



RIEMANN MANİFOLDLARINDA
PARALEL VEKTÖR ALANLARI

Yüksek Lisans Tezi

EMRAH BÖKE

Eskişehir 2023

RIEMANN MANİFOLDLARINDA PARALEL VEKTÖR ALANLARI

EMRAH BÖKE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Murat LİMONCU

Eskişehir

Eskişehir Teknik Üniversitesi

Lisansüstü Eğitim Enstitüsü

Ocak 2023

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Emrah BÖKE' nin "Riemann Manifoldlarında Paralel Vektör Alanları" başlıklı tezi 18/01/2023 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından değerlendirilerek "Eskişehir Teknik Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği" nin ilgili maddeleri uyarınca, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

<u>Jüri Üyeleri</u>	<u>Unvanı Adı-Soyadı</u>	<u>İmza</u>
Üye	: Prof. Dr. Murat LİMONCU	
Üye	: Prof. Dr. Nedim DEĞİRMENCİ	
Üye	: Doç. Dr. Murat KOPARAN	

Prof. Dr. Murat TANIŞLI
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Müdürü

18/01/2023

DANIşMAN ONAYI

Danişmanlığını yürüttüğüm yüksek lisans ęrencisi Emrah BÖKE ‘‘Riemann Manifoldlarında Paralel Vektör Alanları’’ başlıklı tez çalışmasını tamamlamıştır. Hazırlamış olduğu tez tarafımca incelenmiş ve öğrencinin tez savunması sınavına alınması bilimsel ve etik açıdan uygun görülmüştür.

Tez Daniřmanı
Prof. Dr. Murat LİMONCU

ÖZET

RIEMAN MANİFOLDLARINDA PARALEL VEKTÖR ALANLARI

Emrah BÖKE

Matematik Anabilim Dalı

Geometri Bilim Dalı

Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Ocak 2023

Danışman: Prof. Dr. Murat LİMONCU

Bu tezde türevlenebilir manifold tanımından sonra türevlenebilir eğriler yardımıyla tanjant vektör kavramı tanımlanmıştır. Kotanjant vektör, vektör alanı, 1-form ve tensör alanı gibi temel bazı kavramlar verilmiştir. Riemann manifoldların temel teoremi farklı bir biçimde ifade edilip sonrasında ispatlanmıştır. Riemann eğriligi, Ricci eğriligi ve skaler eğrilik tanımlanmıştır. Riemann manifoldlarında bazı diferansiyel operatörler verilmiştir. Killing ve Harmonik vektör alanlarının paralellliğini içeren iki teorem ispatlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Riemann Manifoldlar, Tanjant vektörler, Eğrilikler, Kovaryant türev.

ABSTRACT

PARALLEL VECTOR SPACES ON RIEMANNIAN MANIFOLDS

Emrah BÖKE

Department of Mathematics

Eskişehir Technical University, Institute of Graduate Programs, January 2023

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat LİMONCU

In this thesis, after the definition of differentiable manifold, the tangent vector notion is defined via differentiable curves. It is given some basic notions such as cotangent vector, vector field, 1-form and tensor field. The fundamental theorem of Riemannian manifolds is differently reestablished and then it is proved. Riemannian curvature, Ricci curvature and scalar curvature are defined. Some differential operators are given in Riemannian manifolds. Two theorems including parallelism of Killing vector fields and Harmonic vector fields are proved.

Keywords: Riemannian Manifolds, Tangent vectors, Curvatures,
Covariant derivation

TEŐEKKÖR

Bu tez çalıőmasının ortaya çıkmasından sonlanmasına kadar geçen sÖrete bilgi, tecrübe ve fikirleriyle yol gösteren, her zaman koşulsuz destek olan değerli tez da-
nıőmanım Prof. Dr. Murat LİMONCU'ya en içten teşekkürlerimi sunarım.

Emrah BÖKE



ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ

Bu tezin bana ait, özgün bir çalışma olduğunu; çalışmamın hazırlık, veri toplama, analiz ve bilgilerin sunumu olmak üzere tüm aşamalarda bilimsel etik ilke ve kurallara uygun davrandığımı; bu çalışma kapsamında elde edilemeyen tüm veri ve bilgiler için kaynak gösterdiğimi ve bu kaynaklara kaynakçada yer verdiğimi; bu çalışmanın Eskişehir Teknik Üniversitesi tarafından kullanılan “bilimsel intihal tespit programı”yla tarandığımı ve hiçbir şekilde “intihal içermediğini” beyan ederim. Herhangi bir zamanda, çalışmamla ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara razı olduğumu bildiririm.

Emrah BÖKE

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
BAŞLIK SAYFASI	I
JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI.....	II
DANIŞMAN ONAYI.....	III
ÖZET	IV
ABSTRACT.....	V
TEŞEKKÜR.....	VI
ETİK İLKE VE KURALLARA UYGUNLUK BEYANNAMESİ.....	VII
İÇİNDEKİLER	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	X
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GİRİŞ.....	1
2. TÜREVLENEBİLİR MANİFOLDLAR.....	2
3. TANJANT VE KOTANJANT VEKTÖRLER.....	11
3.1. Kotanjant Vektörler	17
4. VEKTÖR ALANLARI VE KOVEKTÖR ALANLARI	20
4.1. Lie Parantezi	21
4.2. Kovektör Alanları (1- Formlar).....	25
5. TENSÖR ALANLARI VE TENSÖRLER	27
5.1. Tensör Alanlarına Örnekler	28
5.2. Tensörlerin Çarpımı, Bileşenleri ve Kontraksiyonu	28

6. RIEMANN MANİFOLDLARI	31
6.1. Levi-Civita Bağlantısı	33
6.2. Riemann Manifolrlarında Eğrilikler	44
6.3. Riemann Manifolrlarında Bazı Operatörler.....	47
7. KİLLİNG VE HARMONİK VEKTÖR ALANLARI.....	51
8. SONUÇ.....	55
KAYNAKÇA.....	56
ÖZGEÇMİŞ	

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1. Geçiş fonksiyonları	2
--------------------------------------	---



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

M	: n - boyutlu diferansiyellebilir manifold
(M, g)	: Riemann manifoldu
$T_p M$	: $p \in M$ noktasında tanjant vektörlerinin kümesi
$\mathcal{T}_{rs}(M)$	: (r, s) - tipinden tensör alanları kümesi
$\Gamma(TM)$	: M üzerindeki vektör alanlarının kümesi
$\Gamma(T^*M)$	: M üzerindeki kovektör alanlarının kümesi
$C^\infty(M, \mathbb{R})$	: M üzerindeki C^∞ fonksiyonların kümesi
$\mathcal{C}$	: Kontraksiyon
$\nabla_X Y$	: Y vektör alanının X vektör alanına göre kovaryant türevi
R	: Riemann eğrilik tensörü
Ric	: Ricci eğrilik tensörü
S	: Skaler eğrilik tensörü
∇	: Levi-Civita bağlantısı

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometrinin ilk kavramları manifoldlar ve tanjant vektörler olarak düşünülebilir. Bu kavramların tanımları literatürde farklı yaklaşımlar sergilenerek yapılabilmektedir. Bu kavramlar için mesela Carmo [3], O'Neill [6] ve Gallot, Hulin, Lafontaine [4] gibi kitaplarda yapılan tanımlar karşılaştırılabilir. Bu çalışmada O'Neill [6]' de verilen manifold (türevlenebilir manifold) tanımı ve bu tanım yapılırken verilen notasyon ve terminoloji kullanılacaktır. Yine bu çalışmada tanjant vektör kavramı, detaylarıyla birlikte Carmo [3] ve Kobayashi, Nomizu [5]' da verildiği gibi tanımlanacaktır.

Diferansiyel geometrinin temel alanı olan Riemann manifoldlarında Levi-Civita bağlantısının varlığı ve tekliği önemlidir. Bu Riemann manifoldların temel teoremi olarak da isimlendirilir. Bu varlık ve teklik bir lineer izomorfizmanın sonucudur: Lineer izomorfizmada ki $1 - 1'$ lik tekliği, örtenlik ise varlığını getirmektedir. Bu çalışmada Levi-Civita bağlantısının varlığı ve tekliğini söyleyen bu teorem, söz konusu lineer izomorfizma daha da ön planda tutularak farklı bir biçimde yeniden ifade edilmiştir. Bu ifade ile teorem daha anlaşılır hale gelmiştir. Kozsul formülü artık teoremin bir parçası değil teoremin ispatının bir parçası olmuştur.

Son olarak bu çalışmada hem Killing vektör alanının hem de Harmonik vektör alanının paralellliğini veren, Bochner [1] ve Yano [9] tarafından ispatlanan teoremler yer almaktadır. Bu vektör alanlarının paralellliği manifoldun geometrisinin ve topolojisinin kısıtlanmasına neden olur.

Bu tez çalışması giriş bölümü ile birlikte 7 bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde türevlenebilir manifoldlar tanımlanmıştır. Üçüncü bölümde eğriler üzerinden tanjant vektörleri tanımlanmıştır. Ardından kotanjant vektörler tanımlanmıştır. Dördüncü bölümde Vektör alanları tanımlanıp Lie parantezinin özellikleri verilmiştir. Sonrasında Kovektör alanları (1- formlar) tanımlanmıştır. Beşinci bölümde Tensör alanları ve tensörlerin tanımları yapılmıştır. Altıncı bölümde Riemann manifoldu tanımlanıp Levi- Civita bağlantısının varlığı ve tekliği ispatlanmıştır. Ardından Riemann manifoldu üzerinde bazı eğrilikler ve operatörler tanımlanmıştır. Son bölümde Killing ve Harmonik vektör alanları tanımlanıp uygun varsayımlar altında her birinin paralellikleri gösterilmiştir.

2. TÜREVLENEBİLİR MANİFOLDLAR

Tanım 2.1. M bir topolojik uzay olsun. $U \subset M$ açık alt kümesi üzerinde bir (yerel) koordinat sistemi, $\varphi = (x^1, \dots, x^n) : U \subset M \rightarrow \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ biçiminde $\varphi(U)$ üzerinde bir homeomorfizmadır. Burada her bir $1 \leq i \leq n$ indis değeri için $x^i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ ($x^i(p) \in \mathbb{R}$) fonksiyonlarına φ 'nin koordinat fonksiyonları denir. U 'ya koordinat komşuluğu ve (U, φ) ikilisine de M 'nin bir n - boyutlu kartı denir.

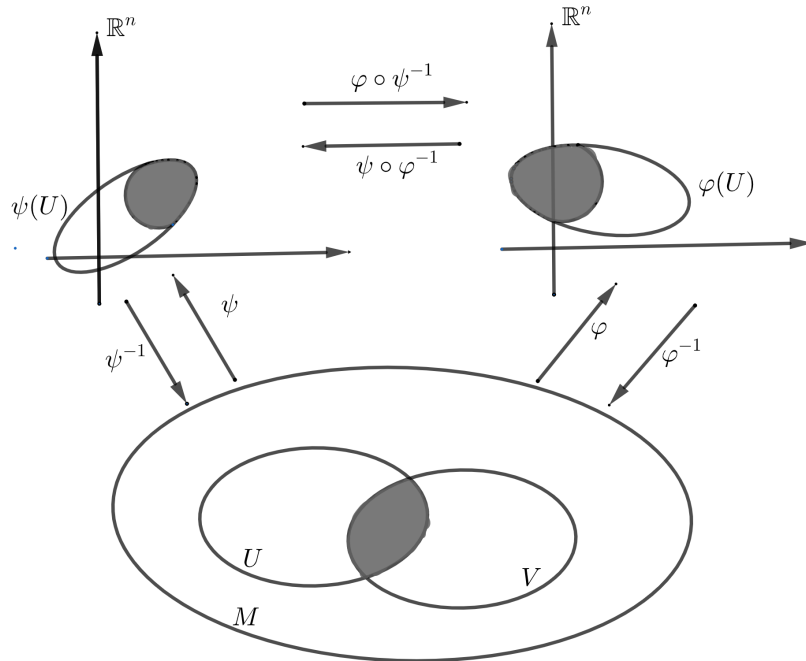
Tanım 2.2. Bir n - boyutlu (türevlenebilir) $\mathcal{A}$ atlası M 'nin n - boyutlu kartlarının bir koleksiyonudur öyle ki aşağıdaki koşulları sağlanır:

1. Her bir $p \in M$ için $p \in U$ olacak şekilde bu koleksiyona ait (U, φ) kartı vardır.
2. Bu koleksiyondan alınan $U \cap V \neq \emptyset$ özelliğine sahip tüm (U, ψ) ve (V, φ) kartları için

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$$

fonksiyonları C^∞ - sınıfından fonksiyonlardır.



Şekil 2.1. Geçiş fonksiyonları

Tanım 2.3. M 'nin n - boyutlu iki (türevlenebilir) atlası $\mathcal{A}$ ve $\check{\mathcal{A}}$ olsun. Eğer $\mathcal{A} \cup \check{\mathcal{A}}$ de M 'nin n - boyutlu bir (türevlenebilir) atlası ise $\mathcal{A}$ ve $\check{\mathcal{A}}$ atlaslarına uyumlu atlaslar denir. Tüm uyumlu atlasların birleşimine tam (maksimal) atlas denir.

M üzerinde keyfi bir $\mathcal{A}$ atlasını içeren tam atlas tektir(bkz. [6]).

Tanım 2.4. Hausdorff özelliğine sahip, ikinci sayılabilir (yani sayılabilir bir tabanı olan) ve bir $\mathcal{A}$ tam atlasıyla donatılmış M topolojik uzayına n - boyutlu türevlenebilir manifold denir.

