

11872

**ROBOT MANİPULATÖRLERİN HAREKET DENKLEMLERİ VE
DİFERENSİYEL GEOMETRİ AÇISINDAN BİR YAKLAŞIM**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
FEN BİLİMLERİ EĞİTİMİ
MATEMATİK**



**MÜJGAN ÖZKOÇ
MAYIS-1990**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

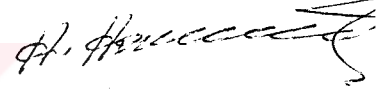
Bu tezin Yüksek Lisans Tezi Olarak Uygun Olduğunu
Onaylarım.

Y.Doç.Dr. Bülent KARAKAŞ

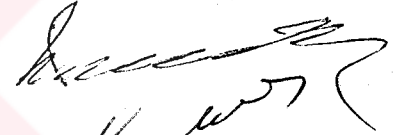


SINAV JÜRİSİ :

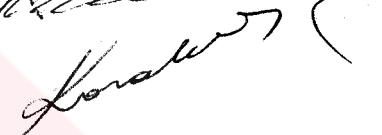
BAŞKAN : Prof. Dr. H.Hilmi HACISALİHOĞLU



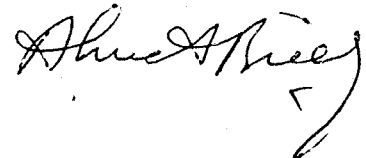
ÜYE : Prof. Dr. Muhsin MERT



ÜYE : Yrd. Doç. Dr. Bülent KARAKAŞ



Bu Tez Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Tez Yazım Esaslarına Uygundur.



ÖZGEÇMİŞ

Müjgan ÖZKOÇ 1966 yılında Mersinde doğdu. İlk-
öğrenimini Mersin Cengiz Topel İlkokulunda; ortaöğrenimini
Mersin Atatürk Lisesinde yaptı. 1987 yılında Gazi Üniver-
sitesi Gazi Eğitim Fakültesi Matematik bölümünden mezun
oldu. Halen Inebolu Endüstri Meslek Lisesinde Öğretmenlik
yapmaktadır.

ROBOT MANİPULATÖRLERİN HAREKET DENKLEMLERİ VE
DİFERENSİYEL GEOMETRİ AÇISINDAN BİR YAKLAŞIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Müjgan ÖZKOÇ

GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Mayıs-1990

ÖZ

Bu çalışma üç bölümden meydana gelmiştir. I. Bölüm, II. ve III. bölümlere temel teşkil edecek kavramlara ayrılmıştır. Bir uzay hareketi iki kısımdan oluşur: Dönme ve öteleme. $O(3)$ 3×3 -ortogonal matrisler cümlesi E^3 teki dönmeler cümlesiyle 1:1 tekabül içindedir. Hareketli ardışık p-tane uzayın oluşturduğu sistem p-tane hareket matrisiyle verilebilir. II. Bölümde hareketli p-tane uzayın oluşturduğu sistemin mekanik modelleri, robot manipulator olarak tanıtıldı. Bir robot manipulatorün link'i, joint'i kavramlarıyla birlikte hareket matrislerinin nasıl hesaplanacağı aktarıldı, iki temel örnek sunuldu. Bunlar Stanford ve Elbow manipulator olarak isimlendirilir. III. bölümde robot manipulator farklı bir yaklaşımla ele alındı ve II. Bölümde verilenlerle ilgisi hesaplandı. E^3 öklid uzayının kongrüansları Lie grubunun sonlu p-elemanlı bir altcümlesi hareketli p-tane uzay için hareket matrislerini tanımlar. Üstelik C_6 nın her bir elemanı $\text{expt} X$ ile vermek mümkündür. Böylece bir p-parametrik robot $\prod_{i=1}^p \text{expt}_i X_i$ olarak ifade edilir. Böyle ifade edilen robot manipulatorlere diferensiyel geometri açısından yaklaşımı kolaylaştırır. III. Bölümün son kısmında, $\text{expt} X$ ile verilen tanım için robot manipulator örnekleri verildi.

MOTION EQUATIONS OF ROBOT MANIPULATORS AND AN
APPROACH FROM THE POINT OF VIEW DIFFERENTIAL
GEOMETRY

(M.Sc. Thesis)

Müjgan ÖZKOÇ

GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
May-1990

ABSTRACT

This study consists of three sections. The first section is dedicated to the concepts which are the bases of the second and third sections: space motion has two parts: Rotation and translation. There is a 1:1 correspondence between the set of 3×3 orthogonal matrices $O(3)$ and the set of rotations in E^3 . The system of the p successive moving spaces can be given by p -motion matrices. In the second section, the mechanic patterns of p -moving spaces system are defined as a robot manipulator. In addition to the concepts of the link and joint of the manipulator, it is shown how to calculate a robot manipulator's motion matrices. The Stanford and Elbow manipulators are given as two examples. In the third section, the robot manipulator is expressed in a different way, and also its connection is examined with the second section. A finite subset of the Lie group of the congruences of the Euclidean space's E^3 defines the motion matrices for p moving spaces. One can give every element of C_6 with $\text{expt} X$, Therefore, a p -parametric robot would be expressed as $\prod_{i=1}^p \text{expt}_i X_i$. This expression simplifies the approach of robot manipulator in terms of the differential geometry. The examples of robot manipulator are given using the definition of $\text{expt} X$ at the end of the third section.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmamda bana her konuda yardım ve desteklerini esirgemeyen Tez Danışmanım Sayın Yrd.Doç.Dr. Bülent KARAKAŞ'a teşekkür ederim.

Müjgan ÖZKOÇ

ÖZ	iii
ABSTRACT	iv
TEŞEKKÜR.....	v
BÖLÜM 1	
TEMEL KAVRAMLAR.....	1
1.1. : Diferensiyellenebilir Manifoldlar.....	1
1.2. : Vektör alanları.....	3
1.3. : Lie Grupları.....	7
1.4. : Bir Lie grubunun Lie Cebiri.....	9
1.5. : Kongrüanslar.....	14
1.6. : Dönmeler ve Ortogonal Matrisler.....	18
1.7. : Üstel dönüşüm.....	28
1.8. : Killing bilineer formu.....	36
BÖLÜM 2	
ROBOT MANİPULATOR VE HAREKET DENKLEMLERİ.....	39
2.1. : Ön bilgiler ve temel tanımlar.....	39
2.2. : Stanford Manipulatörü.....	49
2.3. : Elbow Manipulatörü.....	53
BÖLÜM 3	
ROBOT MANİPULATÖRLERİN HAREKET GEOMETRİSİ.....	57
3.1. : Genel Bilgiler.....	57
3.2. : Stanford Manipulatörün üstel dönüşüm yardımıyla yazılışı.....	69
3.3. : Elbow Manipulatörün üstel dönüşüm yardımıyla yazılışı.....	76
3.4. : Özel Hareketler.....	79

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

1.1. DİFERENSIYELLENEBİLİR MANİFOLDLAR

TANIM : 1.1.1.

M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M bir n-boyutlu topolojik manifold denir.

M1) M bir Hausdorff uzayıdır.

M2) M nin her bir açık alt kümesi E^n veya E^n 'in bir açık alt kümesine homeomorftur.

M3) M sayılabilir çoklukta açık kümelerle örtülebilir (1).

$$\psi : U \subset E^n \rightarrow W \subset M$$

(ψ, W) ikilisine M de bir koordinat komşuluğu (harita) denir (1).

TANIM : 1.1.2.

M bir topolojik n-manifold ve M nin bir açık örtüsü $\{W_\alpha\}$ olsun. W_α açık kümelerinin indislerinin kümesi A olmak üzere $\{W_\alpha\}$ örtüsü için $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ yazılır. E^n de W_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık küme U_α olsun. Böylece ortaya çıkan (ψ_α, U_α) haritalarının

$$\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$$

koleksiyonuna bir atlas (koordinat komşuluğu sistemi) denir (1).

TANIM : 1.1.3.

Bir topolojik n-manifold M ve M nin bir atlası

$S = \{(\psi_\alpha, W_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ olsun. Eğer S atlası için $W_\alpha \cap W_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere, $\forall \alpha, \beta \in A$ ya karşılık

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} \circ \psi_\alpha : \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

ve

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta : \psi_\beta^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta) \rightarrow \psi_\alpha^{-1}(W_\alpha \cap W_\beta)$$

fonksiyonları C^k sınıfından diferensiyellenebilir iseler S ye c sınıfından diferensiyellenebilirdir denir. S atlası M üzerinde C^k sınıfından olduğu zaman S ye M üzerinde C^k sınıfından diferensiyellenebilir yapı denir. Bu yapıyla birlikte M ye de diferensiyellenebilir manifold denir (1).

ÖRNEK : 1.1.1.

R reel sayılar cümlesi üzerinde nxn tipindeki bütün matrislerin cümlesi $GL(n, R)$ olsun.

$$GL(n, R) = \{A \mid A \in R_n^n, \det A \neq 0\}$$

cümlesi diferensiyellenebilir manifolddur.

ÖRNEK : 1.1.2.

$O(n) = \{A \mid A \in R_n^n, A \cdot A^T = I_n\}$ ortogonal matrislerin cümlesi bir diferensiyellenebilir manifolddur.

1.2. VEKTÖR ALANLARI

$\Phi: M \rightarrow M'$ herhangi bir fonksiyon olsun. Bir $\Psi: M' \rightarrow M$ dönüşümü $\Phi \circ \Psi$ $\text{dom } \Psi$ üzerinde özdeşlik özelliğine sahip ise Ψ ye Φ nin bir kesiti denir.

$$M' \xrightarrow{\Psi} M \xrightarrow{\Phi} M', \quad \Phi \circ \Psi = \text{id} \Big|_{\text{dom } \Psi}$$

$\Pi: TM \rightarrow M, X_m \rightarrow m$ dönüşümünün bir X kesiti, $\text{dom } \Pi$ nin her m noktasına m noktasında bir tanjant vektör karşı getirir.

$$\begin{array}{ccc} & X & \Pi \\ M & \rightarrow & TM \rightarrow M \end{array}$$

Bir $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyonu verildiğinde Xf ile gösterilen bir fonksiyon

$$\begin{aligned} Xf: M &\rightarrow \mathbb{R} \\ m &\rightarrow (Xf)(m) = X_m(f) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanabilir.

TANIM : 1.2.1.

$\forall f$ fonksiyonu için elde edilen Xf dönüşümleri diferensiyellenebilir ise X e M üzerinde bir vektör alanı denir (2)

UCM açık alt cümlesiyle tanım cümleleri arakesite sebep olan

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi $C^\infty(U, R)$ olsun.

U da tanımlı global, R -lineer bir

$$X : C^\infty(U, R) \rightarrow C^\infty(U, R)$$

fonksiyonu için eğer, $f, g \in C^\infty(U, R)$ olmak üzere

$$1) \text{ dom } Xf = U \cap \text{dom } f$$

$$2) X(f \cdot g) = f \cdot X(g) + (Xf) \cdot g$$

şartları sağlanıyor ise X e M üzerinde bir diferensiyel operatör denir.

X bir vektör alanı iken,

$$X : C^\infty(M, R) \rightarrow C^\infty(M, R)$$

$$f \rightarrow Xf, \quad (Xf)(m) = X_m(f) \Big|_m$$

ele alınışıyla, X bir diferensiyel operatördür.

TEOREM : 1.2.1.

UCM açık altcümlesi üzerindeki bir X diferensiyel operatörü U üzerindeki bir tek vektör alanından elde edilir (2).

M üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile gösterelim.

$X, Y \in \chi(M)$ verilen iki vektör alanı iken bir L global fonksiyonuna

$$L : C^\infty(U, R) \rightarrow C^\infty(U, R)$$

$$f \rightarrow Lf, \quad \ni$$

$$Lf = X(Y(f)) - Y(X(f))$$

olarak tanımlayalım. L bir diferensiyel operatördür. Dikkat edilirse, $\text{dom}(Lf) = \cap \text{dom} f$ dir. Ayrıca eğer $\text{dom} f \cap \text{dom} g \neq \emptyset$ ise

$$X(Y(f.g)) = f(X(Yg)) + (X(Yf))g + (Xf)(Yg) + (Xg)(Yf)$$

ve dolayısıyla;

$$L(f.g) = f(Lg) + (Lf)g$$

dir. Ek olarak, $a, b \in \mathbb{R}$ ise

$$L(af + bg) = a.(Lf) + b.(Lg)$$

dir.

L bir diferensiyel operatör olduğundan, U üstündeki bir tek vektör alanından elde edilebilir. Bu vektör alanına X ve Y nin Lie bracketi adını vereceğiz ve $[X, Y]$ ile göstereceğiz. Böylece $[,]$ ile gösterilen bir dönüşüm,

$$\begin{aligned} [,] : X(M) \times X(M) &\rightarrow X(M) \\ (X, Y) &\rightarrow [X, Y], \quad \ni \end{aligned}$$

şeklinde sunulabilir.

TEOREM : 1.2.2.

$[,] : X(M) \times X(M) \rightarrow X(M)$ çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir (2)

1), R - iki lineerdir

2), Anti-simetriktir : $\forall X, Y \in X(M)$ için

$$[X, Y] = -[Y, X]$$

3) Jacobi özdeşliğini sağlar: $\forall X, Y \in Z \in X(M)$ için

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$$



1.3. LİE GRUPLARI

TANIM : 1.3.1.

G diferensiyellenebilir monifold yapısına sahip bir grup ve

$$\theta: G \times G \rightarrow G, (g_1, g_2) \rightarrow g_1 \cdot g_2$$

grup işlemi diferensiyellenebilir ise G ye bir Lie Grubu denir (2).

ÖRNEK : 1.3.1.

$$GL(n, R) = \{A \in R_n^n, \det A \neq 0\}$$

cümlesi bir Lie grubu yapısına sahiptir.

ÖRNEK : 1.3.2.

$$O(n) = \{A / A \in GL(n, R), A \cdot A^T = I_n\}$$

cümlesi bir Lie grubudur.

ÖRNEK : 1.3.3.

G_1 ve G_2 iki Lie grubu olsun. $G_1 \times G_2$ çarpım cümlesi de bir Lie grubu yapısına sahiptir.

ÖRNEK : 1.3.4.

$R^n = G_1$, $SO(n) = G_2$ olmak üzere $R^n \times SO(n)$ bir Lie grubudur. $n = 3$ için $R^3 \times SO(3)$ Öklid uzayının kongrüanslarının Lie grubu olarak bilinir ve C_6 ile gösterilir.

TANIM : 1.3.2.

G bir Lie grubu, $a \in G$ belli bir eleman olsun.

$$L_a: G \rightarrow G, g \rightarrow L_a(g) = a.g$$

$$R_a: G \rightarrow G, g \rightarrow R_a(g) = g.a$$

dönüşümlerine sırasıyla, G üzerinde tanımlı sol öteleme ve sağ öteleme denir (2).

TEOREM : 1.3.1.

G bir Lie grubu olsun

$\Psi: G \rightarrow G, g \rightarrow \Psi(g) = g^{-1}$ dönüşümü bir difeomorfizmdir (2).

TANIM : 1.3.3.

G bir Lie grubu olmak üzere,

$$\Psi: \mathbb{R} \rightarrow G$$

dönüşümü homomorfizm ise Ψ dönüşümüne G Lie grubunun 1-parametrelili altgrubu denir(2).

1.4. BİR LİE GRUBUNUN LİE CEBİRİ

TANIM : 1.4.1.

G bir Lie grubu olsun. G üzerindeki bir X vektör alanı sol ötelemeler altında invariant ise X 'e sol invariant vektör alanı denir (2).

TEOREM : 1.4.1.

Bir G Lie grubu üstündeki bir X vektör alanı için:
 X sol invarianttır $\Leftrightarrow X(ag) = (L_a)_* (Xg), \forall a, g \in G$
 önermesi doğrudur (2).

