

T.C
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ İÇİN RIEMANN
PROBLEMİ VE ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Feride ÖZER

İSTANBUL, 2014

T.C
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK-BİLGİSAYAR ANA BİLİM DALI
UYGULAMALI MATEMATİK BİLİM DALI

**İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ İÇİN RIEMANN
PROBLEMİ VE ÇÖZÜMÜ**

Yüksek Lisans Tezi

Tezi Hazırlayan:

Feride ÖZER

Öğrenci No:

120860004

Danışman:

Prof. Dr. Mahir RESULOV

İSTANBUL, 2014

YEMİN METNİ

Yüksek Lisans tezi olarak sizlere sunduğum “**İki Boyutlu Burgers Denklemi İçin Riemann Problemi ve Çözümü** ” başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlaka ve geleneklere uygun bir biçimde tarafımdan yazıldığını, faydalandığım eserlerin hepsinin kaynaklarda belirtildiği ve çalışmamın içinde kullanıldıkları her yerde atıf yapıldığını açıklar ve bunu onurumla doğruluğunu belirtirim. 01.08.2014

Feride ÖZER



T.C.
BEYKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZ SAVUNMA SINAVI SONUÇ TUTANAĞI

Beykent Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Aşağıda tez adı belirtilen yüksek lisans öğrencisi 120860004 no'lu Feride ÖZER'in 01/08/2014 tarihinde yapılan tez savunma sınavı¹ sonucunda 60 (Altmış) dakika süreyle sunduğu ve savunduğu tezi hakkında² oyçokluğu ile kabul kararı verilmiştir.

Bilgilerinize saygılarımızla arz ederiz.

Anabilim Dalı : Matematik-Bilgisayar
Programı : Uygulamalı Matematik
Tez Başlığı³ : İki Boyutlu Burgers Denklemi İçin Riemann Problemi ve Çözümü

<u>Tez Sınav Jürisi</u>	<u>Öğretim Üyesi</u>
Danışman	: Prof.Dr. Mahir RESULOV
Üye	: Prof.Dr. Abdullah YILDIZ
Üye	: Doç.Dr. Bahaddin SİNSOYSAL

İmza




¹ Jüri üyeleri söz konusu tezin kendilerine teslim edildiği tarihten itibaren en geç bir ay içinde toplanarak öğrenciyi tez savunma sınavına alır. Belirlenen günde yapılamayan jüri toplantısı, katılanların hazırladığı bir tutanakla enstitü yönetimine bildirilir. Bu durumda jüri en geç onbeş gün içinde toplanarak adayı tez savunma sınavına alır. Tez savunma sınav süresi en az 45 dakikadır. Yüksek lisans tez savunma sınavı, tez çalışmasının sunulması ve bunu izleyen soru-yanıt bölümlerinden oluşur ve dinleyiciye açıktır. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-3)

² Tez sınavının tamamlanmasından sonra jüri, tez hakkında "kabul", "düzeltme" veya "red" kararı verir. Jüri başkanı, jüri üyelerince imzalanmış sınav tutanağını, tez sınavını izleyen üç gün içinde ilgili enstitü yönetimine teslim eder. Tezi başarısız bulunan öğrencinin Enstitü ile ilişkisi kesilir. Tezi hakkında düzeltme kararı verilen öğrenci en geç üç ay içinde gerekli düzeltmeleri yaparak ve yönetmelikte belirtilen usullere uygun olarak tezini aynı jüri önünde yeniden savunur. Bu savunma sınavında da tezi kabul edilmeyen öğrencinin enstitü ile ilişkisi kesilir. (Beykent Lisansüstü eğitim ve Öğretim Yönetmeliği-Madde30-4)

³ İleride doğabilecek aksaklıkların engellenmesi için tezin başlığının yazılması gerekmektedir.

ÖNSÖZ

Bu tez konusunu bana öneren, tezimin her aşmasında yardımlarını esirgemeyen, yüksek lisans öğrenimim boyunca engin bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım, her türlü desteği ve kolaylığı sağlayan tez danışmanım değerli hocam Sayın Prof. Dr. Mahir RESULOV' a ve Doç. Dr. Bahaddin SİNSOYSAL' a, lisansımda büyük katkısı olan kıymetli hocam Dicle Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Hasan İlhan TUTALAR' a, idolüm, yüksek lisansımı yapmamı en çok isteyen ve her zaman arkamda duran babam Abdullah ÖZER' e, her türlü desteği sağlayan canım annem Dilek ÖZER 'e, evimizin küçük prensesi Cemre BALTALI' ya en içten saygılarımı sunar, teşekkür ederim.

İstanbul, 2014

Feride ÖZER

İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ İÇİN RIEMANN PROBLEMİ VE ÇÖZÜMÜ

Tezi Hazırlayan: **Feride ÖZER**

ÖZET

Üç bölümden oluşan tezim birinci bölümünde, Riemann problemi tanıtılmış, İkinci bölümünde ise literatür incelemesi yer almıştır.

Bilindiği üzere, başlangıç fonksiyonun x - y düzleminde aldığı değerlere bağlı olarak 4 dilimli (4 parçalı sabit değer alabilen başlangıç koşullu problemlerde) şok ve seyreltme dalgalarının oluşma dinamiği karakteristikler analizi yolu ile sınıflandırılmıştır. Ayrıca sürekli başlangıç koşula ve 2 dilimli başlangıç koşula sahip Cauchy probleminin gerçek çözümü incelenmiş ve sıçrayışının bulunması için bir yöntem de incelenmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, literatür de Liska-Wendroff kompozitif şema olarak isimlendirilen sayısal çözümlerde yer almıştır. Bunun yanı sıra 2 boyutlu Burgers denklemi ve 2 dilimli başlangıç koşullu problemin çözümlerinin elde edilmesi için yeni bir yöntem de incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler; Riemann,Cauchy,Burgers

RIEMANN PROBLEM FOR ONE DIFERANTIONAL BURGERS EQUATION AND ITS SOLUTION

Presented By: **Feride ÖZER**

ABSTRACT

In first section of this thesis which consists of there sections the Riemann problems are explained, wehere four sectional Riemann problem is clascified.

In thrid past using Liska-Wendroff the compozite schems is given. Addition to, for two sectional Riemann problem for 2 Dimensional Burgers equation is suggested.

Key Words; Riemann,Cauchy,Burgers

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

ÖZET

ABSTRACT

ŞEKİLLER LİSTESİ..... iv

1.GİRİŞ. RIEMANN PROBLEMİ 1

2. İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ İÇİN RIEMANN PROBLEMİ VE PROBLEME KOYULUŞU 2

2.1 Dört Bölgeli Parçalı Sabit Başlangıç Koşulu 2

2.1.1. Seyreltme Eğrileri 2

2.1.2 Darbe Eğrisi..... 3

2.2 Sürekli Başlangıç Koşullu Problemin Gerçek Çözümü 5

2.2.1 Yardımcı Problem ve Çözümü 11

2.2.2 Sıçrayışın Kurulması 13

2.3 İki Boyutlu Skaler Korunum Kuralı 15

3. İKİ BOYUTLU KORUNUM KANUNLARININ NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ 18

3.1 Kompozitif Şemalar 18

3.1.1 Analitik Çözüm ve Nümerik Sonuçlar 20

3.1.2 Dört Şok 21

3.1.3 Üç Şok ve Bir Seyreltme 21

3.1.4 İki Şok ve İki Seyreltme 22

3.1.5 Şok ve Üç Seyreltme 23

3.1.6 Dört Seyreltme 23

3.2 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Yöntemi 36

3.2.1 Süreksiz Başlangıç Koşul 37

3.2.2 Yardımcı Problem ve Onun Çözümü 38

3.2.3 İki Bölgeli Parçalı Sürekli Başlangıç Koşulu 40

SONUÇ 46

KAYNAKLAR..... 47

ŞEKİLLER LİSTESİ

Sayfa No.

Şekil 1. Riemann problemi için başlangıç koşulu.....	1
Şekil 2. Şok ve seyreltmenin sınıflandırılması $ul > ur$,	3
Seyreltme $R-, R+$; (b) Darbeler $S-, S+$	3
Şekil 3. (1,2,3,4) Başlangıç koşulu, dört şok ($S-, S-, S+, S+$) (a) analitik çözüm, (b) nümerik çözüm.....	4
Şekil 4. (1,2,3,4) Başlangıç koşulu ,dört şok ($S-, S-, S+, S+$) nümerik çözüm.....	5
Şekil 5. (1,2,4,3) başlangıç koşulu, dört darbe ($S - S - S + S+$) çerçevesinde (a) analitik çözüm, (b) sayısal çözüm	24
Şekil 6. (1,3,4,2) başlangıç koşulu, dört darbe ($S - S - S + S+$) çerçevesinde sayısal çözüm	25
Şekil 7. (1,2,3,4) başlangıç koşulu, üç şok ve seyretme dalgası($S - S - R + S+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	26
Şekil 8. (2,1,3,4) başlangıç koşulu, üç şok ve bir seyreltme ($R - S - S + S+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	27
Şekil 9. (1,3,2,4) başlangıç koşulu, iki şok ve iki seyreltme ($S - R - R + S+$) , (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	28
Şekil 10. (2,3,1,4) başlangıç koşulu iki şok ve iki seyreltme ($S - R - R + S+$) (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	29
Şekil 11. (3,1,4,2) başlangıç koşulu iki şok ve iki seyreltme ($R - S - S + R+$) (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	30
Şekil 12. (4,1,3,2) iki şok ve iki seyreltme ($S - R - S + R+$) , (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	31
Şekil 13. (2,1,3,4) iki şok ve iki seyreltme ($R - S - R + S+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	32
Şekil 14. (3,1,2,4) iki şok ve iki seyreltme ($R - S - R + S+$) , (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	33
Şekil 15. (4,1,2,3) bir şok ve üç seyreltme ($R - S - R + R+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	34
Şekil 16. (4,1,2,3) bir şok ve üç seyreltme ($R - S - R + R+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	35

Şekil 17. $(4,2,1,3)$ dört seyreltme $(R - R - R + R+)$, (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm	36
Şekil 18 : $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $T=1.0$	40
Şekil 19: $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 0.8$	41
Şekil 20: $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 1.0$	41
Şekil 21 : $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2$	42
Şekil 22: $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2$	43
Şekil 23: $v(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 0.8$	43
Şekil 24: $v(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 0.8$	44
Şekil 25: $u(x, y, t) = Lv(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 0.8$	44
Şekil 26: $u(x, y, t) = Lv(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 0.8$	45

1.GİRİŞ. RIEMANN PROBLEMİ

İki değişkenli uzayda skaler korunum kuralları için Riemann problemi

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \quad (1)$$

denklemleri ile $x = 0$, $y = 0$ orijin merkezli sonlu sayıda dilimlerin üzerinde parçalı sabit değerler alabilen başlangıç koşullu problem olarak ifade edilmektedir. En ilgi çekici problem, 4 dilimli $\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ ışınları ile bölünmüş dilimler üzerinde sabit değer alanıdır. Bundan dolayı bu tür başlangıç verileri sonlu farklar şeması ile de uyumlu olur. Tipik Riemann koşulu Şekil 1 de verilmiştir.

İki değişkenli Riemann problemi üzerine en önemli çalışma ilk olarak Guckenheimer tarafından yapılmıştır [1]. İki boyutlu tek korunum kuralı için dört çeyrek dairesel Riemann problemi Wegner tarafından çalışılmıştır [2]. Skaler denklem için birçok önemli çalışma [3,4,7,9,10] de yapılmıştır

[3] de seyreltme ve şok dalgaları için dayanak (temel) noktası ve dayanak eğrisini sınıflandırılmıştır. Seyreltme ve şok, R^+ , R^- ve S^+ , S^- de ayrı ayrı sınıflandırıldı. Daha sonra [5] deki komposit şema verilmiştir. [9], [10] da Burgers denklemi için iki boyutlu Riemann probleminin analitik çözümleri kurulmuştur. Komposit şemayla elde edilen nümerik çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldı. [5] elde edilen gerçek çözümlerle nümerik çözümler karşılaştırılmıştır.

U_2	U_1
U_3	U_4

Şekil 1. Riemann problemi için başlangıç koşulu

Şok ve seyreltme için dayanak noktası ve dayanak eğrisini sınıflandırılması iki boyutlu Riemann probleminin analitik çözümü için çok önemli bir araçtır.

2. İKİ BOYUTLU BURGERS DENKLEMİ İÇİN RIEMANN PROBLEMİ VE PROBLEME KOYULUŞU

Kabul edelim ki, herhangi bir u için $f_{uu} \neq 0$, $g_{uu} \neq 0$ ve $\partial/\partial u (f_{uu}/g_{uu}) \neq 0$. Bu kabul bize akış fonksiyonunun en az bir büküm noktası olduğunu garantiler.

2.1 Dört Bölgeli Parçalı Sabit Başlangıç Koşulu

2.1.1. Seyreltme Eğrileri

$\xi = x/t$, $\eta = y/t$ değişken dönüşümü yapalım. O halde (1) denklemi

$$-\xi u_\xi - \eta u_\eta + f(u)_\xi + g(u)_\eta = 0. \quad (2)$$

$u \in C^1$ için (2) olur. Sonuncu denklemi

$$(f_u(u) - \xi)u_\xi + (g_u(u) - \eta)u_\eta = 0 \quad (3)$$

şeklinde yazabiliriz. Bunun karakteristik denklemi aşağıdaki biçimde

$$d\eta(\xi)/d\xi = (g_u(u) - \eta)/(f_u(u) - \xi) \quad (4)$$

ve

$$d(\xi, \eta(\xi))/d\xi = 0 \quad (5)$$

olmaktadır. (4) ve (5) formu, aşağıdaki gibi karakteristik doğrular

$$(\eta - g_u(u))/(f_u(u) - \xi) = \text{const}, \quad u = \text{const}. \quad (6)$$

tanımlar.

(6) dan görüldüğü gibi u -ailesin $u = u_0$ seviye eğrisinin teğeti koordinatları $\xi - \eta$ düzleminde

$$F_u(u_0) \equiv (f_u(u_0), g_u(u_0)) \quad (7)$$

olan $F_u(u_0)$ noktasından geçen doğru parçası olmaktadır.

Tanım 1.

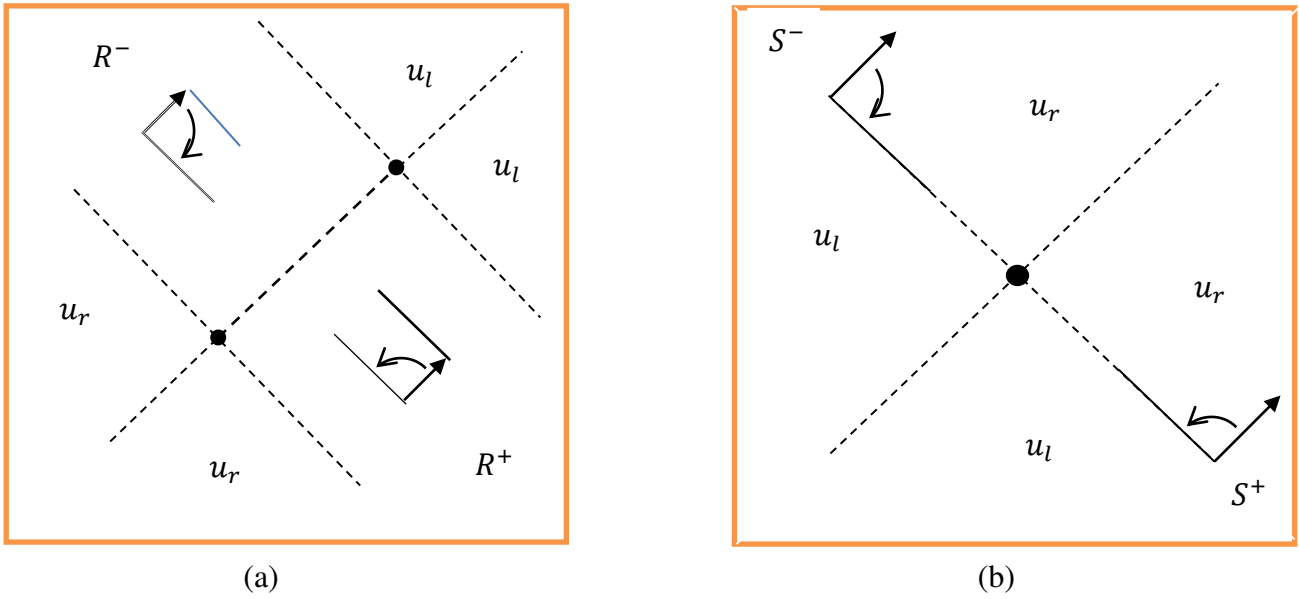
$$F_u(u) \equiv (f_u(u), g_u(u)) \quad (8)$$

noktalarının geometrik yerini seyreltme dayanak eğrisi olarak adlandıracağız.

Kolayca gösterilebilir ki, seyreltme dayanak eğrisi $(\xi - \eta)$ koordinat düzleminde monoton artan ve konkavdır. Seyreltme dalgaları u -nun gradiyan istikametinin karşısındaki temel dayanak eğrisi istikametine bağlı olarak sınıflandırılabilir.

