

**TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANA BİLİM DALI**

**ROBUST OPTİMİZASYON YÖNTEMİ İLE PORTFÖY ANALİZİ: BİST100
HİSSELERİYLE BİR UYGULAMA**

Salih ÇAM

DOKTORA TEZİ

ADANA / 2022

**TÜRKİYE CUMHURİYETİ
ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANA BİLİM DALI**

**ROBUST OPTİMİZASYON YÖNTEMİ İLE PORTFÖY ANALİZİ: BİST100
HİSSELERİYLE BİR UYGULAMA**

Salih ÇAM

Danışman: Prof. Dr. Süleyman Bilgin KILIÇ

Jüri Üyesi: Doç. Dr. Ersin KIRAL

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Mehmet Fatih CİN

Jüri Üyesi: Prof. Dr. Mustafa ÖZER

Jüri Üyesi: Dr. Öğr. Üyesi Önder UZKARALAR

DOKTORA TEZİ

ADANA / 2022

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğüne;

Bu çalışma, jürimiz tarafından Ekonometri Ana Bilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Süleyman Bilgin KILIÇ
(Danışman)

Üye: Prof. Dr. Mehmet Fatih CİN

Üye: Doç. Dr. Ersin KIRAL

Üye: Prof. Dr. Mustafa ÖZER

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Önder UZAKARALAR

ONAY

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim elemanlarına ait olduklarını onaylarım.

.../.../2022

Prof. Dr. Serap ÇABUK

Enstitü Müdürü

NOT: Bu tezde kullanılan ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge, şekil ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu'ndaki hükümlere tabidir.

*Kızlarım Yağmur Hasret ve Hazal Hasret,
ve sevgili eşim Gülsüm'e*



ETİK BEYANI

Çukurova Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
 - Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
 - Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
 - Kullanılan verilerde ve ortaya çıkan sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
 - Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,
- bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim. / / 20....

Salih ÇAM

ÖZET

ROBUST OPTİMİZASYON YÖNTEMİ İLE PORTFÖY ANALİZİ: BİST100 HİSSELERİYLE BİR UYGULAMA

Salih ÇAM

Doktora Tezi, Ekonometri Ana Bilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Süleyman Bilgin KILIÇ

Ocak 2022, 143 sayfa

Varlıkların portföy içinde hangi oranda yer alacağı problemi yatırımcının karşılaştığı en büyük sorundur. Yatırımcı, getirisini maksimum yapacak varlık bileşenini ararken üstlendiği riskin de minimum olmasını amaçlar. Portföy optimizasyonu problemleri yatırımcıların bu isteklerini bir araya getirerek model portföyler oluşturmaktadır. Fakat yatırım riskinin tamamen ortadan kaldırılması mümkün değildir. Yatırım yapan yatırımcı sistematik ve sistematik olmayan risklerin yanında modelden kaynaklı risklerle de karşı karşıyadır. Hesaplama hataları, yanlış model optimizasyonu ve sapmalı parametre tahmini söz konusu risklere örnektir. Klasik portföy optimizasyonunda bu riskler mevcutken, belirsizliği dikkate alan robust optimizasyon modelleri sözü edilen risklerin önemli bir kısmını dağıtmaktadır. Bu tür modeller belirsizlik setleri dahilinde en kötü senaryoya dayanarak portföyler oluşturur. Böylelikle modelden kaynaklanan riskler minimum düzeye inerken, elde edilen çözümlerin optimal kalması belirlenmiş bir olasılık düzeyiyle garanti altına alınmaktadır.

Robust optimizasyon yönteminde belirsizlik setlerinin doğru kurulması çözümün güvenilirliğini arttıran bir faktördür. Sadece geçmiş gözlemlerden hesaplanan ortalama getiriler, varlıklara ilişkin doğru tahmini (öngörü) garanti etmediği için robust bir yöntem kullanılmak daha güvenilir çözümler üretmeyi sağlayacaktır. Bu bağlamda uygulama aşamasında belirsizlik setleri oluşturmak amacıyla bootstrap yöntemi kullanılmıştır. Bootstrap yöntemi mevcut gözlemlerden alt örneklem oluşturarak anakütle parametrelerine ilişkin çıkarım yapmaya yaramaktadır. Alt örneklem ortalamalarından elde edilen dağılımın uç noktalarındaki değerler belirsizlik setlerinin sınırlarını temsil etmektedir. Böylelikle, arzu edilen güven düzeyinde belirsizlik setleri

oluşturulabilmektedir. Tezin amacı bootstrap metoduyla robust optimizasyon yöntemini birleştirerek hem beklenen getiriler, hem de çözümle ilgili güçlü sonuçlar elde etmektir. Bu şekilde robust optimizasyon, çözümün optimal kalmasını yüksek bir olasılıkla sağlarken bootstrap yöntemi beklenen getiri oranlarının önceden belirlenen güven düzeyiyle minimum ve maksimum alacağı değerleri belirleyecektir.

Uygulamada birçok amaç fonksiyonunu optimize etmek mümkündür. Fakat, getiri maksimizasyonunu ve risk minimizasyonunu eş zamanlı gerçekleştirmesi nedeniyle, amaç fonksiyonu Sharpe oranı olan fomülasyon tercih edilmiştir. Ek olarak, %99, %97.5, %95, %90, %80 ve %70 güven düzeylerine sahip bootstrap belirsizlik setleri robust optimizasyon modeliyle birleştirilerek piyasa ortalama getirisinin üstünde getiri sağlayan portföyler oluşturulmuştur. Portföyler oluşturulurken Bertsimas ve Sim (2004) tarafından önerilen robust model kullanılmıştır. Bu şekilde belirsiz parametre sayısı da model dahil edilmiştir. Bulgular, oluşturulan portföylerin değerlendirme oranlarının piyasa ortalamasının üzerinde olduğu göstermiştir. Ayrıca oluşturulan portföyler örneklem dışı dönemde de endeks getirisinden yüksek beklenen getiri sağlamıştır. Sonuç olarak, tahmin edilen portföyler hem parametre olarak hem de çözüm olarak belirsizliğe karşı robust çözümler üretmiştir.

Anahtar kelimeler: Robust optimizasyon, belirsizlik altında optimizasyon, ortalama varyans modeli, portföy teorisi, bootstrap.

ABSTRACT**PORTFOLIO ANALYSIS WITH ROBUST OPTIMIZATION METHOD: AN
APPLICATION ON BIST100 STOCKS****Salih ÇAM****Ph.D. Thesis, Department of Econometrics****Supervisor: Prof. Dr. Süleyman Bilgin KILIÇ****January 2022, 143 pages**

The asset allocation is the main problem that investors face in the portfolio selection. The investors aim the optimal asset allocation that maximizing the expected return of portfolio while minimizing the risk of portfolio. But, completely eliminating the risk of investment is not possible. In a investment, the investor would undertakes the model based risks besides of systematic risks and unsystematic risks. Incorrect estimation of parameters, incorrect model, errors in calculation are examples of the model based risks. While the classical portfolio models such as Markowitz's mean variance include the model based risks, the portfolio models making optimization by regarding the uncertainty would eliminate these risks. Uncertainty based models like robust optimization construct robust portfolios by taking account the worst realization of asset returns within uncertainty sets. Thus, the solution of model remains optimal with high probability, while investors are protected against the model based risks.

Construction of proper uncertainty sets increase the reliability of the model solution in the Robust optimization method. Since the expected returns calculated from historical data do not guarantee an accurate estimate of the assets, some robust estimators should be used. In this context, the bootstrap method was used to create uncertainty sets in the analysis. Bootstrap method makes inference about population parameters via sub-samples withdrawn from existing sample. The critical values of distribution of means that calculated from sub-samples form the border of uncertainty sets. So, the method enables to form uncertainty sets with predetermined confidence level. The aim of this thesis is to combine bootstrap method and robust optimization, and to get robust results related to both expected return rates and optimality of portfolio models. Thus, thanks to robust optimization the solution of portfolio model would stay

feasible in high probability, while maksimum and mininum values that expected returns being able to take would be determined via bootstrap method.

Although it is technically possible to optimize a lot of objective function in the asset allocation problems, we preferred to optimize the model that has Sharpe ratio in the analysis. The bootstrap uncertainty sets, which were created with 99%, 97.5%, 95%, 90%, 80% and 70% confidence levels, were integrated into the robust model. Thus, by comparison with market retuns, the portfolios that yielded higher expected returns were composed. In the analysis the robust model proposed by Bertsimas and Sim (2004) is used, in this way the number of uncertian parametres that represented with gama has been added to the models. The results of analysis show that the constituted portfolios are robust both as parametres and as solution.

Keywords: Robust optimization, optimization under uncertianty, mean-variance model, modern portfolio theory, bootstrap.

ÖN SÖZ

Bu tez çalışmasında finansal piyasalara daha uygun olduğunu düşündüğümüz robust optimizasyon modelleri kullandık. Robust kelimesi Türkçe’ye “dirençli”, “güçlü” olarak çevirmek mümkün. Fakat bu kelimeler bize göre robust kelimesini tam anlamıyla karşılamıyor. Türkçe kaynaklarda dirençli optimizasyona rastlamış olmamıza rağmen robust optimizasyon olarak kullanmayı tercih ettik. Çünkü burada sözü edilen “direnç” parametrelerden ziyade çözüme ilişkindir. Bir kavram karışıklığı olmaması adına kelimeyi orijinal haliyle kullandık ve tezin başlığında da bu şekilde yer verdik. Tezin gövde metninde de robust kelimesinin Türkçe karşılığını yer yer parantez içinde verdik. Bir diğer husus belirsizlikle ilgilidir. Tıpkı robust kavramında olduğu gibi belirsizlik kavramının da açıklanması gerektiğini düşünüyoruz. Portföyle ilgili çalışmalarda belirsizlik kavramı genel olarak bir varlığın riskini ifade eder. Tezde kullanılan belirsizlik tamamiyle farklı bir olguyu temsil etmektedir. Buradaki belirsizlik, bir varlığın belli sınırlar içinde rassal olarak değerler alabileceği, kapalı ve simetrik bir kümeyi ifade eder. Kapalı bir küme alt ve üst sınırları olan ve kendi sınırını içeren kümelerdir. Örneğin bildiğimiz anlamda güven aralıkları kapalı kümelerdir. Simetrik olma özelliği ise ortalamanın sağına ve soluna aynı sayıda gözlemin düşmesini ifade eder. Normal dağılan bir serinin ortalamasının sağında ve solunda yaklaşık eşit miktarda gözlem vardır. Dolayısıyla normal dağılıma sahip bir seriden türetilmiş belirsizlik seti simetriktir. Nihayet, tezde karşılaştığınız belirsizlik kümesinin yukarıdaki iki özelliği taşıdığını ve küme dahilinde her bir gözlemin gerçekleşme olasılığının eşit olduğunu bilmek gerekir.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT.....	vi
ÖN SÖZ	viii
KISALTMALAR	x
TABLolar LİSTESİ	xi
ŞEKİLLER LİSTESİ	xii
EKLER LİSTESİ	xiii

BÖLÜM I

GİRİŞ	1
-------------	---

BÖLÜM II

LİTERATÜR.....	5
----------------	---

BÖLÜM III

ORTALAMA VARYANS MODELİ

3.1. Markowitz'in Ortalama Varyans Modeli.....	14
3.2.Ortalama Varyans Modeli ve Etkin Sınırın Geometrik Yorumu	17
3.3.Ortalama Varyans Modelinin Matematiği	20
3.4. Ortalama Varyans Modelinde Kullanılan Kısıtlar	22
3.4.1. Toplam Yatırım Kısıtı.....	22
3.4.2. Açığa Satış Kısıtı	23
3.4.3. Maksimum veya Minimum Yatırım Kısıtı	23
3.4.4. Risk Faktörleri Kısıtı	24
3.4.5. Endeksten Sapma Kısıtı (İzleme Hatası)	25
3.5. Ortalama Varyans Modelinin Optimizasyonu ve Etkin Sınır	26
3.5.1. Etkin Sınır	29

BÖLÜM IV

OPTİMİZASYON

4.1. Doğrusal Optimizasyon	32
4.1.1. Doğrusal Fonksiyonlar	32
4.1.2. Doğrusal Denklem Sistemleri	35
4.2. Doğrusal Programlama	36
4.3. Doğrusal Olmayan Programlama (NLP)	40
4.3.1. Kısıtsız NLP Optimizasyonu	41
4.3.1.1. Steepest Ascent Yöntemi	42
4.3.2. Kısıtlı NLP Optimizasyonu	45
4.3.2.1. Lagrange Çarpanı Yöntemi	46
4.4. Kuadratik Programlama ve Portföy Optimizasyonu	50

BÖLÜM V

BELİRSİZLİK ALTINDA OPTİMİZASYON

5.1. Duyarlılık Analizi	53
5.2. Stokastik Programlama	55
5.2.1. Çok Aşamalı Stokastik Modeller	56
5.2.2. Ortalama Risk Modelleri	58
5.2.3. Şans Kısıtlı Modeller	60
5.3. Dinamik Programlama	61
5.4. Robust Optimizasyon	64
5.4.1. Belirsizlik Setinin Seçimi Problemi	69
5.4.1.1. Belirsizlik Seti Seçiminde Bootstrap Yöntemi	71
5.4.1.2. Bootstrap Tekniği İle Beklenen Getiri Tahmini	71
5.4.2. Robust Ortalama Varyans Modeli	72
5.4.2.1. Robust Portföy Optimizasyonuna Soyster Yaklaşımı	73
5.4.2.2. Robust Portföy Optimizasyonuna Ben-Tal ve Nemirovski Yaklaşımı	74
5.4.2.3. Robust Portföy Optimizasyonuna Bertsimas ve Sim Yaklaşımı	75
5.4.2.4. Kısıt Bozulmasının Olasılık Sınırı	78

BÖLÜM VI

ANALİZ

6.1. Portföy Optimizasyon Modeli	82
6.1.1. Sharpe Oranı	83
6.1.2. Robust Portföy Modeli.....	84
6.1.2.1. Belirsizlik Setleri	88
6.2. Veri ve Uygulama.....	89
6.2.1. Uygulama Sonuçları	92

BÖLÜM VII

SONUÇ	123
KAYNAKÇA.....	128
EKLER	139
ÖZGEÇMİŞ	142

KISALTMALAR

BİST	: Borsa İstanbul
EKK	: En Küçük Kareler Yöntemi
NLP	: Doğrusal Olmayan Programlama
LP	: Doğrusal Programlama
TCMB	: Türkiye Cumhuriyet Merkez Bankası
SPK	: Sermaye Piyasası Kurulu
BDDK	: Bankacılık Denetleme ve Düzenleme Kurumu
TSPAKB	: Türkiye Sermaye Piyasası Aracı Kuruluşlar Birliği
CAPM	: Varlık Değerleme Modeli
PDDD	: Piyasa Değeri Defter Değeri



TABLOLAR LİSTESİ

	Sayfa
Tablo 1. Hisse Senetleri ve İşlem Gördükleri Sektörler.....	91
Tablo 2. Hisse Senedi Getiri Serisi Özet İstatistikler.....	93
Tablo 3. Hisse Senedi Getiri Serisi Özet İstatistikler (Devam).....	94
Tablo 4. Bootstrap Belirsizlik Setleri	98
Tablo 5. Bootstrap Belirsizlik Setleri (Devam).....	99
Tablo 6. Belirsizlik Setlerine Bağlı Olarak Sharpe Oranı, Beklenen Getiri Oranı ve Portföy Riski	100
Tablo 7. Belirsizlik Setlerine Bağlı Olarak Sharpe Oranı, Beklenen Getiri Oranı ve Portföy Riski (Devam)	101
Tablo 8. Belirsizlik Setlerine Bağlı Olarak Sharpe Oranı, Beklenen Getiri Oranı ve Portföy Riski (Devam)	102
Tablo 9. Gama ve Alfaya Göre Portföylerin Yıllık Ortalama Değerlenme Oranları	120

ŞEKİLLER LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 1. Ortalama-Varyans Modeli Etkin Sınır ve Uygun Alan	17
Şekil 2. Etkin Sınır ve Yatırımcı Farksızlık Eğrisi	19
Şekil 3. Risksiz Faiz Oranı ve Etkin Sınır	20
Şekil 4. Doğrusal Bağımlı/Bağımsız Vektörler	34
Şekil 5. Doğrusal Programlamada Orantılılık Varsayımı	38
Şekil 6. Doğrusal Olmayan Programlama	40
Şekil 7. Steepest Ascent Algoritması	45
Şekil 8. Hisse Senedi Getirilerinin Ortalama ve Riske Göre Saçılım Grafiği	95
Şekil 9. Hisse Senedinin PDDD ve Ortalamaya Göre Saçılım Grafiği	96
Şekil 10. Gama Değerlerine Göre Sharpe Oranı ve Portföy Riski	104
Şekil 11. Gama Değerlerine Göre Sharpe Oranı ve Portföy Beklenen Getiri Oranı ...	105
Şekil 12. Alfa= 0.01 için Sharpe Oranı ve Beklenen Getiri Oranları	106
Şekil 13. Alfa= 0.025 için Sharpe Oranı ve Beklenen Getiri Oranları	107
Şekil 14. Alfa= 0.05 için Sharpe Oranı ve Beklenen Getiri Oranları	108
Şekil 15. Alfa= 0.10 için Sharpe Oranı ve Beklenen Getiri Oranları	109
Şekil 16. Alfa= 0.20 için Sharpe Oranı ve Beklenen Getiri Oranları	110
Şekil 17. Alfa= 0.30 için Sharpe Oranı ve Beklenen Getiri Oranları	111
Şekil 18. Belirsizlik Setlerine Bağlı Portföy Etkin Sınırları	112
Şekil 19. Ortalama Ağırlıklı Portföy ve Eşit Ağırlıklı Endeks Grafiği	114
Şekil 20. Alfa=0.01 için Ortalama Ağırlıklı Portföy ve Eşit Ağırlıklı Endeks Grafiği ...	115
Şekil 21. Alfa=0.025 için Ortalama Ağırlıklı Portföy ve Eşit Ağırlıklı Endeks Grafiği ...	116
Şekil 22. Alfa=0.05 için Ortalama Ağırlıklı Portföy ve Eşit Ağırlıklı Endeks Grafiği	117
Şekil 23. Alfa=0.10 için Ortalama Ağırlıklı Portföy ve Eşit Ağırlıklı Endeks Grafiği ...	117
Şekil 24. Alfa=0.20 için Ortalama Ağırlıklı Portföy ve Eşit Ağırlıklı Endeks Grafiği	118
Şekil 25. Alfa=0.30 için Ortalama Ağırlıklı Portföy ve Eşit Ağırlıklı Endeks Grafiği	119

EKLER LİSTESİ**Sayfa**

EK 1. Hisse Senetleri Bootstrap Dağılım Grafikleri.....	141
--	-----



BÖLÜM I

GİRİŞ

1.1. Giriş

Bireyler gelecekte daha fazla tüketim yapmak amacıyla bugünkü gelirlerinin bir kısmını tasarruf eder ve tasarrufları doğrultusunda ellerinde fon birikir. Tüketicilerin tasarruflarından biriktirdiği fonlar enflasyon nedeniyle zaman içinde aşınır ve tüketicilerin satın alma gücü düşer. Buna karşılık tüketici, tasarruflarının değerini korumak veya mümkünse tasarruflarını büyütmek amacıyla elindeki fonları yatırıma dönüştürür. Birçok alternatife ek olarak yatırımcılar, menkul kıymetlere yatırım yaparak tasarruflarının gelecekte değer kazanmasını umar. Burada tasarruflarının gelecekte değer kazanmasını “umar” denilmesinin sebebi her yatırımda olduğu gibi menkul kıymet yatırımının da finansal piyasaların doğası gereği belli düzeyde risk içermesidir. Bu riskler bazen yatırımcıdan kaynaklı, bazen belli sektörlerden kaynaklı, bazen de ekonomideki daralma veya genişlemelerden (konjöktürden) kaynaklıdır. Bir yatırım, sistematik riskler ve sistematik olmayan riskler olarak iki farklı riske maruz kalır. İlk gruptaki riskler piyasadan kaynaklıdır ve ortadan kaldırılması veya çeşitlendirme yoluyla yok edilmesi mümkün değildir. İkinci gruptaki riskler ise daha çok firmaya özgü riskler olup çeşitlendirme ile belli bir seviyeye kadar düşürülebilir. Çeşitlendirme yoluyla riskin dağıtılması “tüm yumurtaları aynı sepete koyma” prensibinden gelmektedir. Bilindiği gibi modern portföy teorisinin Markowitz’in (1952) yayınladığı makaleyle başladığı kabul edilmektedir. Markowitz her ne kadar çeşitlendirmenin önemini çalışmasında vurgulasa da, bu prensip halihazırda zaten biliniyor ve kullanılıyordu. Yazarın ilk kez ortaya attığı ortalama-varyans modelinin önemi, risk ve getiri arasındaki ilişkiyi matematiksel bir formda ifade etmesidir. Dahası, ortalama-varyans modeli çeşitlendirmeyi bir varlığın kendi özelliklerinden ziyade, yatırım uzayındaki tüm varlıkların birlikte hareketine dayandırması nedeniyle ayrıca önemlidir.

Tüketici, tasarruflarının yıpranmasını engellemek veya tasarruflarını büyütmek isteğiyle yatırıma karar verdiğinde artık bir yatırımcı olarak nitelendirilir. Bu noktada yatırımcı, hukuki geçerliliği olan ve yatırımcının haklarını garanti altına alan piyasalara ihtiyaç duyar. Sermaye piyasaları bu tür piyasalara örnektir. Sermaye piyasaları yoluyla tekil tasarruf sahipleri, getiri elde etmek beklentisiyle sermaye piyasası araçlarından

satın alırken, fon ihtiyacı olan kişiler/şirketler ihraç ettikleri bu araçlar vasıtasıyla finansman sağlar. Bu anlamda tekil tasarruf sahiplerinin elindeki atıl fonlar sermaye piyasası yoluyla ekonomiye kazandırılır. Sonuç olarak sermaye piyasaları ekonomideki kaynakların daha etkin kullanılması için önemli bir işlev görür.

Türkiye’de sermaye piyasasını denetlemek ve kanuna uygun işleyişi sağlamak amacıyla, 1981 yılında çıkarılan 2499 sayılı Sermaye Piyasası Kanunu ile Sermaye Piyasası Kurulu (SPK) kurulmuştur. Daha sonra 6/12/2012 tarihli ve 6362 sayılı Sermaye Piyasası Kanunu ile Kurulun görev, yetki ve sorumlulukları yeniden düzenlenmiştir¹. Denetleyici ve düzenleyici sıfatıyla Sermaye Piyasası Kuruluna bağlı birçok kuruluş mevcuttur. Bunlardan en önemlisi borsacılık işlemlerinin yapılması amacıyla kurulan Borsa İstanbul’dur. Borsa İstanbul dışında Türkiye Sermaye Piyasası Aracı Kuruluşlar Birliği (TSPAKB), TCMB, halka açık şirketler, portföy yönetim şirketleri ve Bankacılık Denetleme ve Düzenleme Kurumu (BDDK) gibi birçok kuruluş SPK’nın denetim ve düzenlemesine tabidir.

¹ SPK görev ve yetkileri şu şeklide tanımlanmıştır; (kaynak: <https://www.spk.gov.tr/Sayfa/Index/0/0>)

- 6362 sayılı Sermaye Piyasası Kanunu ile verilen görevler ile bu Kanunun emrettiği uygulamaların yerine getirilmesini ve öngörülen neticelerin sağlanmasını teminen gerekli olan iş ve işlemleri yapmak,
- Kamunun zamanında, yeterli ve doğru olarak aydınlatılmasını sağlamak amacıyla genel ve özel nitelikte kararlar almak,
- Kanun kapsamına giren kurum ve ortaklıkların bağımsız denetim, derecelendirme, değerlendirme ve bilgi sistemleri denetimi faaliyetine ilişkin şartları ve çalışma esaslarını belirlemek ve bu şartları taşıyanları listeler halinde ilan etmek,
- Finansal istikrar ve ulusal veya uluslararası mevzuatın gereklerinin sağlanması amacıyla diğer finansal düzenleyici ve denetleyici kurumlarla her türlü iş birliğini yapmak ve bilgi alışverişinde bulunmak,
- Sermaye piyasalarında düzenleme ve denetimle yetkili muadili yabancı kurumlar ile sermaye piyasalarıyla ilgili olarak karşılıklılık ve mesleki sırrın korunması ilkeleri çerçevesinde karşılıklı bilgi alışverişinde bulunulmasına ve belge taleplerinin karşılanmasına, yabancı ülkelerdeki sermaye piyasalarında faaliyet gösteren kuruluşların Türkiye’deki merkez, şube veya ortaklıkları ile yazılı bir sözleşme çerçevesinde dışarıdan hizmet aldıkları kurumlarda denetim yapılmasına ve gerekli idari tedbirlerin alınmasına, bu kapsamda yürütülecek faaliyetlere ilişkin masrafların paylaşımına yönelik ikili veya çok taraflı mutabakat zabıtları imzalamak ve sermaye piyasalarıyla ilgili her türlü iş birliğini yapmak,
- Sermaye piyasalarının gelişmesini teminen yeni sermaye piyasası kurumlarına ve araçlarına ilişkin usul ve esasları düzenlemek ve bunları denetlemek,
- Halka açık ortaklıklarda görev alacaklar, sermaye piyasası kurumlarının yönetici ve diğer çalışanlarının mesleki eğitimi, mesleki yeterliliği ve mesleki ehliyetlerini gösterir sertifika verilmesine ilişkin esasları belirlemek, bu amaçlarla merkez veya şirket kurmak ve bunların faaliyet usul ve esaslarını belirlemek,
- Sermaye piyasasında yatırımcı ve tasarruf sahiplerine yönelik olarak yatırım tavsiyesinde bulunacak kişiler ve kuruluşların uyacakları ilke ve esasları belirlemek,
- Kamuyu Aydınlatma Platformunun işletim ve çalışma esasları ile bu Kanun kapsamında Kurula yapılacak bildirim ve başvuruların usul ve esaslarını belirlemek,
- Sermaye piyasası kurumlarının, halka açık şirketlerin, borsaların ve öz düzenleyici kuruluşların bilgi sistemlerinin işletimine ve bu Kanun çerçevesindeki denetimine ilişkin usul ve esasları belirlemek,
- Yerli veya yabancı akademisyen veya uygulamacılardan oluşan çalışma gruplarına veya kişilere, mevcut veya gelecekteki düzenleme tercihlerinde esas teşkil etmek üzere sermaye piyasalarına ilişkin ulusal veya uluslararası nitelikli bilimsel araştırmalar yaptırmak,
- Kurulun üyesi bulunduğu uluslararası kuruluşlar, mali, iktisadi ve mesleki teşekküller ile Türkiye’nin doğrudan üyesi bulunduğu uluslararası kuruluşların çalışmalarına katılmak, bu kuruluşlarla ortak projeler geliştirmek ve projelerine katkıda bulunmak,
- Kurulun görev alanı ile ilgili uluslararası kuruluşlara, mali, iktisadi ve mesleki teşekküllere üye olmak.

Menkul kıymetlerin (hisse/pay senetleri, borsa yatırım fonu, devlet tahvili/bonosu, özel sektör tahvili/bonosu, kira sertifikaları vs.) alınıp satıldığı piyasalara menkul kıymetler borsası denilmektedir. Türkiye’de 1985 yılında kurulan Borsa İstanbul bu alanda Türkiye’de faaliyet gösteren tek piyasadır. Türkiye’de menkul kıymete yatırım yapacak her birey veya kuruluş Borsa İstanbul’da işlem yapmaktadır².

Menkul kıymetler borsasında alım satımı yapılan birçok araç mevcuttur. Yatırımcı, borsada yatırım planladığı menkul kıymet ile ilgili işlemlerini, aracı kurumlar veya bankalar yoluyla yapabilir. Hisse senetleri bu yatırım araçlarından bir tanesidir. Hisse senedi veya pay senedi, sahibine şirket hakkında bilgi almak, genel kurula katılmak ve oy kullanmak, hisse nispetinde kardan pay almak, rüçhan hakkı gibi bazı temel haklar sağlar. Pay senetleri birincil ve ikincil piyasalar olmak üzere iki tür piyasada işlem görmektedir. Eğer hisse senedi ilk defa halka arz edilecekse birincil piyasada, halka daha önce arz edilmiş fakat el değiştirmek suretiyle alım satım yapılacaksa ikincil piyasalarda işlem görmektedir.

Yatırımcı açısından varlık tahsisi, portföy oluştururken karşılaşılan en büyük sorundur. Çeşitlendirmeye yatırım riskini azaltmak isteyen yatırımcı, hangi varlığa portföy içinde ne kadar pay ayırması gerektiğiyle ilgilenir. Ayrıca riski dağıtmak için kaç farklı varlığa yatırım yapılması gerektiği de önemli diğer bir problemdir. Modern portföy teorisi bu sorulara cevap verir ve belli bir risk düzeyinde yatırımcının beklenen getirisini maksimum yapmayı amaçlar. Risk ile getiri arasındaki ilişki Markowitz’in çalışmasında ifade edildiğinden beri geniş bir uygulama alanı bulmuştur. Ortalama-varyans olarak isimlendirilen bu model varlıklar arasındaki varyans-kovaryans matrisini de dikkate alarak gayet güçlü bir mantıksal çerçeve çizmektedir. Modelin tüm avantajlarına rağmen kritik birkaç varsayım modele dair bazı eleştirileri de beraberinde getirmiştir. En önemli eleştiriler, portföydeki hisselerin/varlıkların normal dağılıma uyması varsayımı ve varlıklara ilişkin katsayıların kesin kabul edilmesidir. Varlık getirilerinin normal dağılmaması ve dağılımlarının zaman içinde değişmesi, oluşturulan portföylerin zaman içinde geçerliliğini yitirmesi anlamına gelmektedir.