($\Rightarrow$): X sol invariant olsun. Bu durumda X kendisiyle

L_a - bağlıdır.

$$\Rightarrow (L_a)_* \circ X = X \circ L_a$$

$$\Rightarrow \forall g \in G \text{ için, } ((L_a)_* \circ X)(g) = (X \circ L_a)(g)$$

$$\Rightarrow (L_a)_* (Xg) = X(L_a(g))$$

$$\Rightarrow (L_a)_* (Xg) = X(ag)$$

($\Leftarrow$):

$$X(ag) = (L_a)_* (Xg) \quad \forall g \in G \text{ için olsun}$$

$$\Rightarrow X(L_a g) = [(L_a)_* \circ X](g)$$

$$\Rightarrow (X \circ L_a)(g) = (L_a)_* \circ X(g)$$

$$\Rightarrow X \circ L_a = L_a_* \circ X$$

$$\Rightarrow X \text{ sol invarianttır.}$$

Teorem 1.4.1.de $g = e$ alınır

$$X_a = L_a * X(e)$$

elde edilir. Yani X sol invaryant vektör alanı e noktasındaki değeriyle tanımlanabilir. Tersine, $v \in T_e G$ verilen bir vektör olmak üzere, $g \rightarrow L_{g*}(v)$ G üzerinde bir vektör alanıdır ve e noktasındaki değeri v dir.

Bir monifold üstünde v -invaryant vektör alanlarının bir Lie cebiri yapısına sahip olduğu biliniyor. G üzerindeki sol invaryant vektör olanlarının cümlesi LG ile gösterilsin, LG bir Lie cebiri yapısına sahiptir.

TEOREM: 1.4.2.

$$\zeta: LG \rightarrow T_e G, \quad X \rightarrow \zeta(X) = X_e$$

fonksiyonu bir vektör uzayı izomorfizmidir.

İSPAT :

$$\zeta \text{ 1:1 dir; } \zeta(X) = \zeta(Y) \Rightarrow X_e = Y_e, \quad \forall X, Y \in LG$$

$$\Rightarrow L_{g*} X_e = L_{g*} Y_e, \quad \forall g \in G$$

$$\Rightarrow Xg = Yg$$

$$\Rightarrow X = Y$$

$$\zeta \text{ lineerdir; } \zeta(\lambda X + Y) = (\lambda X + Y)(e)$$

$$= (\lambda X)(e) + Y(e)$$

$$= \lambda \zeta X_e + \zeta Y_e$$

$$= \lambda \zeta(X) + \zeta(Y)$$

ζ örtendir; $v \in T_e G$ verilmiş bir eleman olsun. $\forall v \in T_e G$ için, G üzerinde bir X vektör alanı $X(e) = v$ ve X sol invaryant olacak şekilde bulunabilirse ζ örtendir.

$\forall g \in G$ için, $T_p G$ vektör uzayı manifold yapısıyla ele alınabilir. $T_{g_1} G + T_{g_2} G$ çarpım manifold yapısıyla verilebilir.

$T_{(g_1, g_2)} = (T_{g_1} G \times T_{g_2} G)$ uzayı $T_{p_1} G \oplus T_{p_2} G$ uzayı ile özdeşlenebilir. G üzerinde bir m fonksiyonu;

$$\begin{aligned} m: G &\rightarrow TG \times TG \\ g &\rightarrow (O_g, T_{*g}(v)) \end{aligned}$$

olarak tanımlıyalım. $F_{*g}(v) = v \in T_p(G)$ dir.

$$\Theta: G \times G \rightarrow G \text{ grup işlemi için,}$$

$$\Theta_*: TG \times TG \rightarrow TG$$

türev dönüşümü bellidir. $g_1, g_2 \in G$ için Leibniz formülü kabul ve notasyonlarımız için yazılırsa;

$$\Theta_{g_1}: G \rightarrow G, g \rightarrow \Theta_{g_1}(g) = \Theta(g_1, g) = g_1 g, \Theta_{g_1} = L_{g_1}$$

$$\Theta_{g_2}: G \rightarrow G, g \rightarrow \Theta_{g_2}(g) = \Theta(g, g_2) = g \cdot g_2, \Theta_{g_2} = R_{g_2}$$

ve dolayısıyla

$$\Theta_*: TG \times TG \rightarrow TG$$

$$(v_1, v_2) \rightarrow \Theta_*(v_1, v_2), \ni v_1 \in T_{g_1}(G), v_2 \in T_{g_2} G$$

$$\Theta_*(v_1, v_2) = L_{g_1*}(v_1) + R_{g_2*}(v_2)$$

yazılabilir.

Bu hazırlıkla bir X vektör olan:

$$X = \theta_* \circ m$$

olarak tanımlanabilir. X diferensiyellenebilir olduğu için bir vektör alanıdır.

$$(\Leftarrow) : X(g) = (\theta_* \circ m)(g)$$

$$\begin{aligned} \theta_*(m(g)) &= \theta_*(\theta_g, I_*(v)) \\ &= \theta_*(g_1, g)(\theta_e, I_*v) \\ &= Lg_*(v) + R_*(o) \\ &= Lg_*(v) \end{aligned}$$

ve

$$X(e) = L_{e_*}(v) = v \text{ dir. Ayrıca } X \text{ sol invaryanttır.}$$

Şöyleki;

$$\begin{aligned} L_{O_*}(X(g)) &= L_{O_*}(L_{g_*}(v)) \\ &= (L_{O_*} \circ L_{g_*})(v) \\ &= L_{(ag)_*}(v) \\ &= X_{(ag)} \end{aligned}$$

SONUÇ : 1.4.1.

LG ile $T_e G$ nin izomorfik olması $T_e G$ üzerinde bir Lie cebiri yapısı tanımlamak için kullanılacaktır.

$v, w \in T_e G, X, Y \in dG$ $X(e) = v, Y(e) = w$ olmak üzere,

$$[v, W] = [X, Y]_e$$

tanımlanırsa, $(T_e G, [,])$ bir Lie cebiridir (2).

TANIM : 1.4.2.

$(T_e G, [,])$ Lie cebirine G Lie grubunun Lie cebiri denir ve LG ile gösterilir.

$T_e G$ uzayının bir bazı $\{v_1, \dots, v_n\}$ ise,
 $X_r: g \rightarrow Lg_*(v_r), 1 \leq r \leq n$ ile tanımlı X_r
vektör alanları G üzerinde sol invaryant vektör
alanları olup, $\{X_1, \dots, X_n\}$ sistemi LG için bir
bazıdır (2).

ÖRNEK : 1.4.1.

$O(n)$: $[n \times n]$ tipinden ortogonal matrisler cümlesi]
Lie grubunun Lie cebiri A_n $n \times n$ -anti-simetrik mat-
risler cümlesidir.

1.5. KONGRÜANSLAR

TANIM : 1.5.1.

 E^n n-boyutlu öklid uzayında

$$\sigma : E^n \xrightarrow[\text{örten}]{1:1} E^n$$

şeklinde tanımlı σ dönüşümüne E^n in bir transformasyonu denir(3).

TANIM : 1.5.2.

E^n de tanımlı öklid uzaklığı koruyan bir σ transformasyonuna E^n in bir öklid kongrüansı denir(3).

ÖRNEK : 1.5.1.

E^n daki öklid kongrüansların D cümlesi dönüşümlerin bileşke işlemine göre bir gruptur.

$$[D/D: E^n \xrightarrow[\text{kongrüansı}]{\text{öklid}} E^n] = G$$

ÇÖZÜM :

$D_1, D_2 \in G$ herhangi iki kongrüans olsun $\forall p, q$ için

$$\begin{aligned} 1) \quad d((D_2 \circ D_1)(p), (D_2 \circ D_1)(q)) &= d(D_2(D_1(p)), D_2(D_1(q))) \\ &= d(D_2(p), D_1(q)) \\ &= d(p, q) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı kongrüansların cümlesi bileşke işlemine göre kapalıdır.

- 1) Birim dönüşüm I bir kongrüanstır.
- 3) G de o (bileşke) işlemi birleşimlidir.
- 4) D bir kongrüans olduğundan birebir ve örtendir.

Bundan dolayı D^{-1} vardır,

$$\begin{aligned} d(D^{-1}(p'), D^{-1}(q')) &= d(D^{-1}(D(p)), D^{-1}(D(q))) \\ &= d(p, q) \end{aligned}$$

ve $D^{-1} \in G$ dir.

ÖZELLİK : 1.5.1.

E^3 de tanımlı öklid kongrüansları aşağıdaki özelliklere sahiptir (3).

- 1- Bir kongrüans bir doğruyu bir doğruya dönüştürür, yani D bir kollinasyondur.
- 2- Aynı düzlemde paralel olan iki doğru D altında paralel iki doğruya dönüşür. Böylece doğruların paralel olması kongrüans altında korunur.
- 3- Kongrüanslar açı koruyan dönüşümlerdir.
- 4- n-boyutlu referans uzayı Σ^n ile gösterilir. Σ^n uzayı sabit uzay olarak adlandırılır ve mana olarak bütün kongrüanslar altında invaryant demektir. Σ^n de orijin noktası olarak bir o noktası seçilir ve herbir noktanın O yu başlangıç noktası kabul eden bir yer vektörü birleşen uzayda bir vektör olarak tanımlıdır. Mesela $P \in \Sigma^n$ için $\vec{OP} = \vec{P}$ bahsedilen vektördür.

$E^{n'}$ hareketli uzaydaki P', R', S' noktaları için benzer vektör-nokta eşlemesi ile $\vec{P}' = \vec{OP}'$, $\vec{R}' = \vec{OR}'$, $\vec{S}' = \vec{OS}'$ vektörleri ve benzer düşünceyle $E^{n''}$ hareketli uzayındaki P'', R'', S'' noktaları için yer vektörleri

$$\vec{OP}'' = \vec{P}'', \quad \vec{OR}'' = \vec{R}'', \quad \vec{OS}'' = \vec{S}''$$

dür ve bu ardışık olarak devam edebilir.

TANIM : 1.5.3.

d sabit bir vektör olmak üzere

$$p \rightarrow p' , \quad \vec{p}' = \vec{p} + \vec{d}$$

transformasyonu bir kongrüanstır. Bu kongrüans translation (öteleme) olarak isimlendirilir. d ye ötelemenin öteleme vektörü denir.

ÖRNEK : 1.5.2.

E^n nin ötelemelerinin cümlesi bir gruptur (3)

ÇÖZÜM : 1- T_1 , $p' = p + d_1$

T_2 , $p'' = p' + d_2$ ötelemeleri için $T_2 T_1$

de bir ötelemedir $p'' = p + (d_1 + d_2)$ dir.

2- I özdeşlik dönüşümü $\vec{d} = \vec{0}$ olan bir ötelemedir.

3- T , öteleme vektörü d olan bir öteleme iken T^{-1} de öteleme vektörü $-d$ olan bir ötelemedir.

4- Bileşke işlemi birleşimlidir.

TANIM : 1.5.4.

Bir D kongrüansı için bir P noktası P' görüntü noktası ile çakışıyor ise P ye D nin bir sabit noktası denir. Sabit nokta bazen çift katlı nokta olarak adlandırılır. I özdeşlik dönüşümü için bütün noktalar sabittir. I dan farklı bir öteleme nin sabit noktası yoktur.

TANIM : 1.5.5.

Bir O noktasını sabit bırakan bir kongrüansa O noktası etrafında bir dönme denir. $Rot(O)$ ile gösterilir. $Rot(O, \theta)$ ise O noktası etrafında θ derecelik dönmeyi gösterecektir (3).

ÖRNEK : 1.5.3.

O noktası civarındaki dönmelerin cümlesi bir gruptur. Kongrüanslar grubunun bir alt grubudur. $R_2 \cdot R_1$ ile $R_1 \cdot R_2$ farklı dönmelerdir.

ÇÖZÜM:

$$\mathcal{R} = \{R/R \text{ bir dönme ve } R(O) = O\}$$

- 1- $R_1, R_2 \in \mathcal{R}$ olmak üzere $R_2(R_1(O)) = R_2(O) = O$ iki dönmenin bileşkesi yine bir dönmedir.
- 2- I özdeşlik kongrüansı bütün noktaları sabit bırakan dönüşümdür
- 3- R bir dönme iken R^{-1} de bir dönmedir.
- 4- Bileşke işlemi birleşimlidir.

1.6. DÖNMELER VE ORTAGONAL MATRİSLER

Bu kesimde her bir $\text{Rot}(O) = R$ dönmesinin bir ortogonal matrisle verilebileceği ve tersine her bir ortogonal matrisin bir $\text{Rot}(O) = R$ dönmesini tanımlayacağı aktarılacak ve aradaki geçişler verilecektir. $n \in \mathbb{N}$ için geçerli olan işlemler, ilgi alanımız E^3 olacağı için, $n = 3$, özel hali için yapılacaktır.

Her bir $\text{Rot}(O) = R$ dönmesine bir $A \in O(3)$ matrisi karşılık gelir. Şöyleki;

E^3 ün O noktası etrafındaki bir dönmesi $\text{Rot}(O) = R$ ile gösterilsin. E^3 ün bir ortonormal çatısı $F = \{O; v_1, v_2, v_3\}$ ve keyfi bir vektör $\vec{P}$ olmak kaydıyla

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{v}_i$$

yazılabileceğini ve $a_i = \langle \vec{P}, \vec{v}_i \rangle$ olduğu biliniyor. O zaman

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^3 \langle \vec{P}, \vec{v}_i \rangle \vec{v}_i$$

yazmak mümkündür. P nin R altındaki resim noktası $P' = R(P)$ ve

$$R(F) = \{O; v'_1, v'_2, v'_3\} = F' \text{ ise}$$

$$P' = \sum_{i=1}^3 \langle P', v'_i \rangle v'_i$$

ve R nin bir kongrüans olmasından dolayı

$$\langle P', v'_i \rangle = \langle R(P), R(v_i) \rangle = \langle P, v_i \rangle$$

ilgisi P' nün eşitinde yerine yazılırsa

$$P' = \sum_{i=1}^3 \langle P, v_i \rangle v_i'$$

eşitliği elde edilir. Bundan dolayı $P = \sum_{i=1}^3 \langle P, v_i \rangle v_i$ vektörü verildiğinde $P' = R(P)$ görüntü noktasını bulmak için $\{v_i'\}$ cümlesini bilmek yeterlidir. Çünkü P nin F çatısında-ki bileşenleri ile P' nün F' çatısındaki bileşenleri aynıdır. Böylece $R = \text{Rot}(0)$ dönmesini tanımlamak için $\{v_i\}$ bazının $\{v_i'\}$ görüntüsünü belirtmek yeterlidir. P noktası yerine v_i' vektörünün uç noktası alındığında, $\{v_i\}$ bazı cinsinden

$$\vec{v}_i' = \sum a_{ij} \vec{v}_j$$

yazılabilir.

a_{ij} bileşenleriyle belirli olan $[a_{ij}]$ matrisinin incelenmesi :

$[a_{ij}]$ matrisinin herbir satırını (sütununu) bir vektörün bileşenleri olarak düşünürsek

$$\langle v_i', v_k' \rangle = \delta_{ik}$$

$$\begin{aligned} \langle v_i', v_k' \rangle &= \left\langle \sum_j a_{ij} v_j, \sum_s a_{ks} v_s \right\rangle \\ &= \sum_{j,s} a_{ij} a_{ks} \langle v_j, v_s \rangle \\ &= \sum_j a_{ij} a_{ks} \delta_{js} \\ &= \sum_j a_{ij} a_{kj} \end{aligned}$$

ve $\langle v_i', v_k' \rangle = \delta_{ik}$ den dolayı

$$\sum_j a_{ij} a_{kj} = \delta_{ik}$$

bulunur. Yani, herbir satırın (sütunun) belirlediği vektör 1 birim uzunluktadır ve herbir vektör diğerlerine diktir.

$$\begin{aligned} \langle v_i', v_k' \rangle &= \langle \sum_j a_{ij} v_j', v_k' \rangle \\ &= a_{ik} \end{aligned}$$

$$\langle v_i', v_k' \rangle = \cos \theta_{ik} \cdot ||v_i'|| \cdot ||v_k'|| = \cos \theta_{ik}$$

O halde herbir a_{ij} bileşeni v_i' ile v_k' arasındaki açı θ_{ik} olmak kaydıyla, $a_{ik} = \cos \theta_{ik}$ ile bellidir.

