

**RIEMANN MANİFOLDLARINDAN SASAKİAN
MANİFOLDLARINA TANIMLI KONFORMAL YARI-
İNVARYANT RIEMANN DÖNÜŞÜMLER**

SÜMEYYE KARAGÖL

HAZİRAN 2025

DİYARBAKIR

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RIEMANN MANİFOLDLARINDAN SASAKİAN
MANİFOLDLARINA TANIMLI KONFORMAL YARI-
İNVARYANT RIEMANN DÖNÜŞÜMLER**

SÜMEYYE KARAGÖL

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

HAZİRAN 2025

DİYARBAKIR

**RIEMANN MANİFOLDLARINDAN SASAKİAN MANİFOLDLARINA
TANIMLI KONFORMAL YARI-İNVARİYANT RIEMANN
DÖNÜŞÜMLER**

Sümeyye **KARAGÖL** tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan DALKILIÇ
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

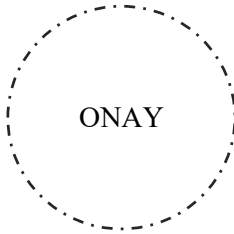
Doç. Dr. Murat POLAT
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Prof. Dr. Yılmaz GÜNDÜZALP (*)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Doç. Dr. Murat POLAT (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Furkan YILDIRIM
Matematik Bölümü, Atatürk Üniversitesi



Savunma Tarihi: 20 / 06 / 2025

(*) Jüri Başkanı.
(**) Tez Danışmanı.

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Sümeyye KARAGÖL

İmza :.....

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışma süresince bilgi, tecrübe ve akademik rehberliğiyle bana yol gösteren, sabırla her aşamada destek olan değerli danışmanım Doç. Dr. Murat POLAT’a en içten teşekkürlerimi sunarım. Kendisinin bilimsel yaklaşımı, yönlendirmeleri ve teşvik edici tutumu, çalışmamın şekillenmesinde büyük rol oynamıştır.

Ayrıca bu süreçte sevgisiyle her daim yanımda olan, anlayışı ve desteğiyle bana güç veren canım eşim Ramazan KARAGÖL’e ve manevi destekleriyle her zaman yanımda hissettiğim aileme teşekkür ederim.

Ve bu çalışmayı hayatımın en anlamlı ilham kaynağı, minik kalbiyle bana sabrı, umudu ve kararlılığı öğreten sevgili oğlum Çınar KARAGÖL’e ithaf ediyorum.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ÖZET	viii
ABSTRACT	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Riemann Manifoldlar	3
2.2 Kompleks Manifoldlar	12
2.3 Riemann Dönüşümler	16
2.4 Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümler.....	20
2.5 Sasakian Manifoldlar	24
3. RIEMANN MANİFOLDLARINDAN SASAKIAN MANİFOLDLARINA TANIMLI KONFORMAL YARI-İNVARYANT RIEMANN DÖNÜŞÜMLER ..	25
4. GELECEKTEKİ ÇALIŞMALAR	41
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ	45

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
S_1, S_2	Diferansiyellenebilir Manifold
g	Metrik Tensör
$T_p S$	Tanjant Uzayı
$\nabla \vartheta_*$	Dönüşümün İkinci Temel Formu
ϑ_*	Türev Dönüşümü
$* \vartheta_*$	Adjoint Dönüşümü
∇ veya $\bar{\nabla}$	Lineer Konneksiyon
$\mathcal{X}(S)$	S Manifoldunun Vektör Alanlarının Uzayı
$\ , \ $	Norm
D	Distribüsyon
$[,]$	Lie Braket Operatörü
Ω	Temel 2-Form
F	Hemen Hemen Kompleks Yapı
$\ker \vartheta_*$ veya V	Dikey Distribüsyon
$\text{range} \vartheta_*$ veya H	Yatay Distribüsyon

ÖZET

RIEMANN MANİFOLDLARINDAN SASAKIAN MANİFOLDLARINA TANIMLI KONFORMAL YARI-İNVARYANT RIEMANN DÖNÜŞÜMLER

KARAGÖL, Sümeyye
Yüksek Lisans, Matematik Bölümü
Danışmanı: Doç. Dr. Murat POLAT
Haziran 2025, 54 sayfa

Dört bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümü olan giriş kısmında Riemann dönüşümleri ve Riemann dönüşümleri üzerine yapılan çalışmalar hakkında detaylı bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde tez çalışmamıza kaynak oluşturacak temel kavramlar başlığı altında Riemann manifoldlar, kompleks manifoldlar, Riemann dönüşümler, yarı-invaryant Riemann dönüşümler ve Sasakian manifoldlar verilmiştir.

Üçüncü bölüm orjinal sonuçlardan oluşmuştur. Bu bölümde daha önce Şahin ve Akyol tarafından [31] hemen hemen Hermityen manifoldlara tanımlı konformal yarı-invaryant Riemann dönüşümler fikri kontakt metrik manifold olan Sasakian manifoldlara genişletilmiştir. Bu bağlamda, Riemann manifoldlarından Sasakian manifoldlara tanımlı konformal yarı-invaryant Riemann dönüşümler incelenmektedir. Ardından, bu tür dönüşümlere basit olmayan bir örnek verilmekte ve $D_1, D_2, \bar{D}_1, \bar{D}_2$ liflerinin geometrisi incelenmektedir. Ayrıca konformal yarı-invaryant Riemann dönüşümlerin tamamen jeodezik olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilmiş ve bu tür dönüşümlerin harmonikliği araştırılmıştır.

Dördüncü bölümde konformal yarı-invaryant Riemann dönüşümler ile ilgili ilerde yapılabilecek araştırma konularına değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Yarı-invaryant Riemann dönüşümler, Konformal yarı-invaryant Riemann dönüşümler, Sasakian manifoldları

ABSTRACT

CONFORMAL SEMI-INVARIANT RIEMANNIAN MAPS TO SASAKIAN MANIFOLDS

KARAGÖL, Sümeyye

Master of Science in Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Murat POLAT

June 2025, 54 pages

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, detailed information is provided about Riemann maps and the studies conducted on these maps.

The second chapter introduces the fundamental concepts that serve as the theoretical foundation of the thesis. In this context, Riemannian manifolds, complex manifolds, Riemann maps, semi-invariant Riemann maps, and Sasakian manifolds are presented.

The third chapter contains the original contributions of the study. In this section, the concept of conformal semi-invariant Riemann maps, previously introduced by Şahin and Akyol [31] for almost Hermitian manifolds, is extended to Sasakian manifolds, which are contact metric manifolds. In this regard, conformal semi-invariant Riemann maps defined from Riemannian manifolds to Sasakian manifolds are examined. A non-trivial example of such maps is given, and the geometry of the distributions $D_1, D_2, \bar{D}_1, \bar{D}_2$ is investigated. Furthermore, necessary and sufficient conditions for these maps to be totally geodesic are obtained, and their harmonicity is analyzed.

In the fourth and final chapter, potential directions for future research related to conformal semi-invariant Riemann maps are discussed.

Keywords: Semi-invariant Riemann maps, Conformal semi-invariant Riemann maps, Sasakian manifolds

1. GİRİŞ

Fischer, Riemann manifoldlar arasında tanımlı iyi bilinen genelleştirilmiş eikonal denklemi $\|\vartheta_*\|^2 = \text{rank}\vartheta$ denklemini sağlayan izometrik immersiyon (daldırma) ve Riemann submersiyonunun bir genellemesi olarak Riemann dönüşümü kavramını tanıtmıştır [16]. Bu denklem, geometrik optik ile fiziksel optik arasında bir köprü işlevi görmektedir. $\vartheta, (S_1, g_{S_1})$ ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifoldları arasında tanımlı ve

$$0 < \text{rank}\vartheta < \min\{\text{boy}(S_1), \text{boy}(S_2)\}$$

koşulunu sağlayan bir dönüşüm olmak üzere $q \in S_1$ noktasında ϑ_{*q} dönüşümünün çekirdek uzayı $V_q = \ker\vartheta_{*q}$ ve $T_q S_1$ teğet uzayı içinde bu çekirdek uzayının ortogonal tamamlayan uzayı

$$(H_q = \ker\vartheta_{*q})^\perp$$

şeklinde ele alınır. Böylece S_1 manifoldunun q noktasındaki teğet uzayı

$$T_q S_1 = (\ker\vartheta_{*q}) \oplus (\ker\vartheta_{*q})^\perp = V_q \oplus H_q$$

eşitliği ile verilir.

Benzer şekilde $\vartheta(q) \in S_2$ noktasındaki ϑ_{*q} nun görüntü uzayı $\text{range}\vartheta_{*q}$ ve $T_{\vartheta(q)} S_2$ teğet uzayı içerisinde bu uzayın ortogonal tamamlayan uzayı $(\text{range}\vartheta_{*q})^\perp$ şeklinde alınır.

$$\text{rank}\vartheta < \min\{\text{boy}(S_1), \text{boy}(S_2)\}$$

şartı altında

$$(\ker\vartheta_{*q})^\perp \neq 0$$

eşitliği sağlanır. Böylece $\vartheta(q) \in S_2$ noktasında S_2 nin $T_{\vartheta(q)} S_2$ tanjant uzayı

$$T_{\vartheta(q)} S_2 = (\text{range}\vartheta_{*q}) \oplus (\text{range}\vartheta_{*q})^\perp$$

şeklinde bir ayrışımına sahip olduğu söylenebilir. Eğer

$$\vartheta_{*q}^h: (\ker\vartheta_{*q})^\perp \rightarrow (\text{range}\vartheta_{*q})$$

yatay kısıtlaması $((\ker\vartheta_{*q})^\perp, g_{S_1}|_{(\ker\vartheta_{*q})^\perp})$ ve $(\text{range}\vartheta_{*q}, g_{S_2}|_{\text{range}\vartheta_{*q}})$ uzayları arasında bir lineer izometri ise ϑ nin $q \in S_1$ noktasında bir Riemann dönüşüm

olduğu söylenebilir. Başka bir deyişle $\vartheta, \Gamma((\ker \vartheta_{*q})^\perp)$ e teğet olan her A_1, A_2 vektör alanı için

$$g_{S_2}(\vartheta_* A_1, \vartheta_* A_2) = g_{S_1}(A_1, A_2) \quad (1.1)$$

eşitliğini sağlar.

Riemann dönüşümlerinin çeşitli özellikleri birçok araştırmacı tarafından kapsamlı bir şekilde incelenmiştir [29, 35, 36, 38, 43–45, 48, 52, 53, 55–57]. Riemann dönüşümler teorisiyle ilgili detaylı gelişmeler [49] kaynağından bulunabilir. Riemann dönüşümlerin bir genellemesi olan konformal Riemann dönüşümler ve bu dönüşümlerin harmonikliği [15], [51] çalışmalarda incelenmiştir. Konformal anti-invariant Riemann dönüşümler [30] da çalışılmıştır.

Bu tezde, yarı-invariant Riemann dönüşümler ve tamamen reel altmanifoldların bir genellemesi olarak, söz konusu kavram hemen hemen kontakt metrik manifoldlara genişletilmektedir. Bu fikir kontakt metrik manifoldlar olan Sasakian manifoldlara genişletilmiş ve Riemann manifoldlarından Sasakian manifoldlara tanımlı konformal yarı –invariant Riemann dönüşümler sunulmaktadır. Öncelikle bu dönüşüme basit olmayan bir örnek verilmekte ve konformal yarı-invariant Riemann dönüşümlerin tamamen jeodezik olması için gerekli ve yeterli şartlar elde edilmektedir. Ayrıca çekirdek uzayı ve onun tamamlayıcı uzayındaki liflerin geometrisi ve bu tür dönüşümlerin harmonikliği araştırılmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde Riemann manifold, kompleks manifold, Riemann dönüşümler ve Sasakian manifoldlar ile ilgili bazı temel kavramlar ve teoremler ayrıntılı bir şekilde ele alınacaktır.

2.1 Riemann Manifolds

Tanım 2.1.1: S_1 bir diferansiyellenebilir manifold ve S_1 manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\mathcal{X}(S_1)$ olmak üzere $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{X}(S_1)$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için,

$$g: \mathcal{X}(S_1) \times \mathcal{X}(S_1) \rightarrow \mathbb{C}^\infty(S_1, \mathbb{R})$$

olmak üzere g dönüşümü

- (i) $g(Z_1, Z_2) = g(Z_2, Z_1)$,
- (ii) $g(Z_1, Z_1) \geq 0$ için $g(Z_1, Z_1) = 0 \leftrightarrow Z_1 = 0$,
- (iii) $g(aZ_1 + bZ_2, Z_3) = ag(Z_1, Z_3) + bg(Z_2, Z_3)$
 $g(Z_1, aZ_2 + bZ_3) = ag(Z_1, Z_2) + bg(Z_1, Z_3)$

şartları sağlıyorsa g dönüşümüne metrik tensör veya Riemann metriği denir. (S_1, g_{S_1}) ikilisine de Riemann manifoldu denir [3].

Tanım 2.1.2: Bir S_1 Riemann manifoldu üzerinde tanımlanan metrik tensör g olmak üzere $V_p \in T_p S_1$ tanjant vektörünün uzunluğu,

$$\|V_p\| = \sqrt{g(V_p, V_p)} \quad (2.1)$$

reel sayısı ile verilir [3].

Tanım 2.1.3: Bir S_1 Riemann manifoldu üzerindeki metrik tensör g olmak üzere sıfır olmayan $U_p, V_p \in T_p S_1$ tanjant vektörleri arasındaki $\sigma \in [0, \pi]$ açısı,

$$\cos \sigma = \frac{g(U_p, V_p)}{\|U_p\| \|V_p\|} \quad (2.2)$$

e hesaplanır [4].

Tanım 2.1.4: $\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$ (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) diferansiyellenebilir manifoldları arasında tanımlanan diferansiyellenebilir bir dönüşüm, $X \in T_p S_1$

vektörü (S_1, g_{S_1}) manifoldundan seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = q$ noktasında teğet ve $\vartheta(q) = \vartheta(\alpha(t_0))$ noktasında $\beta = \vartheta(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde (S_1, g_{S_1}) manifoldundan seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = q$ noktasında teğet olsun. $\vartheta(q) = \vartheta(\alpha(t_0))$ noktasında $\beta = \vartheta(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde $\vartheta_*(X(\alpha(t)))$ vektörüne karşılık getiren dönüşümüne ϑ dönüşümünün türev dönüşümü denir ve $\vartheta_*: T_X S_1 \rightarrow T_{\vartheta(X)} S_2$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.1.5: $(S_1, g_{S_1}), (S_2, g_{S_2})$ Riemann manifoldları ve

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşümü olsun. $\forall q \in S_1$ ve $U_q, V_q \in T_q S_1$ için

$$g_{S_1}(U_q, V_q) = g_{S_2}(\vartheta_*(U_q), \vartheta_*(V_q)) \quad (2.3)$$

eşitliği sağlanıyorsa ϑ dönüşümüne (S_1, g_{S_1}) manifoldundan (S_2, g_{S_2}) manifolduna tanımlı izometri denir [5,6].

Tanım 2.1.6: S_1 manifoldunda tanımlı olan $\mathbb{C}^\infty(S_1, \mathbb{R})$ diferansiyellenebilir kümesinden seçilen bir f fonksiyonu alalım. Z_1 ve Z_2 vektör alanları olmak üzere

$$\begin{aligned} [,]: \mathcal{X}(S_1) \times \mathcal{X}(S_1) &\rightarrow \mathcal{X}(S_1) \\ [Z_1, Z_2]f &= Z_1(Z_2 f) - Z_2(Z_1 f) \end{aligned} \quad (2.4)$$

olarak tanımlanan $[,]$ fonksiyonuna Z_1 ve Z_2 vektör alanlarının Lie braket operatörü veya parantez operatörü denir [1].