Tanım 2. Seyreltme dalgası R^+ (R^-) eğer $\nabla_{\xi,\eta} u$ ve temel eğri istikameti yönünde dalga formunun karakteristik doğrularının dayanak eğrisi bir sağ (sol) el sistemi ise n sınıflandırılmasıdır.

R^+ ve R^- seyreltme dalgaları Figür 2 (a) da verilmiştir. $u_l > u_r$ de figür 2 de verilmiştir.



**Şekil 2. Şok ve seyreltmenin sınıflandırılması ($u_l > u_r$),
(a) Seyreltme R^-, R^+ ; (b) Darbeler S^-, S^+**

2.1.2 Darbe Eğrisi

(2) de parçalı sürekli darbe eğrisi için verilmiştir $\eta = \eta(\xi)$ Rankino- Hugoniot koşulu

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta - \sigma^g(u_l, u_r)}{\xi - \sigma^f(u_l, u_r)} \quad (9)$$

burada

$$\sigma^f(u_l, u_r) \equiv \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r}, \quad \sigma^g(u_l, u_r) \equiv \frac{f(u_l) - f(u_r)}{u_l - u_r} \quad (10)$$

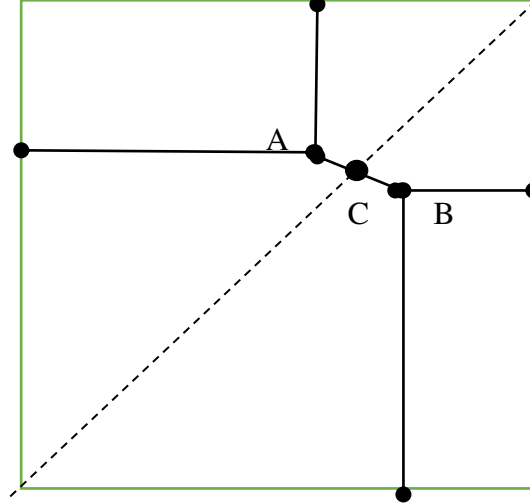
[9] dan u_l ve u_r den uzanan segmentin $\xi\eta_-$ planı böldüğünü gördük ki onun tanjant şok noktasını teğet geçen şok kaynak noktası $\sigma(u_l, u_r)$ $\xi\eta_-$ planındaki koordinatları

$$\sigma(u_l, u_r) \equiv (\sigma^f(u_l, u_r), \sigma^g(u_l, u_r)) \quad (11)$$

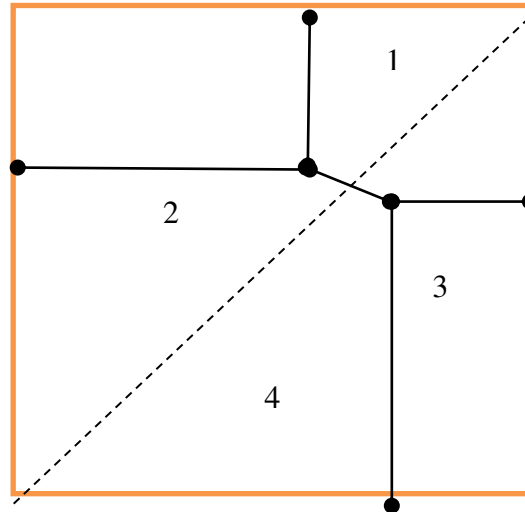
$\sigma(u_l, u_r)$ ve $\sigma(u_r, u_l)$ notasyonları aynı kaynak noktalarını gösterir. Kaynak noktasının eğrisi

$$\sigma(u, u_r) \equiv (\sigma^f(u, u_r), \sigma^g(u, u_r)) \quad (12)$$

u_r bölgesi için şok dayanak eğrisi olarak gösterilir.

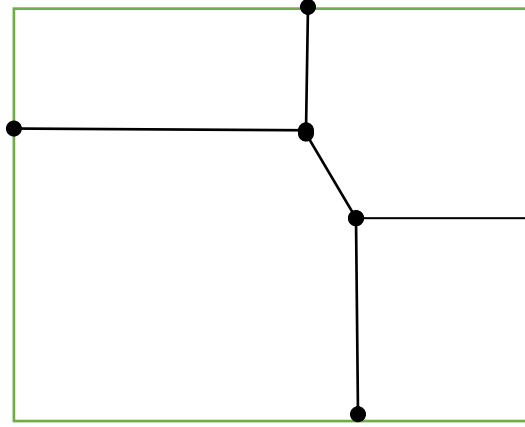


(a)



(b)

Şekil 3. (1,2,3,4) Başlangıç koşulu, dört şok (S^- , S^- , S^+ , S^+) (a) analitik çözüm, (b) nümerik çözüm



Şekil 4. (1,2,3,4) Başlangıç koşulu, dört şok (S^- , S^- , S^+ , S^+) nümerik çözüm

Kaynak noktası u_l ve u_r durumlarının lokal pozisyon şokunu içeren seyreltme kaynak noktası benzer olarak kullanılır. Şok kaynak noktasının $\xi - \eta$ planında monoton artan ve konkav olduğu kolayca gösterilir.

Tanım 3. Bir şok dalgası S^+ (S^-) olarak sınıflandırılır. Eğer her nokta şok formunun normal ve tanjant vektörleri ise bir sağ (sol) el sistemidir.

S^+ ve S^- şok dalgaları Şekil 2 (b) de verilmiştir. Kaynak noktası ve kaynak eğrisi hakkında ayrıntılar [5,6,7] da bulunabilir.

$f(u) = g(u)$ için seyreltme ve şok kaynak noktası $\eta = \xi$ dik doğrusu üzerinde yer alır.

2.2 Sürekli Başlangıç Koşullu Problemin Gerçek Çözümü

Bu bölümde iki dilimli başlangıç koşullu problemin gerçek çözüm bulunması D_T dir.

Aşağıdaki problemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (13)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (14)$$

gözönüne alalım. (13) diferansiyel denkleminin geometrik anlamını açıklamak mümkündür.

Sözkonusu denklemin $u(x, y, t)$ integral yüzeyi (x, y, t, u) uzayının herhangi bir $P(x, y, t, u)$

noktasında bileşimleri $u_x = p$, $u_y = q$, $u_t = \pi$ olan ve

$$\pi + up + uq = 0$$

denklemleri ile bağılı olan normal düzleme sahip olmaktadır. Bu durumda P noktasından geçen integral yüzeyleri teğet düzlemi

$$dt : dx : dy : du \equiv 1 : u : u : 0$$

bağılantıları ile verilen düzlemler demeti olmaktadır. Bu düzlemler demetlerine Monja demetleri, eksnlere ise Monja eksnleri denir.

Şimdi karakteristikleri bulalım. Bu amaçla

$$\frac{dx(t)}{dt} = u, \quad \frac{dy(t)}{dt} = u \quad (15)$$

denklemleri ile tanımlanan $(x = x(t), y = y(t))$ eğrilerini gözönüne alalım. (15) i dikkate alırsak (13) ü

$$\frac{du}{dt} = 0 \quad (16)$$

gibi yazabiliriz. Böylelikle, (13) denkleminin genel çözümünün bulunması (x, y, t) düzleminde eğimleri u olan doğrular ailesinin bulunmasına indirgenmektedir.

(15) ve (16) dan

$$x = ut + c_1, \quad y = ut + c_2, \quad u = c_3$$

elde ederiz, burada c_i ($i = 1, 2, 3$) keyfi sabitlerdir. Sözkonusu sabitleri bulmak için aşağıdaki başlangıç koşullarını

$$x|_{t=0} = \xi, \quad y|_{t=0} = \eta, \quad u|_{t=0} = u_0(\xi, \eta) \quad (17)$$

kullanalım. Bu koşullar çerçevesinde problemin çözümü için aşağıdaki ifadeyi

$$u(x, y, t) = u_0(\xi, \eta) = \begin{cases} 1 - (x - ut)^2 - (y - ut)^2, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases} \quad (18)$$

elde ederiz. Burada, $\xi = x - ut$, $\eta = y - ut$ ve $|\xi| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ olmaktadır. ξ ve η koordinatlarına hareket eden koordinatlar denir.

(18) ifadesi hareket eden koordinatlarda

$$u(x, y, t) = \begin{cases} 1 - \xi^2 - \eta^2, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases} \quad (19)$$

gibi yazılır. Kolayca gösterilebilir ki, (19) ifadesi ile tanımlanan u fonksiyonu (13), (14) probleminin çözümü olmaktadır. Gerçekten de,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

ve

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -u - t \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t} = -u - t \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1 - \frac{\partial u}{\partial x} t, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = 1 - \frac{\partial u}{\partial y} t$$

olduğunu dikkate alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u - \frac{\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta}}{1 + t \left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)}$$

ve

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u_0}{\partial \xi}}{1 + t \left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial u_0}{\partial \eta}}{1 + t \left(\frac{\partial u_0}{\partial \xi} + \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)} \quad (20)$$

elde ederiz. Bu ifadeler (13)'te yerine konursa denklemin korunduğunu görürüz. Başlangıç koşulunun da korunduğu görmek zor değildir.

Görüldüğü gibi (20) ifadesine u kapalı şeklinde dahil olmaktadır. Fakat bu ifadeden u yu açık şekilde

$$u(x, y, t) = \begin{cases} \frac{2(x+y)t - 1 \pm \sqrt{d}}{4t^2}, & |\xi| \leq 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases} \quad (21)$$

bulmak mümkündür, burada $d = 1 + 8t^2 - 4t(x+y) + 4t^2(x+y)^2$ olmaktadır.

(20) ifadeleri $u(x, y, t)$ fonksiyonunun keyfi (x, y, t) noktasındaki eğimlerini $u_0(x, y)$ fonksiyonunun $(x = \xi, y = \eta, t = 0)$ noktasındaki eğimi ile ifade eder. Bir boyutlu ortamlarda olduğu gibi (15) ifadeleri u fonksiyonunun çeşitli değerlerinin u hızıyla dağıldığını göstermektedir. Bu ise çözümün profilinde çokdeğerlilik oluşturur ve kırılma ilk kez grafiğe

dik teğet düzlemin olduğu T_0 anında ortaya çıkar. (14) ten görüldüğü gibi başlangıç yüzeyi hem negatif hem de pozitif eğime sahip olmaktadır. Çözümün grafiğinde çokdeğerliliğin oluşabilmesi için $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ fonksiyonları $(x=1, y=0)$ ve $(x=0, y=1)$ noktalarında pozitif eğime sahip olmak zorundadır. Açık ki, eğim negatif değerden pozitif değere geçtiğinde, grafiğe çizilen teğetin dik olması gerekmektedir. Dik teğetin olduğu zaman aradığımız T_0 olmaktadır.

Bu özellik ise $u(x, y, t)$ fonksiyonunun çokdeğerli olması anlamına geliyor ki, bu da (13) denkleminin nonlineer olmasından kaynaklanmaktadır ve bu özellik lineer denklemlerde yoktur. (21) ifadesinden

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=1, y=0} = \frac{1}{4t^2} \left(2t + \frac{8t^2}{\sqrt{1+8t^2-4t(x+y)-4t^2(x-y)^2}} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{x=0, y=1} = \frac{1}{4t^2} \left(2t + \frac{8t^2}{\sqrt{1+8t^2-4t(x+y)-4t^2(x-y)^2}} \right)$$

$T_0 = 0.5$ ve $t > T_0$ olduğunda $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial u}{\partial y}$ türevleri sonsuzluğa yaklaştığı görülmektedir. Dolayısıyla (13), (14) probleminin klasik çözümü yoktur. Söz konusu problemin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 4. Negatif olmayan, (14) başlangıç koşulunu ve $\varphi(x, y, T) = 0$ olan herhangi bir $\varphi(x, y, t)$ test fonksiyonları için aşağıdaki integral eşitliğini

$$\iint_{R^2} \int_{R_+^1} \left\{ u(x, y, t) \varphi_t(x, y, t) + \frac{u^2(x, y, t)}{2} [\varphi_x(x, y, t) + \varphi_y(x, y, t)] \right\} dx dy dt$$

$$+ \iint_D \varphi(x, y, 0) u_0(x, y) dx dy = 0 \quad (22)$$

koruyan $u(x, y, t)$ fonksiyonuna (13), (14) probleminin zayıf çözümü denir.

(13), (14) probleminin zayıf çözümünü elde etmek için 1.tür yardımcı problemi

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} (Lv)^2 = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 = 0, \quad (23)$$

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y) \quad (24)$$

şeklinde dahil edelim. Burada, $v_0(x, y)$ fonksiyonu

$$\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} = u_0(x, y) \quad (25)$$

denkleminin herhangi bir çözümü olmaktadır.

Teorem 1. Eğer, $v(x, y, t)$ fonksiyonu (13), (14) yardımcı probleminin herhangi bir çözümü ise

$$Lv(x, y, t) = \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} = u(x, y, t) \quad (26)$$

ifadesi ile tanımlanan $u(x, y, t)$ fonksiyonu esas problemin zayıf çözümü olmaktadır.

Yardımcı problemi çözerken başlangıç $v_0(x, y)$ fonksiyonunun bulunması gerekir. Bunun için önce (25) denkleminin

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = 1 - x^2 - y^2$$

çözümünü bulalım.

Karakteristiklerin denklemleri

$$\frac{dx}{ds} = 1, \quad \frac{dy}{ds} = 1, \quad \frac{dw_0}{ds} = 1 - x^2 - y^2$$

olur. Buradan

$$x = x^{(0)} + s, \quad y = y^{(0)} + s, \quad (27)$$

$$w_0 = s - \frac{(x^{(0)} + s)^3}{3} - \frac{(y^{(0)} + s)^3}{3} + w_0^{(0)}$$

elde ederiz. Burada, $x^{(0)}, y^{(0)}$ ve $w_0^{(0)}$ integralleme sabitleri olmaktadır. Eğer karakteristiklerin denklemleri

$$x^{(0)} = x^{(0)}(t), \quad y^{(0)} = y^{(0)}(t), \quad w_0^{(0)} = w_0^{(0)}(t)$$

gibi verildiği takdirde (27)

$$\begin{cases} x(s,t) = x^{(0)}(t) + s, \\ y(s,t) = y^{(0)}(t) + s, \\ w_0(s,t) = s - \frac{(x^{(0)}(t) + s)^3}{3} - \frac{(y^{(0)}(t) + s)^3}{3} + w_0^{(0)}(t) \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\Delta(s,t) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{vmatrix} \neq 0$$

olursa sonuncu ifadenin ilk iki denkleminde s ve t yok ederek w_0 u x ve y yardımı ile ifade edebiliriz. Özel durumda eğer başlangıç yüzeyi

$$x^{(0)}(t) = t, \quad y^{(0)}(t) = -t, \quad w_0^{(0)}(t) = t - \frac{2t^3}{3}$$

olarak ele alsak bu yüzey üzerinde $\Delta(s,t) \neq 0$ olduğundan

$$s = y - y^{(0)}, \quad x = x^{(0)} + y - y^{(0)} = y + 2t,$$

$$w_0 = y + t - \frac{(t+s)^3}{3} - \frac{(-t+s)^3}{3} + t - \frac{2t^3}{3}$$

$$= y + 2t - \frac{(y+2t)^3}{3} - \frac{(y)^3}{3} - \frac{2t^3}{3}$$

denklemlerini elde ederiz. $2t = x - y$ olduğunu da dikkate alırsak

$$w_0(x,y) = x - \frac{x^3}{3} - \frac{y^3}{3} - \frac{2(x-y)^3}{3}$$

alırız. Kolayca gösterilebilir ki,

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial y} = u_0$$

olmaktadır. Böylelikle L^{-1} varlığını da ispatlamış oluruz.