R dönmesinin inversi olan R^{-1} için matris bileşenlerinin bulunması:

R^{-1} altında, $v_i' \rightarrow v_i$ dir. Ve

$$v_i = \sum_j b_{ij} v_j'$$

$$\begin{aligned} \langle v_i, v_k' \rangle &= \langle \sum_j b_{ij} v_j', v_k' \rangle \\ &= b_{ik} \end{aligned}$$

$$\langle v_i, v_k' \rangle = \langle v_k', v_i \rangle = a_{ki}$$

Sonuç olarak

$$b_{ik} = a_{ki}$$

dir. R^{-1} in matrisi R nin matrisinin transpozudur. Matris notasyonlarında

$$[a_{ik}] \cdot [a_{ki}] = I, \quad A^{-1} = A^T$$

ve determinant hesaplanırsa

$$A \cdot A^T = I, \quad \det A \cdot \det A^T = 1$$

$$\det A = \pm 1$$

elde edilir. $Rot(0) = R$ dönmesinin matris formu olan

$A = [a_{ij}]$ matrisi için elde edilen özellikler A matrisinin bir ortogonal matris olduğunu gösterir.

$\forall A \in O(3)$ ortogonal matrisi bir R dönmesi tanımlar:

iki X, Y vektörünün sütun matrisi olarak ele alınmasıyla $\langle X, Y \rangle = X^T Y$ yazılabilir. E^n üzerinde bir dönüşüm, $A \in O(3)$ olmak üzere

$$\sigma : E^3 \rightarrow E^3$$

$$X \rightarrow \sigma(X) = A \cdot X$$

olarak tanımlanırsa

$$\langle \sigma(X), \sigma(Y) \rangle = \langle AX, AY \rangle$$

$$= (AX)^t, AY$$

$$= X^t, A^t \cdot AY, \quad A^T = A^{-1}$$

$$= X^t \cdot Y$$

$$= \langle X, Y \rangle$$

eşitliğinden dolayı σ iç çarpımı koruyan bir dönüşümdür. Böylece ortogonal matrislerle, 0 noktası etrafındaki dönüşmelerin cümlesi arasında bir birebir tekabül vardır.

- Bir $\text{Rot}(0) = R$ dönmesine karşı gelen A ortogonal matrisinin karakteristik vektörleri yardımıyla R'nin invaryant bıraktığı altuzayların belirlenmesi:

Bunun yapılması halinde R dönmesinde daha da açık şekilde belirtmek mümkün olur. $A \in O(3)$ ortogonal matrisinin karakteristik değer ve karakteristik vektörleri

$$AX = \lambda X$$

eşitliğini sağlayan λ ve X lerdir. A normu koruduğundan

$$\|AX\| = \|\lambda X\| = |\lambda| \cdot \|X\| \Rightarrow \lambda = 1$$

dolayısıyla, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\lambda = \pm 1$$

veya $\lambda \in \emptyset$ elde edilir. $\lambda \in \mathbb{R}$ ise X karakteristik vektörü

$$AX = X, \quad AX = -X$$

olarak bellidir. Aynı uzayı ($\mathbb{R}^3$ de doğru) yön farkıyla belirtirler.

$$\lambda = +1 \text{ için invaryant altuzayı } V_1$$

$$\lambda = -1 \text{ için invaryant altuzayı } V_2$$

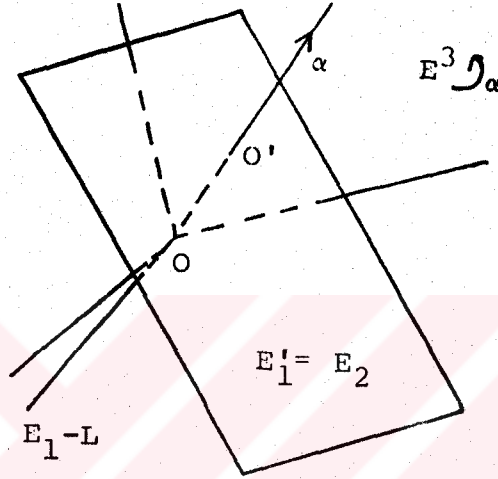
ile gösterilsin. $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ için

$$Av_1 = v_1, \quad Av_2 = -v_2$$

$$\begin{aligned} \langle v_1, v_2 \rangle &= \langle Av_1, Av_2 \rangle = \langle v_1, -v_2 \rangle \Rightarrow 2\langle v_1, v_2 \rangle = 0 \\ &\Rightarrow \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \end{aligned}$$

yani karakteristik doğrultu "kendine dik olma" özelliğine sahip bir doğrultudur.

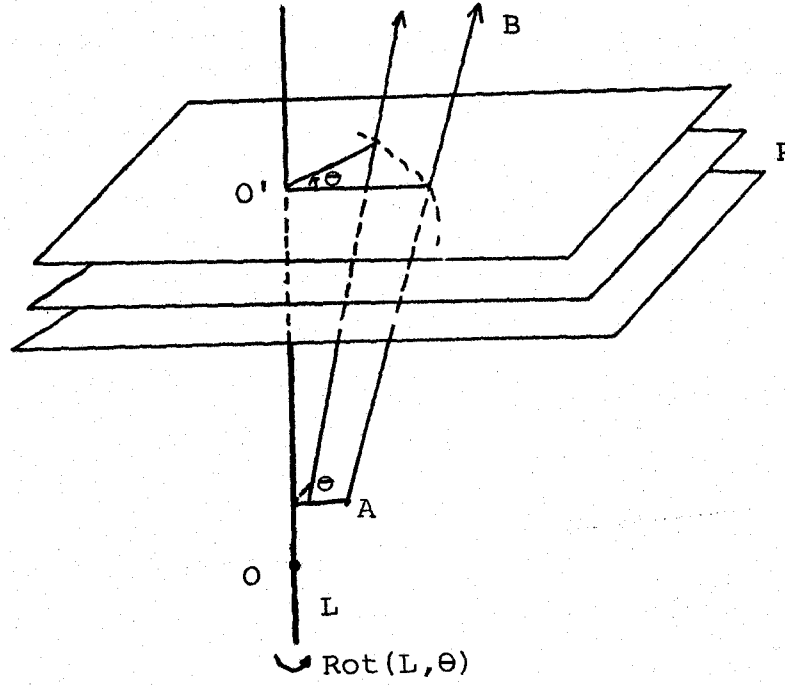
İnvaryant bir altuzayın ortogonal tümleyeni de invaryanttır. Böylece $AX = \lambda x$, $\lambda = \pm 1$ uzayı E_1 olmak üzere, E_1' uzayı da σ altında invaryanttır. boy $E_1 = 2$ dir.



Şekil 1.6.1

Bu durumda bir R dönmesi şöyle izah edilebilir:

R nin invaryant bıraktığı doğrultu L olsun. R, L ye dik olan düzlemlerde düzlemsel dönme yapar. Her düzlemdeki dönme merkezi L ile ilgili düzlemin kesim noktasıdır. Bu düzlemlerden biri P, $P \cap L = O'$ olsun. P de bir dik çatı $\{O'; v_1, v_2\}$ olmak üzere,



Şekil 1.6.2. L eksenini etrafında bir AB vektörünün dönmesi

L eksenindeki bir birim vektör m olmak üzere

$$\{O'; v_1, v_2, \}$$

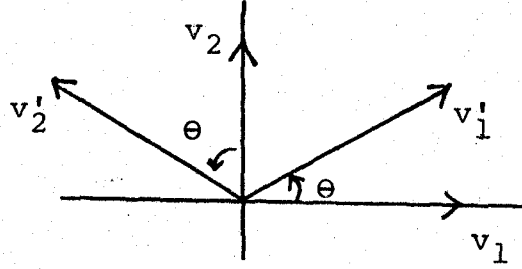
sistemi E^3 için bir dik çatıdır. R nin analitik ifadesi;

$$v'_1 = v_1 \cdot \cos\theta + v_2 \sin\theta$$

$$v'_2 = v_1 \cdot \sin\theta + v_2 \cos\theta$$

$$m' = m$$

ile verilir. v'_1 ve v'_2 aşağıdaki gibi hesaplanır.



Şekil 1.6.3.

$$\begin{aligned}
 v_1' &= a_1 v_1 + a_2 v_2 & \langle v_1', v_2 \rangle &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\
 v_2' &= b_1 v_1 + b_2 v_2 & \Rightarrow \langle v_2', v_1 \rangle &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \\
 & & \langle v_2', v_2 \rangle &= \cos\theta \\
 & & \langle v_1', v_1 \rangle &= \cos\theta
 \end{aligned}$$

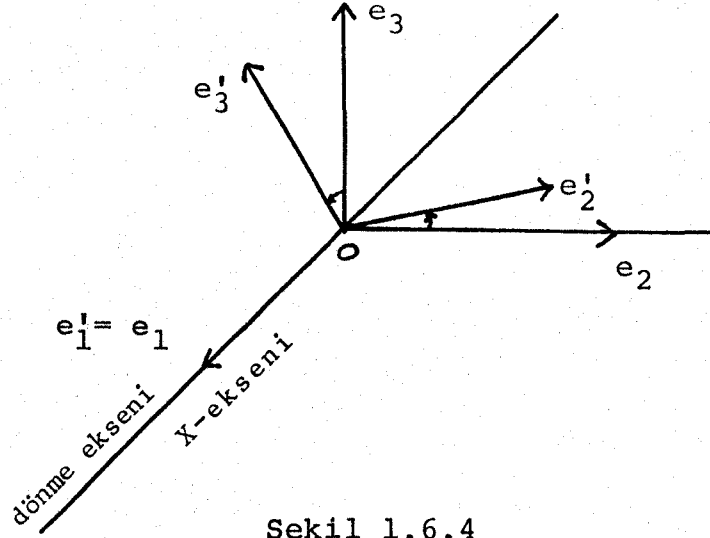
Böylece $\text{Rot}(L, \theta)$ şöyle belirtilir; L etrafında θ derecelik dönme yapan bir P noktası, $P \cap L = O'$ noktası etrafında θ derecelik düzlemsel bir dönme yapar. $\text{Rot}(L, \theta)$ nın belli olması için L ve θ nın veya R yi veren ortogonal matrisin verilmiş olması yeter.

ÖRNEK : 1.6.1.

E^3 uzayındaki standard çatı $\{O; e_1, e_2, e_3\}$ olsun. Sırayla e_1, e_2, e_3 ile belirli doğruları eksen kabul eden dönmelerin matris formlarını hesaplayalım.

ÇÖZÜM :

L dönme eksenini olarak $X = \text{Sp}\{e_1\}$ eksenini alalım. Bu dönmenin düzlem kısmı $\text{Sp}\{e_2, e_3\}$ düzleminde O merkezli dönebilir.



Şekil 1.6.4

$$e'_1 = e_1$$

$$e'_2 = \cos\theta e_2 - \sin\theta e_3$$

$$e'_3 = \sin\theta e_2 + \cos\theta e_3$$

$$\begin{vmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ e'_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{vmatrix}$$

Böylece dönmenin matris formu

$$\text{Rot}(X, \theta) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$$

Benzer işlemler, y-ekseni etrafında ve z-ekseni etrafındaki dönmeler içinde yapılır. O zaman matris formları

$$\text{Rot}(y, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$\text{Rot}(z, \theta) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Şeklinde belirtilebilir.

ÖRNEK : 1.6.2.

E_3 uzayında bir L doğrusu,

$$L : x = y, \quad z = 0$$

denklemleriyle verilsin. $\text{Rot}(L, \frac{\pi}{6})$ dönmesinin matris formu

$$R = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 + \sqrt{3} & 2 - \sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2 - \sqrt{3} & 2 + \sqrt{3} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}$$

olarak elde edilir.

1.7. ÜSTEL DÖNÜŞÜM :

Her $f: \mathbb{R} \rightarrow G$, 1-parametrelili altgrup, $T_e G$ uzayına ait bir $\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=0}$ tanjant vektörü tanımlar. $G, \mathbb{R} - \{0\}$

çarpım grubu olduğu zaman ilginç sonuçlar ortaya çıkar.

Bütün $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$ C^∞ homomorfizimleri

$$(f(t+s) = f(t) \cdot f(s)) \quad \forall t, s \in \mathbb{R} \text{ için}$$

$$(i) f'(t) = f'(0) \cdot f(t)$$

$$(ii) f(0) = 1$$

eşitliklerini sağlar;

(ii) eşitliği grup homomorfizimlerinin birim elemanını birim elemana dönüştürmenin bir sonucu olarak

$$f(0) = 1$$

dir.

(i) eşitliğinin sağlandığını göstermek için $S = \Delta t$ seçilsin. O zaman

$$f(t + \Delta t) = f(t) \cdot f(\Delta t)$$

dir. Türev alınırsa

$$\begin{aligned} f'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t) \cdot f(\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \\ &= f(t) \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\Delta t) - 1}{\Delta t} \end{aligned}$$

$f'(t) = f'(0) \cdot f(t)$ diferansiyel denkleminin çözümü

$$f(t) = e^{tf'(0)}$$

olarak elde edilir. Bu eşitlik

$$f(t) = \exp(tf'(0))$$

olarak da yazılabilir.

Aslında $R - \{0\}$ cümlesi $GL(I, R)$ matris grubudur.

Benzer diferansiyel denklem, $f: R \rightarrow GL(n, R)$ homomorfizimleri kaynaklı olarak da yazılabilir. Bu durumda

$f: R \rightarrow GL(n, R)$ homomorfizmi için

$$1) f'(t) = f'(0) \otimes f(t)$$

$$2) f(0) = I$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Burada $f'(t), f'(t) \Big|_{t=0}, f(t), f(0)$ birer matristir ve $\otimes$ matris çarpımı işlemidir.

$$f'(t) = f'(0) \otimes f(t)$$

diferansiyel denkleminin çözümü

$$f(t) = \exp(tf'(0)) = e^{tA}, \quad A = f'(0)$$

olarak bellidir.

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \quad \text{dir.}$$

Bu işlemler tersine göz önüne alındığında

$f: R \rightarrow GL(n, R)$ homomorfizmi

$$f(t) = \exp(tf'(0))$$

ile verilmiş ise;

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp[(t + \Delta t) \cdot f'(0)] - \exp(tf'(0))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp(t \cdot f'(0) + \Delta t f'(0)) - \exp(tf'(0))}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp(t \cdot f'(0)) \cdot \exp(\Delta t f'(0)) - \exp(tf'(0))}{\Delta t} \\
&= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\exp(\Delta t f'(0)) - I}{\Delta t} \right) \cdot \exp(tf'(0)) \\
&= \left(\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{I + tf'(0) \frac{(\Delta t)^2}{2!} \cdot (f'(0))^2 + \dots - I}{\Delta t} \right) \cdot \exp(tf'(0)) \\
&= f'(0) \cdot \exp(tf'(0)) \\
&= f'(0) f(t)
\end{aligned}$$

bulunur.

$\exp$ dönüşümü $GL(n, R)$ Lie grubu üstünde, $e = I$ noktasındaki tanjant uzayın elemanlarını $GL(n, R)$ ye götüren bir dönüşüm olarak ifade edilebilir.

