(1, 1)$ tipinde tensör alanı olduğunu gösterelim. Her $\theta_1, \theta_2 \in \Gamma(T^*M)$, $X \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \delta(\theta_1 + \theta_2, X) &= (\theta_1 + \theta_2)(X) = \theta_1(X) + \theta_2(X) \\ &= \delta(\theta_1, X) + \delta(\theta_2, X) \\ \delta(f\theta, X) &= (f\theta)(X) = f(\theta(X)) \\ &= f\delta(\theta, X) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlandığından, δ fonksiyonu $\theta \in \Gamma(T^*M)$ göre $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir. Benzer şekilde her $\theta \in \Gamma(T^*M)$ ve her $X_1, X_2 \in \Gamma(TM)$, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} \delta(\theta, X_1 + X_2) &= \theta(X_1 + X_2) = \theta(X_1) + \theta(X_2) \\ &= \delta(\theta, X_1) + \delta(\theta, X_2) \\ \delta(\theta, fX) &= \theta(fX) = f\theta(X) \\ &= f\delta(\theta, X) \end{aligned}$$

eşitlikleri de sağlanır. Dolayısıyla δ fonksiyonu $X \in \Gamma(TM)$ göre de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineerdir.

M , n -boyutlu bir manifold olsun. $A \in \mathcal{T}_s^r(M)$ olmak üzere herhangi bir $p \in M$ noktasında $A_p : (T_p^*M)^r \times (T_pM)^s \rightarrow \mathbb{R}$ biçiminde verilen $\mathbb{R}$ -çok-lineer A_p fonksiyonuna (r, s) -tipinden tensör denir. Tensör alanları M manifoldunun her p noktasına bir tensör karşılık getirir (bkz.[6] s.38).

2.4 Tensörlerin Çarpımı, Bileşenleri ve Kontraksiyonu

Tanım 2.4.1. M manifoldu üzerinde tensör çarpımı $K \in \mathcal{T}_\beta^\alpha(M)$ ve $L \in \mathcal{T}_\nu^\mu(M)$ olmak üzere $(K \otimes L) : \Gamma(T^*M)^{\alpha+\mu} \times \Gamma(TM)^{\beta+\nu} \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu için $(K \otimes L)(\theta^1, \dots, \theta^\alpha, \dots, \theta^{\alpha+1}, \dots, \theta^{\alpha+\mu}, X_1, \dots, X_\beta, \dots, X_{\beta+1}, \dots, X_{\beta+\nu})$

$$= K(\theta^1, \dots, \theta^\alpha, X_1, \dots, X_\beta) L(\theta^{\alpha+1}, \dots, \theta^{\alpha+\mu}, X_{\beta+1}, \dots, X_{\beta+\nu}) \quad (2.7)$$

eşitliğiyle tanımlanan $K \otimes L$ tensör alanıdır.

Burada $\theta^1, \dots, \theta^\alpha, \theta^{\alpha+1}, \dots, \theta^{\alpha+\mu} \in \Gamma(T^*M)$ ve $X_1, \dots, X_\beta, X_{\beta+1}, \dots, X_{\beta+\nu} \in \Gamma(TM)$ olarak gösterilmektedir. Görüldüğü gibi $(K \otimes L)$ tensör alanı $(\alpha + \mu, \beta + \nu)$ tipinden bir tensör alanıdır. Verilen iki tensör alanının çarpılması durumunda (α, μ) kontravaryant mertebe; (β, ν) , kovaryant mertebe olmak üzere bu mertebeler kendi aralarında toplanır.

Tanım 2.4.2. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $(0, 0)$ tipinden tensör alanları olarak tanımlanır. Öyleki; A herhangi bir tensör alanı olmak üzere $f \otimes A$ tensör çarpımı

$$f \otimes A = A \otimes f = fA \quad (2.8)$$

biçiminde tanımlıdır.

Sonuç 2.4.3. Eğer M manifoldu üzerindeki bir $\theta \in \Gamma(T^*M)$ 1-formu θ ise

$$\theta : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

biçiminde bir $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineer dönüşüm olduğundan dolayı θ , $(0, 1)$ -tipinde kovaryant tensör alanıdır. Tensör alanı tanımımıza baktığımızda 1-form için $r = 0$ ve $s = 1$ dir.

Tanım 2.4.4. $V \in \Gamma(TM)$ ve $\theta \in \Gamma(T^*M)$ olsun. Bu V -vektör alanı $V(\theta) := \theta(V)$ kuralı ile $(1, 0)$ tipinden bir kontravaryant tensör alanı olarak da düşünülebilir. Bu tanıma bakacak olursak

$$V : \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olacak biçimde bir $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineer dönüşümü elde edilir. O zaman tensör alanı tanımından hareketle vektör alanları için $r = 1$ ve $s = 0$ dir.

Tanım 2.4.5. Eğer $H : \Gamma(TM)^s \rightarrow \Gamma(TM)$ dönüşümü $C^\infty(M, \mathbb{R})$ çok-lineer ise $(1, s)$ -tipinden $\bar{H} : \Gamma(T^*M) \times \Gamma(TM)^s \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ tensör alanı

$$\bar{H}(\theta, X_1, \dots, X_s) = \theta(H(X_1, \dots, X_s)) \quad (2.9)$$

biçiminde tanımlanır.