Mesela 2- boyutlu $\mathcal{A}$ (türevlenebilir) atlasına bir örnek,

$$M = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$$

birim küre üzerinde verilebilir (bu örnek için bkz. [2]):

xy - düzlemini

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$$

olarak düşünersek

$$B_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

açık yuvarı üzerinde

$$\begin{aligned} \varphi_{xy+}^{-1} : B_{xy} &\rightarrow S^2 \\ (x, y) &\mapsto \varphi_{xy+}^{-1}(x, y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_{xy-}^{-1} : B_{xy} &\rightarrow S^2 \\ (x, y) &\mapsto \varphi_{xy-}^{-1}(x, y) = (x, y, -\sqrt{1 - x^2 - y^2}) \end{aligned}$$

fonksiyonları terslenebilirdir. Ayrıca bu fonksiyonlar ve tersleri süreklidir. Benzer biçimde xz - düzlemi

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$$

olarak alındığında

$$B_{xz} = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + z^2 < 1\}$$

açık yuvarı üzerinde

$$\begin{aligned} \varphi_{xz+}^{-1} : B_{xz} &\rightarrow S^2 \\ (x, z) &\mapsto \varphi_{xz+}^{-1}(x, z) = (x, \sqrt{1 - x^2 - z^2}, z) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_{xz-}^{-1} : B_{xz} &\rightarrow S^2 \\ (x, z) &\mapsto \varphi_{xz-}^{-1}(x, z) = (x, -\sqrt{1 - x^2 - z^2}, z) \end{aligned}$$

fonksiyonları da birer homeomorfizmadır. Son olarak yz - düzlemi

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0\}$$

alındığında

$$B_{yz} = \{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + z^2 < 1\}$$

açık yuvarı üzerindeki homeomorfizmalar

$$\begin{aligned} \varphi_{yz+}^{-1} : B_{yz} &\rightarrow S^2 \\ (y, z) &\mapsto \varphi_{yz+}^{-1}(y, z) = (\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \varphi_{yz-}^{-1} : B_{yz} &\rightarrow S^2 \\ (y, z) &\mapsto \varphi_{yz-}^{-1}(y, z) = (-\sqrt{1 - y^2 - z^2}, y, z) \end{aligned}$$

dir. Tüm bu fonksiyonların görüntü kümelerinin $M = S^2$ ' yi örttüğü açıkça bellidir (Tanım 2.2' nin 1. koşulu). Kesişimleri boş kümeden farklı olan tüm açık kümeler için (mesela $\varphi_{xy+}^{-1} \cap \varphi_{yz-}^{-1} \neq \emptyset$) Tanım 2.2' nin 2. koşulunun da sağlandığı görülür.

Tanım 2.5. $\mathbb{R}^n$ 'nin doğal koordinat fonksiyonları $u^1, u^2, \dots, u^n$

$$\begin{aligned} u^i : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ q = (q_1, q_2, \dots, q_n) &\rightarrow u^i(q) = q_i \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Bu tanım kullanılarak aşağıdaki sonuç kolayca elde edilir:

Sonuç 2.6. $U \subset M$ açık kümesi üzerinde $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$ homeomorfizması ile u^k doğal koordinat fonksiyonu bileşkelendirilirse $u^k \circ \varphi = x^k$ elde edilir.

Şimdi yukarıda ki $\varphi \circ \psi^{-1}$ ve $\psi \circ \varphi^{-1}$ fonksiyonları sırasıyla $\psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ ve $\varphi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ üzerinde türevlenebilir olduğuna göre bu fonksiyonların keyfi bir $A \in \psi(U \cap V)$ ve keyfi bir $B \in \varphi(U \cap V)$ noktalarındaki $n \times n$ - tipinden Jacobi matrisleri Tanım 2.5 ve Sonuç 2.6 kullanılarak sırasıyla

$$\begin{aligned} (J|_A)_{ij} &= \frac{\partial(\varphi \circ \psi^{-1})_i}{\partial u^j} \Big|_A \\ &= \frac{\partial(u^i \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial u^j} \Big|_A \\ &= \frac{\partial(x^i \circ \psi^{-1})}{\partial u^j} \Big|_A \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (J|_B)_{ij} &= \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_i}{\partial u^j} \Big|_B \\ &= \frac{\partial(u^i \circ \psi \circ \varphi^{-1})}{\partial u^j} \Big|_B \\ &= \frac{\partial(y^i \circ \varphi^{-1})}{\partial u^j} \Big|_B \end{aligned}$$

dir. Bir $p \in U \cap V \subset M$ için $A = \psi(p)$ ve $B = \varphi(p)$ ise bu noktalara karşılık gelen Jacobi matrisleri birbirlerinin ters matrisleridir.

Tanım 2.7. Boyutları sırasıyla n ve m olan iki türevlenebilir manifold M ve N olsun. $\phi : M \rightarrow N$ fonksiyonu verilsin. (U, ξ) M 'nin bir kartı, (V, η) ise N 'nin

bir kartı olsun. Öyleyse

$$\eta \circ \phi \circ \xi^{-1} : \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \eta(V) \subseteq \mathbb{R}^m$$

fonksiyonunu türevlenebilir ise ϕ - fonksiyonuna türevlenebilir fonksiyon denir. (Yani bir $\phi : M \rightarrow N$ fonksiyonunun türevlenebilir olması bu şekilde tanımlanır.)

$$\begin{array}{ccc} U \subseteq M & \xrightarrow{\phi} & V \subseteq N \\ \uparrow \xi^{-1} \quad \downarrow \xi & & \uparrow \eta^{-1} \quad \downarrow \eta \\ \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}} & \eta(V) \subseteq \mathbb{R}^m \end{array}$$

Bu tanım iyi tanımlıdır: M manifoldunun $p \in U \cap U'$ olacak şekilde (ξ, U) ve (ξ', U') kartları verilsin. $\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}$ fonksiyonu türevlenebilir olsun. Ayrıca

$$\begin{aligned} \eta \circ \phi \circ \xi'^{-1} &= \eta \circ \phi \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \xi'^{-1} \\ &= (\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \xi'^{-1}) \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitlikte $\xi \circ \xi'^{-1}$ fonksiyonu geçiş fonksiyonu olduğundan türevlenebilir. Dolayısıyla iki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesi de türevlenebilir. Benzer şekilde $\phi(p) \in N$ noktası için $\phi(p) \in V \cap V'$ olacak şekilde N manifoldunun (η, V) ve (η', V') kartları alınır ise

$$\begin{aligned} \eta' \circ \phi \circ \xi^{-1} &= \eta' \circ \eta^{-1} \circ \eta \circ \phi \circ \xi^{-1} \\ &= (\eta' \circ \eta^{-1}) \circ (\eta \circ \phi \circ \xi^{-1}) \end{aligned}$$

eşitliğinden aynı sonuca ulaşılır.

Tanım 2.7 da $N = \mathbb{R}$ ve $(\mathbb{R}, id)$ kartı alınır ise aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.8. *Boyutu n olan M manifoldu ve $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. (U, ξ) kartı ile*

$$f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

olarak tanımlanan fonksiyon C^∞ - sınıfından ise $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu da C^∞ - sınıfındandır ($f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$).

Sonuç 2.9. Bir $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonu ve $p \in U \subset M$ noktasında (U, ξ) kartı verilsin. Öyleyse

$$f \circ \xi^{-1} : \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

C^∞ - sınıfındandır. Aynı $p \in M$ noktası için $p \in V$ olacak şekilde (V, η) kartı da var olsun. Öyleyse

$$f \circ \eta^{-1} : \eta(V) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu da türevlenebilir bir fonksiyondur.

Kanıt. $f \circ \xi^{-1}$, nin C^∞ - sınıfından olduğu aşikârdır. $p \in M$ noktası $U \cap V$ ye ait olduğundan $U \cap V \neq \emptyset$ 'dir. $U \cap V \subset U$ ve $U \cap V \subset V$ olduğundan $f \circ \xi^{-1}$ ve $f \circ \eta^{-1}$ $U \cap V \subset M$ 'ye kısıtlanabilir. Bu doğrultuda $f \circ \eta^{-1}$ fonksiyonu

$$f \circ \eta^{-1} = f \circ \xi^{-1} \circ \xi \circ \eta^{-1} = (f \circ \xi^{-1}) \circ (\xi \circ \eta^{-1}) : \eta(U \cap V) \rightarrow \mathbb{R}$$

biçiminde yazılır. Burada $(\xi \circ \eta^{-1})$ geçiş fonksiyonu türevlenebilir olduğundan iki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesi de türevlenebilirdir. $\square$

Teorem 2.10. M, N, H boyutları sırasıyla n, m, k olan manifoldlar ve $f : M \rightarrow N$, $h : N \rightarrow H$ fonksiyonları türevlenebilir olsunlar. Öyleyse $h \circ f : M \rightarrow H$ fonksiyonu da türevlenebilirdir.

Kanıt. $(U, \xi), (V, \eta), (W, \varphi)$ sırasıyla M, N, H manifoldlarının kartları olsun. $h \circ f$ fonksiyonunun türevlenebilir olduğunun gösterilmesi için,

$$\varphi \circ (h \circ f) \circ \xi^{-1} : \xi(U) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi(W) \subseteq \mathbb{R}^k$$

fonksiyonunun türevlenebilir olduğu gösterilmelidir.

$$\begin{aligned}\varphi \circ (h \circ f) \circ \xi^{-1} &= \varphi \circ (h \circ \eta^{-1} \circ \eta \circ f) \circ \xi^{-1} \\ &= (\varphi \circ h \circ \eta^{-1}) \circ (\eta \circ f \circ \xi^{-1})\end{aligned}$$

Bu eşitlikte f ve h fonksiyonlarının türevlenebilirliğinden $(\varphi \circ h \circ \eta^{-1})$ ve $(\eta \circ f \circ \xi^{-1})$ fonksiyonları türevlenebilirdir. İki türevlenebilir fonksiyonun bileşkesi de türevlenebilir olduğundan $\varphi \circ (h \circ f) \circ \xi^{-1}$ fonksiyonu da türevlenebilirdir. Tanımdan $h \circ f$ fonksiyonu türevlenebilirdir. $\square$

Tanım 2.11. $\phi : M \rightarrow N$ verilsin ve tersi $(\phi^{-1} : N \rightarrow M)$ var olsun. Hem ϕ hem de ϕ^{-1} türevlenebilir ise ϕ 'ye M den N 'ye difeomorfizma denir.

Tanım 2.12. M , n -boyutlu türevlenebilir bir manifold olsun ve $p \in U \subset M$ noktasında (U, ξ) kartı alınsın ($\xi = (x^1, \dots, x^n)$).

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p := \frac{\partial (f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p))\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme f 'nin $p \in U \subset M$ noktasındaki x^i koordinatına göre kısmi türevi denir.

Sonuç 2.13. J_A ve J_B Jacobi matrisleri bu kısmi türev yardımıyla

$$\begin{aligned}(J|_A)_{ij} &= \frac{\partial (\varphi \circ \psi^{-1})_i}{\partial u^j} \Big|_A \\ &= \frac{\partial (u^i \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial u^j} \Big|_A \\ &= \frac{\partial (x^i \circ \psi^{-1})}{\partial u^j} \Big|_A \\ &= \frac{\partial x^i}{\partial y^j} \Big|_{\psi^{-1}(A)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(J|_B)_{ij} &= \frac{\partial(\psi \circ \varphi^{-1})_i}{\partial u^j} \Big|_B \\
&= \frac{\partial(u^i \circ \psi \circ \varphi^{-1})}{\partial u^j} \Big|_B \\
&= \frac{\partial(y^i \circ \varphi^{-1})}{\partial u^j} \Big|_B \\
&= \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \Big|_{\varphi^{-1}(B)}
\end{aligned}$$

biçiminde yazılır.

Sonuç 2.14. Bir $p \in U \cap V \subset M$ noktasındaki (U, ξ) ve (V, η) kartları verilsin $(\xi = (x^1, x^2, \dots, x^n), \eta = (y^1, y^2, \dots, y^n))$. Öyleyse

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p = \sum_j \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p$$

değişim kuralı geçerlidir.