² “Sermaye Piyasası Kanunu hükümleri ve ilgili mevzuat çerçevesinde, sermaye piyasası araçlarının, kambiyo ve kıymetli madenler ile taşların ve SPK’ca uygun görülen diğer sözleşmelerin, belgelerin ve kıymetlerin serbest rekabet şartları altında kolay ve güvenli bir şekilde, şeffaf, etkin, rekabetçi, dürüst ve istikrarlı bir ortamda alınıp satılabilmesini sağlamak, bunlara ilişkin alım-satım emirlerini sonuçlandıracak şekilde bir araya getirmek veya bu emirlerin bir araya gelmesini kolaylaştırmak ve oluşan fiyatları tespit ve ilan etmek üzere piyasalar, pazarlar, platformlar ve sistemler ile teşkilatlanmış diğer pazar yerleri oluşturmak, kurmak ve geliştirmek, bunları ve başka borsaları veyahut borsaların piyasalarını yönetmek ve/veya işletmektir.” şeklinde tanımlanmıştır.

(Kaynak: https://www.borsaistanbul.com/data/kilavuzlar/Cevaplarla_Borsa_ve_Sermaye_Piyasasi.pdf)

Bu tez getirilerin normallik varsayımını karşılamadığı, varlıklara ait beklenen getirilerin ise belirsizlik içerdiği durumlarla ilgilenmektedir. Klasik portföy optimizasyonu varlıklara ilişkin geçmiş verilerden elde edilmiş katsayıların kesin olduğunu ve gelecekte de benzer oranların gerçekleşeceğini varsayar. Fakat gerçekte varlıkların beklenen değerleri, piyasadaki dalgalanmalar veya hisse senedini ihraç eden şirketten kaynaklı durumlardan dolayı değişiklik gösterir. Bu durumda modelin optimal çözümünün belirsizlikler nedeniyle geçersiz olması beklenen bir durumdur. Belirsizlikler gerçekleştiğinde yatırımcının elindeki portföy artık matematiksel olarak geçersizdir. Fakat belirsizliği dikkate alarak optimizasyon yapan modellerde durum farklıdır. Robust optimizasyon modelleri olarak adlandırılan bu modeller belirsizlikleri dikkate alarak çözüm yaptığı için belirsizliklere karşı dirençlidir. Robust optimizasyon yönteminin bu avantajından faydalanarak, bu tezin uygulamasında yatırımcıyı olası tüm belirsizliklere karşı korumak amacıyla robust portföyler oluşturulmuştur. Belirsizlik setlerini oluşturma aşamasında ise analiz bölümünde detaylarıyla açıklanan Bootstrap yöntemi kullanılmıştır. Böylelikle dağılımla ilgili güçlü sonuçlar üreten bootstrap yöntemiyle, çözüme dair güçlü sonuçlar üreten robust optimizasyon modeli birlikte kullanılarak belirsizliğe karşı optimal kalan portföyler elde edilmiştir.

Tezin giriş bölümünden sonraki anaplanı şu şekildedir; ikinci bölümde konuyla ilgili literatür özetlenmektedir. Üçüncü bölümde Markowitz'in ortalama-varyans modelinin teorik çerçevesi çizilmekte, sonraki bölümde ise klasik varsayımlar altında optimizasyon detaylarıyla incelenmektedir. Beşinci bölüm belirsizlik altında optimizasyon yöntemlerini ve teorik altyapısını işlerken altıncı bölüm Borsa İstanbul için bir uygulama içermektedir. Devamında ise sonuç ve kaynakça bölümleri yer almaktadır.

BÖLÜM II

LİTERATÜR

2.1. Literatür

Portföy teorisi modern anlamda Markowitz (1952) ile başlamıştır. Markowitz çalışmasında risk ile getiri arasındaki ilişkiyi varlıkların kovaryanslarını da dikkate alarak tasarlamıştır. Daha sonra yazar bu çalışmasından dolayı 1990 yılında Nobel ekonomi ödülü almıştır. Markowitz'in ortaya attığı ortalama-varyans modeli sadece riskli varlıkları dikkate almaktadır. Fakat Tobin (1958) çalışmasında yatırımcıların bir miktar da nakit talep edeceklerini ve bu nakit oranında risksiz bir varlığa yatırım yapacağını varsayarak CAPM (Capital Asset Price Model) modelinin ilk versiyonunu ortaya atmıştır. Buna göre yatırımcı “n” adet risksiz varlık yerine “n-1” adet riskli varlık, bir adet de risksiz varlığa (genel olarak devlet tahvillerin faiz oranları kullanılmaktadır) yatırım yaparak faydasını maksimum düzeye çıkarır. Devam eden süreçte Sharpe (1964), Linter (1969), Mossin (1966), Neilsen (1990) gibi araştırmacılar CAPM modeline önemli katkı yapmıştır.

Risk ile getiri arasında doğrudan bir ilişki söz konusudur. Çeşitlendirme yoluyla portföy riskinin (sistemik olmayan riskin) bir kısmı yok edilebilir. Eugene Fama (1965) çalışmasında getirilerin genellikle normal dağılmadığını, bazı varlıkların varyansının sonsuz olduğunu ifade etmiştir. Özellikle getirilerin kalın kuyruk dağıldığını ifade eden araştırmacı çeşitlendirme yoluyla riskin dağıtılmasını önermiştir. Evans ve Archer (1968), Malkiel (2002), Lhabitant (2017) ve Koumou (2020) de çeşitlendirme ve riskin dağıtılması konusunu incelemiştir. Sonuç olarak net bir sayı olmasa da, riski dağıtmak için en etkin varlık sayısının 10 ile 20 arasında olması gerektiği çalışmalarda yer almaktadır. Çeşitlendirme, bazı varlıklar değer kaybederken bazılarının değer kazanmasından fayda sağlamak içindir. Tabii ki burada varlıklar arasındaki ilişkilerin yönü ve derecesi önemlidir. Varlıklar arasındaki korelasyonun yüksek olmaması riskin yönetilmesini kolaylaştıran bir faktördür. Bu doğrultuda Campell vd. (2001) varlıkların bireysel varyanslarının düştüğü dönemlerde varlıklar arasındaki korelasyonun da düştüğünü göstermiştir.

Getirilerin genel olarak normal dağılmaması veya çoğu zaman kalın kuyruk dağılması araştırmacıları farklı çözüm arayışlarına itmiştir. Çünkü Norbert (2001),

Campbell vd. (2000), Fabozzi vd. (2007) kalın kuyruk dağılma sahip getirilerin portföyün performansını ciddi ölçüde etkilediğini göstermiştir. Dolayısıyla portföy optimizasyonu yapılırken ortalama ve varyans dışında daha yüksek momentlere ihtiyaç olduğu sonucuna varılmıştır. Granito ve Walsh (1978), Arditti ve Levy (1977), Jobst ve Zenios (2001), Chen ve Zhou (2018), Gong vd. (2021) çalışmalar farklı şekillerde olmak üzere yüksek momentleri portföy teorisinde kullanmıştır. Analiz sonuçları yüksek momentleri dikkate alarak oluşturulan portföylerin uygulamada daha başarılı sonuçlar ürettiğini göstermiştir.

Ortalama-varyans modeli genel olarak risk veya getiri kısıtlarını içermektedir. Model getiri maksimizasyonu olarak oluşturulmuşsa risk kısıtı ve toplam ağırlıkların bir olması kısıtlarını, risk minimizasyonu şeklinde kurulmuşsa getiri kısıtı ve toplam ağırlık kısıtı kullanılmaktadır. Fakat yatırımcının beklentisine göre farklı kısıtların kullanılması gerekmektedir. Örneğin sınırsız borçlanma veya açığa satış kısıtı, endeks izleme hatası kısıtı, maksimum oran kısıtları, işlem maliyeti kısıtları, doğrusal veya kuadratik diğer kısıtlar ve lot kısıtları gibi birçok kısıt devam eden süreçte ortalama-varyans modeline eklenmiştir. Söz gelimi Yoshimoto (1996), Best ve Hlouskova (2005), Lobo vd. (2007), Najafi ve Mushakhian (2015), Mei vd. (2016) farklı model ve amaç fonksiyonlarına işlem maliyeti kısıtlarını dahil etmiştir. Bunun yanında, He ve Pearson (1991), Tepla (2000), Itkin ve Larsson (2020) çalışmalarında açığa satış veya borçlanma kısıtlarını konu edinmiştir. Ayrıca Jorion (2003), El-Hassan ve Kofman (2003), Bertrand (2010), Maxwell vd. (2018), Maxwell ve Vuuren (2019) gibi çalışmalar ise analizlerde endeks izleme hatası kısıtlarını farklı model ve amaçlarla portföy optimizasyon problemine eklemiştir.

Ortalama-varyans modeli araştırmacılar ve yatırımcılar arasında geniş kullanım alanı bulmasına rağmen bazı dezavantajlara da sahiptir. Model, geçmiş gözlemlerden yola çıkarak beklenen getiri ve varyans hesapladığı için bir dizi hataya açıktır. Markowitz geçmiş gözlemlerden hesaplanan kovaryans matrisinin ve getirilerin kesin olduğunu ve zaman içinde değişmediğini varsaymaktadır. Fakat beklenen getiri oranını ve varyans kovaryans matrisinin kesin ve değişmez olduğunu varsaymak, tahmin hatalarına açık modeller oluşturmak anlamına gelmektedir. Kolm, Tütüncü ve Fabozzi (2014), Michaud (1998) genel olarak portföy optimizasyon modellerini hata maksimizasyonu yapan modeller olarak tanımlamışlardır. Hatalı modeli optimize etmek çoğu zaman doğru olmayan ve piyasa ortalama getirisinin altında getiri sağlayan portföylere neden olmaktadır. Öyle ki DeMiguel, Garlappi ve Uppal (2009), Jobson ve

Korkie (1981), Jorion (1985) eşit ağırlıklı portföyün ortalama varyans modeliyle oluşturulan portföylerden daha iyi performans sergilediğini ifade etmiştir. Markowitz'in modeline yapılan bir diğer eleştiri de portföy içindeki bir varlığa yüksek oranlar tahsis etmesi veya yeterince çeşitlendirme yapamamasıdır (bkz. Green ve Hollifield, 1992; Black ve Litterman 1992).

Klasik ortalama varyans modelinde yukarıda ifade edildiği gibi varlıkların geçmiş gözlemlerinden hareketle beklenen getiriler ve riskler hesaplanmaktadır. Bu noktada getiri serilerinin dağılım özellikleri, kullanılan tahmincinin sapmasız istatistikler üretmesinde etkilidir. Ortalama varyans modeli açıkça ifade etmese de varlıklara ait getiri serilerinin normal dağıldığını ve gelecekte de normal dağılacığını varsaymaktadır. Fakat Eom (2020), Stoyanov ve Rachev (2011), Esch(2010), Sheikh ve Qiao (2009), Bhansali (2008), Mandelbrot (1997) ve birçok çalışma getiri serilerinin dağılımlarıyla ilgilenmiştir. Bu çalışmalarda getiri dağılımlarının genelde kalın kuyruklu olduğu gösterilmiştir. Normallik varsayımı sağlanmaması durumunda, hesaplanan beklenen getiri oranı güvenilirliğini yitirecektir. Bu noktada klasik optimizasyondan çıkıp risk veya belirsizlik içeren modellerle portföy gerekecektir.

Normal dağılmayan bir dağılımda aritmetik ortalama kullanmak yanlış ve yanlış sonuçlar üretmektedir (Ibragimov, 2005). Normal dağılım varsayımı altında klasik ortalama tahmincisi doğrusal, sapmasız ve en iyi (BLUE) tahmincidir. Fakat bu varsayım yerine gelmediğinde dağılımın özelliklerini daha iyi temsil eden bir tahminci kullanılmalıdır. Kalın kuyruğa sahip dağılımlar için robust istatistikler kullanmak etkin portföyler oluşturmaya olanak sağlar. Welsch ve Zhou (2007) kalın kuyruk dağılan getiriler için ortalamanın etrafındaki gözlemlere daha büyük, kuyruğa yakın gözlemlere daha küçük ağırlıklar vererek bir ağırlıklı ortalama hesaplamıştır. Bunun yanında DeMiguel ve Nogales (2009) sapmalı tahmincilerden kurtulmak amacıyla M ve R robust tahmincilerini kullanmıştır. Ayrıca Hubert Debruyne ve Rousseeuw (2018), Reyna ve Junior (2005), Yang, Couillet ve McKay (2015) farklı özelliklerdeki robust istatistikler kullanarak ortalama-varyans modelinden üstün portföyler oluşturmayı hedeflemiştir.

Yukarıdaki Robust istatistiklere ek olarak finans alanında yaygın olarak kullanılan iki downside risk ölçütü veya robust risk ölçütü daha mevcuttur. VaR (riske maruz değer) ve CVaR (koşullu riske maruz değer) portföy optimizasyonunda uygulama alanı bulmuş ve etkin portföyler oluşturmakta kullanılmıştır. Lwin ve MacCarthy (2017), Krokhmal, Palmquist ve Uryasev (2002), Puelz (2001),

Giannopoulos, Clark, ve Tunaru, (2005) gibi birçok çalışmada VaR portföy optimizasyonu probleminde kullanılmıştır. Söz konusu çalışmaların bir kısmı VaR'ı amaç fonksiyonunda bir kısmı da kısıtlarda modellemiştir. VaR modelleri belli bir olasılık değerine bağlı olarak bir yatırım büyüklüğünün maksimum ne kadarının risk altında olduğunu gösterir. Benzer bir uygulama CVaR olarak karşımıza çıkmaktadır. CVaR modeli Embrechts ve Schmidli (1994) tarafından sigorta şirketlerine yönelik olarak kullanıldıktan sonra finans alanında da kullanılmaya başlanmıştır. Devam eden süreçte Alexander ve Baptista (2004), El Ghaoui vd. (2003), Zhu ve Fukushima (2008), Haung vd. (2008), Ceria ve Stubbs (2006), Rockafellar ve Uryasev (2000), Tavakoli vd. (2018), Qian vd. (2021) ve Jabr (2020) hem finans alanında hem de enerji gibi birçok alanda CVaR modellerinden faydalanmıştır.

Robust istatistiklere ek olarak Stokastik programlama modelleri ve dinamik programlama modellerinin kullanımı da literatürde son yirmi yılda oldukça yaygındır. Robust istatistikler, tahmincinin ürettiği istatistiklerin belirsizliklere karşı dirençli olmasını amaçlamaktadır. Yukarıda sözü geçen modeller ise belirsizliği modele dahil etmeyi amaçlar. Stokastik programlama bu belirsizlikleri modele dahil etmeye çalışan modellerden bir tanesidir. Chen, Sim ve Sun (2007) çalışmasında model belirsizliğini Stokastik modelleme ile birleştirip portföy oluşturmak için kullanmıştır. Bunun dışında Geyer vd. (2009) Stokastik programlama problemiyle çok aşamalı portföy oluşturmuştur. Araştırmacılar yatırımcının hayat boyu fayda fonksiyonunu maksimum yapacak şekilde oluşturdukları modelleri Stokastik modeller yardımıyla optimize etmiştir. Ayrıca Fulton ve Bastian (2019) çeşitlendirilmiş etkin portföyler elde etmek için Stokastik programlama modellerinden yararlanmıştır. Benzer şekilde belirsizliği modele dahil etmeye çalışan Dinamik programlama modelleri tümünden gelim mantığına dayanmaktadır ve finans, enerji, askeri ve üretim ve tedarik gibi geniş bir uygulama alanına sahiptir. Haung, Kogan ve Wu (2006), Frey vd. (2013), Kraft ve Steffensen (2013), Nowak ve Trzaskalik (2021) portföy teorisiyle dinamik programlama modellerini birleştiren çalışmalara örnek oluşturur.

Nihayet Robust optimizasyon modelleri, portföy teorisiyle birleşen ve varlıkların beklenen getirilerindeki belirsizlikleri doğrudan modele dahil eden, belirsizliğe karşı dirençli ve neredeyse her durumda optimal kalan modellerdir. Finansal piyasalar doğası gereği birçok risk unsuru taşır. Geçmiş gözlemlerden hareketle tahmin edilmiş ortalama beklenen getiri ve varyanslar geçmişin iyi bir projeksiyonunu sağlamasına rağmen geleceği öngörme yetenekleri her zaman mükemmel değildir. Bu noktada robust

modellerin, belirsizliği çözüm aşamasında dikkate alarak optimizasyon yapması çözümün güvenilirliğini arttırmaktadır (Fabozzi vd, 2007). Robust optimizasyon bu mantık üzerine inşa edilmiş ve belirsizlik setleri dışına çıkmamak koşuluyla belirsiz parametrelerin en kötü durumları üzerinden optimizasyon yapmaktadır.

Robust optimizasyon, Sosyter (1973) çalışmasına kadar gitmesine rağmen asıl ilgiyi 2000'li yılların başından itibaren kazanmıştır. Soyster, modelini tüm değişkenlerin aynı anda en kötü performans sergilemesi mantığı üzerine kurmuştur. Model, kısıtlarındaki değişkenlerin aynı anda en kötü senaryoyu yaşaması durumunda optimizasyon yapmaktadır. Dolayısıyla Soyster (1973) modeli robust optimizasyon modelleri içinde en muhafazakar (riske karşı en duyarlı) olanıdır. Finansal piyasalar belirsizlik içermesine rağmen portföyde yer alan değişkenlerin hepsinin aynı anda kötü performans sergilemesi düşük bir olasılığa sahiptir. Devam eden süreçte Ben-Tal ve Nemirovski (1998,1999,2000) peş peşe yayınladıkları çalışmalarla konuya katkı yapmıştır. Ben-Tal ve Nemirovski'nin önerdikleri model Sosyter (1973) modeline göre daha az muhafazakardır. Bu model daha az muhafazakarken aynı zamanda feasible (uygun) kalma olasılığı da daha düşüktür. Araştırmacılar U belirsizlik seti dahilinde kısıtlardaki bozulma olasılığının maksimum $\exp(-\frac{\Omega_i^2}{2})$ olduğunu göstermiştir. Araştırmacıların modelindeki Ω simgesi kısıtlarda yer alan bir katsayıdır. Ben-Tal ve Nemirovski'nin modeli teoride sağlam olmasına rağmen uygulamada başarısız olmuştur. Zira model doğrusal olmayan ve çözümü zor olan bir modeldir. El Ghaoui ve Lebret (1997) ve El Ghaoui vd. (1998) robust optimizasyon alanına katkı yapan diğer çalışmalardır. El Ghaoui ve Lebret (1997) belirsizliği en küçük kareler (EKK) tahmincisi için düşünmüş ve parametre değerlerine ilişkin dirençli sonuçlar elde etmiştir. Araştırmacılar ikinci dereceden optimizasyon problemi olan EKK tahmininde hata terimleri için bir üst sınır belirleyip, bu doğrultuda parametre tahmini yapmıştır. Sonuç olarak dirençli EKK probleminin ikinci dereceden programlama modeli olduğunu gösterirken, EKK'nın uygulamada etkin bir biçimde çözülebileceğini göstermiştir. El Ghaoui, Oustry ve Lebret, H. (1998) pozitif yarı tanımlı bir doğrusal programlama probleminde kısıtların belli bir oranda bozulmasını modele dahil ederek çözüm yapmıştır. Araştırmacılar bir kısıttaki parametre değerlerinin toplam belirsizliğini $\|\Delta\| \leq \rho$ olarak ifade etmiştir. Burada $\|*\|$ norm ikiyi, Δ kısıttaki toplam bozulmayı, ρ ise bozulmanın maksimum izin verildiği sınırı temsil etmektedir. Yazarlar robust pozitif yarı tanımlı doğrusal programlama adını verdikleri modelin, belirsizlik

sınırları içerisinde optimal kaldığını ve bozulma olmaması durumunda bu optimal çözümün çoktan sağlandığını göstermiştir.

Robust optimizasyon problemine diğer önemli katkı Bertsimas ve Sim (2004) tarafından yapılmıştır. Melvyn Sim modeli ilk olarak doktora tezinde ortaya atmıştır., Daha sonra, Bertsimas ve Sim (2004) “Price of Robustness” başlıklı çalışmada çözümünün dirençli olması karşılığında yatırımcının vazgeçmek zorunda olduğu amaç fonksiyonu değeri arasında değiş tokuşa izin veren modeli yayınlamıştır. Araştırmacılar Soyster’in (1973) modelini aşırı muhafazakar bulurken, Bent-Tal ve Nemirovski’nin (1998,1999,2000) modelinin ise çözümünün zor olduğunu ve doğrusal bir model olmadığını ifade etmektedir. Alternatif olarak önerdikleri modelin çözüm muhafazakarlığına karşı bir kontrol sağlarken, aynı zamanda çözümü de kolay olan doğrusal bir programlama modeli olduğunu ileri sürmüştür. Yukarıda özetleri verilen robust modeller literatürde en çok karşımıza çıkan ve kullanım alanı geniş olan modellerdir. Modeller ortaya atıldıktan sonra birçok farklı konuya uygulanmıştır.

Bertsimas ve Thiele (2006) çalışmasında Bertsimas ve Sim (2004) modelini stok teorsine uygulamıştır. Amaç fonksiyonunun kesin katsayılara sahip olduğu fakat kısıt katsayılarının belirsizlik içerdiğini varsaydıkları modelde, T zaman diliminde sınırsız siparişle bir ürünlü stok maliyeti ve sınırlı siparişle stok kontrol maliyetini minimize etmeye çalışmıştır. Stok problemine robust optimizasyon modellerini uygulayan önemli birçok çalışma daha mevcuttur [bkz. Agra vd. ,2018; Rodrigues vd. 2019; Golsefid ve Jokar, 2020].

Atamtürk ve Zhang (2006) talep belirsizliği altında ağ akış problemini bir aşamalı ve iki aşamalı problem olarak modellemiştir. Araştırmacılar iki aşamalı dağıtım modelinde çözüm muhafazakarlığını kontrol eden bir belirsizlik katsayısı kullanmıştır. Sonuç olarak belirsiz parametre sayısı arttıkça amaç fonksiyonu değerinde artış gözlemlenmiştir. Belirsizliğin kontrol edildiği iki aşamalı dağıtım probleminde amaç fonksiyonu değeri, belirsizliğin kontrol edilmediği bir aşamalı modelin amaç fonksiyon değeriyle stokastik programlama modelinin amaç fonksiyonu değeri arasında yer almıştır.

Nemirovski (2012) doğrusal, konik ve yarı tanımlı programlama şeklindeki ve yüksek oranda doyurulması gereken kısıtlara sahip robust optimizasyon problemleri için çözümün güvenilirliğini araştırmıştır. Alem ve Morabito (2012) küçük ölçekli bir mobilya üreticisi için üretim planlamasını ve stok yönetimini robust optimizasyon yöntemi kullanarak modellemiştir. Üretim maliyetini ve mobilya talebini belirsiz olarak

düşünen araştırmacı, bütçe kısıtındaki daha düşük belirsizliklerin normal hizmet seviyelerinde daha ucuz maliyetler ürettiğini göstermiştir.

Finans alanında da robust optimizasyon yönteminin kullanıldığı önemli çalışmalar yapılmıştır. Tütüncü ve Koenig (2004) klasik ortalama varyans modelinin riskten kaçınma formülasyonuna robust optimizasyon yöntemini uygulamıştır. Tütüncü ve Koenig belirsiz parametrelerin alt ve üst sınırlarını bulmak için bootstrap ve hareketli ortalama yöntemlerinden yararlanmıştır. Beklenen ortalama getiri ve varyans matrisinin uç değerlerden etkilenmemesi için yazarlar outlier gözlemleri dışlamıştır. Araştırmacıların önerdiği yöntem riske karşı muhafazakar sonuçlar üretse de belirsiz parametre sayısını kontrol etme şansı vermemektedir.

Scutella ve Recchia (2013) robust optimizasyon modellerinin portföy teorisine uygulamıştır. Klasik ortalama-varyans modeliyle belirsizlik içeren robust portföylerin karşılaştırıldığı çalışmada sonuçlar aynı getiri düzeyi için robust portföylerin daha düşük risk seviyesine sahip olduğunu göstermiştir. Ayrıca klasik ortalama-varyans modelinin Sharpe oranı, robust modellerin Sharpe oranından daha düşük hesaplanmıştır.

Wang ve Cheng (2016) (p,w)-norm amaç fonksiyonuna sahip modeli portföy optimizasyonu yapmak amacıyla kullanmıştır. Yazarlar Bertsimas ve Sim (2004) modelini de kullandıkları analizlerde, robust optimizasyon modellerinin doğrusal eşlenikleri kadar iyi performans gösterdiğini ifade etmiştir. Fakat doğrusal modeller çözüme ilişkin bir garanti sağlamazken robust modeller çözümün optimallliğini yüksek oranda garanti etmiştir.

Sengupta ve Kumar (2017) robust optimizasyon modellerini kullanarak doğrusal şans kısıtlı portföyleri simülasyon yardımıyla oluşturmuştur. Yazarlar amaç fonksiyonunu CVaR ve beklenen getiri kaybı olarak oluşturmuştur. Analiz sonuçları araştırmacıların öne sürdüğü modelin etkin sonuçlar ürettiğini, modelin en uygun varlık tahsisi için farklı risk seviyelerinden faydalandığını, yüksek riskli finansal piyasalar ve daha az oynak piyasaların karşılaştırılmasına olanak sağladığını göstermiştir. Sengupta ve Kumar (2017) ayrıca uç değerlerden kaçınmak amacıyla bootstrap yönteminden yararlanarak hesapladıkları ortalama beklenen değerleri ve varyansı modellerinde kullanmıştır.

Solares vd. (2019) güven aralığı teorisini klasik ortalama-varyans modelinin riskten kaçınma formülüne uygulamıştır. Araştırmacıların 13 yıllık veriler kullanarak oluşturdukları model portföyler, piyasanın beklenen ortalama getirisinden daha yüksek beklenen getiri oranına ulaşmıştır. Özellikle 2008 küresel krizinden dolayı varlık

getirilerinde meydana gelen aşırı dalgalanmalara karşı önerilen model uygulamada etkin sonuçlar üretmiştir.

Dai ve Kang (2021) ve Dai ve Wang (2019) klasik ortalama varyans modelinin örneklem dönemi dışında iyi performans göstermemesi sorununa karşılık olarak, Brodie vd. (2009) çalışmasında, adına L_1 regülasyon dedikleri bir model önermiştir. Araştırmacılar önerdiği model ile, oynaklığın yüksek olduğu ve oynaklığın düşük olduğu dönemlerde ayrı ayrı hesaplanmış kovaryans matrislerinin ağırlıklı ortalamasıyla hesaplanan Shrinkage tahmincisini birleştirmiştir. Adı geçen hesaplama yöntemlerini daha sonra robust optimizasyon yöntemiyle birleştiren araştırmacılar, ellipsoidal ve çarpık dağılıma dayalı iki farklı belirsizlik seti için önerdikleri yöntemin etkinliğini test etmiştir. Sonuç olarak, analizler örneklem dönemi dışında önerilen yöntemin iyi performans sergilediğini göstermiştir.

Kang vd. (2019) klasik ortalama varyans modelinin örneklem dışında kötü performans göstermesi, bazı varlıklara gereğinden fazla ağırlık ataması problemlerine çözüm olarak robust optimizasyon yöntemine dayalı portföyler oluşturmuştur. Amaç fonksiyonunun CVaR olduğu modelinde belirsizlik setlerinin oluşturulması aşamasında bootstrap yöntemini kullanmıştır. Sonuçlara göre, çalışmada önerilen metodoloji örneklem dışındaki dönemde, kıyaslanan modellerden daha iyi getiri sağlamıştır. Başka bir çalışmada Kang ve Li (2020) kapalı formdaki CVaR amaç fonksiyonuna sahip portföyler oluşturmuştur. Araştırmacıların modelinde varlık dağılımları ve varlık momentleri belirsizlik içermektedir. Riskten kaçınma katsayısı içeren model olarak oluşturdukları optimizasyon probleminde açığa satışa izin verilmiştir. Sonuçlar çalışmada önerilen modelin düşük muhafazakarlık derecelerinde yüksek direnç sağlayan portföyler oluşturduğunu göstermiştir.

Ji, Lejeune ve Fan (2020) robust doğrusallaştırılmış istikrarlı kuyruk getiri oranı (DRLSTARR) olarak isimlendirdikleri modelde, amaç fonksiyonu olarak olumsuz durumlu doğrusallaştırılmış kuyruk getiri oranı (LSTARR) fonksiyonunu maksimize etmiştir. Ji ve arkadaşları dağılım belirsizliğinin Wasserstein belirsizlik kümesine ait olduğunu varsaymaktadır. Çalışmada getirilerin kuyruklarındaki kayıpları ifade eden, dağılımdaki belirsizlikler ve getirilerin sürekli realizasyonu olmak üzere iki farklı durumu incelenmiştir. En kötü senaryo durumunun modellenmesi amacıyla konik dualite teoremini kullanan yazarların 400 varlık ve 180 dönemlik getirilerle oluşturdukları robust portföyler, başta $1/N$ eşit ağırlıklı portföyler olmak üzere karşılaştırılan bütün modellerden daha iyi performans göstermiştir.

Li, Zhou ve Tan (2021) beklentiler teorisiyle robust optimizasyon yöntemini birlikte kullanarak gray wolf optimization (GWO) adında bir algoritma önermiştir. Beklenti teorisi yatırımcıların beklenen getiri ve kayıplara karşı tutumlarını incelemektedir. Rasyonel yatırımcıların beklentileri homojendir ve yatırımcıların riske karşı tutumları süreklilik arz etmektedir. Fakat yatırımcının psikolojik karakteri bir yatırımın getirisi ve kayıplarına karşı tutumlarında belirleyicidir. Araştırmacılar constant relative risk aversion (CRRA) ve S-Shaped olmak üzere iki amaç fonksiyonunu optimize etmiştir. Yapılan analizlere göre araştırmacıların önerdiği GWO algoritması, genetik algoritma ve geleneksel yöntemlerden daha üstün sonuçlar üretmiştir.