2.2.1 Yardımcı Problem ve Çözümü

Şimdi (23), (24) yardımcı probleminin çözümünü bulalım. Aşağıdaki notasyonları

$$\frac{\partial v}{\partial t} = p, \frac{\partial v}{\partial x} = q_1, \frac{\partial v}{\partial y} = q_2$$

dahil edelim. Bu notasyonlarda (23) denklemini

$$\pi(p, q_1, q_2) \equiv p + \frac{1}{2}(q_1 + q_2)^2 = 0$$

gibi yazalım. Sonuncu ifadesini t, x ve y ye göre diferansiyellersek

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_1}{\partial t} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_2}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} - (q_1 + q_2) \frac{\partial q_1}{\partial x} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_2}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_1}{\partial y} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0$$

elde ederiz.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q_1}{\partial t}, \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q_2}{\partial t}, \frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{\partial q_2}{\partial x}$$

olduğundan sonuncu ifadeleri

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + (q_1 + q_2) \frac{\partial p}{\partial x} + (q_1 + q_2) \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial q_1}{\partial t} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_1}{\partial x} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial q_2}{\partial t} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_2}{\partial x} + (q_1 + q_2) \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

şeklinde yazabiliriz. Böylelikle (t, x, y, p, q_1, q_2) uzayında karakteristikleri bulmamız için aşağıdaki Charpit adi diferansiyel denklemler sistemini

$$\begin{cases} \frac{dt}{ds} = 1, \frac{dx}{ds} = (q_1 + q_2), \frac{dy}{ds} = (q_1 + q_2), \\ \frac{dp}{ds} = 0, \frac{dq_1}{ds} = 0, \frac{dq_2}{ds} = 0, \\ \frac{dv}{ds} = p + (q_1 + q_2)^2 \end{cases}$$

alırız. Bu sistemin genel çözümleri

$$\begin{cases} t = s + c_0, x = (q_1 + q_2)s + c_1, \\ y = (q_2 + q_1)s + c_1, p = c_3, q_1 = c_4, \\ q_2 = c_5, v = (c_3 + (c_4 + c_5)^2)s + c_6 \end{cases}$$

olmaktadır. İntegral sabitlerini

$$t|_{s=0} = 0, \quad x|_{s=0} = \xi, \quad y|_{s=0} = \eta, \quad p|_{s=0} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$q_1|_{s=0} = \frac{\partial v_0}{\partial \xi}, \quad q_2|_{s=0} = \frac{\partial v_0}{\partial \eta}, \quad v|_{s=0} = v_0(\xi, \eta)$$

koşullarından

$$c_0 = 0, \quad c_1 = \xi, \quad c_2 = \eta, \quad c_3 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right)^2,$$

$$c_4 = \frac{\partial v_0}{\partial \xi}, \quad c_5 = \frac{\partial v_0}{\partial \eta}, \quad c_6 = v_0(\xi, \eta)$$

olarak bulabiliriz. Buradan,

$$\xi = x - (q_1 + q_2)t, \quad \eta = y - (q_1 + q_2)t$$

$$v(x, y, t) = v_0(\xi, \eta) + \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right)^2 \right] t =$$

$$v_0(\xi, \eta) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial \xi} + \frac{\partial v_0}{\partial \eta} \right)^2 t = v_0(\xi, \eta) + \frac{1}{2} u_0(\xi, \eta)^2 t$$

elde ederiz. Şimdi gösterelim ki, $v(x, y, t)$ fonksiyonu (26) yı korumaktadır.

Gerçekten de (14) ü dikkate alırsak (27) den

$$v(x, y, t) = \frac{1}{2}u^2t + (x-ut) - \frac{(x-ut)^3}{3} - \frac{(y-ut)^3}{3} - \frac{2}{3}(x-y)^3$$

alırız. Sade hesaplama yoluyla

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} &= u \frac{\partial u}{\partial x} t + u \frac{\partial u}{\partial y} t + \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} t\right) - \frac{\partial u}{\partial y} t - (x-ut)^2 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} t\right) + \\ & (x-ut)^2 \frac{\partial u}{\partial x} t + (y-ut)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - (y-ut)^2 \left(1 - \frac{\partial u}{\partial x} t\right) - 2(x-y)^2 + 2(x-y)^2 = \\ & u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) t + 1 - \frac{\partial u}{\partial x} t - \frac{\partial u}{\partial y} t - (x-ut)^2 + (x-ut)^2 \frac{\partial u}{\partial x} t + \\ & (x-ut)^2 \frac{\partial u}{\partial y} t + (y-ut)^2 \frac{\partial u}{\partial x} - (y-ut)^2 + (y-ut)^2 \frac{\partial u}{\partial y} t = \\ & u \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) t + 1 - (x-ut)^2 - (y-ut)^2 - \frac{\partial u}{\partial x} t [1 - (x-ut)^2 - (y-ut)^2] - \\ & \frac{\partial u}{\partial y} t [1 - (x-ut)^2 - (y-ut)^2] = 1 - (x-ut)^2 - (y-ut)^2 \end{aligned}$$

elde ederiz.

2.2.2 Sıçrayışın Kurulması

Sıçrayış noktalarının yerini bulmak için [9] önerilmiş yöntemi iki boyutlu probleme de uygulayalım. Bir boyutlu problemlerde olduğu gibi

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t) dx dy \quad (29)$$

enerji integrali hem sürekli hem de süreksiz fonksiyonlar için mevcut olmaktadır ve sözkonusu integralin sonucu zamana bağlı değildir. $E(t)$ nin değerini $t = 0$ olduğu durumda

$$E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x, y) dx dy$$

hesaplayalım.

Şimdi $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ değişken dönüşümlerini yapalım. Bu durum için

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) r dr = \frac{\pi}{2}$$

olmaktadır, yani $E(0) = \frac{\pi}{2}$ sayısı $v(x, y, t)$ fonksiyonunun kritik sayıdır.

Varsayalım ki, $(x = \xi(t), y = \eta(t))$ sıçrayış eğrisinin parametrik denklemleridir ve bu eğriyi bulmak için aşağıdaki gibi bir yöntem geliştirelim.

Tanım 5. Aşağıdaki eşitliği

$$v(\xi(t), \eta(t), t) = E(0)$$

sağlayan noktaların geometrik yerine cephe eğrisi denir.

Buradan,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{d\eta}{dt} = 0$$

elde ederiz. Bu ifadeyi yazarken (23) denkleminin D_T bölgesinin tüm iç ve cephe noktalarında, yani

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right) \bigg|_{\substack{x=\xi(t) \\ y=\eta(t)}} = 0 \quad (30)$$

korunduğunu varsayalım.

(15) i dikkate alarak (30) den

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = u(\xi(t), \eta(t), t) = \frac{\left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right]}{\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right]} \bigg|_{\substack{x=\xi(t) \\ y=\eta(t)}} \quad (31)$$

elde ederiz.

Tanım 6. Aşağıdaki eşitlikle tanımlanan

$$v_{gen}(x, y, t) = \begin{cases} E(0), & v(x, y, t) > E(0), \\ v(x, y, t), & v(x, y, t) \leq E(0) \end{cases} \quad (32)$$

fonksiyonuna (23), (24) probleminin genişletilmiş çözümü denir.

Teorem 1 e göre

$$u_{gen}(x, y, t) = \frac{\partial v_{gen}(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial v_{gen}(x, y, t)}{\partial y} \quad (33)$$

olmaktadır.

Teorem 2. (33) denklemi ile ifade olunan dinamik sistemin hareketi

$$L(p, q_1, q_2) = pL(q_1 + q_2) + L(q_1 + q_2)F(q_1 + q_2) \quad (34)$$

formülü ile tanımlanan Lagranjiyanın ekstremumları olmaktadır.

İspat $v(x, y, t)$ (23), (24) probleminin pürüzsüz çözümü olsun. (34) için yazılmış Euler-Lagrange denklemi

$$\frac{\partial L_p}{\partial t} + \frac{\partial L_{Mv}}{\partial x} + \frac{\partial L_{Mv}}{\partial y} - \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} L_{Mu} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} L_{Mu} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} L_{Mu} \right]$$

olmaktadır. $L_p = Mu$, $L_p = p + Mu$ $F(u)$, $LMu = p + F(u) = 0$ olduğunu dikkate alırsak teoremi ispatlamış oluruz.

2.3 İki Boyutlu Skaler Korunum Kuralı

Bu bölümde skaler korunum kuralını inceleyeceğiz

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} + \frac{\partial g(u)}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

(35) deklemini (14) koşulu çerçevesinde araştıralım. $f(u)$ ve $g(u)$ fonksiyonlarının aşağıdaki koşulları koruduğunu varsayalım:

- (i) $f(u)$ ve $g(u)$ sürekli fonksiyonlardır,
- (ii) $u \geq 0$ için $f'_i(u) \geq 0$, ($i = 1, 2$)
- (iii) $F'_i(u)$ işaret değiştirir, yani $F_i(u)$, ($i = 1, 2$) fonksiyonları konveks ve konkav kısımlara sahiptir.

(35), (14) problemini çözümü

$$u(x, y, t) = u_0(\xi, \eta), \quad (36)$$

olmaktadır. Burada $\xi = x - F'_1(u)t$ ve $\eta = y - F'_2(u)t$ sırasıyla $F'_1(u)$ ve $F'_2(u)$, hızıyla hareket eden özel koordinatlardır. (36) alırsak

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial u_0}{\partial \xi}}{1 + \left(F'_1(u) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + F'_2(u) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial u_0}{\partial \eta}}{1 + \left(F'_1(u) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + F'_2(u) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) t},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{F_1'(u) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + F_2'(u) \frac{\partial u_0}{\partial \eta}}{1 + \left(F_1''(u) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + F_2''(u) \frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right) t}.$$

Elde edilen formüllerden görüldüğü gibi eğer $\frac{\partial u_0}{\partial \xi} < 0$, $\frac{\partial u_0}{\partial \eta} < 0$ ve $F_i'(u) > 0$, ($i=1,2$)

(veya $\frac{\partial u_0}{\partial \xi} > 0$, ve $F_i''(u) < 0$) ise

$$t > T_0 = \frac{1}{F_1''(u) \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + F_2''(u) \frac{\partial u_0}{\partial \eta}}$$

değerinde u_x , u_y ve u_t türevleri sonsuzluğa yaklaşır. Bu nedenle de problemin klasik çözümü mevcut değildir. (35), (14) probleminin zayıf çözümünü aşağıdaki gibi tanımlayalım.

Tanım 7. (14) başlangıç koşulunu koruyan ve temel fonksiyonlar sınıfından olan herhangi bir $\varphi(x, y, t)$ test fonksiyonu için aşağıdaki integral eşitliği koruyan

$$\iint_{R^2} \int_{R_+^T} \{u \varphi_t + f(u) \varphi_x + g(u) \varphi_y\} dx dy dt + \iint_{R^2} u_0(x, y) \varphi(x, y, 0) dx dy = 0 \quad (37)$$

$u(x, y, t)$ fonksiyonuna (35), (14) probleminin zayıf çözümü denir.

(35), (14) probleminin zayıf çözümünü bulmak için (35) denklemini D_{xy} bölgesi üzere integralleyelim.

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{D_{xy}} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)(u)}{\partial \xi} + \frac{\partial g(u)(u)}{\partial \eta} \right\} d\xi d\eta \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iint_{D_{xy}} u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial f(u)(u)}{\partial \xi} + \frac{\partial g(u)(u)}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \int_b^y [f(u)(u(x, \eta, t)) - f(u)(u(a, \eta, t))] d\eta \\ &\quad + \int_a^x [g(u)(u(\xi, y, t)) - g(u)(u(\xi, b, t))] d\xi. \end{aligned}$$

Sonuncu eşitliği aşağıdaki şekilde de yazabiliriz

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + \int_b^y f(u)(u(x, \eta, t)) d\eta + \int_a^x g(u)(u(\xi, y, t)) d\xi \\ &= \Phi(a, y, t) + \Psi(x, b, t). \end{aligned}$$

Burada

$$\Phi(a, y, t) = \int_b^y f(u)(u(a, \eta, t)) d\eta, \quad \Psi(x, b, t) = \int_a^x g(u)(u(\xi, b, t)) d\xi.$$

Açıktır ki, $\Phi(a, y, t) + \Psi(x, b, t) \in \ker \mathfrak{I}$. Gerçekten de

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}\{\Phi(a, y, t) + \Psi(x, b, t)\} &= \mathfrak{I}\left\{\int_b^y f(u)(u(a, \eta, t)) d\eta + \int_a^x g(u)(u(\xi, b, t)) d\xi\right\} \\ &= \frac{\partial f(u)(u(a, y, t))}{\partial x} + \frac{\partial g(u)(u(x, b, t))}{\partial y} = 0. \end{aligned}$$

$v(x, y, t)$ ile aşağıdaki ifadeyi gösterelim.

$$v(x, y, t) = \int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta + H_1(a, b, x, y, t), \quad (38)$$

burada $H_1(a, b, x, y, t) \in \ker \mathfrak{I}$. (38) den alırız.

$$u(x, y, t) = \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial x \partial y}.$$

(38) i dikkate alırsak

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} + \int_b^y f(u) \left(\frac{\partial^2 v(x, \eta, t)}{\partial x \partial \eta} \right) d\eta + \int_a^x g(u) \left(\frac{\partial^2 v(\xi, y, t)}{\partial \xi \partial y} \right) d\xi = 0$$

veya

$$\frac{\partial v(x, y, t)}{\partial t} + \int_b^y f(u)(u(x, \eta, t)) d\eta + \int_a^x g(u)(u(\xi, y, t)) d\xi = 0 \quad (39)$$

olur. (39) için başlangıç koşulu

$$v(x, y, 0) = v_0(x, y). \quad (40)$$

olur. Burada $v_0(x, y)$

$$u_0(x, y) = \frac{\partial^2 v_0(x, y)}{\partial x \partial y}$$

denkleminin her hangi bir sürekli diferansiyellenebilen çözümü olmaktadır.

(39), (40) yardımcı probleminin aşağıdaki avantajları vardır:

- (i) Bu durumda $u(x, y, t)$, $f(u)(u(x, y, t))$ ve $g(u)(u(x, y, t))$ fonksiyonları süreksizde olabilir,
- (ii) $v(x, y, t)$ fonksiyonunun diferansiyellenebilme özelliği $u(x, y, t)$ nun diferansiyellenebilme özelliğinden daha fazladır,
- (iii) u_x , u_y ve u_t türevleri (35), (14) probleminde bulunmamaktadır, hangiler ki genelde mevcut değildir.

Teorem 3. Eğer $v(x, y, t)$ fonksiyonu (39), (40) probleminin çözümü ise $u(x, y, t) = \Im v(x, y, t)$ eşitliği ile tanımlanan $u(x, y, t)$ fonksiyonu da (35), (14) probleminin çözümü olmaktadır.

3. İKİ BOYUTLU KORUNUM KANUNLARININ NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde (13), (14) probleminin çözümü için bir sayısal metot geliştireceğiz. Bu amaçla (23), (24) yardımcı problemini kullanalım. Yukarıda gösterdiğimiz gibi esas problemin çözüm yeri önceden bilinmeyen süreksizlik noktalarına sahiptir. Bu özellik ise literatürde iyi tanımlanmış yöntemlerin direkt esas probleme uygulanması için engeller türetir. Önerilen yardımcı problemin avantajlarını kullanarak söz konusu sonuçları çözebiliriz. Önerilen metottun avantajlarını göstermek için onu lineer denkleme uygulayacağız.

3.1 Kompozitif Şemalar

İki boyutlu konservatif kural (1) için yeni Lax-Friedrichsin birinci yarı adımlı şema aşağıdaki gibidir.

$$U_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n) \quad (42)$$

$$-\frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(F_{i+1,j+\frac{1}{2}}+F_{i,j+\frac{1}{2}}\right)-\frac{\Delta t}{2\Delta y}\left(G_{i+\frac{1}{2},j+1}-G_{i+\frac{1}{2},j}\right)$$

Burada

$$F_{i+1,j+1/2} = \frac{1}{(\Delta t/2)\Delta y} \int_{y_j}^{y_{i+1}} \int_0^{\Delta t/2} f(\hat{U}(x_{i+1}, y, t)) dt dy,$$

ve $\hat{U}(x_{i+1}, y, t)$ y ye t ye bağılı bir fonksiyon olmak üzere Riemann problemi ve başlangıç verisinin çözümüdür.

$$\hat{U}(x_{i+1}, y, 0) = \begin{cases} U_{i,j+1}^n & \text{için } x < x_{i+1/2} \\ U_{i+1,j+1}^n & \text{için } x > x_{i+1/2} \end{cases}$$

Liska ve Wendroff bir boyutlu Lax-Fredrich yaklaşımını kullanarak yerine entegre tam Riemann çözümlerini önermişti [10,11]. F ve G akışları 1 boyutlu Riemann probleminin LF yaklaşık çözümlerinde değerlendirilir.

$$F_{i+1,j+1/2} = f\left(\frac{1}{2}[U_{i+1,j+1}^n + U_{i,j+1}^n]\right) + \frac{\Delta t}{4\Delta y}[g(U_{i+1,j+1}^n) - g(U_{i+1,j}^n)] \quad (43)$$

ve

$$G_{i+1,j+1/2} = g\left(\frac{1}{2}[U_{i+1,j+1}^n + U_{i,j+1}^n]\right) + \frac{\Delta t}{4\Delta y}[f(U_{i+1,j+1}^n) - f(U_{i+1,j}^n)] \quad (44)$$

İkinci derece tam periyodik- düzeltici şema şu şekildedir.

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[f\left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) + f\left(U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - f\left(U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - f\left(U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right] \\ - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left[g\left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) + g\left(U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - g\left(U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) - g\left(U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right) \right] \quad (45)$$

Ayrıntılar [10,11] de bulunabilir. Bu ikinci dereceden metot düzeltilmiş Lax-Friedrich metodu olarak adlandırılır. Kompozit şemanın mantığı bir ikinci derece metot ve birinci derece metodun biraz kompozisyonudur. Birkaç kez ikinci dereceden metot uygulandıktan sonra ikinci dereceden metotta oluşan salınımları azaltmak için birinci dereceden metot uygulanmıştır. Ve bu tekrarlanmıştır. C F LF4 uygulanmıştır, CF şeması 3 kez uygulandıktan sonra bir kez LF şeması bunu takip etmiştir. her ikisi de yani CF de LF de iki adımdan oluşur. (42) ile beraber (45) da CF şeması inşa edilir. İki boyutlu Burgers denklemi;

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(\frac{1}{2u^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\frac{1}{2u^2})}{\partial y} = 0 \quad (46)$$

$f(u) = g(u) = \frac{1}{2}u^2$ olduğunda

$$U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(U_{i,j}^n + U_{i+1,j}^n + U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j+1}^n) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left(F_{i+1,j+\frac{1}{2}} + F_{i,j+\frac{1}{2}} \right) - \frac{\Delta t}{2\Delta y} \left(G_{i+\frac{1}{2},j+1} - G_{i+\frac{1}{2},j} \right) \quad (47)$$

$$F_{i+1,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} [U_{i+1,j+1}^n + U_{i+1,j}^n] + \frac{\Delta t}{8\Delta y} [(U_{i+1,j+1}^n)^2 - (U_{i+1,j}^n)^2] \right) \quad (48)$$

$$G_{i+1/2,j} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} [U_{i+1,j+1}^n + U_{i+1,j}^n] + \frac{\Delta t}{8\Delta x} [(U_{i+1,j+1}^n)^2 - (U_{i+1,j}^n)^2] \right) \quad (49)$$

ve

$$U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[\left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] - \frac{\Delta t}{4\Delta y} \left[\left(U_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 + \left(U_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(U_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 - \left(U_{i-\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right)^2 \right] \quad (50)$$

Burgers denklemi için CF şema inşasının ikinci adımı (18),(19),(20),(21) de verilmiştir. LF şeması (47),(48),(49) de verilmiştir.