Kanıt. Bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun x^i 'ye göre kısmi türevi;

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p &:= \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)) \\
&= \frac{\partial(f \circ \eta^{-1} \circ \eta \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)) \\
&= \frac{\partial((f \circ \eta^{-1}) \circ (\eta \circ \xi^{-1}))}{\partial u^i}(\xi(p))
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Zincir kuralından

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p &= \sum_j \frac{\partial(f \circ \eta^{-1})}{\partial u^j}((\eta \circ \xi^{-1}) \circ (\xi(p))) \frac{\partial(\eta \circ \xi^{-1})_j}{\partial u^i}(\xi(p)) \\
&= \sum_j \frac{\partial(f \circ \eta^{-1})}{\partial u^j}(\eta(p)) \frac{\partial(\eta \circ \xi^{-1})_j}{\partial u^i}(\xi(p)) \\
&= \sum_j \frac{\partial f}{\partial y^j} \Big|_p \frac{\partial(\eta \circ \xi^{-1})_j}{\partial u^i}(\xi(p))
\end{aligned}$$

olur. Koordinat fonksiyonu ve doğal koordinat fonksiyonu tanımları kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p &= \sum_j \left. \frac{\partial f}{\partial y^j} \right|_p \frac{\partial (u^j \circ \eta \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)) \\
&= \sum_j \left. \frac{\partial f}{\partial y^j} \right|_p \frac{\partial (y^j \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi(p)) \\
&= \sum_j \left. \frac{\partial f}{\partial y^j} \right|_p \left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_p \\
&= \sum_j \left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{\partial f}{\partial y^j} \right|_p
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlik her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu için geçerli olduğundan

$$\left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p = \sum_j \left. \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{\partial}{\partial y^j} \right|_p$$

sonucuna ulaşılır. □

3. TANJANT VE KOTANJANT VEKTÖRLER

Tanım 3.1. M , n - boyutlu türevlenebilir manifoldunun bir $p \in M$ noktası verilsin. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ve, $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere, $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ fonksiyonları sırasıyla M ve $(-\epsilon, \epsilon)$ üzerinde türevlenebilir fonksiyonlar olsun öyle ki $\alpha(0) = p$. α fonksiyonunun $(\alpha(0) = p$ noktasından geçen türevlenebilir eğrisinin) $\alpha(0) = p$ noktasındaki tanjant vektörü $\alpha'(0)$ ile gösterilen ve

$$(\alpha'(0))(f) = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}(t) \Big|_{t=0}$$

kuralı ile tanımlanan $\alpha'(0) : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ biçimindeki fonksiyondur. $\alpha(0) = p$ olacak şekilde, tüm $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ türevlenebilir fonksiyonlarının $(p \in M$ noktasından geçen türevlenebilir tüm α eğrilerinin) $\alpha(0) = p$ noktasındaki (veya $t = 0$ daki) tanjant vektörlerinin kümesine M 'nin $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı denir ve $T_p M$ ile gösterilir. Yani

$$T_p M = \{\alpha'(0) \mid \epsilon \in \mathbb{R}^+, \text{ türevlenebilir } \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, \alpha(0) = p\}$$

dir. $T_p M$ 'nin elamanlarına $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörler denir. Eğer tanjant vektörler $v_p \in T_p M$ biçiminde gösterilir ise $v_p = \alpha'(0)$, $\alpha(0) = p$ dir.

Not 3.2. $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ve $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ türevlenebilir fonksiyonları için bileşke fonksiyonu olan $f \circ \alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun da türevlenebilir olduğu Teorem 2.10 de belirtilmiştir.

Sonuç 3.3. $v_p \in T_p M$ tanjant vektörü verilsin. Her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$1. v_p(f.g) = v_p(f).g(p) + f(p)v_p(g)$$

$$2. v_p(\lambda f + g) = \lambda v_p(f) + v_p(g)$$

eşitlikleri sağlanır.

Kanıt. $v_p \in T_p M$ ise $v_p = \alpha'(0)$, $\alpha(0) = p$ olacak şekilde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ türevlene-

bilir eğrisi vardır. Öyleyse ilk eşitlik

$$\begin{aligned}
v_p(f.g) &= \alpha'(0)(f.g) \\
&= \left. \frac{d(f.g \circ \alpha)(t)}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d(f.g)(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d(f(\alpha(t)))(g(\alpha(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} g(\alpha(0)) + f(\alpha(0)) \left. \frac{dg(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} g(p) + f(p) \left. \frac{dg(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= v_p(f)g(p) + f(p)v_p(g)
\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci eşitlikte

$$\begin{aligned}
v_p(\lambda f + g) &= \alpha'(0)(\lambda f + g) \\
&= \left. \frac{d(\lambda f + g)(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d(\lambda f(\alpha(t)) + g(\alpha(t)))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \lambda \left. \frac{df(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} + \left. \frac{dg(\alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} \\
&= \lambda v_p(f) + v_p(g)
\end{aligned}$$

biçiminde elde edilir. □

Teorem 3.4. $v_p \in T_p M$ tanjant vektörü ve $p \in U \subset M$ noktasının bir kartı (U, φ) ($\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$) olsun. Öyleyse,

$$\begin{aligned}
v_p = \alpha'(0) &= \sum_i \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)_i(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_i \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_i \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p
\end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikler kart seçiminden bağımsızdır.

Kanıt. Her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned}
v_p(f) &= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \\
&= \left. \frac{d}{dt}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \\
&= \sum_i \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \right|_{\varphi(\alpha(0))} \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)_i(t) \right|_{t=0} \\
&= \sum_i \left. \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \right|_{\varphi(p)} \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)_i(t) \right|_{t=0} \\
&= \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)_i(t) \right|_{t=0} \\
&= \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \\
&= \sum_i \left. \frac{\partial f}{\partial x^i} \right|_p \left. \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha)(t) \right|_{t=0}
\end{aligned}$$

Bu son üç eşitlikte her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için sağlandığından

$$\begin{aligned}
v_p = \alpha'(0) &= \sum_i \left. \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)_i(t) \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \\
&= \sum_i \left. \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \\
&= \sum_i \left. \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Şimdi Teoremin ikinci kısmı gösterilecektir. $p \in U \subseteq M$ noktasının (U, φ) kartına göre $v_p \in T_p M$ tanjant vektörü (İkinci eşitlikten)

$${}^\varphi v_p = \sum_i \left. \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial x^i} \right|_p \quad (3.1)$$

biçiminde yazılır. $p \in U \subseteq M$ noktası ayrıca (V, ψ) kartına da sahip ise (yani $p \in U \cap V$) bu karta göre $v_p \in T_p M$ nin ifadesi

$${}^\psi v_p = \sum_i \left. \frac{d}{dt}(u^i \circ \psi \circ \alpha)(t) \right|_{t=0} \left. \frac{\partial}{\partial y^i} \right|_p$$

olur. Şimdi ${}^\varphi v_p = {}^\psi v_p$ olduğu gösterilecektir. (3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
{}^\varphi v_p &= \sum_i \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_i \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial(u^i \circ \varphi \circ \psi^{-1})}{\partial u^k} \Big|_{(\psi \circ \alpha)(0)} \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)_k(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial(x^i \circ \psi^{-1})}{\partial u^k} \Big|_{\psi(p)} \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)_k(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\
&= \sum_{i,k} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \Big|_p \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)_k(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p
\end{aligned}$$

yazılır. Bu son eşitlikte Sonuç 2.14 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
{}^\varphi v_p &= \sum_{i,k,m} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \Big|_p \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)_k(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^m} \Big|_p \\
&= \sum_{i,k,m} \frac{\partial y^m}{\partial x^i} \Big|_p \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \Big|_p \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)_k(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial y^m} \Big|_p \\
&= \sum_{k,m} \delta_k^m \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)_k(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial y^m} \Big|_p \\
&= \sum_k \frac{d}{dt}(\psi \circ \alpha)_k(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_p \\
&= {}^\psi v_p
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 3.5. Bir $p \in M$ noktasının bir (U, φ) kartı verilsin ($\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$).

Keyfi seçilen $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ gerçel sayıları kullanılarak $p \in M$ noktasında

$$w_p = k_1 \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p + k_2 \frac{\partial}{\partial x^2} \Big|_p + \dots + k_n \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$$

biçiminde tanımlanan w_p türevlemesi bir tanjant vektördür.

Kanıt. $K = (k_1, k_2, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ ve $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$\tilde{\alpha} : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$t \mapsto \tilde{\alpha}(t) = \varphi(p) + tK$$

fonksiyonunu (eğrisini) tanımlayalım. Görüldüğü gibi $\tilde{\alpha}(0) = \varphi(p)$ dir. Ayrıca istenirse $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ pozitif sayısı $\tilde{\alpha}((-\epsilon, \epsilon)) \subset \varphi(U)$ olacak şekilde de seçilebilir. Şimdi M üzerinde

$$\begin{aligned}\alpha : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \alpha(t) = (\varphi^{-1} \circ \tilde{\alpha})(t) = \varphi^{-1}(\varphi(p) + tK)\end{aligned}$$

eğrisini tanımlayalım. $\alpha(0) = p$ olduğu açıktır. Hatırlanırsa Teorem 3.4' deki eşitlikler tanjant vektör tanımından başlayarak elde edilmişti. Öyleyse Teorem 3.4' deki ikinci eşitliğin sağ tarafı bu eğriye göre oluşturulur ise

$$\begin{aligned}\sum_i \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p &= \sum_i \frac{d}{dt} u^i(\varphi(\alpha(t))) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} u^i(\varphi(p) + tK) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ &= \sum_i \frac{d}{dt} ((\varphi(p))_i + tk_i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ &= \sum_i k_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ &= w_p\end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla $w_p \in T_p M$ olur. □

Şimdi $p \in M$ ve $v_p, w_p \in T_p M$ olmak üzere Teorem 3.4' den

$$\begin{aligned}v_p &= \sum_i k_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \\ w_p &= \sum_i m_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p\end{aligned}$$

dir. Burada $v_p = \alpha'(0)$ ve $w_p = \beta'(0)$ ise

$$k_i = \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \alpha)(t) \Big|_p$$

ve

$$m_i = \frac{d}{dt}(u^i \circ \varphi \circ \beta)(t) \Big|_p$$

dir. Şimdi $T_p M$ de toplama işlemi

$$v_p + w_p = \sum_i (k_i + m_i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

olarak tanımlanır. Teorem 3.5' den dolayı bu iyi tanımlıdır. Dışardan çarpma her $r \in \mathbb{R}$ için

$$rv_p = \sum_i (rk_i) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

olarak tanımlanır. Bu tanım da aynı gerekçeyle iyi tanımlıdır. Şimdi $\mathbf{0}_p \in T_p M$ tanjant vektörünü tanımlayalım:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} : (-\epsilon, \epsilon) &\rightarrow M \\ t &\mapsto \mathbf{c}(t) = p \end{aligned}$$

sabit fonksiyonunu alalım. Öyleyse her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\mathbf{c}'(0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \mathbf{c})(t) \Big|_p = \frac{d}{dt}f(\mathbf{c}(t)) \Big|_p = \frac{d}{dt}f(p) = 0$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{c}'(0) \in T_p M$ vektörü sıfır tanjant vektörüdür ve $\mathbf{0}_p = \mathbf{c}'(0)$ ile gösterilir. Bu sıfır türevlemesi Teorem 3.5' de $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ durumuna karşılık gelir. Son olarak $v_p \in T_p M$ nin toplama işlemine göre tersi

$$\tilde{v}_p = \sum_i -ki \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

olarak tanımlanır. Bu tanım da Teorem 3.5' den dolayı iyi tanımlıdır. Lineer cebirden bilindiği gibi $\tilde{v}_p = (-1)v_p = -v_p$ dir. Bu tanımlarla $T_p M, \mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı için $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \right\}_{1 \leq i \leq n}$ kümesinin bir taban olduğu açıktır. Demek ki $\text{Boy}(T_p M) = n$ dir.

3.1. Kotanjant Vektörler

Bir n - boyutlu V vektör uzayının dual uzayı, lineer cebirden bilindiği gibi

$$V^* = \{L : V \rightarrow \mathbb{R} \mid L, \mathbb{R}\text{- lineer vektör uzayı}\}$$

biçimindeki n - boyutlu vektör uzayıdır. Bu durumda bir $p \in M$ noktasında adına kotanjant uzay denilen ve T_p^*M olarak gösterilen n - boyutlu vektör uzayı

$$T_p^*M = \{\theta_p : T_pM \rightarrow \mathbb{R} \mid \theta_p, \mathbb{R}\text{- lineer fonksiyon}\}$$

dır.

Tanım 3.6. $p \in M$ ve $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. $p \in M$ noktasında f ' nin diferansiyeli

$$\begin{aligned} df|_p : T_pM &\rightarrow \mathbb{R} \\ v_p &\mapsto df|_p(v_p) = v_p(f) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\mathbb{R}$ - lineer fonksiyondur.

Sonuç 3.7. $df|_p \in T_p^*M$ dir.

Sonuç 3.8. $p \in M$ noktasının bir kartı (U, φ) olsun. Öyleyse bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun $p \in M$ noktasında ki diferansiyeli

$$df|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} \Big|_p dx^i \Big|_p$$

dir.

Kanıt. Her $v_p \in T_pM$ için Teorem 3.4' den

$$v_p = \sum_i \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha)(t) \Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p$$

dir. Öyleyse $df\Big|_p$ nin tanımından

$$df\Big|_p(v_p) = v_p(f) \quad (3.2)$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p \quad (3.3)$$

$$= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p dx^i\Big|_p(v_p) \quad (3.4)$$

olur. Son eşitliğin nedeni şudur: $p \in U \subseteq M$ de $x^k : U \subseteq M \rightarrow \mathbb{R}$ koordinat fonksiyonlarının ($1 \leq k \leq n$) diferansiyeli

$$\begin{aligned} dx^k\Big|_p(v_p) &= v_p(x^k) \\ &= \sum_i \frac{d}{dt}(x^i \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \frac{\partial x^k}{\partial x^i}\Big|_p \\ &= \frac{d}{dt}(x^k \circ \alpha)(t)\Big|_{t=0} \end{aligned}$$

dir. Yukarıda ki (3.4) eşitliği her $v_p \in T_p M$ için geçerli olduğundan

$$df\Big|_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_p dx^i\Big|_p$$

dir. □

Bir $p \in M$ noktasının kartı (U, φ) ise koordinat fonksiyonlarının diferansiyeli ile oluşturulan $\{dx^i\Big|_p\}_{1 \leq i \leq n}$ kümesi $T_p^* M$ ' nin bir tabanıdır. Mesela $\theta_p \in T_p^* M$ ise $\theta_p = \sum_i \lambda_i dx^i\Big|_p$ olan $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gerçel sayıları $\lambda_i := \theta_p(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_p)$ gerçel sayılarıdır.

Bir $p \in M$ noktası için $p \in U \cap V$ olacak şekilde $(U, \varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n))$ ve $(V, \psi(y^1, y^2, \dots, y^n))$ kartları var ise

$$dx^i\Big|_p = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial y^j}\Big|_p dy^j\Big|_p$$

dir.