$x \in T_e GL(n, R)$ ise X bir diferensiyel denklem olarak ele alındığında çözümü $f(t)$ eğrisi olmak kaydıyla,

$$f(t) = \exp(tx)$$

yazılabilir. $\exp X = f(1)$

$$f(t) = \exp(tf'(0))$$

olduğundan

$$f(1) = \exp(1.X) = \exp x$$

olacaktır. Böylece

$$\exp x: T_e G \rightarrow G$$

$$X \rightarrow \exp x, \ni$$

$$\exp x = f(1)$$

olarak verilir. $\exp x$ dönüşümü her hangi bir Lie grubu üzerinde düşünülürse;

G bir Lie grubu, LG G nin Lie cebiri olsun

$$\exp : LG \rightarrow G$$

$$x \rightarrow \exp x$$

$$\exp x = \phi(1)$$

olarak belirli dönüşüme G Lie grubu üstündeki üstel dönüşüm denir. Buradaki ϕ , x ile belirli C^∞ -homomorfizmdir.

$$\left. \frac{d\phi}{dt} \right|_{t=0} = x$$

TEOREM : 1.7.1.

Herhangi bir G Lie grubu için

$$\exp : T_e G \rightarrow G$$

dönüşümlü C^∞ dur ve

$$\phi(t) = \exp tx$$

G nin $\phi'(d) = x$ olan tek türlü belirli bir

1-parametrelili altgrubudur(4).

İSPAT :

Her $\phi: \mathbb{R} \rightarrow G$ homomorfizmi, tek türlü belirli bir

$$f: \mathbb{R} \times \{x\} \rightarrow G$$

$$(t, x) \rightarrow f(t, x) = \phi(t), \quad x = \phi'(0)$$

dönüşümü tanımlar. $f(t) = \exp(tf'(0))$ ile tanımlı olan homomorfizim bu notasyonlarla

$$\phi(t) = e^{tx}$$

şeklinde yazılabilir

$$\phi: \mathbb{R} \rightarrow G$$

$$t \rightarrow \exp tX$$

olarak belirli dönüşüm C^∞ dur dolayısıyla $\exp$ dönüşümü C^∞ dur.

TEOREM :1.7.2.

$\exp$ dönüşümü $T_e G$ den G ye C^∞ dur ve $0 \in T_e G$ nun bir V_0 komşuluğunu $e \in G$ nin bir V_e komşuluğuna difeomorfik olarak dönüştürür (4).

TANIM :1.7.1.

$A, n \times n$ boyutlu reel matris ise

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \text{ dir.}$$

Burada

$$A^2 = A.A \text{ matris çarpımıdır (5)}$$

TEOREM : 1.7.3.

Herbir nxn boyutlu A matrisi için yazılan

$$I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

dizisi yakınsaktır (5).

TEOREM : 1.7.4.

A ve B matrisleri için

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B$$

dir.

İSPAT :

$$e^{A+B} = I + A + B + \frac{A^2}{2} + AB + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \dots$$

$$e^A \cdot e^B = (I + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \dots) \cdot (I + B + \frac{B^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \dots)$$

$$= I + A + B + \frac{A^2}{2} + A \cdot B + \frac{B^2}{2} + \frac{A^3}{6} + \frac{A^2B}{2} + \frac{AB^2}{2} + \frac{B^3}{6} + \dots$$

SONUÇ : 1.7.1.

Herbir reel nxn boyutlu A matris için, e^A singüler değildir (5).

İSPAT :

$$I = e^0 = e^{A-A} = e^A \cdot e^{-A} \text{ ve}$$

$$\det I = \det(e^A \cdot e^{-A})$$

$$1 = \det(e^A) \cdot \det(e^{-A})$$

olduğundan; $\det e^A \neq 0$ dır.

TEOREM : 1.7.5.

A anti-simetrik matris ise e^A ortogonaldır.

İSPAT :

$I = e^0 = e^{A+A^t} = e^A \cdot e^{A^t} = (e^A)^t \cdot e^A$ olduğundan e^A bir ortogonaldır (5).

UYARI : 1.7.1.

- 1) Bazı anti-simetrik olmayan matrisler yardımıyla yazılan e^A matrisi de ortogonaldır.
- 2) e^A matrisinin ortogonal olması her zaman A'nın anti-simetrik olmasını gerektirmez (5).

ÖRNEK : 1.7.1.

2x2 tipinden bir anti-simetrik matrisi için e^A 'nın hesabı.

ÇÖZÜM :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & x \\ -x & 0 \end{vmatrix}, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ matrisi göz önüne alınırsa}$$

$$A^2 = \begin{vmatrix} -x^2 & 0 \\ 0 & -x^2 \end{vmatrix}$$

$$A^3 = \begin{vmatrix} 0 & -x^3 \\ x^3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$A^4 = \begin{vmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & x^4 \end{vmatrix}$$

$$\alpha^5 = \begin{vmatrix} 0 & x^5 \\ -x^5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$e^{\alpha} = I + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \dots$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{-x^2}{2!} & 0 \\ 0 & \frac{-x^2}{2!} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{-x^3}{3!} \\ \frac{x^3}{3!} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^4 & 0 \\ 0 & \frac{-x^4}{4!} \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 0 & \frac{x^5}{5!} \\ \frac{-x^5}{5!} & 0 \end{vmatrix} + \dots$$

$$= \begin{vmatrix} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots & x - \frac{x^3}{3!} + \dots \\ -x + \frac{x^3}{3!} + \dots & 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}$$

1.8. KILLING BİLİNEER FORMU

TANIM : 1.8.1.

G bir Lie grubu olsun. $\forall g \in G$ için Intg dönüşümüIntg: $G \rightarrow G$

$$x \rightarrow \text{Intg}(x) = gxg^{-1}, \forall x \in G$$

olarak tanımlanır (6).

ÖZELLİK: 1.8.1.

Intg bir C^∞ Lie grup homomorfizmi'dir.

(Intg)* bir lineer izomorfizmdir;

 $e \in G$ birim eleman olmak üzere;

$$(\text{Intg})(e) = geg^{-1} = gg^{-1} = e$$

Böylece,

$$(\text{Intg})_* \Big|_e : T_e G \rightarrow T_e G$$

dönüşümü tanımlıdır. Intg diffeomorfizm olduğundan, $(\text{Intg})_*$ bir lineer izomorfizmdir.

$(\text{Intg})_* \Big|_e$ yerine adg notasyonu kullanılacaktır. O zaman

$$\text{adg} : T_e G \xrightarrow{\text{lineer}} T_e G$$

$$\text{adg} = (L_g \circ R_g^{-1})_* \Big|_e$$

dir.

TANIM : 1.8.2.

$$\text{ad}: G \rightarrow L(T_e G), g \rightarrow \text{ad}g$$

$\text{ad}g: L \rightarrow L$ şeklinde belirli olan ad dönüşümü ne G Lie grubunun adjoint (ek) gösterimi denir(6).

TEOREM : 1.8.1.

Ad dönüşümü için aşağıdaki önermeler doğrudur(6).

$$1) \text{ad}(g.h) = \text{ad}g.\text{adh}, \forall g, h \in G$$

$$2) \text{ad}[X, Y] = [\text{ad}X, \text{ad}Y], \forall X, Y \in LG$$

TANIM : 1.8.3.

Bir V vektör uzayının regüler, lineer dönüşümlerinin bir altgrubu G olsun. Yani her $g \in G$ için

$$g: V \rightarrow V$$

V üzerinde verilen simetrik bir bilinear form B ile verilsin.

$$\forall g \in G, \forall u, v \in V \text{ için}$$

$$B(u, v) = B(g(u), g(v))$$

eşitliği doğru ise B ye G altında invaryanttır denir(6).

TANIM : 1.8.4.

G Lie grubu, LG G nin Lie cebiri olsun. LG üzerindeki bir B simetrik bilinear formu $\text{ad}G$ altında invaryant ise B G altında invaryanttır denir(6).

TANIM : 1.8.5.

L bir Lie cebiri olsun. $X \in L$ belli bir eleman olmak

üzere: $\text{Ad}X$ dönüşümü

$$\text{Ad}X: L \rightarrow L$$

$$Y \rightarrow \text{Ad}X(Y) = [Y, X] \quad \text{olarak tanımlanır.}$$

$$K(X, Y) = \text{Tr}(\text{Ad}X \cdot \text{Ad}Y)$$

olarak tanımlı forma L üzerinde tanımlı bilinear formu denir (6).

TEOREM : 1.8.2.

$K(X, Y)$ simetrik bilinear formdur. LG üzerinde tanımlı K Killing formu $\text{ad}G$ altında invarianttır(6).

BÖLÜM 2

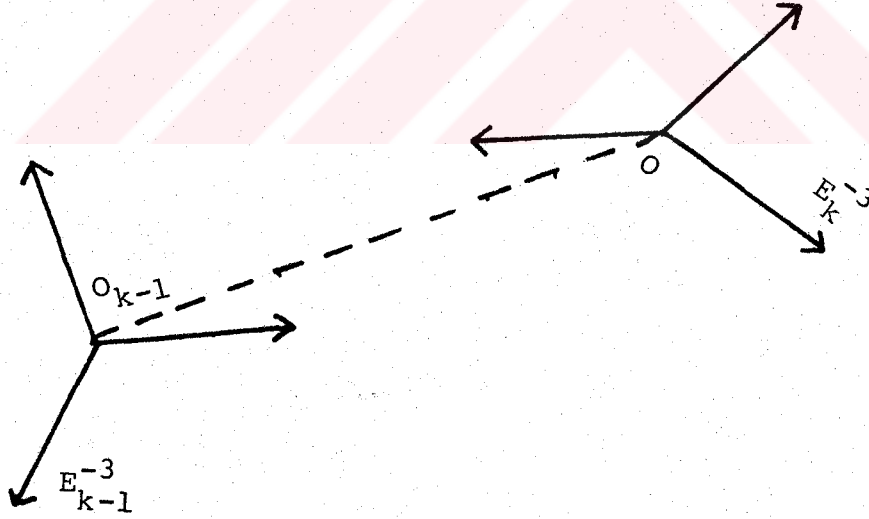
ROBOT MANİPULATOR VE HAREKET DENKLEMLERİ

2.1. Ön bilgiler ve Temel tanımlar:

E_0^3 sabit uzay olmak üzere E_1^{-3} hareketli uzay, E_1^{-3} ye göre hareketli olan üçüncü uzay E_2^{-3} olsun. Ardışık olarak p-yinci hareketli uzay E_p^{-3} ile gösterilir. Böylece,

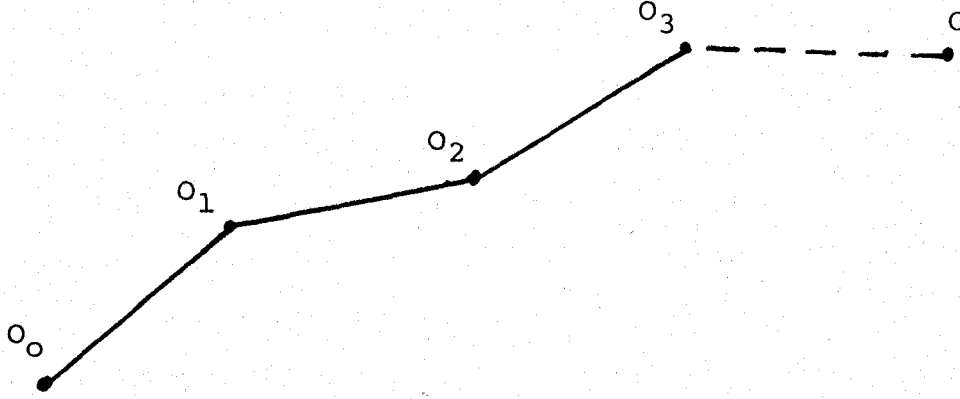
$$E_0^3, E_1^{-3}, E_2^{-3}, \dots, E_p^{-3}$$

uzayları herbiri bir öncekine göre hareketli olan uzaylar ailesidir. E_k^{-3}, E_{k-1}^{-3} e göre öteleme ve dönme hareketi yapabilir.



Şekil 2.1. E_k^{-3} ün E_{k-1}^{-3} e göre hareketi

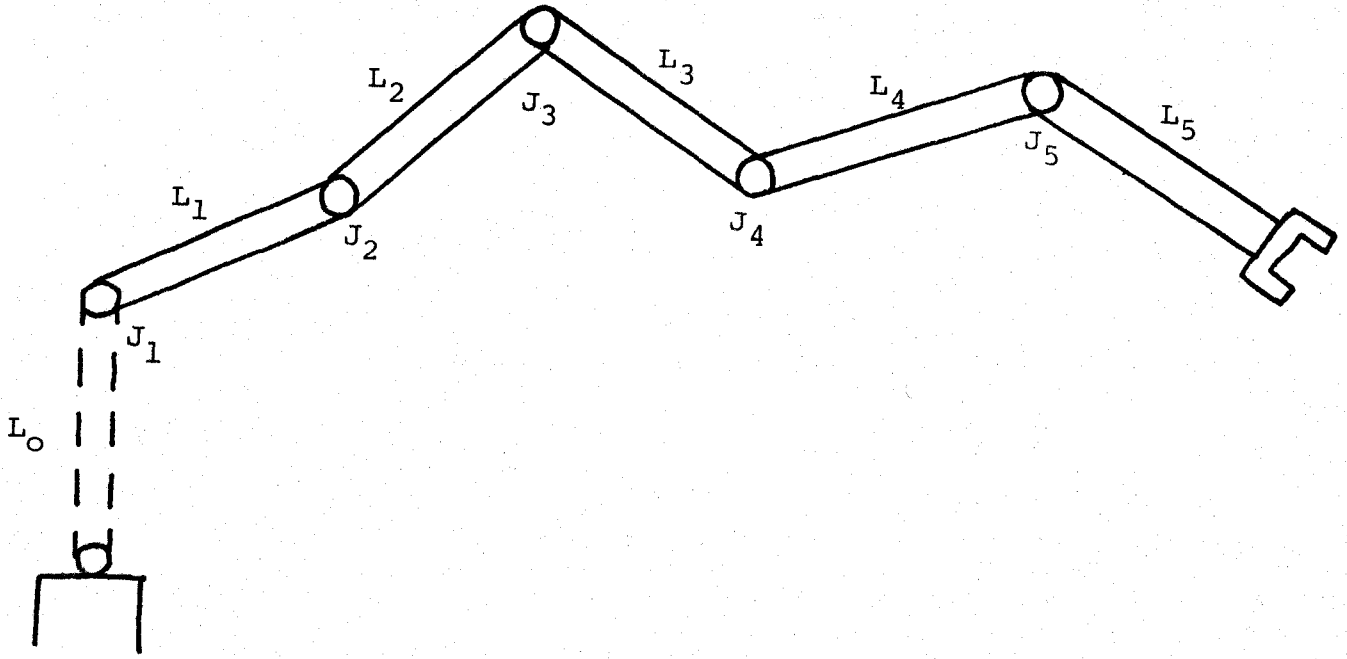
Yalnızca dönme merkezleri ele alındığında şekil aşağıdaki gibidir.



Şekil 2.2. Hareketli uzayların dönme merkezi

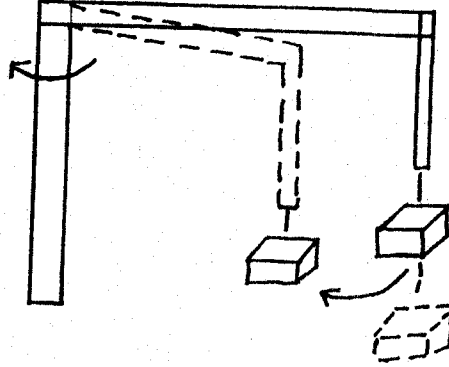
TANIM : 2.1.1.