3.1.1 Analitik Çözüm ve Nümerik Sonuçlar

Burgers denklemi için çözümü Riemann verileri: $\{u_1, u_2, u_3, u_4\} = (1, 2, 3, 4)$ ile kurarız. Bu durumda $4! = 24$ farklı seçeneğe sahibiz. 1,2,3,4 değerlerinin başlangıç koşulu herbir çeyrek daireye atanmıştır. Problemin çözümü $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \times \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ üzerindedir. 400x400 ayırık noktaya ayrılmıştır. Burgers denklemi için seyretilmiş kaynak noktası (u, u) ve şok kaynak noktası $\left(\frac{u_l + u_r}{2}, \frac{u_l + u_r}{2}\right)$ dir. Çözüm de $t=0.1$ için yapılmıştır. Bu yüzden ölçek sırasıyla $(0.1u, 0.1u)$ ve

$(0.1 \frac{u_l+u_r}{2}, 0.1 \frac{u_l+u_r}{2})$. Her ikiside yani seyreltilmiş ve şok kaynak eğrisi $y=x$ olmaktadır.

Analitik çözümü inşaa etmek için kullandığımız kaynak noktaları bölüm 2 de verilmiştir.

Nümerik çözümü hesaplamak için kompozit şemayı CFLF4 ü kullandık.

3.1.2 Dört Şok

$\{u_1, u_2, u_3, u_4\}=(1,2,3,4)$ olduğu dikkata alınsın. Bu durumda çözüm sadece şok içerir. S^+ darbe dalgası süreksiz başlangıç koşulu $\theta = 0, \frac{3\pi}{2}$ oluşur ve S^- darbe dalgası $\theta = \frac{\pi}{2}, \pi$ den oluşur. S^- darbe dalgası $\theta = \frac{\pi}{2}$ de darbe kaynak noktası $(0.15,0.15)$ için baş kısmıdır ve S^- darbe dalgası $\theta = \pi$ de darbe kaynak noktası $(0.3,0.3)$ için baş kısmıdır. Bunlar A noktasında kesişir. A noktasında ki etkileşimi belirlemek için riemann verisi 1 ve 4 için Riemann problemi çözülmüştür. Sonuç olarak, bir diğer S^- Darbe dalgası A da oluşur ve $(0.25,0.25)$ şok kaynak noktasında sona erer.

Diğer yandan S^+ darbe dalgası $\theta = 0$ da darbe dalgasının kaynak noktası için baş kısmı $(0.2,0.2)$. S^+ darbe dalgası $\theta = \frac{3\pi}{2}$ da darbe dalgasının kaynak noktası için baş kısmı $(0.35,0.35)$ 'dir. Bunlar B noktasında kesişir. Riemann problemini 4 ve 1 başlangıç koşulları ile çözdüğümüzde bir başka S^+ şok dalgası B de oluşur ve bu $(0.25,0.25)$ şok kaynak noktasında sona erer ve bunlar analitik çözümün kurulması ile tamamlanır. Analitik çözüm figür 3 (a) da verilmiştir ve kompozit şemayla yapılan nümerik çözüm figür 3 (b) de verilmiştir. $(u_1, u_2, u_3, u_4)=(1,2,3,4)$ olması durumu $u_1, u_2, u_3, u_4\}=(1,2,4,3)$ olması durumunu tersidir. Eğer Riemann verisi $(1,3,4,2)$ ile $x=y$ yi yansıtırsak bu bize $(1,2,3,4)$ ün tam olarak aynı yapı olduğunu verir. Riemann verisi $(1,3,4,2)$ ile yapılan nümerik çözüm figür 4 te verilmiştir. Bundan dolayı 24 çözüm yerine 12 çözüm yaptık.

3.1.3 Üç Şok ve Bir Seyreltme

Başlangıç koşulu $(u_1, u_2, u_3, u_4)=(1,2,3,4), (1,4,3,2), (2,1,4,3)$ ve $(2,3,4,1)$ için üç şok ve bir seyreltmeye sahip oluruz. Ters olarak sadece $(1,2,3,4)$ ve $(2,1,4,3)$ durumunu dikkate alırız. $(u_1, u_2, u_3, u_4)=(1,2,3,4)$ olmasını düşünürüz. Bu durumda S^+ şoku süreksiz başlangıç koşulu $\theta = 0$ dan oluşur ve S^- şoku süreksiz başlangıç koşulu $\theta = \frac{\pi}{2}, \pi$ dan oluşur. İki S^- şoku A noktasında kesişir. Diğer S^- şoku A noktasında oluşur ve B $(0.2,0.2)$ de sona erer. R^+ seyreltmesi süreksiz başlangıç koşulu $\theta = \frac{3\pi}{2}$ de oluşur. Seyreltme fanının sağ ve sol sonları seyreltme kaynak noktası sırasıyla $(0.3,0.3)$ ve $(0.4,0.4)$ için baş kısmıdır. S^+ şoku ve R^+ seyreltme dalgası C noktasında kesişir. S^+ şoku R^+ seyreltmesine tamamen nüfuz eder ve

D noktasında Riemann verisi 3 ve 1 ile olan diğer riemann problemi çözümüne sahip oluruz. Diğer S^+ D noktasında oluşur ve şok kaynak noktası B(0.2,0.2) de sona erer.

C den D ye S^+ dümdüz bir şok değildir, eğimli bir şoktur. Bunu aşağıdaki adi diferansiyel denklem karşılar

$$\frac{\partial \eta}{\partial \xi} = \frac{\eta - 1/2(u + 1)}{\xi - 1/2(u + 1)} \quad 3 \leq u \leq 4$$

ve eğri şokunun rotasını bularak bunu birleştirebiliriz. Analitik çözüm figür 5(a) da verilmiştir ve nümerik çözüm de (b) de verilmiştir. Benzer olarak biz $(u_1, u_2, u_3, u_4)=(2,1,4,3)$ olması durumunda analitik çözümü kurabiliriz. Bu durum için analitik ve nümerik çözümler sırasıyla figür 6 (a) ve (b) de verilmiştir.

3.1.4 İki Şok ve İki Seyreltme

$(u_1, u_2, u_3, u_4)=(1,3,2,4),(2,3,1,4),(3,1,4,2),(4,1,3,2),(2,1,3,4)$ ve $(3,1,2,4)$ olması durumunda iki şok ve iki seyreltmeye sahibiz. Yerini tutan ters durumlar sırasıyla $(u_1, u_2, u_3, u_4)=(1,4,2,3),(2,4,1,3),(3,2,4,1), (4,2,3,1), (2,4,3,1), (3,4,2,1)$.

$(u_1, u_2, u_3, u_4)=(1,3,2,4)$ olduğu durum. S^- şoku R^- seyreltmesiyle A noktasında kesişir ve bu S^- şoku tamamen seyreltmeye nüfuz eder. B noktasında riemann problemi ve riemann verisi 1 ve 2 nin çözümüne sahibiz. S^- şoku B noktasında oluşur ve E(0.15,0.15) noktasında sona erer. S^+ şoku R^+ seyreltmesine C noktasıda etki eder ve tamamen seyreltmeye nüfuz eder. D noktasında rieman problemi ve riemann bilgisi 2 ve 1 için çözüme sahibiz. S^+ şoku D noktasında oluşur ve E(0.15,0.15) noktasında sona erer. Analitik çözüm figür 7(a) da ve nümerik çözüm figür7(b) de verilmiştir.

$(u_1, u_2, u_3, u_4)=(2,3,1,4)$ ve $(3,1,4,2)$ olması durumun da analitik çözümü benzer şekilde kurabiliriz. Analitik ve nümerik çözüm yukarıdaki durumlar için sırasıyla figür (8) , figür(9)'dadır.

$(u_1, u_2, u_3, u_4)=(4,1,3,2)$ olduğu durumu düşünersek , R^- seyreltmesi S^- şoku ile A noktasında kesişir ve R^+ seyreltmesi D(0.4,0.4) seyreltme kaynak noktasındadır. S^- şoku A noktasında bir şok eğrisi olmaktadır ve C(0.4,0.4) noktasında sona ermektedir. S^+ şoku R^+ seyreltmesine etki etmeye B noktasında başlar ve sıfır kuveti ile C noktasında sonlanır. Analitik çözüm figür 10(a) da , nümerik çözüm figür 10(b) de verilmiştir.

$(u_1, u_2, u_3, u_4)=(2,1,3,4)$ olması durumu düşünüldüğünde R^- seyreltmesi S^- şoku ile A noktasında kesişir. S^- şoku R^- seyreltme fanına tamamen nüfuuz eder ve riemann verisi 2 ve 3 ile B noktasındaki riemann probleminin çözümüne sahip oluruz. Sonuç olarak S^- şoku B

noktasında oluşur ve E(0.25,0.25) de sona erer. S^+ şoku R^+ seyreltme fanına tamamen nüfuuz eder S^+ şoku D noktasında oluşur ve E noktasında sona erer. Anlitik çözüm figür 11(a) da, nümerik çözüm figür 11(b) de verilmiştir.

$(u_1, u_2, u_3, u_4)=(3,1,2,4)$ olması durumunda analitik çözüm benzer şekilde kurulur. Analitik çözüm figür 12 (a) da, nümerik çözüm ise figür 11 (b) de verilmiştir.

3.1.5 Şok ve Üç Seyreltme

Başlangıç koşulu $(u_1, u_2, u_3, u_4)=(4,1,2,3),(4,3,2,1),(3,2,1,4),(3,4,2,1)$ olması durumunda bir şok ve üç seyreltme meydana gelir. Tersleri olduğu için sadece $(4,1,2,3)$ ve $(3,2,1,4)$ durumlarını düşünelim.

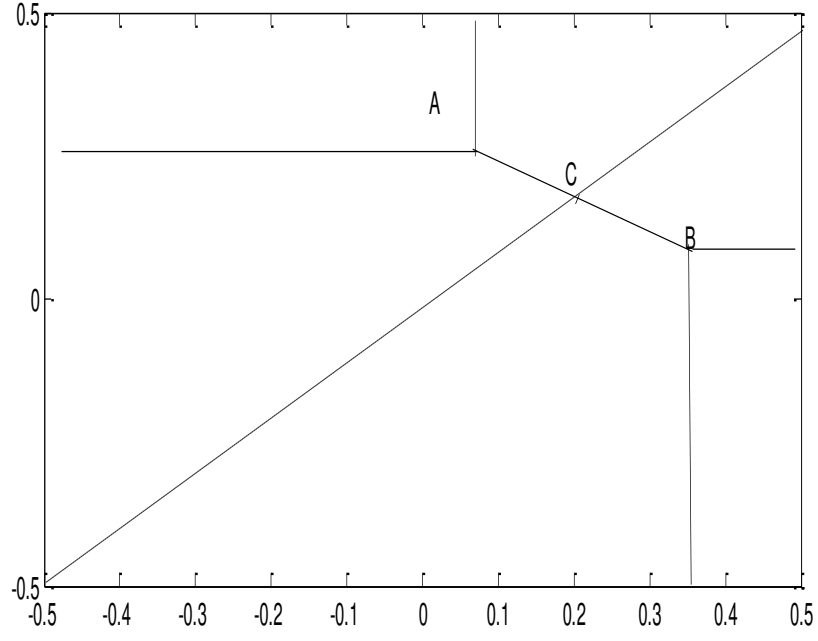
S^- şoku ile R^- seyreltmesi A noktasında kesişir ve sıfır kuvveti ile B(0.2,0.2) de sonlanır. R^+ seyreltmesi süreksiz başlangıç koşulu $\theta = \frac{3\pi}{2}$ de oluşur. Seyreltme fanının sağ ve sol uçları sırasıyla B(0.2,0.2) ve C(0.4,0.4) seyreltme kaynak noktaları için baş kısımdır. Bir başka R^+ seyreltmesi süreksiz başlangıç koşulu $\theta = 0$ de oluşur. Seyreltme fanının sağ ve sol uçları sırasıyla C(0.3,0.3) ve D(0.4,0.4) seyreltme kaynak noktaları için baş kısımdır. Analitik çözüm figür 13 (a) da, nümerik çözüm figür 13 (b) de verilmiştir.

Analitik çözüm $(u_1, u_2, u_3, u_4)=(3,2,1,4)$ olması durumunda Benzer şekilde kurulabilir. Analitik çözüm figür 14 (a) da, nümerik çözüm figür 14 (b) de verilmiştir.

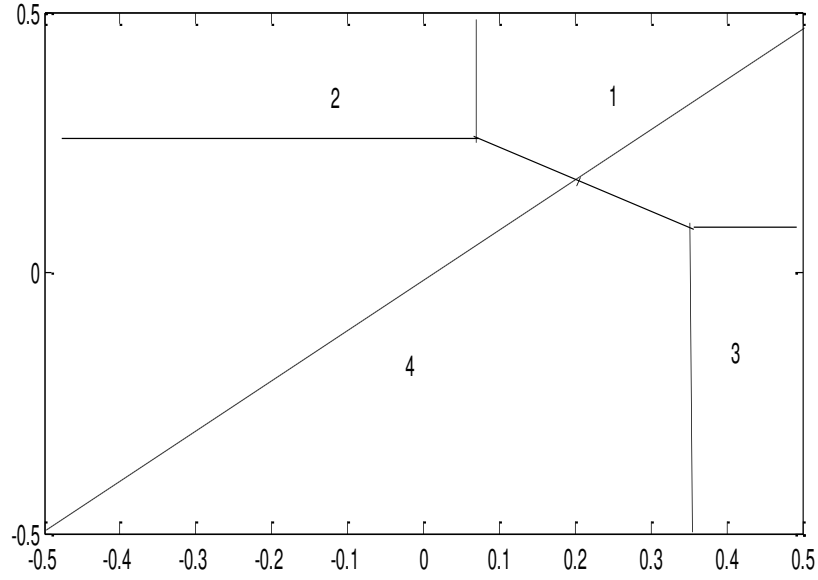
3.1.6 Dört Seyreltme

Başlangıç koşulları $(u_1, u_2, u_3, u_4)=(4,2,1,3)$ ve $(4,3,1,2)$ olması durumunda dört seyreltmeye sahibiz. Ters olduğu için sadece $(4,2,3,1)$ olduğu durumu hesaplamak yeterlidir.