Sonuç 2.4.6. $K \in \mathcal{T}_0^r(M)$ kovaryant ve $L \in \mathcal{T}_s^0(M)$ kontravaryant tensör alanları için

$$K \otimes L = L \otimes K$$

dir.

Kanıt. Tensör çarpımı tanımından hareketle önce eşitliğin sol tarafındaki tensör çarpımı oluşturulursa

$$(K \otimes L)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = K(\theta^1, \dots, \theta^r)L(X_1, \dots, X_s)$$

olduğu görülür. Daha sonra ise eşitliğin sağ tarafındaki tensör çarpımını oluşturduğumuzda

$$(L \otimes K)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = L(X_1, \dots, X_s)K(\theta^1, \dots, \theta^r)$$

bulunur. $C^\infty(M, \mathbb{R})$ halkası değişmeli olduğundan

$$(K \otimes L)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) = (L \otimes K)(\theta^1, \dots, \theta^r, X_1, \dots, X_s) \quad (2.10)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik her θ^i 1-formları ve her X_j vektör alanları için sağlandığından $K \otimes L = L \otimes K$ olur. $\square$

Tensörlerin bileşenlerini tanımlayalım.

Tanım 2.4.7. n -boyutlu bir M manifoldunun $\mathcal{U} \subset M$ komşuluğunda bir koordinat sistemi $\xi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ olsun. Bu koordinat sisteminde $\Gamma(T^*M)$ 'nin koordinat tabanı $\{dx^1, \dots, dx^n\}$ ve $\Gamma(TM)$ 'nin koordinat tabanı $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ alalım. Bu durumda bir $T \in \mathcal{T}_s^r(M)$ tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = T(dx^{i_1}, \dots, dx^{i_r}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_s}}) \quad (2.11)$$

şeklinde verilen $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ dir.

Genel olarak T tensör alanı ξ koordinat sisteminde

$$T = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_s \\ i_1, \dots, i_r}} T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s} \quad (2.12)$$

şeklinde ifade edilir.

Bu bölümde son olarak tensörlerin kontraksiyonu kavramını verelim.

Teorem 2.4.8. Kontraksiyon olarak adlandırılan $\mathbf{C} : \mathcal{T}_1^1(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ biçiminde tek bir $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineer fonksiyon vardır öyleki her $X \in \Gamma(TM)$ ve her $\theta \in \Gamma(T^*M)$ için $\mathbf{C}(X \otimes \theta) = \theta(X)$ dir.

Bu teoremin ispatı için (bkz.[6] s.40). Bu ispattan anlaşılmaktadır ki keyfi bir $P \in \mathcal{T}_1^1(M)$ için

$$\mathbf{C}(P) = \sum_i P_i^i$$

dir.

Tanım 2.4.9. $G \in \mathcal{T}_\nu^\mu(M)$ için; $1 \leq i \leq \mu$ ve $1 \leq j \leq \nu$ olmak üzere

$$(\mathbf{C}_j^i G)(\theta^1, \dots, \theta^{\mu-1}, X_1, \dots, X_{\nu-1}) = \mathbf{C}[G(\theta^1, \dots, \theta^{i-1}, \dots, \theta^{\mu-1}, X_1, \dots, X_{j-1}, \dots, X_{\nu-1})]$$

eşitliği ile tanımlanan

$$\mathbf{C}_j^i : \mathcal{T}_\nu^\mu(M) \rightarrow \mathcal{T}_{\nu-1}^{\mu-1}(M)$$

dönüşümüne G tensör alanının (i, j) kontraksiyonu denir.

$G \in \mathcal{T}_\nu^\mu(M)$ için $\mathbf{C}_j^i$ daraltması, (μ, ν) mertebeli tensörü $(\mu-1, \nu-1)$ mertebeli tensöre taşır. Yani mertebeleri düşürür.

Örnek 2.4.10. $H \in \mathcal{T}_3^2(M)$ tipinde bir tensör alanı olsun. Bu durumda $\mathbf{C}_3^1$ -kontraksiyonu H 'ye uygulandığında $\mathbf{C}_3^1 H$ tensör alanı

$$(\mathbf{C}_3^1 H)(\theta, X, Y) = \mathbf{C}[H(., \theta, X, Y, .)]$$

eşitliği ile verilen (1,2) tipinde bir tensör alanıdır. Bu tensör alanının bileşenleri

$$\begin{aligned} (\mathbf{C}_3^1 H)_{ij}^k &= (\mathbf{C}_3^1 H)(dx^k, \partial_i, \partial_j) \\ &= \mathbf{C}[H(., dx^k, \partial_i, \partial_j, .)] \\ &= \sum_m (H(dx^m, dx^k, \partial_i, \partial_j, \partial_m)) \\ &= \sum_m H_{ijm}^{mk} \end{aligned}$$

olarak bulunur.

3 RIEMANN MANİFOLDU VE LEVİ-CİVİTA BAĞLANTISI

Bu bölümde metrik tensör ve bağlantı kavramlarını tanımlayacağız.