$E_0^{-3}, E_1^{-3}, \dots, E_p^{-3}$ uzaylarının orijinleri her bir orijin bir öncekine göre sabit uzaklıkta olduğu durumu ele alalım. Bu sabitleştirme işi bir mekanik aksamla yapılsın. Bu mekanik aksamlara link ve orijin noktalarına da joint adı verilecektir. Link ve jointlerin birlikte ele alındığı mekanik sisteme robot manipulator adı verilir. Link sayısı robot manipulatörün parametre sayısı olarak adlandırılacaktır. O_0 ve E_0^3 temel link, O_p, E_p^{-3} de son link olarak isimlendirilir (7). Basit bir robot manipulator şöyle çizilebilir.



Şekil 2.3. Bir robot manipulator

Herbir L_k linki J_k jointini dönme merkezi kabul eden bir dönme yapar. L_p son linkinin uç noktası robotun uç noktası veya effector olarak adlandırılacaktır. Robot manipulatorün bütün olarak hareketi effectorun etki ettiği E^3 e ait bir katı cisme, E^{-3} hareketli uzayında bir hareket verir. Bu hareket dönme, öteleme veya ötelemeli dönme olabilir.



Şekil 2.4.

p-parametrik bir robotun incelenmesi her bir hareketli uzaydaki çatıların hareketi olarak incelenmesiyle yapılabilir. Çatı, J_k ve L_k ya bağlı olarak inşa edilir. Robot manipulator teorisindeki iki link arasındaki açı, bir linkin uzunluğu ve joint eksen tanımları şöyledir.

TANIM : 2.1.2.

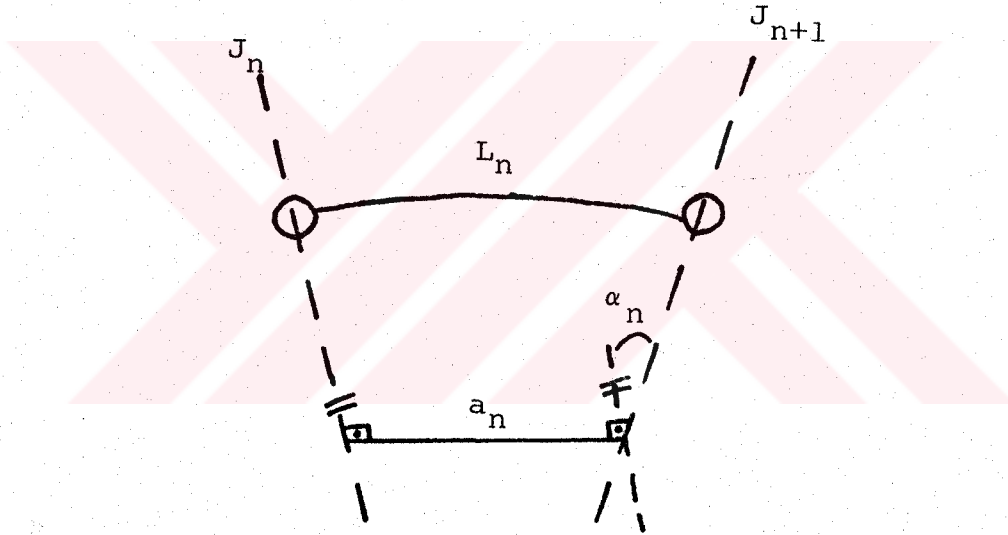
İki linkin birleşme jointinde iki link yardımıyla tanımlı düzlemin düzlem normali ilgili jointin ekseninin doğrultusu olarak tanımlanır. Joint noktasında noktanın bir komşuluğunda her bir linke eşlik eden doğrular düzlemin jeneratörleri olarak seçilir. Mekanik olarak jointler genellikle silindirik veya dikdörtgen prizma şeklinde olduğundan silindirik eksen veya dikdörtgen prizmanın köşegenlerinin kesim noktasıyla belirli eksen joint eksenidir(7).

TANIM : 2.1.3.

Ardışık iki jointin eksenleri arasındaki ortak dikme uzunluğuna linkin boyu denir ve n-inci linkin boyu a_n ile gösterilir (7).

TANIM : 2.1.4.

a_n 'e dik düzlemde eksenler arasındaki açı α_n ile gösterilir, n-inci linkin büküm açısı olarak adlandırılır(7).

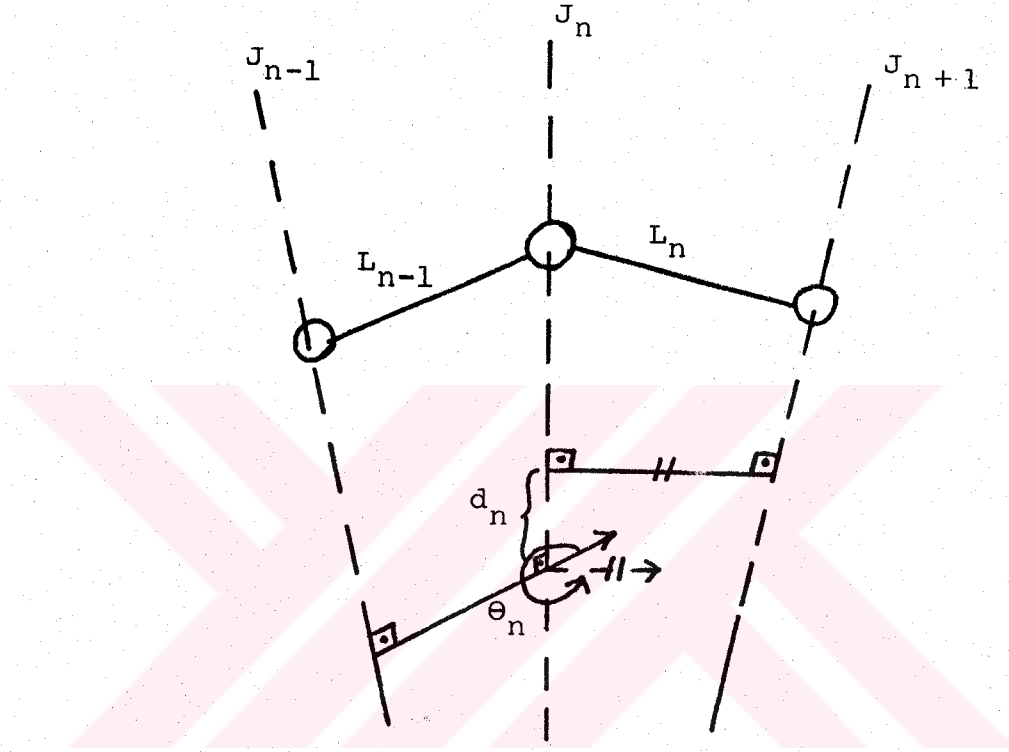


Şekil 2.5. Bir Linkin boyu ve linkler arasındaki açı

TANIM : 2.1.5.

Herbir link için bir tane olmak üzere her eksen iki normale sahiptir. Böyle bağlantılı iki linkin izafi (görelî) pozisyonu, J_n eksenî boyunca normaller arasındaki uzaklık d_n ve eksene dik düzlemde normaller

arasındaki açı θ_n dir. d_n linkler arasındaki uzaklık, θ_n linkler arasındaki açı olarak isimlendirilir(7).

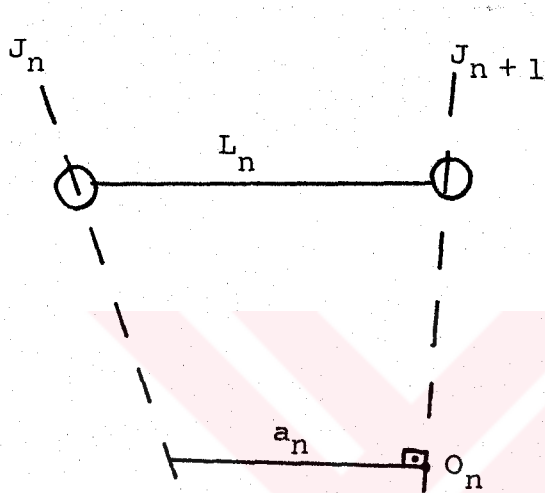


Şekil 2.6. Linkler arasındaki uzaklık ve açı

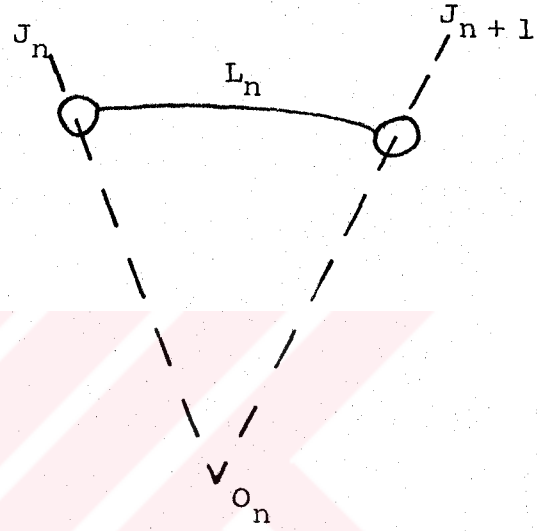
Bir robot manipulator için θ_n ve d_n karakterize edici parametrelerdir. θ_n ve d_n , veya d_n in sabit olması dolayısıyla parametre olma özelliğinin kalkması değişik manipulator isimlendirmelere yol açar.

Linkler arasındaki ilgiyi tanımlamak için her bir linke bir koordinat çatısı karşı getireceğiz. Öncelikle

revolute jointleri ele alınacak. Revolute jointler θ_n büküm açısının parametre olduğu jointlerdir. L_n nin koordinat çatısının orijini J_n ve J_{n+1} in eksenleri arasındaki ortak normalin J_{n+1} 'i kestiği noktada kurulur (Şekil 2.7.a)



Şekil 2.7.a.



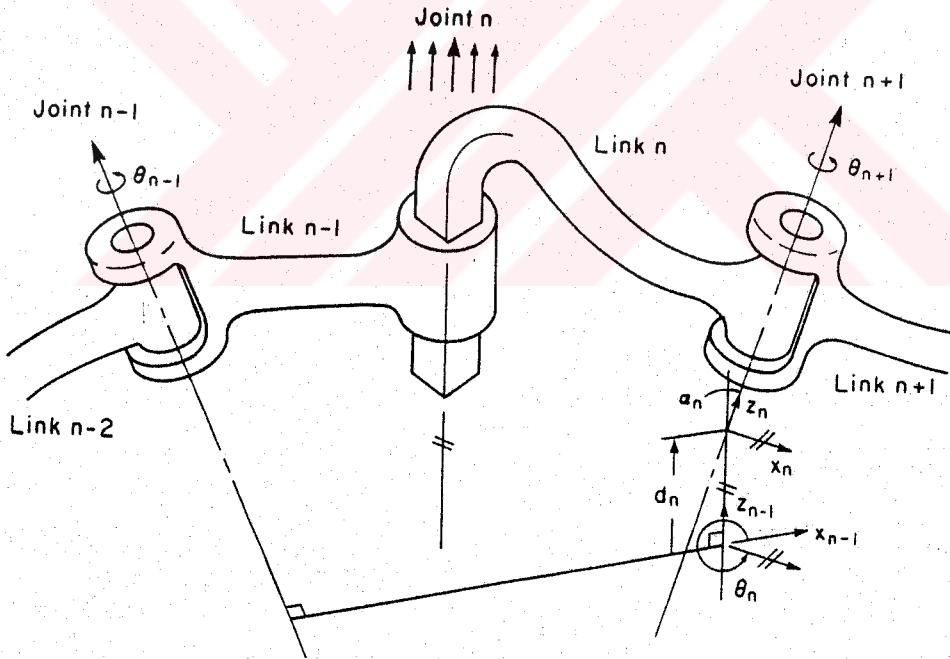
Şekil 2.7.b.

Joint eksenlerinin kesişmesi durumunda orijin, joint eksenlerin kesim noktasında kurulur (Şekil 2.7.b)

Eksenler paralel ise orijin, orijini belli olan sonraki link için joint uzaklığını sıfır yapacak biçimde seçilir. Çatının Z eksenini J_{n+1} eksenine verilecektir. X eksenini, J_n ve J_{n+1} inci joint eksenlerinin ortak dikmesi boyunca ve J_n den J_{n+1} doğrultusunda belirlenir. Kesişen joint eksenleri durumunda X'in doğrultusu $Z_{n-1} \times Z_n$ çarpım vektörüne paraleldir veya paralel değildir. Dikkat edilirse bu şart J_n ve J_{n+1} eksenleri arasındaki normal boyunca

doğrultuya sahip X eksenini içinde geçerlidir. X_n ve X_{n-1} paralel ve aynı doğrultuda ise n-inci revolute joint için θ_n sıfırdır.

d_n uzaklığının joint değişkeni olduğu jointlere prizmatik joint denir. Bu durumda θ_n açıları sabittir. Joint ekseninin doğrultusu jointin hareket ettiği doğrultudur. Eksenin doğrultusu tanımlıdır ancak uzayda pozisyonu tanımlı değildir. Bu durum revolute joint den farklılık gösterir.



Şekil 2.8.

Prizmatik joint durumunda a_n uzunluğunun bir önemi yoktur ve sıfır olarak alınır. Bir prizmatik jointin koordinat çatısının orijini bir sonraki tanımlı linkin orijiniyle aynıdır. Prizmatik linkin Z eksenini $(n + 1)$ inci joint ekseniniyle bellidir. X_n eksenini prizmatik jointin doğrultusu ve Z_n nin vektörel çarpımına paralel veya paralel değildir. Bir prizmatik joint için $d_n = 0$ olduğunda sıfır pozisyonu tanımlanır.

Bir manipölör sıfır pozisyonundaki durumuyla, revolute jointler için dönme yönü veya prizmatik jointler için öteleme doğrultusu tanımlanabilir ve Z eksenlerinin yönü tanımlanır.

Temel linkin orijini L_1 in orijiniyle aynı olacaktır. Eğer farklı referans koordinat sistemi tanımlamak arzu edilirse o zaman referans ve temel koordinat sistemleri arasındaki ilgi belirli bir homogen transformasyonla tarif edilebilir. Manipölörün ucunda d_6 sonuç dispi veya θ_6 dönmesi Z_6 ya bağlı olarak çıkar. L_6 için koordinat sisteminin orijini L_5 in koordinat sistemiyle aynı olarak seçilir. Bir alet (veya effector) orijini ve eksenleri L_6 nın koordinat sistemiyle çakışmıyacak şekilde kullanılırsa alet belirli bir homogen transformasyonla L_6 ya irtibatlandırılabilir. Önceki plana bağlı olarak bütün linklere koordinat çatıları karşı tutarak ardışık çatılar arasındaki ilgiyi aşağıdaki dönme veya ötelemelerle inşa edebiliriz.

Z_{n-1} eksenini etrafında dönme, dönme açısı θ_n

Z_{n-1} eksenini boyunca öteleme, öteleme miktarı d_n

Dönmüş $X_{n-1} = X_n$ boyunca öteleme, öteleme miktarı a_n

X_n etrafında dönme, büküm açısı α_n .

Bu L_n nin koordinat çatısını L_{n-1} in koordinat çatısına bağlayan dört homogen transformasyonun çarpımı olarak belirlenebilir. Böylece ilgili A_n matrisleri notasyonel olarak,

$$A_n = \text{Rot}(Z, \theta) \cdot \text{Trans}(0, 0, d) \cdot \text{Trans}(a, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, \alpha) \quad (2.1.1)$$

dir. Matrisler cinsinden

$$A_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \cdot \cos\alpha & \sin\theta \cdot \sin\alpha & a \cos\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \cdot \cos\alpha & -\cos\theta \cdot \sin\alpha & a \sin\theta \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (2.1.2)$$

olarak verilebilir.

