



**T. C.  
AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RİORDAN MATRİSLERİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**BURCU KIYAK**

**OCAK**

**BURCU KIYAK**

**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**OCAK 2022**

# **RIORDAN MATRİSLERİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI**

**Burcu KIYAK**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman**

**Dr. Öğr. Üyesi Fatma YEŞİL BARAN**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2022**

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarımı kabullendiğimi beyan ederim.

.....

Burcu KIYAK

26/01/2022

RIORDAN MATRİSLERİN ÇEŞİTLİ UYGULAMALARI  
(Yüksek Lisans Tezi)

Burcu KIYAK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2022

ÖZET

Bu çalışmada, Riordan grup tanımı yardımıyla bazı özel sayı dizilerinin Riordan gösterimleri bulunmuştur. Bulunan bu Riordan gösterimleri yardımıyla bazı eşitlikler elde edilmiştir. Bu sayı dizilerine Riordan Grubun Temel Teoremi uygulanarak bazı formüllere ulaşılmıştır. Son olarak bu sayı dizileri yardımıyla tanımlanan dizilerin klasik satır toplamı , alterne satır toplamı ve ağırlıklı satır toplamaları bulunmuştur.

Sayfa Adedi : 86  
Anahtar Kelimeler : Riordan grup , Harmonik sayılar , Hiperharmonik sayılar  
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Fatma YEŞİL BARAN

## VARIOUS APPLICATIONS OF RIORDAN MATRICES

(M. Sc. Thesis)

Burcu KIYAK

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2022

## ABSTRACT

In this study, Riordan representations of some special number sequences are acquired using the definition of Riordan group. By these representations, some identities have been obtained. New equations are handled by applying the Fundamental Theorem of the Riordan arrays to these number sequences. Finally, the total row sum, alternating row sum and weighted row sum of the sequences defined with the help of these number matrices were obtained.

Number of pages : 86  
KeyWords : Riordan group, Harmonic numbers, Hyperharmonic numbers,  
Supervisor : Asst. Prof. Dr. Fatma YEŞİL BARAN

## ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışma, Amasya Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü öğretim üyesi Fatma YEŞİL BARAN yönetiminde hazırlanmış ve Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'ne Yüksek Lisans Tezi olarak sunulmuştur.

Bu çalışma 11 bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, literatür hakkında bilgi verilerek çalışmamızın amaç ve kapsamı açıklanmıştır. İkinci bölümde, çalışmada ihtiyaç duyacağımız bazı tanımlar verilmiştir. Üçüncü bölümde formal kuvvet serilerine değinilmiştir. Dördüncü bölümde bu çalışmada kullanacağımız bazı özel dizilerinin tanımlarına ve üreteç fonksiyonlarına yer verilmiştir. Beşinci bölümde formal kuvvet serilerinin matris gösterimi verilmiştir. Altıncı bölümde Riordan grup tanımı verilip Pascal matrisinin Riordan gösterimine değinilmiştir.

Çalışmamızın esas kısmı olan yedinci, sekizinci, dokuzuncu ve onuncu bölümde sırasıyla Harmonik sayıların, Hiperharmonik sayıların,  $n$ . Hiperharmonik sayıların ve genelleştirilmiş Tetranacci sayılarının üreteç fonksiyonları kullanılarak Riordan gösterimleri elde edilmiştir. Ayrıca bu sayı dizilerinin Riordan gösterimleri yardımıyla bazı eşitlikler elde edilmiştir. Bu sayı dizileri yardımıyla tanımlanan matrislerin bazı satır toplamalarına değinilmiştir. Son bölümde ise sonuç ve önerilerden bahsedilmiştir.

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca beni destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Fatma YEŞİL BARAN'a teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez dönemi boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen annem ve kardeşime teşekkür ederim.

## İÇİNDEKİLER

|                                                                                          | Sayfa |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| ÖZET .....                                                                               | iv    |
| ABSTRACT .....                                                                           | v     |
| ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR .....                                                                  | vi    |
| İÇİNDEKİLER .....                                                                        | vii   |
| SİMGELER VE KISALTMALAR .....                                                            | ix    |
| 1. GİRİŞ .....                                                                           | 1     |
| 2. TEMEL KAVRAMLAR .....                                                                 | 4     |
| 3. FORMAL KUVVET SERİLERİ .....                                                          | 7     |
| 4. ÖZEL BAZI SAYI DİZİLERİ .....                                                         | 8     |
| 4.1. Harmonik ve Hiperharmonik Sayılar .....                                             | 8     |
| 4.2. n. Harmonik Fibonacci ve n.Hiperharmonik Fibonacci Sayıları .....                   | 9     |
| 4.3. Fibonacci Sayıları .....                                                            | 9     |
| 4.4. Tetranacci Sayıları .....                                                           | 10    |
| 5. FORMAL KUVVET SERİLERİNİN MATRİS GÖSTERİMİ .....                                      | 11    |
| 6. RİORDAN GRUP .....                                                                    | 14    |
| 6.1. Tanımlar ve Kavramlar .....                                                         | 14    |
| 6.2. Pascal Matrisinin Riordan Gösterimi .....                                           | 15    |
| 6.3. Riordan Dizilerinin Temel Teoremi .....                                             | 17    |
| 7. HARMONİK SAYILARLA TANIMLI OLAN MATRİSİN RİORDAN<br>GÖSTERİMİ .....                   | 20    |
| 7.1. Harmonik Sayılarda Tanımlı Olan Matrisin Riordan Gösteriminin Elde<br>Edilişi ..... | 20    |
| 7.2. Harmonik Sayılarla Tanımlı Matrisin Satır Toplamları . ....                         | 30    |

|                                                                                                              | <b>Sayfa</b> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| 8. HİPERHARMONİK SAYILARLA TANIMLI OLAN MATRİSİN RİORDAN GÖSTERİMİ .....                                     | 36           |
| 8.1. Hiperharmonik Sayılarda Tanımlı Olan Matrisin Riordan Gösteriminin Elde Edilişi .....                   | 36           |
| 8.2. Hiperharmonik Sayılarla Tanımlı Matrisin Satır Toplamları .....                                         | 46           |
| 9. HİPERHARMONİK FİBONACCİ SAYILARI İLE TANIMLI OLAN MATRİSİN RİORDAN GÖSTERİMİ .....                        | 52           |
| 9.1. Hiperharmonik Fibonacci Sayıları İle Tanımlı Olan Matrisin Riordan Gösteriminin Elde Edilişi .....      | 52           |
| 9.2. Hiperharmonik Fibonacci Sayıları Tanımlı Matrisin Satır Toplamları .....                                | 63           |
| 10. GENELLEŞTİRİLMİŞ TETRANACCİ SAYILARI İLE TANIMLI OLAN MATRİSİN RİORDAN GÖSTERİMİ .....                   | 69           |
| 10.1. Genelleştirilmiş Tetranacci Sayıları İle Tanımlı Olan Matrisin Riordan Gösteriminin Elde Edilişi ..... | 69           |
| 10.2. Genelleştirilmiş Tetranacci Sayıları Tanımlı Matrisin Satır Toplamları .....                           | 77           |
| 11. SONUÇ VE ÖNERİLER.....                                                                                   | 83           |
| 11.1. Sonuçlar.....                                                                                          | 83           |
| 11.2. Öneriler .....                                                                                         | 83           |
| KAYNAKLAR .....                                                                                              | 84           |
| ÖZGEÇMİŞ .....                                                                                               | 86           |

## SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

| Simgeler                         | Açıklama                             |
|----------------------------------|--------------------------------------|
| $\mathcal{G}$                    | Üreteç fonksiyonu                    |
| $P_n$                            | Pascal matrisi                       |
| $H_n$                            | $n$ . Harmonik sayı                  |
| $H_n^{(\alpha)}$                 | $n$ . Hiperharmonik sayı             |
| $F_n$                            | $n$ . Fibonacci sayı                 |
| $\mathcal{F}[x]$                 | Formal kuvvet serikümesi             |
| $ord(f(t))$                      | Formal kuvvet serisinin mertebesi    |
| $[R_{n,k}]_{n,k \in \mathbb{Z}}$ | Riordan dizisi                       |
| $T_n$                            | Genelleştirilmiş Tetranacci sayısı   |
| $F_n^{(r)}$                      | $n$ . Hiperharmonik Fibonacci sayısı |
| $L_q$                            | $q$ - logaritma                      |

## 1. GİRİŞ

Tarihsel olarak, Riordan dizi kavramının iki versiyonu vardır. İlk versiyon  $(d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{Z}}$  şeklinde sonsuz matristen oluşur. Formal Laurent serileriyle ilgilenir ve esas olarak cebirsel özellikleri incelemek için kullanılmıştır. İkinci versiyon ise  $(d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  şeklinde bir sonsuz alt üçgensel matristen oluşur. Formal kuvvet serileri ve kombinatoriyal özellikleri incelemek için kullanılmıştır. Burada her Riordan dizisinin  $n, k, m \in \mathbb{Z}$  olmak üzere üç parametresinde iki karakteristik kombinatoriyal toplamını ifade ettiği görülür. Bu parametreler özelleştirilebilir ve iki sonsuz tekrarlı matrisler alanında geçerli olan belirsiz sayıda başka eşitlikler üretebilir (Luzon vd., 2012). Riordan dizisi kavramı, birçok kombinasyonlu toplamın üreteç fonksiyonunu bu imak için kullanılır. Bu kavram üreteç fonksiyon toplamının kapalı şeklini veya asimptotik değerini elde etmemize yardımcı olabilir.

Shapiro, Getu, Woan ve Woodson Riordan grup konusunda ilk çalışmaları yapan ve bu yapıyı tanımlayan araştırmacılarıdır. Riordan gösterimle temsil edilen matrislerin terslerini de Riordan grubun özelliklerinden yararlanarak elde etmişlerdir (Shapiro vd.,1991).

Rogers, Pascal üçgeninin özelliklerini genelleştirerek Riordan yapıyı tanıtmıştır (Rogers, 1978).

Sprugnoli, kombinatoriyal özelliklerin ispatında bir metod geliştirmek için Riordan grupları kullanmıştır. Ters kombinatoriyal özellikleri uygulamak için de Riordan grupların nasıl kullanıldığına değinmiştir (Sprugnoli, 1994; Baccherini, 2008).

Riordan sıraları yöntemi özellikle kombinatorik problemlerde ortaya çıkan sayı dizilerinin araştırılmasında bununla ilgili özdeşliklerin elde edilmesinde (Cheon vd., 2006; Sprugnoli 2006; Sprugnoli, 1994; Luzon vd., 2012;Merlini vd., 2000) ve sayılar teorisindeki bazı problemlerin çözülmesinde (Cheon vd., 2008; Merlini vd., 2002) kullanışlı olmaktadır.

Cheon ve El-Mikkway bazı genelleştirilmiş Harmonik sayıların elde edilen sonsuz üçgensel matrisin bir Riordan dizisini izlediğini gözlemleyerek, her iki türdeki Stirling sayıları ile diğer genelleştirilmiş Harmonik sayılar arasında çok basit bağlantılar elde

etmişlerdir. Ayrıca, bu tür genelleştirilmiş Harmonik sayılarla ilişkili Riordan dizilerinin birçok kombinatoryal toplamını ve birçok genelleştirilmiş Harmonik sayı eşitliğini üreten fonksiyonlar bulmuşlardır (Barry, 2009).

Logaritmanın bir  $q$  – analoğu  $L_{[q]}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{q^n - 1}$ ,  $|q| > 1$ ,  $|x| < |q|$  ile tanımlanmıştır (Matala, 1998). Ve Murty  $q = -a^2$  ve  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  iken  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{F_n} = (\alpha - \beta)L_q(-\alpha)$  olduğunu göstermiştir (Murty, 2013). Çetin, Kızılateş, Baran ve Tuğlu Harmonik Fibonacci ve Hiperharmonik Fibonacci sayılarla ilgili bazı özdeşlikler elde etmişlerdir. Simetrik algoritma kullanarak, olağan sonuçları iyileştiren ve bilinen denklemleri genelleştiren bazı eşitlikler elde etmişlerdir. Ayrıca Riordan dizisi kavramı yardımıyla bu sayılar için üreten fonksiyonlar elde etmişler ve çeşitli eşitlikler türetmişlerdir (Çetin vd., 2021).