3.1 Riemann Metriği ve Bağlantı

Tanım 3.1.1. M , n -boyutlu bir manifold olsun. $(0, 2)$ tipinden g tensör alanı

1. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $g(X, Y) = g(Y, X)$ (Simetriklik)
2. Her $q \in M$ ve sıfırdan farklı her $X_q \in T_qM$ için $g_q(X_q, X_q) > 0$ (Pozitif tanımlılık)

koşullarını sağlıyorsa g 'ye M manifoldu üzerinde bir Riemann metriği ve M manifolduna da Riemann manifoldu denir. Dikkat edilirse g metrik tensör alanı M manifoldunun her $q \in M$ noktasındaki T_qM tanjant uzayına bir iç çarpım karşılık getirmektedir. Yani Riemann manifoldlarında tanjant uzaylar birer iç çarpım uzayıdır.

Tanım 3.1.2. Her $q \in M$ için ve sıfırdan farklı her $X_q \in T_qM$ için, $g_q(U_q, X_q) = 0 \in \mathbb{R}$ ifadesini sağlayan tek çözüm $U_q = 0 \in T_qM$ ise g , nondejenere'dir.

Teorem 3.1.3. Bir Riemann metriği nondejenere'dir.

Kanıt. Varsayalım ki g , Riemann metriği nondejenere olmasın. Bu durumda bir $q \in M$ için en az bir $U_q \neq 0$ vardır öyle ki; her $X_q \in T_qM$ için $g_q(U_q, X_q) = 0$ olmalıdır. $X_q = U_q$ olarak alınırsa varsayımımızdan dolayı $g_q(U_q, U_q) = 0$ olur. Bu da g Riemann metriğinin pozitif tanımlı olması ile çelişir. $\square$

Tanım 3.1.4. M bir manifold olmak üzere; $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ dönüşümü, her $X, Z \in \Gamma(TM)$ için,

I) $\nabla_X Z, X$ üzerinde $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineerdir.

II) $\nabla_X Z, Z$ üzerinde $\mathbb{R}$ -lineerdir.

III) Her $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $\nabla_X(hZ) = X(h)Z + h\nabla_X Z$

koşulları sağlanıyorsa ∇ 'ya bir bağlantı, $\nabla_X Z$ 'ye de Z 'nin X 'e göre kovaryant türevi denir. $\nabla_X : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ 'ye de kovaryant türev operatörü denir.

Böyle bir ∇ bağlantısının varlığı aşağıdaki teorem ile verilir:

Teorem 3.1.5. (M, g) bir Riemann manifold olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\text{IV)} \quad [Y, Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y$$

$$\text{V)} \quad Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

koşullarını sağlayan tek bir ∇ bağlantısı vardır. Bu ∇ bağlantısına M manifoldunun Levi-Civita bağlantısı denir ve aşağıdaki Koszul formülü ile karakterize edilir.

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y Z, X) &= Yg(Z, X) + Zg(X, Y) - Xg(Y, Z) \\ &\quad - g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) + g(X, [Y, Z]) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Bu teoremin ispatı için (bkz.[6] s.61)).

Teorem 3.1.6. M türevlenebilir bir manifold olsun. Bir ∇ bağlantısı verilsin. Öyleyse her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \quad (3.2)$$

olarak tanımlanan T fonksiyonu $T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ adına burulma tensör alanı denilen $(1, 2)$ - tipinden bir tensör alanıdır.

Kanıt. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} T(fX + Z, Y) &= \nabla_{fX+Z} Y - \nabla_Y (fX + Z) - [fX + Z, Y] \\ &= \nabla_{fX} Y + \nabla_Z Y - \nabla_Y fX - \nabla_Y Z - [fX, Y] - [Z, Y] \\ &= f\nabla_X Y + \nabla_Z Y - Y(f)X - f\nabla_Y X - \nabla_Y Z - f[X, Y] \\ &\quad + Y(f)X - [Z, Y] \\ &= f(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) + \nabla_Z Y - \nabla_Y Z - [Z, Y] \\ &= fT(X, Y) + T(Z, Y) \end{aligned} \quad (3.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} T(X, fY + Z) &= \nabla_X (fY + Z) - \nabla_{fY+Z} X - [X, fY + Z] \\ &= \nabla_X fY + \nabla_X Z - \nabla_{fY} X - \nabla_Z X - [X, fY] - [X, Z] \\ &= X(f)Y + f\nabla_X Y + \nabla_X Z - f\nabla_Y X - \nabla_Z X \\ &\quad - (f[X, Y] + X(f)Y) - [X, Z] \\ &= X(f)Y + f\nabla_X Y + \nabla_X Z - f\nabla_Y X - \nabla_Z X \\ &\quad - f[X, Y] - X(f)Y - [X, Z] \\ &= f(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) + \nabla_X Z - \nabla_Z X - [X, Z] \\ &= fT(X, Y) + T(X, Z) \end{aligned} \quad (3.4)$$

olarak bulunur. $\square$

Sonuç 3.1.7. Burulma tensör alanı X ve Y vektör alanlarına göre ters-simetriktir. Yani

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

dir.

Kanıt. Burulma tensör alanının tanımı kullanılarak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} T(X, Y) &= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= -(\nabla_Y X - \nabla_X Y + [X, Y]) \\ &= -(\nabla_Y X - \nabla_X Y - [Y, X]) \\ &= -T(Y, X) \end{aligned} \tag{3.5}$$

olarak bulunur. $\square$

Sonuç 3.1.8. Levi-Civita bağlantısının burulma tensörünün sıfır olduğu Teorem 3.1.5 (IV) den açıkça bellidir.