Robust optimizasyonla ilgili farklı amaç fonksiyonlarına sahip benzer çalışmalar da yapılmıştır. Deng vd. (2013) hesapladıkları güven aralıklarını belirsizlik seti olarak kullanmış ve Value-at-Risk (VaR) ile Sharpe oranını birleştirerek robust portföyler oluşturmuştur. Kapsos vd. (2014) da robust optimizasyonla portföy teorisini birleştirmiştir. Araştırmacılar kapalı küme, ellipsoidal ve birleşik dağılımlara ilişkin belirsizlik setleri kullanarak Omega oranının belirsizlik setlerine tepkisini ölçmüştür. Bir başka çalışmada Tong ve Wu (2014) getiri risk oranını robust optimizasyon ve birleşik dağılımlı belirsizlik setlerini birlikte kullanarak optimize etmiştir. Liu vd. (2017) momentler ile karakterize edilmiş belirsizlik setlerini kullanarak DRO (Distributionally Robust Optimization) getiri risk oranını optimize etmiştir. Yazarlar Lagrange dualite yöntemini kullanarak, robust optimizasyon problemini doğrusal olmayan yarı sonsuz bir programlama problemine dönüştürmüş ve ortaya çıkan yarı sonsuz kısıtlamaya yaklaşmak için entropik risk ölçüsünü kullanmıştır.

Sehgal ve Mehra (2019) simetrik kapalı küme belirsizlik setleri kullanarak getiri-risk oranı analizi yapmıştır. Araştırmacılar robust Omega oranını, mutlak sapma oranını ve STARR (the weighted stable tail adjusted return ratio) oranını optimize etmiştir. Diğer bir çalışmada Ji ve Lejeune (2020) bir çeşit dağılım olarak robust getiri-risk oranı optimizasyonu yapmıştır. Yazarlar belirsizlik setleri olarak Wessersstein belirsizliğini kullanmıştır.

BÖLÜM III

ORTALAMA VARYANS MODELİ

3.1. Markowitz'in Ortalama Varyans Modeli

Varlık tahsisi sorunu (yatırım yapılacak varlıkların portföy içindeki ağırlıkları) finansal teorilerin en temel problemlerinden biridir. Modern portföy teorisi, yatırım yapılabilecek varlık uzayından en yüksek getiriye sağlayacak varlık bileşenini aramaktadır. Temel soru şudur; önceden belirlenmiş bir risk seviyesi için, N boyutlu varlık uzayında yatırımın dağılımı nasıl olmalıdır? Fakat bu şekilde ifade edildiğinde optimallik ve riskin anlamı belirsiz kalmaktadır. Temelleri Markowitz'in (1952) ortalama varyans yaklaşımıyla atılan modern portföy teorisi, belirli bir optimallik ve risk kombinasyonu bu soruya cevap vermeye çalışmaktadır. Markowitz, portföy teorisindeki varlık tahsisi sorununu ortalama ve varyans seçimi olarak formüle etmiştir. Varyansı risk olarak düşünen Markowitz, önceden belirlenmiş bir risk seviyesi için beklenen getiriye maksimum düzeye çıkaran veya önceden belirlenmiş beklenen getiri seviyesini için portföy riskini minimum yapan ve bu teorik çerçevede daha fazla ilerlemenin kapısını açan etkin bir sınır elde etmiştir. Ortalama varyans modelindeki temel mantık, bir varlığa yatırım yapılırken sadece o varlığın özelliklerinin değil, yatırım yapılacak varlığın diğer varlıklarla birlikte hareketinin de düşünülmesi gerektiğidir. Böylelikle model, aynı getiri seviyesine sahip fakat varlıklar arasındaki ilişkiyi dikkate almayan ve daha yüksek riske sahip portföylerle ortalama varyans modeli arasında seçim yapma olanağı tanımıştır [bkz. Elton ve Gruber, 1997; Cohen ve Natoli, 2003].

Markowitz'in çalışması yayınlandığı günden itibaren finans alanında çalışan herkesin dikkatini çekmiştir ve devam eden dönemde ortalama varyans modeline birçok katkı yapılmıştır. Çok geçmeden Tobin (1958) fayda fonksiyonu ve farksızlık eğrilerinin modele dâhil edilmesi fikrini ortaya atmıştır. Ayrıca ortalama varyans modeli getirilerin sadece birinci ve ikinci momentlerini kullandığı için, getirilerin dağılım özelliklerini yansıtmaması amacıyla modele çarpıklık ve basıklık gibi daha yüksek momentleri dâhil eden çalışmalar da yapılmıştır [bkz. Lee, 1977; Kraus ve Litzenberger, 1976].

Ortalama varyans portföy teorisi, bir yatırımcının tek bir dönemdeki getiri dağılımlarıyla ilgilendiği durumlarda optimum portföyü oluşturmak için geliştirilmiştir.

Bir yatırımcının, her bir varlığın ortalama getiri ve varyansları tek bir dönem için tahmin ettiği varsayılır. Bu noktada tahmin edilecek olan ortalama ve varyans için örneklem boyutunun doğru seçilmesi çok önemlidir. Ortalama varyans modelindeki önemli teorik sorunlardan biri, yatırım çok dönemli olduğunda tek dönemli modelin nasıl değiştirileceğidir. Fama (1975), gibi çalışmalar çok dönemli yatırım sorunu için bir takım varsayımlar altında ve belli problemler için uygun modeller önermiştir. Bu varsayımların en önemlisi, dönemler arasındaki getiriler ve kovaryansların bağımsız olmasıdır. Fakat yapılan bilimsel çalışmalar gösteriyor ki beklenen getiri vektörleri ve kovaryanslar dönemler arasında bağımsız değildir [bkz. Fama ve French, 1992; Campbell ve Shiller 1988; Lewellen. 2014; Berggrun vd., 2019]. Çok dönemli portföy seçimi genel olarak tek dönemli ortalama varyans modelinin bir dizi tekrarı şeklindedir. Fakat burada seçilecek olan etkin portföyler açısından önemli bir fark vardır. Aradaki fark, çok dönemli yatırım durumunda uygun fayda fonksiyonunun, birden fazla dönemi hesaba katan türetilmiş bir fayda fonksiyonu olmasıdır ve bu fonksiyon, tek bir dönem boyunca karar vermek için uygun olan fayda fonksiyonundan farklıdır (Elton ve Gruber, 1997). Başka bir ifadeyle çok dönemli yatırımlarda kullanılan uygun fayda fonksiyonu, tek dönemli fayda fonksiyonlarının bir bileşimidir ve tek dönemli fayda fonksiyonundan farklıdır.

Sharpe (1964) ve Lintner (1969) risksiz faiz oranının ortalama varyans modeline dahil edilmesi fikrini ortaya atmıştır. Bu fikir piyasa eğrisi ve CAPM modelinin geliştirilmesine olanak sağlamıştır. Buna göre bir yatırımcı risksiz bir varlığa yatırım yapabiliyorsa, yatırımcının riskli portföy seçimi bellidir ve risk iştahından bağımsız olduğunu göstermek kolaydır. Bunun önemli sonuçları vardır. Birincisi, yatırımcı açısından risksiz faiz oranından etkin sınıra teğet çizilen doğrunun etkin sınıra eşit olduğu portföy en iyi portföydür. Teknik olarak teğet portföy, beklenen getiriyle risksiz varlık getirisinin farkının standart sapmaya oranını maksimize eden portföydür. İkincisi, bir yatırım fonu teoremine yol açar, yani tüm yatırımcılar, biri risksiz varlıktan ve diğeri teğet portföyü temsil eden iki yatırım fonunu karıştırarak istedikleri portföyü elde edebilir. Ayrıca, bankalar veya sigorta şirketleri gibi finansal kuruluşlar için, yatırımcıya hangi tür karıştırılmış fonların sunulacağı konusunda rehberlik sağlar (Elton ve Gruber, 1997).

Yukarıda özetlenen katkılara ve yüksek momentler kullanma çabalarına rağmen ortalama varyans modeli popülerliğini hiç kaybetmemiştir. Buna iki sebep gösterilebilir. Birincisi, yüksek momentlerin kullanılması durumunda daha etkin portföylerin

oluşacağı yönünde bir fikir birliği olmamasıdır. Yüksek momentler kullanan bazı çalışmalar daha etkin sonuç elde edildiğini gösterirken, bazı çalışmalarda ise tam tersi sonuçlar elde edilmiştir. İkinci ise, ortalama varyans modeli teorik olarak çok iyi tasarlanmıştır ve finans alanında çalışan herkesçe iyi bilinmektedir.

Portföy seçimi teorisi normatif bir teodir³. Yatırımcıların standart davranışlarını tanımlar. Markowitz'in ortalama varyans modeli de bu tabanda ortaya atılmıştır. Ortalama varyans modeline göre yatırımcı riski sevmez ve riskten kaçınır. Başka bir ifade ile aynı getiri düzeyine sahip iki portföyden düşük riskli olanı seçer. Geleneksel bakış açısı tüm yumurtaların aynı sepete konulmaması gerektiğini söyler. Yani birbiriyle yüksek korelasyonlu varlıkların hepsinin aynı portföye koyulmaması gerektiğini ifade eder. Çünkü büyük olasılıkla yüksek korelasyonlu varlıklardan biri kötü performans sergilediğinde diğerleri de kötü performans sergileyecektir. Dolayısıyla çeşitlendirme, portföy teorisinin önemli önceliklerindendir. Çeşitlendirmenin temelinde "Merkezi Limit Teoremi" yer almaktadır. Merkezi Limit Teoremine göre bağımsız tesadüfi dağılan ve sonlu bir varyansa sahip eş değişkenlerin dağılımı asimptotik olarak Gaussiandır (Fabozzi vd., ss.19, 2007).

$X_1, X_2, X_3, X_4, \dots, X_N$ birbirinden bağımsız sonlu varyansa (σ^2) ve ortalamaya (μ) sahip rassal değişkenler olsun. O halde;

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N}} \sum_{i=1}^N (X_i - \mu) \leq y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$$

olacaktır. Yani rassal değişkenlerin kendi ortalamasından sapmasının ortalaması, N yeterince büyük ise normal dağılıma uyacaktır. Her bir rassal değişkenin ortalama getirisi R_i ise eşit ağırlıklı portföyün getirisi,

$$R_p = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N R_i$$

olacaktır. Merkezi Limit Teoremi N sonsuza giderken bu portföyün varyansının;

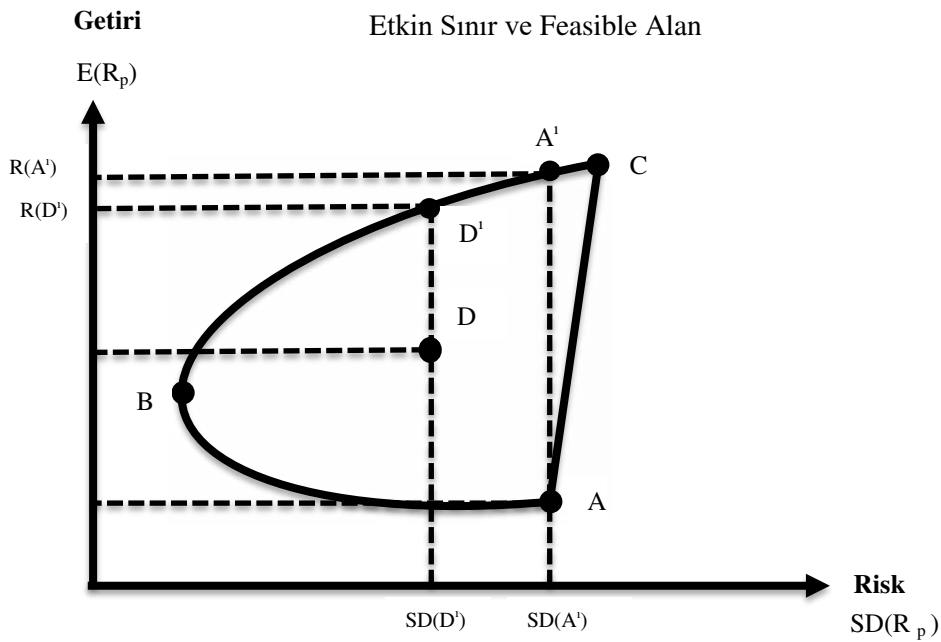
³ Normatif teori yatırım sürecinde yatırımcının standart davranışını ifade eder. TDK'da normatif kelimesi "Kurallarla, yasalarla ilgili olan" şeklinde tanımlanmıştır. Buna karşın Pozitif Teoriler olgular arasında var olan değil olması gereken ilişkileri formüle eder (örn. CAPM model).

$$\text{var}(R_p) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^N \text{var}(R_i) = \frac{1}{N^2} N \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{N} = 0$$

olacağını söyler. Yani çeşitlendirme (N) attıkça portföy riskinin sıfıra yakınsayacağını ima eder. Fakat uygulamada böyle bir şey mümkün değildir. Gerçek hayatta varlıklar arasındaki korelasyon sıfır olmadığı için portföy riskinin sıfıra yakınsaması da ütopiktir. Ayrıca hisse senetleri genelde normal dağılmaz ve çoğunlukla kalın kuyruk dağılıma sahiptir. Yine de portföy çeşitlendirmesinin portföy riskini azaltmayacağı anlamına gelmez. Modern portföy teorisi ve uygulamalı çalışmalar çeşitlendirme yoluyla riskin belli bir kısmının dağıtılabileceğini göstermektedir. Fakat portföy riskini tamamen ortadan kaldırmak mümkün değildir. Bunun ile ilgili daha detaylı bilgiler “ortalama varyans modelinin matematiği” alt bölümünde verilmiştir.

3.2.Ortalama Varyans Modeli ve Etkin Sınırın Geometrik Yorumu

Bu alt bölümde Markowitz tarafından ortaya atılan ortalama varyans modelinin geometrik olarak nasıl yorumlandığı, farklı yatırımcılar için farklı portföylerin mümkün olduğu ve risksiz bir varlığa yatırım yapılması durumunda risk ve etkin sınır birleşiminin nasıl yapıldığı konuları açıklanmıştır.



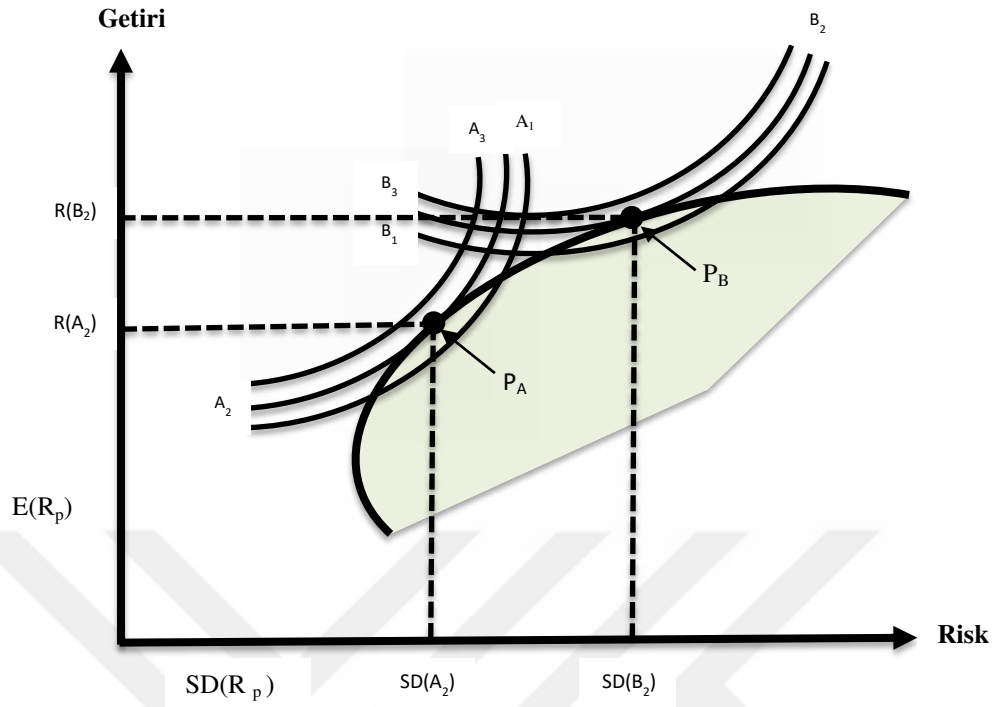
Şekil 1. Ortalama-varyans modeli etkin sınır ve uygun alan

Şekil 1 ortalama varyans modeli için etkin sınır ve feasible (uygun) portföyleri göstermektedir. Ortalama varyans modeli ABC yayını etkin sınır olarak tanımlamaktadır. Fakat yatırım aşamasında AB yayı üzerindeki herhangi bir nokta rasyonel hareket eden bir yatırımcının portföy uzayında yer almayacaktır. Zira, AB arasındaki tüm noktalarda aynı risk düzeyi için daha yüksek beklenen getiri sağlayan portföyler mevcuttur.

A noktasındaki portföy minimum getiri ve maksimum riske sahip portföydür. Bu portföy etkin sınır üzerinde yer almasına rağmen aynı risk düzeyine sahip fakat daha yüksek getiri sağlayan bir portföye yatırım yapmak mümkündür. A' portföyü, A portföyü ile aynı risk düzeyindeyken daha yüksek bir beklenen getiri oranına sahiptir. Dolayısıyla $SD(A')$ kadar riske razı olan bir yatırımcı A yerine A' portföyüne yatırım yapacaktır.

B portföyü etkin sınır üzerindeki minimum riske sahip portföydür. Riskten kaçınan yatırımcıların tercih edeceği portföy B'dir. C noktasındaki portföy ise maksimum riske sahip portföydür. Maksimum risk aynı zamanda maksimum beklenen yatırım getiri anlamına gelmektedir. Son olarak, D noktasındaki portföy feasible portföyler arasında yer almasına rağmen etkin bir portföy değildir. Çünkü aynı risk düzeyinde daha fazla getiri sağlayacak D' portföyüne yatırım yapmak mümkündür.

ABC sınırı üzerindeki portföyler etkin ise bu sınır üzerindeki hangi portföye yatırım yapmak gerekmektedir? Bu sorunun cevabı yatırımcının fayda fonksiyonu ve farksızlık eğrisine bağlıdır. Bazı yatırımcıların risk iştahı daha yüksek iken bazı yatırımcılar daha düşük riskli portföyleri tercih edecektir. Risk iştahı yüksek olan yatırımcının farksızlık eğrisi daha yatıktır. Başka bir ifade ile iştahı yüksek olan yatırımcıya ait farksızlık eğrisinin eğimi daha düşüktür. Risk iştahı düşük olan yatırımcının ise tatmin düzeyi daha yüksek olacaktır. Dolayısıyla bu yatırımcının farksızlık eğrisi riske karşı daha duyarlı olacaktır.

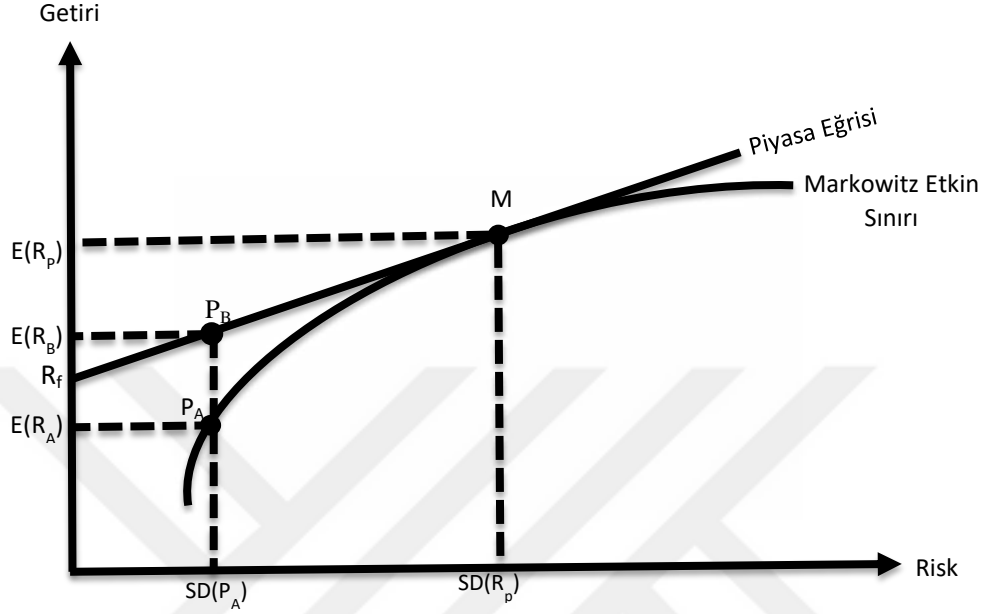


Şekil 2. Etkin sınır ve yatırımcı farksızlık eğrisi

A ve B gibi iki yatırımcının farksızlık eğrileri yukarıdaki şekilde gösterilmiştir. A yatırımcısının risk iştahı daha düşük ve tatmin düzeyi daha yüksektir. Yani yatırımından daha yüksek beklenen getiri istemektedir. B yatırımcısı ise risk iştahı yüksek ve tatmin düzeyi daha düşüktür. Dolayısıyla A yatırımcısı düşük bir risk karşısında daha düşük bir beklenen getiriye razı olmaktadır, B yatırımcısı yüksek risk ve yüksek getiriyle tatmin olmaktadır. Risk iştahı ve tatmin düzeyine göre oluşturulacak portföyler de farklılık gösterecektir. Yatırımcı A, P_A noktasındaki portföye yatırım yaparken, B yatırımcısı P_B noktasındaki portföye yatırım yapacaktır. A yatırımcısı için P_A noktasının altındaki bir portföye yatırım yapmak daha az beklenen getiriye sebep olurken, bu nokta üzerindeki bir portföye yatırım yapmak mevcut risk seviyesin göre mümkün değildir. Benzer şekilde B yatırımcısı için de en iyi portföy etkin sınır ile yatırımcının farksızlık eğrisinin kesiştiği noktadadır. Bu nokta altındaki hiçbir portföy etkin değilken, üstündeki bir noktaya da mevcut risk seviyesiyle ulaşmak mümkün değildir.

Etkin sınır üzerinde tercih edilecek portföyün seçiminde, önemli olan bir diğer nokta risksiz faiz oranıdır. Markowitz, ortalama varyans modelini sadece riskli

varlıklara yatırım amacıyla oluşturmuştur. Fakat bir adet risksiz varlık ve geriye kalan tüm varlıkların riskli olduğu portföyler de mümkündür. Bu durumda R_f risksiz faiz oranı olmak üzere, risksiz faiz oranından Markowitz'in etkin sınırına çizilen doğrunun etkin sınıra teğet olduğu noktadaki portföye yatırım öngörülmektedir.



Şekil 3. Risksiz faiz oranı ve etkin sınır

Yukarıdaki şekil riskli ve risksiz varlıklardan oluşan portföyler için etkin sınırı temsil etmektedir. Yatırımcı risksiz faiz oranına erişebiliyorsa, belli bir risk düzeyine kadar portföyüne riskli varlık almayacaktır. Örneğin $SD(P_A)$ oranında risk yüklenmek isteyen bir yatırımcı, bu risk düzeyinde portföy oluşturursa $E(R_A)$ kadar bir beklenen getiri elde edecektir. Fakat yatırımcı sadece risksiz varlığa yatırım yaparak $E(R_B)$ düzeyinde beklenen getiri elde edecektir. Bu yatırımcı için en uygun portföy M noktasında oluşacaktır. Bu noktadaki portföy ile yatırımcı $SD(R_p)$ kadar risk üstlenirken, $E(R_p)$ kadar beklenen getiri elde edecektir (Fabozzi vd., ss. 38, 2007).

3.3.Ortalama Varyans Modelinin Matematiği

Markowitz (1952) ortalama varyans modelini, belli bir beklenen getiri oranı altında varyans minimizasyonu veya belli bir risk seviyesi altında beklenen getiri maksimizasyonu olarak tanımlamıştır. Dolayısıyla ortalama varyans modeli beklenen getiri maksimizasyonu, portföy riski minimizasyonu veya bu ikisinin aynı amaç fonksiyonunda olduğu eş modeller olarak optimize edilebilir. Üç model de birbiri yerine

kullanılabilir ve birbirine denktir.

$V_1, V_2, \dots, V_N$ N adet riskli varlık olmak üzere; μ_i ve σ_i ($i=1, \dots, N$) sırasıyla bu varlıkların beklenen getirisi ve standart sapmasıdır. ρ_{ij} ($i \neq j$) i ve j varlıkları arasındaki doğrusal ilişkiyi gösteren korelasyon katsayısıdır. $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ ve $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ sırasıyla varyans ve kovaryansı ifade etmektedir. Son olarak w_i ($i=1, \dots, N$) portföydeki riskli varlıkların ağırlıklarıdır. Bu durumda;

$$E[R_p] = w_1\mu_1 + \dots + w_n\mu_n = \mu^t w \quad (3.1)$$

$$\text{Var}[R_p] = \sum_{i,j} \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j w_i w_j = w^t \Sigma w \quad (3.2)$$

Denklem (3.1) portföyün toplam beklenen getirisini ve denklem (3.2) ise portföy riskini göstermektedir. Etkin portföyler oluşturmak istediğimize göre portföy getirisini maksimum, riskini ise minimum yapacak en uygun $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]^t$ ağırlıkların hesaplanması gerekmektedir. Markowitz bu mantıktan hareketle,

$$\text{Maks}_w = w_1\mu_1 + \dots + w_N\mu_N = \mu^t w \quad (3.3)$$

Kısıtlar:

$$\sum_i \sum_j (\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j w_i w_j) = w^t \Sigma w \leq \sigma_0^2$$

$$w_1 + w_2 + \dots + w_N = w^t \iota = 1$$

$$w_i \geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N)$$

Etkin portföy seçim problemini bu şekilde tanımlamıştır. Burada σ_0^2 , yatırımcının yüklenmek istediği maksimum riski ifade etmektedir ve keyfi olarak seçilmektedir. $\iota = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^t$ tüm elemanları bir olan sütun vektörüdür. $\mu = [\mu_1 \ \mu_2 \ \dots \ \mu_N]^t$ ortalama getiriler vektörüdür. Σ ise varlıklar arasındaki kovaryansları gösteren, simetrik ve pozitif yarı tanımlı matristir⁴. Böylelikle ortalama varyans modeli bir maksimizasyon problemi olarak tanımlanmıştır. Yukarıda da ifade edildiği gibi portföy problemini risk minimizasyonu olarak da oluşturmak mümkündür.

⁴ Bir matris $s^t \Sigma s \geq 0$; $\forall s$ sağlıyorsa pozitif yarı tanımlıdır. Varyans kovaryansı matrisleri pozitif yarı tanımlı olma özelliğini karşılamaktadır. Ayrıca $s^t \Sigma s > 0$; $\forall s$ ise Σ matrisi pozitif tanımlıdır.

$$Min_w = \sum_i \sum_j (\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j w_i w_j) = w^T \Sigma w \quad (3.4)$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned} w_1 \mu_1 + \dots + w_n \mu_n &= \mu^T w \geq R_0 \\ \sum_i w_i &= (w_1 + w_2 + \dots + w_N) = w^T \iota = 1 \\ w_i &\geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

Burada R_0 yatırımcının razı olacağı minimum beklenen getiri oranıdır. Ortalama varyans modelinin bu yapısında etkin portföy, belli bir beklenen getiriye bağlı olarak portföy riskinin minimum olmasını sağlar. Modelin bir diğer yapısında ise beklenen değer ve risk ölçütleri amaç fonksiyonunda kullanılmaktadır.

$$Maks_w = \mu^T w - \frac{\delta}{2} w^T \Sigma w \quad (3.5)$$

Kısıtlar:

$$\begin{aligned} w^T \iota &= 1 \\ w_i &\geq 0, \quad (i = 1, 2, \dots, N) \end{aligned}$$

Burada, δ riskten kaçınma katsayısıdır⁵. Riskten kaçınma katsayısı yüksek ise model riske karşı daha duyarlı hale gelecektir [bkz. Cornuejols ve Tütüncü, 2006; Goetzmann vd., 2014; Fabozzi vd., 2007].

3.4. Ortalama Varyans Modelinde Kullanılan Kısıtlar

Bilimsel çalışmalarda ortalama varyans modeli ile portföy optimizasyonu yapılırken kullanılan birçok kısıt vardır. Bunların başında toplam yatırım oranlarının bire eşit olması ve açığa satışa izin vermeyen kısıtlar yer almaktadır. Literatürde en çok kullanılan kısıtların modele nasıl ekleneceği aşağıda açıklanmıştır.

3.4.1. Toplam Yatırım Kısıtı

Yatırımcı yatırım planı yaparken (3.3), (3.4) veya (3.5) modellerinden hangisini kullanacak olursa olsun toplam yatırımlarının bire eşit olması gerekmektedir. Bu noktada $\sum_i w_i = (w_1 + w_2 + \dots + w_N) = w^T \iota = 1$ kısıtı kullanılmaktadır ve bu kısıt

⁵ Riskten kaçınma katsayısı genellikle $0 \leq \delta \leq 1$ şeklindedir. $\delta = 0$ durumunda model riske duyarsızdır ve sadece beklenen getiri maksimizasyonu yapar. $\delta = 1$ ise model riske duyarlıdır bu durumda yatırımcının farksızlık eğrisi diktir.

toplam yatırım oranının 1'e eşit olmasını sağlar. Sonuçta portföy optimizasyonu, belli bir risk altında getiri maksimizasyonunu ya da belli bir getiri kabulü altında risk minimizasyonu sağlayacak en uygun hisse dağılımını bulmayı amaçlamaktadır. Dolayısıyla portföydeki hisselerin ağırlıklar toplamının bire eşit olması gerekmektedir. Bu kısıta bütçe kısıtı da denilmektedir.