Harmonik sayılar, antik çağlardan beri incelenmiştir. Ve sayılar teorisinin çeşitli dallarında kullanılmaktadır. Harmonik sayıların çeşitli genelleştirmeleri mevcuttur. Conway ve Guy Hiperharmonik sayıları tanımlamış ve Hiperharmonik sayıların Harmonik sayılar cinsinden yazılmasına olanak sağlayan bazı eşitlikler elde etmişlerdir (Conway vd., 16).

Ayrıca Riordan dizileri üzerine çeşitli yüksek lisans ve doktora tezleri de hazırlanmıştır. Barry doktora tez çalışmasında tamsayı dizileri ve başta Riordan dizileri olmak üzere bunlara uygulanan dönüşümler üzerine araştırma yapmıştır. Tamsayı dizilerini ve bunlar üzerinde çalışan dönüşümleri incelemiştir. Bu dönüşümlerin çoğu, özellikle Riordan dizilerine ve Pascal benzeri dizilere odaklanarak üçgensel tamsayı dizileriyle tanımlamıştır. Bu dönüşümlerin yapısını araştırmak için, Riordan matris gruplarının temel özelliklerinden yararlanmıştır (Cheon vd., 2008).

Hennesy, doktora tez çalışmasında Riordan sıraları yöntemini sürekli kesirlere uygulamıştır (Hennesy, 2011).

Tetranacci sayı dizisi her bir terim kendisinden önceki dört terim toplanarak bir sonraki terim elde edilerek devam eden bir sayı dizisidir. Tetranacci sayı dizisini, ilk kez Tetranacci Feinberg tanımlamıştır (Feinberg, 1963). Waddill ise “The Tetranacci Sequence

and Generalizations” isimli çalışmasında Tetranacci dizisini daha kapsamlı incelemiştir (Waddill, 1992).

Bu tez çalışmasında ise bazı sayı dizilerinin Riordan gösterimine yer verilmiştir. Bu sayı dizilerinin Riordan gösterimleri bulunurken üret  fonksiyonlarından yararlanılmıştır. Ayrıca bu tez çalışmasında, Harmonik sayılar, Hiperharmonik sayılar,  $n$ . Hiperharmonik Fibonacci sayıları ve Genelleştirilmiş Tetranacci sayıları gibi sayı dizilerinin satır toplamlarına yer verilmiştir.



## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, çalışmanın temel sonuçlarıyla ilgili ileride verilecek bölümlerde yararlanılacak temel kavramlar verilecektir.

### 2.1. Üreteç Fonksiyonu

$(a_n)$  bir dizi olmak üzere  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  şeklinde bir kuvvet serisi ile tanımlanabiliyorsa,  $f(x)$  fonksiyonuna  $(a_n)$  dizisinin üreteç fonksiyonu denir ve  $\mathcal{G}(a_n) = f(x)$  ile gösterilir (Barry, 2009).

#### 2.1.1. Üstel Üreteç Fonksiyonu

$f(x)$  fonksiyonu,

$$f(x) = \mathcal{G}\left(\frac{f_k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{t^k}{k!}$$

şeklinde tanımlı olsun.  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisinin üstel üreteç fonksiyonu  $f(x)$  olarak tanımlanır.

Üreteç fonksiyonu operatörünün bazı temel özellikleri aşağıda verilmiştir (Koyuncuoğlu, 2014).

(a)  $\mathcal{G}(\alpha f_k + \beta g_k) = \alpha \mathcal{G}(f_k) + \beta \mathcal{G}(g_k)$  (doğrusallık özelliği).

(b)  $\mathcal{G}(f_{k+1}) = \frac{\mathcal{G}(f_k) - f_0}{t}$  (öteleme özelliği).

(c)  $\mathcal{G}(k f_k) = t D \mathcal{G}(f_k)$  (türev özelliği).

(d)  $\mathcal{G}(\sum_{k=0}^n f_k g_{n-k}) = \mathcal{G}(f_k) \mathcal{G}(g_k)$  (konvolüsyon özelliği)

(e)  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n (\mathcal{G}(g_k))^n = \mathcal{G}(f_k) \circ \mathcal{G}(g_k)$  (bileşke özelliği)

(f)  $\mathcal{G}([t^n]F(t)\phi(t)^n) = \left[ \frac{F(w)}{1-t\phi'(w)} \right]_{w=t\phi(w)}$  (köşegenleştirme özelliği).

### 2.1.2. Üreteç fonksiyonları ile ilgili bazı teoremler

2.1.2.1. Teorem.  $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$  olmak üzere

$$\mathcal{G}(f_{k+j}) = \frac{\mathcal{G}(f_k) - f_0 - f_1 t - \dots - f_{j-1} t^{j-1}}{t^j}$$

eşitliği sağlanır (Sprugnoli, 2006).

*İspat.*  $g_k = f_{k+1}$  alınıp  $j$  üzerinden tümevarım uygulanırsa eşitlik kolayca ispatlanabilir.

2.1.2.2. Teorem.  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisinin üreteç fonksiyonu  $f(t) = \mathcal{G}(f_k)$  olmak üzere

$$\mathcal{G}(f_{k-j}) = t^j \mathcal{G}(f_k)$$

dir (Sprugnoli, 2006).

*İspat.*  $\mathcal{G}(f_k) = \mathcal{G}(f_{(k-1)+1}) = \frac{\mathcal{G}(f_{k-1}) - f_{-1}}{t}$  olmak üzere  $f_{-1}$ ,  $t^{-1}$  in katsayılarıdır; fakat  $f(t) \in \mathcal{F}$  olduğundan  $f_{-1} = 0$  olur. Dolayısıyla

$$\mathcal{G}(f_{k-1}) = t \mathcal{G}(f_k)$$

olarak bulunur ve tümevarım uygulanarak

$$\mathcal{G}(f_{k-j}) = t^j \mathcal{G}(f_k)$$

elde edilir.

## 2.2. Pascal Matrisi

$1 \leq i, j \leq n$  için

$$P_{ij} = \begin{cases} \binom{i-1}{j-1}, & i \geq j \\ 0, & j > i \end{cases}$$

olmak üzere  $n \times n$  tipinden  $P_n = (P_{ij})$  matrisine Pascal matrisi denir (Yeşil Baran, 2011).

Örneğin,  $n = 6$  için Pascal matrisi

$$P_6 = \begin{bmatrix} \binom{0}{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{1}{0} & \binom{1}{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & 0 & 0 \\ \binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & 0 \\ \binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} \end{bmatrix}_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{bmatrix}_{6 \times 6}$$

şeklindedir (Yeşil Baran, 2011).

## 2.3. Rekürans Bağıntısı

Bir rekürans bağıntısı, bir dizinin her bir elemanının bir öncekinin fonksiyonu olarak ifade edebilen bir denklemdir. Yani,  $\varphi: \mathbb{N} \times X \rightarrow X$  bir fonksiyon ve  $X$  bir dizinin elemanlarının bulunduğu küme olmak üzere,  $n > 0$  için

$$u_n = \varphi(n, u_{n-1})$$

ise bu bağıntıya rekürans bağıntısı denir (Baccherini vd., 2008).

### 3. FORMAL KUVVET SERİLERİ

Bu bölümde, formal kuvvet serisinin tanımından, formal kuvvet serilerinin kümesinin gösteriminden ve formal Laurent serisinin tanımına yer verilmiştir.

$\mathbb{R}$ , reel sayılar cismi ve  $t$  de bir reel değişken olmak üzere,  $\mathbb{R}$  üzerinde  $t$  nin bir formal kuvvet serisi (f.k.s) şu şekilde ifade edilmektedir (Koyuncuoğlu, 2014).

$$f(t) = f_0 + f_1 t + f_2 t^2 + f_3 t^3 + \dots + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n.$$

Bu eşitlikteki  $f_0, f_1, f_2, f_3, \dots$  reel sayılardır.

Bir  $t$  belirsiz değişkenine göre  $\mathcal{F}$  cismi üzerindeki formal kuvvet serilerinin kümesi  $\mathcal{F}[t]$  ile gösterilir. Elde edilecek sonuçların  $\mathcal{F}$  cisminde ve  $t$  değişkeninden bağımsız olduğunu öne çıkarmak için  $\mathcal{F}[t]$ ' yi  $\mathcal{F}$  ile göstereceğiz.

$f(t) \in \mathcal{F}$  olmak üzere,  $f_r \neq 0$  olacak biçimde en küçük indis  $r$  ise buna  $f(t)$  formal kuvvet serisinin mertebesi denir ve  $ord(f(t))$  ile, mertebesi  $r$  olan bütün formal kuvvet serilerinin kümesi  $\mathcal{F}_r$  veya  $\mathcal{F}_r[t]$  ile gösterilir.

Başka bir formal kuvvet seri tipi olan formal Laurent kuvvet serisi

$$g(t) = g_{-m} t^{-m} + g_{-m+1} t^{-m+1} + \dots + g_{-1} t^{-1} + g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots = \sum_{k=-m}^{\infty} g_k t^k$$

olarak tanımlıdır (Koyuncuoğlu, 2014).

## 4. ÖZEL SAYI DİZİLERİ

Bu bölümde Harmonik, Hiperharmonik,  $n$ . Harmonik Fibonacci,  $n$ . Hiperharmonik Fibonacci, Fibonacci ve Genelleştirilmiş Tetranacci sayılarının tanımlarına ve üreteç fonksiyonlarına yer verilmiştir.

### 4.1. Harmonik Ve Hiperharmonik Sayılar

$H_0 := 0$  olmak üzere

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

şeklinde tanımlı ifadeye  $n$ . Harmonik sayı denir (Conway vd., 1996).

$\alpha > 1$  tamsayısı ve  $H_n^{(1)} := H_n$  olmak üzere

$$H_n^{(\alpha)} := \sum_{k=1}^n H_k^{(\alpha-1)}$$

şeklinde tanımlanan sayıya " $\alpha$ . mertebeden  $n$ . Hiperharmonik sayı" adı verilir (Conway vd., 1996).

Harmonik ve Hiperharmonik sayılara ait üreteç fonksiyonları sırasıyla aşağıdaki gibidir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = -\frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n = -\frac{\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}.$$

#### 4.2. $n$ . Harmonik Fibonacci ve $n$ . Hiperharmonik Fibonacci Sayıları

$r > 0$  için

$$\mathcal{F}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\mathcal{F}_k}$$

şeklinde tanımlı ifadeye  $n$ . Harmonik Fibonacci sayısı denir (Yeşil Baran, 2011).

$r > 0$  olmak üzere  $\mathcal{F}_n^{(0)} = \frac{1}{\mathcal{F}_n}$ ,  $\mathcal{F}_0^{(r)} = 0$  ve  $\mathcal{F}_0 = 0$  için

$$\mathcal{F}_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n \mathcal{F}_k^{(r-1)}$$

şeklinde tanımlanan sayıya  $r$ . mertebeden  $n$ . Hiperharmonik Fibonacci sayısı denir (Yeşil Baran, 2011).

$L_{\{-\alpha^2\}}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(-\alpha^2)^{n-1}}$  ( $|\alpha^2| > 1, |x| < |\alpha^2|$ ) olmak üzere  $n$ . Harmonik Fibonacci ve  $n$ . Hiperharmonik Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonları sırasıyla şu şekildedir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n x^n = \frac{\alpha - \beta}{1 - x} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n^{(r)} x^n = \frac{\alpha - \beta}{(1 - x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x).$$

#### 4.3. Fibonacci Sayıları

$F_1 = 1$  ve  $F_2 = 1$  olmak üzere  $n > 2$  için  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$  rekürans bağıntısı yardımıyla tanımlı sayılara Fibonacci sayıları denir.

Üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n t^n = \frac{t}{1-t-t^2}$$

şeklinde tanımlıdır (Koshy, 2019).

#### 4.4. Genelleştirilmiş Tetranacci Sayıları

$a, b, c, d$  ve  $p, q, r, s \in \mathbb{R}$  olmak üzere başlangıç değerleri  $T_0 = a, T_1 = b, T_2 = c, T_3 = d$  olan  $n \geq 4$  için

$$T_n = pT_{n-1} + qT_{n-2} + rT_{n-3} + sT_{n-4}$$

rekürans bağıntısı ile tanımlanan  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dizisine genelleştirilmiş Tetranacci dizisi denir (Waddill, 1992).