R^+ ve R^- seyreltmeleri A(0.4,0.4) noktasında etkileşir. İki R^+ seyreltme kaynak noktası B(0.2,0.2) de kesişir. Tekrar R^- ve R^+ D(0.1,0.1) de etkileşir. İki R^- seyreltme kaynak noktası C(0.2,0.2) da kesişir. Analitik çözüm figür 15 (a) da nümerik çözüm figür 15

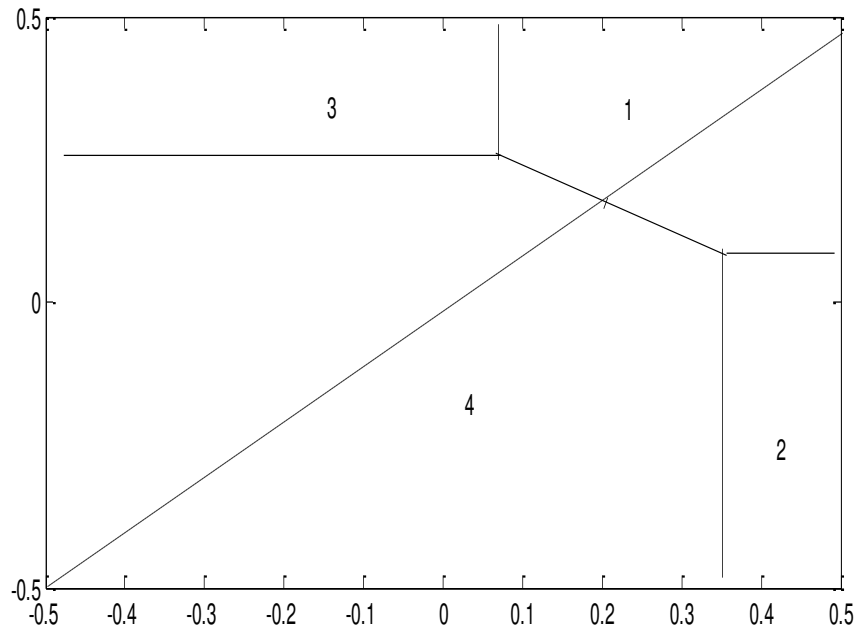


(a)

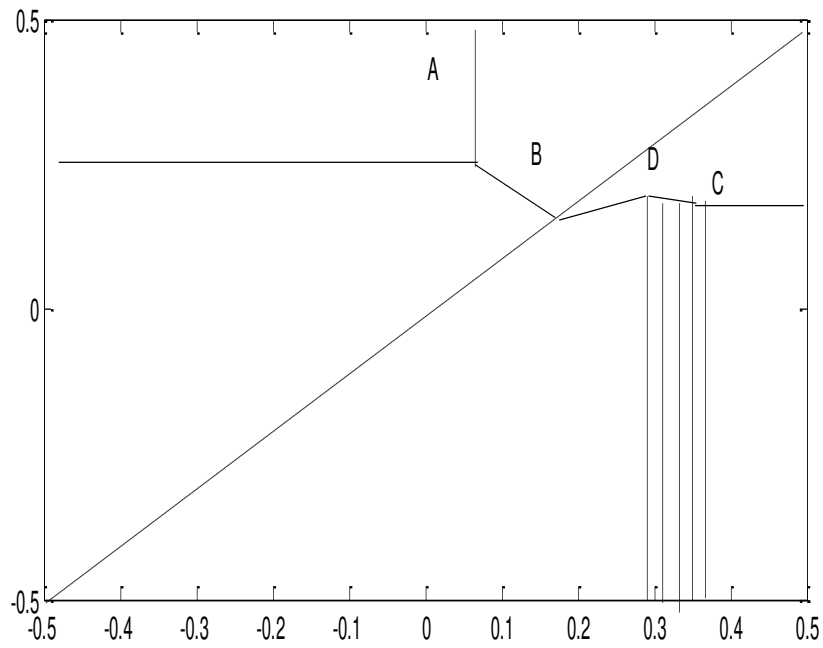


(b)

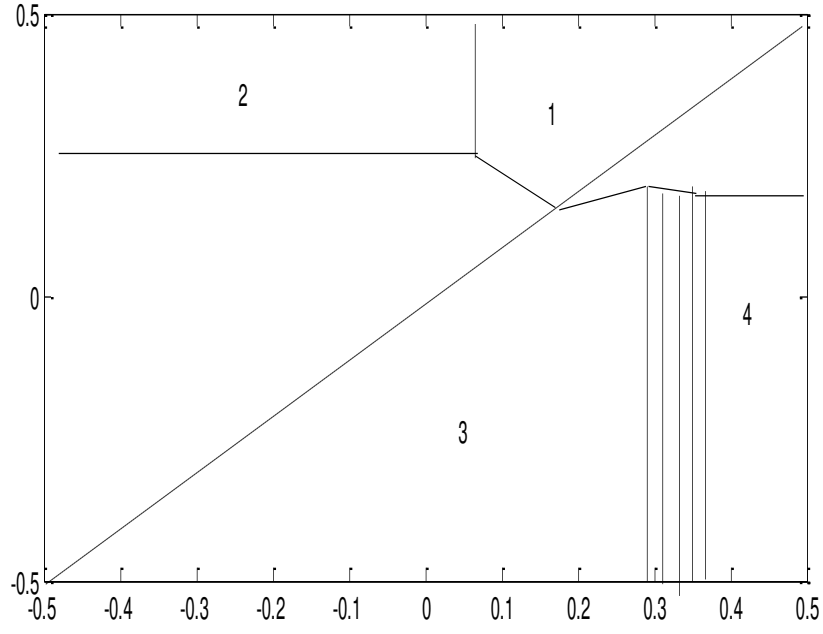
Şekil 5. (1,2,4,3) başlangıç koşulu, dört darbe ($S^- S^- S^+ S^+$) çerçevesinde (a) analitik çözüm, (b) sayısal çözüm



Şekil 6. (1,3,4,2) başlangıç koşulu, dört darbe ($S^- S^- S^+ S^+$) çerçevesinde sayısal çözüm

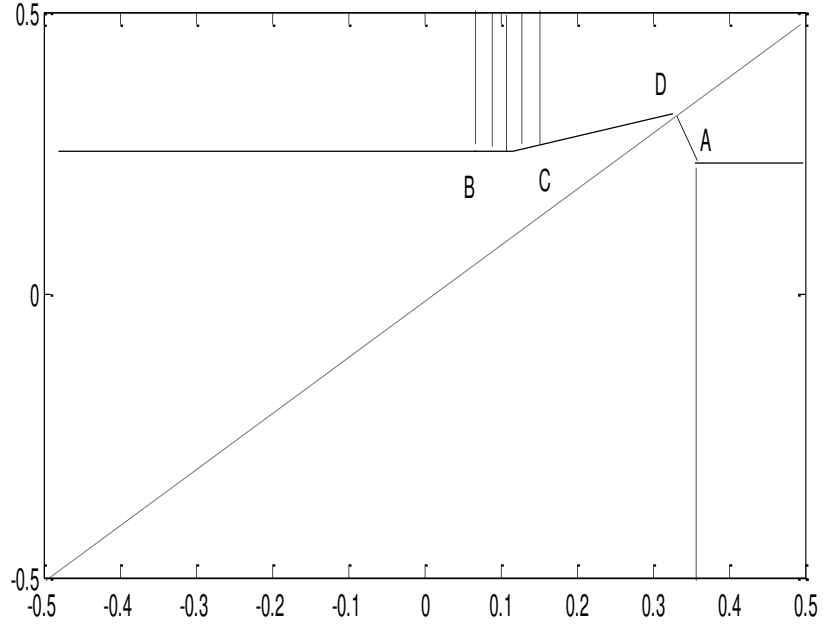


(a)

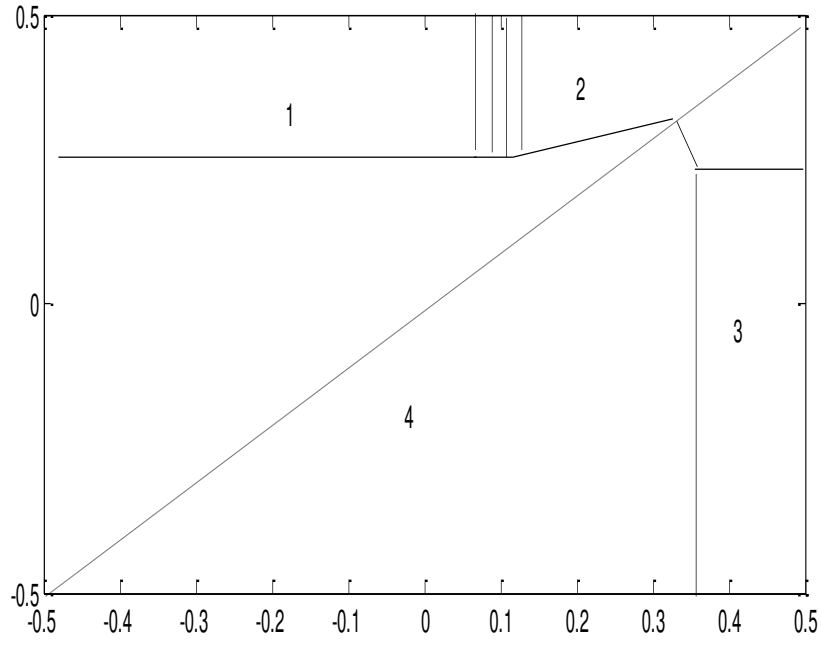


(b)

Şekil 7. (1,2,3,4) başlangıç koşulu, üç şok ve seyretme dalgası($S^- S^- R^+ S^+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

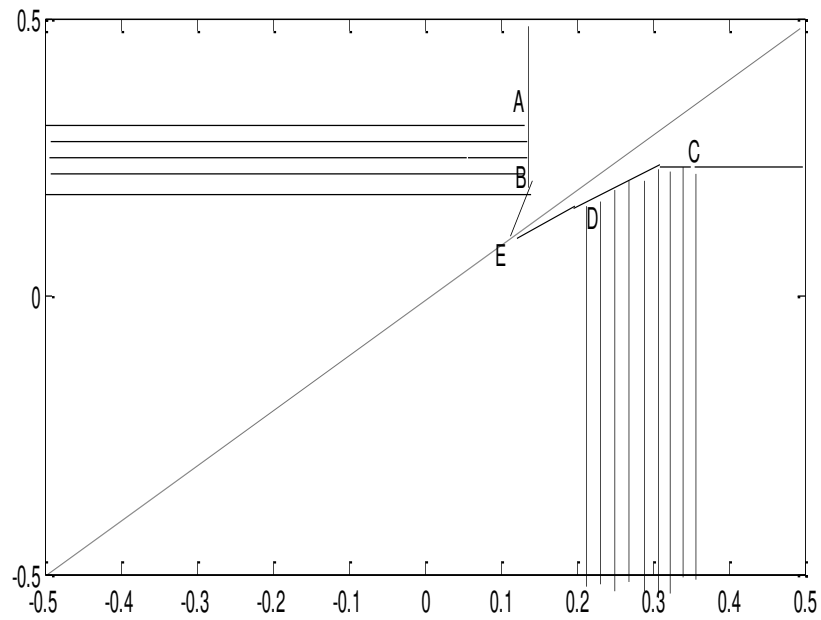


(a)

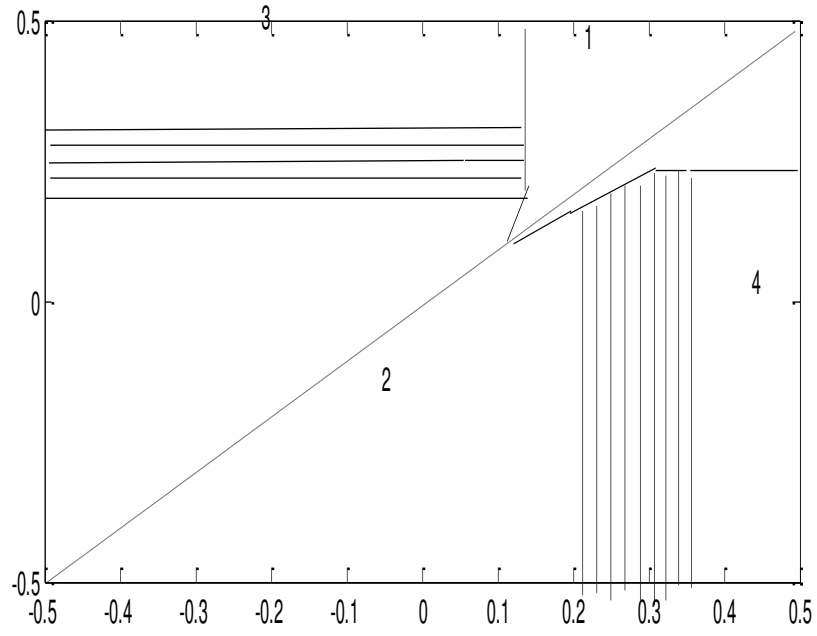


(b)

Şekil 8. (2,1,3,4) başlangıç koşulu, üç şok ve bir seyreltme ($R^- S^- S^+ S^+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

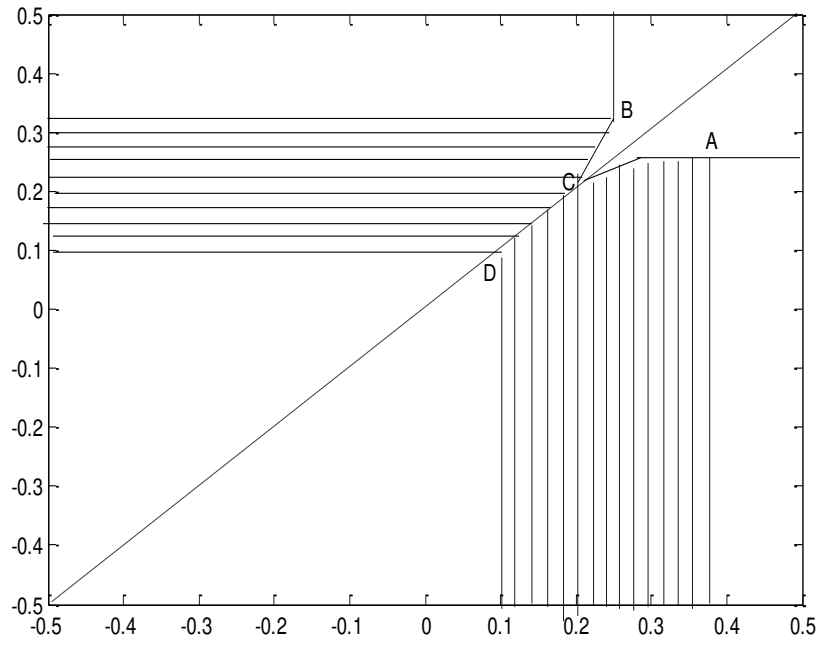


(a)

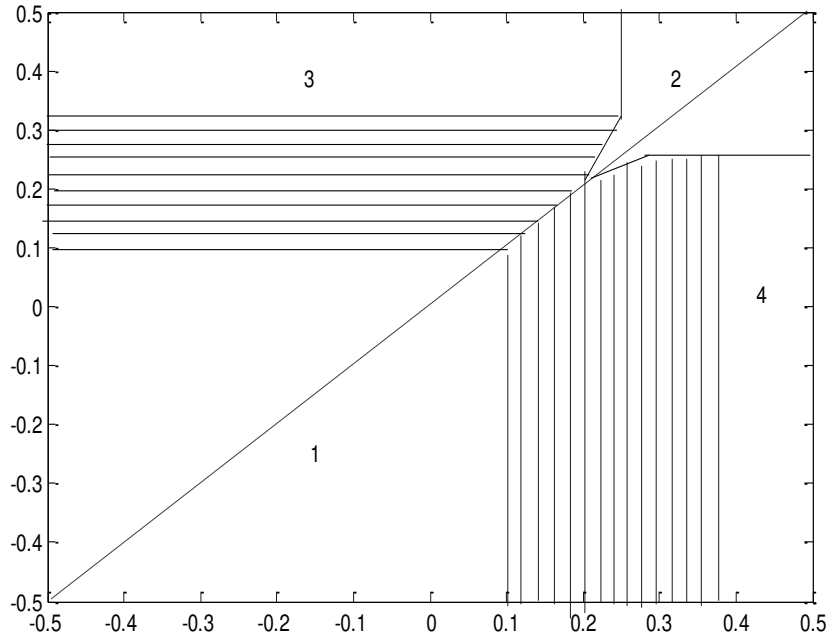


(b)

Şekil 9. (1,3,2,4) başlangıç koşulu, iki şok ve iki seyreltme ($S^- R^- R^+ S^+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

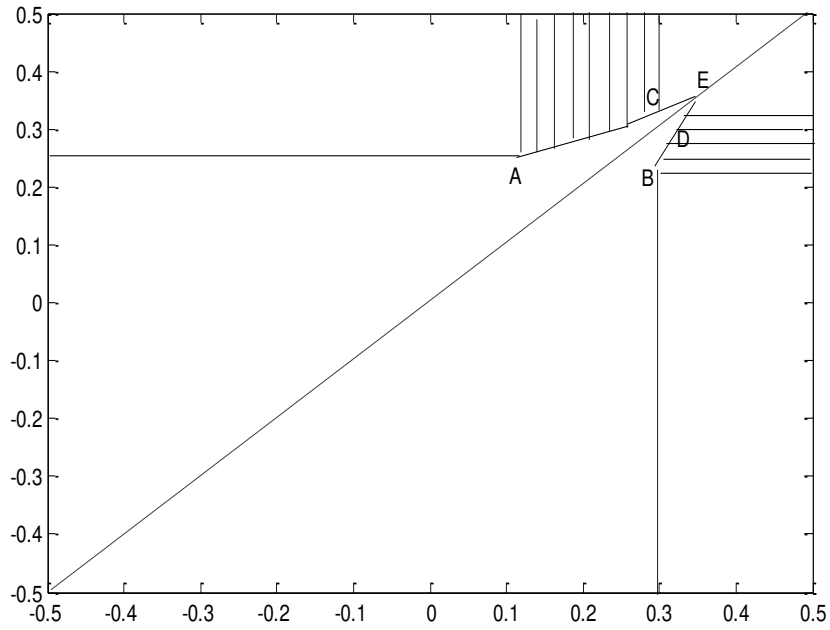


(a)

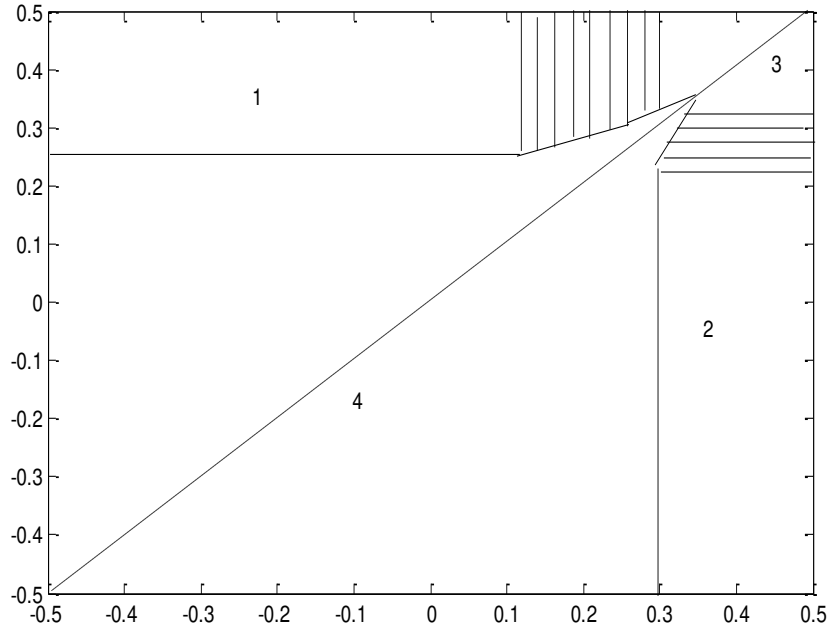


(b)