$\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{X}(S_1), f, g \in \mathbb{C}^\infty(S_1, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere Lie operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $[Z_1, Z_2] = -[Z_2, Z_1]$
- ii. $[aZ_1 + bZ_2, Z_3] = a[Z_1, Z_3] + b[Z_2, Z_3]$
- iii. $[Z_1, [Z_2, Z_3]] + [Z_2, [Z_3, Z_1]] + [Z_3, [Z_1, Z_2]] = 0$ (Jacobi özdeşliği)
- iv. $[fZ_1, gZ_2] = f[Z_1, Z_2] + f(Z_1 g)Z_2 - g(Z_2 f)Z_1$

Tanım 2.1.7: Diferansiyellenebilir bir S_1 manifoldu üzerinde tanımlanan $\Gamma(TS_1)$ vektör alanlarının kümesi olsun. $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \Gamma(TS_1)$ ve $f \in \mathbb{C}^\infty(S_1, \mathbb{R})$ için

- i. $\bar{\nabla}_{Z_1+Z_2} Z_3 = \bar{\nabla}_{Z_1} Z_3 + \bar{\nabla}_{Z_2} Z_3,$
- ii. $\bar{\nabla}_{Z_1} (Z_2 + Z_3) = \bar{\nabla}_{Z_1} Z_2 + \bar{\nabla}_{Z_1} Z_3,$
- iii. $\bar{\nabla}_{fZ_1} Z_2 = f\bar{\nabla}_{Z_1} Z_2,$
- iv. $\bar{\nabla}_{Z_1} fZ_2 = Z_1[f]Z_2 + f\bar{\nabla}_{Z_1} Z_2$

koşullarını sağlayan $\bar{\nabla}: \Gamma(TS_1) \rightarrow \Gamma(TS_1)$ dönüşümüne S_1 manifoldu üzerinde tanımlanan afin konneksiyon veya lineer konneksiyon denir. Burada $\bar{\nabla}_{Z_1}, Z_1$ vektör alanına göre kovaryant türevidir [7].

Tanım 2.1.8: $\bar{\nabla}$, bir S_1 manifoldu üzerinde tanımlanan afin konneksiyon ve $[,]$ Lie braketi olsun. $Z_1, Z_2 \in \Gamma(TS_1)$ için,

$$\begin{aligned} T: \Gamma(TS_1) \times \Gamma(TS_1) &\rightarrow \Gamma(TS_1) \\ (Z_1, Z_2) &\rightarrow T(Z_1, Z_2) = \bar{\nabla}_{Z_1} Z_2 - \bar{\nabla}_{Z_2} Z_1 - [Z_1, Z_2] \end{aligned} \quad (2.5)$$

ile tanımlanan tensör torsiyon tensörü olarak adlandırılır [1].

Tanım 2.1.9: S_1 bir manifold ve $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma(TS_1)$ için

$$T(Z_1, Z_2) = 0$$

ise $\bar{\nabla}$ konneksiyonuna torsiyonsuz konneksiyon denir [8].

Tanım 2.1.10: S_1 manifoldu üzerinde tanımlanan simetrik ve singüler olmayan bir bilineer form g olmak üzere, eğer $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{X}(S_1)$ için $\bar{\nabla}$ konneksiyonu,

- i. $[Z_1, Z_2] = \bar{\nabla}_{Z_1} Z_2 - \bar{\nabla}_{Z_2} Z_1$
- ii. $Z_1 g(Z_2, Z_3) = g(\bar{\nabla}_{Z_1} Z_2, Z_3) + g(Z_2, \bar{\nabla}_{Z_1} Z_3)$

şartları sağlanırsa bu konneksiyon Levi-Civita konneksiyonu veya Riemann konneksiyonu olarak adlandırılır [9].

Tanım 2.1.11: S_1 manifoldu üzerinde tanımlanan $\bar{\nabla}$ Riemann konneksiyonu, $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \Gamma(TS_1)$ için

$$2(\bar{\nabla}_{Z_1} Z_2, Z_3) = Z_1(g(Z_2, Z_3)) + Z_2(g(Z_3, Z_1)) - Z_3(g(Z_1, Z_2))$$

$$-g(Z_1, [Z_2, Z_3]) + g(Z_2, [Z_3, Z_1]) + g(Z_3, [Z_1, Z_2]) \quad (2.6)$$

Koszul eşitliği ile belirlenir [9].

Teorem 2.1.1: Riemann manifoldu üzerinde bir tek Riemann konneksiyonu (Levi-Civita konneksiyonu) bulunur [10,11].

Tanım 2.1.12: (S_1, g_{S_1}) bir Riemann manifoldu ve $\beta: I \rightarrow S_1$ bu manifold üzerinde tanımlanan bir eğri olsun. $Z \in \Gamma(TS_1)$ vektör alanı için $\dot{\beta} = \beta_* \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)$ olmak üzere $\bar{\nabla}_{\dot{\beta}} Z = 0$ ise Z vektör alanına β eğrisi boyunca paraleldir denir [10].

Tanım 2.1.13: (S_1, g_{S_1}) bir Riemann manifoldu ve $\beta: I \rightarrow S_1$ ye tanımlanan eğrinin teğet vektör alanı β boyunca paralel olursa β eğrisine jeodezik eğri denir [10].

Tanım 2.1.14: S_1^m, S_2^n birer Riemann manifoldu olmak üzere bu manifoldlar arasında tanımlanan bir ϑ , ϑ -dönüşümü için $\text{boy}(\vartheta_*(T_q S_1)) = m$ ise ϑ nin $q \in S_1$ noktasındaki rankı m olur ve $\text{rank}(\vartheta) = m$ ile gösterilir. Eğer $\text{boy}(S_1) = \text{rank}(\vartheta) = m$ ise ϑ dönüşümüne immersiyon veya daldırma denir. Bu durumda S_1 manifoldu S_2 manifoldunun immersed altmanifoldu olarak adlandırılır [12].

Tanım 2.1.15: ϑ immersiyonu birebir olursa ϑ dönüşümüne gömme veya immeding, S_1 manifolduna S_2 manifoldunun gömülen altmanifoldu denir [4], [12].

Tanım 2.1.16: $(S_1, g_{S_1}), (S_2, g_{S_2})$ Riemann manifoldlarının boyutları sırasıyla m ve n olmak üzere $\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$ bir immersiyon olsun. $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma(T_q S_1)$ için

$$g_{S_2}(\vartheta_* Z_1, \vartheta_* Z_2) = g_{S_1}(Z_1, Z_2) \quad (2.7)$$

eşitliği sağlanıyorsa ϑ dönüşümü metriği koruyan immersiyon veya izometrik immersiyon olarak adlandırılır [11].

Tanım 2.1.17: S_1 bir manifold ve z manifold üzerinde bir nokta olsun. Her z noktasına $T_z S_1$ tanjant uzayının bir D_z altuzayını karşılık getiren dönüşüme distribüsyon veya dağılım denir.

$$D: S_1 \rightarrow T_z S_1$$

$$z \rightarrow D_z \subset T_z S_1$$

D_z nin diferansiyellenebilir r boyutlu distribüsyon olması için her z noktasında D_z i geçen r tane diferansiyellenebilir vektör alanının olması gerekir [2,11].

Örnek 2.1.1: Yukarıdaki distribüsyon tanımına göre her vektör alanının 1 – boyutlu bir distribüsyon tanımlayacağı aşikârdır [2].

Tanım 2.1.18: S_1 bir diferansiyellenebilir manifold, D bu manifold üzerinde tanımlı r –boyutlu bir $\mathbb{C}^\infty$ distribüsyon ve S_1 manifoldunun altmanifoldu $\bar{S}_1$ olsun. Eğer $\forall z \in \bar{S}_1$ noktasında $\bar{S}_1$ altmanifoldunun tanjant uzayı ile D_z aynı ise $\bar{S}_1$ manifolduna D nin integral altmanifoldu denir. Yani $\pi: \bar{S}_1 \rightarrow S_1$ dönüşümü bir imbedding olmak üzere $\forall z \in S_1$ için

$$\pi_z(T_z \bar{S}_1) = D_z \quad (2.8)$$

eşitliği geçerli olur. Eğer D nin S_1 manifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa S_1 manifolduna D distribüsyonunun bir maksimal integral manifoldu veya lifi denir [11].

Tanım 2.1.19: S_1 bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold ve S_1 nin altmanifoldu $\bar{S}_1$ olsun. Eğer $\forall z \in \bar{S}_1$ için D distribüsyonunun z noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonuna integrallenebilirdir denir [6].

Örnek 2.1.2: Boyutu 1 olan her distribüsyon (dağılım) integrallenebilirdir [2].

Tanım 2.1.20: $Z_1, Z_2 \in D$ için $[Z_1, Z_2] \in D$ ise D distribüsyonuna involutivedir denir [2].

Teorem 2.1.2: (Frobenius Teoremi) S_1 bir $\mathbb{C}^\infty$ manifold ve D , S_1 manifoldu üzerinde tanımlı p –boyutlu bir distribüsyon olduğu zaman her involutive distribüsyonunun integrallenebilir olduğu söylenebilir. Ayrıca, D distribüsyonun $\forall q \in S_1$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır. q noktasını içine alan diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalin bir açık altmanifoldudur [2].

Tanım 2.1.21: (S_1, g_{S_1}) bir Riemann manifoldu ve bu manifold üzerindeki lineer konneksiyon $\bar{\nabla}$ olsun. $\forall Z_1 \in \Gamma(TS_1), Z_2 \in \Gamma(D)$ için

$$\bar{\nabla}_{Z_1} Z_2 \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonu (S_1, g_{S_1}) manifoldunda paraleldir denir [6].

Tanım 2.1.22: $(S_1^m, g_{S_1^m}), (S_2^n, g_{S_2^n})$ birer Riemann manifoldu ve $n < m$ olmak üzere

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

diferansiyellenebilir örten dönüşümü için

$$\text{rank} \vartheta_{*z} = \text{boy} S_2$$

ise ϑ dönüşümüne $z \in S_1$ de bir submersiyon denir. ϑ dönüşümü bir submersiyon ise ϑ ye S_1 manifoldunda bir submersiyon denir [6,13].

Tanım 2.1.23: $(S_1^m, g_{S_1^m}), (S_2^n, g_{S_2^n})$ birer Riemann manifoldu olmak üzere

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

ile tanımlanan diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $z \in S_1$ için

$$V_z = V_z(\vartheta) = \ker \vartheta_{*z} = \{Z \in T_z S_1 | \vartheta_{*z}(Z) = 0\} \subset T_z S_1$$

ve

$$H_z = V_z^\perp \subset T_z S_1$$

olarak tanımlansın. V_z ile verilen kümeye ϑ dönüşümünün z noktasındaki dikey (vertical) uzayı denir. V_z dikey uzayının dik tümleyen uzayı olan H_z ye ise ϑ dönüşümünün z noktasındaki yatay (horizontal) uzayı denir. S_1 Riemann manifoldunda $z \in S_1$ için

$$T_z S_1 = V_z \oplus H_z = V_z \oplus V_z^\perp \quad (2.9)$$

şeklinde bir ortogonal ayrışımı vardır [5,6].

Tanım 2.1.24: $(S_1^m, g_{S_1^m}), (S_2^n, g_{S_2^n})$ Riemann manifoldları ve

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

olarak tanımlanan bir $\mathbb{C}^\infty$ dönüşüm olsun. $z \in S_1$ noktasına $T_z S_1$ in V_z ve H_z alt uzaylarını karşılık getiren $z \rightarrow V_z$ ve $z \rightarrow H_z$ bu iki dönüşüm, S_1 üzerinde sırasıyla $V = V(\vartheta)$ ve $H = H(\vartheta)$ ile gösterilen $\mathbb{C}^\infty$ distribüsyonlarını karşılık getirir. $V = V(\vartheta)$ cümlesine ϑ dönüşümünün dikey distribüsyonu (dikey alt demeti), $H = H(\vartheta)$ cümlesine ise yatay distribüsyonu (yatay alt demeti) denir [5,6].

Tanım 2.1.25: S_1 manifoldundaki bir U vektör alanı dikey alt demetinde ise U ya dikey vektör alanı denir ve bu vektör alanlarının kümesi $\chi^v(S_1)$ olarak gösterilir [2].

Tanım 2.1.26: S_1 manifoldundaki bir U vektör alanı yatay alt demetinde ise U ya yatay vektör alanı denir. Bu vektör alanlarının kümesi $\chi^h(S_1)$ olarak gösterilir [2].

Bir $W \in \Gamma(TS_1)$ vektör alanının yatay ve dikey kısımları sırasıyla hW ve vW şeklinde bir gösterime sahiptir.

Tanım 2.1.27: $(S_1, g_{S_1}), (S_2, g_{S_2})$ birer Riemann manifoldu olmak üzere

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

submersiyonu için $\forall q \in S_1$ noktasında ϑ_{*q} türev dönüşümü $X, Y \in H_q, q \in S_1$ için

$$g_{S_2 \vartheta(q)} (\vartheta_{*q}(X), \vartheta_{*q}(Y)) = g_{S_1 q}(X, Y) \quad (2.10)$$

eşitliği geçerlidir. Bu eşitliğe göre, yatay vektörlerin uzunluğu korunuyorsa ϑ dönüşümüne bir Riemann submersiyon denir [6,13].

Tanım 2.1.28: $(S_1, g_{S_1}), (S_2, g_{S_2})$ birer Riemann manifoldu ve

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

ile tanımlanan dönüşümü bir Riemann submersiyon olsun. $(1,2)$ – mertebeli T temel tensör alanı, $Z_1, Z_2 \in \Gamma(TS_1)$ için,

$$T_{Z_1} Z_2 = h\nabla_{vZ_1} vZ_2 + v\nabla_{vZ_1} hZ_2 \quad (2.11)$$

eşitliği ile tanımlanır [6,14].

Her $Z_1, Z_2, Z_3 \in \Gamma(TS_1)$ için T temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar.

- i. $g(T_{Z_1}Z_2, Z_3) = -g(T_{Z_1}Z_3, Z_2)$ (T_{Z_1} lineer operatör ve anti-simetriktir.)
- ii. T_{Z_1} dikey ve yatay alt uzayların rollerini değiştirir.
- iii. $T_{Z_1} = T_{vZ_1}$ eşitliği vardır (T dikey tensör alanıdır.)
- iv. $Z_1, Z_2 \in \Gamma(V)$ için $T_{Z_1}Z_2 = T_{Z_2}Z_1$ eşitliği vardır (T dikey tensör alanı simetriktir) [6,14].

Tanım 2.1.29: $(S_1, g_{S_1}), (S_2, g_{S_2})$ birer Riemann manifoldu

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

dönüşümü bir Riemann submersiyonu olarak tanımlansın. (1,2) tipli A temel tensör alanı $Z_1, Z_2 \in \Gamma(TS_1)$ olacak şekilde

$$A_{Z_1}Z_2 = h\nabla_{vZ_1}vZ_2 + v\nabla_{hZ_1}vZ_2 \quad (2.12)$$

ile tanımlanır [6,14].

$Z_1, Z_2, Z_3 \in \Gamma(TS_1)$ için A temel tensör alanının özellikleri aşağıdaki gibi verilebilir.

- i. $g(A_{Z_1}Z_2, Z_3) = -g(T_{Z_1}Z_3, Z_2)$ (A_{Z_1} lineer operatör ve anti simetriktir.)
- ii. A_{Z_1} , dikey ve yatay alt uzayların rollerini değiştirmektedir.
- iii. $A_{Z_1} = A_{hE}$ dir. Yani A yatay tensör alanıdır.
- iv. $Z_1, Z_2 \in \Gamma(H)$ için $A_{Z_1}Z_2 = -A_{Z_2}Z_1$ dir. Yani A yatay tensör alanı alterneleyendir [6,14].

Lemma 2.1.1: (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifoldları arasında tanımlanan

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

dönüşümü Riemann submersiyon ve $X_1, X_2 \in \chi^h(S_1), V_1, V_2 \in \chi^v(S_1)$ için

$$\nabla_{V_1}V_2 = T_{V_1}V_2 + \bar{\nabla}_{V_1}V_2 \quad (2.13)$$

$$\nabla_{V_1}X_1 = h\nabla_{V_1}X_1 + T_{V_1}X_1 \quad (2.14)$$

$$\nabla_{X_1}V_1 = A_{X_1}V_1 + v\nabla_{X_1}V_1 \quad (2.15)$$

$$\nabla_{X_1}X_2 = h\nabla_{X_1}X_2 + A_{X_1}X_2 \quad (2.16)$$

eşitlikleri sağlanır [6,15].