3.4.2. Açığa Satış Kısıtı

Açığa satış, yatırımcının sahip olmadığı varlık fiyatının düşüş beklentisiyle bugünden borçlanıp fiyatı düştüğünde varlık borcunu ödemesi işlemidir. Açığa satış işleminde, işlem parayla değil varlık üzerinden yapılmaktadır. Söz gelimi, A pay senedinin orta vadede düşeceğini bekleyen bir yatırımcı bu hisse senedinden K adet borçlanıp piyasada satmaktadır. Yüksek fiyattan piyasaya K adet satan yatırımcı, hissenin fiyatı düştüğünde piyasadan düşük fiyattan (yeni oluşan fiyat) K adet hisse satın alıp borcunu ödeyecektir. Yatırımcı hiç bütçe ayırmadan (ilk fiyat-son fiyat) $\times$ K kadar getiri elde edecektir. Ortalama varyans modeline $w_i \geq 0$ kısıtı açığa satışa izin vermeyi engellemektedir. Başka bir ifadeyle $w_i = \text{sınırlandırılmamış}$ ise açığa satışa izin verildiği anlamına gelmektedir. Pratikte açığa satışa genellikle izin verilmemektedir.

3.4.3. Maksimum veya Minimum Yatırım Kısıtı

Yatırımcı portföyüne aldığı varlıkların portföy içindeki oranını sınırlamak veya belli bir sektörde faaliyet gösteren şirketlerin hisselerine minimum ağırlık vermek isteyebilir. Bu durumda maksimum veya minimum yatırım kısıtlarını kullanabilir. Söz gelimi modele;

$$l \leq w_j \leq u ; j \in I_i$$

kısıtı eklenerek belli bir hisse senedi grubu için minimum ve maksimum yapılacak yatırım miktarları belirlenebilir. Minimum/maksimum kısıtın bir diğer uygulaması ise hisse senedi ağırlığına herhangi bir kısıtlama koymadan belli bir grup hissenin portföy içindeki toplam ağırlığı sınırlandırmaktır.

$$\frac{\sum_j w_j}{\sum_i w_i} \leq c$$

burada $j \in I_i$, $i = (1, 2, \dots, N)$ ve $0 \leq c \leq 1$ olacak şekilde I bir sektörü veya keyfi seçilmiş bir hisse senedi grubunu temsil edebilir. Böylelikle yatırımcı tek tek hisse senetlerinin ağırlıklarını veya bir hisse senedi grubunun portföy içindeki toplam ağırlığını da sınırlayabilir.

3.4.4. Risk Faktörleri Kısıtı

Uygulamada, portföy yöneticileri faktör modellerini çok sık kullanmaktadır. Portföy oluştururken risk faktörlerinin sınırlanması da ortalama varyans modelinde kullanılan kısıtlar arasındadır. Bu riskler genellikle hisse senedinin endekse (piyasa) olan duyarlılık, işlem hacmi, piyasadaki toplam hisse değeri (büyüklük) vs. olmaktadır. Bir hisse senedinin K kadar risk faktörü taşıdığı varsayıldığında bir hisse senedinin beklenen getirisi;

$$R_i = \alpha_i + \sum_{k=1}^K \beta_{ik} F_k + \varepsilon_i$$

burada F_k faktörleri göstermektedir, β_{ik} (BETA) katsayısı, i . hisse senedinin k . faktöre duyarlılığını göstermektedir, ε_i sistematik olmayan getirileri (firmaya özgün) ifade etmektedir. Portföy yöneticisi veya yatırımcı bu risk faktörlerini aşağıdaki kısıt ile sınırlayabilir.

$$\sum_{i=1}^N \beta_{ik} w_i \leq U_k$$

Bu kısıt portföyde yer alacak tüm hisse senetlerinin faktör k 'ya duyarlılığının maksimum U_k olmasını garanti eder. Burada U_k yatırımcının keyfi seçtiği bir sabittir. Portföyün k faktörüne duyarlılığı sıfır olması da istenebilir. Bu durumda;

$$\sum_{i=1}^N \beta_{ik} w_i = 0$$

şeklindeki kısıt kullanılacaktır (Fabozzi vd., 2007, ss. 90).

3.4.5. Endeksten Sapma Kısıtı (İzleme Hatası)⁶

Portföy yöneticileri bazen portföy getirisinin veya portföy riskinin belirlenen bir endeksten/yatırım fonundan sapmasını minimum yapmak veya sınırlamak isteyebilir. Bu durumda hissenin portföy içindeki oranıyla, endeks içindeki oranı arasındaki fark belli bir seviyenin altına çekilebilir. Örneğin w_b bir hissenin ana endeks/fon içindeki oranı olsun. R , hisse senetlerinin getiri vektörü olmak üzere;

$$R_b = w_b' R$$

endeksin beklenen getirisini gösterecektir. Portföy yöneticisi varlıkların portföy içindeki ağırlıklarıyla endeks ağırlıkları arasındaki farkı M veya daha küçük yapmak isterse;

$$\|w - w_b\| \leq M$$

kısıtını kullanacaktır. Benzer şekilde bu işlemi herhangi bir sektördeki varlıklar için de yapabilir.

$$\sum_{j \in I_i} (w_j - w_{bj}) \leq M_i$$

$j \in I_i$ durumunda portföy ağırlıklarıyla endeks ağırlıkları arasındaki fark maksimum M_i kadar olacaktır. M_i burada portföy yöneticisinin seçtiği keyfi bir orandır. Benzer bir mantıkla ortalama varyans modeline izleme hatası kısıtı da eklenebilir. Bu durumda ise kısıt, endeks getirisi ile portföy getirisi arasındaki farkın varyansını sınırlayacaktır. TEV_p ile gösterirsek,

$$\begin{aligned} TEV_p &= \text{var}(R_p - R_b) \\ &= \text{var}(w' R - w_b' R) \\ &= (w - w_b)' \text{var}(R) (w - w_b) \\ &= (w - w_b)' \Sigma (w - w_b) \end{aligned}$$

Her zamanki gibi Σ burada getiri varyans-kovaryans matrisidir. R_p portföy getirisi vektörüken, R_b indeks getiri vektörüdür. O halde izleme hatasını sınırlamak için modele,

$$(w - w_b)' \Sigma (w - w_b) \leq \sigma_{TE}^2$$

kısıtı eklenebilir. Burada σ_{TE}^2 keyfi belirlenmiş bir sabittir (Fabozzi vd., 2007, ss. 90).

⁶ “Tracking Error Constraints”

3.5. Ortalama Varyans Modelinin Optimizasyonu ve Etkin Sınır

Yukarıda ortalama varyans modelinde kullanılması mümkün kısıtlardan birkaç tanesi özetlenmiştir. Portföy yöneticisinin isteklerine cevap veren “m” kısıtlı genel bir ortalama varyans modeli oluşturulduktan sonra modelin çözüm aşamasına geçilecektir. Ortalama varyans modelinin optimizasyonu, esasen kuadratik programlama⁷ modelinin optimizasyonudur. “M” genel kısıtlı bir portföy optimizasyon problemi;

$$f(w) = maks \left\{ \mu^t w - \frac{\delta}{2} w^t \Sigma w \mid Aw = b \right\} \quad (3.6)$$

şeklinde tanımlanabilir. Kolaylık olması açısından δ parametresi modelden dışlandığında denklem (3.6)’deki model,

$$f(w) = maks \left\{ \mu^t w - \frac{1}{2} w^t \Sigma w \mid Aw = b \right\} \quad (3.7)$$

olacaktır. Burada Σ kovaryans matrisi daha önce belirtildiği gibi pozitif yarı tanımlı ve simetrik bir matristir. A (mxn) boyutlu kısıt katsayıları matrisi⁸, b (mx1) kaynak katsayıları vektörü, $f(w)$ fonksiyonun gradyan (eğim) vektörü, $\nabla f(w)$ ve N boyutlu sütun vektörüdür.

$$\nabla f(w) = \left[\frac{\partial f}{\partial w_1} \quad \frac{\partial f}{\partial w_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial w_N} \right]^t$$

Bu bilgiler altında, denklem (3.7)’daki ortalama varyans modeli için eğim vektörü;

$$\nabla f(w) = \mu - \Sigma w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_N \end{bmatrix}_{Nx1} - \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{1N}^2 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{N1}^2 & \dots & \sigma_{NN}^2 \end{bmatrix}_{NxN} \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}_{Nx1}$$

Optimizasyon teorisinde bir fonksiyonun bir noktadaki gradyan (eğim) vektörü, fonksiyonun artış hızının en yüksek olduğu yönü gösterir ve fonksiyonun o noktadaki

⁷ Bir Kuadratik fonksiyon, tüm elemanlarının 0,1 veya 2. dereceden olan fonksiyondur. En genel hali ile kuadratik bir fonksiyon $\sum_{i=1}^n c_i w_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} w_i w_j$ şeklinde tanımlanmaktadır.

⁸ Burada sadece bir kısıt üzerinden değerlendirme yapılmıştır. M adet kısıt olması durumunda A (mxn), b (mx1) boyutlu olacaktır.

tanjantına ortogonaldır (Michael, 2010, ss. 4). Bu bilgiyi kullanarak tek kısıtlı bir ortalama varyans modeli için $Aw = b$ doğrusal kısıtın gradyan vektörü $a_1 = [a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1N}]^t$ olacaktır. Dolayısıyla optimal noktada $\nabla f(w)$ fonksiyonun eğim (gradyan) vektörü ile kısıt denkleminin eğim vektörü a_1 çarpım halinde olacaktır. Bu koşul, kısıt altında optimizasyonu sağlamaktadır. O halde tek kısıtlı bir kuadratik fonksiyonun çözümü için iki koşulun düşünülmesi gerekmektedir. Optimal noktada $A_1 w = b_1$ koşulu ve $\nabla f(w) = \lambda_1 a_1$ koşulu sağlanmalıdır. Burada λ_1 Lagrange çarpanıdır ve sabittir. A_1 ise tek kısıt olduğu için A matrisinin ilk satırıdır. Sonuç olarak w^* ancak ve ancak bu koşulları sağlarsa f fonksiyonun optimal noktasıdır denir. Bu optimallik koşullarını M kısıtlı genel kuadratik fonksiyonlar için genellemek mümkündür. Bunun için Taylor Teoreminden yararlanılabilir.

Teorem: $f(w) = \mu^t w - \frac{1}{2} w^t \Sigma w$ olmak üzere w^* ve w_1 herhangi iki nokta olsun;

$$f(w) = f(w^*) + \nabla f(w^*)' (w - w^*) + \frac{1}{2} (w - w^*)' \Sigma (w - w^*)$$

Kuadratik bir fonksiyon için Taylor açılımıdır.

Tekrar denklem (3.7)'daki ortalama varyans modeli optimizasyonunu düşünelim,

$$f(w) = \max \left\{ \mu^t w - \frac{1}{2} w^t \Sigma w \mid Aw = b \right\}$$

burada m kısıt olacağı için kısıtlar $a_i' w = b_i$; $i = 1, 2, \dots, m$ şeklinde yazılabilir. A katsayılar matrisi olduğuna göre a_i' , A matrisinin i. satır vektörüdür. O halde A matrisi $A = [a_1, a_2, \dots, a_m]^t$ ve $b = [b_1, b, \dots, b_m]^t$ şeklinde yazılabilir. Ayrıca $a_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ i. kısıtın gradyan vektörüdür. Bu durumda “m” kısıt için m tane gradyan vektörü hesaplanacaktır. O halde tek kısıt için yazılan $\nabla f(w) = \lambda_1 a_1$ gradyan vektörü m kısıtlı model için;

$$\nabla f(w) = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_m a_m$$

şeklinde olacaktır. Bu koşul $\nabla f(w)$ gradyan vektörünün, kısıt gradyan vektörleri a_i 'lerin doğrusal bir kombinasyonu olması gerekliliğini ifade etmektedir. Vektörlerle ifade edilecek olursa,

$$\nabla f(w) = A^t \lambda$$

$\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m]^t$ 'dir. Bu basitçe m kısıt için m tane Lagrange çarpanı ile ilgili katsayının çarpım toplamıdır. Yani f fonksiyonundaki N tane değişken için alınmış türev denklemleriyle modeldeki kısıtları temsilen m adet Lagrange çarpanı denkleminin birlikte çözülmesinden başka bir şey değildir. Dolayısıyla ortalama varyans modelinin w^* optimal noktasıysa aşağıdaki optimallik koşullarını sağlamalıdır.

Teorem: w^* ancak ve ancak;

$$a) Aw^* = b$$

$$b) \nabla f(w) = A^t \lambda \text{ veya } -\nabla f(w) = A^t \lambda \text{ veya}$$

koşullarını sağlıyorsa optimal noktadır.

Kanıt: w^* , f fonksiyonu için optimal nokta ise $f(w^*) \geq f(w)$ olmak zorundadır. Ayrıca $Aw^* = b$ tüm kısıtları aynı anda sağlanmalıdır. Taylor Teoreminden,

$$f(w) = f(w^*) + \nabla f(w^*)' (w - w^*) + \frac{1}{2} (w - w^*)' \Sigma (w - w^*)$$

olduğu bilinmektedir. Taylor açılımındaki $\nabla f(w^*)' (w - w^*)$ terimi $\nabla f(w) = A^t \lambda$ (ikinci optimallik koşulu),

$$\begin{aligned} (A^t \lambda)' (w - w^*) &= \lambda^t A \\ &= \lambda (Aw - Aw^*) \\ &= \lambda (b - b) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Taylor açılımındaki son terim ise Σ kovaryans matrisinin pozitif yarı tanımlı olmasından dolayı $\frac{1}{2} (w - w^*)' \Sigma (w - w^*) \geq 0$ 'dır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} f(w) &= f(w^*) + 0 + \varepsilon \\ f(w^*) &\leq f(w) \end{aligned}$$

burada $\varepsilon = \frac{1}{2}(w - w^*)'\Sigma(w - w^*)$ 'dır (Best, 2010 ss., 7). Yani w^* yukarıdaki iki koşulu sağlıyorsa f fonksiyonun optimal ağırlığıdır.

3.5.1. Etkin Sınır

Ortalama varyans modeline göre oluşturulan portföy, aynı beklenen getiriye sahip portföylere kıyasla en küçük varyansa sahip olandır. Aynı beklenen getiri düzeyinde başka portföyler oluşturmak da mümkündür. Fakat bu portföyler feasible olmasına rağmen etkin olmayacaktır. Çeşitli beklenen getirilere bağlı olarak oluşturulan minimum varyanslı portföylerin oluşturduğu sınıra etkin sınır denilmektedir. O halde, ortalama varyans modeline göre oluşturulmuş ve etkin sınır üzerindeki portföylerden daha düşük riske sahip başka bir portföy oluşturmak mümkün değildir.

Tanım: Belli bir getiri beklentisi altında en düşük varyansa sahip portföye **varyans etkin** portföy denir.

Tanım: Belli bir varyans düzeyi için en yüksek getiriye sahip portföye **beklenen getiri etkin** portföy denir.

Tanım: Denklem (3.6)'daki portföy optimizasyonunda $\delta \geq 0$ için bulunan optimal portföye **parametrik etkin** portföy denir.

Yukarıda tanımlanan üç model de amaç fonksiyonundaki değişkenlere $(\mu_p, \sigma_p^2, \delta)$ bağlı olarak optimal çözüm üretmektedir. Ortalama varyans modeli için güçlü sonuç bu üç modelin de eşit olmasıdır. Portföy yöneticisi hangi modeli kullanırsa kullansın aynı risk ve beklenen getiri oranı için aynı portföyü elde edecektir. Dolayısıyla etkin sınırın matematiksel çözümü yapılırken kullanılacak modelin bir önemi yoktur ve bulunan etkin sınır tüm modeller için geçerli olacaktır. Bir kere daha

$$f(w) = maks \left\{ \mu^t w - \frac{1}{2} w^t \Sigma w \mid Aw = b \right\}$$

modeli optimizasyon modeli olsun. Basitlik olması için $Aw = b$ kısıtını $w^t \iota = 1$ olarak düşünelim. Burada ι , tüm elemanları 1 olan N boyutlu sütun vektörüdür. Bu durumda Lagrange çarpanı yardımıyla amaç fonksiyonuna dahil edilen kısıtla birlikte model kısıtsız bir fonksiyon olacaktır. Bu fonksiyonun birinci sıra koşulu,

$$f(w) = \mu^t w - \frac{\delta}{2} w^t \Sigma w - \lambda(\iota^t w - 1) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial f(w)}{\partial w} = \nabla f(w) = \mu - \delta \Sigma w = \lambda \iota \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial f(w)}{\partial \lambda} = \iota^l w = 1 \quad (3.10)$$

olacaktır. Tüm denklemleri aynı anda sağlayacak w ve λ katsayılarını bulmak için denklemler eşanlı çözülmelidir. (3.9) ile gösterilen denklem sistemini w ağırlık vektörü için çözersek;

$$\begin{aligned} \mu - \lambda \iota &= \delta \Sigma w \\ (\delta \Sigma)^{-1}(\mu - \lambda \iota) &= (\delta \Sigma)^{-1} \delta \Sigma w \\ (\delta \Sigma)^{-1} \mu - (\delta \Sigma)^{-1} \lambda \iota &= w \end{aligned}$$

Daha sonra bulunan w denklem (3.10)'de yerine yazılıp ve λ için bu sistem çözülürse;

$$\begin{aligned} \iota^l ((\delta \Sigma)^{-1} \mu - (\delta \Sigma)^{-1} \lambda \iota) &= 1 \\ \iota^l (\delta \Sigma)^{-1} \mu - \iota^l (\delta \Sigma)^{-1} \lambda \iota &= 1 \\ \iota^l (\delta \Sigma)^{-1} \mu - 1 &= \iota^l (\delta \Sigma)^{-1} \lambda \iota \\ \lambda &= \frac{\iota^l (\delta \Sigma)^{-1} \mu}{\iota^l (\delta \Sigma)^{-1} \iota} - \delta \frac{1}{\iota^l (\Sigma)^{-1} \iota} \\ \lambda &= \frac{\iota^l \Sigma^{-1} \mu}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} - \delta \frac{1}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} \end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

$$\begin{aligned} (\delta \Sigma)^{-1} \mu - (\delta \Sigma)^{-1} \left(\frac{\iota^l \Sigma^{-1} \mu}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} - \delta \frac{1}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} \right) \iota &= w \\ (\delta \Sigma)^{-1} \mu - (\delta \Sigma)^{-1} \iota \left(\frac{\iota^l \Sigma^{-1} \mu}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} - \delta \frac{1}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} \right) &= w \\ \frac{(\Sigma)^{-1}}{\delta} \mu - \frac{(\Sigma)^{-1} \iota}{\delta} \left(\frac{\iota^l \Sigma^{-1} \mu}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} \right) - \frac{(\Sigma)^{-1}}{\delta} \iota \left(\delta \frac{1}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} \right) &= w \\ \frac{(\Sigma)^{-1} \mu}{\delta} - \frac{(\Sigma)^{-1} \iota}{\delta} \left(\frac{\iota^l \Sigma^{-1} \mu}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} \right) - \frac{(\Sigma)^{-1} \iota}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} &= w \\ \frac{1}{\delta} \left[(\Sigma)^{-1} \mu - \left(\frac{\iota^l \Sigma^{-1} \mu}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} \right) (\Sigma)^{-1} \iota \right] - \frac{(\Sigma)^{-1} \iota}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} &= w \end{aligned}$$

Burada $h_0 = -\frac{(\Sigma)^{-1} \iota}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota}$ ve $h_1 = \left[(\Sigma)^{-1} \mu - \left(\frac{\iota^l \Sigma^{-1} \mu}{\iota^l \Sigma^{-1} \iota} \right) (\Sigma)^{-1} \iota \right]$ olarak isimlendirilirse w ağırlıklar matrisinin δ riskten kaçınma katsayısının doğrusal bir fonksiyonu olduğu

görülecektir.

$$w^* = h_0 + \frac{1}{\delta} h_1$$

Etkin portföy için w ağırlık vektörü bir kere elde edildikten sonra portföy beklenen getirisi ve portföy riski kolayca hesaplanabilir.

$$E[R_p] = \mu^t w^* = \mu^t h_0 + \frac{1}{\delta} \mu^t h_1$$

$$\sigma_p^2 = (w^*)^t \Sigma w^* = \left(h_0 + \frac{1}{\delta} h_1 \right)^t \Sigma \left(h_0 + \frac{1}{\delta} h_1 \right)$$

Yukarıdaki denklemler sırasıyla etkin portföyün beklenen getirisi ve varyansını göstermektedir (Best, 2010, ss.25). Böylelikle tüm optimal portföyler için varyans ve beklenen getiri bir grafik üzerinde gösterilirdiğinde etkin sınır elde edilmiş olur.

BÖLÜM IV

OPTİMİZASYON

4.1. Doğrusal Optimizasyon

Doğrusal optimizasyon probleminin anlaşılması için doğrusal denklem sistemleri önemlidir. Dolayısıyla, doğrusal bir fonksiyondan ne anlaşılmalıdır, hangi denklemler veya sistemler doğrusaldır ve doğrusal fonksiyonlar hangi özellikleri taşır gibi sorulara optimizasyon probleminden önce kısaca değinilmiştir.

4.1.1. Doğrusal Fonksiyonlar

N değişkenli bir f fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanmış olsun;

$$f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n \quad (4.1)$$

burada x_i ($i=1,2,\dots,n$) değişkenleri veya bilinmeyenleri, a_i ($i=1,2,\dots,n$) ise sabit katsayıları temsil etmektedir.

Tanım: Bir fonksiyon **ancak ve ancak** tüm değişkenlerinin dereceleri sıfır veya bir ise ve bu değişkenler çarpım halinde değilse doğrusal bir fonksiyondur.

Buna göre (4.1) denkleminde belirtilen f fonksiyonu doğrusal bir fonksiyondur.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \cdots + a_{3n}x_n &= b_3 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (4.2)$$

şeklinde ifade edilmiş denklem sistemine doğrusal denklem sistemi denir. Burada a_{ij} ($i=1,2,\dots,n$; $j=1,2,\dots,m$) doğrusal denklem sisteminin **belirli/sabit** katsayıları, x_i ($i=1,2,\dots,n$) doğrusal denklem sisteminin bilinmeyenleri veya değişkenleri ve b_j ise ($j=1,2,\dots,m$) doğrusal denklem sisteminin sabit kaynak (veya sağ taraf sabiti) katsayılarıdır.

Tanım: M denklemlili ve n değişkenli bir doğrusal denklem sisteminin çözümü, m denklemin tamamını aynı anda sağlayan bir çözümdür.

Yukarıdaki denklem sistemini matris ile göstermek de mümkündür. Bir doğrusal denklem sistemi matrislerle aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$Ax = b$$

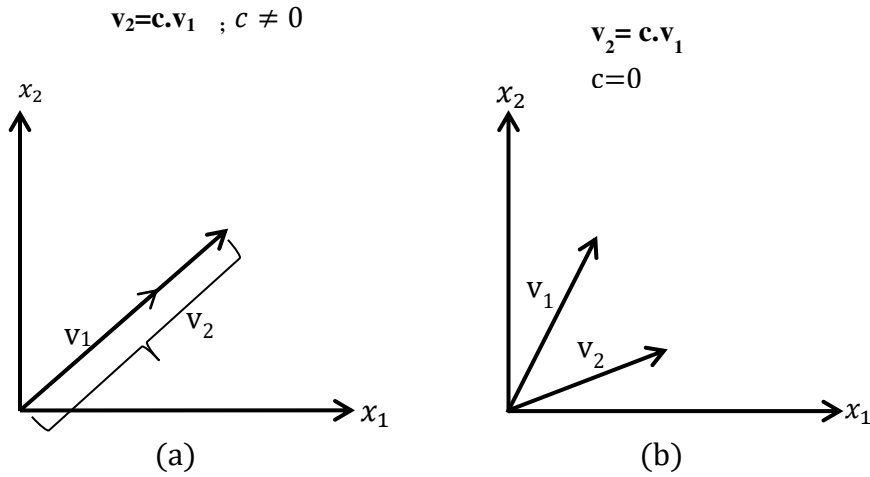
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matrisinin ilk satırı ile x vektörünün vektörel çarpımı doğrusal denklem sisteminin ilk denklemini, A matrisinin m . satırı ile x vektörünün vektörel çarpımı ise doğrusal denklem sistemindeki m . denklemi verecektir (Winston, 2004, ss.51). Sistemdeki tüm denklemlerin doğrusal bağımsız olması sisteminin çözümü açısından önemlidir. Başka bir ifadeyle birbiri cinsinden yazılamamaları denklem sistemlerinin çözümünde önemli rol oynar.

Doğrusal denklemlerin çözümleri A katsayılar matrisinin tersinir olmasına bağlıdır. A matrisinin tersinir olması ise doğrusal bağımsızlıkla yakından ilgilidir. Bu bağlamda, $V = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ her biri aynı boyutta olan k satır vektöründen oluşan bir sistem olsun. c_i ($i=1,2,\dots,k$) sabit katsayılar olmak üzere, V 'deki vektörlerin doğrusal birleşimi $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = v_l$ şeklinde gösterilmektedir.

Tanım: c_i ($i=1,2,\dots,k$) sabit katsayılardan **en az** bir tanesi sıfırdan farklıysa v_l , $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ satır vektörlerinin doğrusal bir birleşimidir denir.

Tanım: c_i ($i=1,2,\dots,k$) sabit katsayılardan **en az** bir tanesi sıfırdan farklıysa $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ doğrusal bağımlıdır, $c_i = 0$; $\forall i$ ise $(v_1, v_2, \dots, v_k)$ vektörleri doğrusal bağımsızdır denir.



Şekil 4. Doğrusal bağımlı/bağımsız vektörler

Yukarıdaki şekilde iki boyutlu v_1 ve v_2 vektörlerinin doğrusal bağımlılığı gösterilmiştir. Şekil (a)'da v_1 ve v_2 vektörleri doğrusal bağımlıyken, (b) bölümünde v_1 ve v_2 vektörleri doğrusal bağımsızdır (Chong ve Zak, 2004, ss., 5). Lineer bağımsızlık ile ilgili yukarıda verilen özelliklerin tamamı sütun vektörleri için de geçerlidir. Sütun vektörlerinin bağımsızlığı, bir matrisin rankı ile yakından ilgilidir ve doğrusal denklem sistemlerinin çözümünde önemli rolü bulunmaktadır.

Bir matrisin rankı maksimum sayıdaki lineer bağımsız satır veya sütun sayısıdır. A matrisi $(n \times m)$ boyutlu bir matris ise, A matrisinin rankı birden m 'e kadar olan bağımsız sütun sayısına eşittir. Yani $Rank(A) \leq m$ 'dir.

Önerme: Bir matrisin rankı aşağıdaki durumlarda değişmeyecektir.

- Matrisin bir veya tüm sütun vektörlerinin bir sabit ile çarpılması,
- Sütunların yer değiştirmesi,
- Bir sütuna diğer sütunların lineer birleşimlerinin eklenmesi.

Bir matrisin rankı ile determinantı da birbiriyle bağlantılıdır. Genel olarak $(n \times n)$ boyutlu bir A matrisinin determinantı $detA$ veya $|A|$ şeklinde gösterilmektedir. Bir matrisin determinantı o matrisin sütun vektörlerinin bir fonksiyonudur.

Tanım: $|a_{ij}|_{n \times n} \in \mathbb{K}_n^n$ olmak üzere;

$$\det A = |A| = \det |a_{ij}|_{n \times n} = \sum_{\sigma \in S_n} s(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \dots a_{\sigma(n)n}$$

Fonksiyonuna $\mathbb{K}_n^n$ kümesinde tanımlı determinant fonksiyonu denir. Fonksiyon değerinin hesaplanması sonucu elde edilen sayıya da determinant denir (Sabuncuoğlu, 2008, ss., 107). Burada $s(\sigma)$ permütasyonun işaretini, $\sigma(i)$ $i = (1, 2, \dots, n)$ permütasyondaki i . elemanın σ fonksiyonundaki görüntüsünü temsil eder. Sonuç olarak, A matrisi $(n \times n)$ boyutlu bir matris ise ve $\text{Rank}(A) < n$ ise $\det A = 0$ olacaktır.

4.1.2. Doğrusal Denklem Sistemleri

Denklem (4.2)'de gösterilen sistem doğrusal bir denklem sistemidir ve matris notasyonu ile $Ax = b$ şeklinde gösterilebilir. Burada A $(n \times m)$ katsayılar matrisi, x $(n \times 1)$ bilinmeyenler vektörü ve b $(m \times 1)$ kaynak katsayıları vektörüdür. Dolayısıyla (4.2) deki denklem sistemi aşağıdaki şekilde yazılabilir;

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = b$$

Burada $a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$; $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ve $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ olarak tanımlanmıştır. b

vektörünü de A matrisinin içine alırsak, $[A \ b] = [a_1, a_2, \dots, a_n, b]$ olacaktır.

Teorem: $Ax = b$ şeklindeki doğrusal denklem sistemi **ancak ve ancak**, $\text{Rank} A = \text{Rank}[A \ b]$ ise bir çözümü vardır.

Teorem: $Ax = b$ şeklindeki doğrusal denklem sisteminde $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ve $\text{Rank} A = m$ olsun. Bu denklem sistemi için $n-m$ değişkene bağlı çözüm yapılır.

Doğrusal denklem sistemlerinin çözümleri için çoğunlukla elementer (temel) satır işlemleri veya Gauss-Jordan yöntemleri kullanılmaktadır.