Bir robot manipulatörü tanımlamak için her bir link ve jointe ait değişkenleri vermek yeterlidir. Şimdi bilinen iki robot manipulatörü ilgili parametreleriyle vereceğiz. Bunlar Stanford ve Elbow manipulatör olarak adlandırılacaktır.

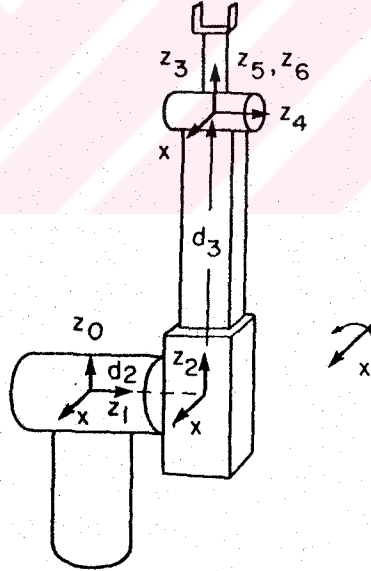
2.2. STANFORD MANİPULATÖRÜ

TANIM : 2.2.1.

Linklerine ait parametreleri aşağıdaki tabloda verilen manipulatöre stanford manipulatörü denir(7).

Link	Parametre	α	a	d	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
1	θ_1	-90°	0	0	0	-1
2	θ_2	90°	0	d_2	0	1
3	d_3	0°	0	d_3	1	0
4	θ_4	-90°	0	0	0	-1
5	θ_5	90°	0	0	0	1
6	θ_6	0°	0	0	1	0

Tablo 2.2.1.



Şekil 2.9.

Şimdi stanford manipulatörünün dönüşüm matrislerini hesaplayalım. 2.1.2. eşitliğindeki A_n matrisi için Tablo 2.2.1 deki değerler yerine yazılırsa;

$$A_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & -S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & C_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} C_2 & 0 & S_2 & 0 \\ S_2 & 0 & -C_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & 0 \\ S_4 & 0 & C_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Bu transformasyon matrislerinin yardımıyla stanford manipulatörün oryantasyon ve pozisyonu şöyle ifade edilebilir. Matris çarpımlarında kısalık amacıyla açılardan sinüs ve cosinüsü yerine S ve C harfleri kullanılmıştır.

$${}^S T_6 = A_6$$

$${}^4 T_6 = A_5 \cdot A_6$$

$${}^3 T_6 = A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$$

$${}^2 T_6 = A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$$

$${}^1 T_6 = A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5$$

$${}^0 T_6 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$$

$${}^5 T_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4 T_6 = \begin{bmatrix} C_5 C_6 & -C_5 S_6 & S_5 & 0 \\ S_5 C_6 & -S_5 S_6 & -C_5 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3 T_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & 0 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & 0 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2 T_6 = \begin{bmatrix} C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6 & -C_4 C_5 S_6 - S_4 C_6 & C_4 S_5 & 0 \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & S_4 S_5 & 0 \\ -S_5 C_6 & S_5 S_6 & C_5 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1 T_6 = \begin{bmatrix} C_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6 & -C_2(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_2 S_5 S_6 & & \\ S_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) + C_2 S_5 C_6 & -S_2(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) - C_2 S_5 S_6 & & \\ S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6 & -S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6 & & \\ 0 & 0 & & \\ & C_2 C_4 S_5 + S_2 C_5 & S_2 d_3 & \\ & S_2 C_4 S_5 - C_2 C_5 & -C_2 d_3 & \\ & S_4 S_5 & d_2 & \\ & 0 & 1 & \end{bmatrix}$$

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

$$\begin{aligned} n_x &= C_1[C_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6] - S_1(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ n_y &= S_1[C_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - S_2 S_5 C_6] + C_1(S_4 C_5 C_6 + C_4 S_6) \\ n_z &= -S_2(C_4 C_5 C_6 - S_4 S_6) - C_2 S_5 C_6 \\ o_x &= C_1[-C_2(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_2 S_5 S_6] - S_1(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \\ o_y &= S_1[-C_2(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + S_2 S_5 S_6] + C_1(-S_4 C_5 S_6 + C_4 C_6) \\ o_z &= S_2(C_4 C_5 S_6 + S_4 C_6) + C_2 S_5 S_6 \\ a_x &= C_1(C_2 C_4 S_5 + S_2 C_5) - S_1 S_4 S_5 \\ a_y &= S_1(C_2 C_4 S_5 + S_2 C_5) + C_1 S_4 S_5 \\ a_z &= -S_2 C_4 S_5 + C_2 C_5 \\ p_x &= C_1 S_2 d_3 - S_1 d_2 \\ p_y &= S_1 S_2 d_3 + C_1 d_2 \\ p_z &= C_2 d_3 \end{aligned}$$

dir.

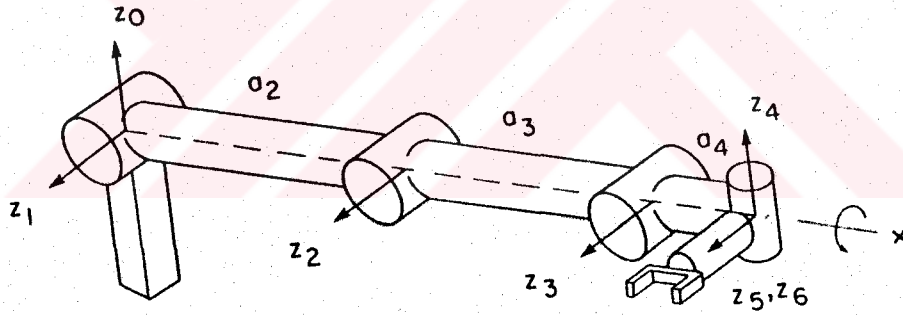
2.3. ELBOW MANİPULATÖRÜ

TANIM : 2.3.1.

Linklerine ait parametreleri aşağıdaki tabloda verilen manipulatöre Elbow manipulatörü denir (7).

Link	Parametre	α	a	d	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
1	θ_1	90°	0	0	0	1
2	θ_2	0°	a_2	0	1	0
3	θ_3	0°	a_3	0	1	0
4	θ_4	-90°	a_4	0	0	-1
5	θ_5	90°	0	0	0	1
6	θ_6	0°	0	0	1	0

Tablo 2.3.1.



Şekil 2.10.

Şimdi Elbow manipulatörünün dönüşüm matrislerini hesaplayalım. 2.1.2 eşitliğindeki A_n matrisi için Tablo 2.3.1 deki değerler yerine yazılırsa;

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & S_1 & 0 \\ S_1 & 0 & -C_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_2 = \begin{bmatrix} C_2 & -S_2 & 0 & C_2 a_2 \\ S_2 & C_2 & 0 & S_2 a_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_3 = \begin{bmatrix} C_3 & -S_3 & 0 & C_3 a_3 \\ S_3 & C_3 & 0 & S_3 a_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_4 = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & -S_4 & C_4 a_4 \\ S_4 & 0 & C_4 & S_4 a_4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_5 = \begin{bmatrix} C_5 & 0 & S_5 & 0 \\ S_5 & 0 & -C_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Yukardaki transformasyonlar yardımıyla Elbow manipulatorün oryantasyon ve pozisyonu şöyle ifade edilebilir. Kısalık için;

$$\theta_{23} = \theta_2 + \theta_3$$

$$\theta_{234} = \theta_{23} + \theta_4$$

$$\cos \theta_i = C_i, \sin \theta_i = S_i$$

notasyonları kullanılacaktır. İlgili matrisler;

$${}^5T_6 = \begin{bmatrix} C_6 & -S_6 & 0 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^4T_6 = \begin{bmatrix} C_5C_6 & -C_5S_6 & S_5 & 0 \\ S_5C_6 & -S_5S_6 & -C_5 & 0 \\ S_6 & C_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^3T_6 = \begin{bmatrix} C_4C_5C_6 - S_4S_6 & -C_4C_5S_6 - S_4C_6 & C_4S_5 & C_4a_4 \\ S_4C_5C_6 + C_4S_6 & -S_4C_5S_6 + C_4C_6 & S_4S_5 & S_4a_4 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_6 = \begin{bmatrix} C_{34}C_5C_6 - S_{34}S_6 & -C_{34}C_5S_6 - S_{34}C_6 & C_{34}S_5 & C_{34}a_4 + C_3a_3 \\ S_{34}C_5C_6 + C_{34}S_6 & -S_{34}C_5S_6 + C_{34}C_6 & S_{34}S_5 & S_{34}a_4 + S_3a_3 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1T_6 = \begin{bmatrix} C_{234}C_5C_6 - S_{234}S_6 & -C_{234}C_5S_6 - S_{234}C_6 & C_{234}S_5 & C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2 \\ S_{234}C_5C_6 + C_{234}S_6 & -S_{234}C_5S_6 + C_{234}C_6 & S_{234}S_5 & S_{234}a_4 + S_{23}a_3 + S_2a_2 \\ -S_5C_6 & S_5S_6 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_6 = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Burada;

$$O_x = -C_1 [C_{234}C_5S_6 + S_{234}C_6] + S_1S_5S_6$$

$$O_y = -S_1 [C_{234}C_5S_6 + S_{234}C_6] - C_1S_5S_6$$

$$O_z = -S_{234}C_5S_6 + C_{234}C_6$$

$$a_x = C_1C_{234}S_5 + S_1C_5$$

$$a_y = S_1C_{234}S_5 - C_1C_5$$

$$a_z = S_{234}S_5$$

$$P_x = C_1 [C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2]$$

$$P_y = S_1 [C_{234}a_4 + C_{23}a_3 + C_2a_2]$$

$$P_z = S_{234}a_4 + C_{23}a_3 + S_2a_2$$

dir.

BÖLÜM 3

ROBOT MANİPULATÖRLERİN HAREKET GEOMETRİSİ

3.1. GENEL BİLGİLER

Bir robot manipulatörle linklerin veya kolların sistemi anlaşılır. Link veya kollar herbiri diğerine bağlı olarak dönme veya öteleme yapabilir ve herhangi bir linkin hareketi geride kalanlarıkinden bağımsızdır. Bir sistemdeki hareketli linklerin sayısı robotun serbestlik derecesi olarak tanımlanır. P tane linke sahip bir robot manipulator basitlik olsun diye p-parametrelili robot olarak isimlendirilir. Robotun son linki effector olarak adlandırılır. Bir robot, hareket eden aksamaların bir kolleksiyonu olup son link (effector) robotun dışındaki bir katı cisme bir hareket vericidir. Etki altındaki katı cismin hareketiyle effectorün hareketi robotun bazına göre aynıdır. Bu gerekçeyle effectorün, robotun bazına göre hareket ve pozisyonu ile ilgilenilecektir. Robotun bazı ile irtibatlı olan uzaya sabit uzay, effectörle irtibatlı öklid uzayına da hareketli uzay adı verilir ve sırasıyla E^3 ve $\bar{E}^3$ ile gösterilir. Her iki uzayda aynı yönlendirmeye sahiptir.

Robotun linkleri herbiri diğerinden bağımsız olarak hareket edebilir ve effectorün muhtemel bütün pozisyonları p-parametreye bağlıdır (p-parametrelili bir robot söz konusu iken)

E^{-3} nin E^3 e bağılı bütün pozisyonların cümlesi A olsun.

$$A = \{ x \mid x \in E^{-3} \text{ nin } E^3 \text{ e göre bir pozisyonu} \}$$

$$X = (t, \gamma)$$

olmak üzere $A \cong R^3 \times O(3) \subset R^6$ dir ve A bir manifold yapısına sahiptir. Effectorün bütün pozisyonlarının cümlesi A nın bir alt cümlesidir. Robot manipulatörün aktüel hareketi zamana bağılıdır. Dolayısıyla öklid uzayında 1-parametrelili harekettir. Aktüel hareket effectorün bütün pozisyonlarının altcümlesi üzerinde bir eğridir.

$$E^{-3} \text{ ve } E^3 \text{ uzaylarında } \bar{R}_0 = \{ \bar{0}, \bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3 \} \text{ ve}$$

$R_0 = \{ 0, f_1, f_2, f_3 \}$ ortonormal çatılarını seçelim. Eğer $\bar{R}_0$, R_0 ra bağılı P değişkenli bir fonksiyon olarak verilirse öklid uzayında p-parametrik hareket verilmiş olur. Bu ilgi

$$\bar{R}_0(v_i) = R_0 \cdot g(v_i)$$

olarak yazılabilir. Burada v_i , $i = 1, \dots, p$ parametrelerdir.

$g(v_i) \in C_6$ Lie grubunun bir elemanıdır (Örnek 1.3.5)

$$g(v_i) \text{ matrisleri } g(v_i) = \begin{vmatrix} \gamma(v_i) & t(v_i) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

şeklindedir ve $t \in R_1^3$, $\gamma \in SO(3)$.

E^{-3} den E^3 'e olan bütün kongrüansların cümlesi
 $P = C_6 \times C_6 / \text{Diag}(C_6 \times C_6)$ homogen uzayıyla özdeştir. $e \in C_6$
 nın izotropy grubu

$$\text{diag}(C_6 \times C_6) = \{(g, g) \mid g \in C_6\}$$

olmak üzere $(\text{diag}(C_6 \times C_6), 0)$ Lie grubudur.

C_6 nın Lie cebirini LC_6 ile gösterelim. LC_6 ,

$$\{ X = \begin{vmatrix} Y & Z \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \mid Y \in A_3, Z \in R_1^3 \}$$

matrislerinin Lie cebiridir ve Lie çarpımı

$$[X, Y] = X \cdot Y - Y \cdot X$$

şeklinde bellidir. Y anti-simetrik matrisi

$$Y = \begin{vmatrix} 0 & -Y_3 & Y_2 \\ Y_3 & 0 & -Y_1 \\ -Y_2 & Y_1 & 0 \end{vmatrix}$$

formunda olup $y = (y_1, y_2, y_3)^T$ vektörü ile tek türlü olarak
 bellidir. A_3 anti-simetrik matrisler cümlesindeki matrisle-
 rin çarpım işlemine göre verilen

$$[Y_1, Y_2] = Y_1 \cdot Y_2 - Y_2 \cdot Y_1$$

Lie çarpımı ile oluşan $(A_3, [,]) \text{ Lie cebiri,}$

$$A_3 \sim R_1^3$$

eşlemesiyle R^3 uzayındaki vektörel çarpım $\times$ olmak üzere

$$[y_1, y_2] = y_1 \times y_2 - y_2 \times y_1$$

çarpımı ile elde edilen (R_3, x) Lie cebiri ile izomorftur. R^3 deki skaler çarpım $\langle, \rangle$ olsun. LC_6 nın herbir elemanı

$$X = (y; z)$$

şeklinde gösterilir.

TANIM : 3.1.1.

$\text{diag}(LC_6 \times LC_6)$ üzerinde tanımlı

$$K(X, X) = \langle Y, Y \rangle, \quad KL(X, X) = \langle Y, Z \rangle$$

invariant kuadratik formlarına sırasıyla Killing form ve Klein form denir (8).

Her bir $X \in LC_6$, $\exp tx$ ile belli olan bir 1-parametreli altgrup belirler. Bu 1-parametreli altgrup genelde

$$A = yxz + \lambda y$$

ekseni etrafındaki bir helis hareketidir.

TANIM : 3.1.2.

$KL(X, X)$ helis hareketinin açısal hızı ve $KL(X, X)/K(X, X)$ de helis hareketinin adımı olarak adlandırılır(8).

ÖZELLİK : 3.1.1.

$\exp(tx)$ 'in bir öteleme olması için gerek ve yeter şart $KL(X, X) = 0$ olmasıdır.

$\exp(tx)$ in bir dönme olması için gerek ve yeter şart $K(X, X) \neq 0$ ve $KL(X, X) = 0$ olmasıdır(8).