Tanım 2.1.30: (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifoldları arasında tanımlanan

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

dönüşümü Riemann submersiyon olsun. T tensör alanı sıfır olduğunda ϑ dönüşümünün herhangi bir $\vartheta^{-1}(z)$ lifine S_1 manifoldunun tamamen jeodezik alt manifoldu denir [6,15].

Tanım 2.1.31: $\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$ ye tanımlı bir dönüşüm ve (S_2, g_{S_2}) manifoldu üzerindeki konneksiyon ∇^2 olsun. ϑ dönüşümü boyunca (S_2, g_{S_2}) manifoldu üzerindeki $\nabla^{2\vartheta}$ konneksiyonu ϑ boyunca ∇^2 konneksiyonunun bir geri çekme (pullback) konneksiyonudur [28].

Tanım 2.1.32: $\vartheta: (S_1, g_{S_1})$ ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifoldları arasında tanımlanan bir dönüşüm olsun. Bu dönüşüm boyunca ∇^2 nin geri çekme konneksiyonu $\nabla^{2\vartheta}$, her $Z_1, Z_2 \in \Gamma(TS_1)$ için

$$\begin{aligned} \nabla\vartheta_*: \Gamma(TS_1) \times \Gamma(TS_1) &\rightarrow \Gamma_\vartheta(TS_2) \\ (\nabla\vartheta_*)(Z_1, Z_2) &= \nabla_{Z_1}^{2\vartheta}\vartheta_*(Z_2) - \vartheta_*(\nabla_{Z_1}^1 Z_2) \end{aligned} \quad (2.17)$$

biçiminde tanımlanan $\nabla\vartheta_*$ dönüşümü ϑ nin ikinci temel formu olarak adlandırılır [2,28].

Önerme 2.1.1: $(S_1, g_{S_1}), (S_2, g_{S_2})$ birer Riemann manifoldu

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir dönüşüm olsun. $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma(TS_1)$ için

$$(\nabla\vartheta_*)(Z_1, Z_2) = (\nabla\vartheta_*)(Z_2, Z_1)$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik ikinci temel formun simetrik olduğu anlamına gelir [2,16].

Tanım 2.1.33: $\vartheta: (S_1^m, g_{S_1}) \rightarrow (S_2^n, g_{S_2})$ bir dönüşüm ve $(e_1, e_2, \dots, e_m)$, $\Gamma(TS_1)$ için yerel ortonormal çatı olsun. ϑ dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(\vartheta)$, $\nabla\vartheta_*$ ikinci temel formunun izine eşittir. Yani

$$\tau(\vartheta) = \text{iz}(\nabla\vartheta_*) = \sum_{i=1}^m (\nabla\vartheta_*)(e_i, e_i) \quad (2.18)$$

eşitliği vardır. ϑ dönüşümünün tensiyon alanı ϑ boyunca bir vektör alanıdır. $\tau(\vartheta) \in \Gamma_{\vartheta}(TS_2)$ dir [2,16].

Tanım 2.1.34: Eğer $\tau(\vartheta) = 0$ ise

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

dönüşümüne harmonik dönüşüm denir [2,16].

Tanım 2.1.35: $(S_1, g_{S_1}), (S_2, g_{S_2})$ birer Riemann manifoldu

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

olarak verilsin. ϑ dönüşümünün $q \in S_1$ noktasındaki türev dönüşümü ϑ_{*q} olacak şekilde $Z_1 \in T_q S_1$ ve $Z_2 \in T_{\vartheta(q)} S_2$ için

$$g_{S_2}(\vartheta_{*q}(Z_1), Z_2) = g_{S_1}(Z_1, \vartheta^{*q}(Z_2)) \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlı ϑ^{*q} dönüşümüne türev dönüşümünün $q \in S_1$ noktasındaki adjoint dönüşümü adı verilir [2,16].

2.2 Kompleks Manifolddlar

Bu alt bölümde kompleks manifoldlar ve bu manifoldlar üzerinde tanımlanan farklı submersiyon çeşitlerinin tanımları detaylı bir şekilde ele alınacaktır.

Tanım 2.2.1: Hausdorff uzayı olan S_1 üzerinde, her $U_{\alpha} \subset S_1$ için

$$\Psi_{\alpha}: U_{\alpha} \subset S_1 \rightarrow W_{\alpha} \subset \mathbb{C}^n$$

şeklinde bir homeomorfizma tanımlansın. Bu homeomorfizmalar, $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in I}$ ailesiyle bir örtü oluşturur ve $U_{\alpha} \cap U_{\beta} \neq \emptyset$ durumunda,

$$\phi_{\alpha\beta} = \Psi_{\alpha} \circ \Psi_{\beta}^{-1}: \Psi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \Psi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

$$\phi_{\beta\alpha} = \Psi_{\beta} \circ \Psi_{\alpha}^{-1}: \Psi_{\alpha}(U_{\alpha} \cap U_{\beta}) \rightarrow \Psi_{\beta}(U_{\alpha} \cap U_{\beta})$$

dönüşümleri holomorfik olmalıdır. Eğer bu koşullar sağlanıyorsa S_1 bir kompleks manifolddur denir. Ayrıca, $\mathbb{C}^n$ ve $\mathbb{R}^{2n}$ birbiriyle özdeş olduğundan S_1 aynı zamanda $2n$ –boyutlu bir reel analitik manifold olarak kabul edilir. Bu yapıya S_1 in holomorfik koordinat komşuluğu denir [17].

Tanım 2.2.2 : S_1 manifoldu üzerinde tanımlanan reel $2n$ –boyutlu ve $(1,1)$ mertebeli tensör alanı F olacak şekilde $\forall q \in S_1$ için,

$$F_q: T_q S_1 \rightarrow T_q S_1, \quad F_q^2 = -I_{2m}$$

şeklinde tanımlanan bir lineer dönüşüm varsa F ye S_1 manifoldunda tanımlı hemen hemen kompleks yapı adı verilir. Böylece, F kompleks yapısı ile birlikte S_1 manifoldu hemen hemen kompleks manifold olarak adlandırılır [18,19].

Tanım 2.2.3: S_1 , hemen hemen kompleks manifold, $V \subset S_1$ açığı üzerinde $\{x^\beta, y^\beta\}$ koordinat sistemi mevcutsa, F tensör alanı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$F\left(\frac{\partial}{\partial x^\beta}\right) = \frac{\partial}{\partial y^\beta}, F\left(\frac{\partial}{\partial y^\beta}\right) = -\frac{\partial}{\partial x^\beta}$$

Bu durumda S_1 manifolduna bir kompleks manifold denir [18].

Sonuç 2.2.1: S_1 manifoldunun kompleks boyutu n ve reel boyutu $2m$ olmak üzere $n = 2m$ olması durumunda S_1 manifolduna hemen hemen kompleks manifold denir. [20].

Tanım 2.2.4: S_1 , hemen hemen kompleks manifold ve S_1 manifoldunun kompleks yapısı F olsun. S_1 manifoldu üzerinde tanımlanan Riemann metriği g olmak üzere $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}(S_1)$ için,

$$g(Z_1, Z_2) = g(FZ_1, FZ_2) \quad (2.20)$$

eşitliği sağlandığında g bilineer dönüşümüne Hermityen metrik denir [18].

Tanım 2.2.5: S_1 hemen hemen kompleks manifold ve bu manifoldda g Hermityen metriği tanımlı ise S_1 manifoldu hemen hemen Hermityen manifold olarak adlandırılır. Bu durumda S_1 kompleks manifoldu ve S_1 manifoldu üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise S_1 manifolduna Hermityen manifold denir. $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}(S_1)$ için,

$$F^2 = -I_{S_1}, \quad g(Z_1, Z_2) = g(FZ_1, FZ_2) \quad (2.21)$$

eşitlikleri geçerlidir [18].

Tanım 2.2.6: Hemen hemen kompleks manifold olan S_1 üzerinde g Hermityen metrik ve F hemen hemen kompleks yapı olmak üzere $\forall Z_1, Z_2 \in \mathcal{X}(S_1)$ için,

$$\Omega(Z_1, Z_2) = g(Z_1, FZ_2) \quad (2.22)$$

tanımlı Ω tensörü temel 2 –form olarak adlandırılır. Bir S_1 manifoldu g Hermityen metriği ve F kompleks yapısına sahip ise (S_1, g, F) üçlüsü hemen hemen Hermityen manifold olarak adlandırılır [18].

Tanım 2.2.7: Hemen hemen kompleks manifold olan S_1 üzerinde g Hermityen metrik tanımlandığında, S_1 üzerinde tanımlanan Ω temel 2 –formu kapalı ($d\Omega = 0$) olması durumunda g Hermityen metriği Kaehler metrik olarak adlandırılır [18].

Tanım 2.2.8: S_1 bir kompleks manifold ve S_1 manifoldu üzerinde Kaehler metrik g_{S_1} tanımlıysa, (S_1, g_{S_1}, F) yapısı Kaehler manifold olarak adlandırılır [18].

Teorem 2.2.1: Bir (S_1, g_{S_1}, F) hemen hemen Hermityen manifoldu için S_1 manifoldunun Kaehler manifoldu olması için gerekli ve yeterli şart,

$$\nabla F = 0 \quad (2.23)$$

koşulunun sağlanmasıdır [18].

Teorem 2.2.2: (S_1, g_{S_1}, F) bir hemen hemen Hermityen manifoldu ve Kaehler manifoldu olduğunda $\forall Z_1, Z_2 \in TS_1$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır [18].

$$\nabla_{Z_1} FZ_2 = (\nabla_{Z_1} F)Z_2 + F\nabla_{Z_1} Z_2 \xrightarrow{(\nabla_{Z_1} F)Z_2=0} \nabla_{Z_1} FZ_2 = F\nabla_{Z_1} Z_2 \quad (2.24)$$

Tanım 2.2.9: (S_1^m, g_{S_1}, F_1) ve (S_2^m, g_{S_2}, F_2) ($m > n$) olmak üzere, iki hemen hemen Hermityen manifold olsun. Eğer $\vartheta: (S_1^m, g_{S_1}, F_1) \rightarrow (S_2^m, g_{S_2}, F_2)$ bir $\mathbb{C}^\infty$ submersiyon olup aşağıda verilen koşulları sağlıyorsa, ϑ dönüşümü holomorfik submersiyon veya hemen hemen Hermityen submersiyon olarak adlandırılır [18].

- i. ϑ dönüşümü bir Riemann submersiyondur,
- ii. ϑ hemen hemen kompleks dönüşümdür. Bu

$$\vartheta_* F_1 = F_2 \vartheta_* \quad (2.25)$$

eşitliğinin sağlaması anlamına gelir.

Tanım 2.2.10: (S_1, g_{S_1}, F_1) ve (S_2, g_{S_2}, F_2) hemen hemen Hermityen manifoldları verilsin.

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F_1) \rightarrow (S_2, g_{S_2}, F_2)$$

Riemann dönüşümü verildiğinde

$$\vartheta_* F_1 = F_2 \vartheta_* \quad (2.26)$$

ise $q \in S_1$ noktasında ϑ dönüşümü holomorfik Riemann submersiyon olarak adlandırılır [21].

Tanım 2.2.11: (S_1, g_{S_1}, F_1) bir hemen hemen Hermityen manifoldu ve (S_2, g_{S_2}) bir Riemann manifoldu olsun.

$$\vartheta: (S_1^m, g_{S_1}, F_1) \rightarrow (S_2^n, g_{S_2})$$

$n < m$ koşulunu sağlayan bir Riemann submersiyonu verilsin. Eğer F_1 yapısına göre dikey distribüsyon invaryant ise ϑ dönüşümüne invaryant Riemann submersiyonu denir. Yani,

$$F_1(ker \vartheta_*) = ker \vartheta_* \quad (2.27)$$

şartı sağlanır [22].

Tanım 2.2.12: (S_1, g_{S_1}, F_1) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifoldu olmak üzere,

$$\vartheta: (S_1^m, g_{S_1}, F_1) \rightarrow (S_2^n, g_{S_2})$$

$n < m$ koşulunu sağlayan bir Riemann submersiyonu verilsin. Eğer $ker \vartheta_*$, F_1 yapısına göre anti-invaryant bir yapıya sahipse, o zaman ϑ dönüşümüne anti-invaryant Riemann submersiyon denir. Yani,

$$F_1(ker \vartheta_*) \subseteq (ker \vartheta_*)^\perp \quad (2.28)$$

şartı sağlanır [23].

Tanım 2.2.13: (S_1, g_{S_1}, F_1) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifoldu olmak üzere,

$$\vartheta: (S_1^m, g_{S_1}, F_1) \rightarrow (S_2^n, g_{S_2})$$

$n < m$ koşulunu sağlayan bir Riemann submersiyonu verilsin.

$$D_1 \subseteq \ker \vartheta_*$$

distribüsyonuna sahip olup,

$$\ker \vartheta_* = D_1 \oplus D_2$$

ve

$$\begin{aligned} F_1(D_1) &= D_1, \\ F_1(D_2) &\subseteq (\ker \vartheta_*)^\perp \end{aligned} \quad (2.29)$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, o zaman ϑ dönüşümüne yarı-invaryant Riemann submersiyon denir. Burada D_2 , $\ker \vartheta_*$ da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır [24].

Tanım 2.2.14: (S_1, g_{S_1}, F_1) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifoldu olmak üzere,

$$\vartheta: (S_1^m, g_{S_1}, F_1) \rightarrow (S_2^n, g_{S_2})$$

$n < m$ koşulunu sağlayan bir Riemann submersiyonu verilsin. Eğer $q \in S_1$ noktasında sıfırdan farklı $Z \in \ker \vartheta_{*q}$ vektörü için $\ker \vartheta_{*q}$ ile $F_1 Z$ arasındaki açı $\theta(Z)$ sabit kalıyorsa ve bu sabitlik $q \in S_1$ ve $\ker \vartheta_{*q}$ deki Z tanjant vektörlerinin seçiminden bağımsızsa o zaman ϑ dönüşümüne slant submersiyon denir. Bu durumda θ açısına slant (eğik) açısı denir [25].

2.3 Riemann Dönüşümler

Bu alt bölümde, Riemann submersiyonlarına ait O'Neill formülleri ile izometrik immersiyonların Gauss-Weingarten formüllerine benzer yapılarının, Riemann dönüşümleri bağlamında nasıl uygulanabileceği incelenecek ve bu dönüşümler için temel formüller türetilacaktır. Ayrıca Riemann dönüşümlerinin tensör alanı ile ikinci temel form arasındaki ilişki kullanılarak önemli ve faydalı sonuçlar elde edilecektir. İlk olarak, Riemann dönüşümünün tanımı yapılacaktır.

Tanım 2.3.1: (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) farklı Riemann manifoldları olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

diferansiyellenebilir dönüşümü tanımlansın. Herhangi bir $q \in S_1$ noktasında ϑ_* dönüşümünün çekirdek uzayı $\ker \vartheta_{*q}$ ve bu çekirdeğin ortogonal tümleyen uzayını $H_q = (\ker \vartheta_{*q})^\perp$ ile gösterelim. (S_1, g_{S_1}) manifoldunun tanjant uzayı, $q \in S_1$ noktasında

$$T_q S_1 = \ker \vartheta_{*q} \oplus (\ker \vartheta_{*q})^\perp \quad (2.30)$$

şeklinde ayrıştırılabilir. Benzer şekilde, $q \in S_1$ noktasında ϑ_* dönüşümünün görüntüsü $\text{range } \vartheta_{*q}$ ve bu görüntünün ortogonal tamamlayıcısı $(\text{range } \vartheta_{*q})^\perp$ olarak tanımlanır. Böylece (S_2, g_{S_2}) manifoldu üzerindeki karşılık gelen tanjant uzayı $T_{\vartheta(q)} S_2$ nin ayrışımı

$$T_{\vartheta(q)} S_2 = \text{range } \vartheta_{*q} \oplus (\text{range } \vartheta_{*q})^\perp \quad (2.31)$$

olarak verilir. $q_1 \in S_1$ noktasında $q_2 = \vartheta(q_1)$ olmak üzere

$$\left((\ker \vartheta_{*q_1})^\perp, g_{S_1}(q_1) \right) |_{(\ker \vartheta_{*q_1})^\perp}$$

ve

$$\left((\text{range } \vartheta_{*q_1}), g_{S_2}(q_2) \right) |_{\text{range } \vartheta_{*q_1}}$$

şeklinde yazılabilir.