4.2. Doğrusal Programlama

Doğrusal programlama, doğrusal kısıtlara bağlı olarak doğrusal bir amaç fonksiyon değerini maksimum veya minimum yapmayı amaçlamaktadır. Doğrusal programlama problemi, genel kısıtlı optimizasyonun özel bir şeklidir. Bir doğrusal programlama problemi için her bir çözüm tüm kısıtları aynı anda sağlamak zorundadır. Bu tür çözümlerin her birine feasible veya uygun çözüm denilmektedir. Bir doğrusal programlama probleminin birçok uygun (feasible) çözüm mevcut olabilir. Doğrusal programlamanın amacı bu çözümler arasında amaç fonksiyonu değerini maksimum/minimum yapan çözümü bulmaktır. Sürekli değişkenlere sahip bir doğrusal programlama probleminin çözüm kümesi genellikle sonsuzdur. Fakat doğrusal programlama bu sonsuz noktanın tamamında çözüm aramaz. Doğrusal programlama probleminin kısıtları da doğrusal olduğu için çözüm uzayı konvektir ve çözüm sadece köşe noktalarında aranır. Kısıtların çevrelediği çözüm alanında sonsuz tane feasible nokta olmasına rağmen çözüm alanının içinde kalan, yani köşe noktaları dışında kalan hiçbir nokta optimal çözüm olmayacaktır. Dolayısıyla doğrusal programlama problemi için sonsuz olan çözüm noktası sonlu ve karşılaştırılabilir bir çözüm uzayına dönüşmektedir.

Tarihsel bir perspektiften incelendiğinde doğrusal programlama problemlerinin çözümü için etkin çözüm yöntemleri 1930'lu yılların sonlarından itibaren literatüre girmiştir. 1939 yılında Kantorovich üretim ve dağıtım problemlerinin çözümüne ilişkin birkaç çözüm yöntemi önermiştir. II. Dünya Savaşı sırasında, Koopmans dağıtım problemlerine ilişkin önemli katkı sağlamıştır. 1975 yılında Kantorovich ve Koopmans kaynak dağıtım teorisi alanındaki katkılarından dolayı ekonomi alanında Nobel ödülüne layık görülmüştür. Kuşkusuz doğrusal programlama problemlerinin çözümü için yapılmış en önemli katkı 1947 yılında Dantzing tarafından yapılmıştır. Dantzing'in önerdiği çözüm algoritmasına Simpleks yöntemi denilmektedir ve bugün hala kullanılmaktadır. Simpleks yöntemi yukarıda bahsedilen köşe noktalarında çözüm aramaktadır ve her iterasyonda en yakın iki komşu nokta arasında kıyaslama yaparak çözüm noktasına doğru ilerlemektedir. Tabii ki Simpleks yönteminin de belli dezavantajları vardır. En önemli dezavantajı değişken sayısının artmasıyla birlikte iterasyon sayısının üstel olarak artmasıdır. Bu da çok fazla değişkeni olan problemler için çözümü oldukça zorlaştırmaktadır. Her şeye rağmen Simpleks yönteminin arkasındaki mantık çok güçlüdür ve bilgisayarların kullanımı ile birlikte birçok

problemi etkin bir şekilde çözebilmektedir. Khachiyan 1979 yılında doğrusal programlama problemlerinin çözümü için başka bir yöntem önermiştir. Fakat önerdiği yöntem uygulamada çok karşılık bulamamıştır. Simpleks yönteminden sonra doğrusal programlama probleminin çözümü için yapılan önemli bir katkı da, 1984 yılında Karmarkar tarafından yapılmıştır. Karmarkar'ın önerdiği yöntem büyük problemler için Simpleks yönteminden daha etkin sonuçlar üretmektedir. Karmarkar'ın yöntemi sadece doğrusal programlama probleminin çözümüne katkıda bulunmamış ayrıca Simpleks tabanlı olamayan birçok yeni yöntemin de geliştirilmesine olanak sağlamıştır (Chong ve Zak, 2004, ss., 256). Bu yöntemler için [bkz. Fang ve Puthenpura, 1993; Gonzaga, 1992; Karmarkar, 1984; Schrijver, 1986].

Genel olarak bir doğrusal programlama problemi aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir.

$$\begin{aligned} Z_{min} &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Burada $\mathbf{c}$ ($n \times 1$) katsayılar vektörüdür. $\mathbf{A}$ ($m \times n$) teknoloji veya kısıt katsayıları matrisidir ve $m < n$ olmak üzere $\text{Rank} \mathbf{A} = m$ 'dir. Burada $\mathbf{x}$ ise ($n \times 1$) boyutlu bilinmeyenler vektörüdür. Tabii ki tüm doğrusal programlama problemlerinde kısıtlar eşitlik şeklinde değildir. Kısıtların $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$ şeklinde olması da mümkündür. Büyük eşittir şeklindeki kısıtlar *artık değişkenler* yardımıyla eşitlik haline dönüştürülebilir. Küçük eşitlik durumundaki eşitsizlikler ise *aylak değişkenler* yardımıyla eşitlik haline dönüştürülebilir. Yukarıdaki gibi küçük eşittir şeklinde oluşmuş bir doğrusal programlama problemi $\mathbf{y}$ artık değişkenler eklenerek;

$$\begin{aligned} Z_{min} &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{Ax} - \mathbf{I}_m \mathbf{y} &= [\mathbf{A}, -\mathbf{I}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0, \quad \mathbf{y} \geq 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

şeklinde yeniden yazılabilir. Kısıtlar küçük eşittir durumundaysa probleme s aylak değişkenler eklenerek yeniden düzenlenir.

$$Z_{maks} = c^T x \quad (4.4)$$

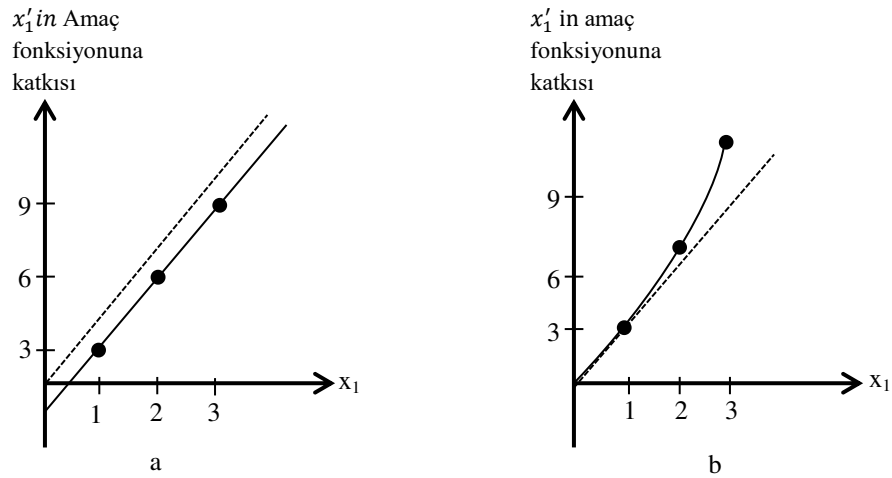
$$Ax + I_m s = [A, I_m] \begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b$$

$$x \geq 0, \quad s \geq 0$$

Küçük eşittir kısıtları genel olarak maksimize edilecek problemler için kullanıldığından burada da problem maksimizasyon olarak ifade edilmiştir. Sonuç olarak bir doğrusal programlama probleminde kısıtlar eşittir, küçük eşittir veya büyük eşittir olmak üzere üç şekilde de oluşturulabilir.

Doğrusal programlama probleminin önemli birkaç varsayımı vardır.

- *Oranlılık/Orantılılık (proportionality) Varsayımı:* Bu varsayım her bir aktivitenin doğrusal programlama probleminin amaç fonksiyonuna her noktada aynı katkıyı sağlamasını ifade eder. Örneğin birinci aktivite amaç fonksiyonuna $c_1 x_1$ kadar katkı yapar ve bu katkı x_1 in miktarına göre deterministik olarak artar. Çünkü c_1 sabittir ve x_1 'in değerine göre değişmez. Aynı durum kısıt sağ tarafları için de geçerlidir. x_1 'in çözüm miktarına göre $a_{11} x_1$ kadar **b** kaynağından tüketir. x_1 'in çözüm değeri ne kadar artarsa **b** kaynağından tüketmesi de o oranda artacaktır. Bu varsayımın geometrik olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



Şekil 5. Doğrusal programlamada orantılılık varsayımı

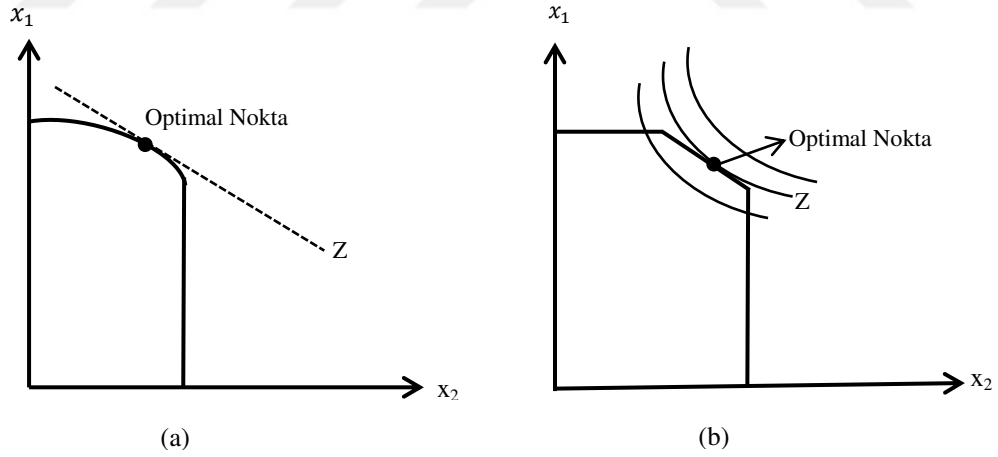
Yukarıdaki şekilde (a) orantılılık varsayımını karşılarken (b) karşılamamaktadır. (a)'da 1 br x_1 'in amaç fonksiyonuna katkısı 3 br, 3 br x_1 in amaç fonksiyonuna katkısı ise 9 br'dir. Fakat aynı durum (b) için geçerli değildir. Burada x_1 'in değeri arttıkça amaç fonksiyonuna yaptığı katkı da oransal olarak artmaktadır.

- *Toplanabilirlik (Additivity) Varsayımı*: Amaç fonksiyonun toplam değeri tek tek x_i değişkenlerinin katkıları toplamına eşittir. Aynı durum kısıtlar için de geçerlidir. x_i aktivitelerinin tek tek kaynak tüketimi toplam tüketilen **b** kaynak miktarına eşittir. Örneğin x_1 ve x_2 nin olduğu bir doğrusal programlama probleminde x_1 aktivitesinin amaç fonksiyonuna tekil katkısı K_1 ve x_2 aktivitesinin amaç fonksiyonuna tekil katkısı K_2 ise amaç fonksiyonun toplam değeri $z = K_1 + K_2$ olduğunu söylemektedir.
- *Bölünebilirlik (Divisibility) Varsayımı*: Bu varsayım doğrusal programlama problemindeki değişkenlerin kesirli değerler alabileceğini söylemektedir. Yani değişkenlerin tamsayı olma zorunlulukları yoktur. Tamsayı olma zorunluluğu olan problemler doğrusal programlama problemlerinin özel bir şeklidir ve bu tür problemlere tamsayılı doğrusal programlama denilmektedir.
- *Kesinlik (Certainty) Varsayımı*: Kesinlik varsayımı bu tezin üzerinde durduğu ve bu varsayımın ihlal edildiği durumun optimizasyon üzerindeki etkisini incelemektedir. Kesinlik varsayımı bir doğrusal programlama probleminin tüm amaç fonksiyonu katsayıları ve kısıt katsayılarının kesin olarak bilindiğini ve değişmediğini varsaymaktadır. Buna göre amaç fonksiyonundaki c_i katsayıları ve kısıt katsayı matrisindeki tüm a_{ij} 'ler kesin olarak bilinmektedir ve zaman içinde bu değerler değişmemektedir. Gerçek hayatta bu varsayımın sağlanması çok zordur. Üretim yapan bir firmanın maliyet minimizasyon probleminde maliyet katsayıları sürekli değişmektedir veya haftalık talebe göre üretim yapan bir firmanın talep miktarlarını kesin olarak bilmesi imkânsızdır. Başka bir örnek verilecek olursa bir portföy optimizasyonunda varlıkların getiri oranlarının kesin olarak bilinmesi mümkün değildir. Böyle bir durumda beklenen getirisi maksimum olan varlığa yatırım yapılarak beklenen portföy getirisi de maksimum yapılabilirdi. Ne üretim çalışmalarında ne de finansal çalışmalarda katsayıların kesin ve değişmez olduğunu varsaymak oldukça zordur. Bu varsayımın gerçekleştirilmesi için en azından değişken değerlerinin normal dağılımdan gelmesi gerekmektedir. Fakat finansal varlıkların getiri serileri

genelde kalın kuyruk dağılmaktadır ve dağılım şekilleri de dönemden döneme değişiklik göstermektedir. Kesinlik varsayımının sağlanmadığı durumlarda kullanılan *belirsizlik altında optimizasyon* ayrı bir bölüm olarak ayrıca incelenmiştir.

4.3. Doğrusal Olmayan Programlama (NLP)

Doğrusal programlama, modeldeki tüm değişkenlerin sıfır veya birinci dereceden olduğunu ve bu değişkenlerin çarpım halinde olmadığını varsaymaktadır. Yani amaç fonksiyonu ve kısıtlar doğrusaldır. Fakat uygulamada bazı problemleri doğrusal olarak oluşturup çözmek mümkün değildir. Çoğu optimizasyon problemi doğrusal değildir ve farklı çözüm tekniklerine ihtiyaç duymaktadır. Doğrusal olmayan programlama için tek değişkenli, çok değişkenli, kısıtlı veya kısıtsız, kısıtların eşitlik veya eşitsizlik durumlarına göre farklı çözüm teknikleri mevcuttur. Doğrusal olmayan programlama, kısıtların doğrusal olmaması veya amaç fonksiyonun doğrusal olmamasına bağlı olarak genellikle aşağıdaki şekilde gösterilebilir.



Şekil 6. Doğrusal olmayan programlama

(a)'da gösterilen şekilde amaç fonksiyonu doğrusal iken kısıtlardan bir tanesi doğrusal değildir. (b)'de gösterilen şekilde ise amaç fonksiyonu doğrusal değilken kısıtlar doğrusaldır. İki şekilde de çözüm alanları konveks settir ve işaretlenen noktalar amaç fonksiyonu optimal değerini vermektedir.

4.3.1. Kısıtsız NLP Optimizasyonu

Kısıtsız optimizasyonda adından da anlaşılacağı gibi kısıt yoktur. Temel olarak bir kısıtsız fonksiyon aşağıdaki şekilde gösterilir⁹.

$$\text{maks/min } f(\mathbf{x}) \quad (4.5)$$

Burada $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ n boyutlu değişken vektörüdür. $\frac{df(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = 0$ koşulu $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu için maksimum veya minimum noktayı verecektir. Türevlenebilir $f(\mathbf{x})$ fonksiyonu için bulunan bu kısmi türevlere birinci sıra koşulu denir. Kısmi türevlerin sıfıra eşit olma koşulu gerek koşuldur. Yeter koşul için fonksiyonun ikinci türevine bakılması gerekmektedir. Söz gelimi, $\mathbf{x}^*$ kısmi türevlerin sıfıra eşit olduğu noktalar için elde edilmiş olsun,

Teorem: $\mathbf{x}^*$, *ancak ve ancak* $f^2(\mathbf{x}) \leq 0$ olduğunda veya $f(\mathbf{x}^*) > f(\mathbf{x})$; $\forall \mathbf{x}$ ise $f(\mathbf{x})$ 'nin maksimum noktasıdır denir.

Teorem: $\mathbf{x}^*$, *ancak ve ancak* $f^2(\mathbf{x}) \geq 0$ ise veya $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{x})$; $\forall \mathbf{x}$ ise $f(\mathbf{x})$ 'nin minimum noktasıdır denir.

Teorem: Sürekli ve türevlenebilir, tek değişkenli $f(x)$ fonksiyonu için $f^1(x), f^2(x)$ sırasıyla fonksiyonun birinci ve ikinci dereceden türevleri olsun, $f(x)$ fonksiyonu *ancak ve ancak* $f^2(x) \geq 0$ ise konveks bir fonksiyondur ve $f^2(x) \leq 0$ ise konkav bir fonksiyondur¹⁰.

Teorem: $f^1(x) = 0$ olduğu nokta olsun,

- Eğer $f(x)$ fonksiyonun sıfırdan farklı ilk türevi tek dereceli türevlerden biriye ($f^3(x), f^5(x), f^{2n+1}(x)$ vs.), bu durumda $f^1(x) = 0$ noktası ne maksimum ne de minimum noktadır.
- Eğer $f(x)$ fonksiyonun sıfırdan farklı ilk türevi çift dereceli türevlerden biriye ($f^2(x), f^4(x), f^{2n}(x)$ vs.), ve sıfırdan farklı ilk türevin işareti pozitif ise $f^1(x) = 0$ yerel minimum noktasıdır.

⁹ Bu bölümde kolaylık olması açısından tüm fonksiyonların sürekli ve türevlenebilir olduğu varsayılmıştır.

¹⁰ Konkav ve konveks fonksiyonlarla ilgili daha detaylı bilgi tezin sonundaki ekte verilmiştir.

- Eğer $f(x)$ fonksiyonun sıfırdan farklı ilk türevi çift dereceli türevlerden biriye ($f^2(x), f^4(x), f^{2n}(x)$ vs.), ve sıfırdan farklı ilk türevin işareti negatif ise $f^1(x) = 0$ yerel maksimum noktadır.

$f(x)$ fonksiyonun çok değişkenli olduğu durumda ise maksimum/minimum nokta araştırması Hessian matrisi yardımıyla yapılmaktadır. Hessian matrisi ikinci derece türevlerden oluşmuş kare matristir.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f(x)}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix}$$

Hessian matrisinin asal minörlerine bakarak fonksiyonun konveks/konkav olduğu belirlenebilir.

Teorem: $f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonu ikinci dereceden türevlenebilir sürekli bir fonksiyon olsun. $f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonu **ancak ve ancak** H matrisinin tüm asal minörleri büyük veya eşit sıfır ise konveks bir fonksiyondur.

Teorem: $f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonu ikinci dereceden türevlenebilir sürekli bir fonksiyon olsun. $f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonu **ancak ve ancak** H matrisinin sıfırdan farklı asal minörlerinin işaretleri $(-1)^k$ ile aynı işaretliyse konkav bir fonksiyondur. Burada k asal minör sayısını temsil etmektedir.

Böylelikle yukarıdaki teoremlere göre kısmi türevlerin sıfır olduğu noktalardaki değerlerin maksimum veya minimum nokta olduğuna karar verilir. Eğer fonksiyonun yüksek dereceden türevleri bu teoremlerden birine uymuyorsa birinci sıra koşulunda bulunan noktalar ne maksimum ne de minimum noktadır. Başka bir ifadeyle eğer/dönüm noktasıdır veya optimal nokta değildir (Winston, 2004, ss.610).

4.3.1.1. Steepest Ascent Yöntemi

Kısıtsız NLP çözümünde kullanılan birçok algoritma mevcuttur. Bu bölümde NLP çözümünde etkin sonuçlar üreten steepest ascent (dik çıkış) algoritmasına yer verilmiştir. Dik iniş/çıkış algoritması kısıtsız NLP problemlerinde kullanılmasının yanında, yapay sinir ağları gibi modellerde çözüm algoritması olarak da sıklıkla kullanılmaktadır.

Denklem (4.5) de gösterilen genel NLP probleminin $\max f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ olarak oluşturulduğu ve f fonksiyonunun konkav bir fonksiyon olduğunu varsayalım. O halde aşağıdaki birinci sıra koşulları optimal noktaları verecektir.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} = 0$$

Fakat çoğu NLP problemlerinde bu noktaları bulmak kolay değildir. Bu noktada, steepest ascent benzeri algoritmalar kullanmak çözüm açısından daha pratiktir.

Tanım: $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ şeklinde verilmiş bir vektörün normu $\|\mathbf{x}\|$ olarak gösterilir ve $\|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)^{1/2}$ 'dir.

R^n 'de tanımlı n boyutlu bir vektörün yönünü gösteren sonsuz sayıda vektör vardır. Söz gelimi, (1,1), (2,2) ve (3,3) vektörlerinin tamamı R^2 uzayında 45° açıyla aynı yönü göstermektedir. Herhangi bir $\mathbf{x}$ vektör için, $\mathbf{d} = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|$ 'in adım uzunluğu birdir (birim vektör) ve $\mathbf{x}$ ile aynı yöne sahiptir. Birim vektörüne, $\mathbf{x}$ vektörünün normalize edilmiş yön vektörü denir. Dolayısıyla R^n 'de tanımlı normalize edilmiş vektör, $\mathbf{x}$ 'in yönü olarak tanımlanmıştır.

Tanım: $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun eğim vektörü, $\nabla f(\mathbf{x})$ ile gösterilmektedir ve $\nabla f(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \right]$ şeklinde tanımlıdır. O halde, $\nabla f(\mathbf{x})$ vektörünü yönü $\frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$ olacaktır. Burada $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ terimi kısmi türevin tanımı gereği x_i değişkenindeki δ birimlik bir değişim, fonksiyonda yaklaşık olarak $\delta \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$ kadar bir değişim oluşturacaktır. Bu bilgiler ışığında $\mathbf{x}$ noktasından normalize edilmiş vektör $\mathbf{d}$ yönünde δ kadar ilerlerse, fonksiyonun değerinde yaklaşık olarak $\frac{\delta \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$ kadar bir katkı sağlayacaktır. Eğer $\frac{\delta \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} > 0$ ise normalize edilmiş vektör yönünde δ kadar ilerlemek fonksiyonun maksimum değerine biraz daha yaklaştıracaktır. Fakat, $\frac{\delta \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{d}}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|} < 0$ ise aynı yönde ilerlemek fonksiyon değerini düşürecektir. Şimdi $\mathbf{v}^*$, $f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonunun optimal noktası olsun, o halde birinci sıra koşulundan $\nabla f(\mathbf{v}^*) = 0$ 'nın sağlanması gerekmektedir. Steepest ascent yöntemi optimal nokta $\mathbf{v}^*$ 'ye giden en kısa yolu/yönü bulur.

Önerme: Bir başlangıç $\mathbf{v}_0$ noktasından $\mathbf{v}^*$ optimal noktasına ilerlemenin *en kısa yolu* ancak $\mathbf{d} = \frac{\nabla f(\mathbf{x})}{\|\nabla f(\mathbf{x})\|}$ yönünün seçilmesiyle mümkündür.

Tüm bu bilgileri bir araya getirecek olursak, $\mathbf{v}_0$ noktasından optimal noktaya doğru en hızlı şekilde gitmek için $\nabla f(\mathbf{v}_0)$ yönünde hareket etmek gerekmektedir. Böylelikle f fonksiyonunda maksimum noktaya doğru bir adımda en fazla katkı sağlanmış olacaktır. İterasyonlarla $\mathbf{v}_0$ 'dan optimal nokta $\mathbf{v}^*$ 'ye gitmek için aşağıdaki adımlar izlenir.

İterasyon 1: $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + t_0 \nabla f(\mathbf{v}_0)$; burada t_0 negatif olmayan bir sayıdır ve aşağıdaki maksimizasyon problemini çözer.

$$\begin{aligned} \max_{t_0} f(\mathbf{v}_0 + t_0 \nabla f(\mathbf{v}_0)) &= \max_{t_0} f(\mathbf{v}_1) \\ \text{s.t. } t_0 &\geq 0 \end{aligned}$$

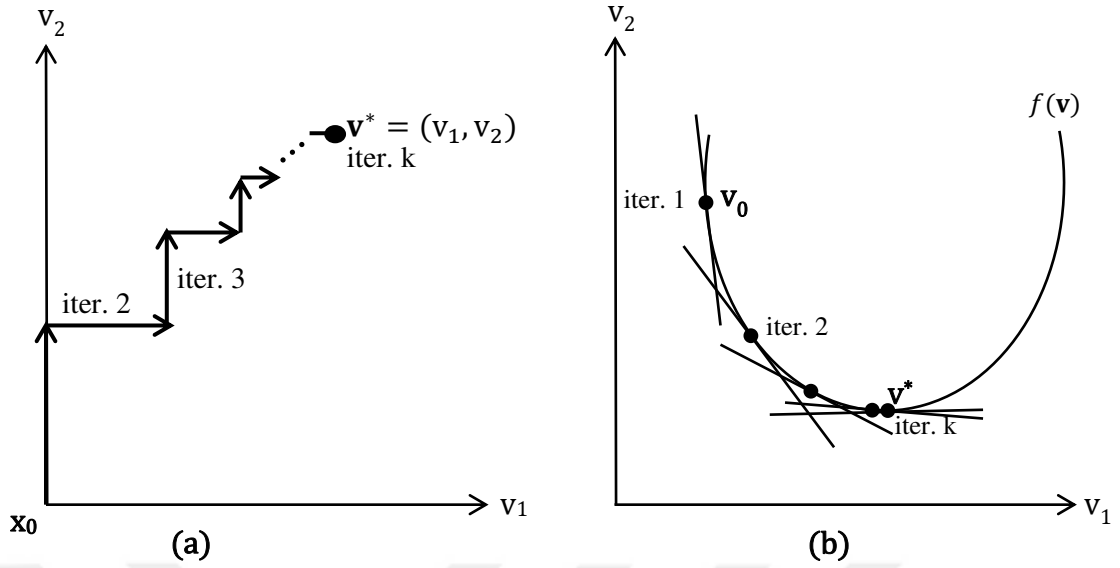
Bu problemde $\mathbf{v}_0$ (keyfi olarak seçilir) ve $\nabla f(\mathbf{v}_0)$ noktaları bilinmektedir. Tek bilinmeyen t_0 'dır. Dolayısıyla $f(t_0) = f[(\mathbf{v}_0 + t_0 \nabla f(\mathbf{v}_0))]$ fonksiyonunda $f'(t_0) = 0$ sifıra eşitlenirse t_0 hesaplanmış olacaktır.

İterasyon 2: Eğer $\|\nabla f(\mathbf{v}_1)\|$ yeterince küçükse (burada ölçü araştırmacıya kalmıştır.) iterasyona devam edilmez ve fonksiyonun maksimum olduğu kabul edilir. Fakat $\|\nabla f(\mathbf{v}_1)\|$ yeterince küçük değilse, $\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + t_1 \nabla f(\mathbf{v}_1)$ noktası için aynı işlemler yapılır. Bu adımda fonksiyon;

$$\begin{aligned} \max_{t_1} f(\mathbf{v}_1 + t_1 \nabla f(\mathbf{v}_1)) &= \max_{t_1} f(\mathbf{v}_2) \\ \text{s.t. } t_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

olacaktır. Dolayısıyla $f(t_1) = f[(\mathbf{v}_1 + t_1 \nabla f(\mathbf{v}_1))]$ fonksiyonunda $f'(t_1) = 0$ sifıra eşitlenirse t_1 hesaplanmış olacaktır. Fonksiyonun yeni değeri $f[(\mathbf{v}_1 + t_1 \nabla f(\mathbf{v}_1))]$ olarak hesaplanacaktır.

İterasyon 3: Eğer $\|\nabla f(\mathbf{v}_2)\|$ yeterince küçükse iterasyona devam edilmez. Örneğin $\|\nabla f(\mathbf{v}_2)\| \leq \varepsilon$ ise ($\varepsilon = 0.001$ olsun) fonksiyon maksimum değerine ulaşmış demektir. Yani bu noktada iterasyon devam ederse bir sonraki adımda fonksiyon değeri en fazla ε kadar artacaktır ki bu anlamlı bir artış olmayacağından iterasyon durdurulmalıdır. Fakat $\|\nabla f(\mathbf{v}_2)\|$ yeterince küçük değilse yukarıdaki itersyonlar istenilen değere ulaşincaya dek devam ettirilir (Winston, 2004, ss., 660).



Şekil 7. Steepest ascent algoritması

Kaynak: Hillier ve Lieberman, 2014, ss., 572.

Şekil (7) steepest ascent algoritmasının çalışma prensibini göstermektedir. Şeklin ilk kısmında algoritma bir v_0 noktasından başlayarak fonksiyon değerinin optimal olduğu nokta v^* 'e doğru ilerlemektedir. Algoritma ilk başta büyük adımlar ile optimal noktaya doğru ilerlerken, optimal noktaya yaklaştıkça adım büyüklüğü küçülmektedir. Optimal nokta çevresinde adım büyüklüğü çok küçüldüğü için oluşan fark artık anlamlı değildir ve iterasyon durdurulabilir. Şeklin (b) kısmında ise iterasyon sırasında fonksiyonun üzerindeki optimal noktaya doğru ilerlerken, gradyan vektörünün fonksiyona teğet olduğu noktaları göstermektedir. Burada da optimal noktaya doğru yaklaştıkça gradyan vektörlerinin eğimleri arasındaki fark azalmaktadır. Optimal nokta etrafında teğet doğrularının eğim sıfıra yakınsamaktadır.

4.3.2. Kısıtlı NLP Optimizasyonu

Bir önceki bölümde kısıtsız doğrusal olmayan programlamanın nasıl nasıl optimize edilebileceği açıklandı. Bu alt bölümde ise doğrusal olmayan bir amaç fonksiyonu ve doğrusal kısıtlar altında NLP problemleri ele alınacaktır. Her zamanki gibi doğrusal bir NLP probleminin amaç fonksiyonu;

$$\min/\max f(x) = f(x_1, \dots, x_n) \in R^n$$

olarak gösterilsin. O halde m kısıtlı bir NLP problemi şu şekilde ifade edilebilir;

$$\begin{aligned}
\min/\max f(\mathbf{x}) &= f(x_1, \dots, x_n) \\
g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_1 \\
g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &\geq b_2 \\
&\vdots \\
g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &\leq b_m
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Bu problem m adet doğrusal kısıtlı bir NLP problemidir. Kısıtsız NLP problemlerinde olduğu gibi kısıtlı NLP problemleri için de farklı optimizasyon yöntemleri mevcuttur. Burada kısıtlar büyük önem arz etmektedir. Kısıtların eşitlik halinde olması veya eşitsizlik halinde olmasına göre çözüm algoritmaları da farklılık göstermektedir.