M n -boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M manifoldunun $\mathcal{U} \subset M$ komşuluğunda bir koordinat sistemi $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ olarak verilsin. Bu durumda $X = \partial_i$ ve $Y = \partial_j$ vektör alanları için

$$T(\partial_i, \partial_j) = \sum_{k=1}^n T_{ij}^k \partial_k \tag{3.6}$$

dir.

Teorem 3.1.9. M n -boyutlu türevlenebilir bir manifold olsun. ∇ keyfi bir bağlantı olsun. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \tag{3.7}$$

biçiminde tanımlanan $R : (\Gamma(TM))^3 \rightarrow \Gamma(TM)$ fonksiyonu adına eğrilik tensör alanı denilen $(1, 3)$ - tipinden tensör alanıdır.

Kanıt. Her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
R(fX + Y, Z)U &= \nabla_{fX+Y}\nabla_Z U - \nabla_Z\nabla_{fX+Y}U - \nabla_{[fX+Y,Z]}U \\
&= \nabla_{fX}\nabla_Z U + \nabla_Y\nabla_Z U - \nabla_Z\nabla_{fX}U - \nabla_Z\nabla_Y U \\
&\quad - \nabla_{[fX,Z]}U - \nabla_{[Y,Z]}U \\
&= f\nabla_X\nabla_Z U + \nabla_Y\nabla_Z U - \nabla_Z(\nabla_{fX}U) - \nabla_Z\nabla_Y U \\
&\quad - \nabla_{f[X,Z]-Z(f)X}U - \nabla_{[Y,Z]}U \\
&= f\nabla_X\nabla_Z U + \nabla_Y\nabla_Z U - (Z(f)\nabla_X U + f\nabla_Z\nabla_X U) \\
&\quad - \nabla_Z\nabla_Y U - \nabla_{f[X,Z]}U + \nabla_{Z(f)X}U - \nabla_{[Y,Z]}U \\
&= f(\nabla_X\nabla_Z U - \nabla_Z\nabla_X U - \nabla_{[X,Z]}U) \\
&\quad + \nabla_Y\nabla_Z U - \nabla_Z\nabla_Y U - \nabla_{[Y,Z]}U \\
&= fR(X, Z)U + R(Y, Z)U
\end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
R(X, fY + Z)U &= \nabla_X\nabla_{fY+Z}U - \nabla_{fY+Z}\nabla_X U - \nabla_{[X,fY+Z]}U \\
&= \nabla_X\nabla_{fY}U + \nabla_X\nabla_Z U - \nabla_{fY}\nabla_X U - \nabla_Z\nabla_X U \\
&\quad - \nabla_{[X,fY]}U - \nabla_{[X,Z]}U \\
&= \nabla_X(\nabla_{fY}U) + \nabla_X\nabla_Z U - \nabla_{fY}\nabla_X U - \nabla_Z\nabla_X U \\
&\quad - \nabla_{f[X,Y]+X(f)Y}U - \nabla_{[X,Z]}U \\
&= X(f)\nabla_Y U + f\nabla_X\nabla_Y U + \nabla_X\nabla_Z U - f\nabla_Y\nabla_X U \\
&\quad - \nabla_Z\nabla_X U - f\nabla_{[X,Y]}U - X(f)\nabla_Y U - \nabla_{[X,Z]}U \\
&= f(\nabla_X\nabla_Y U - \nabla_Y\nabla_X U - \nabla_{[X,Y]}U) \\
&\quad + \nabla_X\nabla_Z U - \nabla_Z\nabla_X U - \nabla_{[X,Z]}U \\
&= fR(X, Y)U + R(X, Z)U
\end{aligned} \tag{3.9}$$

olarak bulunur. Son olarak

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(fZ + U) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ + U) - \nabla_Y \nabla_X (fZ + U) - \nabla_{[X, Y]} (fZ + U) \\
&= \nabla_X \nabla_Y fZ + \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_Y \nabla_X U \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]} fZ - \nabla_{[X, Y]} U \\
&= \nabla_X (Y(f)Z + f\nabla_Y Z) + \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y (X(f)Z + f\nabla_X Z) \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_X U - ([X, Y](f)Z + f\nabla_{[X, Y]} Z) - \nabla_{[X, Y]} U \\
&= \nabla_X (Y(f)Z) + \nabla_X (f\nabla_Y Z) + \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y (X(f)Z) \\
&\quad - \nabla_Y (f\nabla_X Z) - \nabla_Y \nabla_X U - [X, Y](f)Z - f\nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_{[X, Y]} U \\
&= X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_X \nabla_Y U \\
&\quad - (Y(X(f))Z + X(f)\nabla_Y Z) - (Y(f)\nabla_X Z + f\nabla_Y \nabla_X Z) \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_X U - (X(Y(f)) - Y(X(f)))Z - f\nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_{[X, Y]} U \\
&= X(Y(f))Z + Y(f)\nabla_X Z + X(f)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_X \nabla_Y U \\
&\quad - Y(X(f))Z - X(f)\nabla_Y Z - Y(f)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_X U - X(Y(f))Z + Y(X(f))Z - f\nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_{[X, Y]} U \\
&= f(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z) \\
&\quad + \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X, Y]} U \\
&= fR(X, Y)Z + R(X, Y)U
\end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir. $\square$

Sonuç 3.1.10. Eğrilik tensör alanı X ve Y vektör alanlarına göre ters-simetriktir. Yani

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \tag{3.11}$$

dir.