İç çarpım uzayları arasında

$$\vartheta_{*q_1}^h: (\ker \vartheta_{*q_1})^\perp \rightarrow (\text{range } \vartheta_{*q_1}) \quad (2.32)$$

ile tanımlanan dönüşüm bir lineer izometri ise

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

diferansiyellenebilir dönüşümüne $q_1 \in S_1$ noktasındaki Riemann dönüşümü denir [16].

Lemma 2.3.1: (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) iki farklı Riemann manifoldu olsun. Bu manifoldlar arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

diferansiyellenebilir dönüşümü tanımlansın. $\forall Z_1, Z_2, Z_3 \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ vektör alanları için

$$g_{S_2} \left((\nabla \vartheta_*)(Z_1, Z_2), \vartheta_*(Z_3) \right) = 0 \quad (2.33)$$

eşitliği sağlanır [2].

Tanım 2.3.2 : (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) sırasıyla r_1 ve r_2 boyutlu Riemann manifoldları olsun. (S_1, g_{S_1}) manifoldu (S_2, g_{S_2}) manifoldunun bir alt manifoldu olarak kabul edilsin. $\bar{\nabla}$ ve ∇ sırasıyla (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları olmak üzere $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma(TS_1)$ vektör alanı için

$$\begin{aligned} h: \mathcal{X}(S_1) \times \mathcal{X}(S_1) &\rightarrow \mathcal{X}^\perp(S_1) \\ \bar{\nabla}_{Z_1} Z_2 &= \nabla_{Z_1} Z_2 + h(Z_1, Z_2) \end{aligned} \quad (2.34)$$

denklemini Gauss denklemi olarak adlandırılır. Burada $\nabla_{Z_1} Z_2$ ve $h(Z_1, Z_2)$ sırasıyla $\bar{\nabla}_{Z_1} Z_2$ nin teğet ve normal bileşenleri, h ise (S_1, g_{S_1}) manifoldunun ikinci temel formudur [11].

Tanım 2.3.3: (2.34) denkleminde eğer $h = 0$ ise (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldu tamamen jeodezik altmanifold olarak adlandırılır [11].

Tanım 2.3.4: (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) sırasıyla r_1 ve r_2 boyutlu Riemann manifoldları olsun. S_1, S_2 manifoldunun bir alt manifoldu olmak üzere

$$\begin{aligned} A: \mathcal{X}^\perp(S_1) \times \mathcal{X}(S_1) &\rightarrow \mathcal{X}(S_1) \\ \bar{\nabla}_{Z_1} V &= -A_V Z_1 + \nabla_{Z_1}^\perp V \end{aligned} \quad (2.35)$$

şeklinde tanımlanan eşitlik Weingarten denklemi olarak adlandırılır. Burada (S_1, g_{S_1}) in normal birim vektör alanı V , $-A_V Z_1$ ve $\nabla_{Z_1}^\perp V$ sırasıyla $\bar{\nabla}_{Z_1} V$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Ayrıca A_V, V ye bağlı şekil operatörünü, $\nabla^\perp$ ise (S_1, g_{S_1}) in normal demetindeki $T^\perp S_1$ normal konneksiyonudur [11].

İkinci temel form ve şekil operatörü arasında

$$g(h(Z_1, Z_2), V) = g(Z_2, A_V Z_1) \quad (2.36)$$

eşitliği geçerlidir. Altmanifoldlardaki Weingarten denklemi Riemann dönüşümleriyle ilişkilendirildiğinde aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\nabla_{\vartheta_* Z_1}^2 V = -S_V \vartheta_* Z_1 + \nabla_{Z_1}^{\vartheta^\perp} V \quad (2.37)$$

Bu denklemde $S_V \vartheta_* Z_1$, V üzerinde bilineerdir ve $\nabla_{\vartheta_* Z_1}^2 V$ nin ϑ vektör alanı boyunca teğet bileşenidir. $Z_1, Z_2 \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma((\text{range} \vartheta_*)^\perp)$ olarak alınırsa

$$(\nabla \vartheta_*)(Z_1, Z_2) = \nabla_{\vartheta_* Z_1}^2 \vartheta_*(Z_2) - \vartheta_*(\nabla_{Z_1}^{S_1} Z_2)$$

eşitliği sağlanır. Burada $\vartheta_*(Z_2) \in (\text{range} \vartheta_*)$ olduğu için

$$g_{S_2}((\nabla \vartheta_*)(Z_1, Z_2), V) = g_{S_2}(\vartheta_*(Z_2), S_V \vartheta_* Z_1) \quad (2.38)$$

şeklinde yazılabilir. Bu eşitlik Riemann dönüşümleri için dönüşümün ikinci temel formu ile şekil operatörü arasındaki ilişkiyi ifade eder. Ayrıca $(\nabla \vartheta_*)$ simetrik bir operatör olduğundan S_V de $(\text{range} \vartheta_*)$ uzayında simetrik bir lineer dönüşümdür [2].

Tanım 2.3.5: (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) farklı Riemann manifoldları olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

diferansiyellenebilir dönüşümü tanımlansın. Eğer $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma(TS_1)$ için $(\nabla \vartheta_*)(Z_1, Z_2) = 0$ koşulunu sağlıyorsa ϑ dönüşümü tamamen jeodezik dönüşüm olarak adlandırılır [2].

Teorem 2.3.1: (S_1, g_{S_1}) ve (S_2, g_{S_2}) farklı Riemann manifoldları olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

diferansiyellenebilir dönüşümü tanımlansın.

Bu dönüşümün tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şartlar:

- a. $A_{Z_1} Z_2 = 0$ olmalıdır.
- b. $S_V \vartheta_*(Z_1) = 0$ koşulu sağlanmalıdır.
- c. Eğer $Z_1, Z_2 \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma((\text{range} \vartheta_*)^\perp)$ ise lifler tamamen jeodeziktir [2].

2.4 Yarı-Invaryant Riemann Dönüşümler

Tanım 2.4.1: (S_1, g_{S_1}, F) hemen hemen Hermityen manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifold olarak verilsin.

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

biçiminde tanımlanan ϑ bir Riemann dönüşümü olmak üzere $D_1 \subseteq \ker \vartheta_*$ distribüsyonu elde edilir ve $FD_1 = D_1$ eşitliği sağlanır.

Ayrıca $D_2, \ker \vartheta_*$ da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır ve

$$F(D_2) \subseteq (\ker \vartheta_*)^\perp$$

şartı sağlanmaktadır. Bu şartların sağlandığı durumlarda ϑ dönüşümü yarı-invaryant Riemann dönüşümü olarak adlandırılır [24]. Burada $\ker \vartheta_* = D_1 \oplus D_2$ olarak ifade edilir. $\mu, (\ker \vartheta_*)^\perp$ de $F(D_2)$ distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır. Ayrıca F e göre invaryanttır. Ek olarak, $V \in \Gamma((\text{range} \vartheta_*)^\perp)$ için

$$FV = BV + CV$$

eşitliği geçerlidir. Burada $BV \in \Gamma(D_1)$ ve $CV \in \Gamma(\eta)$ olup $\eta, (\text{range} \vartheta_*)^\perp$ de D_2 için tamamlayıcı ortogonal distribüsyondur.

Bu bölümde yatay distribüsyonunun integrallenebilirliğini ve yatay ile dikey distribüsyonlarının liflerinin ait geometrik özellikleri inceleyeceğiz.

Teorem 2.4.1: (S_1, g_{S_1}, F) hemen hemen Hermityen manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifold olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü tanımlansın. Yatay distribüsyonun integrallenebilir olması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ ve $\forall U \in \Gamma(\ker \vartheta_*)$ için

$$\begin{aligned} &g_{S_1}(BZ_2, A_{Z_1}wU) - g_{S_1}(BZ_1, A_{Z_2}wU) = \\ &g_{S_1}(\nabla_{Z_1}BZ_2 - \nabla_{Z_2}BZ_1, \phi U) + g_{S_2}\left((\nabla \vartheta_*)(Z_1, \phi U) - \nabla_{Z_1}^\vartheta \vartheta_*(wU), \vartheta_*(CZ_2)\right) \\ &- g_{S_2}\left((\nabla \vartheta_*)(Z_2, \phi U) - \nabla_{Z_2}^\vartheta \vartheta_*(wU), \vartheta_*(CZ_1)\right) \end{aligned} \quad (2.39)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [24].

Teorem 2.4.2: (S_1, g_{S_1}, F) Kaehler manifoldu ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifoldu olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü tanımlansın. Yatay distribüsyonun paralellik koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ ve $\forall U \in \Gamma(\ker \vartheta_*)$ için

$$\begin{aligned} & g_{S_2}(\nabla_{Z_1}^\vartheta \vartheta_*(CZ_2), \vartheta_*(wU)) \\ &= g_{S_1}(A_{Z_1} \phi U, CZ_2) + g_{S_1}(A_{Z_1} BZ_2, wU) - g_{S_1}(\nabla_{Z_1} BZ_2, \phi U) \end{aligned} \quad (2.40)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [24].

Teorem 2.4.3: (S_1, g_{S_1}, F) Kaehler manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifold olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü tanımlansın. Dikey distribüsyonunun paralellik koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul, $\forall U, V \in \Gamma(\ker \vartheta_*)$ ve $\forall Z \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} & g_{S_2}((\nabla \vartheta_*)(U, wV), \vartheta_*(CZ)) \\ &= g_{S_1}(\bar{\nabla}_U \phi V, BZ) + g_{S_1}(T_U \Phi V, CZ) - g_{S_1}(wV, T_U BZ) \end{aligned} \quad (2.41)$$

eşitliğin sağlanmasıdır [24].

Teorem 2.4.4: (S_1, g_{S_1}, F) Kaehler manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifold olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü tanımlansın. S manifoldunun yerel çarpım manifoldu olabilmesi için gerekli ve yeterli şartlar aşağıdaki iki eşitlik ile ifade edilmektedir [24].

$\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ ve $\forall U_1, U_2 \in \Gamma(\ker \vartheta_*)$ için

$$\begin{aligned} & g_{S_2}(\nabla_{Z_1}^\vartheta \vartheta_*(CZ_2), \vartheta_*(wU_1)) \\ \text{i.} \quad &= -g_{S_1}(\nabla_{Z_1} BZ_2, \phi U_1) - g_{S_1}(A_{Z_1} BZ_2, wU_1) + g_{S_1}(A_{Z_1} \phi U_1, CZ_2) \end{aligned} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} & g_{S_2}((\nabla \vartheta_*)(U, wU_2), \vartheta_*(CZ_1)) \\ \text{ii.} \quad & = g_{S_1}(\widehat{\nabla}_{U_1} \phi U_2, BZ_1) + g_{S_1}(T_{U_1} \phi U_2, CZ_1) - g_{S_1}(wU_2, T_{U_1} BZ_1) \end{aligned} \quad (2.43)$$

(S_1, g_{S_1}, F) bir hemen hemen Hermityen manifold ve (S_2, g_{S_2}) bir Riemann manifold için

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

dönüşümü bir Riemann dönüşümü olarak kabul edilsin. Ayrıca

$$(\ker \vartheta_*)^\perp = F(D_2) \oplus \mu$$

olduğu belirtilmiştir. Bu durumda $Z_1 \in \Gamma(D_2)$ ve $Z_2 \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik elde edilir.

$$g_{S_2}(\vartheta_*(F Z_1), \vartheta_*(Z_2)) = g_{S_1}(F Z_1, Z_2) = 0 \quad (2.44)$$

Bu eşitlik $\vartheta_*(FD_2)$ ve $\vartheta_*(\mu)$ distribüsyonlarının ortogonal olduğunu göstermektedir. Eğer $\bar{D}_2 = \vartheta_*(FD_2)$ ve $\bar{\mu} = \vartheta_*(\mu)$ olarak tanımlanırsa o zaman

$$(\text{range} \vartheta_*) = \bar{D}_2 \oplus \bar{\mu}$$

şeklinde ifade edilir [24].

Teorem 2.4.5: (S_1, g_{S_1}, F) Kaehler manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifold olmak üzere

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü tanımlansın. D_1 distribüsyonunun S_1 manifoldu üzerinde paralellik koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul $\forall Z_1, Z_2 \in \Gamma(D_1), \forall Z_3 \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall Z \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ için

$$(\nabla \vartheta_*)(Z_1, FZ_2) \in \Gamma(\bar{\mu}) \quad (2.45)$$

ve

$$g_{S_1}(\widehat{\nabla}_{Z_1} FZ_2, BZ) = g_{S_2}((\nabla \vartheta_*)(Z_1, FZ_2), \vartheta_*(CZ)) \quad (2.46)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır [24].

Teorem 2.4.6: (S_1, g_{S_1}, F) Kaehler manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifold olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü tanımlansın. D_2 distribüsyonunun S manifoldu üzerinde paralellik koşulunu sağlaması için gerekli ve yeterli koşul $\forall Z_1 \in \Gamma(D_1), \forall Z_2, Z_3 \in \Gamma(D_2)$ ve $\forall Z \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp)$ için

$$(\nabla \vartheta_*)(Z_2, FZ_3) \in \Gamma(\bar{\mu}) \quad (2.47)$$

ve

$$g_{S_1}(T_{Z_2}BZ, FZ_4) = -g_{S_2}((\nabla \vartheta_*)(Z_2, FZ_4), \vartheta_*(CZ)) \quad (2.48)$$

eşitliğidir [24].

Sonuç 2.4.1: (S_1, g_{S_1}, F) Kaehler manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifold olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü tanımlansın. Liflerin Riemann manifoldunun yerel çarpım manifoldu olabilmesi için gerekli ve yeterli şart $U \in \Gamma(\ker \vartheta_*)$ ve $Z_1 \in \Gamma(D_1)$ için

$$(\nabla \vartheta_*)(U, FZ_1) \in \Gamma(\mu) \quad (2.49)$$

olmasıdır.

Teorem 2.4.7: (S_1, g_{S_1}, F) Kaehler manifold ve (S_2, g_{S_2}) Riemann manifold olmak üzere bu iki manifold arasında

$$\vartheta: (S_1, g_{S_1}, F) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$$

bir yarı-invaryant Riemann dönüşümü tanımlansın. Bu dönüşümün tamamen jeodezik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul $\forall Z, Z_1, Z_2 \in \Gamma((\ker \vartheta_*)^\perp), \forall X, Y \in \Gamma(\ker \vartheta_*), \forall U \in \Gamma(D_2), \forall Z_3 \in \Gamma(\mu)$ ve $\forall V \in \Gamma((\text{range} \vartheta_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} & g_{S_1}(\hat{\nabla}_X BZ_1, BZ_2) \\ &= g_{S_1}(X, A_{CZ_1} CZ_2) - g_{S_1}(T_X BZ_1, CZ_2) - g_{S_1}(T_X CZ_1, BZ_2), \end{aligned} \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} & g_{S_1}(\hat{\nabla}_X BZ, \phi Y) \\ &= -\{g_{S_1}(\phi Y, T_X CZ) + g_{S_1}(wY, T_X BZ) + g_{S_1}(A_{wY} CZ, X)\} \end{aligned} \quad (2.51)$$

ve

$$* \vartheta_*(S_V \vartheta_*(FU)) = 0, * \vartheta_*(S_V \vartheta_*(Z_3)) \in \Gamma(F(D_2)) \quad (2.52)$$

eşitlikleri ile sağlanır [24].