Genelleştirilmiş Tetranacci sayıları için üreteç fonksiyonu

$$T(x) = \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4}$$

şeklinde tanımlıdır (Waddill, 1992).

## 5. FORMAL KUVVET SERİLERİNİN MATRİS GÖSTERİMİ

Sprugnoli (2006),  $f(t) \in \mathcal{F}_0$  olmak üzere  $f(t)$  formal kuvvet serisinin katsayıları sonsuz alt üçgensel matrisin elemanları olarak göstermiştir. Bu matrisi  $D = (d_{n,k})_{n,k \geq 0}$  olarak ifade etmiştir. Bu şekilde ifade ettiği matris yardımıyla yeni bir kavram inşa etmiştir (Sprugnoli, 2006). Bahsedilen bu tanım aşağıdaki gibi özetlenmiştir.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n$  şeklinde tanımlı ve  $\forall n, k \in \mathbb{N}$  için  $d_{n,k} = f_{n-k}$  olsun.

$D = (d_{n,k})_{n,k \geq 0}$  matrisi  $D = (f(t), 1)$  şeklinde gösterilir. Dolayısıyla

$$D = (f(t), 1) = \begin{bmatrix} f_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_1 & f_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_2 & f_1 & f_0 & 0 & 0 & \cdots \\ f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & 0 & \cdots \\ f_4 & f_3 & f_2 & f_1 & f_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

olur.  $f(t)$  ve  $g(t)$  iki formal kuvvet serisi bu kuvvet serilerinin katsayılarını içeren matrisler  $(f(t), 1)$  ve  $(g(t), 1)$  olsun. Bu iki matrisin çarpımı şu şekilde gösterilir:

$$(f(t), 1) \cdot (g(t), 1).$$

Bu çarpımda klasik sütun çarpımı yapılır.  $(f(t), 1)$  matrisinde  $n$ . satır elemanları olan  $f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, \dots$  ile  $(g(t), 1)$  matrisinde  $k$ . sütun elemanları olan  $\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-tane}, g_1, g_2, \dots$  çarpılır.

Dolayısıyla oluşan çarpım matrisinin elemanı

$$d_{n,k} = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n-j} g_{j-k}$$

olur. Burada her  $r < 0$  için  $g_r = 0$ .

$k = 0$  için  $d_{n,0} = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n-j} g_j = \sum_{j=0}^n f_{n-j} g_j$  olur. Dolayısıyla  $f(t)$  ve  $g(t)$  serilerinin Cauchy çarpımından yani

$$f(t)g(t) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} f_k t^k \right) \left( \sum_{k=0}^{\infty} g_k t^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{j=0}^k f_j g_{k-j} \right) t^k$$

olduğundan,  $f(t)g(t)$  girişiminin katsayılarını içerdiğini görülür.

$k = 1$  için  $d_{n,1} = \sum_{j=0}^{\infty} f_{n-j} g_{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} f_{n-1-j} g_j$  olur. Bu eşitlikte  $f(t)g(t)$  girişimindeki  $t^{n-1}$  katsayısını verir.

Aynı şekilde devam edilirse  $k$ . sütunda ise  $f(t)g(t)$  girişimindeki katsayıların  $k$  birim aşağı ötelenmiş olarak sıralandığı görülür. Dolayısıyla

$$(f(t), 1) \cdot (g(t), 1) = (f(t)g(t), 1)$$

olur. Sonuç olarak  $(\mathcal{F}_0, \cdot)$  ile  $(f(t), 1)$  şeklindeki matris kümesi arasında grup izomorfizmi olduğu görülür.

$(f(t), 1)$  matrisinin ters matrisi  $(f(t)^{-1}, 1)$  şeklinde gösterilir.

$f(t) \in \mathcal{F}_1$  olmak üzere  $f(t)^k$  formal serisinin katsayılarından bir sonsuz alt üçgensel matris oluşturabilir. Burada  $f(t)$  serisinin kuvvetlerindeki katsayılar her bir sütuna sırasıyla yazılmaktadır.

Bu matris

$$\begin{bmatrix} 1 & f & f^2 & f^3 & \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_2 & f_1^2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & f_3 & 2f_1f_2 & f_1^3 & 0 & \dots \\ 0 & f_4 & 2f_1f_3 + f_2^2 & 3f_1^2f_2 & f_1^4 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Yukarıda verilen matris ise  $\left(1, \frac{f(t)}{t}\right)$  şeklinde gösterilmektedir (Riordan, 1979).

$f(t) \in \mathcal{F}_1$  ve  $g(t) \in \mathcal{F}_1$  olmak üzere  $\left(1, \frac{g(t)}{t}\right) \cdot \left(1, \frac{f(t)}{t}\right)$  çarpımını inceleyelim.

$\hat{f}_{n,k} = \left(1, \frac{f(t)}{t}\right)$  olmak üzere, tanımdan  $\hat{f}_{n,k} = [t^n]f(t)^k$  olur. Dolayısıyla çarpımın genel elemanı

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= \sum_{j=0}^{\infty} \hat{g}_{n,j} \hat{f}_{j,k} = \sum_{j=0}^{\infty} ([t^n]g(t)^j)([y^j]f(y)^k) \\ &= [t^n] \sum_{j=0}^{\infty} ([y^j]f(y)^k)g(t)^j \\ &= [t^n]f(g(t))^k \end{aligned}$$

olur. Diğer bir deyişle bu çarpım  $f(g(t))$  bileşkesinin  $k$ . kuvvetindeki  $t^n$ 'in katsayısını vermektedir. Sonuç olarak

$$\left(1, \frac{g(t)}{t}\right) \cdot \left(1, \frac{f(t)}{t}\right) = \left(1, \frac{f(g(t))}{t}\right)$$

olarak yazılır.

$t \in \mathcal{F}_1$  olmak üzere  $\left(1, \frac{t}{t}\right) = (1,1)$  sonsuz boyutlu birim matrisini verir ve böylece formal kuvvet serileri ile  $\left(1, \frac{f(t)}{t}\right)$  matrisleri arsında grup izomorfizmi olduğu görülür.

Sonuç olarak her  $f(t) \in \mathcal{F}_0$  şeklindeki formal kuvvet serisi  $(f(t), 1)$  olarak gösterilebilir.  $(f(t), 1)$  şeklindeki matrislerin kümesi  $A$  olmak üzere,  $(\mathcal{F}_0, \cdot)$  kümesi  $(A, \cdot)$  kümesine izomorftur ve satır sütun çarpımı Cauchy çarpımına dönüşür.

Diğer taraftan  $g(t) \in \mathcal{F}_1$  şeklindeki formal kuvvet serileri  $\left(1, \frac{g(t)}{t}\right)$  olarak gösterilebilir.  $\left(1, \frac{g(t)}{t}\right)$  şeklindeki matrislerin kümesi  $B$  olmak üzere  $(\mathcal{F}_1, \cdot)$  grubu  $(B, \cdot)$  grubuna izomorftur ve satır sütun çarpımı bileşkeye dönüşür (Sprugnoli, 2006).

## 6. RIORDAN GRUP

Bu bölümde, Riordan grup kavramının Shapiro ve arkadaşları tarafından nasıl ortaya konulduğuna değinilmiştir (Shapiro vd., 1991). Riordan dizilerinin tanımına, Pascal matrisinin Riordan gösterimine, Riordan dizilerinin temel teoremine ve satır toplamlarına yer verilmiştir.

### 6.1 Tanımlar ve Kavramlar

$d(t)$  ve  $h(t)$  iki formal kuvvet serisi olmak üzere  $D = (d(t), h(t))$  ikilisine bir Riordan sırası denilir. Eğer  $d(t), h(t) \in \mathcal{F}_0$  ise Riordan sırası temel Riordan sırası olarak adlandırılır (Riordan, 1979; Shapiro vd., 1991; Sprugnoli, 2006).

$$d_{n,k} = [t^n]d(t)h(t)^k \quad (1)$$

olmak üzere Riordan sırası; girdileri  $(d_{n,k})_{n,k \in \mathbb{N}}$  biçiminde elde edilen bir sonsuz alt üçgensel sıra olarak da tanımlanır. Dolayısıyla, bu sonsuz alt üçgensel sıranın sütun girdilerinin üreteç fonksiyonları

$$\begin{aligned} d_0(t) &= d(t) \\ d_k(t) &= d_{k-1}(t)th(t) = d(t)(h(t))^k \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

**Alternatif tanım:**  $(d(x), h(x))$  ile gösterilen Riordan matrisi,  $d(0) = 1$ ,  $h(0) = 0$  ve  $h'(0) \neq 0$  iken  $k = 0, 1, 2, \dots$  için  $k$ . sütununun üreteç fonksiyonu  $d(x)h^k(x)$  olan sonsuz bir alt üçgen matristir. Tüm Riordan matrislerinin kümesi matris çarpımı altında bir gruptur ve çarpma işlemi

$$(d(x)h(x)).(g(x), f(x)) = (d(x)g(h(x)), f(h(x))) \quad (2)$$

şeklinde tanımlıdır.

Birim matrisi  $(1, x)$  şeklinde tanımlanır ve  $(d(x), h(x))$  in tersi  $\left(\frac{1}{d(\bar{h}(x))}, \bar{h}(x)\right)$  şeklindedir, burada  $\bar{h}, h$ 'ın bileşke tersi, yani  $h(\bar{h}(x)) = \bar{h}(h(x)) = x$  dir.  $R$  matrisi

$$R = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d & dh & dh^2 & dh^3 & \cdots & dh^j & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir (Yeşil Baran, 2011).

## 6.2. Pascal Matrisinin Riordan Gösterimi

*Örnek.*  $\left(\frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x}\right)$  Riordan çifti için matris gösterimini bulalım (Yeşil Baran, 2011).

0. sütun  $\frac{1}{1-x}$  fonksiyonu ürettiği dizinin elemanlarından oluşur.

$$\frac{1}{(1-x)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+m}{n} x^n \quad (3)$$

eşitliğinde  $m = 0$  alınırsa

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{n} x^n$$

olduğundan  $\frac{1}{1-x}$  ;  $(1,1,1,1, \dots)$  dizisinin üreteç fonksiyonudur. O halde 0. sütun  $(1,1,1,1, \dots)^T$  şeklindedir.

1. sütun  $\frac{1}{1-x} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^1 = \frac{x}{(1-x)^2}$  fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Bu fonksiyonu elde etmek için (3) de  $m = 1$  alınır ve  $x$  terimi ile çarpılırsa

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^{n+1} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + \dots$$

elde edilir. O halde 1. sütun  $(0,1,2,3,4,5, \dots)^T$  şeklindedir.

2. sütun  $\frac{1}{1-x} \cdot \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 = \frac{x^2}{(1-x)^3}$  fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Bu fonksiyonu elde etmek için (3) de  $m = 2$  alınır ve  $x^2$  terimi ile çarpılırsa

$$\frac{x^2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^{n+2} = x^2 + 3x^3 + 6x^4 + 10x^5 + \dots$$

elde edilir. O halde 2. sütun  $(0,0,1,3,6,10, \dots)^T$  şeklindedir.

Bu şekilde devam edildiğinde  $j$ . sütun  $\frac{1}{1-x} \left(\frac{x}{1-x}\right)^j$  fonksiyonun ürettiği elemanlardan oluşur ki bu ise

$$\frac{x^j}{(1-x)^{j+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} x^{n+j}$$

demektir.

O halde aradığımız matris

$$\left( \frac{1}{1-x}, \frac{x}{1-x} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \dots \\ 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{bmatrix}$$

şeklindedir ve bu matris bilinen Pascal matrisidir (Yeşil Baran, 2011).

6.2.1. Teorem.  $D = (d(t), h(t))$  olmak üzere, Riordan sırasının sütunlarını veren formal kuvvet serilerin üreteç fonksiyonu,

$$d(t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} d(t)(th(t))^k z^k = \frac{d(t)}{1 - tzh(t)} \quad (4)$$

iki değişkenli üreteç fonksiyonu ile verilebilir (Sprugnoli, 2006).

### 6.3. Riordan Dizilerinin Temel Teoremi

6.3.1. Teorem.  $D = (d(t), h(t))$  Riordan sırası ve  $f(t), (f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  dizisinin üreteç fonksiyonu olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} f_k = [t^n] d(t) f(th(t)) \quad (5)$$

eşitliği elde edilir. Bu teorem Riordan grupların Temel Teoremi olarak da bilinir. İngilizce kısaltması ise FTRA (Fundamental Theorem of Riordan Array) şeklindedir (Sprugnoli, 2006).