Kanıt. Eğrilik tensör alanının tanımı kullanılarak her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
&= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X, Y]} Z) \\
&= -(\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_{[Y, X]} Z) \\
&= -R(Y, X)Z
\end{aligned} \tag{3.12}$$

elde edilir. $\square$

M n -boyutlu bir Riemann manifold olsun. M manifoldunun $\mathcal{U}$ komşuluğundaki

koordinat sistemi $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ olsun. Bu durumda $X = \partial_i$, $Y = \partial_j$ ve $Z = \partial_m$ vektör alanları için eğrilik tensör alanı

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_m = \sum_{h=1}^n R_{ijm}^h \partial_h \quad (3.13)$$

biçiminde yazılır.

Teorem 3.1.11. (M, g) bir Riemann manifold olsun. ∇ Levi-Civita bağlantısı verilsin. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \quad (3.14)$$

eşitliği sağlanır (Birinci Bianchi Özdeşliği).

Kanıt. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ R(Y, Z)X &= \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y, Z]} X \\ R(Z, X)Y &= \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \end{aligned} \quad (3.15)$$

biçiminde yazılır. Bu eşitlikler taraf tarafa topladığında

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &\quad + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X \\ &\quad - \nabla_{[Y, Z]} X + \nabla_Z \nabla_X Y \\ &\quad - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z, X]} Y \end{aligned} \quad (3.16)$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) \\ &\quad + \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\ &\quad + \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_{[Y, Z]} X \\ &\quad - \nabla_{[Z, X]} Y \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. Bu eşitlik düzenlendiğinde

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X[Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]}X \\
&\quad + \nabla_Y[Z, X] - \nabla_{[Z, X]}Y \\
&\quad + \nabla_Z[X, Y] - \nabla_{[X, Y]}Z \quad (3.18)
\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] \\
&\quad + [Z, [X, Y]] \quad (3.19)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ tarafında Teorem 2.2.4 deki 4. özellik olan Jacobi Özdeşliği kullanıldığında

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0 \quad (3.20)$$

bulunur. $\square$

Sonuç 3.1.12. (M, g) bir Riemann manifold olsun. R eğrilik tensörü olsun. ∇ Levi-Civita bağlantısı verilsin. Bu durumda her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ için

$$g(R(X, Y)Z, U) = -g(R(X, Y)U, Z) \quad (3.21)$$

$$g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y) \quad (3.22)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. Her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
g(R(X, Y)Z, U) &= g(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z, U) \\
&= g(\nabla_X \nabla_Y Z, U) - g(\nabla_Y \nabla_X Z, U) - g(\nabla_{[X, Y]}Z, U) \quad (3.23)
\end{aligned}$$

dir. Teorem 3.1.5 (V) özelliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X \nabla_Y Z, U) &= Xg(\nabla_Y Z, U) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) \\
&= X(Yg(Z, U) - g(Z, \nabla_Y U)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) \\
&= X(Yg(Z, U)) - (g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) + g(Z, \nabla_X \nabla_Y U)) \\
&\quad - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) \\
&= X(Yg(Z, U)) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) - g(Z, \nabla_X \nabla_Y U) \\
&\quad - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
g(\nabla_Y \nabla_X Z, U) &= Yg(\nabla_X Z, U) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) \\
&= Y(Xg(Z, U) - g(Z, \nabla_X U)) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) \\
&= Y(Xg(Z, U)) - (g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) + g(Z, \nabla_Y \nabla_X U)) \\
&\quad - g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) \\
&= Y(Xg(Z, U)) - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) - g(Z, \nabla_Y \nabla_X U) \\
&\quad - g(\nabla_X Z, \nabla_Y U)
\end{aligned} \tag{3.25}$$

bulunur. Ayrıca

$$g(\nabla_{[X,Y]} Z, U) = [X, Y]g(Z, U) - g(Z, \nabla_{[X,Y]} U) \tag{3.26}$$

olacağından

$$\begin{aligned}
g(R(X, Y)Z, U) &= X(Yg(Z, U)) - g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) - g(Z, \nabla_X \nabla_Y U) \\
&\quad - g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) - Y(Xg(Z, U)) + g(\nabla_Y Z, \nabla_X U) \\
&\quad + g(Z, \nabla_Y \nabla_X U) + g(\nabla_X Z, \nabla_Y U) \\
&\quad - [X, Y]g(Z, U) + g(Z, \nabla_{[X,Y]} U) \\
&= X(Yg(Z, U)) - Y(Xg(Z, U)) - [X, Y]g(Z, U) \\
&\quad + g(Z, \nabla_Y \nabla_X U) - g(Z, \nabla_X \nabla_Y U) + g(Z, \nabla_{[X,Y]} U) \\
&= -(g(\nabla_X \nabla_Y U, Z) - g(\nabla_Y \nabla_X U, Z) - g(\nabla_{[X,Y]} U, Z)) \\
&= -g(R(X, Y)U, Z)
\end{aligned} \tag{3.27}$$

elde edilir. Birinci Bianchi Özdeşliğinin her iki tarafına da $U \in \Gamma(TM)$ ile iç çarpım uygulanırsa