4.3.2.1. Lagrange Çarpanı Yöntemi

Lagrange çarpanı, NLP problemindeki kısıtlar eşitlik durumdayken kullanılan bir yöntemdir. Yöntemin mantığı her bir kısıt için bir çarpan atayıp, NLP problemini çözmeye dayanır. Uygulamada Lagrange çarpanı NLP problemine göre özel anlamlar kazanmaktadır. Genel olarak Lagrange çarpanı her bir kısıtın ekonomik değerini, yani kaynağın *gölge fiyatını* verir. Fakat NLP bir maliyet fonksiyonu ise buradaki gölge fiyat ilgili kaynağın bir birim değişmesi durumunda maliyette meydana gelen değişimi ifade eder. Yani böyle bir problemde Lagrange çarpanı marjinal maliyeti ifade eder. Lagrange çarpanı KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT) koşullarına da temel oluşturmaktadır. Zira duyarlılık analizinde sıklıkla kullanılan tamamlayıcı aylaklık önermesi ve bu önermede kullanılan gölge fiyatlar, KKT koşullarında önemli bir yer tutmaktadır.

$$\begin{aligned}
\min/\max f(\mathbf{x}) &= f(x_1, \dots, x_n) \\
g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_1 \\
g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_2 \\
&\vdots \\
g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) &= b_m
\end{aligned} \tag{4.7}$$

NLP probleminde tüm kısıtlar eşitlik halindedir. λ Lagrange çarpanı olmak üzere m kısıt için m tane Lagrange çarpanı tanımlarsak Lagrange fonksiyonu;

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j [b_j - g_j(x_1, x_2, \dots, x_n)]$$

olacaktır. Aslında Lagrange fonksiyonu, kısıtların f amaç fonksiyonunun içine yedirildiği kısıtsız bir NLP problemine dönüştürülmüştür. $L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$

fonksiyonunda n adet değişken ve m adet çarpan olmak üzere artık $(n+m)$ adet değişken mevcuttur ve amaç, f fonksiyonunu optimal yapacak $\mathbf{x}^*$ ve $\boldsymbol{\lambda}^*$ vektörlerini bulmaktır. (4.7) fonksiyonunun optimizasyonu için *gerek koşul* tüm kısmi türevlerin sıfıra eşit olmasıdır.

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \dots = \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = 0$$

Bu birinci sıra koşuludur. $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ olmak üzere $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ noktaları f fonksiyonunu optimal yapan noktalarlardır.

Teorem: $\max f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ maksimizasyon problemi olması durumunda, $f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonu kesin konkav ve tüm kısıtlar doğrusal ise, gerek koşulundan elde edilen ve tüm kısıtları aynı anda sağlayan $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ noktaları fonksiyonu maksimum yapan noktalarlardır.

Teorem: $\min f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ minimizasyon problemi olması durumunda, $f(x_1, \dots, x_n)$ fonksiyonu kesin konveks ve tüm kısıtlar doğrusal ise, gerek koşulundan elde edilen ve tüm kısıtları aynı anda sağlayan $(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*, \lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ noktaları fonksiyonu minimum yapan noktalarlardır (Winston, 2004 ss., 663).

4.3.2.2. KARUSH-KUHN-TUCKER (KKT) Koşulları

Doğrusal programlama (LP) veya doğrusal olmayan programlama (NLP) problemlerinde kısıtlar küçüktür, büyüktür veya eşittir şeklinde olabilir. Genel kısıtlı bir NLP probleminde bulunan bir noktanın optimal çözüm olabilmesi için gerek koşulu ve (belki de) yeter koşulu sağlamalıdır. Gerek ve yeter koşullar optimal çözüm noktasının karşılaması gereken koşullardır. Çözüme aday bir nokta ancak gerek ve yeter koşulunu sağlıyorsa optimaldir. KKT koşulları bir noktanın optimal olup olmadığını tespit eder. Eğer çözüme aday bir nokta KKT koşullarını sağlıyorsa optimaldir. KKT koşullarının araştırılabilmesi için, öncelikle genel kısıtlı NLP problemindeki tüm kısıtların yönü " $\leq$ " olmak zorundadır. Kısıtlar " $\geq$ " veya " $=$ " durumundaysa uygun dönüşümlerle kısıtların yönü " $\leq$ " yapılmak zorundadır. " $\geq$ " şeklindeki kısıtlar (-1) ile çarpılarak, " $=$ " durumundaki kısıtlar ise " $\leq$ " ve " $\geq$ " şeklinde iki kısıt olarak ifade edildikten sonra " $\geq$ " durumundaki kısıt yine (-1) ile çarpılarak düzenlenir. Ayrıca KKT

koşullarının uygulanacağı problemdeki tüm değişkenler sıfır veya pozitif olmalıdır.

$$\begin{aligned}
 & maks(\text{ or min }) f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\
 & \quad g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_1 \\
 \text{s.t.} \quad & \quad g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_2 \\
 & \quad \vdots \\
 & \quad g_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_m
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki NL programlama probleminde tüm kısıtlar " $\leq$ " olarak düzeltildikten sonra KKT koşulları uygulanabilir.

Teorem: Doğrusal olmayan bir maksimizasyon probleminde $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ optimal çözüm noktası ise $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ve m adet kısıt için $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ noktaları aşağıdaki koşulları sağlamalıdır. Bu koşullara KKT *gerek koşulları* denir.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \quad (4.8)$$

$$\lambda_i^* [b_i - g_i(\mathbf{x}^*)] = 0 \quad (4.9)$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad (4.10)$$

Teorem: Doğrusal olmayan bir minimizasyon probleminde $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ optimal çözüm noktası ise $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ve m adet kısıt için $\boldsymbol{\lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_m^*)$ noktaları aşağıdaki koşulları sağlamalıdır. Bu koşullara KKT *gerek koşulları* denir.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_j} = 0 \quad (4.11)$$

$$\lambda_i^* [b_i - g_i(\mathbf{x}^*)] = 0 \quad (4.12)$$

$$\lambda_i^* \geq 0 \quad (4.13)$$

Burada ikinci koşullar tamamlayıcı aylaklık koşullarıdır. λ_i kaynak i'nin gölge fiyatıdır. Dolayısıyla bu koşul optimal çözümde gölge fiyatın ya da aylak kalan kaynak miktarının $[b_i - g_i(\mathbf{x}^*)]$ sıfır olması gerektiğini gösteriyor.

Benzer bir hesaplama x_j 'deki değişim için de yapılabilir. Buna göre, x_j 'deki değişim $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ amaç fonksiyonunu iki şekilde etkilemektedir. İlk etki amaç fonksiyonundaki x_j katsayısından kaynaklanırken, ikincisi x_j 'nin kısıtlardan kaynaklı ve dolaylı olarak $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonuna yaptığı etkidir. Amaç fonksiyonunu direkt

etkilediği kısım $\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} \Delta$ olarak ifade edilebilir. Burada Δ , x_j değişkenindeki küçük bir değişimi göstermektedir. Ayrıca, x_j 'deki kadar bir değişim yukarıda ifade edildiği gibi kısıtları da etkilemektedir. Dolayısıyla x_j 'deki değişimin kısıt üzerindeki etkisi;

$$g_i(x^*) + \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \Delta \leq b_i \text{ ya da } g_i(x^*) \leq b_i - \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \Delta$$

olacaktır. Görüldüğü gibi x_j değişkeninde Δ kadar bir değişim b_i kaynak miktarını

$$-\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \Delta$$

kadar değiştirmektedir. Sağ taraf sabitindeki bir birim değişim amaç fonksiyonunu gölge fiyatı kadar etkileyeceğine göre, sağ taraftaki $-\frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \Delta$ kadar değişim tüm kısıtlar için $-\Delta \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j}$ kadar değiştirecektir. Dolayısıyla amaç fonksiyonunda x_j değişkeninden kaynaklı toplam değişim $\Delta \left[\frac{\partial f(x^*)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \frac{\partial g_i(x^*)}{\partial x_j} \right]$ kadardır. Dikkat edilirse bu ifade bizi KKT'nin ilk gerek koşuluna götürmektedir. KKT ikinci gerek koşullarının ise tamamlayıcı aylaklık önermesinden geldiği ifade edilmişti.

Elde edilen çözüm adayı bir noktanın, optimal olabilmesi için KKT gerek koşullarını kesinlikle sağlaması gerekmektedir. Gerek koşullarının yanında KKT **yeter koşulları** da belirlemiştir.

Teorem: Doğrusal olmayan bir maksimizasyon probleminde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ amaç fonksiyonu konkav, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$ ($i=1,2,\dots,m$) kısıtları konveks ise KKT gerek koşullarını sağlayan herhangi bir $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ çözüm adayı noktası $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun optimal noktasıdır.

Teorem: Doğrusal olmayan bir minimizasyon probleminde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ amaç fonksiyonu konveks, $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$ ($i=1,2,\dots,m$) kısıtları da konveks ise KKT gerek koşullarını sağlayan herhangi bir $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ çözüm adayı noktası $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonun optimal noktasıdır.

Yukarıdaki teoremlerde KKT gerek ve yeter koşulları verilmiştir. Bir NLP problemi ancak ve ancak KKT gerek ve yeter koşulları sağlıyorsa optimaldir (Winston, 2004, ss. 670).

4.4. Kuadratik Programlama ve Portföy Optimizasyonu

Kuadratik programlama doğrusal olmayan programlamanın özel bir şeklidir. Kuadratik programlama problemlerinin amaç fonksiyonunda, x_j 'lere ek olarak x_j^2 ve $x_i x_j$ ($i \neq j$) çarpımları da yer alır. Kuadratik programlama problemi genel olarak şu şekilde ifade edilebilir;

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T \mathbf{Q}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n c_j x_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_i x_j$$

s.t. $\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}$ ve $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$

Burada koyu simgeler vektör veya matrisleri ifade etmektedir. Portföy optimizasyonu probleminde σ_{ij} i ve j varlıları arasındaki kovaryansı olacaktır. Markowitz, ortalama varyans modelini kuadratik programlama olarak oluşturmuştur. Bir portföy optimizasyonu probleminde kuadratik programlama;

$$f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\mu}\mathbf{w} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^T \boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$$

s.t. $\mathbf{A}\mathbf{w} \leq \boldsymbol{\mu}_0$ ve $\mathbf{w} \geq \mathbf{0}$

şeklinde olacaktır. Burada $\boldsymbol{\mu}$ ortalama getiriler vektörü, $\mathbf{w}$ ağırlıklar vektörü, $\mathbf{A}$ kısıt katsayıları matrisi ve $\boldsymbol{\Sigma}$ varyans-kovaryans matrisidir. Son olarak $\boldsymbol{\mu}_0$, portföyden beklenen minimum getiri miktarıdır.

BÖLÜM V

BELİRSİZLİK ALTINDA OPTİMİZASYON

Kesinlik veya belirlilik, doğrusal programlama probleminin en önemli varsayımlarından bir tanesidir. Bu varsayım doğrusal programlama probleminin çözümü için işe yarar bir varsayımdır, fakat pratikte neredeyse hiç karşılanmaz. Genel olarak optimizasyon problemlerinde parametreler geçmiş gözlemlerden yola çıkarak gelecekle ilgili öngörü yapar. Geçmiş verilerden elde edilen tahminler iki tür hata taşır. İlki hesaplama hatalarıdır. İkincisi ise geçmiş gözlemlerin geleceği iyi tahmin edememesinden kaynaklı tahmin hatalarıdır. İlki veri toplama ve hesaplama yaparken parametre değerinde meydana gelen hataları ifade eder ve bu tezin kapsamı dışındadır. İkinci tür hatalar ise dağılımdaki değişimlerden kaynaklı tahmin sapması hatalarıdır.

Bir değişkenin örneklem dönemi dağılım fonksiyonuyla, tahmin (öngörü) dönemi dağılım fonksiyonu her zaman aynı olmaz. Dolayısıyla örneklem döneminden yola çıkarak elde edilen çözümler, parametrelerdeki küçük değişimlere duyarlı olmakta ve parametrelerdeki sapmalar nedeniyle çözüm geçersiz olabilmektedir. Bilindiği üzere doğrusal programlama problemlerinin çözümü feasible alanın köşe noktalarından birinde olmaktadır. Bu anlamda, amaç fonksiyonu veya kısıtlardaki katsayılar çok az değişse bile, çözüm noktasının feasible alan dışına çıkma olasılığı vardır. Bu yüzden bir doğrusal programlama problemi çözüldükten sonra duyarlılık analizi sonuçlarına da bakılır. Böylelikle elde edilen çözümün geçerli bir çözüm olmaya devam edeceği sınırlar belirlenmiş olur.

Parametrelerdeki belirsizlikleri hesaplamada en çok kullanılan yöntem *duyarlılık analizidir*. Duyarlılık analizindeki temel amaç, optimal çözümü bozmadan parametre değerlerinin değişebileceği aralıkları bulmaktır. Duyarlılık analizi doğrusal programlama problemindeki parametre değerlerinin, gerçekleşme anına kadar kesin olarak bilinmeyeceği fikrine dayanır. Nitekim bir firmanın aylık taleplere göre üretim yaptığını varsaydığımızda, firmanın elinde geçmiş dönemlerin ortalama talep miktarları bulunsa dahi gerçek talep ancak realizasyondan sonra kesin olarak bilinebilir. Muhakkak ki talep miktarının kendisi de bir olasılık dağılımına sahiptir ve belli bir olasılıkla alacağı değerleri kestirebiliriz. Duyarlılık analizi benzer bir mantık ile çözümün feasible alan içinde kalmasını sağlayacak maksimum parametre sapmalarını hesaplamaya yarar.

Belirsizlik altında optimizasyonun bir diğer uygulaması *Stokastik programlamadır*. Stokastik programlama belirsizliği direkt olarak modelin içine dâhil eder ve buna göre bir çözüm geliştirir. Buradaki temel mantık, olası senaryoların modelin içinde eritilmiş olmasıdır. Stokastik programlama olası senaryolar üretir ve bu senaryoların gerçekleşme durumuna göre modelin çözümünü günceller. Dolayısıyla tüm senaryolarda geçerli olacak bir çözüm elde eder. Stokastik programlamanın en büyük dezavantajı çözüm uzayı ve çözüm değeri güncellenirken olası senaryolardan birinin realizasyonunu beklemesidir. Önce belirsiz parametre realizasyonu gerçekleşir sonra modelin çözümü buna göre güncellenir.

Belirsizliği modele dahil eden bir diğer yöntem *Dinamik programlamadır*. Dinamik programlama sondan başa doğru giderek optimal çözüm noktasını bulmaya çalışan ve çözümü katmanlara ayırmak koşuluyla belirsizlikleri modele dahil eden bir yöntemdir. Teoride duyarlılık analizi ve Stokastik programlama probleminden daha etkin sonuçlar üretmesine rağmen, karmaşık yapısı ve uygulamadaki zorluklar bu yöntemin dezavantajlarıdır. Bahsedildiği gibi dinamik programlama, belirsizlikleri her bir katman için ayrı ayrı modele dahil eder ve her çözüm katmanındaki belirsizlikleri çarparak modeldeki toplam belirsizlik düzeyine ulaşır.

Son olarak belirsizliği modele dahil eden yöntem olarak *Robust optimizasyon* düşünülebilir. Robust optimizasyon, amaç fonksiyonundaki veya kısıtlardaki her bir parametre için olası belirsizlik setleri tanımlar. Daha sonra, belirsizlik setleri dahilinde en kötü realizasyon durumunda bile optimal kalan bir çözüm bulmayı amaçlar. Bu belirsizlik setleri oluşturulurken istatistiksel yöntemler kullanılmaktadır. Böylelikle parametrelerin realizasyonu ile ilgili olasılık garantisi verilmiş olmaktadır. Belirsiz parametrelerin olasılık dağılım fonksiyonlarının bilinmesi durumunda robust optimizasyon probleminin başarıya ulaşma şansı çok daha artmaktadır. Robust optimizasyon teorisi oldukça karmaşık ve uygulaması da oldukça zor olmasına rağmen her robust programlama probleminin doğrusal bir eşleniğinin oluşturulabilmesi bu yöntemi hem kolay uygulanabilir kılıyor hem de yukarıda bahsi geçen yöntemlere kıyasla çok daha işlevli olmasını sağlıyor. Tabii ki robust optimizasyon problemi için de bir takım uygulama ve teorik zorluklar mevcuttur. Fakat bu zorluklar aşılamaz zorluklar değildir ve diğer yöntemlere göre çok daha az maliyetlidir.

5.1. Duyarlılık Analizi

Duyarlılık analizi Yöneylem Araştırmaları alanında sıkça kullanılan bir *çözüm sonrası* analizdir. Duyarlılık analizinin temel amacı çözüm sonrasında çözümü etkilemesi olası olan duyarlı parametreleri belirlemek ve bu parametrelerin değişebileceği aralıkları hesaplamaktır. Duyarlı parametreler, feasible çözümü etkileyen ve belli sınırlar içinde değişebilen parametrelerdir. Dolayısıyla bu parametreler belirlenen sınırların dışında değişirse çözümün yenilenmesi gerekmektedir.

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

s.t.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

Burada c_j ($j=1,2,\dots,n$) amaç fonksiyonu katsayıları ve a_{ij} ($i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$) ise teknoloji katsayılarıdır. Başka bir ifade ile kısıt denklemleri katsayılarıdır. Son olarak b_i ($i=1,2,\dots,m$) kaynak katsayılarıdır. Daha önce belirtildiği gibi doğrusal programlama problemi bu katsayıların belirli olduğunu varsaymaktadır. Fakat parametrelerdeki küçük değişimlerin çözümü etkileme olasılığı olduğu için araştırmacılar optimal çözümü elde ettikten sonra bu katsayıların (optimal çözümü değiştirmemek koşuluyla) değişim aralığını merak eder ve duyarlılık analizi yapar. Duyarlılık analizi amaç fonksiyonu katsayıları için, kısıt teknoloji katsayıları için veya sağ taraf sabitleri için yapılabilir. Örneğin;

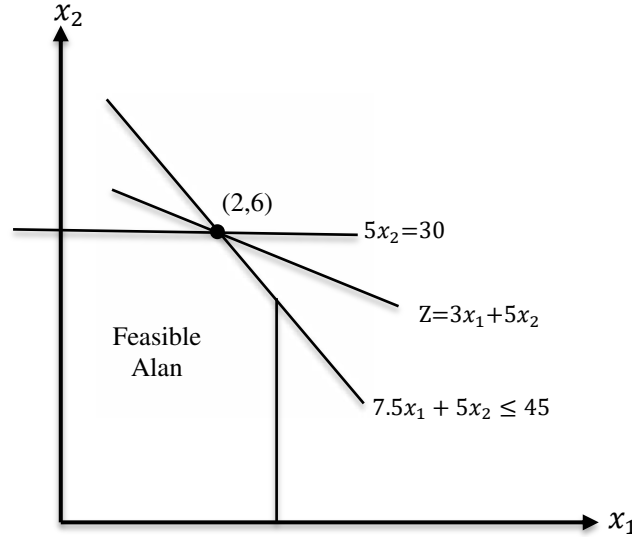
$$Z_{maks} = 3x_1 + 5x_2$$

$$5x_2 \leq 30$$

$$7.5x_1 + 5x_2 \leq 45$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Doğrusal probleminde amaç katsayılarının değişim aralığı grafik yardımıyla gösterilebilir.



Yukarıdaki doğrusal programlama problemi için çözüm noktası feasible alanın köşe noktasıdır ve $5x_2 \leq 30$ kısıtı ile $7.5x_1 + 5x_2 \leq 45$ kısıtının kesiştiği noktadadır. Görüldüğü gibi Z amaç fonksiyonunun eğimi bu iki kısıtın eğimleri arasındadır ve amaç fonksiyonunun eğimi bu aralıkta kaldığı sürece çözüm bozulmadan kalacaktır. $c_1 = 3, c_2 = 5$ olduğuna göre c_1 ve c_2 'nin değişim aralıları şu şekilde belirlenir;

$$\frac{a_{11}}{a_{12}} \leq \frac{c_1}{c_2} \leq \frac{a_{21}}{a_{22}}$$

Burada $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7.5 & 5 \end{bmatrix}$ dir. O halde c_1 'in değişim aralığı $\frac{0}{5} \leq \frac{c_1}{5} \leq \frac{7.5}{5}$ ve $0 \leq c_1 \leq 7.5$ olacaktır. Benzer şekilde $\frac{5}{7.5} \leq \frac{c_2}{3} \leq \frac{5}{0}$ ve $c_2 \geq 2$ şeklinde olacaktır. Sonuç olarak, amaç fonksiyonu katsayıları burada bulunan aralıklarda değiştiği sürece optimal çözüm değişmeyecektir (Hillier ve Lieberman, ss. 138).

Belirsizlik altında optimizasyon yapılırken duyarlılık analizi oldukça faydalı fikirler vermesine rağmen birtakım dezavantajları vardır. En önemli dezavantaj *katsayıların kendisinde var olan hataları veya tahmin sapmalarını göz ardı edip parametreler doğrultmuş gibi (tahmin dönemini iyi temsil) davranmasıdır*. Sonuçta belirsizlik sadece katsayının kendisinde değil aynı zamanda parametreyi yaratan süreçte de olabilir. Bir parametrenin analiz dönemi dağılım fonksiyonu ile tahmin dönemi dağılım fonksiyonun farklı olması gayet olasıdır. İkinci dezavantajı parametre sayılarının binlerle ifade edildiği problemlerde her bir parametre için bu aralıkları hesaplamak neredeyse imkânsızdır. Son olarak başta belirtildiği gibi duyarlılık analizi

bir çözüm sonrası analizidir ve parametrelerin içerdiği belirsizlikleri göz önünde bulundurarak optimizasyon yapmamaktadır, sadece optimal çözümün bozulmaması için parametrelerin değişmesine izin vermektedir.

5.2. Stokastik Programlama

Stokastik programlama, parametrelerdeki Stokastik süreçleri klasik matematiksel modellere dahil etmektedir. Stokastik programlama belirsiz parametrelerin rassal olduklarını ve *olasılık dağılım fonksiyonlarının bilindiğini* varsaymaktadır. Parametrenin dağılımından çıkarılan bilgi ve olası senaryolar daha sonra Stokastik programlama probleminin doğrusal eşinde kullanılarak çözüm yapılmaktadır. Stokastik programlama problemleri uzun zamandır literatürde teorik olarak ele alınmasına rağmen gerçek problemlere uygulanması ancak kişisel bilgisayarların gelişmesiyle mümkün olmuştur. Bu alandaki gelişmeler bilgisayarların ve algoritmaların gelişmesine paralel olarak devam etmektedir. Stokastik programlamanın finans alanındaki kullanımı bu dönemde yaygınlaşmıştır.

Stokastik programlama modelleri tipik olarak rassal değişkenlerin olası tüm senaryoları üzerinden optimizasyon yapmaktadır. Stokastik optimizasyon teorisi genel olarak üç model türüne belirsizliği dahil eder;

- 1) İki veya çok aşamalı beklenen değer modelleri,
- 2) Risk ölçütleri içeren modeller,
- 3) Şans kısıtları içeren modeller.

Genel matematiksel gösterimde amaç fonksiyonu $F(\mathbf{x}, \xi)$, N boyutlu $\mathbf{x}$ değişkenler vektörüne ve d boyutlu belirsiz parametreler setine bağlıdır. Bu şekilde ifade edilmiş bir problem belirsiz parametreleri optimize etmeye çalıştığı için iyi belirlenmiş bir model değildir. F 'i iyi belirlenmiş bir fonksiyon yapabilmek için şu şekilde bir değişiklik yapılabilir.

$$\max_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x}} E[F(\mathbf{x}, \xi)] \quad (5.1)$$

(5.1) numaralı model iyi belirlenmiştir. Çünkü F fonksiyonu bilinmeyen parametreler seti ξ 'ye göre değil, olası senaryolara göre optimize edilmektedir.

Belirsiz parametreler amaç fonksiyonun yerine kısıtlarda yer alırsa nasıl bir model kurulabilir? Bu durumda, amaç fonksiyonuna kısıtların sağ tarafının karşılanmaması durumunda fonksiyon değerini düşürecek ceza parametreleri

eklenebilir. Ya da kısıt, belirsiz parametrelerin tüm olası durumlarını doyuracak şekilde esnetilebilir. Son olarak modele, kısıtların büyük bir olasılıkla doyurulmasını sağlayacak şans kısıtları eklenebilir (Fabozzi vd., ss. 293).

5.2.1. Çok Aşamalı Stokastik Modeller

Çok aşamalı Stokastik modellerde karar değişkenleri ve kısıtlar zaman ve aşama (stage) olmak üzere gruplara ayrılır. Yapı bilgisini iyi tanımlamak bu tür modeller için önemlidir. Birçok finansal uygulamada bu modeller kullanılmaktadır. $N+1$ varlıklı bir yatırım probleminde bir varlık nakit olmak üzere, geriye kalan N tane hisse senedinin getirisi rassaldır ve $\tilde{r}_t = (\tilde{r}_{0t}, \tilde{r}_{1t}, \dots, \tilde{r}_{Nt})$ şeklinde ifade edilir. Burada $t=1, \dots, T$ hisse senedinin zaman aralığını göstermektedir. Ayrıca W_0 eldeki nakit miktarı olmak üzere, amaç T dönem sonra yatırımcının fayda fonksiyonunu maksimum yapacak W_T 'yi elde etmektir. Yatırımcının fayda fonksiyonu $u(W_T)$ konkav bir fonksiyon olarak tanımlanmıştır. T aşamalı bir yatırım modelinde her dönemin sonunda varlık ağırlıklarını güncellemek olasıyken ara dönemlerde nakit eklenmesi veya nakit çıkartılmasına izin verilmemektedir. Yatırım sürecinde $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_T)$ 'in her bir dönem için olası senaryoları temsil ettiğini ve rassal olduğunu düşünelim. T dönemli bir modelde $t=1, 2, \dots, T$ için bir hisse senedinin gerçekleşmesi (realizasyonu) $\tilde{r} = (\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_T)$ olarak ifade edilsin. O halde nihai karar süreci aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$\mathbf{w}(\xi) = \{\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1^{\xi_1}, \dots, \mathbf{w}_T^{\xi_T}\}, \mathbf{y}(\xi) = \{\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1^{\xi_1}, \dots, \mathbf{y}_{T-1}^{\xi_{T-1}}\}$$

$$\mathbf{z}(\xi) = \{\mathbf{z}_0, \mathbf{z}_1^{\xi_1}, \dots, \mathbf{z}_{T-1}^{\xi_{T-1}}\}$$

Burada $\mathbf{w}, \mathbf{y}$ ve $\mathbf{z}$ sırasıyla her bir dönemde portföyde yer alan hisse miktarları, satılan hisse miktarları ve satın alınan hisse miktarlarıdır. Yatırımcı “0” zamanında bir sonraki dönem hangi senaryonun gerçekleşeceğini bilmeden yatırım yapar ve $(0+1)$ zamanında tüm hisselerin gerçekleşen realizasyonuna bağlı olarak yatırım kararını gözden geçirip portföydeki hisse ağırlıklarını günceller. Yatırımcı hisse senetlerinin realizasyona bağlı olarak portföyündeki mevcut durumu koruyabilir, bazı hisseleri satabilir veya bazı hisselerden satın alabilir. Yatırımcının satın alma kararını $\mathbf{z}_{0,i}$ ve satma kararını $\mathbf{y}_{0,i}$ olarak gösterirsek, amaç fonksiyonunda satın alınan miktar katsayısı $\mathbf{c}_{buy}$ veya satılan miktar katsayısı $\mathbf{c}_{sell}$ kadar değişiklik olacaktır. Dolayısıyla $t=1$ 'den $t=T$ dönemine

kadar her bir dönemin realizasyon bilgileri kullanılarak portföy ve yatırım getirisi maksimum yapılmaya çalışılır. Peki, bu yatırım sorunu Stokastik programlama olarak nasıl formüle edilir?

Her bir hisse senedi için her dönem $s=1,2,\dots,S$ tane olası durum olsun, o halde problem;

$$\max_{w(\xi), y(\xi), z(\xi)} \sum_{s=1}^S p_s \cdot u(W_T^s) \quad (5.2)$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N w_{i,0}^s &= W_0, \quad s = 1, \dots, S \\ \sum_{i=1}^N w_{i,T}^s &= W_T^s, \quad s = 1, \dots, S \\ w_{i,t}^s &= (1 + r_{i,t}^s)(w_{i,t-1}^s - y_{i,t-1}^s + z_{i,t-1}^s), \quad s = 1, \dots, S; \quad t = 1, \dots, T \\ w_{0,t}^s &= (1 + r_{0,t}^s) \left(w_{0,t-1}^s + \sum_{i=1}^N (1 - c_{\text{sell}}) y_{i,t-1}^s - \sum_{i=1}^N (1 + c_{\text{buy}}) z_{i,t-1}^s \right) \\ &\quad s = 1, \dots, S; \quad t = 1, \dots, T \\ w_{i,t}^s &= w_{i,t}^{s'} \quad \text{tüm senaryolar için } t, t = 1, \dots, T \text{ ye kadar } s \text{ ve } s' \text{ eşittir.} \\ w_{i,t}^s, y_{i,t}^s, z_{i,t}^s &\geq 0, s = 1, \dots, S, t = 1, \dots, T, i = 0, \dots, N \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada p_s her bir senaryonun gerçekleşme olasılığıdır ve tüm senaryoların gerçekleşme şansı eşitse $p_s = 1/S$ olacaktır. Amaç fonksiyonu, olası senaryolara bağlı olarak beklenen değeri maksimum yapmaktadır.