*İspat.* (1) eşitliği kullanılarak;

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n d_{n,k} f_k &= \sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} f_k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} [t^n] d(t) (th(t))^k f_k \\ &= [t^n] d(t) \sum_{k=0}^{\infty} (th(t))^k f_k \\ &= [t^n] d(t) f(th(t)) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 6.3.1 i kullanarak aşağıdaki eşitlikler yazılabilir (Sprugnoli, 2006).

1) Riordan sırasındaki  $n$ . satır girdilerinin toplamı:

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_{n,k} = [t^n] \frac{d(t)}{1 - th(t)} \quad (6)$$

2)  $n$ . satır girdilerinin alterne toplamı:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k d_{n,k} = [t^n] \frac{d(t)}{1 + th(t)} \quad (7)$$

3)  $n$ . satır girdilerinin ağırlıklı (weighted) toplamı:

$$\sum_{k=0}^{\infty} k d_{n,k} = [t^n] \frac{td(t)h(t)}{(1 - th(t))^2} \quad (8)$$

şeklindedir.

Ayrıca,  $\widehat{D} = (d(t), th(t))$  olarak verilen Riordan sırasının satırlarının  $D = (d(t), h(t))$  Riordan sırasının köşegenlerinden oluştuğı aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

$\hat{d}_{n,k}$  ,  $D = (d(t), th(t))$  Riordan sırasının genel elemanı olmak üzere (1) eşitliğı kullanılarak

$$\begin{aligned} \hat{d}_{n,k} &= [t^n] d(t) (th(t))^k \\ &= [t^n] d(t) t^k (th(t))^k \\ &= [t^{n-k}] d(t) (th(t))^k \\ &= d_{n-k,k} \end{aligned}$$

bulunur (Sprugnoli, 1994). Bu Riordan sırasının köşegen üzerindeki elemanlarının toplamı

$$\sum_k \hat{d}_{n,k} = \sum_k d_{n-k,k} = [t^n] d(t) f(t^2 h(t)) = [t^n] \frac{d(t)}{1 - t^2 h(t)}$$

olarak elde edilir. Dolayısıyla yukarıda incelenen bu durum her  $s \geq 1$  için  $\sum_k d_{n-sk,k}$  üreteç fonksiyonuna genelleştirilebilir. Köşegen toplamı kullanılarak, Pascal üçgeni için iyi bilinen sonuçlar elde edilebilir.



## 7. HARMONİK SAYILARLA TANIMLI OLAN MATRİSİN RİORDAN GÖSTERİMİ

Bu bölümde, Harmonik sayılarla tanımlı olan matrisin Riordan gösterimine, özel fonksiyonlar tanımlayarak, FTRA teoremi yardımıyla bu matris için yeni eşitliklere ve Harmonik sayıların satır toplamalarına yer verilmiştir.

$H_n$ :  $n$ . Harmonik sayı olmak üzere  $H = (H_{n,k})$  matrisi

$$H = \begin{bmatrix} H_1 & & & & \cdots \\ H_2 & H_1 & & & \cdots \\ H_3 & H_2 & H_1 & & \cdots \\ H_4 & H_3 & H_2 & H_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (9)$$

şeklinde tanımlı ve genel terimi  $H_{n,k} = (H_{n-k+1})$  olsun.

$Q = (q^{i-j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  olmak üzere  $Q$  matrisi

$$Q = \begin{bmatrix} q^0 & & & & \cdots \\ q^1 & q^0 & & & \cdots \\ q^2 & q^1 & q^0 & & \cdots \\ q^3 & q^2 & q^1 & q^0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (10)$$

şeklindedir.

### 7.1. Harmonik Sayılarla Tanımlı Olan Matrisin Riordan Gösteriminin Elde Edilişi

7.1.1. Lemma.  $H$  matrisi (9)'daki gibi tanımlı olsun. O halde  $H$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}, x \right) \quad (11)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $H$  matrisi (9)'daki gibi tanımlı olsun.  $H = (H_{n,k})$  olmak üzere  $H_{n,k} = H_{n-k+1}$  dir.  $H$  matrisinin 0. sütunu  $[H_1, H_2, H_3, \dots]^T$  şeklinde olup 0. sütun  $\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}x^n$  şeklinde bir formal kuvvet serisinin katsayılarından oluşur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n x^n = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1} x^{n+1} = \frac{-\ln(1-x)}{1-x}$$

olur ki

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1} x^n = \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}$$

dir. 0. sütunun üreteç fonksiyonunun  $\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}$  olduğu görülür. Riordan grup tanımı göz önüne alındığında  $H$  matrisinin diğer sütunları 0. sütunun  $x$  birim ötelenmiş hali olduğundan,  $H$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}, x \right)$$

olarak elde edilir.

Öte yandan  $D = \left( \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}, x \right)$  olmak üzere

$$d_{n,k} = [x^n] \left[ \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)} x^k \right]$$

$$\begin{aligned}
d_{n,k} &= [x^n] \left( \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1} x^n \right) x^k \\
&= [x^{n-k}] \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1} x^n \\
&= H_{n-k+1}
\end{aligned}$$

olur ki  $\left(\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}, x\right)$  matrisinin genel terimi  $H_{n-k+1}$  olduğundan  $\left(\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)}, x\right)$  Riordan gösterimi ile tanımlı matris  $H$  matrisidir.

7.1.2 Lemma.  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olsun. O halde  $Q$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left(\frac{1}{1-qx}, x\right) \quad (12)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olsun.  $Q = (q_{n,k})$  olmak üzere  $q_{n,k} = q^{n-k}$  dir.

$Q$  matrisinin 0. sütunu  $[q^0, q^1, q^2, \dots]^T$  şeklinde olup 0. sütun  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n$  şeklinde bir formal kuvvet serisinin katsayılarından oluşur. 0. sütunun üreteç fonksiyonu  $\frac{1}{1-qx}$  dir.

Riordan grup tanımı göz önüne alındığında  $Q$  matrisinin diğer sütunları 0. sütunun  $x$  birim kadar ötelenmiş hali olduğundan  $Q$  matrisinin Riordan gösterimi  $\left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$  dir.

Öte yandan  $D = \left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
d_{n,k} &= [x^n] \left[ \frac{1}{1-qx} x^k \right] \\
&= [x^n] \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \right) x^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{n,k} &= [x^{n-k}] \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \\
&= q^{n-k}
\end{aligned}$$

olur ki  $\left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$  matrisinin genel terimi  $q^{n-k}$  olduğundan  $\left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$  Riordan gösterimi ile tanımlı matris  $Q$  matrisidir.

7.1.3. Teorem.  $H$  matrisi (9)'daki ve  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olmak üzere  $HQ$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)(1-qx)}, x \right) \tag{13}$$

şeklindedir.

*İspat.*  $H$  ve  $Q$  matrislerinin Riordan gösterimleri sırasıyla  $\left(\frac{-\ln(1-x)}{1-x}, x\right)$  ve  $\left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$  dir.

Buradan

$$HQ = \left( \frac{-\ln(1-x)}{1-x}, x \right) \left( \frac{1}{1-qx}, x \right)$$

şeklinde yazılabilir.

(2) eşitliği kullanılırsa;  $HQ$ 'nın Riordan gösterimi

$$\left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)(1-qx)}, x \right)$$

şeklinde elde edilir.

7.1.4. Teorem.  $H$  matrisi (9)'daki ve  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olmak üzere  $HQ$  matrisinin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-j+1} H_k q^{i-j-k+1} \quad (14)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $HQ$  matrisinin Riordan gösterimi  $\left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)(1-qx)}, x \right)$  şeklinde olup  $j$ . sütun  $\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)(1-qx)} x^j$  fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Yani

$$\begin{aligned} \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)(1-qx)} x^j &= \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1} x^n \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \right) x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_{k+1} q^{n-k} \right\} x^{n+j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_{k+1} q^{n-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

şeklindedir.

Buradan matrisin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} H_{k+1} q^{i-j-k}$$

olur ki  $k \rightarrow k-1$  indis değişikliği ile

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-j+1} H_k q^{i-j-k+1}$$

olarak elde edilir.

### 7.1.5. Teorem. $\gamma$ matrisi

$$\gamma = \left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)(1-qx)}, \frac{x}{1-qx} \right) \quad (15)$$

eşitliği ile tanımlı olsun.  $\gamma = (d_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  olmak üzere  $\gamma$  matrisinin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-j+1} \binom{i-k+1}{j} H_k q^{i-j-k+1}$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\gamma$  matrisi (15) eşitliği ile tanımlı olsun.  $\gamma$  matrisinin  $j$ . sütunu

$$\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)(1-qx)} \frac{x^j}{(1-qx)^j} = \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)} \frac{1}{(1-qx)^{j+1}} x^j$$

fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Yani

$$\begin{aligned} \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)} \frac{x^j}{(1-qx)^{j+1}} &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} q^n x^n \right\} x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_{k+1} \binom{n-k+j}{n-k} q^{n-k} \right\} x^{n+j} \\ &= \sum_{n=j}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-j} H_{k+1} \binom{n-k}{n-j-k} q^{n-j-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

dır. Buradan matrisin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} H_{k+1} \binom{i-k}{i-j-k} q^{i-j-k}$$

şeklinde elde edilir.

$$\binom{i-k}{i-j-k} = \binom{i-k}{j}$$

olduğundan

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} H_{k+1} \binom{i-k}{j} q^{i-j-k}$$

$k \rightarrow k-1$  indis değişikliği ile

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j+1} H_k \binom{i-k+1}{j} q^{i-j-k+1}$$

elde edilir.

7.1.6. Teorem.  $H$  matrisi (9)'daki gibi tanımlı olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-k-i+1} = \sum_{k=0}^n H_k (n-k+1) q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{1-qx}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{1-qx} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n$  eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-k-i+1} \right) \cdot 1 &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{1-qx} \\ &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{(1-qx)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-k-i+1} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k (n-k+1) q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir.

Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-k-i+1} = \sum_{k=0}^n H_k (n-k+1) q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

7.1.7. Teorem.  $H$  matrisi (9)'daki gibi tanımlı olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i \binom{s+k-1}{s-1} q^k = \sum_{k=0}^n H_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{(1-qx)^s}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{(1-qx)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} q^n x^n$  eşitliklerinden;

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i \binom{s+k-1}{s-1} q^k &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-qx)^s} \\ &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{(1-qx)^{s+1}} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n}{s} q^n x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy çarpımından,

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i \binom{s+k-1}{s-1} q^k = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k} \right\} x^n.$$

Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i \binom{s+k-1}{s-1} q^k = \sum_{k=0}^n H_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır. Özel olarak  $q = 1$  ve  $s = 1$  alınırsa;

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i = \sum_{k=0}^n H_k (n-k+1)$$

elde edilir.

7.1.8. Teorem.  $\gamma$  matrisi (14) deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-i} (-1)^k = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = H_n$$

eşitliği sağlanır.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{1+qx}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{1+qx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n x^n$  eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_k q^{n-1} (-1)^k = [x^n] \left( \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{1+q\left(\frac{x}{1-qx}\right)} \right)$$

yazılabilir. Gerekli sadeleştirmelerden sonra

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_k q^{n-1} (-1)^k = [x^n] \left( \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{\frac{1-qx+qx}{1-qx}} \right)$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_k q^{n-1} (-1)^k = [x^n] \left( \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-qx} 1 - qx \right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-i} (-1)^k = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n = H_n$$

eşitliği sağlanır.

7.1.9. Teorem.  $\gamma$  matrisi (14)' deki gibi tanımlı olsun. Bu taktirde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-i} \binom{s}{k} = \sum_{k=0}^n H_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = (1 + qx)^s$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = (1 + qx)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} q^n x^n$  eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-i} \binom{s}{k} = [x^n] \left( \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-qx} 1 + q \left( \frac{x}{1-qx} \right)^s \right)$$

yazılabilir. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-i} \binom{s}{k} &= [x^n] \left( \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-qx} \left( \frac{1-qx+qx}{1-qx} \right)^s \right) \\ &= [x^n] \left( \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-qx)^s} \right) \\ &= [x^n] \left( \frac{-\ln(1-x)}{1-x} \frac{1}{(1-qx)^{s+1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-i} \binom{s}{k} &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n}{s} q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k} \right\} x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i q^{n-i} \binom{s}{k} = \sum_{k=0}^n H_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}.$$

Özel olarak,  $s = 1$  ve  $q = 1$  alınırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} H_i = [x^n] \sum_{k=0}^n H_k (n-k+1)$$

elde edilir.