Not 3.9. *Yukarıda gereken yerlerde*

$$\begin{aligned}\frac{\partial x^k}{\partial x^i} &= \frac{\partial(x^k \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)} \\ &= \frac{\partial(u^k \circ \varphi \circ \varphi^{-1})}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)} \\ &= \frac{\partial u^k}{\partial u^i} \Big|_{\varphi(p)} \\ &= \delta_i^k\end{aligned}$$

eşitliği kullanılmıştır.



4. VEKTÖR ALANLARI VE KOVEKTÖR ALANLARI

Adına tanjant yığını denilen ve TM ile gösterilen

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M = \{(p, v_p) \mid p \in M, v_p \in T_p M\} \quad (4.1)$$

biçimindeki $2n$ -boyutlu manifold (detayları için bkz D.Carmo [1] ve B. O'Neill[2]) kullanılarak, vektör alanları aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.1. M , n - boyutlu türevlenebilir bir manifold olsun. Her bir $p \in M$ noktasına bir tanjant vektörü karşılık getiren

$$V : M \rightarrow \bigcup_{x \in M} T_x M = TM = \{(p, v_p) \mid p \in M, v_p \in T_p M\}$$

V - türevlenebilir fonksiyonuna (tanjant yığınının kesitine) vektör alanı denir. Vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ ile gösterilir.

Sonuç 4.2. Her $\lambda \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} V : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto (V(f))(p) = V_p(f) \end{aligned}$$

fonksiyonu $\mathbb{R}$ - lineerdir ve Leibniz kuralını sağlar.

Kanıt. Her $p \in M$ için

1. $\mathbb{R}$ - Lineer

$$\begin{aligned} V(\lambda f + g)(p) &= V_p(\lambda f + g) \\ &= \lambda V_p(f) + V_p(g) \\ &= (\lambda V(f) + V(g))(p) \end{aligned}$$

iki fonksiyonun eşitliği kavramından

$$V(\lambda f + g) = \lambda V(f) + V(g) \text{ dir.}$$

2. Leibniz kuralı

$$\begin{aligned}
V(fg)(p) &= V_p(fg) \\
&= V_p(f)g(p) + f(p)V_p(g) \\
&= (V(f))(p)g(p) + f(p)(V(g))(p) \\
&= (V(f)g + fV(g))(p)
\end{aligned}$$

iki fonksiyonun eşitliği kavramından

$$V(fg) = V(f)g + fV(g)$$

dir.

□

Vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ birimli ve değişimli halka üzerinde modül yapısına sahiptir.

Tanjant vektör bahsindeki Teorem 3.5 göz önüne alınır ise bir (U, φ) kartına göre bir $V \in \Gamma(TM)$ vektör alanı

$$V = \sum_i V^i(x^1, x^2, \dots, x^n) \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (4.2)$$

olarak ifade edilir. Burada $V^i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlardır (Bileşen fonksiyonları).

4.1. Lie Parantezi

Tanım 4.3. M , n - boyutlu türevlenebilir manifold olsun.

$$[,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

$$(V, W) \mapsto [V, W](f) := V(W(f)) - W(V(f))$$

ile tanımlanan $[-, -]$ operatörüne Lie parantezi denir.

Sonuç 4.4. $W, V, Z \in \Gamma(TM)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $f, h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere;

$$1. [V, W] = -[W, V]$$

$$\begin{aligned}
[V, W](f) &= V(W(f)) - W(V(f)) \\
&= -(W(V(f)) - V(W(f))) \\
&= -(W(V) - V(W))(f) \\
&= -[W, V](f)
\end{aligned}$$

$$2. [V, V] = \mathbf{0}_{\Gamma(TM)}$$

$$\begin{aligned}
[V, V](f) &= V(V(f)) - V(V(f)) \\
&= \mathbf{0}_{C^\infty(M, R)} = \mathbf{0}_{\Gamma(TM)}(f)
\end{aligned}$$

$$3. [\lambda V + W, Z] = \lambda[V, Z] + [W, Z]$$

$$\begin{aligned}
[\lambda V + W, Z](f) &= (\lambda V + W)(Z(f)) - (Z(\lambda V + W))(f) \\
&= (\lambda V(Z(f)) + W(Z(f))) - (Z(\lambda V(f) + W(f))) \\
&= \lambda V(Z(f)) + W(Z(f)) - \lambda Z(V(f)) - Z(W(f)) \\
&= \lambda(V(Z(f)) - Z(V(f))) + W(Z(f)) - Z(W(f)) \\
&= \lambda[V, Z](f) + [W, Z](f) \\
&= (\lambda[V, Z] + [W, Z])(f)
\end{aligned}$$

$$[V, \lambda W + Z] = \lambda[V, W] + [V, Z]$$

$$\begin{aligned}
[V, \lambda W + Z] &= \lambda[V, W] + [V, Z](f) \\
&= V((\lambda W + Z)(f)) - (\lambda W + Z)(V(f)) \\
&= V(\lambda W(f) + Z(f)) - (\lambda W(V(f)) \\
&\quad + Z(V(f))) \\
&= V(\lambda W(f)) + V(Z(f)) - \lambda W(V(f)) \\
&\quad - Z(V(f)) \\
&= \lambda V(W(f)) + V(Z(f)) - \lambda W(V(f)) \\
&\quad - Z(V(f)) \\
&= \lambda(V(W(f)) + W(V(f))) + V(Z(f)) \\
&\quad - Z(V(f)) \\
&= \lambda[V, W](f) + [V, Z](f) \\
&= (\lambda[V, W] + [V, Z])(f)
\end{aligned}$$

$$4. [V, hW] = V(h)W + h[V, W]$$

$$\begin{aligned}
[V, hW](f) &= V(h(W)(f)) - hW(V(f)) \\
&= V(h)(W(f)) + hV(W(f)) - hW(V(f)) \\
&= V(h)(W(f)) + h(V(W(f)) - W(V(f))) \\
&= (V(h)W)(f) + h[V, W](f) \\
&= (V(h)W + h[V, W])(f)
\end{aligned}$$

$$[hV, W] = -W(h)V + h[V, W]$$

$$\begin{aligned}
[hV, W](f) &= hV(W(f)) - W(hV(f)) \\
&= hV(W(f)) - (W(h)V(f) + hW(V(f))) \\
&= hV(W(f)) - W(h)V(f) - hW(V(f)) \\
&= -W(h)V(f) + h(V(W(f)) - W(V(f))) \\
&= (-W(h)V + h[V, W])(f)
\end{aligned}$$

5. $[[V, W], Z] + [[W, Z], V] + [[Z, V], W] = \mathbf{0}_{\Gamma(TM)}$ (Jacobi özdeşliği)

6. Bir (U, φ) kartına göre $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ve $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ olmak üzere

$$[\partial_i, \partial_j] = \mathbf{0}_{\Gamma(TM)}$$

$$\begin{aligned} [\partial_i, \partial_j](f) &= \partial_i \partial_j f - \partial_j \partial_i f \\ &= \partial_i \partial_j f - \partial_i \partial_j f \\ &= \mathbf{0}_{C^\infty(M, \mathbb{R})} = \mathbf{0}_{\Gamma(TM)}(f) \end{aligned}$$



4.2. Kovektör Alanları (1- Formlar)

Şimde de T^*M ile gösterilen ve

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M = \{(p, \theta_p) | p \in M, \theta_p \in T_p^*M\} \quad (4.3)$$

olarak tanımlanan $2n$ - boyutlu manifold (kotanjant yığını) kullanılarak, kovektör alanları (1-formlar) aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 4.5. M , n - boyutlu türevlenebilir bir manifold olsun. Her bir $p \in M$ noktasına bir kotanjant vektörü karşılık getiren

$$\theta : M \rightarrow \bigcup_{x \in M} T_x^*M = T^*M = \{(p, \theta_p) | p \in M, \theta_p \in T_p^*M\}$$

θ - türevlenebilir fonksiyonuna (kotanjant yığınının kesitine) kovektör alanı (1- form) denir. Kovektör alanlarının kümesi $\Gamma(T^*M)$ ile gösterilir.

Kovektör alanlarının kümesi, $\Gamma(TM)$ vektör alanlarının oluşturduğu modül uzayının duali olan

$$\Gamma(T^*M) = \{\theta : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) | \theta, C^\infty\text{-lineer}\}$$

kümesi olarak da ele alınabilir. Ayrıca $\Gamma(T^*M)$ de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ birimli, değişimli halka üzerinde bir modüldür.

Tanım 4.6. $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olmak üzere

$$\begin{aligned} df : \Gamma(TM) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ V &\mapsto ((df)(V))(p) := df \Big|_p (v_p) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan C^∞ - lineer df fonksiyonuna $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun diferansiyeli denir.

Sonuç 4.7. $df \in \Gamma(T^*M)$ dir.

Sonuç 4.8. Bir $(U, \varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n))$ kartı üzerinde

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

dir.

Genel olarak bir $(U, \varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n))$ kartında bir $\theta \in \Gamma(T^*M)$ kovektör alanı (1- formu)

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i(x^1, x^2, \dots, x^n) dx^i$$

olarak yazılır. Burada $\theta_i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ türevlenebilir fonksiyonlardır.

5. TENSÖR ALANLARI VE TENSÖRLER

Tanım 5.1. *Türevlenebilir bir n - boyutlu M manifoldu üzerinde bir T tensör alanı*

$$T : (\Gamma(TM))^r \times (\Gamma(T^*M))^s \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

biçimindeki C^∞ - çok lineer fonksiyondur. Bu fonksiyona (r, s) - tipinden $(r$. mertebeden kovaryant s . mertebeden kontravaryant) tensör alanı denir. (r, s) - tipinden tensör alanlarının kümesi $\mathcal{T}_{rs}(M)$ ile gösterilir.

(r, s) - tipinden tensör alanlarının kümesi üzerinde toplama ve dışardan çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanırsa

$$\begin{aligned} + : \mathcal{T}_{rs}(M) \times \mathcal{T}_{rs}(M) &\rightarrow \mathcal{T}_{rs}(M) \\ (T, S) &\mapsto (T, S)(V_1, \dots, V_r, \theta^1, \dots, \theta^s) \\ &= T(V_1, \dots, V_r, \theta^1, \dots, \theta^s) + S(V_1, \dots, V_r, \theta^1, \dots, \theta^s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot : C^\infty(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{T}_{rs}(M) &\rightarrow \mathcal{T}_{rs}(M) \\ (f, T) &\mapsto (f \cdot T)(V_1, \dots, V_r, \theta^1, \dots, \theta^s) \\ &= fT(V_1, \dots, V_r, \theta^1, \dots, \theta^s) + S(V_1, \dots, V_r, \theta^1, \dots, \theta^s) \end{aligned}$$

$(\mathcal{T}_{rs}(M), +, \cdot, C^\infty(M, \mathbb{R}))$ kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ birimli, değişmeli halka üzerinde bir modüldür.

Vektör alanları ve kovektör alanlarında olduğu gibi tensör alanları da her bir $p \in M$ noktasına bir tensör karşılık getirir. Yani $p \in M$ verildiğinde

$$T_p : (T_p M)^r \times (T_p^* M)^s \rightarrow \mathbb{R}$$

biçimindeki $\mathbb{R}$ - çok lineer fonksiyonuna (r, s) - tipinden tensör denir. $p \in M$ noktasındaki (r, s) - tipinden tensörlerin kümesi $\mathbb{R}$ de bir vektör uzayıdır.

5.1. Tensör Alanlarına Örnekler

Bir kovektör alanı (1- form) (1, 0)- tipinden kovaryant bir tensör alanıdır. Çünkü kovektör alanları

$$\theta : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklindeki C^∞ -lineer dönüşümlerdir.

Vektör alanları (0,1)- tipinden tensör alanları olarak düşünülebilir: $V \in \Gamma(TM)$ ve $\theta \in \Gamma(T^*M)$ olmak üzere

$$V(\theta) := \theta(V)$$

olarak tanımlanırsa bir vektör alanı (0, 1)- tipinden kontravaryant tensör alanı olur. Çünkü bu tanımla

$$V : \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

şeklinde C^∞ - lineer dönüşümü elde edilir. Tensör alanları tanımına bakılacak olursa $r = 0, s = 1$ dir.

Eğer $T : \Gamma(TM)^s \rightarrow \Gamma(TM)$ fonksiyonu $C^\infty(M, \mathbb{R})$ çok-lineer ise $(s, 1)$ - tipinden

$$\tilde{T} : \Gamma(TM)^s \times \Gamma(T^*M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

tensör alanı her $\omega \in \Gamma(T^*M)$ ve her $V_1, \dots, V_s \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{T}(\omega, V_1, \dots, V_s) = \omega(T(V_1, \dots, V_s))$$

olarak tanımlanır. Dolayısıyla doğrudan $T : \Gamma(TM)^s \rightarrow \Gamma(TM)$ fonksiyonu $(s, 1)$ - tipinden tensör olarak düşünülebilir.

5.2. Tensörlerin Çarpımı, Bileşenleri ve Kontraksiyonu

Tanım 5.2. $T_1 \in \mathcal{T}_{rs}(M)$, $T_2 \in \mathcal{T}_{mn}(M)$ olmak üzere

her $V_1, \dots, V_r, V_{r+1}, \dots, V_{r+m} \in \Gamma(TM)$ ve her $\omega^1, \dots, \omega^s, \omega^{s+1}, \dots, \omega^{s+n} \in \Gamma(T^*M)$ için

$$(T_1 \otimes T_2)(V_1, \dots, V_r, V_{r+1}, \dots, V_{r+m}, \omega^1, \dots, \omega^s, \omega^{s+1}, \dots, \omega^{s+n}) := \\ T_1(V_1, \dots, V_r, \omega^1, \dots, \omega^s) T_2(V_{r+1}, \dots, V_{r+m}, \omega^{s+1}, \dots, \omega^{s+n})$$

olarak tanımlanan $\otimes : \mathcal{T}_{rs}(M) \times \mathcal{T}_{mn}(M) \rightarrow \mathcal{T}_{(r+m)(s+n)}(M)$ şeklindeki işleme tensör çarpımı denir. T_1 tensörü (r, s) - tipinden, T_2 tensörü (m, n) - tipinden ise görülür ki $(T_1 \otimes T_2)$ çarpım tensörü $(r + m, s + n)$ - tipinden bir tensördür.