Modeldeki $w_{i,t}^s = (1 + r_{i,t}^s)(w_{i,t-1}^s - y_{i,t-1}^s + z_{i,t-1}^s)$ denge kısıtıdır. Buna göre t döneminde portföyün toplam değeri $t-1$ dönemi sonunda satılan miktar ile satın alınan miktara bağlı olarak hesaplanmaktadır. Sonuçta t dönem başı portföy değeri ile $t-1$ dönem sonu portföy değeri eşit olmak zorundadır.

$$w_{0,t}^s = (1 + r_{0,t}^s) \left(w_{0,t-1}^s + \sum_{i=1}^N (1 - c_{\text{sell}}) y_{i,t-1}^s - \sum_{i=1}^N (1 + c_{\text{buy}}) z_{i,t-1}^s \right)$$

kısıtı da benzer bir işlev görür. Bu kısıt 0 başlangıç döneminden t dönemine kadarki portföyün toplam değerini vermektedir. Kısıta göre, 0 döneminden t dönemin sonuna kadar portföy değerinin, portföyde sabit kalan ($w_{0,t-1}^s$), satılan (c_{sell}) ve satın alınan (c_{buy}) miktarların toplamı olması gerektiğini gösterir. Son olarak, $w_{i,t}^s = w_{i,t}^{s'}$ kısıtı her dönemin senaryo kümelerinin eşit olduğunu gösteren kısıttır. Geriye kalan kısıtlar

büyük veya eşit olma kısıtlarıdır.

Yukarıda ifade edilen Stokastik programlama modeli teorik olarak güçlü olmasına rağmen çözümü oldukça zordur. Dolayısıyla bu modeli çözüm yapılabilir bir yapıya dönüştürmek gerekmektedir. Modelin çok aşamalı doğrusal eşleniği şu şekildedir;

$$\begin{aligned}
 & \underset{x}{maks} c'_0 x_0 + E_{\xi_1} \left[\left(c_1^{\xi_1} \right)' x_1^{\xi_1} + \dots \right. \\
 & \left. + E_{\xi_{T-1}|\xi_{T-2}} \left[\left(c_{T-1}^{\xi_1, \dots, \xi_{T-1}} \right)' x_{T-1}^{\xi_1, \dots, \xi_{T-1}} + E_{\xi_T|\xi_{T-1}} \left[\left(c_T^{\xi_1, \dots, \xi_T} \right)' x_T^{\xi_1, \dots, \xi_T} \right] \right] \right] \\
 \text{s.t.} \quad & A_0 x_0 = b_0 \\
 & B_0^{\xi_1} x_0 + A_1^{\xi_1} x_1^{\xi_1} = b_1^{\xi_1} \\
 & \vdots \\
 & B_{T-1}^{\xi_T} x_{T-1}^{\xi_1, \dots, \xi_{T-1}} + A_T^{\xi_T} x_T^{\xi_1, \dots, \xi_T} = b_T^{\xi_T} \\
 & x_0, x_1^{\xi_1}, \dots, x_{T-1}^{\xi_1, \dots, \xi_{T-1}}, x_T^{\xi_1, \dots, \xi_T} \geq 0
 \end{aligned}$$

Problemi bu şekilde ifade etmek paket programlarda kodlanmasını kolaylaştırmaktadır.. Amaç fonksiyonun daha anlaşılır olabilmesi için aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\underset{x}{maks} \left\{ f_0(x_0) + E_{\xi_1} \left[\underset{x_1^{\xi_1}}{maks} \left\{ f_1(x_1^{\xi_1}) + \dots + E_{\xi_T|\xi_{T-1}} \left[\underset{x_1^{\xi_1}, \dots, x_T^{\xi_T}}{maks} f_T(x_T^{\xi_1, \dots, \xi_T}) \right] \right\} \right] \right\}$$

Söz ile ifade edecek olursak, f_0 'dan f_T 'ye kadar T aşamanın her biri için $\xi_1, \dots, \xi_T$ olası senaryoların realizasyonuna bağlı olarak maksimizasyon yapılmaktadır. Her bir aşamadaki realizasyonuna bağlı olarak diğer aşamaya geçilmektedir (Fabozzi vd., ss. 297).

5.2.2. Ortalama Risk Modelleri

Ortalama risk Stokastik modellerinin amaç fonksiyonu beklenti ve risk ölçütleri olmak üzere iki kısımdan oluşturmaktadır. Buradaki temel mantık ile Markowitz'in risk ile beklenen getiri arasındaki değişim (trade off) mantığı benzerdir. Ortalama varyans

modelinde getiriler maksimum yapılmak istenirken risk, modele bir ceza katsayısıyla dahil edilmektedir. Söz gelimi, $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N$, N adet varlığın rassal getirileri ve $w_1, w_2, \dots, w_N$ bu varlıkların portföy içindeki ağırlıkları olsun. Buna göre model şu şekilde olacaktır;

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{w}} \quad & \sum_{i=1}^N \mu_i w_i - \kappa \rho \left(\sum_{i=1}^N \tilde{r}_i w_i \right) \\ & \mathbf{w}' \mathbf{1} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Burada μ_i N adet varlığın ortalaması, κ riskten kaçınma katsayısı, ρ ise portföy varyansını temsil etmektedir ve aşağıdaki şekilde gösterilmektedir.

$$\rho \equiv E[(\tilde{\mathbf{r}}' \mathbf{w} - E[\tilde{\mathbf{r}}' \mathbf{w}])^2]$$

veya,

$$\rho \equiv E[(\tilde{\mathbf{r}}' \mathbf{w})^2] - (E[\tilde{\mathbf{r}}' \mathbf{w}])^2$$

Bu problemde s adet olası senaryo olduğu düşünülürse, μ_i $i=1,2,\dots,N$ varlığın senaryo realizasyonuna bağlı olarak gerçekleşen ortalama beklenen getirisidir. Bu durumda r_i^s i. varlığın s senaryosundaki ortalama getirisidir. Ayrıca $p_1, \dots, p_s$, s adet senaryonun her birinin gerçekleşme olasılığıdır ve $\sum_{s=1}^S p_s = 1$ 'dir. O halde Stokastik programlama modelinin amaç fonksiyonu;

$$\max_{\mathbf{w}} \sum_{i=1}^N \mu_i w_i - \kappa \left[\sum_{s=1}^S \left[p_s \left(\sum_{i=1}^N r_i^s w_i \right)^2 \right] - \left(\sum_{s=1}^S p_s \sum_{i=1}^N r_i^s w_i \right)^2 \right]$$

olacaktır. Yukarıdaki modelin anlaşılması kolay olsa da çözümü hala zordur. Dolayısıyla doğrusal programlama eşleniğinin elde edilmesi problemin çözümü açısından önemlidir. Stokastik problemin doğrusal eşleniğinin oluşturulması amacıyla $s=1,2,\dots,S$ için R_s yardımcı değişkenler tanımlanıp problem aşağıdaki gibi dönüştürülebilir.

$$\max_{\mathbf{w}, \mathbf{R}} (1 - \kappa) \sum_{i=1}^N \mu_i w_i + \kappa \sum_{s=1}^S p_s R_s$$

s.t.

(5.4)

$$\begin{aligned}
R_s &\leq \sum_{i=1}^N \mu_i w_i, & s = 1, \dots, S \\
R_s &\leq \sum_{i=1}^N r_i^s w_i, & s = 1, \dots, S \\
\mathbf{w}'_1 &= 1 \\
\mathbf{w} &\geq 0
\end{aligned}$$

Burada κ riskten kaçınma katsayı, μ_i i. varlığın ortalama getirisi, w_i ilgili varlığın portföy içindeki ağırlığı, p_s s. senaryonun gerçekleşme olasılığı ve R_s yardımcı değişkendir (Fabozzi vd., ss. 305). Sonuç olarak Stokastik programlama probleminin doğrusal eşleniği hem teorik olarak güçlüdür hem de çözümü çok daha kolaydır.

5.2.3. Şans Kısıtlı Modeller

Literatürde karşılaşılabilecek diğer bir Stokastik programlama problemi şans kısıtlarının olduğu problemlerdir. Şans kısıtlı Stokastik programlama problemlerinin çözüm mantığı, ilgili kısıtların olasılık olarak doyurulması prensibine dayanmaktadır. Şans kısıtlı Stokastik programlama probleminin en tipik örneği portföy optimizasyonu problemlerinde kullanılan Value at Risk (VaR) uygulamalarıdır. Daha önce olduğu gibi $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N$, N adet varlığın rassal getirileri ve $w_1, w_2, \dots, w_N$ ise bu varlıkların portföy içindeki ağırlıkları, γ_0 ise ε olasılıkla maksimum kaybedilecek miktarını gösterebilir.

$$\min_{\gamma_0, \mathbf{w}} \gamma_0 \quad (5.5)$$

s.t.

$$\begin{aligned}
P(W_0 - \tilde{\mathbf{r}}' \mathbf{w} \geq \gamma_0) &\leq \varepsilon \\
\mathbf{w}'_1 &= 1
\end{aligned}$$

Burada W_0 portföyün bugünkü değeridir. Yukarıdaki şans kısıtı, portföyün bugünkü değeri ile yatırım sonrası değeri arasındaki farkın γ_0 'den büyük olma olasılığının maksimum ε kadar olmasını ifade eden şans kısıtıdır. Yani yatırım kaybının γ_0 'den büyük olma olasılığını maksimum ε olarak sınırlamaktadır.

Şans kısıtlı problemleri çözmek oldukça zordur. Söz gelimi, matematiksel

ifadesi oldukça kolay olan yukarıdaki portföy probleminin çözülmesi için öncelikle probleme tamsayı değişkenleri, yardımcı değişkenler vs. eklenmeli ve problem karma tamsayılı programlama problemine dönüştürülmelidir. Bilindiği üzere tamsayılı programlama problemlerinin çözümü genel problemlere göre daha zordur. Değişken sayısı fazla olan problemlerde güçlü işletim sistemine sahip bilgisayarlar bile çözüm yaparken zorlanmaktadır. Diğer bir sorun, bu şekilde oluşturulan problemin konveks olmasının garanti edilememesidir. Böylelikle elde edilen çözümün global optimum noktada olması garanti edilemez. En azından problemin global bir çözüm üretmesi için şans kısıtıyla ilgili güçlü olasılık dağılım fonksiyonu varsayımları yapılmalıdır. VaR problemlerinde kısıtlar kapalı bir çözüm uzayını ifade eder ve *dağılım ile ilgili normallik varsayımı yapıldığı* takdirde bu problem çözülmüş olur. Fakat bilindiği üzere finansal varlıkların getiri dağılımları genellikle normal dağılmamaktadır (Fabozzi vd. ss., 307). Tüm bu problemler göz önüne alındığında şans kısıtlı Stokastik programlama problemleri birçok dezavantaja sahiptir.

5.3. Dinamik Programlama

Dinamik programlama Stokastik kontrol problemi de denilen, her bir aşamasında olası tüm senaryoları değerlendiren ve sondan başa doğru çözüm yapan bir yöntemdir. Temelde bu tür problemler Stokastik programlama probleminin defalarca uygulanması olarak düşünülebilir. Dinamik programlama problemleri son aşamadan başlayarak tüm olası durumları değerlendirir ve çözüme giderken sadece optimal yolu takip eder. Dinamik programlama problemleriyle Stokastik programlama problemleri arasındaki fark çok keskin değildir, çünkü dinamik programlama problemleri çözülürken kullanılan algoritmalar Stokastik programlama problemleri için de kullanılmaktadır.

Dinamik programlama modelinin altında yatan dinamik bir sistem ve bir amaç fonksiyonu vardır. Dinamik programlama problemi bir maksimizasyon veya çok katmanlı toplamsal minimizasyon olmasına bağlı olarak ceza veya maliyet fonksiyonu olarak adlandırılır. Bir dinamik programlama probleminde $\mathbf{x}_t$ vektörü, sistemin t dönemindeki durumunu gösterir ve son aşamadan t dönemine kadar olan bilgileri taşır. Bir dinamik programlama probleminde t dönemi ile $t+1$ dönemi arasındaki ilişki $\mathbf{x}_{t+1} = g_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \xi_t)$ olarak gösterilir. Burada $\mathbf{u}_t$ araştırmacı tarafından seçilen kontrol vektörü, ξ_t ise rassal parametreler vektörüdür.

Bir dinamik programlama probleminde $f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \xi_t)$ fonksiyonu, t zamanındaki toplam amaç fonksiyonu katkısını ifade eder. Bu problemlerde zamanın sonlu ve kesikli olduğu varsayılmaktadır. Dolayısıyla $t=1,2,\dots,T$ için toplam katkı $\sum_{t=0}^T f_t(\mathbf{x}_t, \mathbf{u}_t, \xi_t)$ kadar olacaktır.

Dinamik programlama probleminin işleyiş mantığı için çok dönemli bir yatırım problemi düşünelim. Yatırımcı başlangıçta W_0 kadar bir servete sahip olsun. Burada yatırım dönemini $t=1,2,\dots,T$ olarak tanımlayalım ve zamanın kesikli olduğu düşünelim, böyle bir problem Stokastik programlama problemi olarak aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\begin{aligned}
 & \underset{\mathbf{x}}{\text{maks}} \left\{ f_0(\mathbf{x}_0) + E_{\xi_1} \left[\underset{\mathbf{x}_1^{\xi_1}}{\text{maks}} \left\{ f_1(\mathbf{x}_1^{\xi_1}) + \dots + E_{\xi_T | \xi_{T-1}} \left[\underset{\mathbf{x}_T^{\xi_1, \dots, \xi_T}}{\text{maks}} f_T(\mathbf{x}_T^{\xi_1, \dots, \xi_T}) \right] \right\} \right] \right\} \\
 \text{s.t.} \quad & \begin{aligned} & A_0 \mathbf{x}_0 & & = \mathbf{b}_0 \\ & B_0^{\xi_1} \mathbf{x}_0 & + & A_1^{\xi_1} \mathbf{x}_1^{\xi_1} & = \mathbf{b}_1^{\xi_1} \\ & & & \vdots & \\ & B_{T-1}^{\xi_1, \dots, \xi_{T-1}} \mathbf{x}_{T-1}^{\xi_1, \dots, \xi_{T-1}} & + & A_T^{\xi_1, \dots, \xi_T} \mathbf{x}_T^{\xi_1, \dots, \xi_T} & = \mathbf{b}_T^{\xi_1, \dots, \xi_T} \\ & \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^{\xi_1}, \dots, \mathbf{x}_{T-1}^{\xi_1, \dots, \xi_{T-1}}, \mathbf{x}_T^{\xi_1, \dots, \xi_T} \geq 0 \end{aligned}
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

Bu problemde $\mathbf{x}_t$ vektörü $[\mathbf{w}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t]$ 'nin bir formu olarak tanımlanmıştır. Burada $\mathbf{w}_t$ t dönemi başındaki toplam servet, $\mathbf{y}_t$ satılan varlık miktarı ve $\mathbf{z}_t$ satın alınan varlık miktarıdır.

Aynı problem dinamik programlama problemi olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\underset{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_T}{\text{maks}} \left\{ f_0(\mathbf{x}_0) + E_{\xi_1} \left[\underset{\mathbf{x}_1}{\text{maks}} \left\{ f_1(\mathbf{w}_1, \mathbf{u}_1, \xi_1) + \dots + E_{\xi_T | \xi_{T-1}} \left[\underset{\mathbf{x}_T}{\text{maks}} f_T(\mathbf{w}_T, \mathbf{u}_T, \xi_T) \right] \right\} \right] \right\} \tag{5.7}$$

s.t.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{B}_{t-1} \mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_t \mathbf{x}_t = \mathbf{b}_t, & t = 1, \dots, T \\
 & \mathbf{u}_t = [\mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t], & t = 1, \dots, T \\
 & \mathbf{x}_t = [\mathbf{w}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t], & t = 1, \dots, T \\
 & \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{T-1}, \mathbf{x}_T \geq 0
 \end{aligned}$$

Yukarıdaki formülasyon için durum vektörü $\mathbf{w}_t$ 'dir. Bu vektör t döneminde yatırım yapılan tüm varlık miktarlarını göstermektedir ve t dönemine kadarki tüm bilgileri içermektedir. Politika vektörleri $\mathbf{u}_t = [\mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t]$ 'dir. Bu vektörler t dönemi sonunda satın alınan ve satılan varlıkları göstermektedir. Yatırımcı bu vektörleri kontrol etmektedir. Sistemin gelişimi $\mathbf{B}_{t-1}\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{A}_t\mathbf{x}_t = \mathbf{b}_t$ kısıtıyla sağlanmaktadır. Burada $\mathbf{B}_{t-1}$ ve $\mathbf{A}_t$ matrisleri rassal matrisler olabilir (yukarıdaki örnekte $\mathbf{B}_{t-1}$ belirsiz parametrelerin realizasyonunu göstermektedir).

Dinamik programlama probleminin çözümü V_t fonksiyonun her aşamada optimize edilmesiyle ilerler. Böylelikle T döneminden başlayarak başlangıç dönemine kadar her defasında bir sonraki dönemin optimal değeri üzerinden bir önceki dönem optimize edilir.

$$\begin{aligned}
 & \max_{\mathbf{u}_t} \{f_t(\mathbf{w}_t, \mathbf{u}_t, \xi_t) + V_{t+1}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \xi)\} \\
 \text{s.t.} \quad & \mathbf{B}_t\mathbf{x}_t + \mathbf{A}_{t+1}\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{b}_{t+1} \\
 & \mathbf{u}_t = [\mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t] \\
 & \mathbf{x}_t = [\mathbf{w}_t, \mathbf{y}_t, \mathbf{z}_t] \\
 & \mathbf{x}_t \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Amaç fonksiyonundaki $V_{t+1}(\mathbf{w}, \mathbf{u}, \xi)$ 'nin fonksiyon değeri, tüm olası durumlar değerlendirilerek elde edilmiştir ve $\mathbf{w}, \mathbf{u}, \xi$ parametrelerine bağlı olarak t+1 dönemi için en iyi değeri t dönemine aktararak optimizasyon yapmaktadır. Amaç fonksiyonu V_{t+1} dönemi en iyi (optimal) değerini t dönemi ile birleştirir ve t dönemini $f_t(\mathbf{w}_t, \mathbf{u}_t, \xi_t)$ fonksiyonu ile optimal yaparak totalde t ve t+1 dönemleri için optimal değere ulaşır (Fabozzi vd., ss. 308).

Dinamik programlama problemi, yukarıda tanımlandığı gibi amaç fonksiyonu optimizasyonunu son aşamadan başlayarak 0 noktasına doğru optimize eder. Dolayısıyla son aşamada tüm sonlu olayları değerlendirerek optimal değeri veren kombinasyonu seçer ve bir önceki aşamaya geçer. Aynı süreç geriye doğru tüm aşamalar için yapılır. Böylelikle her aşamada en iyi amaç fonksiyonu değeri elde edilir. Fakat Stokastik programlama problemlerinde olduğu gibi dinamik programlama problemlerinde de değişken sayısı ve olası durumların sayısı arttıkça etkinlik oranları düşmektedir. Söz gelimi beş aşamalı ve her aşamada on olası durumun olduğu bir

dinamik programlama, $\binom{10}{1} * \binom{10}{1} * \binom{10}{1} * \binom{10}{1} * \binom{10}{1} = 10^5 = 100000$ adet olası çözümden en iyi çözümü aramaktadır. Görüldüğü gibi küçük bir problemde bile çok fazla aday çözüm vardır ve dinamik programlama tüm bu çözüm adaylarını değerlendirmektedir. Sonlu, fakat büyük problemlerde dinamik programlamanın etkinliği düşecektir ve çözümü güçleşecektir. Bu dinamik programlama problemi için bir dezavantajdır. Diğer bir dezavantaj dinamik programlamanın parametrelerin olasılık dağılımları hakkındaki varsayımlarıdır. Tıpkı Stokastik programlamada olduğu gibi burada da olasılık dağılım fonksiyonlarıyla ilgili yeterince bilgi yoksa problemin çözümü güvenilirliğini yitirecektir.

5.4. Robust Optimizasyon

Dinamik programlama ve Stokastik programlamayla ilgili en büyük problem parametre dağılımlarına ilişkin varsayılan detaylı bilgidir. Uygulamada belirsiz parametrelerin dağılımlarıyla ilgili çok az bilgi mevcuttur. Ayrıca önceki bölümlerde değindiğimiz gibi olası senaryo sayısı arttıkça dinamik programlama ve Stokastik programlama problemlerinin çözümü oldukça zorlaşmaktadır ve bu modellerin etkinlikleri düşmektedir. Bu yüzden ki, bu iki model teorik olarak güçlü olmasına rağmen uygulama alanları oldukça sınırlı kalmıştır. Robust optimizasyon, adı geçen modellere kıyasla daha yeni bir tekniktir. Fakat belirsiz parametrelerin dağılımlarıyla ilgili genel varsayımlar öne sürdüğü ve belirsizliği direkt olarak modele dahil ettiği için daha çok tercih edilmiştir. Ayrıca her robust optimizasyon probleminin doğrusal eşleniği olduğu için çözümü büyük problemlerde bile Stokastik programlama ve dinamik programlamaya kıyasla kolaydır.

Birçok optimizasyon probleminde girdilerin (parametre) değerleri çözüm anında bilinmemekte veya yanlış tahmin edilmektedir. Optimizasyon problemlerinde girdilerin değerleri çok önemlidir ve çözüm, girdi değerlerine oldukça duyarlıdır. Değişkenlerin tahminlerindeki küçük sapmalar optimizasyon problemini tamamıyla değiştirebilir. Doğrusal programlama problemlerin optimal çözümleri feasible alanın köşe noktasında olduğu bilinmektedir. Tahmin edilen parametrelerin değerlerindeki sapmalar çözümü köşe noktasının dışına çıkartabilir ve sonucu geçersiz kılabilir. Bilimsel çalışmalarda sıkça kullanılan NETLIB kütüphanesi PILOT4 örneği sapmalı girdilerin optimal çözüm üzerindeki etkisini çok net göstermektedir. PILOT4 örneği 1000 değişken ve 410 kısıttan oluşan bir doğrusal programlama problemidir. Problemin kısıtlarından bir tanesi şu şekildedir;

$$\begin{aligned}
a^T x \equiv & -15.79081x_{826} - 8.598819x_{827} - 1.8878900x_{828} - 1.3624170x_{829} \\
& -1.526049x_{830} - 0.031883x_{849} - 28.725555x_{850} - 10.792065x_{851} \\
& -0.190040x_{852} - 2.757176x_{853} - 12.290832x_{854} + 717.56226x_{855} \\
& -0.057865x_{856} - 3.785417x_{857} - 78.306610x_{858} - 122.16306x_{859} \\
& -6.466090x_{860} - 0.483710x_{861} - 0.6152640x_{862} - 1.3537830x_{863} \\
& -84.64426x_{864} - 122.4591x_{865} - 43.155930x_{866} - 1.7125920x_{870} \\
& -0.401597x_{871} + x_{880} - 0.946049x_{898} - 0.946049x_{916} \\
\geq & b \equiv 23.387405
\end{aligned}$$

Negatif olmama kısıtlarıyla birlikte CPLEX paket programı optimal çözümü şu şekilde vermiştir;

$$\begin{aligned}
x_{826}^* &= 255.6112787181108 & x_{827}^* &= 6240.488912232100 \\
x_{828}^* &= 3624.613324098961 & x_{829}^* &= 18.20205065283259 \\
x_{849}^* &= 174397.0389573037 & x_{870}^* &= 14250.00176680900 \\
x_{871}^* &= 25910.00731692178 & x_{880}^* &= 104958.3199274139
\end{aligned}$$

Problemten anlaşılabacağı gibi katsayılar oldukça kesin görünmektedir. Örneğin -15.79081 katsayısı çok kesin tahmin edilmiş ve virgülden sonra beş basamakla ifade edilmiştir. Gerçek süreçte bu katsayı tam olarak -15.79081 şeklinde gerçekleşmezse problemin çözümü bundan nasıl etkilenir? Bulunan optimal çözüm geçerli olmaya devam edecek mi? Tahmin edilmiş parametrelerin büyük oranda doğru olduğunu ve gerçek değer tahmin değerinden sadece %0.1 oranında farklılaşacağını varsayalım. Tahmin edilmiş katsayılar vektörü a ile temsil edilirken gerçekleşen katsayılar vektörünün $\tilde{a}$ temsil edilen PILOT4 örneğinde %0.1'lik bir sapmanın yukarıdaki kısıtın sağ taraf sabitine etkisi %450 olarak gerçekleşmiştir. Aynı problem için özetle $a_j \mapsto \tilde{a}_j = (1 + \xi_j)a_j$ olduğu varsayıldığında, ξ_j 'nin $[+0.001 -0.001]$ aralığı için sağ taraf sabitinin ortalama bozulma oranı;

$$V = \frac{b - \tilde{a}^T x^*}{b} \times 100\%$$

olarak hesaplanmıştır (Ben-Tal ve Nemirovski, 2000). PILOT4 örneğinden de anlaşılabacağı gibi tahmin edilen katsayılardaki çok küçük sapmalar bile problemin çözümünü etkilemektedir ve daha önce bulunmuş optimal çözüm noktasının geçersiz olmasına neden olabilmektedir.

Robust optimizasyon terimi birkaç farklı şekilde tanımlanabilir¹¹. Fakat bizim kullandığımız anlamıyla robust optimizasyon belirsiz parametreler için iyi belirlenmiş bir belirsizlik kümesi dahilinde, belirsiz parametrelerin olası en kötü senaryolarının realizasyonu durumunda bile geçerli olan bir optimal çözümü ifade eder. Robust optimizasyon birkaç konuda dinamik programlama ve Stokastik programlama göre bazı avantajlar sağlar (Cornuejos ve Tütüncü, ss. 295). Bunlar;

- Parametreler örneklemden tahmin edildiği için bazı tahmin hataları taşıdığını dikkate alması,
- Değeri her ne olursa olsun doyurulması gereken belirsiz parametreler içeren kısıtların varlığı,
- Amaç fonksiyonu veya kısıtların parametredeki değişimlere duyarlı olması,
- Araştırmacının yüksek olasılıkla geçerli bir çözüm bulmayı amaçlamasıdır.

Robust optimizasyon, belirsiz parametreler için belirsizlik setleri tanımlandıktan sonra bu setlerin içinde kalmak koşuluyla parametrelerin en kötü realizasyonundan hareketle optimal çözüm bulur. Böylelikle elde edilen çözüm çok yüksek olasılıkla en kötü senaryo da bile optimal kalmaya devam edecektir. Konu bir portföy problemi üzerinden daha iyi ifade edilebilir. N varlıklı bir portföy seçim probleminde $\tilde{\mathbf{r}} = (\tilde{r}_1, \tilde{r}_2, \dots, \tilde{r}_N)$ rassal getiriler vektörü olsun. Buradaki amaç, getiri maksimizasyonunu sağlayacak en iyi $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \dots, w_N)$ ağırlık vektörünü bulmaktır. Problem şu şekilde formüle edilebilir;

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{w}}{\text{maks}} \sum_{i=1}^N \tilde{r}_i w_i \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{w}' \mathbf{1} = 1 \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.9}$$

¹¹ Robust optimizasyon ilk olarak Mulvey, Vanderbie ve Zenios tarafından yazılan makalede kullanılmıştır. Araştırmacılar “Robust Optimization of Large-Scale Systems” başlıklı çalışmalarında “modelin robust olması” ve “çözümün robust olması” kavramları üzerinde durdular. İlk kavram modelde robust olarak tahmin edilmiş parametrelerin kullanılmasını ifade ederken ikinci kavram belirsizliğin model içine entegre edilip en kötü senaryoda bile geçerli robust bir çözüm bulmayı ifade eder. Bizim de burada kullandığımız konsept ikincisidir.

Bu modelde amaç fonksiyonu rassal $\tilde{r}_i$ getiri oranlarına bağlı maksimizasyon yapmaktır. Fakat getiriler ($\tilde{r}_i$) rassal oldukları için modelin amaç fonksiyonu iyi belirlenmemiştir. Robust optimizasyon probleminde parametrelerin alabileceği değerlerin sınırları belirsizlik setleri yardımıyla tanımlanmalı ve amaç fonksiyonu buna göre oluşturulmalıdır. Söz gelimi yukarıdaki portföy probleminde belirsiz parametrelerin birinci ve ikinci momentleri hakkında şu bilgiler mevcut olsun;

$$\sqrt{(\tilde{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu}_r)' \boldsymbol{\Sigma}_r^{-1} (\tilde{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu}_r)} \leq \kappa$$

Burada $\boldsymbol{\mu}_r$ beklenen getiriler vektörü, $\boldsymbol{\Sigma}_r^{-1}$ ise kovaryans matrisinin tersidir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki κ ise sabittir. $\sqrt{(\tilde{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu}_r)' \boldsymbol{\Sigma}_r^{-1} (\tilde{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\mu}_r)} \leq \kappa$ kapalı formda bir belirsizlik setidir ve belirsiz parametrelerin birinci ve ikinci momentleri için bir sınır çizmektedir. Burada κ kök içindeki ifadenin toplam sapmasının maksimum değerini göstermektedir. Portföy problemi özelinde oluşturulan belirsizlik seti probleme dahil edildiğinde robust optimizasyon modeli elde edilmiş olur. Yukarıdaki problem belirsizlik setini içerecek şekilde ve deterministik olarak yazılırsa;

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{w}}{\text{maks}} \sum_{i=1}^N r_i w_i \\ & \text{s.t.} \\ & \mathbf{w}' \mathbf{1} = 1 \\ & \sqrt{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_r)' \boldsymbol{\Sigma}_r^{-1} (\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_r)} \leq \kappa \\ & \mathbf{w} \geq 0 \end{aligned} \tag{5.10}$$

olacaktır. Böylelikle, beklenen getiriler ile gerçekleşen getiriler arasındaki farkın kovaryans matrisiyle çarpımının karekökü maksimum κ kadar olduğu sürece çözüm optimal kalacaktır. Fakat bu problemin bilgisayar programlarına aktarılması kolay değildir. Problemin bilgisayar programında çözülebilmesi için bazı matematiksel hilelerden ve dualite teoreminden yararlanmak gerekmektedir. Öncelikle orijinal problemin duali alınarak, w_i değişkenleri dual problemin sabit değişkenlerine dönüştürülür. Duali alınmış portföy problemindeki w_i 'ler sabit kabul edilip belirsiz parametrelerin ($\tilde{r}_i$) en kötü değerleri hesaplanır. Daha sonra bu optimizasyon probleminin duali alınarak ve problem belirsiz değişiklerden arındırılıp orijinal

probleme tekrar dönülür. Optimizasyon problemi artık belirsiz değişken içermeyen bir doğrusal programlama modelidir. Dolayısıyla problemin son hali çözülerek w_i ağırlıklar hesaplanabilir.