TANIM : 3.1.3.

$$g: R^p \rightarrow P$$

$$(v_1, \dots, v_p) \rightarrow g(v_1, \dots, v_p) = \exp(v_1 x_1) \dots \exp(v_p x_p)$$

$(x_i \in LC_6, x_i \neq 0)$ şeklinde tanımlı dönüşümüne E^3 de bir p-parametreli robot denir(8).

ÖRNEK : 3.1.1.

Bu örnekte X-ekseni etrafındaki θ derecelik bir dönmeyi $\exp(\theta x)$ cinsinden hesaplayacağız. X eksenini kabul ve notasyonlara göre $x = (e_1, 0)$ olarak yazılabilir. $e_1 = (1, 0, 0)$ ve $0 = (0, 0, 0)$ olup $e_1 = y$, $0 = z$ yerindedir. Gerçekten

$$e_1 x 0 + \lambda e_1 + \lambda e_1$$

olup λe_1 X-eksenini verir. Böylece $\exp(\theta x)$ 'in yazılımında $x \in LC_6$ nın matris formu

$$x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

şeklindedir. $\exp(\theta x)$ açık olarak hesaplanırsa;

$$x^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\exp(\theta x) = I + \theta x + \frac{\theta^2}{2!} x^2 + \frac{\theta^3}{3!} x^3 + \dots \quad (1)$$

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta & 0 \\ 0 & \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta^2}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\theta^2}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\theta^3}{3!} & 0 \\ 0 & -\frac{\theta^3}{3!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{\theta^2}{2!} & \dots & -\theta + \frac{\theta^3}{3!} & \dots & 0 \\ 0 & \theta - \frac{\theta^3}{3!} & \dots & 1 - \frac{\theta^2}{2!} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \dots (2)$$

elde edilir. $\cos\theta$, $\sin\theta$ fonksiyonlarının Maclaurin açılımları olan

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

eşitliklerinden dolayı (2) nolu matriste açılımlar yerine yazılırsa

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \dots (3)$$

elde edilir.

ÖRNEK : 3.1.2.

ÖRNEK III.1.5 i y-ekseni için ele alalım. y eksen

$$y = (0, 1, 0) \quad z = (0, 0, 0)$$

$$X = (Y; Z) = ((0, 1, 0); (0, 0, 0))$$

ile verilebilir. Böylece

$$x = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x^3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

matrisleri $\exp(\theta x)$ açılımında yerine yazılırsa;

$$\exp(\theta x) = I + \theta x + \frac{\theta^2}{2!} x^2 + \frac{\theta^3}{3!} x^3 + \dots$$

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{-\theta^2}{2!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\theta^2}{2!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{-\theta^3}{3!} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\theta^3}{3!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots & 0 & \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\theta + \frac{\theta^3}{3!} + \dots & 0 & 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Matris içindeki açılımlar $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ nın açılımları olduğundan bu değerleri yerine yazarsak

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

elde edilir.

: ÖRNEK : 3.1.3.

III.1.5. Z eksenine göre ele alınır

$$y = (0,0,1), \quad z = (0,0,0)$$

$$x = (y; z)$$

$$x = ((0,0,1); (0,0,0))$$

$$x = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x^2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x^3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\exp(\theta x) = I + \theta x + \frac{\theta^2}{2!}x^2 + \frac{\theta^3}{3!}x^3 + \dots$$

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{\theta^2}{2!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\theta^2}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{\theta^3}{3!} & 0 & 0 \\ -\frac{\theta^3}{3!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\theta^2}{2!} & \dots & -\theta - \frac{\theta^3}{3!} & \dots & 0 & 0 \\ \theta - \frac{\theta^3}{3!} & \dots & 1 - \frac{\theta^2}{2!} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & & 1 & 0 \\ 0 & & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\exp(\theta x) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

ÖRNEK : 3.1.4.

x, y, z eksenleri boyunca ötelemenin $\exp(tx)$ cinsinden karşılığı hesaplanacaktır. $\exp(tx)$ için x, y, z eksenleri etrafında sadece öteleme olması için

$$K(X, X) = \langle y, y \rangle = 0$$

olmalıdır. X eksenini LC_6 nın terimleri cinsinden

$$y = (0, 0, 0) \quad z = (1, 0, 0)$$

$$X = (y; z) = ((0, 0, 0); (1, 0, 0))$$

şeklinde verilebilir. $\exp(ax)$ in açılımı

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$X^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

matrislerin yerine yazılmasıyla

$$\exp(aX) = I + aX + \frac{a^2}{2!} X^2 + \frac{a^3}{3!} X^3 + \dots$$

$$\exp(aX) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\exp(aX) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Y eksenini LC_6 nın terimleri cinsinden

$$Y = (0,0,0) \quad Z = (0,1,0)$$

$$X = (Y; Z) = ((0,0,0); (0,1,0))$$

şeklinde verilebilir.

$\exp(bX)$ in açılımı

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$X^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

matrislerinin yerine konmasıyla

$$\exp(bX) = I + bX + \frac{b^2}{2!}X^2 + \frac{b^3}{3!}X^3 + \dots$$

$$\exp(bX) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\exp(bX) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

elde edilir.

Z eksenini LC_6 nın terimleri cinsinden

$$Y = (0, 0, 0) \quad Z = (0, 0, 1)$$

$$X = (y; z) = ((0, 0, 0); (0, 0, 1))$$

şeklinde verilebilir.

$\exp(dX)$ in açılımı

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$x^2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\exp(dX) = I + dX + \frac{d^2}{2!} X^2 + \frac{d^3}{3!} X^3 + \dots$$

$$\exp(dX) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \dots$$

$$\exp(dX) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot$$

elde edilir.

3.2. Stanford Manipulatörünün üstel dönüşüm yardımıyla yazılışı:

Stanford manipulatörü dönme eksenleri dönme açıları, öteleme miktarları ve öteleme doğrultuları belli iken tamamen belirlenmiş demektir. Böylece bir stanford manipulatör, üstel dönüşüm kullanılarak değişik bir biçimde ifade edilebilir. Bunun için öncelikle stanford manipulatördeki her bir adım için A_n matrislerini analiz edelim. Genel durumda:

$$A_n = \text{Rot}(Z, \theta) \cdot \text{Trans}(0, 0, d) \cdot \text{Trans}(a, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, \alpha) \text{ dir.}$$

Stanford manipulatör için II. bölümdeki bilgiler eşliğinde

$$A_1 = \text{Rot}(Z, \theta_1) \cdot \text{Rot}(X, -90)$$

$$A_2 = \text{Rot}(Z, \theta_2) \cdot \text{Trans}(0, 0, d_2) \cdot \text{Rot}(X, 90)$$

$$A_3 = \text{Trans}(0, 0, d_3)$$

$$A_4 = \text{Rot}(Z, \theta_4) \cdot \text{Rot}(X, -90)$$

$$A_5 = \text{Rot}(Z, \theta_5) \cdot \text{Rot}(X, 90)$$

$$A_6 = \text{Rot}(Z, \theta_6) \cdot \text{Rot}(X, 0)$$

yazılabilir. Şimdi A_1 lere karşı gelen üstel dönüşümleri hesaplıyalım.

$$I. \quad A_1 = \text{Rot}(Z, \theta_1) \cdot \text{Rot}(X, -90)$$

$\text{Rot}(Z, \theta_1)$ Z eksenini etrafında θ_1 derecelik bir dönmedir. z eksenini etrafında θ_1 derecelik dönme Örnek III.1.7 de hesaplanmış ve

$$Y = (0,0,1), \quad Z = (0,0,0)$$

$$X_1' = (Y; Z) = ((0,0,1); (0,0,0)) \text{ olmak üzere}$$

$$\exp(\theta, X_1')$$

şeklinde elde edilmişti.

$\text{Rot}(X, -90)$ eksenini etrafında dönmedir ve örnek

III.1.5 de X eksenini etrafında θ derecelik bir dönme

$$Y = (1,0,0) \quad Z = (0,0,0)$$

$$X_1^2 = (Y; Z) = ((1,0,0); (0,0,0))$$

olmak üzere

$$\exp(\theta, X_1^2)$$

elde edilir. Dönme açısı -90° olduğu için

$$\exp(-\frac{\pi}{2} X_1^2)$$

şeklinde yazılır. O halde stanford manipulatörde A_1 matrisinin yaptığı işi

$$A = \exp(\theta, X_1') \cdot \exp(-\frac{\pi}{2} X_1^2)$$

dönüşümü üstlenir.

II. $A_2 = \text{Rot}(Z, \theta_2) \cdot \text{Trans}(0,0,d_2) \cdot \text{Rot}(X, 90)$ idi. Üstel dönüşüm cinsinden, A_2 nin görevini üstlenen karşılığı

$$A_2 = \exp(\theta_2 X_2') \cdot \exp(d_2 X_2^2) \cdot \exp(\frac{\pi}{2} X_2^3)$$

olarak elde edilir. Burada

$$x_2^1 = ((0,0,1);(0,0,0)), x_2^2 = ((0,0,0);(0,0,1)),$$

$$x_2^3 = (1,0,0);(0,0,0))$$

dir.

III. $A_3 = \text{Trans}(0,0,d_3)$ için, üstel dönüşüm cinsinden

A_3 ün görevini üstlenen karşılığı

$$A_3 = \exp(d_3 X_3)$$

olarak elde edilir. Burada

$$X_3 = ((0,0,0);(0,0,1))$$

dir.

IV. $A_4 = \text{Rot}(Z, \theta_4) \cdot \text{Rot}(X, -90)$ için, üstel dönüşüm cinsinden

A_4 ün görevini üstlenen karşılığı

$$A_4 = \exp(\theta_4 X_4^1) \cdot \exp(-\frac{\pi}{2} X_4^2)$$

olarak elde edilir. Burada

$$x_4^1 = ((0,0,1);(0,0,0)), x_4^2 = ((0,0,0);(0,0,0))$$

dir.

V. $A_5 = \text{Rot}(Z, \theta_5) \cdot \text{Rot}(X, 90)$ için, üstel dönüşüm cinsinden

A_5 in görevini üstlenen karşılığı

$$A_5 = \exp(\theta_5 X_5^1) \cdot \exp(\frac{\pi}{2} X_5^2)$$

elde edilir. Burada

$$x_5^1 = ((0,0,1);(0,0,0)), x_5^2 = ((1,0,0);(0,0,0))$$

dir.

VI. $A_6 = \text{Rot}(Z, \theta_6) \cdot \text{Rot}(X, 0)$ için üstel dönüşüm cinsinden karşılığı

$$A_6 = \exp(\theta_6 X_6) \cdot I_4$$

olarak elde edilir. Burada

$$X_6^1 = ((0, 0, 1); (0, 0, 0))$$

dır.

Böylece Stanford manipulator için

$$T_6 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$$

şeklinde belirli olan denklem üstel dönüşüm cinsinden

$$\begin{aligned} T_6 = & \exp(\theta_1 X_1^1) \circ \exp(-\frac{\pi}{2} X_1^2) \circ \exp(\theta_2 X_2^1) \circ \exp(d_2 X_2^2) \circ \\ & \exp(d_3 X_3) \circ \exp(\theta_4 X_4^1) \circ \exp(-\frac{\pi}{2} X_4^2) \circ \exp(\theta_5 X_5^1) \circ \\ & \exp(\frac{\pi}{2} X_5^2) \circ \exp(\theta_6 X_6^1) \circ \exp(\frac{\pi}{2} X_2^3) \end{aligned}$$

şeklini alır. $\circ$ işlemi $\exp(\theta x)$ ler dönüşüm alındığı zaman fonksiyonların bileşke işlemidir, $\exp(\theta x)$ lere karşı gelen matrisler alındığında işlem matris çarpım işlemidir.

Şimdi yapılan hesaplamaların sağlamasını yapalım.

$\exp(\theta_1 X_1^1)$ lere karşı gelen matrislerin çarpımıyla A_1 matrisleri şöyle elde edilirler.

$$\begin{aligned} A_1 &= \exp(\theta_1 X_1^1) \cdot \exp(-\frac{\pi}{2} X_1^2) \\ &= (I + \theta_1 x + \frac{\theta_1^2}{2!} x^2 + \frac{\theta_1^3}{3!} x^3 + \dots) \cdot (I + \theta x + \frac{\theta^2}{2!} x^2 + \frac{\theta^3}{3!} x^3 + \dots) \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-\frac{\pi}{2}) & -\sin(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & \sin(-\frac{\pi}{2}) & \cos(-\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & 0 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & 0 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = \exp(\theta_2 x_2^1) \cdot \exp(d_2 x_2^2) \cdot \exp(\frac{\pi}{2} x_2^3)$$

$$= (I + \theta_2 x + \frac{\theta_2^2}{2!} x^2 + \frac{\theta_2^3}{3!} x^3 + \dots) (I + d_2 x + \frac{d_2^2}{2!} x^2 + \dots) \cdot (I + \theta x + \frac{\theta^2}{2!} x^2 + \frac{\theta^3}{3!} x^3 + \dots)$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_2 & 0 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & 0 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \exp(d_3 X_3)$$

$$= I + d_2 X + \frac{d_2^2}{2!} X^2 + \dots$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_4 = \exp(\theta_4 X_4^1) \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2} X_4^2\right)$$

$$= \left(I + \theta_4 X + \frac{\theta_4^2}{2!} X^2 + \frac{\theta_4^3}{3!} X^3 + \dots\right) \cdot \left(I + \theta X + \frac{\theta^2}{2!} X^2 + \frac{\theta^3}{3!} X^3 + \dots\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_4 & -\sin\theta_4 & 0 & 0 \\ \sin\theta_4 & \cos\theta_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_4 & 0 & -\sin\theta_4 & 0 \\ \sin\theta_4 & 0 & \cos\theta_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_5 = \exp(\theta_5 X_5^1) \cdot \exp\left(\frac{\pi}{2} X_5^2\right)$$

$$= \left(I + \theta_5 X + \frac{\theta_5^2}{2!} X^2 + \frac{\theta_5^3}{3!} X^3 + \dots\right) \cdot \left(I + \theta X + \frac{\theta^2}{2!} X^2 + \frac{\theta^3}{3!} X^3 + \dots\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_5 & -\sin\theta_5 & 0 & 0 \\ \sin\theta_5 & \cos\theta_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_5 & 0 & \sin\theta_5 & 0 \\ \sin\theta_5 & 0 & -\cos\theta_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_6 = \exp(\theta_6 x_6^1) \cdot I_4$$

$$= (I + \theta_6 x + \frac{\theta_6^2}{2!} x^2 + \frac{\theta_6^3}{3!} x^3 + \dots) \cdot I_4$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_6 & -\sin\theta_6 & 0 & 0 \\ \sin\theta_6 & \cos\theta_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Sonuç olarak elde edilen A_i , $1 \leq i \leq 6$, matrisleri 2. bölümde verilen matrislerdir.

3.3. ELBOW MANİPULATÖRÜN ÜSTEL DÖNÜŞÜM YARDIMIYLA YAZILIŞI :

Tanım 2.3.1 ve Tablo 2.3.1 den, Elbow manipulator için

$$A_n = \text{Rot}(Z, \theta) \cdot \text{Trans}(0, 0, d) \cdot \text{Trans}(0, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, \alpha)$$

olmak üzere

$$A_1 = \text{Rot}(Z, \theta_1) \cdot \text{Rot}(X, 90)$$

$$A_2 = \text{Rot}(Z, \theta_2) \cdot \text{Trnas}(a_2, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, 0)$$

$$A_3 = \text{Rot}(Z, \theta_3) \cdot \text{Trans}(a_3, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, 0)$$

$$A_4 = \text{Rot}(Z, \theta_4) \cdot \text{Trans}(a_4, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, -90)$$

$$A_5 = \text{Rot}(Z, \theta_5) \cdot \text{Rot}(X, 90)$$

$$A_6 = \text{Rot}(Z, \theta_6) \cdot \text{Rot}(X, 0)$$

yazılabilir. Şimdi A_1 lere karşı gelen üstel dönüşümleri hesaplayalım.

$$I. A_1 = \text{Rot}(Z, \theta_1) \cdot \text{Rot}(X, 90)$$

$\text{Rot}(Z, \theta_1)$ Z eksenini etrafında θ_1 derecelik bir döne-
medir. Z eksenini etrafındaki θ_1 derecelik dönme, Örnek III.