Genel olarak tensör çarpımı değişimli değildir. Özel olarak $T_1 \in \mathcal{T}_{r0}(M)$ kovaryant ve $T_2 \in \mathcal{T}_{0s}(M)$ kontravaryant tensör alanları ise

$$T_1 \otimes T_2 = T_2 \otimes T_1$$

dir. Çünkü tensör çarpımı tanımından

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes T_2)(V_1, \dots, V_r, \omega^1, \dots, \omega^s) &= T_1(V_1, \dots, V_r)T_2(\omega^1, \dots, \omega^s) \\ (T_2 \otimes T_1)(V_1, \dots, V_r, \omega^1, \dots, \omega^s) &= T_2(\omega^1, \dots, \omega^s)T_1(V_1, \dots, V_r) \end{aligned}$$

bulunur. $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ' nin değişimli bir halka olmasından dolayı $T_1 \otimes T_2 = T_2 \otimes T_1$ elde edilir.

$C^\infty(M, \mathbb{R})$ ' nin elemanları $(0, 0)$ - tipinden tensör alanları olarak tanımlanır. Bir fonksiyonun herhangi bir T tensör alanıyla tensör çarpımı

$$f \otimes T = T \otimes f = fT$$

olarak tanımlanır.

n - boyutlu M türevlenebilir manifoldunun bir $U \subset M$ açığı üzerinde bir $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ kartı alınsın. Bu kart üzerinde sırasıyla $\Gamma(TM)$ ve $\Gamma(T^*M)$ ' nin

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right\} \subset \Gamma(TM)$$

ve

$$\{dx^1, \dots, dx^n\} \subset \Gamma(T^*M)$$

koordinat tabanları kullanılarak bir $T \in \mathcal{T}_{rs}(M)$ tensör alanının bileşenleri

$$T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} = T\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}, dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s}\right)$$

notasyonu ile verilen $T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_r} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonlarıdır. Bir (r, s) - tipinden T

tensör alanı $(U, \varphi = (x^1, \dots, x^n))$ kartı üzerinde

$$T = \sum_{\substack{j_1, \dots, j_s \\ i_1, \dots, i_s}}^n = T_{j_1, \dots, j_s}^{i_1, \dots, i_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_s}} \otimes dx^{j_1} \otimes \dots \otimes dx^{j_s}$$

şeklinde ifade edilir.

Şimdi tensörlerin kontraksiyonunu tanımlayalım:

Teorem 5.3. *Adına kontraksiyon denilen $\mathcal{C} : \mathcal{T}_{11}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ biçiminde tek bir $C^\infty(M, \mathbb{R})$ lineer fonksiyon vardır öyle ki her $V \in \Gamma(TM)$ ve her $\omega \in \Gamma(T^*M)$ için*

$$\mathcal{C}(V \otimes \omega) = \omega(V) \quad (5.1)$$

dir.

Bu teoremin ispatı için (bkz. [6][s.40]). Bu ispattan çıkan sonuç bir $A \in \mathcal{T}_{11}(M)$ için

$$\mathcal{C}(A) = \sum_{i=1}^n A_i^i$$

olmasıdır.

Bu tanım $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$ olmak üzere herhangi bir $T \in \mathcal{T}_{rs}(M)$ tensör alanına genişletilebilir: $V_1, \dots, V_{r-1} \in \Gamma(TM)$ vektör alanları ile $\omega^1, \dots, \omega^{s-1} \in \Gamma(T^*M)$ kovektör alanları verilsin. $V \in \Gamma(TM)$ ve $\omega \in \Gamma(T^*M)$ olmak üzere $\tilde{T}$ ile gösterilen $(1, 1)$ - tipinden tensör alanını

$$\tilde{T}(V, \omega) = T(V_1, \dots, V, \dots, V_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega, \dots, \omega^{s-1})$$

olarak tanımlayalım. Bu son eşitlikte V vektör alanı i . kovaryant, ω kovektör alanı j . kontravaryant haznededir. Öyleyse T 'nin i, j üzerinden $\mathcal{C}_j^i(T)$ kontraksiyonu olarak $\tilde{T}$ kullanılırsa

$$(\mathcal{C}_j^i(T))(V_1, \dots, V_{r-1}, \omega^1, \dots, \omega^{s-1}) = \mathcal{C}(\tilde{T}(V_1, \dots, \bullet, \dots, V_{r-1}, \omega^1, \dots, \bullet, \dots, \omega^{s-1}))$$

tanımı verilir.

6. RIEMANN MANİFOLDLARI

Tanım 6.1. M ile diferansiyellenebilir bir n - boyutlu manifold gösterilsin. Öyleyse

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

biçimindeki 2. mertebeden kovaryant g tensör alanı

1. Her $V, W \in \Gamma(TM)$ için $g(V, W) = g(W, V)$,
2. Her $p \in M$ ve sıfırdan farklı her $v_p \in T_p M$ için $g_p(v_p, v_p) > 0$

koşullarını sağlıyorsa bu g tensör alanına Riemann metrik tensörü ya da kısaca Riemann metriği denir. M manifoldu da Riemann manifoldu olarak adlandırılır. İlk koşul simetriklik koşulu diğeri ise pozitif tanımlılık koşuludur.

Vektör alanlarında (veya 1- formlarda) olduğu gibi tensör alanları da M manifoldunun noktalarına tensörler karşılık getirirler. Dolayısıyla yukarıda ki tanımdan anlaşılan; bir Riemann metrik tensör alanının keyfi bir $p \in M$ noktasına karşılık getirdiği

$$g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$$

biçimindeki tensör $T_p M'$ de bir iç çarpımdır. Yani Riemann manifoldlarında her bir noktadaki tanjant uzaylar birer iç çarpım uzayıdır.

Tanım 6.2. Diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde ikinci mertebeden kovaryant g tensör alanı simetrik olsun. Her $p \in M$ ve sıfırdan farklı her $x_p \in T_p M$ için $g_p(v_p, x_p) = 0$ eşitliğini sağlayan tek çözüm $v_p = 0 \in T_p M$ ise g tensör alanına nondejenere denir.

Teorem 6.3. Bir Riemann metriği nondejenere dir.

Kanıt. Varsayalım ki nondejenere olmasın. O halde her $p \in M$ ve sıfırdan farklı her $x_p \in T_p M$ için $g_p(v_p, x_p) = 0$ eşitliğini sağlayan tek çözüm $v_p = 0$ değildir. Yani en az bir $p \in M$ vardır öyle ki $g_p(\tilde{v}_p, x_p) = 0$ olacak şekilde $\tilde{v}_p \neq 0 \in T_p M$ vardır. Öyleyse $x_p = \tilde{v}_p$ alınırsa $g_p(\tilde{v}_p, \tilde{v}_p) = 0$ eşitliği de sağlanmalıdır. Fakat bu g Riemann metriğinin pozitif tanımlılığı ile çelişir. Dolayısıyla bir Riemann metriği nondejenere dir. $\square$

Bir $\eta = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ koordinat sisteminde Riemann metriği,

$$g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx^i \otimes dx^j$$

şeklinde yazılır. Böyle bir koordinat sisteminde, g metriği nondejenere olduğundan $X = \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ alındığında (her bir $1 \leq \mu \leq n$ için)

$$g(X, V) = \sum_{a=1}^n g_{\mu a} V^a = g_{\mu 1} V^1 + g_{\mu 2} V^2 + \dots + g_{\mu n} V^n = 0$$

denklem sisteminin tek çözümü $V^i = 0$ dır. Öyleyse lineer cebirden bilindiği gibi katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır $\det(g_{\mu\alpha}) \neq 0$. Demek ki $g_{\mu\nu}$ matrisi her koordinat sisteminde terslenebilirdir. Şimdi $(U, \eta = (x^1, \dots, x^n))$ kartına göre ${}^\eta(g_{\mu\nu})^{-1} = {}^\eta(g^{\mu\nu})$ ile gösterilecek olan bu ters matrisin bir başka $(V, \xi = (y^1, y^2, \dots, y^n))$ kartına göre karşılığı ${}^\xi(g_{\mu\nu})^{-1} = {}^\xi(g^{\mu\nu})$ olsun. $U \cap V \neq \emptyset$ olmak üzere herhangi bir $p \in U \cap V$ için

$$\begin{aligned} {}^\eta g_{\mu\nu}(p) &= {}^\eta g_p \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Big|_p \right) = \sum_{i,j} {}^\eta g_p \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^\mu} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \frac{\partial y^i}{\partial x^\nu} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial y^j}{\partial x^\mu} \Big|_p \frac{\partial y^i}{\partial x^\nu} \Big|_p {}^\xi g \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{i,j} (J_{\varphi(p)})_{j\mu} (J_{\varphi(p)})_{iv} {}^\xi g \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{i,j} (J_{\varphi(p)}^t)_{\mu j} (J_{\varphi(p)})_{iv} {}^\xi g \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right) \\ &= \sum_{i,j} (J_{\varphi(p)}^t)_{\mu j} {}^\xi g \left(\frac{\partial}{\partial y^j} \Big|_p, \frac{\partial}{\partial y^i} \Big|_p \right) (J_{\varphi(p)})_{iv} \\ &= J_{\varphi(p)}^t {}^\xi g(p) J_{\varphi(p)} \end{aligned}$$

dir. Öyleyse

$$\begin{aligned} \left({}^\eta g(p) \right)^{-1} &= \left(J_{\varphi(p)}^t {}^\xi g(p) J_{\varphi(p)} \right)^{-1} \\ &= J_{\varphi(p)}^{-1} ({}^\xi g(p))^{-1} (J_{\varphi(p)}^t)^{-1} \\ &= J_{\varphi(p)}^{-1} ({}^\xi g(p))^{-1} (J_{\varphi(p)}^{-1})^t \end{aligned}$$

eşitliği de sağlanır. Demek ki

$$\left({}^\eta g(p) \right)_{\mu\nu}^{-1} = \sum_{i,j} (J_{\varphi(p)}^{-1})_{\mu i} ({}^\xi g(p))_{ij}^{-1} (J_{\varphi(p)})_{jv}^t$$

yani

$$\begin{aligned} {}^\eta g_p^{\mu\nu} &= \sum_{i,j} (J_{\varphi(p)}^{-1})_{\mu i} {}^\xi g_p^{ij} (J_{\varphi(p)})_{vj} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \Big|_p {}^\xi g_p^{ij} \frac{\partial x^v}{\partial y^j} \Big|_p \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \Big|_p \frac{\partial x^v}{\partial y^j} \Big|_p {}^\xi g_p^{ij} \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlik her $p \in U \cap V$ için geçerli olacağından $U \cap V \subset M$ üzerinde

$${}^\eta g^{\mu\nu} = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^v}{\partial y^j} {}^\xi g^{ij}$$

eşitliğini elde ederiz. Bu eşitlik Teorem 6.5' in ispatında kullanılacaktır.

6.1. Levi-Civita Bağlantısı

Tanım 6.4. *Diferansiyellenebilir bir M manifoldu üzerinde*

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$$

fonksiyonu her $V, W \in \Gamma(TM)$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

1. $\nabla_V W$, V üzerinde C^∞ - lineer
2. $\nabla_V W$, W üzerinde $\mathbb{R}$ - lineer
3. $\nabla_V fW = V(f)W = f\nabla_V W$

koşulları sağlanıyorsa ∇ 'ya bir bağlantı, $\nabla_V W$ 'ya da W 'nın V ye göre kovaryant türevi denir. Ayrıca $\nabla_V : \Gamma(T_p M) \rightarrow \Gamma(T_p M)$ ye de kovaryant türev operatörü denir.

Böyle bir fonksiyon var mıdır? sorusunu yanıtlamak için aşağıdaki teoreme ihtiyaç duyulur:

Teorem 6.5. Bir (M, g) Riemann manifoldu üzerinde her $X, V \in \Gamma(TM)$ için

$$(\phi(V))(X) := g(V, X)$$

olarak tanımlanan $\phi : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(T^*M)$, $V \mapsto \phi(V)$ fonksiyonu bir C^∞ -lineer izomorfizmadır.

Not 6.6. Kimi kaynaklarda $\phi(V)$ 1- formu, V^* ile de gösterilebilir. Bu 1- forma V vektör alanının metrik duali denir.

Kanıt. Öncelikle ϕ 'nin iyi tanımlı olduğunu gösterelim: Yani $\phi(V)$ gerçekten 1-form mudur? Her $V, W, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (\phi(V))(fW + Z) &= g(V, fW + Z) \\ &= fg(V, W) + g(V, Z) \\ &= f(\phi(V))(W) + (\phi(V))(Z) \end{aligned}$$

olur. Yani $\phi(V)$, C^∞ -lineerdir ve $(\phi(V))(W) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ olduğu açıktır. Görüldüğü gibi $\phi(V)$ bir 1- formdur. Buna göre ϕ iyi tanımlıdır. ϕ - fonksiyonunun bir C^∞ - lineer izomorfizma olduğu aşağıdaki sonuçlardan elde edilir:

1. ϕ , C^∞ - lineer midir? Yani her $W, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\phi(fW + Z) = f\phi(W) + \phi(Z)$$

midir? Her $V \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (\phi(fW + Z))(V) &= g(fW + Z, V) \\ &= fg(W, V) + g(Z, V) \\ &= f(\phi(W))(V) + (\phi(Z))(V) \\ &= (f\phi(W) + \phi(Z))(V) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. İki fonksiyonun eşitliği tanımı $\phi(fW + Z) = f\phi(W) + \phi(Z)$ sonucunu verir.