Şekil 10. (2,3,1,4) başlangıç koşulu iki şok ve iki seyreltme ($S^- R^- R^+ S^+$) (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

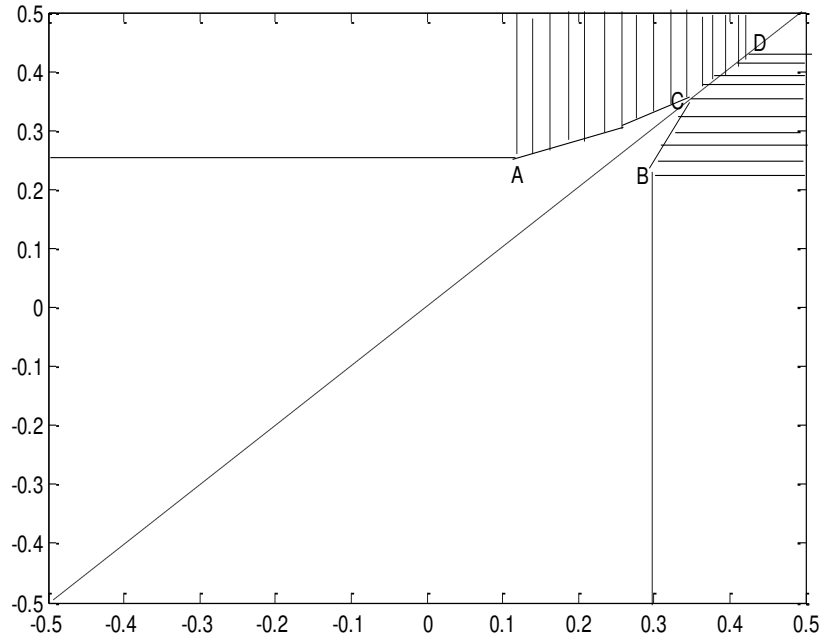


(a)

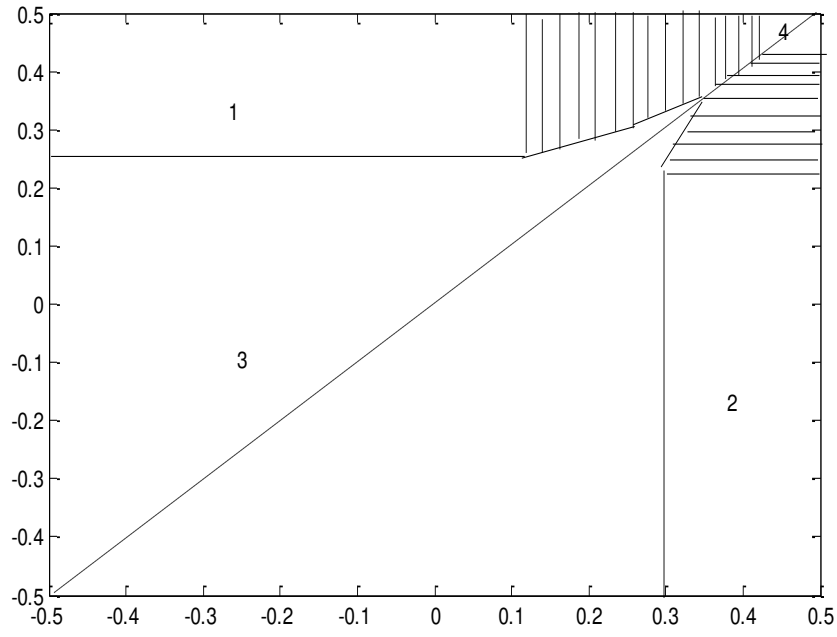


(b)

Şekil 11. (3,1,4,2) başlangıç koşulu iki şok ve iki seyreltme ($R^- S^- S^+ R^+$) (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

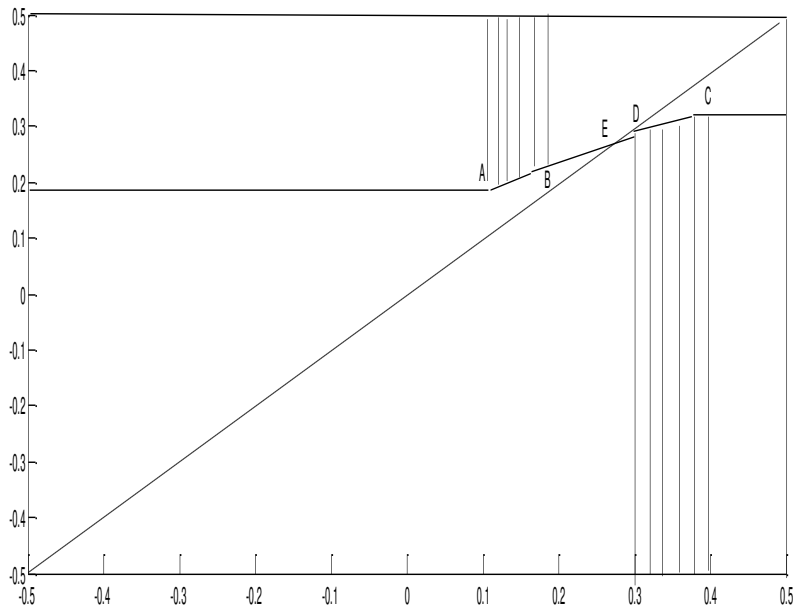


(a)

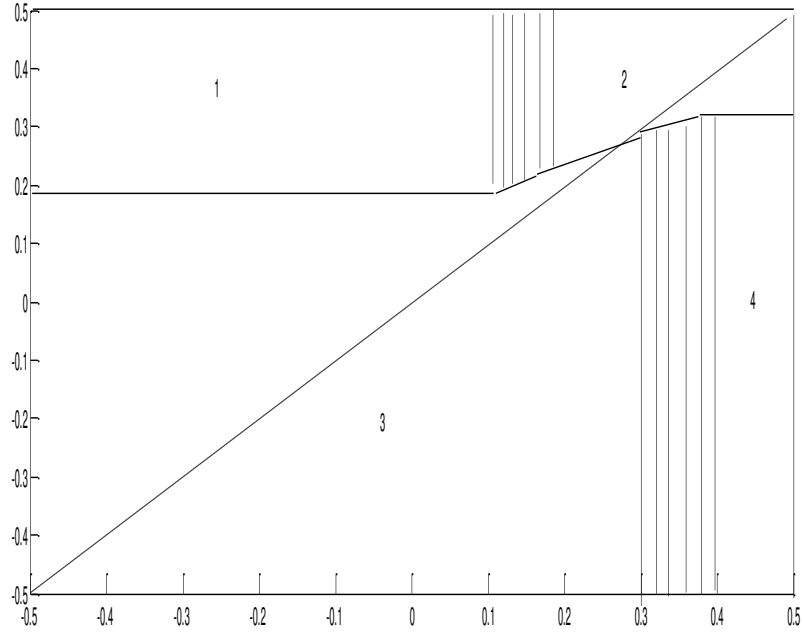


(b)

Şekil 12. (4,1,3,2) iki şok ve iki seyreltme ($S^- R^- S^+ R^+$) , (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

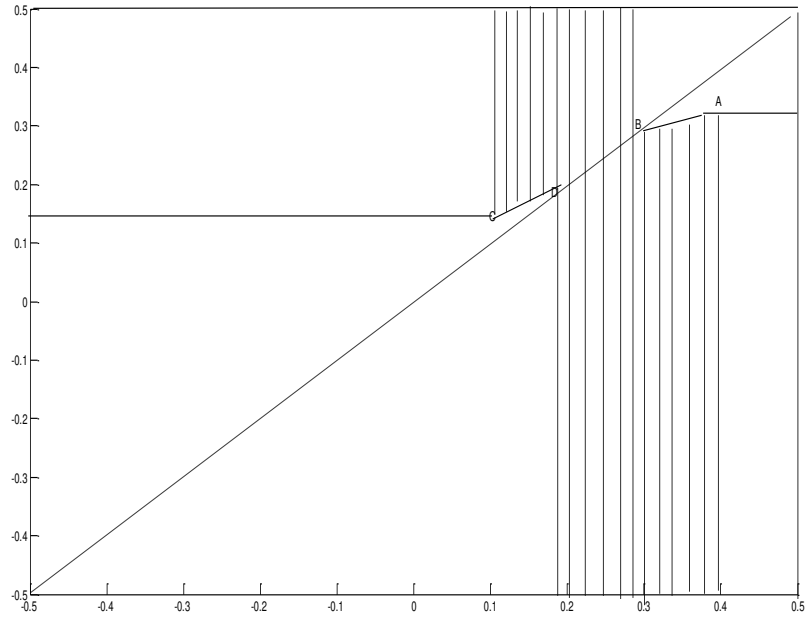


(a)

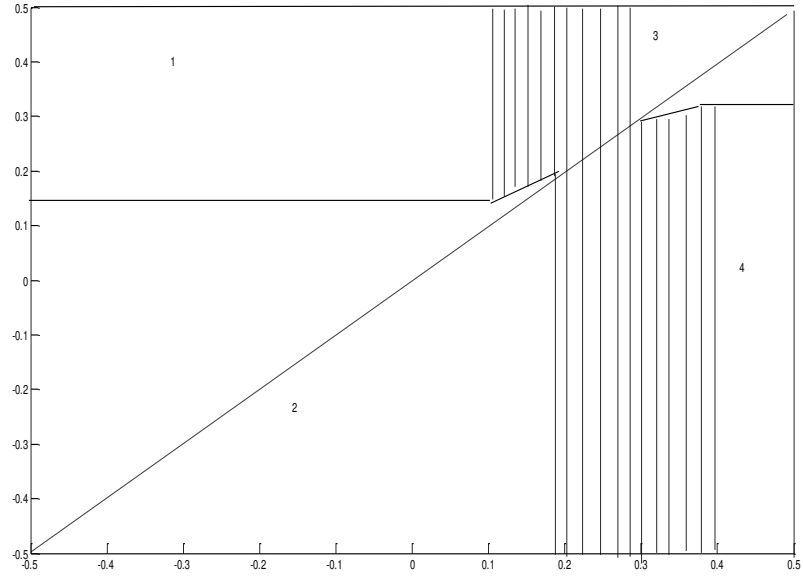


(b)

Şekil 13. (2,1,3,4) iki şok ve iki seyreltme ($R^- S^- R^+ S^+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

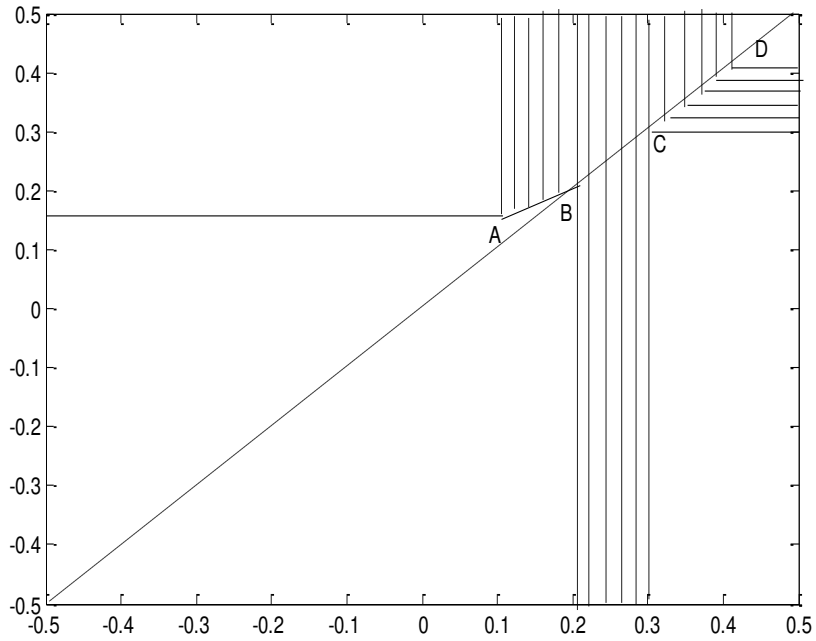


(a)

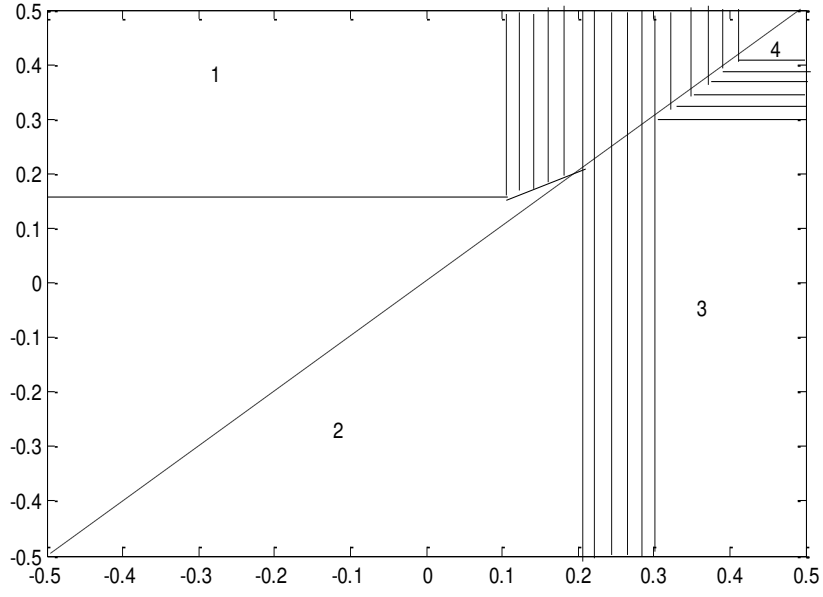


(b)

Şekil 14. (3,1,2,4) iki şok ve iki seyreltme ($R^- S^- R^+ S^+$) , (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

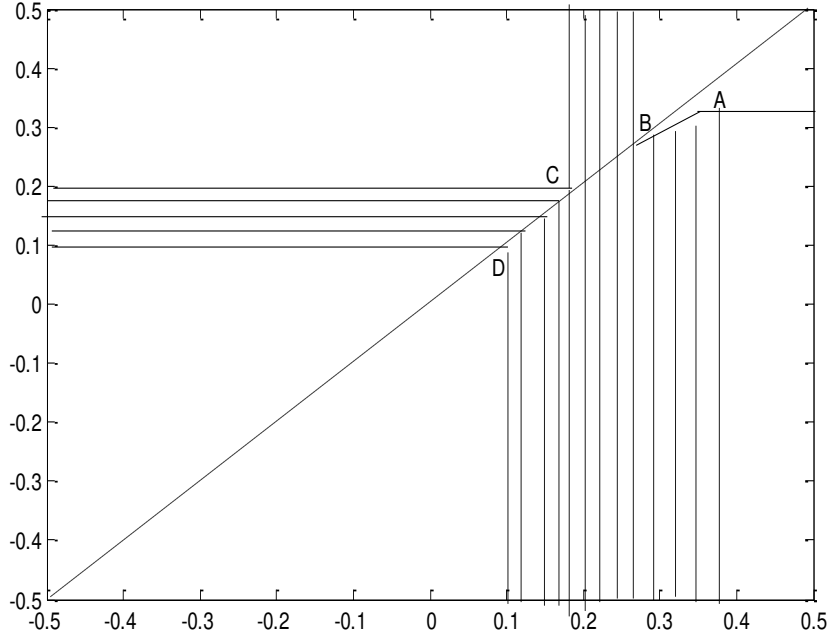


(a)

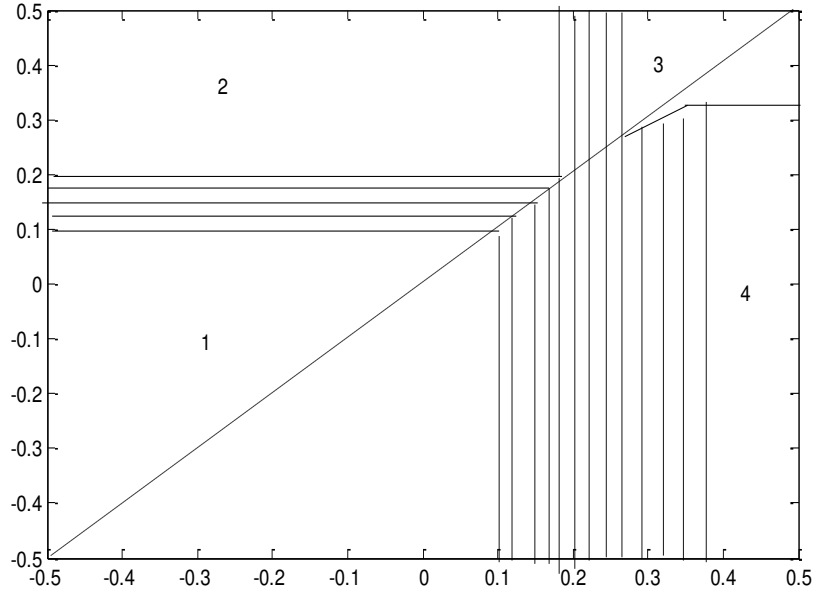


(b)