2.5 Sasakian Manifoldlar

Tanım 2.5.1: S diferansiyellenebilir $(2n + 1) -$ boyutlu manifold olup (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü, S manifoldunun sahip olduğu kontakt metrik yapıyı tanımlasın. Eğer S manifoldunun kontakt metrik yapısı normal ise o zaman (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsüne Sasakian manifold denir [26].

Teorem 2.5.1: $(2n + 1) -$ boyutlu hemen hemen kontakt metrik yapıyla birlikte verilmiş S manifoldunda (ϕ, ξ, η, g) dörtlüsü bir Sasakian yapısıdır. $\Leftrightarrow$

$$(\hat{\nabla}_{Z_1}\phi)Z_2 = g(Z_1, Z_2)\xi - \eta(Z_2)Z_1 \quad (2.53)$$

Burada

$$(\hat{\nabla}_{Z_1}\phi)Z_2 = \hat{\nabla}_{Z_1}\phi Z_2 - \phi\hat{\nabla}_{Z_1}Z_2 \quad (2.54)$$

dır [26].

Önerme 2.5.1: S bir sasakian manifold ve $\hat{R}$ da Riemann eğrilik tensörü olsun. O halde,

$$\hat{R}(Z_1, Z_2)\xi = \eta(Z_2)Z_1 - \eta(Z_1)Z_2 \quad (2.55)$$

eşitliği yazılabilir [27].

Lemma 2.5.1: Bir Sasakian manifoldunda, X birim vektör alanı olup ξ ye ortogonal olduğunda

$$\hat{R}(Z_1, \xi)Z_1 = -\xi$$

eşitliği yazılabilir [27].

Teorem 2.5.2: S diferansiyellenebilir Riemann manifold $(2n + 1) -$ boyutlu manifoldunda bir ξ Killing birim vektör alanı mevcutsa o zaman S bir Sasakian manifolddudur ve

$$\hat{R}(Z_1, \xi)Z_2 = -g(Z_1, Z_2)\xi + \eta(Z_2)Z_1 \quad (2.56)$$

eşitliği geçerlidir [18].

3. RIEMANN MANİFOLDLARINDAN SASAKIAN MANİFOLDLARINA TANIMLI KONFORMAL YARI-INVARYANT RIEMANN DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde, Riemann manifoldlarından Sasakian manifoldlarına tanımlı konformal yarı-invaryant Riemann dönüşümleri incelenecektir. Bu dönüşümlere bir örnek verilerek Sasakian manifoldları üzerindeki lifler ile söz konusu dönüşümün jeodezikliği ve harmonikliği araştırılacaktır.

S_1 düzgün bir manifold ve bu manifold üzerinde, $(1,1)$ – tipli bir F tensör alanı, ξ bir vektör alanı ve η 1 –form olmak üzere

$$F^2 E_1 = -E_1 + \eta(E_1), F\xi = 0, \eta \circ F = 0, \eta(\xi) = 1 \quad (3.1)$$

yapısı varsa S_1 manifoldu bir hemen hemen kontakt yapıya sahiptir denir [49].

Eğer S_1 hemen hemen kontakt manifoldu üzerinde bir g_{S_1} Riemann metriği varsa

$$g_{S_1}(FE_1, FE_2) = g_{S_1}(E_1, E_2) - \eta(E_1)\eta(E_2), \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} g_{S_1}(E_1, FE_2) &= -g_{S_1}(FE_1, E_2), \\ \eta(E_1) &= g_{S_1}(E_1, \xi), \end{aligned} \quad (3.3)$$

eşitlikleri geçerlidir. Bu durumda S_1 manifolduna (F, ξ, η, g_{S_1}) hemen hemen kontak yapısına sahip hemen hemen kontak metrik manifold denir ve $(S_1, F, \xi, \eta, g_{S_1})$ ile karakterize edilir.

(F, ξ, η, g_{S_1}) yapısına sahip bir S_1 manifoldu $\forall E_1, E_2 \in S_1$ vektör alanları için

$$(\nabla_{E_1}^{S_1} F)E_2 = g_{S_1}(E_1, E_2)\xi - \eta(E_2)E_1 \quad (3.4)$$

ile verilirse bu yapıya Sasakian yapı denir. Burada ∇, S_1 üzerindeki g_{S_1} metriğinin Riemann konneksiyonudur. Bir Sasakian manifoldunda

$$\nabla_{E_1}^{S_1} \xi = -FE_1 \quad (3.5)$$

eşitliği geçerlidir [32].

$\vartheta_*, \text{hom}(TS_1, \vartheta^{-1}TS_2) \rightarrow S_1$ demetinin bir parçası olarak düşünülebilir. Burada, $\vartheta^{-1}TS_2$ pullback demet olarak adlandırılır. Bu demet $\nabla^{S_2\vartheta}$ pullback konneksiyonu ve

∇^{S_1} Levi-Civita konneksiyonundan indirgenmiş bir ∇ konneksiyonuna sahiptir. O zaman ϑ nin $(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)$ ikinci temel formu

$$(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2) = \nabla_{A_1}^{S_2 \vartheta} \vartheta_* A_2 - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) \quad (3.6)$$

eşitliği ile verilir [42]. Burada $A_1, A_2 \in \Gamma(TS_1)$ ve $\nabla_{A_1}^{S_2 \vartheta} \vartheta_* A_2 \circ \vartheta = \nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2 \vartheta} \vartheta_* A_2$ olarak alınır. $\forall A_1, A_2 \in \Gamma(\ker \vartheta_*)^\perp$ için $(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)$ nin simetrik olduğu ve $range \vartheta_*$ de bileşeninin olmadığı biliniyor [49]. Bunun anlamı $(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2) \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp$ olmasıdır.

ϑ nin tensiyon alanı, ϑ nin ikinci temel formunun izi olarak tanımlıdır. Yani

$$\tau(\vartheta) = trace(\nabla \vartheta_*) = \sum_{i=1}^m (\nabla \vartheta_*)(e_i, e_i)$$

dir. Burada, $m = boy S_1$ ve $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, S_1 üzerindeki ortonormal çatıdır. $\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$ dönüşümü harmoniktir ancak ve ancak ϑ nin tensiyon alanının noktasından kaybolmasıdır.

Her $(range \vartheta_*)^\perp$ in B_1 kısmı S_1 deki A_1 vektör alanı için $(range \vartheta_*)^\perp$ üzerinde $\nabla_{A_1}^{S_2} B_1$ in ortogonal projeksiyonu olan $\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} B_1$ ifadesi elde edilir. Burada $\nabla^{\vartheta^\perp}$, $(range \vartheta_*)^\perp$ üzerindeki lineer konneksiyondur öyle ki $\nabla^{\vartheta^\perp} g_{S_2} = 0$ dır. Bir ϑ Riemann dönüşümü için S_{B_1} ,

$$\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} B_1 = -S_{B_1} \vartheta_* A_1 + \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} B_1 \quad (3.7)$$

olarak tanımlıdır [49]. Burada $S_{B_1} \vartheta_* A_1$, $\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} B_1$ in teğet bileşeni ve ∇^{S_2} de S_2 üzerindeki Levi-Civita konneksiyonudur. Böylece, $q \in S_1$ noktasında $\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} B_1(q) \in T_{\vartheta(q)} S_2$, $S_{B_1} \vartheta_* A_1 \in \vartheta_{*q}(T_q S_1)$ ve $\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} B_1 \in (\vartheta_{*q}(T_q S_1))^\perp$ olur. $S_{B_1} \vartheta_* A_1, B_1$ de bilineer ve q noktasında ϑA_1 sadece B_{1q} ve $\vartheta_{*q} A_{1q}$ ya bağlı olduğu biliniyor. Buradan (3.6) ve (3.7) ifadeleri kullanılırsa

$$g_{S_2}(S_{B_1} \vartheta_* A_1, \vartheta_* A_2) = g_{S_2}(B_1, (\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)) \quad (3.8)$$

elde edilir. Burada, $S_{B_1}; A_1, A_2 \in \Gamma(\ker \vartheta_*)^\perp$ ve $B_1 \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp$ için self adjoint operatördür. Her $B_1, B_2 \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp$ için

$$\nabla_{B_1}^{S_2} B_2 = R(\nabla_{B_1}^{S_2} B_2) + \nabla_{B_1}^{\vartheta^\perp} B_2$$

olarak tanımlanabilir. Burada $R(\nabla_{B_1}^{S_2} B_2)$ ve $\nabla_{B_1}^{\vartheta^\perp} B_2$ sırasıyla $\nabla_{B_1}^{S_2} B_2$ nin $range \vartheta_*$ ve $(range \vartheta_*)^\perp$ bileşenleridir. Böylece

$$\nabla_{B_1}^{S_2} B_2 = \nabla_{B_1}^{\vartheta^\perp} B_2$$

olması durumunda $(range \vartheta_*)^\perp$ in total jeodezik olacağı söylenebilir.

Tanım 3.1: $\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$ dönüşümü bir konformal Riemann dönüşümü (CRM) olsun. Eğer $H(grad\lambda) = 0$ ise ϑ dönüşümü horizontal homotetik bir dönüşümdür [51].

Tanım 3.2: $\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2})$ Riemann manifoldları arasında bir dönüşüm olsun. Eğer $0 < rank(\vartheta_* q) \leq \min\{boy(S_1), boy(S_2)\}$ ve ϑ_{*q} , $H(q) = (ker \vartheta_{*q})^\perp$ yatay uzayının elemanları $range \vartheta_{*q}$ içine dönüştürür ise o zaman ϑ dönüşümü bir CRM olur. Bu tanım şu şekilde yorumlanabilir. Her $A_1, A_2 \in \Gamma(ker \vartheta_{*q})^\perp$ ve $\lambda^2(q) \neq 0$ sayısı vardır öyleki

$$g_{S_2}(\vartheta_{*q} A_1, \vartheta_{*q} A_2) = \lambda^2(q) g_{S_1}(A_1, A_2) \quad (3.10)$$

denklemini sağlar.

ϑ nin ikinci temel formu

$$(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{range \vartheta_*} = A_1(In\lambda) \vartheta_* A_2 + A_2(In\lambda) \vartheta_* A_1 - g_{S_1}(A_1, A_2) \vartheta_*(grad In\lambda)$$

denklemleriyle verilebilir.

Eğer $(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)$ nin $(range \vartheta_*)^\perp$ de kalan bileşeni $(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{range \vartheta_*}$ ile gösterilirse o zaman ikinci temel form, $A_1, A_2 \in \Gamma(ker \vartheta_{*q})^\perp$ için

$$(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2) = (\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{range \vartheta_*} + (\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(range \vartheta_*)^\perp} \quad (3.11)$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2) = A_1(In\lambda) \vartheta_* A_2 + A_2(In\lambda) \vartheta_* A_1 - g_{S_1}(A_1, A_2) \vartheta_*(grad In\lambda) + (\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(range \vartheta_*)^\perp} \quad (3.12)$$

elde edilir [15].

Tanım 3.3: ϑ , bir (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ hemen hemen kontak metrik manifolduna tanımlı bir CRM olsun. Eğer bir $D_1 \subseteq (\text{range } \vartheta_*)$ alt demeti var ve

$$\text{range } \vartheta_{*q} = D_1 \oplus D_2, F(D_1) = D_1, F(D_2) \subseteq (\text{range } \vartheta_{*q})^\perp$$

şartları sağlanırsa ϑ ye $q \in S_1$ de bir konformal yarı-invaryant Riemann dönüşüm (CSIRM) denir. Burada D_2 , $\text{range } \vartheta_*$ de D_1 için ortogonal tamamlayıcı distribüsyondur. Eğer her $q \in S_1$ için ϑ bir CSIRM ise o zaman ϑ ye bir CSIRM denir.

$\phi \vartheta_* A_1 \in \Gamma(D_1)$ ve $\omega \vartheta_* A_1 \in \Gamma(FD_2)$ olmak üzere $\vartheta_* A_1 \in \Gamma(\text{range } \vartheta_*)$ için

$$F \vartheta_* A_1 = \phi \vartheta_* A_1 + \omega \vartheta_* A_1 \quad (3.14)$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $\vartheta_* A_1 \in \Gamma(D_1)$ ve $\vartheta_* A_2 \in \Gamma(D_2)$ için $g_{S_2}(\vartheta_* A_1, \vartheta_* A_2) = 0$ olacağı aşikârdır. Böylece,

$$(\ker \vartheta_{*q})^\perp = \bar{D}_1 \oplus \bar{D}_2$$

olacak şekilde iki tane distribüsyon elde edilir.

Diğer taraftan $\beta_1 B_1 \in \Gamma(D_1)$ ve $\alpha_1 B_1 \in \Gamma(\eta)$ olmak üzere $B_1 \in \Gamma((\text{range } \vartheta_*)^\perp)$ için

$$FB_1 = \beta_1 B_1 + \alpha_1 B_1 \quad (3.15)$$

eşitliği yazılabilir. Burada η , $(\text{range } \vartheta_*)^\perp$ de $\omega(D_2)$ e tamamlayıcı ortogonal distribüsyonudur. Böylece η nün F ye göre invaryant olduğu kolayca görülebilir.

Örnek 3.1: $S_1 = \{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) \in \mathbb{R}^5 : u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_5 \neq 0\}$ Öklidyen uzayı olsun. S_1 üzerindeki g_{S_1} Riemann metriği

$$g_{S_1} = du_1^2 + du_2^2 + du_3^2 + du_4^2 + du_5^2$$

olarak verilsin. $S_2 = \{(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \in \mathbb{R}^5\}$ Öklidyen uzayı üzerindeki g_{S_2} metriği de

$$g_{S_2} = e^{2u_1} dv_1^2 + e^{2u_1} dv_2^2 + e^{2u_1} dv_3^2 + dv_4^2 + dv_5^2$$

olarak verilsin. (S_2, g_{S_2}) manifoldu üzerindeki (F, ξ, η) Sasakian yapısı

$$F\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right) = \frac{\partial}{\partial v_2}, F\left(\frac{\partial}{\partial v_2}\right) = -\frac{\partial}{\partial v_1}, F\left(\frac{\partial}{\partial v_3}\right) = \frac{\partial}{\partial v_4}, F\left(\frac{\partial}{\partial v_4}\right) = -\frac{\partial}{\partial v_3}, \eta = dv_5,$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial v_5}, F(\xi) = 0$$

olarak seçilebilir [33]. $T_q S_1$ in bir bazı

$$\left\{ e_i = e^{u_1} \frac{\partial}{\partial u_i} : 1 \leq i \leq 5 \right\}$$

ve $T_{\vartheta(q)} S_2$ üzerindeki bir F – bazı da $q \in S_1$

$$\left\{ e_j^* = \frac{\partial}{\partial v_j} ; 1 \leq j \leq 4, e_4^* = e^{u_1} \frac{\partial}{\partial v_4}, \xi = e_5^* = \frac{\partial}{\partial v_5} \right\}$$

olarak alınsın. $\vartheta: (S_1, g_{S_1}) \rightarrow (S_2, g_{S_2}, F)$ dönüşümü

$$\vartheta(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (u_1, u_2, u_5, 0, 0)$$

olarak tanımlansın. O zaman

$$\begin{aligned} \ker \vartheta_* &= \text{Span}\{U_1 = e_3, U_2 = e_4\} \\ (\ker \vartheta_*)^\perp &= \text{Span}\{A_1 = e_1, A_2 = e_2, A_3 = e_5\} \end{aligned}$$

uzayları elde edilir. Buradan, $i, j = 1, 2, 3$ için

$$\vartheta_* A_1 = e^{u_1} e_1^*, \vartheta_* A_2 = e^{u_1} e_2^*, \vartheta_* A_3 = e^{u_1} e_3^*$$

ve

$$g_{S_2}(\vartheta_*(A_{1i}), \vartheta_*(A_{1j})) = e^{2u_1} g_{S_1}(A_{1i}, A_{1j})$$

eşitlikleri kolaylıkla hesaplanabilir. Böylece $\vartheta, \lambda = e^{2u_1}$ ile bir CRM olup

$$\begin{aligned} \text{range} \vartheta_* &= \text{Span}\{e^{u_1} e_1^*, e^{u_1} e_2^*, e^{u_1} e_3^*\}, \\ (\text{range} \vartheta_*)^\perp &= \text{Span}\{e_4^*, \xi\} \end{aligned}$$

$$D_1 = \text{Span}\{e^{u_1} e_1^*, e^{u_1} e_2^*\},$$

$$D_2 = \text{Span}\{e^{u_1} e_3^*\}$$

distribüsyonları alınabilir. Bu distribüsyonlar göz önüne alınarak $F\vartheta_* A_1 = e^{u_1} e_2^*$, $F\vartheta_* A_2 = -e^{u_1} e_1^*$, $F\vartheta_* A_3 = e^{u_1} e_4^*$ olduğu basit hesaplamalarla elde edilir. Böylece ϑ nin bir CSIRM olduğu görülür.