2. ϕ bire-bir midir? Yani $\phi(W) = \phi(Z)$ iken $W = Z$ midir? $\phi(W) = \phi(Z)$ ise her $V \in \Gamma(TM)$ için $(\phi(W))(V) = (\phi(Z))(V)$ olur. ϕ 'nin tanımından

$$g(W, V) = g(Z, V)$$

dir. Buradan

$$g(W, V) - g(Z, V) = 0$$

eşitliği elde edilir. g 'nin lineerliğinden

$$g(W - Z, V) = 0$$

olarak bulunur. g nondejenere olduğundan buradaki son eşitlik ancak ve ancak $W - Z = 0$ iken sağlanır. Dolayısıyla $W = Z$ dir. ϕ - bire-bir dönüşümdür.

3. ϕ örten midir? Yani verilen bir $\theta \in \Gamma(T^*M)$ için $\phi(W) = \theta$ olacak şekilde $W \in \Gamma(TM)$ var mıdır? Verilen bir θ - 1- formu herhangi bir koordinat sisteminde $\theta = \sum_i \theta_i dx^i$ olarak yazılabilir. Aranılan $W \in \Gamma(TM)$ bu koordinat sisteminde $W = \sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}$ olarak alınır ise $(W \in \Gamma(TM))$ 'nin koordinat sisteminden bağımsız olduğu hemen aşağıda gösterilecektir) her $V \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} (\phi(W))(V) &= g(W, V) \\ &= g\left(\sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}, V\right) \\ &= g\left(\sum_{i,j} g^{ij} \theta_i \frac{\partial}{\partial x^j}, \sum_k V_k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\ &= \sum_{i,j,k} g^{ij} \theta_i V_k g_{jk} \\ &= \sum_i \theta_i V_i \\ &= \theta(V) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik her $V \in \Gamma(TM)$ için geçerli olduğundan $\phi(W) = \theta$ olarak bulunur. Dolayısıyla ϕ - örtendir. Bu üç özellikten ϕ - fonksiyonunun izomorfizma olduğu görülür. Şimdi $W \in \Gamma(TM)$ 'nin koordinat sisteminden

bağımsız olduğu gösterilecektir:

$$\begin{aligned}
{}^{\eta}W &= \sum_{i,j} {}^{\eta}g^{ij} {}^{\eta}\theta_i \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i,j} {}^{\eta}g^{ij} \theta \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial x^j} \\
&= \sum_{i,j,k,m,l,r} \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \frac{\partial x^j}{\partial y^m} \xi g^{km} \theta \left(\frac{\partial y^l}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^l} \right) \frac{\partial y^r}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^r} \\
&= \sum_{i,k,m,l,r} \delta_m^r \frac{\partial x^i}{\partial y^k} \xi g^{km} \frac{\partial y^l}{\partial x^i} \xi \theta_l \frac{\partial}{\partial y^r} \\
&= \sum_{k,m,l} \delta_k^l \xi g^{km} \xi \theta_l \frac{\partial}{\partial y^m} \\
&= \sum_{k,m} \xi g^{km} \xi \theta_k \frac{\partial}{\partial y^m} \\
&= {}^{\xi}W
\end{aligned}$$

□

Şimdi Tanım 6.4 de bahsedilen bağlantının varlığıyla ilgili sorunun yanıtı aşağıdaki gibi verilebilir.

Teorem 6.7. (M, g) n - boyutlu bir Riemann manifold ve keyfice seçilmiş iki vektör alanı $V, W \in \Gamma(TM)$ olsun.

i. $V, W \in \Gamma(TM)$ vektör alanlarına karşılık gelen ve her $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\theta_{VW}(Z) &= \frac{1}{2} \left[Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) \right. \\
&= \left. -g(V, [W, Z]) + g(W, [Z, V]) + g(Z, [V, W]) \right]
\end{aligned}$$

olarak tanımlanan $\theta_{VW} : \Gamma(TM) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ bir 1- formdur.

ii. Teorem 6.5 de tanımlanan ϕ , C^∞ - lineer izomorfizması ve (i)' de tanımlanan θ_{VW} 1- formu kullanılarak

$$\nabla_V W = \phi^{-1}(\theta_{VW})$$

biçiminde tanımlanan $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ fonksiyonu bir bağlantıdır (yani 1,2,3 sağlanır) öyle ki her $V, W, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$I. \nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$$

$$II. Vg(W, Z) = g(\nabla_V W, Z) + g(W, \nabla_V Z)$$

eşitlikleri sağlanır.

iii. Verilen bir $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ bağlantısı (yani 1,2,3 sağlanıyor) I ve II eşitliklerini de sağlıyor ise verilen bu bağlantı (ii) de tanımlanan bağlantıdır. (ii) de tanımlanan bağlantıya Levi-Civita bağlantısı denir.

Kanıt. (i) θ_{VW} 'nin bir 1- form olduğu aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{aligned} \theta_{VW}(fX + Y) &= \frac{1}{2} \left[Vg(W, fX + Y) + Wg(fX + Y, V) \right. \\ &\quad - (fX + Y)g(V, W) - g(V, [W, fX + Y]) \\ &\quad \left. + g(W, [fX + Y, V]) + g(fX + Y, [V, W]) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[V(fg(W, V)) + Vg(W, Y) + W(fg(X, V)) \right. \\ &\quad \left. Wg(V, Y) - fXg(V, W) - Yg(V, W) \right. \\ &\quad \left. - g(V, W(f)X + f[W, X] + [W, Y]) \right. \\ &\quad \left. + g(W, f[X, V] + [Y, V] - V(f)X) \right. \\ &\quad \left. + g(fX + Y, [V, W]) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[f \left(Vg(W, X) + Wg(X, V) - Xg(V, W) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - g(V, [W, X]) + g(W, [X, V]) + g(X, [V, W]) \right) \right. \\ &\quad \left. + Vg(W, Y) + Wg(Y, V) - Yg(V, W) \right. \\ &\quad \left. - g(V, [W, Y]) + g(W, [Y, V]) + g(Y, [V, W]) \right] \\ &= f\theta_{VW}(X) + \theta_{VW}(Y) \end{aligned}$$

bulunur.

(ii) İlk adımda $\nabla_V W$ 'nin tanımından

$$\phi(\nabla_V W) = \theta_{VW}$$

olduğu bellidir. Öyleyse her $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\phi(\nabla_V W))(Z) = \theta_{VW}(Z) \quad (6.1)$$

olur. Bu eşitliğin sağında θ_{VW} nın tanımı, solunda da ϕ izomorfizmasının tanımı kullanılır ise

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W, Z) &= Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) \\ &\quad -g(V, [W, Z]) + g(W, [Z, V]) + g(Z, (V, W)) \end{aligned}$$

eşitliği (Kozsul formülü) elde edilir. Kozsul formülü yardımıyla Tanım 6.4 ve teoremden ki I ve II eşitliklerini elde edelim: Kozsul formülünde $V = fX + Y$ olarak alınırsa,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{fX+Y} W, Z) &= (fX + Y)g(W, Z) + Wg(Z, fX + Y) - Zg(fX + Y, W) \\ &\quad -g(fX + Y, [W, Z]) + g(W, [Z, fX + Y]) + g(Z, [fX + Y, W]) \end{aligned}$$

olur. g Riemann metriğinin C^∞ - lineerliği ve

$$[Z, fX + Y] = Z(f)X + f[Z, X] + [Z, Y] \quad (6.2)$$

$$[fX + Y, W] = f[X, W] + [Y, W] - W(f)X \quad (6.3)$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{fX+Y} W, Z) &= fXg(W, Z) + Yg(W, Z) + Z(fg(Z, X)) \\ &\quad + Wg(Z, Y) - Z(f)g(X, W) - Zg(Y, W) \\ &\quad -fg(X, [W, Z]) - g(Y, [W, Z]) \\ &\quad +g(W, Z(f)X + f[Z, X] + [Z, Y]) \\ &\quad +g(Z, f[X, W] + [Y, W] - W(f)X) \\ &= fg(2\nabla_X W, Z) + g(2\nabla_Y W, Z) \\ &= 2fg(f\nabla_X W + \nabla_Y W, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$2g(\nabla_{fX+Y}W, Z) - 2g(f\nabla_XW + \nabla_YW, Z) = 0$$

$$2g(\nabla_{fX+Y}W - f\nabla_XW - \nabla_YW, Z) = 0$$

olduğu bulunur. g Riemann metriği nondejenere olmasından dolayı,

$$\nabla_{fX+Y}W - f\nabla_XW - \nabla_YW = 0$$

dır. Sonuç olarak

$$\nabla_{fX+Y}W = f\nabla_XW + \nabla_YW$$

eşitliği elde edilir. Şimdi kozsul formülünde W yerine $aY + W$ alınırsa ($a \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X(aY + W), Z) &= Xg(aY + W, Z) + (aY + W)g(Z, X) \\ &\quad - Zg(X, aY + W) - g(X, [aY + W, Z]) \\ &\quad + g(aY + W, [Z, X]) + g(Z, [X, aY + W]) \end{aligned}$$

olur. g Riemann metriğinin C^∞ - lineerliğinden,

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X(aY + W), Z) &= aXg(Y, Z) + Xg(W, Z) + aYg(Z, X) \\ &\quad + Zg(Z, X) - aZg(X, Y) - Zg(X, W) \\ &\quad - ag(X, [Y, Z]) - g(X, [W, Z]) + ag(Y, [Z, X]) \\ &\quad + g(W, [Z, X]) + ag(Z, [X, Y]) + g(Z, [X, W]) \\ &= a(Xg(Y, Z) + aYg(Z, X) - aZg(X, Y) \\ &\quad - ag(X, [Y, Z]) + ag(Y, [Z, X]) + ag(Z, [X, Y])) \\ &\quad + Xg(W, Z) + Zg(Z, X) - Zg(X, W) \\ &\quad - g(X, [W, Z]) + g(W, [Z, X]) + g(Z, [X, W]) \\ &= 2ag(\nabla_XY, Z) + 2g(\nabla_XW, Z) \\ &= 2g(a\nabla_XY + \nabla_XW, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$2g(\nabla_X(aY + W), Z) - 2g(a\nabla_X Y + \nabla_X W, Z) = 0$$

$$2g(\nabla_X(aY + W) - a\nabla_X Y + \nabla_X W, Z) = 0$$

olduğu bulunur. g nondejenere olduğundan,

$$\nabla_X(aY + W) = a\nabla_X Y + \nabla_X W$$

eşitliği elde edilir. Kozsul formülünde W yerine fW alınırsa

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V fW, Z) &= Vg(fW, W) + fWg(Z, V) - Zg(V, fW) \\ &\quad -g(V, [fW, Z]) + g(fW, [Z, V]) + g(Z, [V, fW]) \\ &= V(fg(W, Z)) + fWg(Z, V) - Z(fg(V, W)) \\ &\quad -g(V, f[W, Z] - Z(f)W) + fg(W, [Z, V]) \\ &\quad +g(Z, V(f)W + f[V, W]) \\ &= V(f)g(W, Z) + fVg(W, Z) + fWg(Z, V) \\ &\quad -Z(f)g(V, W) - fZg(V, W) - g(V, f[W, Z]) \\ &\quad +g(Z, V(f)W) + fg(W, [Z, V]) + g(Z, V(f)W) \\ &\quad +g(Z, f[V, W]) \\ &= V(f)g(W, Z) + fVg(W, Z) + fWg(Z, V) \\ &\quad -Z(f)g(V, W) - fZ(g(V, W)) - fg(V, [W, Z]) \\ &\quad +Z(f)g(V, W) + fg(W, [Z, V] + V(f)g(Z, W)) + fg(Z, [V, W]) \\ &= 2V(f)g(W, Z) + f(Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) \\ &\quad -g(V, [W, Z]) + g(W, [Z, V] + g(Z, [V, W]))) \\ &= 2V(f)g(W, Z) + 2fg(\nabla_V W, Z) \\ &= 2g(V(f)W + f\nabla_V W, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V fW, Z) - 2g(V(f)W + f\nabla_V W, Z) &= 0 \\ 2g(\nabla_V fW - V(f)W - f\nabla_V W, Z) &= 0 \end{aligned}$$

olduğu bulunur. g nondejenere olduğundan

$$\nabla_V fW - V(f)W - f\nabla_V W = 0$$

dır. Sonuç olarak

$$\nabla_V fW = V(f)W + f\nabla_V W$$

eşitliği elde edilir. Kozsul formülünde ayrı ayrı $\nabla_V W$ ve $\nabla_W V$ oluşturulursa

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W - \nabla_W V, Z) &= 2g(\nabla_V W, Z) - g(\nabla_W V, Z) \\ &= Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) \\ &\quad - g(V, [W, Z]) + g(W, [Z, W]) + g(Z, [V, W]) \\ &\quad - Wg(V, Z) - Vg(Z, W) + Zg(W, V) \\ &\quad + g(W, [V, Z]) - g(V, [Z, W]) - g(Z, [W, V]) \\ &= 2g(Z, [V, W]) \\ &= 2g([V, W], Z) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan

$$2g(\nabla_V W - \nabla_W V, Z) - 2g([V, W], Z) = 0$$

$$2g(\nabla_V W - \nabla_W V - [V, W], Z) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. g nondejenere olduğundan

$$\nabla_V W - \nabla_W V = [V, W]$$

bulunur. Diğerlerine benzer biçimde gerekli terimler kozsul formülünde oluşturulursa g - Riemann metriğinin simetrikliğinden ve Lie parantezinin ters simetrikliğinden ilk olarak

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_V W, Z) &= Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) \\ &\quad -g(V, [W, Z]) + g(W, [Z, V]) + g(Z, [V, W]) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 2g(W, \nabla_V Z) &= 2g(\nabla_V Z, W) \\ &= Vg(Z, W) + Zg(W, V) - Wg(V, Z) \\ &\quad -g(V, [Z, W]) + g(Z, [W, V]) + g(W, [V, Z]) \end{aligned}$$

sonuçları bulunur. bu ifadeler taraf tarafa toplanılırsa

$$2g(\nabla_V W, Z) + 2g(\nabla_V Z, W) = 2Vg(W, Z)$$

eşitliği elde edilir. Buradan da

$$Vg(W, Z) = g(\nabla_V W, Z) + g(W, \nabla_V Z) \quad (6.4)$$

bulunur.