## 7.2. Harmonik Sayılarla Tanımlı Matrisin Satır Toplamları

7.2.1. Teorem.  $H$  matrisi (9)'daki gibi tanımlı olsun. O halde  $H$  matrisinin

(i) Klasik satır toplamı:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n H_k$$

(ii) Alterne satır toplamı:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n H_k (-1)^{n-k}$$

(iii) Ağırlıklı satır toplamı:

$$\delta_n = \sum_{n=0}^{\infty} H_{n-1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$$

şeklindedir.

*İspat.*

(i)  $H$  matrisine (6) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 \alpha_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1-h(x)} \\
 &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{1-x}}{1-x} \\
 &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
 &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k \right\} x^n = \sum_{k=0}^n H_k
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)  $H$  matrisine (7) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 \beta_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1+h(x)} \\
 &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{1-x}}{1+x} \\
 &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k x^n \\
 &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k (-1)^{n-k} \right\} x^n \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} H_k
 \end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)  $H$  matrisine (8) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_n &= [x^n] \frac{d(x)h(x)}{(1-h(x))^2} \\
&= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{1-x} x}{(1-x)^2} \\
&= [x^n] x \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n
\end{aligned}$$

elde edilir.  $n \rightarrow n-1$  dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_n &= [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_{n-1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_{k-1} (n-k+1) \right\} x^n \\
&= \sum_{k=0}^n H_{k-1} (n-k+1)
\end{aligned}$$

dir.

7.2.2. Teorem.  $HQ$  matrisinin

(i) Klasik satır toplamı:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n H_k q^{n-k}$$

(ii) Alterne satır toplamı:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n H_k (-1)^{n-k} q^{n-k}$$

(iii) Ağırlıklı satır toplamı:

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n H_k (n - k + 1) q^{n-k}$$

şeklindedir.

*İspat.*

(i)  $HQ$  matrisine (6) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1 - qh(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{1-x}}{1 - qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k q^{n-k} \right\} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n H_k q^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)  $HQ$  matrisine (7) eşitliği uygulanırsa

$$\beta_n = [x^n] \frac{d(x)}{1 + qh(x)}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{1-x}}{1+qx} \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k (-1)^{n-k} q^{n-k} \right\} x^n \\
&= \sum_{k=0}^n H_k (-1)^{n-k} q^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)  $HQ$  matrisine (8) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_n &= [x^n] \frac{d(x)h(x)}{(1-qh(x))^2} \\
&= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{1-x} x}{(1-qx)^2} \\
&= [x^n] x \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n
\end{aligned}$$

yazılabilir.  $n \rightarrow n-1$  dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_n &= [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_{n-1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_{k-1} (n-k+1) q^{n-k} \right\} x^n
\end{aligned}$$

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n H_{k-1}(n-k+1)q^{n-k}$$

elde edilir.



## 8. HİPERHARMONİK SAYILARLA TANIMLI OLAN MATRİSİN RİORDAN GÖSTERİMİ

Bu bölümde, Hiperharmonik sayılarla tanımlı olan matrisin Riordan gösterimine, özel fonksiyonlar tanımlayarak FTRA teoremi yardımıyla elde edilen yeni eşitliklere ve Hiperharmonik sayıların satır toplamalarına yer verilmiştir.

Bir  $\alpha > 1$  tamsayısı için  $H_n^{(1)} = H_n$  olmak üzere  $H_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^n H_k^{(\alpha-1)}$  şeklinde tanımlanan sayıya  $\alpha$ . mertebeden  $n$ . Hiperharmonik sayı adı verilir. Hiperharmonik sayıların üreteç fonksiyonu

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n = \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}$$

şeklinde tanımlıdır (Conway vd., 1996).

$\mathbb{H} = (H_{i-j}^{(\alpha)})_{i,j \geq 0}$  olmak üzere

$$\mathbb{H} = \begin{bmatrix} H_0^{(\alpha)} & & & & \cdots \\ H_1^{(\alpha)} & H_0^{(\alpha)} & & & \cdots \\ H_2^{(\alpha)} & H_1^{(\alpha)} & H_0^{(\alpha)} & & \cdots \\ H_3^{(\alpha)} & H_2^{(\alpha)} & H_1^{(\alpha)} & H_0^{(\alpha)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (16)$$

şeklinde gösterilen  $\mathbb{H}$  matrisi hiperharmonik sayılarla tanımlı matris olsun.

### 8.1. Hiperharmonik Sayılarla Tanımlı Olan Matrisin Riordan Gösteriminin Elde Edilişi

8.1.1. Lemma.  $\mathbb{H}$  matrisi (16)'daki gibi tanımlı olsun. O halde  $\mathbb{H}$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left(\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^\alpha}, x\right) \quad (17)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathbb{H}$  matrisi (16)'daki gibi tanımlı olsun.  $\mathbb{H} = (H_{n,k})$  olmak üzere  $H_{n,k} = H_{n-k+1}^{(\alpha)}$  dir.  $\mathbb{H}$  matrisinin 0. sütunu  $[H_1^{(\alpha)}, H_2^{(\alpha)}, H_3^{(\alpha)}, \dots]^T$  şeklinde olup 0. sütun  $\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}^{(\alpha)} x^n$  şeklinde bir formal kuvvet serisinin katsayılarından oluşur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n = \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}^{(\alpha)} x^{n+1} = \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}$$

elde edilir ki bu eşitlik

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}^{(\alpha)} x^n = \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^\alpha}$$

şeklinde yazılabilir.

0. sütunun üreteç fonksiyonu  $\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}$  dir. Riordan grup tanımı göz önüne alındığında  $\mathbb{H}$  matrisinin diğer sütunları 0. sütunun  $x$  birim ötelenmiş hali olduğundan  $\mathbb{H}$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left(\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^\alpha}, x\right)$$

şeklindedir.

Öte yandan  $D = \left( \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^\alpha}, x \right)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= [x^n] \left[ \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^\alpha} x^k \right] \\ &= [x^n] \left( \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}^{(\alpha)} x^n \right) x^k \\ &= [x^{n-k}] \sum_{n=0}^{\infty} H_{n+1}^{(\alpha)} x^n \\ &= H_{n-k+1}^{(\alpha)} \end{aligned}$$

elde edilir ki  $\left( \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^\alpha}, x \right)$  matrisinin genel terimi  $H_{n-k+1}^{(\alpha)}$  olduğundan  $\left( \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^\alpha}, x \right)$  Riordan gösterimi ile tanımlı matris  $\mathbb{H}$  matrisidir.

8.1.2 Teorem.  $\mathbb{H}$  matrisi (16)'daki ve  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olmak üzere  $\mathbb{H}Q$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx}, x \right) \quad (18)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathbb{H} = (H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $Q = (q^{i-j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  matrislerinin Riordan gösterimleri (17) eşitliği ve

(13) eşitliğinden sırasıyla  $\left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}, x \right)$  ve  $\left( \frac{1}{1-qx}, x \right)$  olduğundan

$$\mathbb{H}Q = \left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}, x \right) \left( \frac{1}{1-qx}, x \right)$$

şeklinde yazılabilir.

(2) eşitliği kullanılırsa  $\mathbb{H}Q$ 'nın Riordan gösterimi

$$\left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx}, x \right)$$

elde edilir.

8.1.3 Teorem.  $\mathbb{H}$  matrisi (16)'daki ve  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olmak üzere  $\mathbb{H}Q$  matrisinin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} H_k^{(\alpha)} q^{i-j-k} \quad (19)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathbb{H}Q$  matrisinin Riordan gösterimi  $\left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx}, x \right)$  şeklinde olup  $j$ . sütun

$$\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} x^j$$

fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Yani

$$\begin{aligned} \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} x^j &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \right) x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} q^{n-k} \right\} x^{n+j} \\ &= \sum_{n=j}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-j} H_k^{(\alpha)} q^{n-k-j} \right\} x^n. \end{aligned}$$

Buradan matrisin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} H_k^{(\alpha)} q^{i-j-k}$$

elde edilir.

8.1.4. Teorem.

$$\tau = \left( \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha(1-qx)}, \frac{x}{1-x} \right) \quad (20)$$

olsun. O halde  $\tau = (d_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  olmak üzere matrisi  $\tau$  matrisinin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} H_k^{(\alpha+j)} q^{i-j-k}$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\tau$  matrisi (20) eşitliği ile tanımlı olsun.  $\tau$  matrisinin  $j$ . sütunu

$$\frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^\alpha(1-qx)} \frac{x^j}{(1-x)^j} = \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^{\alpha+j}(1-qx)} x^j$$

fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur.

$$\begin{aligned} \frac{-\ln(1-x)}{x(1-x)^{\alpha+j}(1-qx)} x^j &= \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} H_k^{(\alpha+j)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \right\} x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+j)} q^{n-k} \right\} x^{n+j} \\ &= \sum_{n=j}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-j} H_k^{(\alpha+j)} q^{n-j-k} \right\} x^n. \end{aligned}$$

Buradan matrisin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} H_k^{(\alpha+j)} q^{i-j-k}$$

şeklinde elde edilir.

8.1.5. Teorem.  $\mathbb{H}Q$  matrisi (18)'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-k-i} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+1)} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{1-x}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-k-i} = [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{1-x}$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-k-i} &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^{\alpha+1}} \frac{1}{1-qx} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha+1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+1)} q^{n-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-k-i} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+1)} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

8.1.6. Teorem.  $\mathbb{H}Q$  matrisi (18)'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-k-i} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+s)} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{(1-x)^s}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} x^n$  eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-k-i} \binom{s+k-1}{s-1} = [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-x)^s}$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-k-i} \binom{s+k-1}{s-1} &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^{\alpha+s}} \frac{1}{1-qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha+s)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+s)} q^{n-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-k-i} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+s)} q^{n-k}$$

dir.

8.1.7. Teorem.  $\mathbb{H}Q$  matrisi (18)'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-i} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}.$$

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{(1-qx)^s}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{(1-qx)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} q^n x^n$  eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-i} \binom{s+k-1}{s-1} = [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-qx)^s}$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-i} \binom{s+k-1}{s-1} &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{(1-qx)^{s+1}} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n}{s} q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} \binom{s+n-k}{s} q^{n-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha)} q^{n-i} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}$$

elde edilir.

8.1.8. Teorem.  $\tau$ , (20)'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} (-1)^k = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha-1)} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{1+x}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$  eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} (-1)^k = [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{1+\frac{x}{1-x}}$$

yazılır. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} (-1)^k &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{1-x} \\ &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^{\alpha-1}} \frac{1}{1-qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha-1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha-1)} q^{n-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} (-1)^k = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha-1)} q^{n-k}$$

dir.

8.1.9. Teorem.  $\tau$ , (20)'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} \binom{s}{k} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+s)} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = (1+x)^s$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = (1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$  eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} \binom{s}{k} = [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} \left(1 + \frac{x}{1-x}\right)^s$$

yazılır. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} \binom{s}{k} &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-x)^s} \\ &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^{\alpha+s}} \frac{1}{1-qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha+s)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+s)} q^{n-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} \binom{s}{k} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+s)} q^{n-k}$$

şeklindedir.

Özel olarak,  $q = 1$  ve  $s = 1$  alınırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+1)}$$

olur ki  $k \rightarrow k-1$  dönüşümü uygulanırsa;

$$\sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+1)} = \sum_{k=1}^n H_{k-1}^{(\alpha+1)}$$

elde edilir.  $H_n^{(\alpha)} = \sum_{k=1}^{n+1} H_k^{(\alpha-1)}$  olduğundan

$$\sum_{k=1}^n H_{k-1}^{(\alpha+1)} = H_{n+1}^{(\alpha+2)}$$

şeklindedir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} H_i^{(\alpha+k)} q^{n-k-i} = H_{n+1}^{(\alpha+2)}$$

elde edilir.