Şekil 15. (4,1,2,3) bir şok ve üç seyreltme ($R^- S^- R^+ R^+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

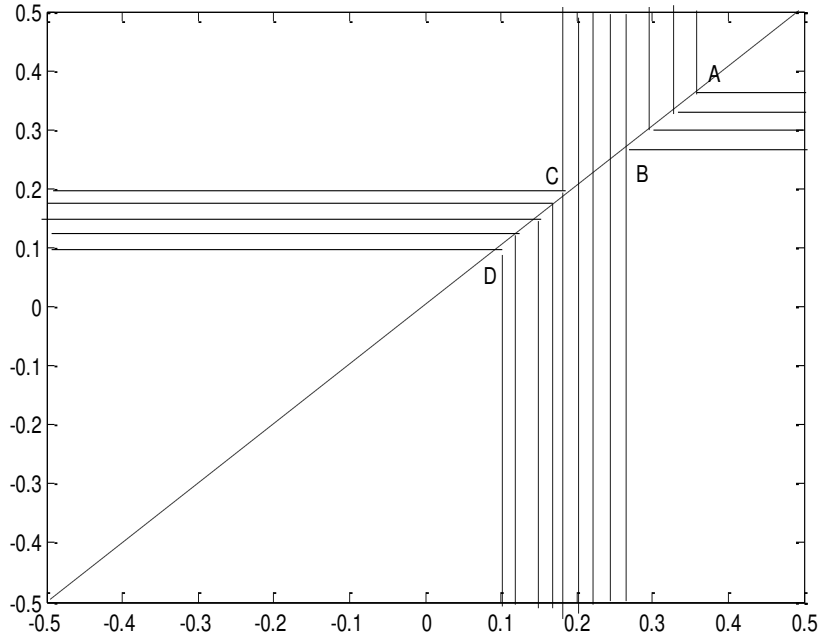


(a)

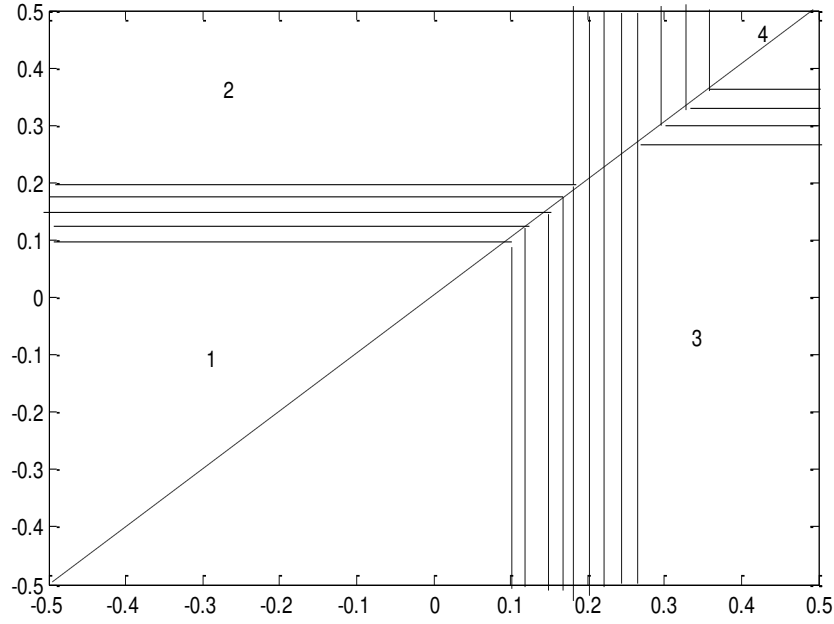


(b)

Şekil 16. (4,1,2,3) bir şok ve üç seyreltme ($R^- S^- R^+ R^+$), (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm



(a)



(b)

Şekil 17. (4,2,1,3) dört seyreltme ($R^- R^- R^+ R^+$) , (a) analitik çözüm (b) sayısal çözüm

3.2 Süreksiz Fonksiyonlar Sınıfında Sonlu Farklar Yöntemi

Sayısal algoritma oluşturmak için önce çözümün tanım bölgesini aşağıdaki ağ ile örtelim.

$$\omega_{h_1, h_2, \tau} = \{(x_i, y_j, t_k), x_i = ih_1, y_j = jh_2, t_k = k\tau, \\$$

$$i = 0, 1, 2, \dots; j = 0, 1, 2, \dots; k = 0, 1, 2, \dots; h_1 > 0, h_2 > 0, \tau > 0\},$$

Burada , h_1 , h_2 ve τ sırasıyla ağın x , y ve t ' ye göre adımlarını göstermektedir.

(39) denklemini sonlu farklara ayrıklaştırmak için denklemin içerdiği intergalleri aşağıdaki gibi ayrıştıralım

$$\int_a^x u(\xi, y, t) d\xi = h_1 \sum_{v=1}^i U_{v,j,k}, \quad (51)$$

$$\int_b^y u(x, \eta, t) d\eta = h_2 \sum_{\mu=1}^j U_{i,\mu,k}, \quad (52)$$

ve

$$\int_a^x \int_b^y u(\xi, \eta, t) d\xi d\eta = h_1 h_2 \sum_{v=1}^i \sum_{\mu=1}^j U_{v,\mu,k}. \quad (53)$$

Bu eşitlikleri dikkate alarak (39) denklemini sonlu farklara ayrıklaştıralım.

3.2.1 Süreksiz Başlangıç Koşul

Bu bölümde $f(u) = Au$, $g(u) = Bu$ olan durumlar incelenecektir.

Kolaylık için yer değişkenlerinin sayısı $n = 2$ olan sabit katsayılı denklem için yazılmış Cauchy problemini inceleyelim.

Aşağıdaki problemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (54)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) \quad (55)$$

gözönüne alalım. Burada A ve B bilinen reel sabitlerdir. Önce (54) denkleminin geometrik anlamını verelim. (54) denkleminin herhangi bir $u(x, y, t)$ yüzeyi (x, y, t, u) uzayının herhangi bir $P(x, y, t, u)$ noktasında bileşimleri $u_x = p, u_y = q, u_t = \pi$ olan ve $\pi + Ap + Bq = 0$ denklemi ile tanımlanan normal düzleme sahip olmaktadır, yani $P(x, y, t, u)$ noktasından geçen integral yüzeylerinin teğet düzlemi

$$dt : dx : dy : du \equiv 1 : A : B : 0$$

bağlantılarıyla verilen düzlemler demeti olmaktadır, [9].

Önce $A = B = 1$ olan durumu inceleyelim. Karakteristikler yönteminin genel yapısına göre (54) denkleminin çözümü aşağıdaki adi diferansiyel denklemler sisteminin de

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = 1, \quad \frac{du}{dt} = 0 \quad (56)$$

çözümü olmaktadır ve tersine, (56) denklemler sisteminin çözümü (54) in de çözümü olmaktadır. (56) denklemler sistemi için başlangıç koşulları aşağıdaki gibi

$$x|_{t=0} = \xi, \quad y|_{t=0} = \eta, \quad u|_{t=0} = u_0(\xi, \eta) \quad (57)$$

yazalım, burada ξ ve η bilinen sabitlerdir. Kolayca gösterilebilir ki (56), (57) probleminin çözümü

$$u(x, y, t) = u_0(x - t, y - t) \quad (58)$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.2.2 Yardımcı Problem ve Onun Çözümü

[9] da önerildiği gibi (54), (55) problemi için iki tür yardımcı problem oluşturalım ve onları kullanarak esas problemin gerçek çözümünü bulalım. Bu amaçla önce L ile aşağıdaki operatörü

$$L \cdot = \frac{\partial \cdot}{\partial x} + \frac{\partial \cdot}{\partial y}$$

gösterelim. Bu notasyonda (54) denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + Lu = 0 \quad (59)$$

gibi yazılabilir. L^{-1} ile L operatörünün tersini gösterelim. L^{-1} in varlığını kabul ederek (59) nın her iki tarafına L^{-1} i uygularsak

$$L^{-1} \frac{\partial u}{\partial t} + L^{-1} Lu = L^{-1} 0$$

veya

$$\frac{\partial L^{-1} u}{\partial t} + u = h(x, y)$$

elde ederiz. Burada, $h(x, y) = L^{-1} 0$ olmaktadır, yani h fonksiyonu $Lh = 0$ denklemini korumakta, dolayısıyla $h \in \ker M$ olmaktadır.

$$L^{-1} u = v \quad (60)$$

Notasyonunda sonuncu denklem

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u = h(x, y)$$

gibi yazılabilir. $h \in \ker L$ olduğundan açıktır ki, $h = f(x - y)$ şeklinde ifade edilebilir, burada f herhangi bir diferansiyellenebilen fonksiyondur.

$$w(x, y, t) = v(x, y, t) - tf(x - y)$$

olsun. Bu notasyonda sonuncu denklem

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u = 0$$

şeklinde yazılabilir. $Lv = Lw$ olduğundan gözönüne aldığımız denklemi

$$\frac{\partial w}{\partial t} + Lw = 0 \quad (61)$$

gibi ifade ederiz. (61) denklemi için başlangıç koşul

$$w(x, y, 0) = w_0(x, y) \quad (62)$$

olmaktadır. (61), (62) problemine 1.tür yardımcı problem denir. Burada $w_0(x, y)$

$$u_0(x, y) = Lw_0(x, y) \quad (63)$$

denklemini koruyan herhangi bir fonksiyon olmaktadır.

Teorem 4. Eğer $v(x, y, t)$ (61), (62) probleminin çözümü ise

$$u(x, y, t) = Lv(x, y, t)$$

eşitliği ile tanımlanan $u(x, y, t)$ fonksiyonu (54), (55) probleminin çözümü olmaktadır.

İspat $v(x, y, t)$ fonksiyonu (61), (62) probleminin çözümü, L ve $\frac{\partial}{\partial t}$ operatörlerinin komütatif olduğu varsayımı çerçevesinde (61) denklemi ve (62) başlangıç koşuluna L operatörünü uygulayalım. L lineer olduğundan

$$0 = L \frac{\partial w}{\partial t} + Lu = \frac{\partial Lw}{\partial t} + Lu$$

elde ederiz. $Lw = u$ eşitliğini de dikkate alırsak teoremi ispatlamış oluruz.

Örnek 1 (54) denklemini

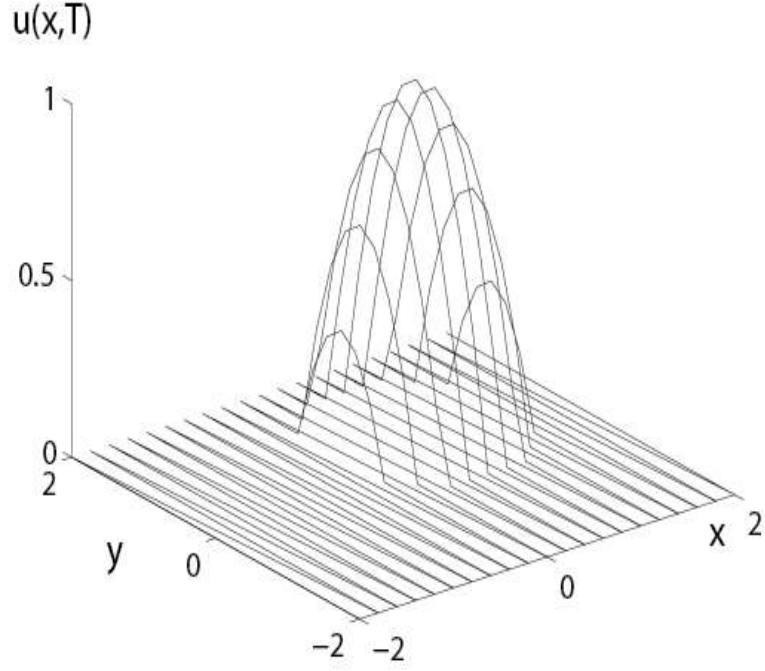
$$u(x, y, 0) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases} \quad (64)$$

başlangıç koşulu çerçevesinde çözümünü bulunuz. Burada $|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$ olmaktadır.

Çözüm (54), (64) probleminin karakteristikler metodu ile bulunan çözümü

$$u(x, y, t) = \begin{cases} 1 - (x-t)^2 - (y-t)^2, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$$

olmaktadır. (54), (64) probleminin zaman evriminin grafikleri Şekil 18 de gösterilmiştir.



Şekil 18 : $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $T=1.0$

3.2.3 İki Bölgele Parçalı Sürekli Başlangıç Koşulu

Şimdi (54) denklemini

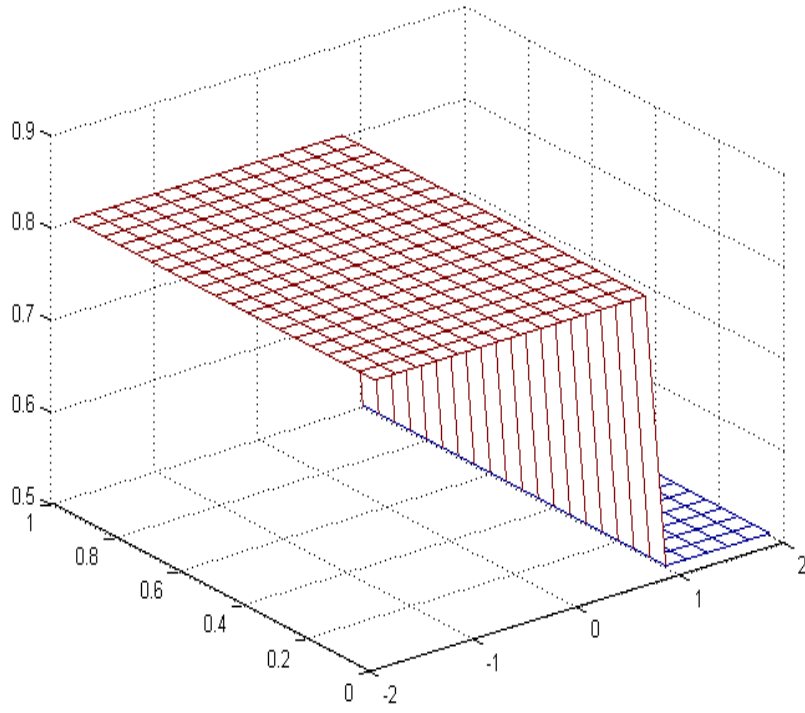
$$u_0(x, y) = \begin{cases} u_1, & x > 0, \\ u_2, & x < 0 \end{cases}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

koşulu çerçevesinde gerçek çözümünü bulunuz.

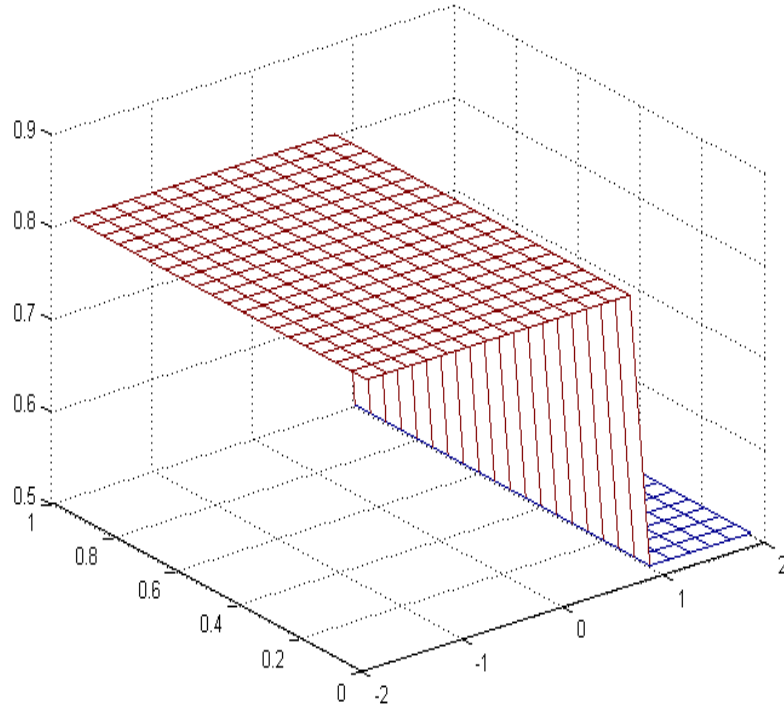
(65) ile verilen fonksiyonun grafikleri Şekil 19 ve 20 de gösterilmiştir. (54), (69) esas probleminin gerçek çözümü

$$u(x, y, t) = \begin{cases} u_1, & \frac{x}{t} < 1, \\ u_2, & \frac{x}{t} > 1 \end{cases}, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (65)$$

olmaktadır ve sözkonusu çözümün grafikleri sırasıyla Şekil 21 ve 22 de gösterilmiştir.