$$g(R(X, Y)Z, U) + g(R(Y, Z)X, U) + g(R(Z, X)Y, U) = 0 \tag{3.28}$$

elde edilir. Daha sonra ise X, Y, Z, U dairesel permütasyonları ile

$$\begin{aligned}
g(R(Y, Z)U, X) + g(R(Z, U)Y, X) + g(R(U, Y)Z, X) &= 0 \\
g(R(Z, U)X, Y) + g(R(U, X)Z, Y) + g(R(X, Z)U, Y) &= 0 \\
g(R(U, X)Y, Z) + g(R(X, Y)U, Z) + g(R(Y, U)X, Z) &= 0
\end{aligned}$$

bulunur. (3.28) eşitliği ile bu son üç eşitlik taraf tarafa toplanıp gerekli düzenlemeler

yapıldığında

$$g(R(Z, X)Y, U) + g(R(U, Y)Z, X) + g(R(X, Z)U, Y) + g(R(Y, U)X, Z) = 0$$

olur. Elde edilen bu eşitlik düzenlediğinde

$$g(R(Z, X)Y, U) + g(R(Z, X)Y, U) - g(R(Y, U)Z, X) - g(R(Y, U)Z, X) = 0$$

bulunur. Buradan da

$$g(R(Z, X)Y, U) = g(R(Y, U)Z, X)$$

olur. Bu eşitlikle $X \rightarrow Y$, $Y \rightarrow Z$ ve $Z \rightarrow X$ değişimi uygulanırsa

$$g(R(X, Y)Z, U) = g(R(Z, U)X, Y) \quad (3.29)$$

elde edilir. $\square$

Tanım 3.1.13. R eğrilik tensörü olmak üzere $Ric = \mathbf{C}_3^1 R$ biçiminde tanımlanan $(0, 2)$ tipinden tensör alanına “Ricci eğrilik tensörü” denir.

Sonuç 3.1.14. (M, g) bir Riemann manifold olsun. Levi-Civita bağlantısına göre Ricci eğrilik tensörü simetriktir. Yani her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X, Y) = Ric(Y, X) \quad (3.30)$$

dir.

Kanıt. Yerel $\{E_1, \dots, E_n\}$ karşılıklı ortonormal vektör alanları kullanıldığında, eşitliğin sol tarafı her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(E_i, X)Y, E_i)$$

biçiminde yazılabilir [6]. Burada (3.29) eşitliği kullanılarak

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(Y, E_i)E_i, X)$$

elde edilir. Buradan da (3.12) ve (3.27) eşitlikleri kullanılarak

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n g(R(E_i, Y)X, E_i) = Ric(Y, X) \quad (3.31)$$

bulunur. □

Tanım 3.1.15. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifold olsun. ∇ Levi-Civita bağlantısı verilsin. Bu durumda $\gamma : (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow M$ eğrisinin hız vektör alanı V , γ boyunca paralel, yani

$$\nabla_V V = 0 \quad (3.32)$$

ise γ eğrisine jeodezik denir (bkz.[5]).

Sonuç 3.1.16. (M, g) n -boyutlu bir Riemann manifold olsun. $\gamma : (a, b) \in \mathbb{R} \rightarrow M$ bir eğri ve $\mathcal{U} \subset M$ komşuluğunda bir koordinat sistemi $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ olsun. Bu durumda γ eğrisinin bir jeodezik olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad (3.33)$$

olmasıdır (bkz.[6] s.67).

4 BURULMALI BAĞLANTI

Bu bölümde Levi-Civita bağlantısını ve bir $A \in \Gamma(T^*M)$ 1-formunu kullanarak yeni bir bağlantı tanımlayacağız. Dolayısıyla yapacağımız tanım (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir de $A \in \Gamma(T^*M)$ 1-formu kullanılarak elde edilecektir:

Teorem 4.0.1. M manifoldu yukarıda verilen $A \in \Gamma(T^*M)$ 1-formu ile birlikte bir Riemann manifold olsun. Öyleyse her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y := \nabla_X Y + A(X)Y \quad (4.1)$$

olarak tanımlanan $\tilde{\nabla}$ fonksiyonu bir bağlantıdır. Bu tanımda ∇ ile Levi-Civita bağlantısı gösterilmektedir.

Kanıt. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

1. $\tilde{\nabla}_{fX+Z} Y = f\tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_Z Y$ olduğunu gösterelim. $\tilde{\nabla}$ fonksiyonunun tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_{fX+Z} Y &= \nabla_{fX+Z} Y + A(fX + Z)Y \\ &= \nabla_{fX} Y + \nabla_Z Y + A(fX)Y + A(Z)Y \\ &= f\nabla_X Y + \nabla_Z Y + fA(X)Y + A(Z)Y \\ &= f(\nabla_X Y + A(X)Y) + \nabla_Z Y + A(Z)Y \\ &= f\tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_Z Y \end{aligned} \quad (4.2)$$

bulunur. Bu eşitlik göstermektedir ki $\tilde{\nabla}_X Y$, X üzerinde $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineerdir.

2. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\tilde{\nabla}_X(\lambda Y + Z) = \lambda\tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z$ olduğunu gösterelim. $\tilde{\nabla}$ fonksiyonunun tanımı kullanıldığında

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X(\lambda Y + Z) &= \nabla_X(\lambda Y + Z) + A(X)(\lambda Y + Z) \\ &= \nabla_X \lambda Y + \nabla_X Z + A(X)\lambda Y + A(X)Z \\ &= \lambda(\nabla_X Y + A(X)Y) + \nabla_X Z + A(X)Z \\ &= \lambda\tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_X Z \end{aligned} \quad (4.3)$$

bulunur. Buradan da $\tilde{\nabla}_X Y$ 'nin Y üzerinde $\mathbb{R}$ -lineer olduğu açıkça görülmektedir. Son olarak $\tilde{\nabla}_X(fY) = f\tilde{\nabla}_X(Y) + X(f)Y$ olduğunu gösterelim:

3. Her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X(fY) &= \nabla_X(fY) + A(X)fY \\
&= X(f)Y + f\nabla_X Y + fA(X)Y \\
&= f(\nabla_X Y + A(X)Y) + X(f)Y \\
&= f\tilde{\nabla}_X(Y) + X(f)Y
\end{aligned} \tag{4.4}$$

bulunur. $\square$

Tanımlanan $\tilde{\nabla}$ bağlantısının burulma tensörünün ne olduğunu görelim:

Sonuç 4.0.2. Yukarıda tanımlanan $\tilde{\nabla}$ bağlantısının burulma tensörü

$$\tilde{T}(X, Y) = A(X)Y - A(Y)X \tag{4.5}$$

dir.

Kanıt. Burulma tensörünün tanımında $\tilde{\nabla}$ bağlantısı göz önüne alındığında her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(X, Y) &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X - [X, Y] \\
&= \nabla_X Y + A(X)Y - (\nabla_Y X + A(Y)X) - [X, Y] \\
&= \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] + A(X)Y - A(Y)X \\
&= A(X)Y - A(Y)X
\end{aligned} \tag{4.6}$$

elde edilir. Burada Levi-Civita bağlantısının burulma tensörünün sıfır olduğu kullanılmıştır. $\square$

Teorem 3.1.5 deki V. özelliğin $\tilde{\nabla}$ bağlantısı için karşılığının ne olduğunu görelim: Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) = 0 \tag{4.7}$$

olduğunu Levi-Civita bağlantısından biliyoruz. Dolayısıyla buradan

$$\begin{aligned} Xg(Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \tilde{\nabla}_X Z) &= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y + A(X)Y, Z) \\ &\quad - g(Y, \nabla_X Z + A(X)Z) \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} &= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - A(X)g(Y, Z) \\ &\quad - g(Y, \nabla_X Z) - A(X)g(Y, Z) \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} &= Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad - 2A(X)g(Y, Z) \end{aligned} \quad (4.10)$$

olarak bulunur. Burada Levi-Civita bağlantısının V numaralı özelliği kullanılırsa,

$$Xg(Y, Z) - g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - g(Y, \tilde{\nabla}_X Z) = -2A(X)g(Y, Z) \quad (4.11)$$

bulunur.

Yukarıda tanımlanan $\tilde{\nabla}$ bağlantısının Koszul formülü

$$\begin{aligned} 2g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) &= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, X]) + g(Z, [X, Y]) \\ &\quad + 2A(X)g(Y, Z) \end{aligned} \quad (4.12)$$

dir.

M bir Riemann manifoldu ve bu manifoldun $\mathcal{U} \subset M$ komşuluğunda bir koordinat sistemi $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ olsun. X, Y, Z vektör alanları, $1 \leq i, j, k \leq n$ olmak üzere $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ ve $Z = \frac{\partial}{\partial x^m}$ olarak alalım. Bu durumda $\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$ olmak üzere $\tilde{\Gamma}_{ij}^k : \mathcal{U} \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ bağlantı katsayılarını bulmak için Koszul formülü kullanılırsa ilk adımda

$$\begin{aligned} 2g\left(\tilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) &= \frac{\partial}{\partial x^i} g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) + \frac{\partial}{\partial x^j} g\left(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial x^m} g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + 2A\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) g\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$2g\left(\sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^m}\right) = \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + 2A_i g_{jm} \quad (4.14)$$

olur. Buradan da

$$\sum_{k=1}^n 2\tilde{\Gamma}_{ij}^k g \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) = \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} + 2A_i g_{jm} \quad (4.15)$$

elde edilir. Eşitliği düzenlediğimizde

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k g_{km} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) + A_i g_{jm} \quad (4.16)$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafıda g^{mh} ile çarpılıp m üzerinden toplam alındığında

$$\begin{aligned} \sum_{m,k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k g_{km} g^{mh} &= \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{mh} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) \\ &+ \sum_{m=1}^n g^{mh} A_i g_{jm} \end{aligned} \quad (4.17)$$

olur. $\sum_{m=1}^n g^{mh} g_{km} = \delta_k^h$ eşitliğinden (burada g^{mh} ile g_{km} 'nin oluşturduğu matrisin tersi anlaşılmaktadır)

$$\sum_{k=1}^n \tilde{\Gamma}_{ij}^k \delta_k^h = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{mh} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) + A_i \delta_j^h \quad (4.18)$$

bulunur. Bu eşitlik düzenlenirse

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^h = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{mh} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) + A_i \delta_j^h \quad (4.19)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $h \longleftrightarrow k$ indis değişimi yapılırsa

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{km} \left(\frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{mi}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right) + A_i \delta_j^k \quad (4.20)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.0.3. $A \in \Gamma(T^*M)$ 1-formu ile birlikte (M, g) bir Riemann manifold olsun. Ayrıca $A \in \Gamma(T^*M)$ 1-formu kapalı (yani $dA = 0$) olsun. Öyleyse ∇ ile gösterilen Levi-Civita bağlantısının eğrilik tensörü R_∇ ile, Teorem 4.0.1 de tanımlanan burulmalı $\tilde{\nabla}$ bağlantısının eğrilik tensörü $\tilde{R}_{\tilde{\nabla}}$ birbirlerine eşittir (yani $R_\nabla = \tilde{R}_{\tilde{\nabla}}$ dir).