## 8.2 Hiperharmonik Sayılar İle Tanımlı Matrisin Satır Toplamları

8.2.1 Teorem.  $\mathbb{H}$  matrisi (16)'daki gibi tanımlı ve (17) eşitliği gerçeklensin. O halde

(i)  $\mathbb{H}$  matrisinin klasik satır toplamı:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+1)}$$

(ii)  $\mathbb{H}$  matrisinin alterne satır toplamı:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} (-1)^{n-k}$$

(iii)  $\mathbb{H}$  matrisinin ağırlıklı satır toplamı:

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n H_{k-1}^{(\alpha+2)} x^n$$

dir.

*İspat.*

(i)  $\mathbb{H}$  matrisine (6) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1-h(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}}{1-x} \\ &= [x^n] \frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^{\alpha+1}} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha+1)} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha+1)} \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)  $\mathbb{H}$  matrisine (7) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \beta_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1+h(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{1-x}}{1+x} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} (-1)^{n-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} (-1)^{n-k}$$

elde edilir.

(iii)  $\mathbb{H}$  matrisine (8) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \delta_n &= [x^n] \frac{d(x)h(x)}{(1-h(x))^2} \\ &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} x}{(1-x)^2} \\ &= [x^n] x \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha+2)} x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha+2)} x^{n+1} \\ &= [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(\alpha+2)} x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(\alpha+2)} x^n \\ &= [x^n] \sum_{k=0}^n H_{k-1}^{(\alpha+2)} x^n \end{aligned}$$

elde edilir.

8.2.2 Teorem.  $\mathbb{H}Q$  matrisi (18) eşitliği ile tanımlı olsun. O halde  $\mathbb{H}Q$  matrisinin

(i) Klasik satır toplamı:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} q^{n-k}$$

(ii) Alterne satır toplamı:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} (-1)^{n-k} q^{n-k}$$

(iii) Ağırlıklı satır toplamı:

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n H_{n-1}^{(\alpha)} (n-k+1) q^{n-k}$$

şeklindedir.

*İspat.*

(i)  $\mathbb{H}Q$  matrisine (6) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1 - qh(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}}{1 - qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} q^{n-k} \right\} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} q^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)  $\mathbb{H}Q$  matrisine (7) eşitliği uygulanırsa

$$\beta_n = [x^n] \frac{d(x)}{1 + qh(x)}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha}}{1+qx} \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} (-1)^{n-k} q^{n-k} \right\} x^n \\
&= \sum_{k=0}^n H_k^{(\alpha)} (-1)^{n-k} q^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)  $\mathbb{H}Q$  matrisine (8) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_n &= [x^n] \frac{d(x)h(x)}{(1-qh(x))^2} \\
&= [x^n] \frac{\frac{-\ln(1-x)}{(1-x)^\alpha} x}{(1-qx)^2} \\
&= [x^n] x \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_n^{(\alpha)} x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n
\end{aligned}$$

olup  $n \rightarrow n-1$  dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_n &= [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}^{(\alpha)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} H_{n-1}^{(\alpha)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n H_{n-1}^{(\alpha)} (n-k+1) q^{n-k} \right\} x^n
\end{aligned}$$

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n H_{n-1}^{(\alpha)}(n-k+1)q^{n-k}$$

elde edilir.



## 9. HİPERHARMONİK FİBONACCİ SAYILARI İLE TANIMLI MATRİSİN RİORDAN GÖSTERİMİ

Bu bölümde,  $n$ . Hiperharmonik Fibonacci sayılarıyla tanımlı olan matrisin Riordan gösterimine, özel fonksiyonlar tanımlayarak FTRA teoremi yardımıyla yeni eşitliklere ve  $n$ . Hiperharmonik Fibonacci sayılarının satır toplamalarına yer verilmiştir.

$\mathbb{F}_n^{(r)}$ ,  $n$ . Hiperharmonik Fibonacci sayısı olmak üzere  $\mathcal{F} = [f_{n,k}]$  matrisi

$$f_{n,k} = \begin{cases} \mathbb{F}_{n-k+1}^{(r)}, & n - k + 1 \geq 0 \\ 0, & n - k + 1 < 0 \end{cases}$$

ile tanımlı olsun. O halde  $\mathcal{F}$  matrisi

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} \mathbb{F}_1^{(r)} & 0 & 0 & \cdots \\ \mathbb{F}_2^{(r)} & \mathbb{F}_1^{(r)} & 0 & \cdots \\ \mathbb{F}_3^{(r)} & \mathbb{F}_2^{(r)} & \mathbb{F}_1^{(r)} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (21)$$

şeklinde olup genel terimi  $f_{n,k} = \mathbb{F}_{n-k+1}^{(r)}$  dir.

### 9.1. Hiperharmonik Fibonacci Sayıları İle Tanımlı Olan Matrisin Riordan Gösteriminin Elde Edilişi

9.1.1. Teorem.  $\mathcal{F}$ , (21)'deki gibi tanımlı olmak üzere  $\mathcal{F}$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)} L_{-\alpha^2}(-\alpha x), x \right)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathcal{F}$  (21)'deki gibi tanımlı olsun.  $\mathcal{F} = [f_{n,k}]$  olmak üzere  $f_{n,k} = \mathbb{F}_{n-k+1}^{(r)}$  dir.  $\mathcal{F}$  matrisinin 0. sütunu  $[\mathbb{F}_1^{(r)}, \mathbb{F}_2^{(r)}, \mathbb{F}_3^{(r)}, \dots]^T$  olup 0. sütun  $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n$  şeklinde bir formal kuvvet serisinin katsayılarından oluşur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n^{(r)} x^n = \frac{\alpha - \beta}{1 - x} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)$$

olduğundan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^{n+1} = \frac{\alpha - \beta}{1 - x} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)$$

elde edilir. Buradan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n = \frac{\alpha - \beta}{x(1 - x)} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)$$

yazılabilir. Böylece 0. sütunun üreteç fonksiyonu  $\frac{\alpha - \beta}{1 - x} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)$  olduğu görülür. Riordan grup tanımı göz önüne alındığında  $\mathcal{F}$  matrisinin diğer sütunları 0. sütunun  $x$  birim kadar ötelenmiş hali olduğundan  $\mathcal{F}$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{\alpha - \beta}{x(1 - x)} L_{-\alpha^2}(-\alpha x), x \right)$$

şeklindedir.

Öte yandan  $D = \left( \frac{\alpha - \beta}{x(1 - x)} L_{-\alpha^2}(-\alpha x), x \right)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= [x^n] \left[ \frac{\alpha - \beta}{x(1 - x)} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) x^k \right] \\ &= [x^n] \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n \right) x^k \\ &= [x^{n-k}] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n \\ &= \mathbb{F}_{n-k+1}^{(r)} \end{aligned}$$

şeklindedir.

$\left(\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x), x\right)$  matrisinin genel terimi  $\mathbb{F}_{n-k+1}^{(r)}$  olduğundan  $\left(\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x), x\right)$

Riordan gösterimi ile tanımlı matris  $\mathcal{F}$  matrisidir.

9.1.2. Teorem.  $\mathcal{F}$  matrisi (21) 'deki ve  $Q$  matrisi (10) 'daki gibi tanımlı olsun. O halde  $\mathcal{F}Q$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x)\frac{1}{1-qx}, x\right) \quad (22)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathcal{F} = (\mathbb{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ve  $Q = (q^{i-j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  matrislerinin Riordan gösterimleri sırasıyla

$\left(\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x), x\right)$  ve  $\left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$  dir. Buradan

$$\mathcal{F}Q = \left(\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x), x\right)\left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$$

şeklinde yazılabilir.

(2) eşitliği kullanılırsa  $\mathcal{F}Q$ 'nın Riordan gösterimi

$$\left(\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x)\frac{1}{1-qx}, x\right)$$

şeklinde elde edilir.

9.1.3. Teorem.  $\mathcal{F}$  matrisi (21)'deki ve  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olmak üzere  $\mathcal{F}Q$  matrisinin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-j+1} \mathbb{F}_k^{(r)} q^{n-j-i+1} \quad (23)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathcal{FQ}$  matrisinin Riordan gösterimi  $\left(\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x), x\right)$  şeklinde olup,  $j$ . sütun

$\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x)\frac{1}{1-qx}x^j$  fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Yani

$$\begin{aligned} \frac{\alpha-\beta}{x(1-x)}L_{-\alpha^2}(-\alpha x)\frac{1}{1-qx}x^j &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \right) x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} q^{n-k} \right\} x^{n+j} \\ &= \sum_{n=j}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-j} \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} q^{n-j-k} \right\} x^n. \end{aligned}$$

Buradan matrisin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} q^{n-j-k}$$

olur ki,  $k \rightarrow k-1$  indis değişikliği ile

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-j+1} \mathbb{F}_k^{(r)} q^{n-j-k+1}$$

elde edilir.

9.1.4. Teorem.

$$\omega = \left( \frac{\alpha-\beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx}, \frac{x}{1-x} \right) \quad (24)$$

eşitliği ile tanımlı olsun.  $\omega = (d_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  olmak üzere  $\omega$  matrisinin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-j+1} \mathbb{F}_k^{(r+j)} q^{i-j-k+1}$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\omega$  matrisi (24) eşitliği ile tanımlı olsun.  $\omega$  matrisinin  $j$ . sütunu

$$\frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} \frac{x^j}{(1-x)^j} = \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^{r+j}} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} x^j$$

ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Yani

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^{r+j}} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} x^j &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r+j)} x^n \left( \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \right) x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+j)} q^{n-k} \right\} x^{n+j} \\ &= \sum_{n=j}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-j} \mathbb{F}_{k+1}^{(r+j)} q^{n-j-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

dir.

Buradan matrisin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} \mathbb{F}_{k+1}^{(r+j)} q^{i-j-k}$$

§

eklindedir.  $k \rightarrow k - 1$  indis değişikliği yapılırsa

$$d_{i,j} = \sum_{k=1}^{i-j+1} \mathbb{F}_k^{(r+j)} q^{i-j-k+1}$$

elde edilir.

9.1.5. Teorem.  $\mathcal{F}$  matrisi (21) 'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+1)} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{1-x}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} &= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} \frac{1}{1-x} \\ &= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^{r+1}} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r+1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+1)} q^{n-k} \right\} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+1)} q^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+1)} q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+1)} q^{n-k}.$$

9.1.6. Teorem.  $\mathcal{F}$  matrisi (21)'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s)} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{(1-x)^s}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} x^n$  eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} \binom{s+k-1}{s-1} &= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-x)^s} \\ &= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^{r+s}} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^{(r+s)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} \binom{s+k-1}{s-1} = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s)} q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-k-i+1} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s)} q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

(24) eşitliğinde  $q = 1$  alınırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s)}$$

olur.  $k \rightarrow k-1$  dönüşümü uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=1}^{n+1} \mathbb{F}_k^{(r+s)}$$

elde edilir.  $\mathbb{F}_n^{(r)} = \sum_{k=1}^n \mathbb{F}_k^{(r-1)}$  olduğundan

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} \binom{s+k-1}{s-1} = \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s+1)}$$

yazılabilir.

9.1.7. Teorem.  $\mathcal{F}$  matrisi (21)'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-i+1} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n F_{k+1}^{(r)} \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{(1-x)^s}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{(1-x)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n-1}{s-1} q^n x^n$

eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-i+1} \binom{s+k-1}{s-1} &= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-qx)^s} \\
&= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{(1-qx)^{s+1}} \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} F_{n+1}^{(r)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n}{s} q^n x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n F_{k+1}^{(r)} \binom{s+n-k}{s} q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r)} q^{n-i+1} \binom{s+k-1}{s-1} = \sum_{k=0}^n F_{k+1}^{(r)} \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

9.1.8. Teorem.  $\omega$  matrisi (24)'deki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r-1)} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{1+x}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$  eşitliklerinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} (-1)^k = [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} 1 - x$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} (-1)^k &= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^{r-1}} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r-1)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} (-1)^k = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r-1)} q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r-1)} q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

9.1.9. Teorem.  $\omega$  matrisi (24)'deki gibi tanımlı olsun.

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} \binom{S}{k} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s)} q^{n-k} \quad (25)$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = (1+x)^s$  seçilsin. (5) ve  $h(x) = (1+x)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} x^n$  eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} \binom{S}{k} &= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-x)^s} \\
&= [x^n] \frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^{r+s}} L_{-\alpha^2}(-\alpha x) \frac{1}{1-qx}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} \binom{S}{k} = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r+s)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n$$

elde edilir.

Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} \binom{S}{k} = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s)} q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} q^{n-k-i+1} \binom{S}{k} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s)} q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

(25) eşitliğinde  $q = 1$  ve  $s = 1$  alınırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} \binom{1}{k} = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r+s)}$$

elde edilir.  $\mathbb{F}_n^{(r)} = \sum_{k=1}^n \mathbb{F}_k^{(r-1)}$  olduğundan

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k+1} \mathbb{F}_i^{(r+k)} = \mathbb{F}_{n+1}^{(r+2)}$$

sağlanır.

## 9.2. Hiperharmonik Fibonacci Sayıları İle Tanımlı Matrisin Satır Toplamları

9.2.1. Teorem.  $\mathcal{F}$  matrisi (21)' deki gibi tanımlı olsun. O halde  $\mathcal{F}$  matrisinin

(i) Klasik satır toplamı:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)}$$

(ii) Alterne satır toplamı:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} (-1)^{n-k}$$

(iii) Ağırlıklı satır toplamı:

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_k^{(r+2)} x^n$$

şeklindedir.

*İspat.*

(i)  $\mathcal{F}$  matrisine (6) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1-h(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)}{1-x} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} \right\} x^n \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)  $\mathcal{F}$  matrisine (7) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\beta_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1+h(x)} \\
&= [x^n] \frac{\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)}{1+x} \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} (-1)^{n-k} \right\} x^n \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} (-1)^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)  $\mathcal{F}$  matrisine (8) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_n &= [x^n] \frac{d(x)h(x)}{(1-h(x))^2} \\
&= [x^n] \frac{\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)x}{(1-x)^2} \\
&= [x^n] \frac{\alpha-\beta}{x(1-x)^{r+2}} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)x \\
&= [x^n] x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r+2)} x^n
\end{aligned}$$

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r+2)} x^{n+1}$$

olup,  $n \rightarrow n - 1$  dönüşümü uygulanırsa

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n^{(r+2)} x^n$$

elde edilir.  $\mathbb{F}_0^{(r+2)} = 0$  olduğundan

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n^{(r+2)} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\mathcal{F}$  matrisinin ağırlıklı satır toplamı

$$\delta_n = [x^n] \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_k^{(r+2)} x^n$$

şeklindedir.

9.2.2. Teorem.  $\mathcal{F}$  matrisi (21) 'deki gibi ve  $Q$  matrisi (9) 'daki gibi tanımlı olsun.  $\mathcal{F}Q$  matrisinin

(i) Klasik satır toplamı:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} q^{n-k}$$

(ii) Alterne satır toplamı:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} (-1)^{n-k} q^{n-k}$$

(iii) Ağırlıklı satır toplamı:

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_k^{(r)}(n-k+1)q^{n-k}$$

şeklindedir.

*İspat.*

(i)  $\mathcal{FQ}$  matrisine (6) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1 - qh(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)}{1 - qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} q^{n-k} \right\} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} q^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

(ii)  $\mathcal{FQ}$  matrisine (7) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \beta_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1 + qh(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{\alpha-\beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)}{1 + qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k q^n x^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} (-1)^{n-k} q^{n-k} \right\} x^n \\
&= \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_{k+1}^{(r)} (-1)^{n-k} q^{n-k}
\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)  $\mathcal{FQ}$  matrisine (8) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}
\delta_n &= [x^n] \frac{d(x)h(x)}{(1 - qh(x))^2} \\
&= [x^n] \frac{\frac{\alpha - \beta}{x(1-x)^r} L_{-\alpha^2}(-\alpha x)x}{(1 - qx)^2} \\
&= [x^n] x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\
&= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_{n+1}^{(r)} x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n
\end{aligned}$$

olup,  $n \rightarrow n - 1$  dönüşümü uygulanırsa

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{F}_n^{(r)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n$$

elde edilir.  $\mathbb{F}_0^{(r)} = 0$  olduğundan

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{F}_n^{(r)} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n$$

eşitliği yazılabilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_k^{(r)} (n - k + 1) q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla  $\mathcal{F}Q$  matrisinin ağırlıklı satır toplamı

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n \mathbb{F}_k^{(r)} (n - k + 1) q^{n-k}$$

şeklindedir.

## 10. GENELLEŞTİRİLMİŞ TETRANACCİ SAYILARIYLA TANIMLI MATRİSİN RİORDAN GÖSTERİMİ

Bu bölümde, genelleştirilmiş Tetranacci sayılarıyla tanımlı olan matrisin Riordan gösterimine, özel fonksiyonlar tanımlayarak FTRA teoremi yardımıyla yeni eşitliklere ve genelleştirilmiş Tetranacci sayılarının satır toplamalarına yer verilmiştir.

$T_n$ ,  $n$ . Genelleştirilmiş Tetranacci sayısı olmak üzere  $\mathcal{T} = (T_n)$  matrisi

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} T_0 & & & & \cdots \\ T_1 & T_0 & & & \cdots \\ T_2 & T_1 & T_0 & & \cdots \\ T_3 & T_2 & T_1 & T_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad (26)$$

genel terimi  $T_{n,k} = T_{n-k}$  olan bir matris olarak tanımlıdır.

### 10.1. Genelleştirilmiş Tetranacci Sayıları İle Tanımlı Olan Matrisin Riordan Gösteriminin Elde Edilişi

10.1.1. Lemma.  $\mathcal{T}$  matrisi (26)'daki gibi tanımlı olsun. O halde  $\mathcal{T}$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{x(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)}, x \right) \quad (27)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathcal{T}$  matrisi (26)'daki gibi tanımlı olsun.  $\mathcal{T} = (T_{n,k})$  olmak üzere  $T_{n,k} = T_{n-k}$  dir.  $\mathcal{T}$  matrisinin 0. sütunu  $[T_0, T_1, T_2, \dots]^T$  şeklinde olup 0. sütun  $\sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n$  şeklinde bir formal kuvvet serisinin katsayılarından oluşur.

$$\sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4}$$

olduğundan 0. sütunun üreteç fonksiyonunun  $\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4}$  olduğu görülür. Riordan grup tanımı göz önüne alındığında  $\mathcal{T}$  matrisinin diğer sütunları 0. sütunun  $x$  birim kadar ötelenmiş hali olduğundan  $\mathcal{T}$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)}, x \right)$$

şeklindedir.

Öte yandan,  $D = \left( \frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)}, x \right)$  olmak üzere

$$\begin{aligned} d_{n,k} &= [x^n] \left[ \frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4} x^k \right] \\ &= [x^n] \left( \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \right) x^k \\ &= [x^{n-k}] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \\ &= T_{n-k} \end{aligned}$$

olur ki,  $\left( \frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)}, x \right)$  matrisinin genel terimi  $T_{n-k}$  olduğundan,  $\left( \frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)}, x \right)$  Riordan gösterimi ile tanımlı matris  $\mathcal{T}$  matrisidir.

10.1.2. Teorem.  $\mathcal{T}$  matrisi (26)'daki gibi ve  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olsun.  $\mathcal{T}Q$  matrisinin Riordan gösterimi

$$\left( \frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)(1-qx)}, x \right) \quad (28)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathcal{T}$  ve  $Q$  matrislerinin Riordan gösterimleri (27) ve (12) eşitliğinden sırasıyla  $\left(\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)}, x\right)$  ve  $\left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$  olduğundan

$$\mathcal{T}Q = \left(\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)}, x\right) \left(\frac{1}{1-qx}, x\right)$$

şeklinde yazılabilir.

(2) eşitliği kullanılırsa,  $\mathcal{T}Q$ 'nin Riordan gösterimi

$$\left(\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)(1-qx)}, x\right)$$

elde edilir.

10.1.3. Teorem.  $\mathcal{T}$  matrisi (26)'daki gibi ve  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olsun.  $\mathcal{T}Q$  matrisinin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} T_k q^{i-j-k} \quad (29)$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\mathcal{T}$  matrisinin Riordan gösterimi  $\left(\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)(1-qx)}, x\right)$  şeklinde olup,  $j$ . sütun  $\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)(1-qx)} x^j$  fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Yani

$$\begin{aligned} \frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{x(1-px-qx^2-rx^3-sx^4)(1-qx)} x^j &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \right) x^j \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k q^{n-k} \right\} x^{n+j} \end{aligned}$$

$$\frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{x(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)(1 - qx)} x^j = \sum_{n=j}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-j} T_k q^{i-j-k} \right\} x^n.$$

Buradan matrisin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} T_k q^{i-j-k}$$

elde edilir.

10.1.4. Teorem.  $\zeta$  matrisi

$$\zeta = \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)(1 - qx)}, \frac{x}{1 - qx} \right) \quad (30)$$

eşitliği ile tanımlı olsun.  $\zeta = (d_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}}$  olmak üzere  $\zeta$  matrisinin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-k+1}{j} T_k q^{i-j-k}$$

şeklindedir.

*İspat.*  $\zeta$  matrisi (30) eşitliği ile tanımlı olsun.  $\zeta$  matrisin  $j$ . sütunu

$$\begin{aligned} & \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)(1 - qx)} \frac{x^j}{(1 - qx)^j} \\ &= \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)(1 - qx)^{1+j}} x^j \end{aligned}$$

fonksiyonunun ürettiği dizinin elemanlarından oluşur. Yani

$$\frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)(1 - qx)^{1+j}} x^j = \left( \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+j}{n} q^n x^n \right) x^j$$

$$\begin{aligned} \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{(1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4)(1 - qx)^{1+j}} x^j &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k \binom{n-k+j}{n-k} q^{n-k} \right\} x^{n+j} \\ &= \sum_{n=j}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n-j} T_k \binom{n-k}{n-j-k} q^{n-j-k} \right\} x^n \end{aligned}$$

şeklindedir.

Buradan matrisin genel terimi

$$d_{i,j} = \sum_{k=0}^{i-j} \binom{i-k+1}{j} T_k q^{i-j-k}$$

şeklinde elde edilir.

10.1.5. Teorem.  $\mathcal{T}$  matrisi (26)'daki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} T_i q^{n-i} = \sum_{k=0}^n T_k (n-k+1) q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{1-qx}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{1-qx} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n$  eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} T_i q^{n-i} &= [x^n] \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \frac{1}{1 - qx} \right) \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} T_i q^{n-i} = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k (n-k+1) q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} T_i q^{n-i} = \sum_{k=0}^n T_k (n-k+1) q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

10.1.6. Teorem.  $\mathcal{T}$  matrisi (26)'daki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} T_i q^{n-i} \binom{s+k-1}{k-1} = \sum_{k=0}^n T_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{(1-qx)^s}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{(1-qx)^s} = \sum_{k=0}^n \binom{s+n-1}{n-1} q^n x^n$  eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} T_i q^{n-i} \binom{s+k-1}{k-1} &= [x^n] \left( \frac{a + x(b-ap) + x^2(c-bp-aq) + x^3(d-cp-bq-ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \right) \frac{1}{1-qx} \frac{1}{(1-qx)^s} \\ &= [x^n] \left( \frac{a + x(b-ap) + x^2(c-bp-aq) + x^3(d-cp-bq-ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \right) \frac{1}{(1-qx)^{s+1}} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s+n}{s} q^n x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} T_i q^{n-i} \binom{s+k-1}{k-1} = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=0}^{n-k} T_i q^{n-i} \binom{s+k-1}{k-1} = \sum_{k=0}^n T_k \binom{s+n-k}{s} q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır.

10.1.7. Teorem.  $\zeta$  matrisi (29)'daki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k} T_i q^{n-i} (-1)^k = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = T_n$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = \frac{1}{1+qx}$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = \frac{1}{1+qx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^n x^n$  eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k} T_i q^{n-i} (-1)^k &= [x^n] \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \frac{1}{1 - qx} \frac{1}{1 + q \left( \frac{x}{1 - qx} \right)} \right) \\ &= [x^n] \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \frac{1}{1 - qx} \frac{1}{\frac{1 - qx + qx}{1 - qx}} \right) \\ &= [x^n] \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \frac{1}{1 - qx} 1 - qx \right) \\ &= [x^n] \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \right) \end{aligned}$$

yazılabildiğinden

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k} T_i q^{n-i} (-1)^k = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n = T_n$$

eşitliği sağlanır.