Uyarı 3.1: Bu tez boyunca $\xi \in (\text{range} \vartheta_*)^\perp$ Reeb vektör alanı olarak alınacaktır.

D_1 lifinin geometrisi için aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.1: ϑ , (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM olsun. D_1 lifinin S_2 üzerinde total jeodezik faliasyon (yaprak) tanımlaması için gerek ve yeter şartlar,

- i. $g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) = \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1) + g_{S_2}(\beta_1 B_1 (In\lambda) \vartheta_* A_1 + \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), F \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(S_{\alpha_1 \beta_1} \vartheta_* A_1, F \vartheta_* A_2),$
- ii. $\phi \mathcal{S}_{F \vartheta_* B_2} \vartheta_* A_1 - \eta(\omega \vartheta_* B_2) A_1$ ifadelesinin $\Gamma(D_1)$ de bileşenleri yoktur. Burada $\forall A_1, A_2, A_3, B_2 \in \Gamma(ker \vartheta_*)^\perp$ için $\vartheta_* A_1, \vartheta_* A_2 \in \Gamma(D_1), \vartheta_* B_2 \in \Gamma(D_2)$ olarak alınır ve $B_1 \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp$ için $\vartheta_* A_3 = \beta_1 B_1$,

olarak elde edilir.

İspat 3.1: $\vartheta_* A_1, \vartheta_* A_2 \in \Gamma(D_1), B_1 \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp, \vartheta_* B_2 \in \Gamma(D_2)$ için ϑ bir CRM olduğundan ve (3.1), (3.2) kullanılarak

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = g_{S_2}(F \nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, F B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1)$$

elde edilir. Daha sonra (3.3), (3.4) ve (3.5) denklemleri göz önüne alınırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(F B_1) + g_{S_2}(A_1, F B_1) \underbrace{\eta(\vartheta_* A_2)}_0 + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1) - g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} F B_1, F \vartheta_* A_2)$$

olur. Yukarıdaki denklemde (3.15) kullanılırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1) - g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \beta_1 B_1, F \vartheta_* A_2) - g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \alpha_1 B_1, F \vartheta_* A_2)$$

bulunur. (3.7) denkleminde yararlanarak

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1) - g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_3, F \vartheta_* A_2) - g_{S_2}(-S_{\alpha_1 B_1} \vartheta_* A_1 + \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \vartheta_* A_1, F \vartheta_* A_2)$$

elde edilir. Burada $A_3 \in \Gamma(ker \vartheta_*)^\perp$ için $\beta_1 B_1 = \vartheta_* A_3 \in \Gamma(D_2)$ olarak alınmıştır.

(3.6) denkleminde

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1) - g_{S_2}((\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_*)(A_1, A_3) + \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), F \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(S_{\alpha_1 B_1} \vartheta_* A_1, F \vartheta_* A_2) - \underbrace{g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \vartheta_* A_1, F \vartheta_* A_2)}_0$$

elde edilip burada da (3.12) kullanılırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1) - \\ g_{S_2}\left((\nabla^{S_2} \vartheta_*)(A_1, A_3)^{range \vartheta_*} + \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), F \vartheta_* A_2\right) + g_{S_2}(S_{\alpha_1 B_1} \vartheta_* A_1, F \vartheta_* A_2)$$

elde edilir. (3.11) denklemi yardımıyla

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1) - \\ g_{S_2}(A_1 (In \lambda) \vartheta_* A_3 + A_3 (In \lambda) \vartheta_* A_1 - g_{S_1}(A_1, A_3) \vartheta_*(grad In \lambda) + \\ \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), F \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(S_{\alpha_1 B_1} \vartheta_* A_1, F \vartheta_* A_2)$$

bulunur. $grad(In \lambda) \in (range \vartheta_*)^\perp$ olduğundan yukarıdaki denklemde (3.2) ve $\vartheta_* A_3 = \beta_1 B_1$ kullanılırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(B_1) - \\ g_{S_2}(\beta_1 B_1 (In \lambda) \vartheta_* A_1 + \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), F \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(S_{\alpha_1 B_1} \vartheta_* A_1, F \vartheta_* A_2)$$

elde edilip teoremin ilk kısmı ispatlanmış olur.

Diğer taraftan (3.2) kullanılarak

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, \vartheta_* B_2) = g_{S_2}(F \nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, F \vartheta_* B_2) + \underbrace{\eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\vartheta_* B_2)}_0$$

denklemi elde edilip burada da (3.3), (3.4) ve (3.5) kullanılırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, \vartheta_* B_2) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(F \vartheta_* B_2) + \\ g_{S_2}(A_1, F \vartheta_* B_2) \underbrace{\eta(\vartheta_* A_2)}_0 + g_{S_2}(F \nabla_{A_1}^{S_2} F \vartheta_* B_2, F \vartheta_* A_2)$$

bulunur. Son olarak (3.14) ve ardından (3.7) ifadesi yukarıdaki denkleme uygulanırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, \vartheta_* B_2) = -g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\omega \vartheta_* B_2) + g_{S_2}(-\phi S_{F \vartheta_* B_2} \vartheta_* A_1 + \\ \phi \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} F \vartheta_* B_2, \vartheta_* A_2) = -g_{S_2}(\eta(\omega \vartheta_* B_2) A_1 - \phi S_{F \vartheta_* B_2} \vartheta_* A_1, \vartheta_* A_2)$$

denklemi elde edilir.

Böylelikle teoremin ii. kısmı ispatlanır.

Aşağıdaki teoremden D_2 lifinin geometrisi incelenmektedir.

Teorem 3.2: $\vartheta, (S_1, g_{S_1})$ Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM olsun. D_2 lifinin S_2 üzerinde bir total jeodezik faliasyon tanımlanması için gerek ve yeter şartlar,

$$i. \quad \eta(\nabla_{B_3}^{S_2} \vartheta_* B_4) \eta(B_2) = g_{S_2}\left((\nabla^{S_2} \vartheta_*)(B_3, A_4)^{range \vartheta_*} + \nabla_{B_3}^{\vartheta^\perp} \alpha_1 B_2, F \vartheta_* B_4\right) + \\ g_{S_2}(B_3, \vartheta_* B_4) \eta(\alpha_1 B_2),$$

- ii. $\beta_1(\nabla^{S_2}\vartheta_*)(B_3, A_3)^{(range\vartheta_*)^\perp}$ ifadesinin $\Gamma(D_2)$ de bileşenleri yoktur. Burada $\forall A_3, A_4, B_3, B_4 \in \Gamma(ker\vartheta_*)^\perp$ için $\vartheta_*A_3, \vartheta_*B_3, \vartheta_*B_4 \in \Gamma(D_2)$, $B_2 \in \Gamma(range\vartheta_*)^\perp$ olacak şekilde $\vartheta_*A_4 = \beta_1B_2$,

olarak elde edilir.

İspat 3.2: $\vartheta_*A_3, \vartheta_*B_3, \vartheta_*B_4 \in \Gamma(D_2)$ ve $B_2 \in \Gamma(range\vartheta_*)^\perp$ için (3.2), (3.4), (3.15) ve ϑ nin bir CRM olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{S_2}(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4, B_2) &= g_{S_2}(F\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4, FB_2) + \eta(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4)\eta(B_2) \\ &= g_{S_2}(-g_{S_2}(B_3, \vartheta_*B_4)\xi + \eta(\vartheta_*B_4)B_3 + \nabla_{B_3}^{S_2}F\vartheta_*B_4, FB_2) \\ &\quad + \eta(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4)\eta(B_2) \\ &= -g_{S_2}(B_3, \vartheta_*B_4)\eta(FB_2) + g_{S_2}(B_3, FB_2)\underbrace{\eta(\vartheta_*B_4)}_0 \\ &\quad + g_{S_2}(\nabla_{B_3}^{S_2}F\vartheta_*B_4, FB_2) + \eta(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4)\eta(B_2) \\ &= -g_{S_2}(B_3, \vartheta_*B_4)\eta(\alpha_1B_2) - g_{S_2}(\nabla_{B_3}^{S_2}\beta_1B_2, F\vartheta_*B_4) \\ &\quad - g_{S_2}(\nabla_{B_3}^{S_2}\alpha_1B_2, F\vartheta_*B_4) + \eta(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4)\eta(B_2) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde (3.6) ve (3.7) ve $\vartheta_*A_4 = \beta_1B_2$ kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{S_2}(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4, B_2) &= -g_{S_2}(B_3, \vartheta_*B_4)\eta(\alpha_1B_2) - g_{S_2}((\nabla^{S_2}\vartheta_*)(B_3, A_4) + \\ &\quad \vartheta_*(\nabla_{B_3}^{S_1}A_4) - S_{\alpha_1B_2}\vartheta_*B_3 + \nabla_{B_3}^{\vartheta^\perp}\alpha_1B_2, F\vartheta_*B_4) + \eta(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4)\eta(B_2) \end{aligned}$$

elde edilir.

D_2, S_2 üzerinde total jeodezik foliasyon tanımladığından ve (3.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned} &g_{S_2}(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4, B_2) \\ &= -g_{S_2}((\nabla^{S_2}\vartheta_*)(B_3, A_4)^{(range\vartheta_*)^\perp} + \nabla_{B_3}^{\vartheta^\perp}\alpha_1B_2, F\vartheta_*B_4) \\ &\quad - g_{S_2}(B_3, \vartheta_*B_4)\eta(\alpha_1B_2) + \eta(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*B_4)\eta(B_2) \end{aligned}$$

denklemini elde edilip teoremin ilk kısmı ispatlanmış olur.

Diğer taraftan (3.2), (3.8), (3.12) ve (3.15) yardımıyla

$$\begin{aligned} g_{S_2}(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*A_3, \vartheta_*B_3) &= g_{S_2}(F(\nabla^{S_2}\vartheta_*)(B_3, A_3)^{(range\vartheta_*)^\perp}, \vartheta_*B_3) + \\ &\quad \underbrace{\eta(\nabla_{B_3}^{S_2}\vartheta_*A_3)\eta(\vartheta_*B_3)}_0 = g_{S_2}(\beta_1(\nabla^{S_2}\vartheta_*)(B_3, A_3)^{(range\vartheta_*)^\perp}, \vartheta_*B_3) \end{aligned}$$

bulunur.

D_2, S_2 üzerinde total jeodezik foliasyon tanımladığından $\beta_1(\nabla^{S_2}\vartheta_*)(B_3, A_3)^{(range\vartheta_*)^\perp}$ ifadesinde $\Gamma(D_2)$ nin bileşenleri yoktur.

Teorem 3.3: ϑ , (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM olsun. Eğer $(range \vartheta_*)$, S_2 üzerinde bir total jeodezik bir foliasyon tanımlıyorsa ve ϑ yatay homotetik bir CRM ise o zaman

$$g_{S_2}(S_{\alpha_1 B_2} \vartheta_* A_1, \phi \vartheta_* A_2) - g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), \phi \vartheta_* A_2) = g_{S_2}(S_{\omega \vartheta_* A_2} \vartheta_* A_1, \beta_1 B_1) - g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_2, \alpha_1 B_1) - \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\beta_1) + g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1)$$

ifadesi geçerlidir. Burada $A_1, A_2 \in \Gamma(ker \vartheta_*)^\perp$ için $\vartheta_* A_1, \vartheta_* A_2 \in \Gamma(range \vartheta_*)$, $B_1 \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp$ olmak üzere $\vartheta_* A_3 = \beta_1 B_1$ olarak alınır.

İspat 3.3: $A_1, A_2 \in \Gamma(ker \vartheta_*)^\perp$ ve $B_1 \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp$ için (3.2) ve (3.4) kullanılarak

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} F \vartheta_* A_2, F B_1) - g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(F B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\beta_1)$$

elde edilir. Bu denklemde (3.15) kullanılırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} F \vartheta_* A_2, \beta_1 B_1) + g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} F \vartheta_* A_2, \alpha_1 B_1) - g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\beta_1) = -g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \beta_1 B_1, F \vartheta_* A_2) - g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \alpha_1 B_1, F \vartheta_* A_2) - g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\beta_1)$$

bulunur. (3.14) ve $\vartheta_* A_3 = \beta_1 B_1$ koşulundan

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_3, \phi \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \omega \vartheta_* A_2, \vartheta_* A_3) - g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \alpha_1 B_1, \phi \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \omega \vartheta_* A_2, \alpha_1 B_1) - g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\beta_1)$$

olup ϑ nin bir CRM olduğu ve (3.6) dan

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}((\nabla^{S_2} \vartheta_*)(A_1, A_3) + \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), \phi \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \omega \vartheta_* A_2, \vartheta_* A_3) - g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \alpha_1 B_1, \phi \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \omega \vartheta_* A_2, \alpha_1 B_1) - g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\beta_1)$$

denklemini elde edilir. Son olarak (3.13) ve (3.7) ve $\vartheta_* A_3 = \beta_1 B_1$ şartı yukarıdaki denklemde kullanılırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = -g_{S_2}(A_1(In\lambda) \vartheta_* A_3 + A_3(In\lambda) \vartheta_* A_1 - g_{S_1}(A_1, A_3) \vartheta_*(grad(In\lambda)), \phi \vartheta_* A_2) - g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), \phi \vartheta_* A_2) - g_{S_2}(S_{\omega \vartheta_* A_2} \vartheta_* A_1, \vartheta_* A_3) + g_{S_2}(S_{\alpha_1 B_1} \vartheta_* A_1, \phi \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_2, \alpha_1 B_1) - g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\beta_1)$$

elde edilir. Bu denklemde $A_1(In\lambda) = -g_{S_1}(A_1, Hgrad(In\lambda))$ ve $(A_3, (In\lambda)) = g_{S_1}(A_3, Hgrad(In\lambda))$ alınırsa

$$\begin{aligned} & g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2, B_1) = \\ & -g_{S_1}(A_1, Hgrad(In\lambda)) g_{S_2}(\vartheta_* A_3, \phi \vartheta_* A_2) - g_{S_1}(A_3, Hgrad(In\lambda)) g_{S_2}(\vartheta_* A_1, \phi \vartheta_* A_2) - \\ & g_{S_1}(A_1, A_3) g_{S_2}(\vartheta_*(grad(In\lambda)), \phi \vartheta_* A_2) - g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), \phi \vartheta_* A_2) - \\ & g_{S_2}(S_{\omega \vartheta_* A_2} \vartheta_* A_1, \beta_1 B_1) + g_{S_2}(S_{\alpha_1 B_1} \vartheta_* A_1, \phi \vartheta_* A_2) + g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_2, \alpha_1 B_1) - \\ & g_{S_2}(A_1, \vartheta_* A_2) \eta(\alpha_1 B_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_2) \eta(\beta_1) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. $(range \vartheta_*)$ in S_2 üzerinde total jeodezik foliasyonu tanımladığı ve ϑ nin bir yatay homotetik CRM olduğu göz önüne alınırsa teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.4: ϑ , (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM olsun. $(range \vartheta_*)^\perp$ in S_2 üzerinde bir total jeodezik bir foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} g_{S_2}(\alpha_1 B_1, (\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(range \vartheta_*)^\perp}) &= g_{S_2}(B_2, [B_1, \vartheta_* A_1] + \nabla_{\vartheta_* A_1}^{\vartheta^\perp} F \beta_1 B_1 + \\ & \alpha_1 \nabla_{\vartheta_* A_1}^{\vartheta^\perp} F \alpha_1 B_1) + B_1 \eta(\omega \vartheta_* A_1) \end{aligned}$$

denkleminin sağlanmasıdır. Burada $\forall B_1, B_2 \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp$ ve $A_1, A_2 \in \Gamma(ker \vartheta_*)^\perp$ için $\vartheta_* A_2 = \beta_1 B_2$ olarak alınmıştır.