(iii) I ve II eşitlikleri her $V, W, Z \in \Gamma(TM)$ için sağlandığından

$$\begin{aligned} Vg(W, Z) &= g(\nabla_V W, Z) + g(W, \nabla_V Z) \\ Wg(Z, V) &= g(\nabla_W Z, V) + g(Z, \nabla_W V) \\ -Zg(V, W) &= -g(\nabla_Z V, W) - g(V, \nabla_Z W) \end{aligned}$$

dır. I eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned} Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) &= g(W, [V, Z]) + g(V, [W, Z]) \\ &= +g(Z, \nabla_V W) + g(Z, \nabla_W V) \end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte I yeniden kullanılır ise

$$g(\nabla_V W, Z) = \frac{1}{2} \left[Vg(W, Z) + Wg(Z, V) - Zg(V, W) - g(V, [W, Z]) + g(W, [Z, V]) + g(Z, (V, W)) \right]$$

elde edilir. ϕ izomorfizması ve θ_{VW} 1- formunun tanımı kullanılır ise bu son eşitlik her $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\phi(\nabla_V W))(Z) = \theta_{VW}(Z)$$

eşitliğini verir. Öyleyse iki fonksiyonun eşitliği tanımı bize

$$\phi(\nabla_V W) = \theta_{VW}$$

yani

$$\nabla_V W = \phi^{-1}(\theta_{VW})$$

sonucunu verir. Bu (ii) de verilen $\nabla_V W$ tanımındır. $\square$

Şimdi bir vektör alanının kovaryant diferansiyelinin tanımı verilecektir:

Tanım 6.8. M n - boyutlu türevlenebilir bir manifold ve ∇ bir bağlantı olsun. Bir $W \in \Gamma(TM)$ vektör alanı verilsin. Öyleyse

$$\begin{aligned} \nabla W : \Gamma(TM) &\rightarrow \mathcal{T}_{11}(M) \\ X &\mapsto (\nabla W)(X) := \nabla_X W \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan $\nabla W : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ tensör alanına ($\nabla W \in \mathcal{T}_{11}(M)$) $W \in \Gamma(TM)$ 'nin kovaryant diferansiyeli denir.

∇W fonksiyonunun $(1,1)$ - tipinden bir tensör alanı olduğu Tanım 6.4 (1)' den açıkça bellidir. Bu noktada kovaryant türev $(1,1)$ - tipinden tensör alanları için de kullanılabilir: $T : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ şeklindeki $(1,1)$ - tipinden tensör alanının kovaryant türevi (tensör türevi) her $V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_V T)(W) := \nabla_V T(W) - T(\nabla_V W)$$

olarak tanımlanan $\nabla_V T \in \mathcal{T}_{11}(M)$ tensör alanıdır. Dahası herhangi bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu için $V \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\nabla_V f := V(f)$$

olarak tanımlanan eşitlik, $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun $V \in \Gamma(TM)$ vektör alanı yönündeki kovaryant türevinin tanımıdır. Bu doğrultuda bu konuyla ilgili son olarak şu eşitliği de verelim: $V \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$\mathcal{C}_1^1(\nabla_V T) = \nabla_V \mathcal{C}_1^1(T) = V(\mathcal{C}_1^1(T))$$

eşitliği geçerlidir. Bu komütatiflik eşitliğinin detayları için bkz [6].

6.2. Riemann Manifoldlarında Eğrilikler

Teorem 6.9. *M , n - boyutlu bir Riemann manifold olsun. ∇ Levi-Civita bağlantısı olsun. Her $V, W, Z \in \Gamma(TM)$ için*

$$R(V, W)Z := \nabla_V \nabla_W Z - \nabla_W \nabla_V Z - \nabla_{[V, W]} Z \quad (6.5)$$

biçiminde tanımlanan $R : (\Gamma(TM))^3 \rightarrow \Gamma(TM)$ fonksiyonu adına Riemann eğrilik tensör alanı adı verilen $(3, 1)$ - tipinden tensör alanıdır.

Kanıt. Tanım 6.4 da 1,2,3 koşulları ve (6.2) eşitliği yardımıyla R fonksiyonunun W bileşeni için C^∞ - lineer olduğu aşağıdaki gibi ispatlanır. Her $V, X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için,

$$\begin{aligned} R(V, fX + Y)Z &= \nabla_V \nabla_{fX+Y} Z - \nabla_{fX+Y} \nabla_V Z - \nabla_{[V, fX+Y]} Z \\ &= \nabla_V (f \nabla_X Z + \nabla_Y Z) - (f \nabla_X \nabla_V Z + \nabla_Y \nabla_V Z) \\ &\quad - (\nabla_{V(f)X + f[V, X] + [V, Y]} Z) \\ &= \nabla_V (f \nabla_X Z) + \nabla_V (\nabla_Y Z) - f \nabla_X \nabla_V Z - \nabla_Y \nabla_V Z \\ &\quad - (\nabla_{V(f)X} Z + \nabla_{f[V, X]} Z + \nabla_{[V, Y]} Z) \end{aligned}$$

dir. Kovaryant türevin 1, 2, 3 numaralı özellikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R(V, fX + Y)Z &= V(f)\nabla_X Z + f\nabla_V \nabla_X Z + \nabla_V \nabla_Y Z - f\nabla_X \nabla_V Z \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_V Z - V(f)\nabla_X Z - f\nabla_{[V,X]}Z - \nabla_{[V,Y]}Z \\
&= f(\nabla_V \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_V Z - \nabla_{[V,X]}Z) - \nabla_V \nabla_Y Z \\
&\quad - \nabla_Y \nabla_V Z - \nabla_V \nabla_Y Z \\
&= fR(V, X, Z) + R(V, Y, Z)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Tanım 6.4 da 1,2,3 koşulları ve Lie parantezi yardımıyla R fonksiyonunun Z bileşeni ve V bileşeni için C^∞ - lineer olduğu benzer şekilde gösterilir. Buna göre R fonksiyonu $(3, 1)$ - tipinden bir tensör alanıdır. $\square$

Riemann eğriliği başka biçimlerde de ifade edilir: Her $X, V, W, Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları ve $\theta \in \Gamma(T^*M)$ kovektör alanı için

$$R(V, W, Z, \theta) := \theta(R(V, W, Z)) \quad (6.6)$$

ile de ifade edilir. Riemann eğriliği 4.mertebeden kovaryant bir tensör alanı

$$R(V, W, Z, X) := g(R(V, W, Z), X) \quad (6.7)$$

şeklinde de tanımlanır. (6.6) ve (6.7) eşitlikleri kullanılarak θ kovektör alanı ve X vektör alanı arasında ki ilişki ise her $V, W, Z, X \in \Gamma(TM)$ ve her $\theta \in \Gamma(T^*M)$ için,

$$\begin{aligned}
R(V, W, Z, X) &= g(R(V, W, Z), X) \\
&= g(X, R(V, W, Z))
\end{aligned}$$

dir. Burada Teorem 6.5 den,

$$R(V, W, Z, X) = \phi(X)(R(V, W, Z))$$

yazılabilir. Dolayısıyla $\theta = \phi(X)$ alınıp (6.6) kullanıldığında,

$$\begin{aligned} R(V, W, Z, X) &= \theta(R(V, W, Z)) \\ &= R(V, W, Z, \theta) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 6.10. *M n-boyutlu bir Riemann manifold olsun. Her $V, W, Z, X \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.*

1. $R(V, W, Z) = -R(W, V)Z$
2. $g(R(V, W)Z, X) = -g(R(V, W)X, Z)$
3. $R(V, W)Z + R(W, Z)V + R(Z, V)W = 0$ (Birinci Bianchi Özdeşliği)
4. $g(R(V, W)Z, X) = g(R(Z, X)V, W)$

Bu teoremin ispatı için bakınız [6].

Tanım 6.11. *M n- boyutlu bir Riemann manifold olsun. R Riemann eğriliği olmak üzere Ricci eğriliği*

$$Ric = (\mathcal{C}_1^1 R) \tag{6.8}$$

olarak tanımlanır. Demek ki her $V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} Ric(V, W) &= (\mathcal{C}_1^1 R)(V, W) \\ &= \sum_{i=1}^n R(\partial_i, V, W, dx^i) \end{aligned}$$

dir. Bu eşitlikte $V = \partial_v$ ve $W = \partial_\mu$ alınırsa

$$\begin{aligned} Ric_{v\mu} = Ric(\partial_v, \partial_\mu) &= \sum_{i=1}^n R(\partial_i, \partial_v, \partial_\mu, dx^i) \\ &= \sum_{i=1}^n R_{iv\mu}^i \end{aligned}$$

olur.

Teorem 6.12. M n - boyutlu bir Riemann manifold olsun. M ' nin Ricci eğriliği simetriktir yani her $V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(V, W) = Ric(W, V)$$

dir.

Kanıt. Ricci eğriliğinin simetrikliği $\{E_n\}_{1 \leq n \leq n}$ ortonormal vektör alanları (bkz [6]) ve Teorem 6.10 daki eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned} Ric(V, W) &= \sum_{i=1}^n g(R(E_i, V)W, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^n -g(R(E_i, V)E_i, W) \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(V, E_i)E_i, W) \\ &= \sum_{i=1}^n g(R(E_i, W)V, E_i) \\ &= Ric(W, V) \end{aligned}$$

olarak gösterilir. □

Tanım 6.13. M n - boyutlu bir Riemann manifold olsun.

$$S = \mathcal{C}_1^1 \mathcal{C}_1^1 (g^{-1} \otimes Ric) = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} Ric_{ij} \quad (6.9)$$

olarak tanımlanan fonksiyona Skaler eğrilik denir.

6.3. Riemann Manifolddarında Bazı Operatörler

Bu bölümde Riemann manifoldları üzerinde bazı diferansiyel operatörler tanımlanacaktır (bkz. [1], [6], [7]):

Tanım 6.14. M bir Riemann manifold olsun ve bir $f \in C^\infty(M, R)$ fonksiyonu verilsin. Her $V \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla f, V) = df(V) = V(f) \quad (6.10)$$

olarak tanımlanan $\nabla f \in \Gamma(TM)$ vektör alanına f fonksiyonunun gradyanti denir.

g nondejenere olduğundan böyle bir $\nabla f \in \Gamma(TM)$ vektör alanı vardır. Yani Levi-Civita bağlantısının varlığı ve teklüğünde kullandığımız önermede ki ϕ izomorfizması burada da kullanılırsa $\nabla f = \phi^{-1}(df)$ dir. Burada df verilen $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun diferansiyelidir.

Bir (U, ξ) kartı üzerinde bir f fonksiyonunun gradyanti

$$\nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}$$

şeklindedir.

Tanım 6.15. M bir Riemann manifold olsun. Bir $W \in \Gamma(TM)$ vektör alanının diverjansı

$$\operatorname{div} W = \mathcal{C}_1^1(\nabla W) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

olarak tanımlanan fonksiyondur.

Bir $W \in \Gamma(TM)$ vektör alanının diverjansı bir (U, ξ) kartı üzerinde

$$\begin{aligned} \operatorname{div} W &= C(\nabla W) \\ &= \sum_i (\nabla W)_i^i \\ &= \sum_i (\nabla W)(\partial_i, dx^i) \\ &= \sum_i (\nabla_{\partial_i} W)(dx^i) \\ &= \sum_i (\nabla_{\partial_i} W)^i \\ &= \sum_{i,j} \delta_j^i (\nabla_{\partial_i} W)^j \\ &= \sum_{i,j,k} g^{ik} g_{jk} (\nabla_{\partial_i} W)^j \\ &= \sum_{i,j,k} g^{ik} (\nabla_{\partial_i} W)^j g(\partial_j, \partial_k) \\ &= \sum_{i,j,k} g^{ik} g((\nabla_{\partial_i} W)^j \partial_j, \partial_k) \\ &= \sum_{i,k} g^{ik} g(\nabla_{\partial_i} W, \partial_k) \end{aligned} \tag{6.11}$$

şeklinde yazılır. Bununla birlikte bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu ve bir $W \in \Gamma(TM)$ vektör alanı verilsin. Öyleyse

$$\operatorname{div}(fW) = W(f) + f\operatorname{div}W$$

dir.

Tanım 6.16. M bir Riemann manifold olsun. Bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu verilsin. Her $V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$(Hess(f))(V, W) := g(\nabla_V \nabla f, W)$$

biçiminde tanımlanana 2. mertebeden kovaryant $Hess(f)$ tensör alanına $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun Hessiani denir.