Şekil 19: $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 0.8$



Şekil 20: $u(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 1.0$

Şimdi bu problemin çözümünü 1.tür yardımcı problemi kullanarak elde edelim. Bu amaçla $w_0(x, y)$ fonksiyonunu

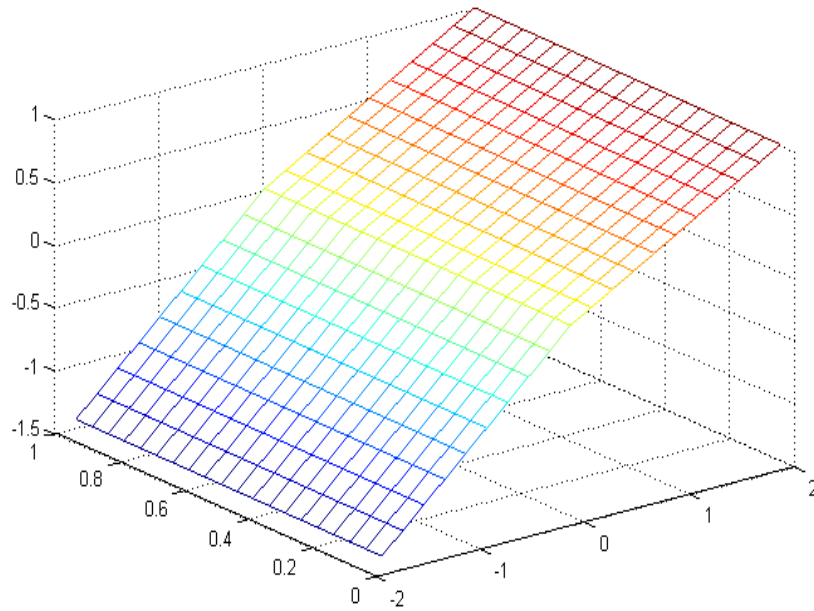
$$w_0(x, y) = \begin{cases} u_1 x, & x < 0, \\ u_2 x, & x > 0 \end{cases}, \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (17)$$

olarak tanımlayalım. Yardımcı problemin başlangıç fonksiyonunun grafikleri Şekil 21 ve 22 de gösterilmiştir.

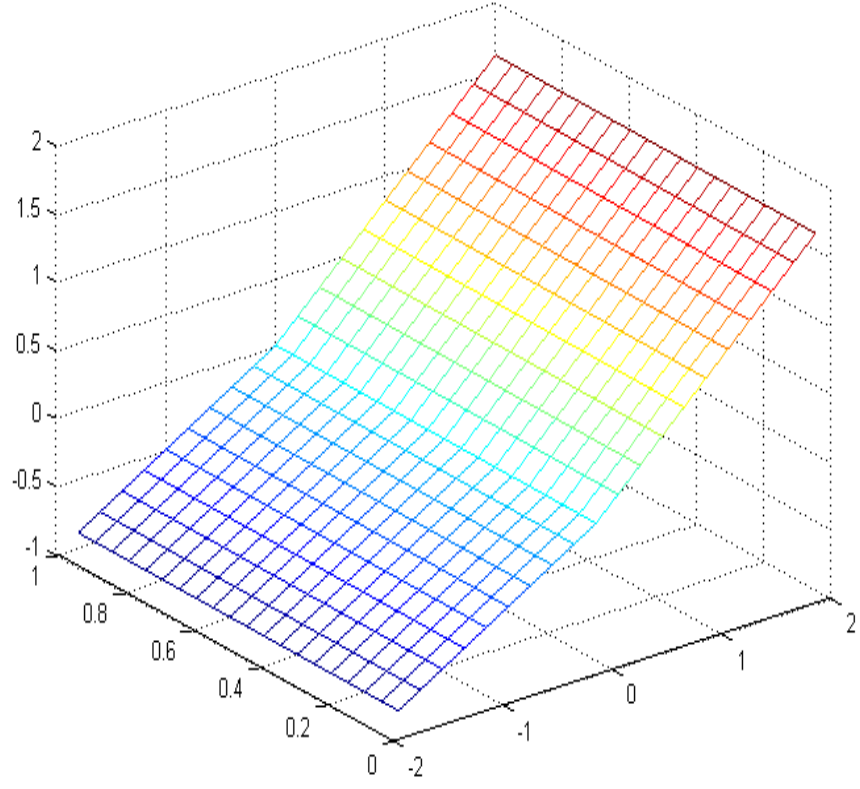
Bu durumda yardımcı probleminin karakteristikler yöntemiyle bulunan çözümü

$$w(x, y, t) = \begin{cases} u_1(x-t), & \frac{x}{t} < 1, \\ u_2(x-t), & \frac{x}{t} > 1 \end{cases}, \quad 0 \leq y \leq 1$$

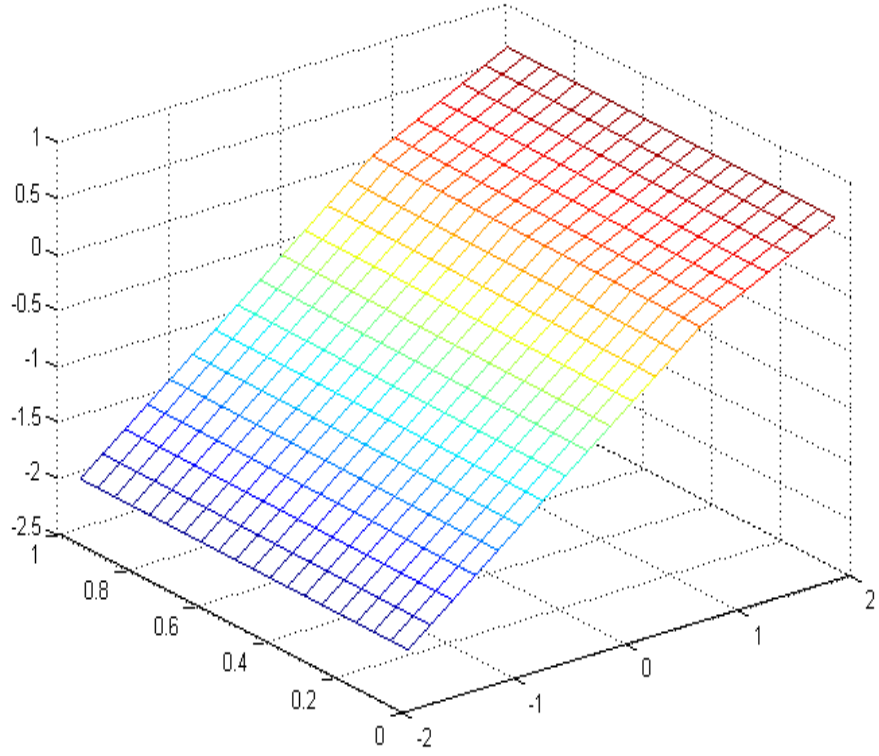
olmaktadır ve bu çözümlerin grafikleri Şekil 23 ve 24 te gösterilmiştir.



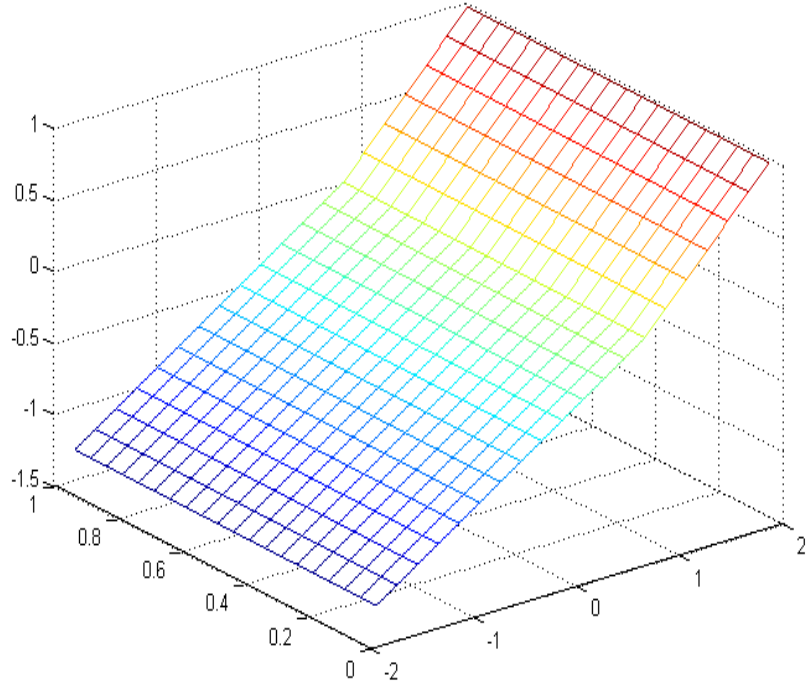
Şekil 21 : $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2$



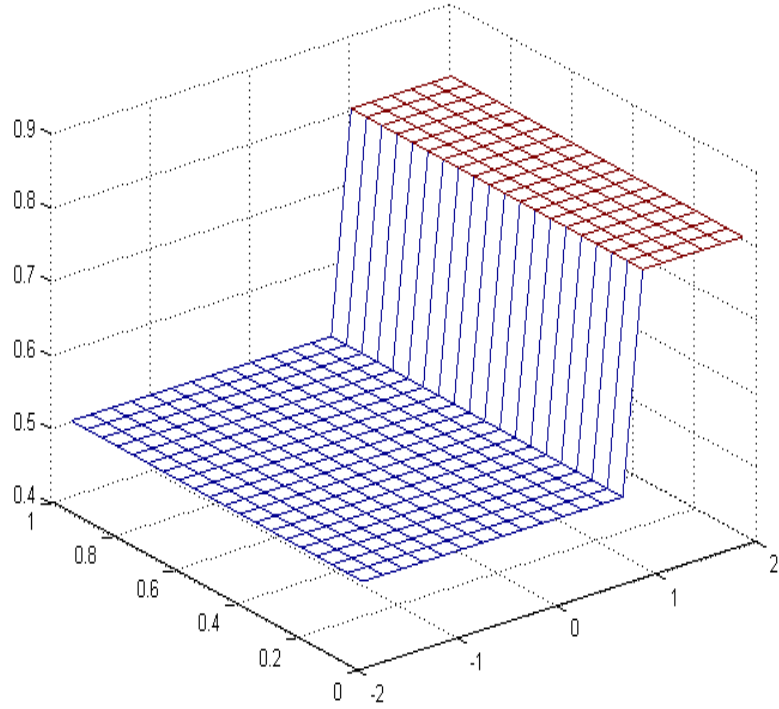
Şekil 22: $v_0(x, y)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2$



Şekil 23: $v(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 0.8$

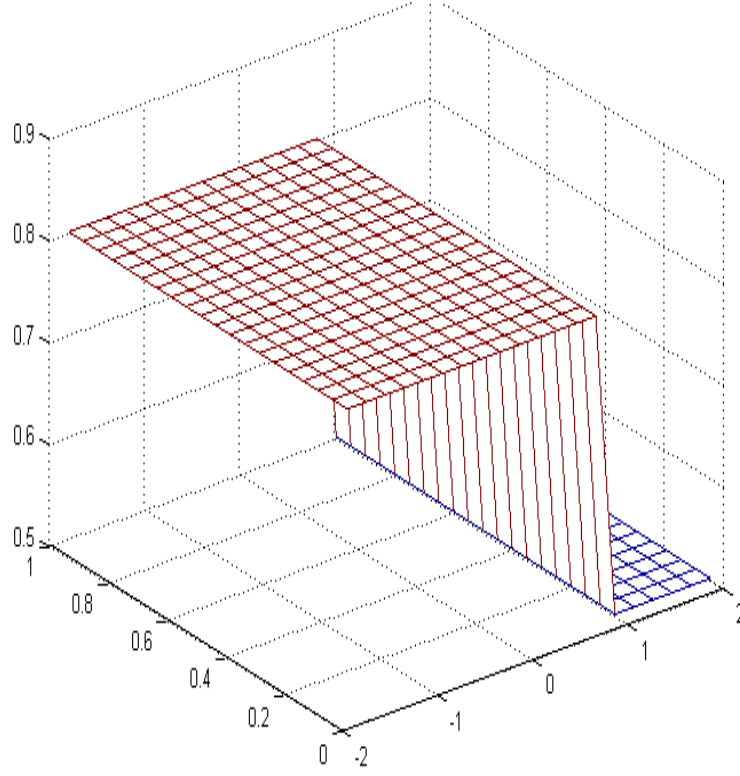


Şekil 24: $v(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 0.8$



Şekil 25: $u(x, y, t) = Lv(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 > u_2, T = 0.8$

Teorem 4 ü dikkate alırsak esas problemin özümünü elde ederiz. Bulunan çözümlerin grafikleri şekil 25 ve 26 da gösterilmiştir.



Şekil 26: $u(x, y, t) = Lv(x, y, t)$ fonksiyonunun grafiği, $u_1 < u_2, T = 0.8$

SONUÇ

Tezdeki sonuçları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz.

- Dört bölgeli Riemann koşullu problemlerde seyreltme ve şok dalgalarının sınıflandırılması verilmiştir.
- Sürekli başlangıç koşullu iki boyutlu Cauchy probleminin gerçek çözümünün bulunması için bazı avantajlara sahip yardımcı problem önerilmiştir. Önerilen yardımcı problem, esas problemin fiziksel özelliklerini doğru aksettirebilen gerçek çözümün bulunmasına yardım eder.
- Aynı yöntemi kullanarak, iki bölgeli Riemann probleminin de gerçek çözümü bulunmuştur.
- Önerilen yardımcı problemin sayısal çözümünü elde etmek için süreksiz fonksiyonlar sınıfı algoritmalarda üretilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1] John Guckenheimer Shocks and Rarefactions in Two Space Dimensions, Arch. Rational Mech. Anal., 59, (1975), no. 3, pp. 281-291.
- [2] Wagner, D. The Riemann Problem in Two Space Dimensions For A Single Conservation Law, SIAM, J. Math. Anal., 14, (1983), :No 3, pp. 534-559.
- [3] Daeki Yoon, Woonjae Hwang, Two-Dimensional Riemann Problems for Burger's Equation, Bull. Korean Math. Soc. 45, (2008), No. 1, pp. 191-205.
- [4] Godlewski, E., Raviart, R.E., Hyperbolic Systems of Conservation Laws, Mathematiques & Applications, 1991.
- [5] Liska R. and Wendorff, B Composite Schemes for Conservation laws, SIAM, J. Numer. Anal., 35, (1998), :No 6, pp. 2250-2271.
- [6] Kroner, D., Numerical Schemes for Conservation Laws, J.Wiley & Sons Ltd and B.G. Tenber, 1997.
- [7] Kruzkov, S.N., First Order Quasilinear Equation in Several Independent Variables, Math. Sbornik, 81, 1970, p. 217-243.
- [8] Lax, P.D., Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves. Conf. Board Math. Sci. Regional Conf. Series in Appl. Math. 11, SIAM, Philadelphia, 1972.
- [9] Rasulov, M.A. Identification of the Saturation Jump in the Process of Oil Displacement by Water in a 2D Domain, Dokl RAN, Vol. 319, No.4, pp. 943-947, 1991.
- [10] Rasulov, M.A., Coskun, E., Sinsoysal, B., Finite Differences Method for a Two-Dimensional Nonlinear Hyperbolic Equations in a Class of Discontinuous Functions. App. Mathematics and Computation, vol.140, Issue 1, August, pp.279-295, 2003, USA.
- [11] Toro, Eleuterio, F. Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1999.
- [12] Whitham, G.B. Linear and Nonlinear Waves, Wiley Int., New York, 1974.

ÖZGEÇMİŞ

17 Kasım 1990'da İstanbul Bakırköy Bahçelievler Yaşam Hastanesi'nde doğdum. Dört çocuklu bir ailenin üçüncü çocuğuyum.

İlk ve orta öğrenimimi İstanbul Gaziosmanpaşa ilçesinin merkez okullarından Bekir Sami Dedeoğlu İlköğretim ve Ortaokulu, liseyi ise yine Gaziosmanpaşa'daki Plevne Anadolu Lisesinde bitirdim. Matematiğe olan ilgimden dolayı yüksek öğrenimimi 2008-2012 yılları arasında Dicle Üniversitesi Fen Fakültesinin Matematik Bölümünde lisans eğitimi tamamladım. Öğretmen kökenli bir aileden geldiğim için meslek seçimimi de öğretmenlikten yana kullandım.

Öğretmenlik için Pedagojik Formasyonumu Okan Üniversitesinde 2012- 2013 eğitim öğretim yılında tamamladım.

Geleceğimi eğitim alanında akademik kariyer yapmak üzere planladığım için, Beykent Üniversitesinin Fen Bilimleri Enstitüsünde düzenlenen, Matematik-Bilgisayar Anabilim Dalında Uygulamalı Matematik alanında mastır programına katıldım. 2012-2013, 2013-2014 öğretim yıllarında (iki öğretim yılı) bu programa devam ettim.

Ayrıca bu dönem içinde (2012-2013) öğretim yılında Gaziosmanpaşa Dede Korkut Orta Okulunda öğretmen olarak çalıştım. 2013-2014 öğretim yılında ise özel bir dershanede, dersane öğretmenliği yaptım .

Yüksek öğrenim dönemim içinde iki yıl akademik düzeyde ingilizce dil eğitimi aldım.

Feride ÖZER