İspat 3.4: $\forall B_1, B_2 \in \Gamma(range \vartheta_*)^\perp$ ve $A_1, A_2 \in \Gamma(ker \vartheta_*)^\perp$ için (3.2), (3.4) ve S_2 nin bir Sasakian manifold olduğu kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{S_2}(\nabla_{B_1}^{S_2} B_2, \vartheta_* A_1) &= -g_{S_2}(B_2, [B_1, \vartheta_* A_1]) - g_{S_2}(FB_2, \nabla_{\vartheta_* A_1}^{B_2} F B_1) - \\ & g_{S_2}(B_2, B_1) \eta(F \vartheta_* A_1) + \underbrace{\eta(\nabla_{B_1}^{S_2} B_2) \eta(\vartheta_* A_1)}_0 \end{aligned}$$

elde edilir. (3.6), (3.7), (3.14) ve (3.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{S_2} B_2, \vartheta_* A_1) &= -g_{S_2}(B_2, [B_1, \vartheta_* A_1]) - g_{S_2}(B_2, \nabla_{\vartheta_* A_1}^{\vartheta^\perp} F \beta_1 B_1) + \\ & g_{S_2}(\alpha_1 B_1, (\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)) - g_{S_2}(B_2, \alpha_1 \nabla_{\vartheta_* A_1}^{\vartheta^\perp} F \alpha_1 B_1) - g_{S_2}(B_2, B_1 \eta(\omega \vartheta_* A_1)) \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak yukarıdaki denklemde (3.12), (3.10) ve $(range \vartheta_*)^\perp$ in bir total jeodezik foliasyon tanımladığı göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} & g_{S_2}(\alpha_1 B_1, (\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(range \vartheta_*)^\perp}) \\ &= g_{S_2}(B_2, [B_1, \vartheta_* A_1] + \nabla_{\vartheta_* A_1}^{\vartheta^\perp} F \beta_1 B_1 + \alpha_1 \nabla_{\vartheta_* A_1}^{\vartheta^\perp} F \alpha_1 B_1) + B_1 \eta(\omega \vartheta_* A_1) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Uyarı 3.2: ϑ , (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM olsun. İkinci temel formdan $\ker \vartheta_*$ ve $(\ker \vartheta_*)^\perp$ in S_1 üzerinde bir total jeodezik foliasyon tanımlandığı biliniyor.

Yukarıdaki uyarıdan yola çıkarak aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 3.5: ϑ , (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM olsun. $\forall A_1, A_2, A_3 \in \Gamma(\ker \vartheta_*)^\perp$ için $\vartheta_* A_2 = \phi \vartheta_* A_3$ olmak üzere ϑ nin total jeodezik foliasyon olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned} & \phi \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(\text{range} \vartheta_*)} - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) - S_{\omega \vartheta_* A_3} \vartheta_* A_1 \right) \\ & = -\beta_1 \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(\text{range} \vartheta_*)^\perp} + \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_3 \right) - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3), \\ & \omega \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{\text{range} \vartheta_*} - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) - S_{\omega \vartheta_* A_3} \vartheta_* A_1 \right) = \\ & -\alpha_1 \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(\text{range} \vartheta_*)^\perp} + \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_3 \right) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_3) \xi \end{aligned}$$

denklemlerinin sağlanmasıdır.

İspat 3.5: $\forall A_1, A_3 \in \Gamma(\ker \vartheta_*)^\perp$ için (3.1), (3.4), (3.6) ve (3.14) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla^{S_2} \vartheta_*)(A_1, A_3) &= \nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_3 - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3) = -F(\nabla_{A_1}^{S_2} \phi \vartheta_* A_3 + \nabla_{A_1}^{S_2} \omega \vartheta_* A_3) - \\ & \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_3) \xi \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Yukarıdaki denklemde (3.7) ve (3.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla^{S_2} \vartheta_*)(A_1, A_3) &= -F \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{\text{range} \vartheta_*} \right) - F \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(\text{range} \vartheta_*)^\perp} \right) - \\ & F \left(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) \right) + F(S_{\omega \vartheta_* A_3} \vartheta_* A_1) - F(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_3) - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_3) \xi \end{aligned}$$

bulunur. ϑ bir CRM olduğundan yukarıdaki denklemde (3.14) ve (3.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla^{S_2} \vartheta_*)(A_1, A_3) &= -\phi \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{\text{range} \vartheta_*} \right) - \omega \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{\text{range} \vartheta_*} \right) - \\ & \beta_1 \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(\text{range} \vartheta_*)^\perp} \right) - \alpha_1 \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(\text{range} \vartheta_*)^\perp} \right) - \phi \left(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) \right) - \\ & \omega \left(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) \right) + \phi(S_{\omega \vartheta_* A_3} \vartheta_* A_1) + \omega(S_{\omega \vartheta_* A_3} \vartheta_* A_1) - \beta_1(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_3) - \\ & \alpha_1(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_3) - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_3) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_3) \xi \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde $\text{range} \vartheta_*$ ve $(\text{range} \vartheta_*)^\perp$ bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{aligned}
\phi \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_3)^{range \vartheta_*} \right) &= -\phi \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{range \vartheta_*} \right) + \vartheta_* (\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) - \\
& (S_{\omega \vartheta_* A_3} \vartheta_* A_1) - \beta_1 \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(range \vartheta_*)^\perp} + \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_3 \right) - \vartheta_* (\nabla_{A_1}^{S_1} A_3) \\
(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_3)^{(range \vartheta_*)^\perp} &= -\omega \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{range \vartheta_*} + \vartheta_* (\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) - \right. \\
& \left. S_{\omega \vartheta_* A_3} \vartheta_* A_1 \right) - \alpha_1 \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_2)^{(range \vartheta_*)^\perp} + \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_3 \right) + \eta (\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_3) \xi
\end{aligned}$$

denklemleri elde edilir. Böylece ϑ total jeodezik foliasyon yani $((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_3)) = 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

Önerme 3.1: ϑ , (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM ve $\text{boy}(range \vartheta_*) > 1$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler geçerlidir.

- i. $\bar{D}_1$ nin bir total jeodezik foliasyon tanımlaması için gerekli ve yeterli şart $(\nabla \vartheta_*)(A_1, U_1)$ nin D_1 de bileşene sahip olmamasıdır. Yani $A_1, A_2 \in \Gamma(\bar{D}_1)$, $U_1 \in \Gamma(ker \vartheta_*)$ ve $A'_1 \in \Gamma(\bar{D}_2)$ için

$$g_{S_2}(-S_{F \vartheta_* A'_1} \vartheta_* A_1 + g_{S_2}(A'_1, \xi) \vartheta_* A_1, F \vartheta_* A_2) = \eta(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) \eta(A'_1)$$

eşitliği geçerlidir.

- ii. $\bar{D}_2$ nin bir total jeodezik foliasyon tanımlaması için gerekli ve yeterli şart $(\nabla \vartheta_*)(A_2, U_1)$ nin D_2 de bileşenlere sahip olmamasıdır. Yani $A_2, A_3, A_4 \in \Gamma(\bar{D}_2)$, $U_1 \in \Gamma(ker \vartheta_*)$ ve $A'_3 \in \Gamma(\bar{D}_2)$

$$g_{S_2}(S_{F \vartheta_* A'_3} \vartheta_* A_3, F \vartheta_* A_4) = g_{S_2}(g_{S_2}(A'_3, \xi) \vartheta_* A_3, F \vartheta_* A_4) - \eta(\nabla_{\vartheta_* A_3}^{S_1} \vartheta_* A_4) \eta(\vartheta_* A'_3)$$

eşitliği geçerlidir.

İspat 3.1: $\bar{D}_1$ nin total jeodezik foliasyon tanımlaması için gerekli ve yeterli şartın $g_{S_1}(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2, U_1) = 0$ ve $g_{S_1}(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2, A'_1) = 0$ olduğu biliniyor. Burada $A_1, A_2 \in \Gamma(\bar{D}_1)$, $U_1 \in \Gamma(ker \vartheta_*)$ ve $A'_1 \in \Gamma(\bar{D}_2)$ olarak alınmıştır.

ϑ bir Riemann dönüşüm olduğundan (1.1), (3.6) ve (3.7) kullanılarak

$$\begin{aligned}
g_{S_1}(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2, U_1) &= -g_{S_1}(\nabla_{A_1}^{S_1} U_1, A_2) = -g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} U_1), \vartheta_* A_2) = \\
& g_{S_2}((\nabla \vartheta_*)(A_1, U_1), \vartheta_* A_2),
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$g_{S_1}(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2, A'_1) = -g_{S_1}(\nabla_{A_1}^{S_1} A'_1, A_2) = -g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A'_1), \vartheta_* A_2) = \\ -g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{\vartheta} \vartheta_* A'_1, \vartheta_* A_2) = -g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} \vartheta_* A'_1, \vartheta_* A_2)$$

denklemleri bulunur.

S_2 Sasakian manifold olduğundan (3.2), (3.4) ve daha sonra (3.7) kullanılırsa

$$g_{S_1}(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2, A'_1) = -g_{S_2}(-S_{F\vartheta_* A'_1} \vartheta_* A_1, F\vartheta_* A_2) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_1} A_2) \eta(A'_1) - \\ g_{S_2}(g_{S_2}(A'_1, \xi) \vartheta_* A_1, F\vartheta_* A_2)$$

elde edilir. Böylece ispatın ilk kısmı tamamlanmış olur.

Diğer taraftan $\bar{D}_2$ nin bir total jeodezik foliasyon tanımlaması için gerekli ve yeter şartın $g_{S_1}(\nabla_{A_3}^{S_1} A_4, U_1) = 0$ ve $g_{S_1}(\nabla_{A_3}^{S_1} A_4, A'_3) = 0$ olduğu biliniyor. Burada $A_3, A_4 \in \Gamma(\bar{D}_2)$, $U_1 \in \Gamma(ker \vartheta_*)$ ve $A'_3 \in \Gamma(\bar{D}_1)$ dir.

ϑ bir Riemann dönüşüm olduğundan (1.1) ve (3.6) kullanılarak

$$g_{S_1}(\nabla_{A_3}^{S_1} A_4, U_1) = -g_{S_1}(\nabla_{A_3}^{S_1} U_1, A_4) = -g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_3}^{S_1} U_1), \vartheta_* A_4) = \\ g_{S_2}((\nabla^{S_2} \vartheta_*)(A_3, U_1), \vartheta_* A_4)$$

ve benzer şekilde

$$g_{S_1}(\nabla_{A_3}^{S_1} A_4, A'_3) = g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_3}^{S_1} A_4), \vartheta_* A'_3) = g_{S_2}(\nabla_{A_3}^{\vartheta} \vartheta_* A_4, \vartheta_* A'_3) \\ = g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_* A_3}^{S_2} \vartheta_* A_4, \vartheta_* A'_3)$$

denklemleri bulunur.

S_2 bir Sasakian manifold olduğundan (3.3), (3.4) ve daha sonra (3.7) kullanılarak

$$g_{S_1}(\nabla_{A_3}^{S_1} A_4, A'_3) = -g_{S_2}(-S_{F\vartheta_* A'_3} \vartheta_* A_3, F\vartheta_* A_4) + \eta(\nabla_{A_3}^{S_1} \vartheta_* A_4) \eta(\vartheta_* A'_3) - \\ g_{S_2}(g_{S_2}(A'_3, \xi) \vartheta_* A_3, F\vartheta_* A_4)$$

denklemini elde edilir. Böylece ispatın ikinci kısmı tamamlanmış olur.

Tanım 3.4: (S_1, g_{S_1}) bir Riemann manifoldu ve $K_1 \cap K_2 = \{0\}$ olacak şekilde K_1 ve K_2 kanonik foliasyonları göz önüne alınsın. Bu durumda (S_1, g_{S_1}) in bir lokal çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şartın K_1 ve K_2 total jeodezik foliasyon olmasıdır [47].

Teorem 3.6: $\vartheta, (S_1, g_{S_1})$ Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM ve $boy(range\vartheta_*) > 1$ olsun. Bu durumda $(ker\vartheta_*)^\perp$ in $\bar{D}_1$ ve $\bar{D}_2$ nin bir lokal çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şartın,

- i. $(\nabla\vartheta_*)(A_1, U_1)$ in D_1 de bileşenleri yoktur. Yani $A_1, A_2 \in \Gamma(\bar{D}_1)$, $U_1 \in \Gamma(ker\vartheta_*)$ ve $A'_1 \in \Gamma(\bar{D}_2)$ için

$$g_{S_2}(S_{F\vartheta_*A'_1}\vartheta_*A_1, F\vartheta_*A_2) = g_{S_2}(g_{S_2}(A'_1, \xi)\vartheta_*A_1, F\vartheta_*A_4) - \eta(\nabla_{A'_1}^{S_1}A_2)\eta(A'_1)$$

- ii. $(\nabla\vartheta_*)(A_3, U_1)$ nin D_2 de bileşeni yoktur. Yani $A_2, A_3, A_4 \in \Gamma(\bar{D}_2)$, $U_1 \in \Gamma(ker\vartheta_*)$ ve $A'_3 \in \Gamma(\bar{D}_2)$ için

$$\begin{aligned} & g_{S_2}(S_{F\vartheta_*A'_3}\vartheta_*A_3, F\vartheta_*A_4) \\ &= g_{S_2}(g_{S_2}(A'_3, \xi)\vartheta_*A_3, F\vartheta_*A_4) - \eta(\nabla_{\vartheta_*A_3}^{S_1}\vartheta_*A_4)\eta(A'_3) \end{aligned}$$

olmasıdır.

Bu teoremin ispatı Önerme 3.1 ve Tanım 3.4 te açıktır.

Teorem 3.7: $\vartheta, (S_1, g_{S_1})$ Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM ve $boy(range\vartheta_*) > 1$ olsun. Bu durumda baz manifoldunun $S_2 \times S_2$ lokal çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $A_1 \in \Gamma(\bar{D}_1)$ ve $B_1 \in \Gamma(range\vartheta_*)^\perp$ için

$$g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_2}\phi\vartheta_*A_1), \beta_1B_1) + g_{S_2}(\vartheta_*(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp}\omega\vartheta_*A_1), \alpha_1\beta_1) + g_{S_2}(S_{\alpha_1\beta_1}\vartheta_*A_1, \phi\vartheta_*A_1) + \eta(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\vartheta_*A_1)\eta(\beta_1) = |\vartheta_*A_1|^2\Gamma(\alpha_1\beta_1)$$

olmasıdır.

İspat 3.7: S_2 Sasakian manifold olduğundan (3.2) ve (3.3) kullanılarak $\vartheta_*A_1 \in \Gamma(range\vartheta_*)$ ve $B_1 \in \Gamma(range\vartheta_*)^\perp$ için

$$g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\vartheta_*A_1, B_1) = g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}F\vartheta_*A_1, FB_1) + \eta(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\vartheta_*A_1)\eta(\beta_1) - \underbrace{|\vartheta_*A_1|^2\Gamma(\alpha_1\beta_1) + \Gamma(\vartheta_*A_1)g_{S_2}(\vartheta_*A_1, FB_1)}_0$$

denklemini bulunur. Bu denklemde (3.14) ve (3.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\vartheta_*A_1, B_1) &= g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\phi\vartheta_*A_1, \beta_1B_1) + g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\omega\vartheta_*A_1, \beta_1B_1) + \\ &g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\phi\vartheta_*A_1, \alpha_1B_1) + g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\omega\vartheta_*A_1, \alpha_1B_1) + \eta(\nabla_{\vartheta_*A_1}^{S_2}\vartheta_*A_1)\eta(\beta_1) - \\ &|\vartheta_*A_1|^2\Gamma(\alpha_1\beta_1) \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. (3.7) den

$$g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} \vartheta_* A_1, B_1) = g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} \phi \vartheta_* A_1, \beta_1 B_1) + g_{S_2}(S_{\alpha_1 \beta_1} \vartheta_* A_1, \phi \vartheta_* A_1) + \\ g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_1, \alpha_1 \beta_1) + \eta(\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} \vartheta_* A_1) \eta(\beta_1) - |\vartheta_* A_1|^2 \Gamma(\alpha_1 \beta_1)$$

son olarak yukarıdaki denklemde (3.6) kullanılırsa

$$g_{S_2}(\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} \vartheta_* A_1, B_1) = g_{S_2}((\nabla \vartheta_*)(A_1, * \vartheta_*(\phi \vartheta_* A_1)), \beta_1 B_1) + \\ g_{S_2}(S_{\alpha_1 \beta_1} \vartheta_* A_1, \phi \vartheta_* A_1) + g_{S_2}(\nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_1, \alpha_1 \beta_1) + \eta(\nabla_{\vartheta_* A_1}^{S_2} \vartheta_* A_1) \eta(\beta_1) - \\ |\vartheta_* A_1|^2 \Gamma(\alpha_1 \beta_1)$$

elde edilir. Tanım 3.4 ten ispat tamamlanır.