Bu tensör alanının simetrik olduğunu gösterelim: Her $V, W \in \Gamma(TM)$ için Tanım 6.16 kullanılarak

$$\begin{aligned} Hess(f)(V, W) &= g(\nabla_V \nabla f, W) \\ &= Vg(\nabla f, W) - g(\nabla f, \nabla_V W) \\ &= Vg(\nabla f, W) - g(\nabla f, \nabla_W V + [V, W]) \\ &= VW(f) - (Wg(\nabla f, V) - g(\nabla_W \nabla f, V)) - [V, W](f) \\ &= VW(f) - WV(f) + g(\nabla_W \nabla f, V) - [V, W](f) \\ &= g(\nabla_W \nabla f, V) \\ &= Hess(f)(W, V) \end{aligned}$$

elde edilir.

Tanım 6.17. M bir Riemann manifold olsun. Bir $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ fonksiyonunun Laplacian'ı

$$\Delta f := \operatorname{div}(\nabla f)$$

olarak tanımlanır.

Bu tanımdan yola çıkılarak f fonksiyonunun Laplacian' ı

$$\begin{aligned}\Delta f = \operatorname{div}(\nabla f) &= \sum_{i,j} g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \nabla f, \partial_j) \\ &= \sum_{i,j} g^{ij} (\operatorname{Hess}(f))(\partial_i, \partial_j) \\ &= \mathcal{C}_1^1 \mathcal{C}_1^1 (g^{-1} \otimes \operatorname{Hess}(f))\end{aligned}$$

olarak bulunur.



7. KİLLİNG VE HARMONİK VEKTÖR ALANLARI

Bu bölümde Killing ve Harmonik vektör alanları tanımlanıp paralellikleri gösterilecektir. Paralellikleri ispatlarken kullanacağımız bazı kavramları tanımlayalım:

Tanım 7.1. M bir Riemann manifold ve $T, K \in \mathcal{T}_{rs}(M)$ olsun. Bir (U, ξ) kartı kullanılarak T ve K tensörlerinin iç çarpımı

$$\begin{aligned} \langle T, K \rangle &= g^{i_1 \mu_1} \dots g^{i_r \mu_r} g_{j_1 v_1} \dots g_{j_s v_s} T_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} K_{\mu_1 \dots \mu_r}^{v_1 \dots v_s} \\ &= \mathcal{C} \mathcal{C} \dots \mathcal{C}(g^{-1} \otimes \dots \otimes g^{-1} \otimes g \otimes \dots \otimes g \otimes T \otimes K) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

Bu tanım kart seçiminden bağımsızdır. Bu tanımdan hareketle, $r = 1$ ve $s = 1$ alınırsa $T, K \in \mathcal{T}_{11}(M)$ tensörlerinin iç çarpımı (U, ξ) kartı kullanılarak

$$\begin{aligned} \langle T, K \rangle &= \sum_{i,j,k,l} g^{ij} g_{lk} T_i^k K_j^l \\ &= \sum_{i,j,k,l} g^{ij} g \left(\sum_k T_i^k \partial_k, \sum_l K_j^l \partial_l \right) \\ &= \sum_{i,j} g^{ij} g(T(\partial_i), K(\partial_j)) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi (2,0)- tipinden simetrik tensör alanlarının g Riemann metrik tensöründen büyük ya da küçük olma durumu tanımlanacaktır:

Tanım 7.2. M bir Riemann manifold olsun ve $T \in \mathcal{T}_{20}(M)$ simetrik tensör alanı verilsin. g Riemann metriği ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere sırasıyla $T \geq \lambda g$ ve $T \leq \lambda g$ eşitsizlikleri geçerlidir ancak ve ancak her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$T(X, X) \geq \lambda g(X, X)$$

$$T(X, X) \leq \lambda g(X, X)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Şimdi Killing ve Harmonik vektör alanlarının tanımları verilecektir.

Tanım 7.3. M bir Riemann manifold ve $Z \in \Gamma(TM)$ bir vektör alanı olsun. Her $V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla_V Z, W) = -g(V, \nabla_W Z) \quad (7.1)$$

eşitliği sağlanıyor ise $Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanına Killing vektör alanı denir.

Sonuç 7.4. Killing vektör alanlarının diverjansı sıfırdır.

Kanıt. Bir (U, ξ) kartı kullanılarak bir Z Killing vektör alanı için

$$g(\nabla_{\partial_i} Z, \partial_j) = -g(\nabla_{\partial_j} Z, \partial_i)$$

yazılır. Öyleyse

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} Z, \partial_j) &= - \sum_{i,j} g^{ij} g(\nabla_{\partial_j} Z, \partial_i) \\ &= - \sum_{i,j} g^{ji} g(\nabla_{\partial_j} Z, \partial_i) \end{aligned}$$

dir. Hem sol hem de sağ tarafda (6.11) eşitliği kullanılırsa

$$\operatorname{div} Z = -\operatorname{div} Z$$

bulunur. Demek ki $\operatorname{div} Z = 0$ olur. □

Tanım 7.5. M bir Riemann manifold ve $X \in \Gamma(TM)$ bir vektör alanı olsun. Her $V, W \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla_V X, W) = g(V, \nabla_W X) \quad (7.2)$$

ve

$$\operatorname{div} X = 0 \quad (7.3)$$

eşitlikleri sağlanıyor ise $X \in \Gamma(TM)$ vektör alanına Harmonik vektör alanı denir.

Şimdi Bochner [1] ve Yano [9] tarafından ispatlanan aşağıdaki teoremleri verelim. Bu doğrultuda [7], [8] ve [10] kaynaklarına da başvurulabilir.

Teorem 7.6. M n - boyutlu kompakt, kenarsız, bağlantılı bir Riemann manifold olsun. Eğer

$$\operatorname{Ric} \leq 0$$

ise tüm Killing vektör alanları paraleldir. Yani tüm $Z \in \Gamma(TM)$ Killing vektör alanları için $\nabla Z = 0$ dır.

Kanıt. İlk olarak $\nabla_Z Z$ ifadesinin diverjansını oluşturalım:

$$\begin{aligned}
div(\nabla_Z Z) &= \sum_{i,j} g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \nabla_Z Z, \partial_j) \\
&= \sum_{i,j} \left(g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \nabla_Z Z, \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_Z \nabla_{\partial_i} Z, \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{[\partial_i, Z]} Z, \partial_j) \right. \\
&\quad \left. + g^{ij} g(\nabla_Z \nabla_{\partial_i} Z, \partial_j) + g^{ij} g(\nabla_{[\partial_i, Z]} Z, \partial_j) \right) \\
&= \sum_{i,j} g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} \nabla_Z Z - \nabla_Z \nabla_{\partial_i} Z - \nabla_{[\partial_i, Z]} Z, \partial_j) \\
&\quad + \sum_{i,j} \left(g^{ij} g(\nabla_Z (\nabla Z)(\partial_i), \partial_j) + g^{ij} g(\nabla_{\nabla_{\partial_i} Z - \nabla_Z \partial_i} Z, \partial_j) \right) \\
&= Ric(Z, Z) + \sum_{i,j} \left(g^{ij} g(\nabla_Z (\nabla Z)(\partial_i), \partial_j) + g^{ij} g(\nabla_{\nabla_{\partial_i} Z} Z, \partial_j) \right. \\
&\quad \left. - g^{ij} g(\nabla_{\nabla_Z \partial_i} Z, \partial_j) \right) \\
&= Ric(Z, Z) + \sum_{i,j} \left(g^{ij} g(\nabla_Z (\nabla Z)(\partial_i), \partial_j) - g^{ij} g(\nabla_{\partial_i} Z, \nabla_{\partial_j} Z) \right. \\
&\quad \left. - g^{ij} g((\nabla Z)(\nabla_Z \partial_i), \partial_j) \right) \\
&= Ric(Z, Z) + \sum_{i,j} \left(g^{ij} g((\nabla_Z \nabla Z)(\partial_i), \partial_j) \right) - \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle \\
&= Ric(Z, Z) + \mathcal{C}_1^1(\nabla_Z \nabla Z) - \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle \\
&= Ric(Z, Z) + \nabla_Z \mathcal{C}_1^1(\nabla Z) - \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle \\
&= Ric(Z, Z) + Z div(Z) - \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle .
\end{aligned}$$

Son eşitlikte $Z \in \Gamma(TM)$ Killing vektör alanının diverjansı sıfır olduğundan

$$div(\nabla_Z Z) = Ric(Z, Z) - \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle$$

yazılır. Teoremden verilen $Ric \leq 0$ varsayımı kullanılıp her iki tarafın M manifoldu üzerinde integrali alınırsa

$$\int_M div(\nabla_Z Z) dvol \leq - \int_M \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle dvol$$

bulunur. Kenarsız ve kompakt manifoldlarda herhangi bir $W \in \Gamma(TM)$ vektör ala-

nının diverjansı ile ilgili olarak

$$\int_M \operatorname{div} W \, d\operatorname{vol} = 0$$

eşitliği geçerlidir (Diverjans Teoremi bkz [7] sayfa 364). Öyleyse yukarıdaki eşitsizlik

$$0 \geq \int_M \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle \, d\operatorname{vol}$$

sonucunu verir. İç çarpımın pozitif tanımlılığı bize $\int_M \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle \, d\operatorname{vol} \geq 0$ olduğunu söyler. Demek ki

$$\int_M \langle \nabla Z, \nabla Z \rangle \, d\operatorname{vol} = 0$$

dir. Bu eşitlikten $\langle \nabla Z, \nabla Z \rangle = 0$ bulunur. Pozitif tanımlılık $\nabla Z = 0$ olmasını gerektirir. Yani Killing vektör alanları paraleldir. $\square$

Teorem 7.7. *M n- boyutlu kompakt, kenarsız, bağlantılı bir Riemann manifold olsun. Eğer*

$$\operatorname{Ric} \geq 0$$

ise tüm Harmonik vektör alanları paraleldir. Yani tüm $X \in \Gamma(TM)$ harmonik vektör alanları için $\nabla X = 0$ dır.

Kanıt. Bu kez $\nabla_X X$ vektör alanının diverjansı oluşturulursa, bir önceki teoremin ispatındaki benzer adımlarla

$$\operatorname{div}(\nabla_X X) = \operatorname{Ric}(X, X) + \langle \nabla X, \nabla X \rangle$$

eşitliğine ulaşılır. İntegrasyon bir önceki teoremden olduğu gibi kullanılırsa, bu teoremin $\operatorname{Ric} \geq 0$ varsayımı bize $\nabla X = 0$ sonucunu verir. Yani harmonik vektör alanları paraleldir. $\square$

8. SONUÇ

Bu çalışmada O'Neill [6]' da verilen notasyon ve terminoloji kullanılarak, Carmo [3] ve Kobayashi, Nomizu [5]' da verilen tanjant vektör kavramı detaylarıyla birlikte tanımlanmıştır. Bu çalışmanın özgün bir tarafı ise Riemann manifoldlarının temel teoreminin; (yani Levi-Civita bağlantısının varlığını ve tekliğini içeren teoremin) ifadesinin, $\phi : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(TM)$ C^∞ - lineer izomorfizması ön planda tutularak yeniden ifade edilmesidir. Bu lineer izomorfizma tüm detayları ile Teorem 6.5 (ve ispatında) da verilmiştir. Bunlara ek olarak bu çalışmada Killing ve Harmonik vektör alanlarının paralellliğini içeren Bochner [1] ve Yano [9] tarafından ispatlanan teoremler yer almaktadır. Killing vektör alanlarının paralellliği, n - boyutlu Riemann manifoldun geometrisi üzerinde Killing vektör alanlarının oluşturduğu vektör uzayının boyutunun en fazla Riemann manifoldunun boyutu kadar olabileceği kısıtını getirir (bkz [7]). Harmonik vektör alanlarının paralellliği n - boyutlu Riemann manifoldun topolojisi ile ilgili olan ve adına 1. Betti sayısı denilen sayıya $b_1 \leq n$ kısıtını getirir (bkz [7]).

KAYNAKÇA

- [1] Bochner, S. (1992). Vector fields and Ricci curvature,. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52, 776-797, 1946.
- [2] Carmo, M.P. (1976). Differential Geometry of Curves and Surfaces, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey*.
- [3] Carmo, M.P. (1992). Riemannian Geometry, *Birkhauser, Boston, Basel, Berlin*.
- [4] Gallot, S., Hulin,D. ve Lafontaine, J. (2004). Riemannian Geometry. *Springer.,Berlin Heidelberg, New York*.
- [5] Kobayashi, S. ve Nomizu, K.(1963). Foundations of Differential Geometry, Volume 1. *A Wiley-Interscience Publication New York*
- [6] O'Neill, B., (1983). Semi-Riemannian geometry . (second edition).*New York: Springer*.
- [7] Petersen, P. (1998). Riemannian geometry. *Springer, New York*.
- [8] Sakai, T. (1996). Riemannian Geometry. *American Mathematical society*.
- [9] Yano, K. (1952). On harmonic and Killing vector fields, *Ann. Math*, 55, 38-45.
- [10] Wu, H.H. (1988). The Bochner technique in Differential Geometry. Mathematical Reports Volume 3, Part 2 *University of California, Berkeley, USA*.

ÖZGEÇMİŞ

ORCID ID : 0000-0001-5807-5214

Adı-Soyadı : Emrah BÖKE

Yabancı Dil : İngilizce

Eğitim ve Mesleki Geçmişi:

- 2016-2020, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- 2020-2023, Eskişehir Teknik Üniversitesi, Lisansüstü Eğitim Enstitüsü, Geometri, Yüksek Lisans