1.7 de hesaplanmış ve

$$y = (0, 0, 1) \quad Z = (0, 0, 0)$$

$$X_1^1 = (y; Z) = ((0, 0, 1); (0, 0, 0))$$

olmak üzere

$$\exp(\theta_1 X_1^1)$$

şeklinde elde edilmişti.

$\text{Rot}(X, 90)$ X eksenini etrafında dönmedir. Örnek III.1.5
de hesaplanmış ve

$$y = (1,0,0) \quad z = (0,0,0)$$

$$x_1^2 = (y; z) = ((1,0,0); (0,0,0))$$

olmak üzere

$$\exp\left(\frac{\pi}{2} x_1^2\right)$$

elde edilmişti. O halde Elbow manipulatörde A_1 matrisinin yaptığı işi

$$A = \exp(\theta_1 x_1^1) \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2} x_1^2\right)$$

dönüşümü üstlenir.

II. $A_2 = \text{Rot}(Z_1, \theta_2) \cdot \text{Trans}(a_2, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, 0)$ dir. A_2 nin görevini üstlenen üstel dönüşüm cinsinden karşılığı

$$A_2 = \exp(\theta_2 x_2^1) \cdot \exp(a_2 x_2^1)$$

elde edilir. Burada;

$$x_2^1 = ((0,0,1); (0,0,0)) \quad x_2^2 = ((0,0,0); (1,0,0)) \text{ dir.}$$

III. $A_3 = \text{Rot}(Z, \theta_3) \cdot \text{Trans}(a_3, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, 0)$ dir. A_3 ün görevini üstlenen üstel dönüşüm cinsinden karşılığı

$$A_3 = \exp(\theta_3 x_3^1) \cdot \exp(a_3 x_3^2)$$

elde edilir. Burada;

$$x_3^1 = ((0,0,1); (0,0,0)) \quad x_3^2 = ((0,0,0); (1,0,0)) \text{ dir.}$$

IV. $A_4 = \text{Rot}(Z, \theta_4) \cdot \text{Trans}(a_4, 0, 0) \cdot \text{Rot}(X, -90)$ dir. Üstel dönüşüm cinsinden A_4 ün görevini üstlenen karşılığı

$$A_4 = \exp(x_4^1 \theta_4) \cdot \exp(a_4 x_4^2) \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2} x_4^3\right) \text{ bulunur. Burada;}$$

$$x_4^1 = ((0,0,1); (0,0,0)) \quad x_4^2 = ((0,0,0); (1,0,0))$$

$$x_4^3 = ((1,0,0); (0,0,0)) \text{ dir.}$$

V. $A_5 = \text{Rot}(Z, \theta_5) \cdot \text{Rot}(X, 90)$ dır. A_5 in görevini üstlenen üstel dönüşüm cinsinden karşılığı

$$A_5 = \exp(\theta_5 X_5^1) \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{2} X_5^2\right)$$

olarak bulunur. Burada;

$$X_5^1 = ((0, 0, 1); (0, 0, 0)) \quad X_5^2 = ((1, 0, 0); (0, 0, 0)) \text{ dir.}$$

VI. $A_6 = \text{Rot}(Z, \theta_6) \cdot \text{Rot}(X, 0)$ dır. A_6 nın görevini üstlenen üstel dönüşüm cinsinden karşılığı

$A_6 = \exp(\theta_6 X_6)$ bulunur. Burada;

$$X_6 = ((0, 0, 1); (0, 0, 0)) \text{ dır.}$$

Böylece Elbow manipulator için

$$T_6 = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$$

şeklinde belirli olan denklem, üstel dönüşüm cinsinden

$$\begin{aligned} T_6 = & \exp(\theta_1 X_1^1) \otimes \exp\left(-\frac{\pi}{2} X_1^2\right) \otimes \exp(\theta_2 X_2^1) \otimes \exp(a_2 X_2^2) \otimes \exp(\theta_3 X_3^1) \otimes \\ & \exp(a_3 X_3^2) \otimes \exp(\theta_4 X_4^1) \otimes \exp(a_4 X_4^2) \otimes \exp\left(-\frac{\pi}{2} X_4^3\right) \otimes \exp(\theta_5 X_5^1) \otimes \\ & \exp\left(-\frac{\pi}{2} X_5^2\right) \otimes \exp(\theta_6 X_6) \end{aligned}$$

dır.

3.4. ÖZEL HAREKETLER

Bu kesimde özel bazı hareketleri üstel dönüşüm ve matrisler yardımıyla vereceğiz.

ÖRNEK : 3.4.1(SİLİNDİRİK HELİS HAREKETİ)

Bu örnekte E^3 de Z-eksenini dönme eksenini ve Z nin doğrultusunu öteleme doğrultusu kabul eden helis hareketi için hareket denklemleri elde edilecektir.

Z eksenini LC_6 nın elemanları yardımıyla verilirse

$$X = ((0,0,1); (0,0,1))$$

elemanı Z-eksenini tek türlü belirler. Matris formu da

$$X = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

olarak yazılabilir. Böylece t dönme ve öteleme parametresi olarak $\exp(tX) = I + tX + \frac{t^2}{2!}X^2 + \dots$

Z-eksenli silindirik Helis hareketidir.

Silindirik Helis hareketindeki matris değerleri hesaplanarak yerine yazılırsa $\exp(tX)$ açık olarak bulunur ve

$$X^2 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$X^3 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\exp(tX) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0-t & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{-t^2}{2!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-t^2}{2!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \frac{t^3}{3!} & 0 & 0 \\ \frac{-t^3}{3!} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\exp(tX) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{t^2}{2!} & .. & -t + \frac{t^3}{3!} & .. & 0 & 0 \\ t - \frac{t^3}{3!} & .. & 1 - \frac{t^2}{2!} & .. & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & 0 & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Ayrıca helis hareketinin açısal hız ve adımı

Açısal hızı : $K(X,X) = \langle y, y \rangle$

$$= \langle (0,0,1); (0,0,1) \rangle$$

$$= 1$$

Adımı : $K(X,X)/K(X,X) = \langle y, z \rangle / \langle y, y \rangle$

$$= \langle (0,0,1); (0,0,1) \rangle / 1$$

$$= 1/1$$

$$= 1$$

olarak hesaplanır.

Helis hareketin dönme ve ötelemenin bileşkesi olarak da ele almak istenebilirdi. Bu durumda

$$X = ((0,0,1);(0,0,1))$$

elemanı

$$x_1^1 = ((0,0,1);(0,0,0)) \text{ ve } x_2^1 = ((0,0,0);(0,0,1))$$

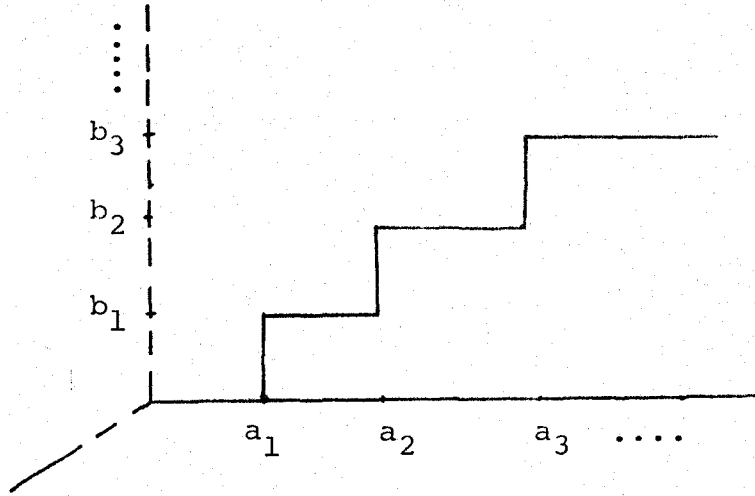
elemanlarının cebirsel toplamı olacağından;

$$\begin{array}{l} \exp(tx_1^1) \cdot \\ \exp(tx_2^1) \end{array} = \begin{array}{c|cccc} \text{Cost} & -\text{Sint} & 0 & 0 \\ \hline \text{Sint} & \text{Cost} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \begin{array}{c|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$= \begin{array}{c|cccc} \text{Cost} & -\text{Sint} & 0 & 0 \\ \hline \text{Sint} & \text{Cost} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

ÖRNEK : 3.4.2. (Merdiven Hareketi)

Y ve Z eksenleri boyunca ardışık ve sonlu sayıdaki ötelemelerin birleşimi olan hareketi merdiven hareketi olarak tanımlıyalım. Bu örnekte tanımlanan bu hareketin üstel dönüşüm cinsinden, matris cinsinden karşılığını yazacağız. Y-ekseni boyunca öteleme miktarını t_i ve Z-ekseni boyunca öteleme miktarı s_i da S_i ile gösterilsin.



Şekil 3.4.1.Merdiven Hareketi

$$\text{Trans}_1(t_1, y) \quad , \quad 0 \leq t_1 \leq a_1$$

$$\text{Trans}_1(s_1, z) \quad , \quad 0 \leq s_1 \leq b_1$$

$$\vdots$$

$$\text{Trans}_{2i+1}(t_{2i+1}, y), \quad a_{2i} \leq t_{2i+1} \leq a_{2i+1}$$

$$\text{Trans}_{2i+2}(s_{2i+2}, z), \quad b_{2i} \leq s_{2i+2} \leq b_{2i+2}$$

$$\vdots$$

n-sonlu olmak kaydıyla merdiven hareketi

$$\text{M.H} : \text{Trans}_n(s_n, z) \cdot \text{Trans}_n(t_n, y) \dots \text{Trans}_1(s_1, z).$$

$\text{Trans}_1(t_1, y)$ şeklinde verilebilir, karşı gelen matris hesaplanırsa;

$$\exp(t_1, Y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 0 \leq t_1 \leq a_1$$

$$\exp(S_1, Z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad 0 \leq S_1 \leq b_1$$

$$\exp(t_n, Y) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad a_{n-1} \leq t_n \leq a_n$$

$$\exp(S_n, Z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad b_{n-1} \leq S_n \leq b_n$$

olmak üzere;

$$M.H. = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S_n \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_n \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \dots \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & S_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & S \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{aligned} T &= t_1 + t_2 + \dots + t_n \\ S &= S_1 + S_2 + \dots + S_n \end{aligned}$$

elde edilir.

ÖRNEK : 3.4.3.

Herhangi bir eksen etrafındaki helis hareketinin üstel dönüşüm olarak ifadesi

ÇÖZÜM :

E^3 'de dönme vektörü $y = (a, b, c)$

öteleme vektörü $Z = (a, b, c)$

ile verilen helis hareketinin ekseni

$$\begin{aligned} A &= y \times Z + \lambda y \\ &= 0 + \lambda (a, b, c) \end{aligned}$$

olarak alalım.

$$X = (y; Z) = ((a, b, c); (a, b, c))$$

dir. Matris formu

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -c & b & a \\ c & 0 & -a & b \\ -b & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{veya } X = \begin{bmatrix} Y & Z \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Burada

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad Z = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad \text{dir.}$$

X matrisinin kuvvetleri hesaplanırsa

$$X^2 = \begin{bmatrix} 0 & -c & b & a \\ c & 0 & -a & b \\ -b & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -c & b & a \\ c & 0 & -a & b \\ -b & a & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c^2 - b^2 & ab & ac & 0 \\ ab & -c^2 - a^2 & bc & 0 \\ ac & bc & -b^2 - a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^2 = \begin{bmatrix} Y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^3 = \begin{bmatrix} 0 & c & -b & 0 \\ -c & 0 & a & 0 \\ b & -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y^3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^4 = \begin{bmatrix} Y^4 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^5 = \begin{bmatrix} Y^5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$X^6 = \begin{bmatrix} Y^6 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bulunur. Buradan hareketle

$$X^{4n+1} = \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad n = 1, 2, \dots$$

$$X^{4n+2} = \begin{bmatrix} Y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$X^{4n+3} = \begin{bmatrix} -Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$X^{4n+4} = \begin{bmatrix} -Y^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

eşitlikleri elde edilir. Ancak X^{4n+1} matrisi $n = 0$ için

$$X^1 = \begin{bmatrix} Y & Z \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = X$$

dir. Böylece $\exp tX$, $t \in \mathbb{R}$ hesaplanırsa

$$\begin{aligned} \exp tX &= I_4 + tX + \frac{t^2}{2!} X^2 + \frac{t^3}{3!} X^3 + \frac{t^4}{4!} X^4 + \frac{t^5}{5!} X^5 + \frac{t^6}{6!} X^6 + \dots \\ &= I_3 + tY + tZ + \frac{t^2}{2!} Y^2 + \frac{t^3}{3!} Y^3 + \frac{t^4}{4!} Y^4 + \frac{t^5}{5!} Y^5 + \dots \end{aligned}$$

$$= I_3 + tY + tZ + \frac{t^2}{2!} Y^2 - \frac{t^3}{3!} Y - \frac{t^4}{4!} Y^2 + \frac{t^5}{5!} Y + \frac{t^6}{6!} Y^2 + \dots$$

$$\exp(tX) = I + tZ + Y(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \dots) + Y^2(\frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} - \dots)$$

elde edilir. Sinüs ve Cosünüs fonksiyonlarının açılımı dikkate alınırsa

$$\exp tX = I + \sin t Y + (1 - \cos t) Y^2 + tZ \quad (3.4.1)$$

(3.4.1) eşitliği şöyle yazılabilir.

Bir $[a_{ij}]$ matrisini $[a_{ij}] = [y_i \cdot y_j]$ şeklinde tanımlayalım.

$$y_1 = a, \quad y_2 = b, \quad y_3 = c$$

olmak üzere

$$[y_i y_j] = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & 1-a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & 1-a^2-b^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b^2-c^2 & ab & ac \\ ab & -a^2-c^2 & bc \\ ac & bc & -a^2-b^2 \end{bmatrix}$$

$$= I + Y^2 \quad \text{dir.}$$

$[y_i y_j] = I + Y^2 \Rightarrow Y^2 = [y_i, y_j] - I$ değeri (3.4.1) de yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \text{expt} X &= I + \text{Sint} Y + (1 - \text{cost}) ([y_i, y_j] - I + tZ \\ &= I + \text{Sint} Y + (1 - \text{cost}) [y_i y_j] - I + \text{Cost} I + tZ \end{aligned}$$

$$\text{expt} X = \text{Cost} I + \text{Sint} Y + (1 - \text{Cost}) [y_i y_j] + tZ \quad (3.4.2)$$

elde edilir.



KAYNAKLAR

- 1- HACISALİHOĞLU H.H. Differensiyel Geometri. İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları Mat No.2 Malatya 1983.
- 2- F.Brickell and R.S.Clark. Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Company, London, 1970.
- 3- BOTTEMA, O and Roth, B. Theoretical Kinematics, North-Holland Publishing Company, New York, 1979.
- 4- Prakash, Nirmala, Differential Geometry, Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 1981.
- 5- CURTIS, MORTON L. Matrix Groups Springer Verlag New York Inc. 1984.
- 6- KARGER, ADOLF; NOVAK, JOSEF. Space Kinematics and Lie Groups. Gordon and Breach Science Publishers, S.A. New York. 1985.
- 7- PAUL, RICHARD.R. Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control. The MIT Press USA, 1984.
- 8- KARGER, ADOLF. "Geometry of the Motion of Robot Manipulators." Mathematica Springer Verlag 1988.