Aşağıdaki teorem ile bir (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı CSIRM dönüşümünün harmonikliği incelenmiştir.

Teorem 3.8: ϑ , (S_1, g_{S_1}) Riemann manifoldundan $(S_2, F, \xi, \eta, g_{S_2})$ Sasakian manifolduna tanımlı bir CSIRM olsun. Bu durumda $A_1 \in (\ker \vartheta_*)^\perp$ olmak üzere ϑ nin harmonik olması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin sağlanmasıdır.

- i. Fibreler minimaldir.
- ii. $\text{trace} \phi S_{\omega \vartheta_* A_1} A_1 - \beta_1 \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_1 - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_1) - (\nabla^{S_2} F \phi \vartheta_* A_1)^{\text{range} \vartheta_*} = 0$,
- iii. $\text{trace} \omega S_{\omega \vartheta_* A_1} A_1 - \alpha_1 \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_1 - (\nabla^{S_2} F \phi \vartheta_* A_1)^{(\text{range} \vartheta_*)^\perp} + \\ \eta((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_1)^{(\text{range} \vartheta_*)^\perp}) \xi = 0$,

İspat 3.8: $U_1 \in \ker \vartheta_*$ için (3.6) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla \vartheta_*)(U_1, U_1) = \nabla_{U_1}^{S_2} \vartheta_* U_1 - \vartheta_*(\nabla_{U_1}^{S_1} U_1) = -\vartheta_*(\nabla_{U_1}^{S_1} U_1)$$

elde edilir. $\vartheta_* U_1 = 0$ olduğundan $A_1 \in (\ker \vartheta_*)^\perp$ için (3.2), (3.6), (3.7), (3.12) ve (3.15) kullanılırsa

$$(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_1) = \nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_1 - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_1) \\ = -\nabla_{A_1}^{S_2} F \phi \vartheta_* A_1 - F(\nabla_{A_1}^{S_2} \omega \vartheta_* A_1) - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_1) \xi \\ = -\nabla_{A_1}^{S_2} F \phi \vartheta_* A_1 - F(-S_{\omega \vartheta_* A_1} \vartheta_* A_1 + \nabla_{A_1}^{\vartheta^\perp} \omega \vartheta_* A_1) - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_1) \\ + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_1) \xi$$

elde edilir.

ϑ bir CRM olduğundan, (3.14) ve (3.15) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_1) = & -\nabla_{A_1}^{S_2} F \phi \vartheta_* A_1 + \phi S_{\omega \vartheta_* A_1} \vartheta_* A_1 + \omega S_{\omega \vartheta_* A_1} \vartheta_* A_1 - \beta_1 \nabla_{A_1}^{\vartheta \perp} \omega \vartheta_* A_1 \\
& - \alpha_1 \nabla_{A_1}^{\vartheta \perp} \omega \vartheta_* A_1 - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_1) + \eta(\nabla_{A_1}^{S_2} \vartheta_* A_1) \xi
\end{aligned}$$

elde edilir.

$(range \vartheta_*)$ ve $(range \vartheta_*)^\perp$ bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_1)^{(range \vartheta)} = & \phi S_{\omega \vartheta_* A_1} \vartheta_* A_1 - \beta_1 \nabla_{A_1}^{\vartheta \perp} \omega \vartheta_* A_1 - \vartheta_*(\nabla_{A_1}^{S_1} A_1) - \\
& (\nabla_{A_1}^{S_2} F \phi \vartheta_* A_1)^{(range \vartheta)}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\nabla \vartheta_*)(A_1, A_1)^{(range \vartheta_*)^\perp} = & \omega S_{\omega \vartheta_* A_1} \vartheta_* A_1 - \alpha_1 \nabla_{A_1}^{\vartheta \perp} \omega \vartheta_* A_1 - \\
& (\nabla_{A_1}^{S_2} F \phi \vartheta_* A_1)^{(range \vartheta_*)^\perp} + \eta \left((\nabla \vartheta_*)(A_1, A_1)^{(range \vartheta_*)^\perp} \right) \xi
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki denklemler ve $(\nabla \vartheta_*)(U_1, U_1) = -\vartheta_*(\nabla_{U_1}^{S_1} U_1)$ eşitliğinden ispat tamamlanır.

4. GELECEKTEKİ ÇALIŞMALAR

Clairaut Riemann dönüşümler, geometri alanında önemli uygulamalara sahip özel bir Riemann dönüşümlerdir [41,54]. Hermityen manifoldlarda tanımlı invaryant, anti-invaryant ve yarı-invaryant Riemann dönüşümler fikri birçok yazar tarafından çalışılmıştır [34,37,46,50].

Son zamanlarda, Clairaut konformal submersiyonlar ve Clairaut konformal Riemann dönüşümler kavramları [39,40] de tanıtılmış ve bu dönüşümlerin çeşitli geometrik özellikleri sayesinde oldukça ilgi gördükleri söylenebilir. Bu tezde, Konformal Riemann dönüşümler ve Sasakian manifoldlara tanımlı yarı-invaryant Riemann dönüşümler incelenmiştir. Bu nedenle gelecekte, Clairaut Riemann dönüşümler fikrini bu iki kavramla birleştirmek ve Clairaut konformal yarı-invaryant Riemann dönüşümler (özellikle Clairaut konformal yarı- invaryant submersiyonlar) Kaehler ve/veya Sasakian manifoldlarda incelemek ilginç sonuçlar verecektir.

KAYNAKLAR

- [1] R. Demir, "Yüksek Lisans Tezi," YÖK Ulusal Tez Merkezi, 2021. [Çevrimiçi]. Erişim: <https://tez.yok.gov.tr/UlusalTezMerkezi/tezSorguSonucYeni.jsp>
- [2] B. Şahin, *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayınevi, 2012.
- [3] S. Gudmundsson, "An Introduction to Riemannian Geometry," Lecture Notes, University of Lund, Faculty of Science, vol. 9, pp. 1–235, 2006.
- [4] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, 2003.
- [5] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Oxford University Press, 2003.
- [6] Y. Gündüzalp, "Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine," Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye, 2007.
- [7] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, 2003.
- [8] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, vol. 3, World Scientific, 1984.
- [9] B. O'Neill, *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, 1983.
- [10] W. M. Boothby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, vol. 120, 1986.
- [11] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, Dover Publications, 1973.
- [12] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, 1982.
- [13] M. Falcitelli, M. Ianus, and A. Pastore, *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific, 2004.
- [14] B. O'Neill, "The fundamental equations of a submersion," *Michigan Math. J.*, vol. 13, no. 6(4), pp. 459–469, 1966.
- [15] B. Şahin, "Conformal Riemannian maps between Riemannian manifolds, their harmonicity and decomposition theorems," *Acta Applicandae Mathematicae*, vol. 109, no. 3, pp. 829–847, 2008.
- [16] A. E. Fischer, "Riemannian maps between Riemannian manifolds," *Contemp. Math.*, vol. 132, pp. 331–366, 1992.
- [17] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcel Dekker Inc., New York, 1972.
- [18] A. Yadav and K. Meena, "Clairaut Riemannian maps whose total manifolds admit a Ricci soliton," *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 19, no. 2, pp. 1–17, 2022.
- [19] B. Şahin, "CR-Altmanifoldların Geometrisi," Yüksek Lisans Tezi, 1996.
- [20] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, vol. 1, New York: Wiley, 1963.
- [21] B. Şahin, "Holomorphic Riemannian maps," İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 2014.

- [22] B. Şahin, "Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds," *Taiwanese J. Math.*, vol. 17, no. 2, pp. 629–659, 2013.
- [23] B. Şahin, "Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds," *Central European J. Math.*, vol. 8, no. 3, pp. 437–447, 2010.
- [24] B. Şahin, "Semi-invariant submersions from almost Hermitian manifolds," *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 56, no. 1, pp. 173–183, 2013.
- [25] B. Şahin, "Slant submersions from almost Hermitian manifolds," *Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, vol. 54(102), no. 1(3), pp. 93–105, 2011.
- [26] A. Yadav and K. Meena, "Riemannian maps whose base manifolds admit a Ricci soliton," *Publ. Math. Debrecen*, vol. 103, no. 1-2, pp. 115–139, 2023.
- [27] D. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, *Progress in Math.*, vol. 203, 2002.
- [28] E. Garcia-Rio and D. N. Kupeli, *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Springer Netherlands, 1999.
- [29] M. A. Akyol and B. Şahin, "Conformal slant Riemannian maps to Kahler manifolds," *Tokyo J. Math.*, vol. 42, no. 1, pp. 225–237, 2019.
- [30] M. A. Akyol and B. Şahin, "Conformal anti-invariant Riemannian maps to Kaehler manifolds," *Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys.*, vol. 80, no. 4, pp. 187–198, 2018.
- [31] M. A. Akyol and B. Şahin, "Conformal semi-invariant Riemannian maps to Kähler manifolds," *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol. 60, no. 2, pp. 459–468, 2019.
- [32] D. E. Blair, *Contact Manifolds in Riemannian Geometry; Lecture Notes in Math* 509; Springer, 1976.
- [33] J. L. Cabrerizo, A. Carriazo, L. M. Fernandez, and M. Fernandez, "Slant submanifolds in Sasakian manifolds," *Glasgow Math. J.*, vol. 42, no. 1, pp. 125–138, 2000.
- [34] A. Yadav and K. Meena, "Clairaut invariant Riemannian maps with Kähler structure," *Turk. J. Math.*, vol. 46, no. 3, pp. 1020–1035, 2022.
- [35] Y. Gündüzalp and M. A. Akyol, "Remarks on conformal anti-invariant Riemannian maps to cosymplectic manifolds," *Hacettepe J. Math. Stat.*, pp. 1–9, 2021.
- [36] J. P. Jaiswal, "Harmonic maps on Sasakian manifolds," *J. Geom.*, vol. 104, no. 2, pp. 309–315, 2013.
- [37] S. Kumar, R. Prasad, and S. Kumar, "Clairaut semi-invariant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds," *Turk. J. Math.*, vol. 46, no. 4, pp. 1193–1209, 2022.
- [38] K. Meena, H. M. Shah, and B. Şahin, "Riemannian warped product maps," *Results Math.*, vol. 79, no. 2, pp. 1–30, 2024.

- [39] K. Meena and T. Zawadzki, "Clairaut conformal submersions," *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 47, no. 4, pp. 1–22, 2024.
- [40] K. Meena, H. M. Shah, and B. Şahin, "Geometry of Clairaut conformal Riemannian maps," *J. Austr. Math. Soc.*, 2024.
- [41] K. Meena and A. Yadav, "Clairaut Riemannian maps," *Turk. J. Math.*, vol. 47, no. 2, pp. 794–815, 2023.
- [42] T. Nore, "Second fundamental form of a map," *Annali di Matematica pura ed applicata*, vol. 146, pp. 281–310, 1986.
- [43] B. Pandey, J. P. Jaiswal, and R. H. Ojha, "Necessary and sufficient conditions for the Riemannian map to be a harmonic map on cosymplectic manifolds," *Proc. Natl. Acad. Sci., India*.
- [44] R. Prasad and S. Pandey, "Slant Riemannian maps from an almost contact manifold," *Filomat*, vol. 31, no. 13, pp. 3999–4007, 2017.
- [45] R. Prasad and S. Kumar, "Slant Riemannian maps from Kenmotsu manifolds into Riemannian manifolds," *Glob. J. Pure Appl. Math.*, vol. 13, pp. 1143–1155, 2017.
- [46] M. Polat and K. Meena, "Clairaut semi-invariant Riemannian maps to Kähler manifolds," *Mediterr. J. Math.*, vol. 21, no. 3, pp. 1–19, 2024.
- [47] R. Ponge and H. Reckziegel, "Twisted products in pseudo-Riemannian geometry," *Geometriae Dedicata*, vol. 48, no. 1, pp. 15–25, 1993.
- [48] B. Şahin, "Invariant and anti-invariant Riemannian maps to Kahler manifolds," *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 7, no. 3, pp. 1–19, 2010.
- [49] B. Şahin, *Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and their Applications*, Elsevier, Academic Press, 2017.
- [50] A. Yadav and K. Meena, "Clairaut anti-invariant Riemannian maps from Kähler manifolds," *Mediterr. J. Math.*, vol. 19, no. 2, pp. 1–19, 2022.
- [51] B. Şahin and S. Yanan, "Conformal Riemannian maps from almost Hermitian manifolds," *Turkish J. Math.*, vol. 42, no. 5, pp. 2436–2451, 2018.
- [52] B. Şahin, "Semi-invariant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds," *Indag. Math.*, vol. 23, pp. 80–94, 2012.
- [53] B. Şahin, "Slant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds," *Quaest. Math.*, vol. 36, pp. 449–461, 2013.
- [54] B. Şahin, "Circles along a Riemannian map and Clairaut Riemannian maps," *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 54, no. 1, pp. 253–264, 2017.
- [55] A. Yadav and K. Meena, "Riemannian maps whose total manifolds admit a Ricci soliton," *J. Geom. Phys.*, vol. 168, pp. 1–13, 2021.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

KARAGÖL, Sümeyye

Web sayfası

(Research Gate, Academia, vs.)

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Yüksek Lisans	Dicle Üniversitesi	2025
Lisans	Ahi Evran Üniversitesi	2016
Lise	Sungurlu Lisesi	2011

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2016-2018	Mavi Limit Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2018-2020	Tuzer Online Eğitim	Matematik Öğretmeni
2019-2020	Hedefim Koleji	Matematik Öğretmeni
2021-2022	Okyanus Koleji	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Polat, M., & Karagöl, S. (2025). Conformal semi-invariant Riemannian maps to Sasakian manifolds. Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 74(1), 56-67. <https://doi.org/10.31801/cfsuasmas.1488287> - Emerging Sources Citation Index (ESCI)
2. Murat Polat and Sümeyye Karagöl, (2023). A Study on Conformal Semi-Invariant Riemannian Maps to Sasakian Manifolds. 2nd International Symposium On Current Developments In Fundamental And Applied Mathematics Sciences (ISCDFAMS 2023) (Özet Bildiri/Sözlü Sunum)
- 3.
- 4.

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Sümeyye KARAGÖL		
Öğrenci No	22804035		
Ana Bilim Dalı	Matematik Ana Bilim Dalı		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☒	Doktora ☐
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Doç. Dr. Murat POLAT		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)			
Tez Başlığı	Riemann Manifoldlarından Sasakian Manifoldlarına Tanımlı Konformal Yarı İnvaryant Riemann Dönüşümler		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	55		
Raporlama Tarihi	24.06.2025		
Benzerlik Oranı (%)	14		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 50 sayfalık kısmına ilişkin, 24/06/2025 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı % 14 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☒Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☐Diğer (Açıklayınız)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Tez benzerlik oranı üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Sümeyye KARAGÖL

Tarih: 26.06.2025

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Doç. Dr. Murat POLAT	İmza:
Tarih:	
Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. Hatun Özlem GÜNEY	İmza:
Tarih:	