Kanıt. $dA = 0$ ifadesi her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(dA)(X, Y) = XA(Y) - YA(X) - A([X, Y]) = 0 \quad (4.21)$$

eşitliğini verir. $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + A(X)Y$ bağlantısının $\tilde{R}_{\tilde{\nabla}}$ ile gösterilen eğrilik tensörü

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z &= \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \\
&= \tilde{\nabla}_X (\nabla_Y Z + A(Y)Z) - \tilde{\nabla}_Y (\nabla_X Z + A(X)Z) - \tilde{\nabla}_{[X, Y]} Z \\
&= \nabla_X (\nabla_Y Z + A(Y)Z) + A(X)(\nabla_Y Z + A(Y)Z) \\
&\quad - \nabla_Y (\nabla_X Z + A(X)Z) - A(Y)(\nabla_X Z + A(X)Z) \\
&\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - A([X, Y])Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + X(A(Y))Z + A(Y)\nabla_X Z + A(X)\nabla_Y Z \\
&\quad + A(X)A(Y)Z - \nabla_Y \nabla_X Z - Y(A(X))Z - A(X)\nabla_Y Z \\
&\quad - A(Y)\nabla_X Z - A(Y)A(X)Z - \nabla_{[X, Y]} Z - A([X, Y])Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \\
&\quad + (X(A(Y)) - Y(A(X)) - A([X, Y]))Z \\
&= R_{\nabla}(X, Y)Z + (dA)(X, Y)Z \\
&= R_{\nabla}(X, Y)Z
\end{aligned} \tag{4.22}$$

biçiminde bulunur. $\square$

Bu noktada $R_{\nabla} = \tilde{R}_{\tilde{\nabla}}$ olduğundan aşağıdaki sonuçlar doğrudan elde edilir.

Sonuç 4.0.4. (M, g) bir Riemann manifold olsun. $dA = 0$ olacak biçimde $\tilde{\nabla}$ bağlantısı verilsin. Bu durumda her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{R}_{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z + \tilde{R}_{\tilde{\nabla}}(Y, Z)X + \tilde{R}_{\tilde{\nabla}}(Z, X)Y = 0 \tag{4.23}$$

eşitliği (Birinci Bianchi Özdeşliği) sağlanır.

Sonuç 4.0.5. (M, g) bir Riemann manifold olsun. $dA = 0$ olacak şekilde $\tilde{\nabla}$ bağlantısı verilsin. Bu durumda her $X, Y, Z, U \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\tilde{R}_{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z, U) = -g(\tilde{R}_{\tilde{\nabla}}(X, Y)U, Z) \tag{4.24}$$

$$g(\tilde{R}_{\tilde{\nabla}}(X, Y)Z, U) = g(\tilde{R}_{\tilde{\nabla}}(Z, U)X, Y) \tag{4.25}$$

eşitlikleri sağlanır.

5 SONUÇ

Bu tez çalışmasıyla Riemann geometrisi'nin temel bir kavramı olan Levi-Civita bağlantısı ile bir A 1-formundan yola çıkarak burulmalı bir bağlantı tanımlanmıştır. Tezin özgün taraflarından birisi budur. Diğer bir özgün tarafı ise Levi-Civita bağlantısının belirlemiş olduğu eğrilik tensörü ile, bu çalışmada tanımlanan burulmalı bir bağlantının belirlemiş olduğu eğrilik tensörünün belirli koşullar altında birbirlerine eşit olmasıdır. Bu da göstermektedir ki Riemann manifoldunun eğriliği bağlantılar farklı olduğu halde aynı kalabilmektedir. Bunun bir uygulaması, kütle çekim teorilerinde alan denklemleri değişmezken hareket denklemlerinin modifiye edilebiliyor olmasıdır. Bağlantı kavramında 1-formların kullanılması fizik teorilerinde büyük öneme sahip olan Ayar (Gauge) teorilerinde de yer alır.



KAYNAKÇA

- [1] Bishop, R.L. and Goldberg, S.I. (1980). *Tensor Analysis on Manifolds*, Dover Publications, Inc. New York, First Edition.
- [2] Boothby, W. M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, London, Second edition.
- [3] Carmo, M. P. (1976). *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey.
- [4] Lee, J. M. (2011). *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer: New York Second edition.
- [5] Nakahara, M. (2003). *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, London, Second edition.
- [6] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity*, New York: Academic Press.

ORCID ID: 0000-0002-6548-5454

ÖZGEÇMİŞ

Adı-Soyadı : Mustafa KIR
Yabancı Dil : Rusça
Doğum Yeri ve Yılı : Giresun / 1985
E-Posta : mustafa_kir@eskisehir.edu.tr

Eğitim ve Mesleki Geçmiş:

- 2020, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (Tezli YL)
- 2010, State University of Comrat, Matematik ve Bilgisayar Bölümü