10.1.8. Teorem.  $\zeta$  matrisi (29)'daki gibi tanımlı olsun. O halde

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k} T_i q^{n-i} \binom{s}{k} = \sum_{k=0}^n T_k (n - k + 1) q^{n-k}$$

eşitliği gerçekleşir.

*İspat.*  $h(x) = (1 + qx)^s$  olarak seçilsin. (5) ve  $h(x) = (1 + qx)^s = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{s}{n} q^n x^n$  eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k} T_i q^{n-i} \binom{s}{k} &= [x^n] \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \frac{1}{1 - qx} \left( \frac{1 - qx + qx^2}{1 - qx} \right) \right) \\
 &= [x^n] \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \frac{1}{1 - qx} \left( \frac{1}{1 - qx} \right) \right) \\
 &= [x^n] \left( \frac{a + x(b - ap) + x^2(c - bp - aq) + x^3(d - cp - bq - ar)}{1 - px - qx^2 - rx^3 - sx^4} \frac{1}{(1 - qx)^2} \right) \\
 &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) q^n x^n
 \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k} T_i q^{n-i} \binom{s}{k} = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k (n - k + 1) q^{n-k} \right\} x^n$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k} T_i q^{n-i} \binom{s}{k} = \sum_{k=0}^n T_k (n - k + 1) q^{n-k}$$

eşitliği sağlanır. Özel olarak  $q = 1$  ve  $s = 1$  alınırsa

$$\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k} T_i \binom{1}{k} = \sum_{k=0}^n T_k (n - k + 1)$$

elde edilir.

## 10.2. Genelleştirilmiş Tetranacci Sayıları İle Tanımlı Matrisin Satır Toplamları

10.2.1. Teorem.  $\mathcal{T}$  matrisi (26)'daki gibi tanımlı olsun.  $\mathcal{T}$  matrisinin

(i) Klasik satır toplamı:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n T_k$$

(ii) Alterne satır toplamı:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n T_k (-1)^{n-k}$$

(iii) Ağırlıklı satır toplamı:

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n T_{k-1} (-1)^{n-k} (n - k + 1)!$$

şeklindedir.

$$\begin{aligned} \text{İspat. (i)} \quad \alpha_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1-h(x)} \\ &= [x^n] \frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\alpha_n = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k \right\} x^n$$

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n T_k$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} (ii) \quad \beta_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1+h(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4}}{1+x} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \end{aligned}$$

olup, Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \beta_n &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k (-1)^{n-k} \right\} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n T_k (-1)^{n-k} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} (iii) \quad \delta_n &= [x^n] \frac{d(x)h(x)}{(1-h(x))^2} \\ &= [x^n] \frac{\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4} x}{(1-x)^2} \\ &= [x^n] x \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)! x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)! x^n \end{aligned}$$

olup  $n \rightarrow n-1$  dönüşümü uygulanırsa

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} T_{n-1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)! x^n$$

elde edilir. Negatif indisler sıfır olacağı gerçeğinden

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_{n-1} x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1)! x^n$$

olup, Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \delta_n &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_{k-1} (-1)^{n-k} (n-k+1)! \right\} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n T_{k-1} (-1)^{n-k} (n-k+1)! \end{aligned}$$

elde edilir.

10.2.2. Teorem.  $\mathcal{T}$  matrisi (26)'daki gibi ve  $Q$  matrisi (10)'daki gibi tanımlı olsun.  $\mathcal{T}Q$  matrisinin

(i) Klasik satır toplamı:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^n T_k q^{n-k}$$

(ii) Alterne satır toplamı:

$$\beta_n = \sum_{k=0}^n T_k (-1)^{n-k} q^{n-k}$$

(iii) Ağırlıklı satır toplamı:

$$\delta_n = \sum_{k=0}^n T_k(n-k+1)q^{n-k}$$

şeklindedir.

*İspat.* (i)  $TQ$  matrisine (6) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1-qh(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4}}{1-qx} \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} q^n x^n \end{aligned}$$

elde edilir. Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\begin{aligned} \alpha_n &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k q^{n-k} \right\} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n T_k q^{n-k} \end{aligned}$$

ifadesine ulaşılır.

(ii)  $TQ$  matrisine (7) eşitliği uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \beta_n &= [x^n] \frac{d(x)}{1+qh(x)} \\ &= [x^n] \frac{\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4}}{1+qx} \\ \beta_n &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k q^n x^n \end{aligned}$$

olup, Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\begin{aligned}\beta_n &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k (-1)^{n-k} q^{n-k} \right\} x^n \\ &= \sum_{k=0}^n T_k (-1)^{n-k} q^{n-k}\end{aligned}$$

elde edilir.

(iii)  $\mathcal{TQ}$  matrisine (8) eşitliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\delta_n &= [x^n] \frac{d(x)h(x)}{(1-qh(x))^2} \\ &= [x^n] \frac{\frac{a+x(b-ap)+x^2(c-bp-aq)+x^3(d-cp-bq-ar)}{1-px-qx^2-rx^3-sx^4} x}{(1-qx)^2} \\ &= [x^n] x \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^{n+1} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n\end{aligned}$$

olup,  $n \rightarrow n-1$  dönüşümü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\delta_n &= [x^n] \sum_{n=1}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n \\ &= [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} T_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) q^n x^n\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğe Cauchy çarpımı uygulanırsa

$$\delta_n = [x^n] \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^n T_k (n-k+1) q^{n-k} \right\} x^n$$

$$= \sum_{k=0}^n T_k(n-k+1)q^{n-k}$$

ifadesine ulaşılır.



## 11. SONUÇ VE ÖNERİLER

### 11.1. Sonuçlar

Bu çalışmada, ilk olarak bazı sayı dizilerinin tanımlarına değinilmiş, üreteç fonksiyonları incelenmiş, çalışmamız için gerekli olan Riordan grup tanımı verilmiştir. Harmonik ve Hiperharmonik sayılarının üreteç fonksiyonları kullanılarak bu sayı dizilerinin Riordan gösterimleri bulunmuş ve Riordan grubun tanımı göz önüne alınarak bazı eşitlikler elde edilmiştir. Ayrıca bu sayı dizilerinin satır toplamaları bulunmuştur. Bunun yanı sıra  $n$ . Hiperharmonik Fibonacci sayıları ve genelleştirilmiş Tetranacci sayılarının tanımlarına değinilmiş ve üreteç fonksiyonları incelenmiştir. Bu sayı dizilerinin üreteç fonksiyonları yardımıyla Harmonik sayılar ve Hiperharmonik sayılarda bulunduğu gibi bu sayı dizilerinde Riordan gösterimi bulunmuş ve bazı eşitlikler elde edilmiştir. Son olarak bu sayı dizilerinin satır toplamaları bulunmuştur.

### 11.2. Öneriler

Bu tez çalışmasında kullanılan metod diğer sayı dizilerine uygulanarak, farklı sayı dizileri için yeni eşitlikler elde edilebilir. Tezde bahsi geçen  $h(x)$  fonksiyonunun farklı seçimleri ile sayı dizileri için birtakım farklı özdeşlikler ve bağıntılar elde edilebilir.

## KAYNAKLAR

- Baccherini, D., Merlini, D. And Sprugnoli, R. (2008). Level generating trees and proper Riordan arrays. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, (2), 69-91.
- İnternet: Barry, P. (2009). A Study of Integer Sequences, Riordan Arrays, Pascal-like Arrays and Hankel Transforms, Published electronically. URL: <http://repository.wit.ie/id/eprint/1379>. Son Erişim Tarihi: 21.08.2016
- Cheon, G.S. and El-Mikkawy, M.E.A. (2008). Generalized harmonic numbers with Riordan arrays. *J. of Number Theory*, 128: 413-425.
- Cheon, G.S., El-Mikkawy, M.E.A. and Seol, H.G. (2006). New identities for Stirling numbers via Riordan arrays. *J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B Pure App. Math.*, 13: 311-318.
- Conway, J., & Guy, R. (1996). Surreal numbers. *Math Horizons*. 4(2), 26-31.
- Çetin, M., Kızılateş, C., Yeşil Baran, F., & Tuğlu, N. (2021). Some Identities of Harmonic and Hyperharmonic Fibonacci Numbers. *Gazi University Journal of Science*, 34-(2):493-504
- Dil, A. and Mezo, I. (2008). A Symmetric Algorithm for Hyperharmonic and Fibonacci Numbers, *Applied Mathematics and Computation*, 206: 942-951.
- Feinberg, M. (1963). Fibonacci-tribonacci. *The Fibonacci Quarterly*, 1(1), 71-74.
- Hennessy, A. (2011). *A study of Riordan arrays with applications to continued fractions, orthogonal polynomials and lattice paths*. (Doctoral dissertation, Water ford Institute of Technology, 2011). Dissertation Abstracts International, 242.
- Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. John Wiley & Sons.
- Koyuncuoğlu, Ö. (2014). *Riordan Sıraları Yöntemi Üzerine*. Yüksek Lisans Tezi, Akdeniz Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Antalya.
- Luzon, A., Merlini, D., Moron, M.A. and Sprugnoli, R. (2012). Identities induced by Riordan arrays. *Linear Algebra and its Applications*, 436: 631-647.
- Matala-Aho, T. and Vaananen, K. (1998). On Approximation Measures of  $q$  -Logarithms, *Bulletin Australian Mathematical Society*, 58(1), 15-31.
- Merlini, D. And Verri, M.C. (2000). Generating trees and proper Riordan arrays. *Discrete Mathematics*, 218: 167-183.
- Merlini, D. And Sprugnoli, R. (2002). A Riordan array proof of a curious identity. *Integers, Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 2, A8.

- Murty, M. R. (2013). The Fibonacci Zeta Function, *Automorphic Representations and L-Functions*, 409-425
- Peart, P., & Woan, W. J. (2000). Generating functions via Hankel and Stieltjes matrices. *J. Integer Seq*, 3(00.2), 1.
- Riordan, J. (1979). *Combinatorial Identities*, Robert E. Krieger Pub. Comp., Inc. New York, 256 p.
- Rogers, D. G. (1978). Pascal triangles, Catalan numbers and renewal arrays. *Discrete Mathematics*, 22(3), 301-310.
- Shapiro, L.W., Getu, S., Woan, W.J. and Woodson, L. (1991). The Riordan group. *Discrete Appl. Math.*, 34, 229-239
- Sprugnoli, R. (2006). An Introduction to Mathematical Methods in Combinatorics. URL: <http://www.dsi.unifi.it/~resp/Handbook.pdf>. Son Erişim Tarihi: 20.05.2014
- Sprugnoli, R. (1994). "A unified approach to combinatorial sum inversion", *Technical Report RT14/94*, Dipartimento Sistemi e Informatica.
- Yeşil Baran, F. (2011). *Fibonomiyel katsayılı Pascal matrislerin Riordan gösterimi*. Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.
- Waddill, M. E. (1992). The tetranacci sequence and generalizations. *Fibonacci Quarterly*, 30(1), 9-19.

## ÖZGEÇMİŞ

### Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Burcu KIYAK,

|                        |                     |                       |
|------------------------|---------------------|-----------------------|
| <b>Eğitim Derecesi</b> | <b>Okul/Program</b> | <b>Mezuniyet Yılı</b> |
|------------------------|---------------------|-----------------------|

|        |                     |      |
|--------|---------------------|------|
| Lisans | Amasya Üniversitesi | 2017 |
|--------|---------------------|------|

|               |                     |
|---------------|---------------------|
| Yüksek Lisans | Amasya Üniversitesi |
|---------------|---------------------|

|                        |                            |                     |
|------------------------|----------------------------|---------------------|
| <b>İş Deneyimi/Yıl</b> | <b>Çalıştığı Yer</b>       | <b>Görevi</b>       |
| 2017                   | Turhal İrem Fen Lisesi     | Matematik Öğretmeni |
| 2018-2019              | Turhal Vizyon Kurs Merkezi | Matematik Öğretmeni |
| 2019 -2020             | Turhal Halk Eğitim Merkezi | Matematik Öğretmeni |
| 2020-2022              | Turhal Çözüm Kurs Merkezi  | Matematik Öğretmeni |

### Yabancı Dili

İngilizce

### Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

Yeşil Baran, F., Kıyak. B. (2021). Riordan Matrislerin Özel Sayı Dizileri Üzerindeki Uygulamaları, Anadolu 6. Uluslararası Uygulamalı Bilimler Kongresi, Van, Türkiye.