Problemin çözümü yapılırken $\tilde{r}_i$ belirsiz katsayılarını içeren model çözülüp en kötü senaryolar belirlenmektedir. Bu modelde amaç fonksiyonu, minimum getiriyi sağlayan $\tilde{r}_i$ değerlerini hesaplayacaktır. Hesaplanan $\tilde{r}_i$ değerleri en kötü senaryoyu temsil eder. Bahsi geçen model şu şekilde gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{r}} \quad & \sum_{i=1}^N r_i w_i \\ \text{s.t.} \quad & \|\Sigma_{\mathbf{r}}^{1/2}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}})\| \leq \kappa \end{aligned} \quad (5.11)$$

Bu model belirsiz parametrelere bağlı olarak minimum getirileri hesaplar. Modelin duali aşağıdaki şekildedir¹².

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{u}, v} \quad & -(\mathbf{u}' \Sigma_{\mathbf{r}}^{-1/2} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}}) - \kappa v \\ \text{s.t.} \quad & \Sigma_{\mathbf{r}}^{-1/2} \mathbf{u} + 0 \cdot v = \mathbf{w} \\ & \|\mathbf{u}\| \leq v \end{aligned} \quad (5.12)$$

Burada $\mathbf{u} = \Sigma_{\mathbf{r}}^{1/2} \mathbf{w}$ 'dir. Dolayısıyla yukarıdaki dual problem;

$$\begin{aligned} \max_v \quad & \mathbf{w}' \Sigma_{\mathbf{r}}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{\mathbf{r}}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}} - \kappa v \\ \text{s.t.} \quad & \left\| \Sigma_{\mathbf{r}}^{\frac{1}{2}} \mathbf{w} \right\| \leq v \end{aligned} \quad (5.13)$$

olacaktır. Amaç fonksiyonundaki $\Sigma_{\mathbf{r}}^{\frac{1}{2}} \Sigma_{\mathbf{r}}^{-\frac{1}{2}}$ ifadesi birim matris olduğu için problemin son şekli aşağıdaki gibi olacaktır.

¹² Burada $\|\cdot\|$ ifadesi I_2 öklidyen normudur ve $\|\Sigma_{\mathbf{r}}^{1/2}(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}})\| = \sqrt{(\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}})' \Sigma_{\mathbf{r}}^{-1} (\mathbf{r} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{r}})}$ 'dir. I_2 öklidyen normu N tane değer için kareler toplamının kareköküdür. Yani $\sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$ 'dir.

$$\begin{aligned} & \underset{\eta}{\text{maks}} \quad \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}_r - \kappa v \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\left\| \boldsymbol{\Sigma}_r^{-\frac{1}{2}} \mathbf{w} \right\| \leq v$$

Burada $\boldsymbol{\mu}_r$ varlıkların beklenen getiri vektörü ve $\boldsymbol{\Sigma}_r$ getiri varyans-kovaryans matrisidir.

Yukarıda tanımlanan modelin arkasındaki mantık $\boldsymbol{\mu}_r$ beklenen getiriler ile gerçek getiriler arasındaki farka dayanmaktadır. Çünkü beklenen getiri ile gerçek getiriler arasında bir sapma olması beklenmektedir. Bir varlığın oynaklığı ne kadar yüksek ise gerçekleşen ortalamanın beklenen (tahmin) ortalamadan sapması da o denli yüksek olacaktır. Varyans kovaryansı matrisi bu sapmayı minimum yapacaktır. Markowitz'in ortalama varyans modeli anlatılırken risk minimizasyonu, kar maksimizasyonu ve ceza katsayılı olmak üzere üç model tanıtılmıştı. Yukarıda oluşturulan model ceza katsayısı içerecek şekilde yeniden düzenlenirse şu model oluşacaktır;

$$\begin{aligned} & \underset{\mathbf{w}}{\text{maks}} \quad \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}_r - \kappa \sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}_r \mathbf{w}} \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (5.15)$$

$$\mathbf{w}'\mathbf{1} = 1$$

$$\mathbf{w} \geq 0$$

Bu nihai modeldir ve belirsiz değişkenleri içermemektedir. Artık model MINOS, MATLAB gibi doğrusal olmayan modelleri çözebilen bilgisayar programlarıyla çözüme uygundur (Fabozzi vd., 2007, ss. 316).

5.4.1. Belirsizlik Setinin Seçimi Problemi

Robust optimizasyon yönteminin klasik optimizasyon yönteminden farkı kısıtlarda veya amaç fonksiyonunda belirsiz parametrelerin varlığıdır. Robust optimizasyonun temel mantığı, belirsiz parametreler en kötü performanslarını gösterse bile tüm kısıtları aynı anda sağlayan bir çözüm bulmaktır. Önemli olan belirsiz parametrelere ilişkin doğru senaryoları içeren en geniş ama çözümü zorlaştırmayacak bir belirsizlik seti oluşturmaktır. Uygulamada belirsizlik setinin oluşturulmasında kullanılan birçok yöntem vardır. Kullanılan tüm yöntemler temelde, belirsizlik setlerinin

parametre ortalamalarını içermesini maksimum $1 - \varepsilon$ olasılıkla garanti edecek bir olası durumlar kümesi oluşturmaktadır. Calofiore ve Campi (2005) $f(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{z}}) \geq 0$ şeklindeki bir konveks kısıtın, $1 - \varepsilon$ olasılıkla N boyutlu parametre vektörünün ortamlarını içermesini garanti edecek “n” senaryo sayısının $n \geq \frac{N}{\varepsilon\beta} - 1$ olarak bulunabileceğini göstermiştir. Böylelikle kısıtın bozulma oranı maksimum ε olacağı garanti altına alınmış olacaktır. Fakat bu şekilde bulunan bir belirsizlik seti çok muhafazakâr (senaryo sayısı çok fazla) olabilir. Öyle ki $\mathbf{x}$ vektörünün 50 varlığın ortalamasını içerdiği ($N=50$) bir kısıt için $\varepsilon = 0.05$ olması durumunda (kısıtın bozulmasını maksimum %1 olmasını garanti edilmesi) belirsizlik setindeki senaryo sayısı $n \geq \frac{50}{0.05 \cdot 0.05} - 1 = 19999$ olacaktır. Bu çözümü çok zorlaştıracak bir sayıdır. Çünkü 19999 sayısı sadece bir kısıt için bulunmuştur ve bu sayının problemdeki kısıtların sayısıyla çarpılması gerekmektedir.

Belirsizlik seti oluşturmakta kullanılan bir diğer yöntem ise güven aralığıdır. Güven aralığı istatistik ve ekonometri bilimlerinde çok sık kullanılan ve bir değişkenin belli bir güven düzeyiyle ortalamasını içermesini garanti eden kapalı kümelerdir. Güven aralıkları ilgili değişkenin birinci ve ikinci momentlerini kullandığı için oldukça güvenilir sonuçlar üretmektedir. Fakat bilinen anlamda güven aralığı, değişkenlerin olasılık fonksiyonlarının normal dağıldığını varsaymaktadır. Sonuçta güven aralıkları oluşturulurken normal dağılımdan türetilmiş bir dağılımın kritik değerleri kullanılmaktadır. Fakat finansal serilerin dağılımlarının genellikle normal dağılmadığı bilinmektedir (Bukley vd., 2003; Mittnik and Rachev, 1993; Bukley vd., 2008; McCulloch, 1996). Dolayısıyla güven aralıkları çok sık kullanılan belirsizlik seti oluşturma yöntemi olmasına rağmen normallik varsayımı bu yöntemin kullanımını oldukça kısıtlamaktadır.

$$S_{\tilde{\mathbf{a}}} = \{\tilde{\mathbf{a}}: \tilde{\mathbf{a}} = \hat{\mathbf{a}} + \zeta_i |\zeta_i| \leq \gamma_i, i = 1, \dots, N\}$$

ya da

$$S_{\tilde{\mathbf{a}}} = \{\tilde{\mathbf{a}}: |\tilde{a}_i - \hat{a}_i| \leq \gamma_i, i = 1, \dots, N\}$$

$\tilde{\mathbf{a}}$ vektörü için oluşturulmuş ve beklenen değerin ortalamadan sapmasının maksimum γ kadar olduğunu gösteren güven aralığıdır. Görüldüğü gibi oluşturulan aralık dağılım fonksiyonunun normal dağıldığını varsaydığı için simetriktir¹³.

¹³ Bu kapalı kümeye polytropic veya ellipsoidal belirsizlik kümesi denir.

5.4.1.1. Belirsizlik Seti Seçiminde Bootstrap Yöntemi

Bootstrap yöntemi ilk kez Efron (1979) tarafından güven aralıkları ve önem derecelerini tahmin etmek amacıyla ortaya atılan ve çıkarım yapmaya yarayan asimptotik bir yöntemdir. Bootstrap yöntemi uygulamada bir değişkenin dağılımını elde etmenin mümkün olmadığı durumlarda kullanılır (Bickel ve Freedman, 1981). Yöntemin temel mantığı, ana kütlelerden örneklem çekerek veya örneklemden alt örneklem çekerek değişkenin dağılımıyla ilgili çıkarım yapmaktır (Singh and Xie, 1992). Çoğu zaman ana kütle bilinmediği için, bootstrap yöntemi elde edilen örneklemden alt-örneklem çekilmesi yoluyla ana kütleyle ilişkin çıkarım yapmakta kullanılır. Yöntemin amacı başka örneklem veya bilgiye gerek olmadan sadece var olan bir örneklemden, Monte Carlo simülasyonu yardımıyla ana kütle parametrelerine ilişkin istatistikler elde etmektir.

Normal dağılımdan gelen bir değişkenin ortalaması $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$ olarak hesaplanmaktadır. $\bar{X}_n$ tahmincisinin doğruluğuna ulaşmak için olasılık dağılım fonksiyonunu bilmek gerekir. Dağılım fonksiyonunu bilmek için de defalarca n boyutlu örneklem seçip her bir örneklem için $\bar{X}_n$ tahmin değerini hesaplamak gerekir. Her örneklem için ortalama değerini hesapladıktan sonra frekans grafiği çizildiğinde olasılık dağılım fonksiyonunun şekli elde edilecektir. Örneklem boyutu n yeterince büyük olduğunda $\{X_1^*, \dots, X_n^*\}$ örneklem ortalaması ana kütle ortalamasının iyi bir tahmini olacaktır.

5.4.1.2. Bootstrap Tekniği İle Beklenen Getiri Tahmini

$X_1, X_2, \dots, X_n$, F gibi genel bir dağılıma sahip ve bağımsız dağılmış rassal değişkenler olsun. F dağılımının σ^2 gibi sonlu bir varyansa ve μ ortalamaya sahip olduğunu varsayalım ve μ için tahmin değerini μ_n olduğunu düşünelim. Bu durumda $X_1, X_2, \dots, X_n$ değişkenlerinin her birinin standart sapması $s_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=1}^n (X_l - \mu_n)^2$ olacaktır. Merkezi limit teoremine göre dağılımın pivot değeri $Q_n = \sqrt{n}(\mu_n - \mu)/s_n$ genel olarak $N(0,1)$ 'e yakınsamaktadır. Burada ortalama ve standart sapma hesaplanırken her bir X_i değişkeninin tüm gözlemleri kullanılmaktadır. Fakat bootstrap yönteminde durum biraz farklıdır. $X_1^*, \dots, X_m^*$ koşullu olarak bağımsız dağılan ve $X_1, X_2, \dots, X_n$ ana kütlelerinden çekilmiş “ m ” boyutlu, F_n genel dağılım fonksiyonuna sahip örneklem olsun. Dolayısıyla bootstrapın üreteceği pivot değeri

$Q_b^* = \sqrt{m}(\mu_b^* - \mu_n)/s_b^*$ olacaktır. Burada $\mu_b^* = (1/m) \sum_{i=1}^m X_i^*$ ve $s_b^* = (1/m) \sum_{i=1}^m (X_i^* - \mu_b^*)^2$ 'dir. Görüldüğü gibi bootstrap örneklemelere ana kütle gibi davranmakta ve her bir gözleme eşit ağırlık vererek m tane gözlem çekmektedir.

Uygulamada örneklem büyüklüğü “m” ana kütle büyüklüğü “n” ile eşit olursa, örneklem pivot değeri de ana kütle pivot değerine eşit olacaktır. Başka bir ifadeyle $Q_n \cong Q_b^*$ olacaktır. Ayrıca örneklem büyüklüğünün ana kütle büyüklüğüne eşit olması durumunda, Q_b^* dağılım fonksiyonu ana kütle dağılım fonksiyonu Q_n 'u tam temsil edecektir. Fakat genelde ana kütleye ulaşmak mümkün değildir ve genellikle $m \neq n$ 'dir. Bu durumda “m” örneklem büyüklüğünün bazı istatistiksel özellikleri mevcuttur (Bickel ve Freedman, 1981). Burada “m” büyüdükçe örneklem dağılımı normal dağılıma yakınsayacaktır. İstatistik biliminde $n \geq 30$ olduğunda örneklem dağılımının normal dağılıma yakınsadığı kabul edilmektedir.

Bu tezde, örneklem dönemi içinden bootstrap yöntemiyle m büyüklüğünde “k” adet örneklem seçilerek elde edilen örneklem ortalamalarının %80, %90, %95, %97.5 ve %99 güven aralıklarıyla belirsizlik setleri oluşturulmuştur. Uygulamada farklı “k” değerleri için her defasında güven aralıkları hesaplanmış ve portföy oluşumu üzerindeki etkisi incelenmiştir. Bootstrap yöntemi ile oluşturulan örneklem, çekilen her bir gözlemin tekrar *yerine koyulması* ile elde edilmiştir. Dolayısıyla bir gözlemin birden fazla seçilme şansı vardır. Bootstrap yöntemiyle hesaplanan güven aralıkları da konveks set oluşturan kapalı kümelerdir. Merkezi Limit Teoremi gereği başlangıçtaki dağılım ne olursa olsun bir değişkenin ortalamalarının dağılımı, n örneklem boyutu yeterince büyükse normal dağılıma yakınsamaktadır. Dolayısıyla robust optimizasyonun belirsizlik setleri için aranan simetri koşulu da sağlanmış olmaktadır.

5.4.2. Robust Ortalama Varyans Modeli

Markowitz'in ortalama varyans modeli, varlıkların ortalama değerleri μ_i 'ler ile kovaryans değerleri σ_{ij} 'lerin kesin bilinmeleri varsayımı altında optimal portföyler üretmektedir. Dolayısıyla ortalama ve kovaryans tahminleri konusu çok önem kazanmaktadır. Varlıkların ortalama getiri ve varyanslarını hesaplamamanın en yaygın yöntemi değişkenlerin geçmiş verilerinden faydalanmaktır (Cornuejols ve Tütüncü, 2006, ss. 150). Ortalama ve kovaryans tahminlerindeki küçük sapmalar optimal portföy çözümlerini çok fazla etkileyebilmektedir. Sonuçta varyans/kovaryans veya ortalamalardaki tahmin hataları, kısıtların bazılarının veya tamamının bozulmasına yol

açabilmektedir. Bu noktada robust portföy tahmin hatalarına dirençli ve teorik olarak güçlü bir alternatif sunmaktadır.

Doğrusal bir portföy optimizasyon probleminin şu şekilde ifade edildiğini düşünelim;

$$\begin{aligned}
 & Z_{maks} = \mu'w \\
 \text{s.t.} \quad & Aw \leq b \\
 & l \leq w \leq u
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Burada μ varlıkların ortalama vektörü, w varlıkların portföy içindeki ağırlıklarını gösteren vektör, A kısıt katsayıları matrisi ve b kısıt sağ taraf vektörüdür. Bu model için A matrisindeki i satırıyla j sütunun belirsizlik içerdiğini düşünelim. J_i belirsizlik seti olmak üzere, A matrisindeki her a_{ij} elemanı $j \in J_i$ için simetrik ve sınırlandırılmış rassal değişkenler $\bar{a}_{ij}$ olarak tanımlansın. Belirsiz değişken $\bar{a}_{ij}$ 'nin simetrik, konveks kapalı kümesi $\bar{a}_{ij} = [a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ olarak gösterilebilir (Ben-Tal ve Nemirovski, 2000). $\bar{a}_{ij}$ belirsiz parametresine bağlı olarak $[-1, +1]$ arasında değerler alan $\eta_{ij} = (\bar{a}_{ij} - a_{ij})/\bar{a}_{ij}$ rassal bir değişken tanımlayalım. Böylelikle yukarıda verilen $Z_{maks} = \mu'w$ amaç fonksiyonuna sahip optimizasyon problemi belirsiz kısıtlar içeren yeni bir optimizasyon problemine dönüşür. Robust optimizasyon probleminin doğrusal eşleniğinin bulunup çözülmesi için kullanılan birkaç yaklaşım mevcuttur.

5.4.2.1. Robust Portföy Optimizasyonuna Soyster Yaklaşımı

Soyster (1973) belirsizlik içeren portföy optimizasyonu probleminin çözümü için doğrusal bir eşlenik önermiştir. Öncelikle Soyster robust portföy optimizasyon problemini şu şekilde oluşturmuştur;

$$\begin{aligned}
 & Z_{maks} = \mu'w \\
 \text{s.t.} \quad & \sum_j a_{ij}w_j + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}y_j \leq b_i ; \forall i \\
 & -y_j \leq w_j \leq y_j \\
 & l \leq w \leq u \\
 & y \geq 0
 \end{aligned} \tag{5.17}$$

Bu modelin çözüm noktasında w_j^* optimal değerleri ifade etmektedir. Optimal noktada $y_j = |w_j^*|$ olacağı açıktır. Bu durumda y_j sıfırdan farklı bir değer alacak ise $y_j = -w_j^*$ veya $y_j = w_j^*$ değerlerinden birini alacaktır. Çünkü doğrusal programlama probleminin uç noktaların birinde optimal çözüme ulaştığı bilinmektedir. Öyleyse kısıt;

$$\sum_j a_{ij}w_j^* + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}|w_j^*| \leq b_i; \forall i$$

olacaktır. Sonraki adım belirsizlik setindeki tüm senaryolar için çözümün optimal kaldığını ve “robust” olduğunu göstermektir.

$$\sum_j \tilde{a}_{ij}w_j^* = \sum_j a_{ij}w_j^* + \sum_{j \in J_i} \eta_{ij}\hat{a}_{ij}w_j^* \leq \sum_j a_{ij}w_j^* + \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}|w_j^*| \leq b_i \quad ; \forall i$$

Yukarıdaki eşitsizlikte i . kısıt için $\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}|w_j^*|$ terimi, kısıt değerinin $\sum_j \tilde{a}_{ij}w_j^*$ ile b_i arasında kalmasını garanti etmektedir.

5.4.2.2. Robust Portföy Optimizasyonuna Ben-Tal ve Nemirovski Yaklaşımı

Soyster’in portföy yaklaşımı belirsiz optimizasyon problemine önemli katkı sağlamasına rağmen, model “koruyuculuk” anlamında çok “muhafazakar” davranmaktadır. Öyle ki model en kötü senaryolarda optimal olacak bir çözüm bulmaya çalışırken, klasik doğrusal programlamanın amaç fonksiyonu değerinden çok düşük bir amaç fonksiyonu değeri elde etmektedir (Bertsimas ve Sim (2004)). İstatistik ve matematik bilimleri açısından kabul edilebilir bir sonuç olmasına rağmen yatırımcılar açısından durum farklıdır. Çünkü yatırımcı sağlam bir model talep ederken aynı zamanda getirisinin de olabildiğince yüksek olmasını tercih eder. Dolayısıyla Soyster’in modeli sağlamlık açısından yatırımcıyı tatmin etse de modelin sağlayacağı getiri tatmin edici değildir. Aşırı muhafazakar model problemini aşmak amacıyla Ben-Tal ve Nemirovski yeni bir robust optimizasyon modeli önerdi.

$$\begin{aligned}
Z_{maks} &= \mu'w \\
\sum_j a_{ij}w_j + \sum_{j \in J_f} \hat{a}_{ij}y_{ij} + \Omega_i \sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2} &\leq b_i \quad ; \forall i \\
-y_{ij} &\leq w_j - z_{ij} \leq y_{ij} \\
l &\leq w \leq u \\
y &\geq 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Belirsizlik seti veriyken, araştırmacılar i . kısıtın bozulma olasılığının en fazla $\exp(-\Omega_i^2/2)$ olduğunu göstermiştir. Fakat bu model de kendi içinde birtakım problemler içermektedir. Öncelikle teorik olarak modelin herhangi bir sorunu olmasa da $\sqrt{\sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij}^2 z_{ij}^2}$ teriminden dolayı bu model doğrusal değildir ve çözümü oldukça güçtür. Ayrıca önerilen model “k” adet belirsiz katsayı, “m” adet kısıt ve toplamda “n” adet değişkene sahiptir. Sonuçta modelde optimize edilmesi gereken “n+2k” değişken ve “m+2k” kısıt olacaktır. Bahsi geçen değişken sayısı ve kısıt sayısına ek olarak modelin doğrusal olmaması çözümü zorlaştırmaktadır.

5.4.2.3. Robust Portföy Optimizasyonuna Bertsimas ve Sim Yaklaşımı

Uygulamada belirsizlik içeren parametrelerin tamamının aynı anda kötü performans göstermesi veya tamamının aynı anda iyi performans göstermesi beklenen bir durum değildir. Muhakkak ki portföydeki bazı varlıklar iyi performans gösterirken bazıları kötü performans gösterecektir. Dolayısıyla robust optimizasyon problemini modellerken, modelin çözüme karşı “muhafazakarlığı” kontrol edecek bir katsayı dahil etmek gerçekçi bir yaklaşım olacaktır. Bertsimas ve Sim (2004) doğrusal ve “muhafazakarlığı” kontrol edilebilen bir model önermiştir.

Bertsimas ve Sim’in modelinde belirsizlik seti J veriyken, nominal problemdeki i . kısıt $a_i^l w \leq b_i$ şeklinde olacaktır. Buna göre $j \in J_i$ koşuluyla a_{ij} belirsiz katsayılar, $\tilde{a}_{ij} = [a_{ij} - \hat{a}_{ij}, a_{ij} + \hat{a}_{ij}]$ aralığında değerler alabilir. Buradan anlaşılabacağı gibi $\tilde{a}_{ij}$ simetrik rassal bir değişkendir. Bertsimas ve Sim modeldeki çözüm muhafazakârlığını kontrol etmek amacıyla Γ_i gibi bir katsayı tanımlamıştır. Bu katsayı $[0, |J_i|]$ aralığında değişmekte olup modeldeki belirsiz parametre sayısını ifade etmektedir. Modelde $[\Gamma_i]$ kadar belirsiz parametre kötü performans gösterse bile robust model, çözümün optimal kalmasını sağlamaktadır. Hatta kötü performans gösteren parametre sayısı $[\Gamma_i]$ ’i aşması

durumunda bile çözüm *yüksek ihtimalle* optimal kalacaktır. Kontrol katsayısı Γ_i modele dahil edildiğinde;

$$Z_{maks} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}$$

s.t.

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij}w_j + \max_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij}y_j \right\} &\leq b_i \quad ; \forall i \\ -y_j &\leq x_j \leq y_j \\ l &\leq \mathbf{x} \leq \mathbf{u} \\ \mathbf{y} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \quad (5.19)$$

şeklinde bir model elde edilir. Bu model doğrusal değildir ve görüldüğü gibi problemin içine başka bir optimizasyon problemi yerleştirilmiştir. Modelin çözümü aşamasında öncelikle kısıtın içindeki $\max_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij}y_j \right\}$ alt problem çözülmelidir. Bulunan çözüm daha sonra nominal problemin optimizasyonunda kullanılmalıdır. Önceki alt bölümde $y_j = |w_j|$ olduğu belirtilmişti. O halde $\beta_i(\mathbf{w}, \Gamma_i) = \max_{\{S_i | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \lfloor \Gamma_i \rfloor\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij}|w_j| \right\}$ fonksiyonu tanımlayalım. Modeldeki belirsiz parametre sayısı $\Gamma_i = 0$ olduğunda $\beta_i(\mathbf{w}, \Gamma_i) = 0$ olacaktır. Bu durumda robust optimizasyon modeli, klasik ortalama varyans modeline eşit olacaktır ve robust portföy değeriyle klasik ortalama varyans portföyün değeri birbirine eşit olacaktır. $\Gamma_i = \lfloor \Gamma_i \rfloor$ olduğunda ise model, daha önce tanıtilen Soyster modeline dönüşecektir.

Bertsimas ve Sim belirsizlik katsayısını kontrol ederek, çözüm muhafazakarlığı açısından klasik doğrusal ortalama varyans modeli ile Soyster modeli arasında bir model amaçlamıştır. Bu nedenle modelde belirsiz parametre kontrol katsayısı $\Gamma_i \in (0, \lfloor \Gamma_i \rfloor)$ olacak şekilde ayarlanmıştır. Yukarıda ayrıntıları verilen Bertsimas ve Sim'in modeli hala doğrusal değildir ve iç içe optimizasyon problemlerinin çözümünü yapmak gerektiğinden bilgisayar programlarıyla çözümü güçtür. Bahsi geçen güçlüklerden kurtulmak için Bertsimas ve Sim robust modelinin doğrusal eşleniğini bulmak gerekmektedir.

Önerme: $\mathbf{w}^*$ optimizasyon probleminin optimal çözüm vektörü olsun. i . kısıt için belirsizlik fonksiyonu şu şekildedir.

$$\beta_i(\mathbf{w}, \Gamma_i) = \max_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = \Gamma_i, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |w_j| \right\}$$

Bu belirsizlik fonksiyonunu kendi başına bir optimizasyon problemi olarak ifade edebiliriz.

$$\begin{aligned} \beta_i(\mathbf{w}^*, \Gamma_i) = \max \sum_{j \in J_i} \hat{a}_{ij} |w_j^*| z_{ij} \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_i} z_{ij} &\leq \Gamma_i \\ 0 \leq z_{ij} &\leq 1 \quad \forall j \in J_i \end{aligned}$$

Yukarıdaki önermeye göre optimal çözüm noktasında z_{ij} değeri 0 veya 1 değerini alacaktır. Dolayısıyla $\beta_i(\mathbf{w}^*, \Gamma_i)$ fonksiyonu, en kötü senaryosu gerçekleşen Γ_i adet varlığın ağırlıklarını içerecektir. Söz gelimi varlık sayısı $N=100$ olan bir portföy optimizasyonunda, $\Gamma_i = 20$ ise N adet varlıktan en kötü performansı gösteren ilk 20 varlığın amaç fonksiyonundaki ağırlığı pozitif olacaktır. Geriye kalan 80 varlığa ait ağırlık ise sıfır değerini alacaktır.

Teorem: Yukarıda verilen Bertsimas ve Sim robust optimizasyon modelinin doğrusal eşleniği şu şekildedir.

$$\begin{aligned} Z_{maks} = \boldsymbol{\mu}' \mathbf{w} \\ \text{s.t.} \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \sum_j a_{ij} w_j + z_i \Gamma_i + \sum_{j \in J_1} p_{ij} &\leq b_i \quad ; \forall i \\ z_i + p_{ij} &\geq \hat{a}_{ij} y_j \quad ; \forall i, j \in J_i \\ -y_j &\leq w_j \leq y_j \quad ; \forall j \\ l_j &\leq w_j \leq u_j \quad ; \forall j \\ p_{ij} &\geq 0 \quad ; \forall i, j \in J_i \\ y_j &\geq 0 \quad ; \forall j \\ z_i &\geq 0 \quad ; \forall i \end{aligned}$$

Bu model artık bilgisayar programaları yardımıyla çözülebilir bir modeldir (Bertsimas ve Sim, 2004).

5.4.2.4. Kısıt Bozulmasının Olasılık Sınırı

Belirsizlik seti veriyken, robust optimizasyon probleminin çözümü yüksek bir olasılıkla feasible kalmaya devam etmektedir. Modelde kullanılan Γ_i belirsiz parametre sayısı robust çözüm ile amaç fonksiyonu arasındaki dengeyi sağlayan bir sabittir ve Bertsimas ve Sim tarafından “Robust çözümün maliyeti” olarak isimlendirilmektedir¹⁴. Belirsiz parametre sayısı arttıkça çözümün robust olma olasılığı da artmaktadır. Başka bir ifadeyle kısıtların bozulma olasılıkları düşmektedir.

Önerme: w^* robust optimizasyon probleminin optimal çözümünü gösterebilir. S_i^* ve t_i^* , sırasıyla $\beta_i(w, \Gamma_i) = \max_{S_i \subseteq J_i, |S_i|=\Gamma_i} \{\sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij} |w_j|\}$ problemini maksimum yapan belirsizlik setini ve indeksleri temsil etsin. Son olarak A matrisi U setindeki belirsizliği temsil etsin. Bu varsayımlar altında

- i . kısıtın bozulma olasılığı;

$$P\left(\sum_j \tilde{a}_{ij} w_j^* > b_i\right) \leq P\left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij} \geq \Gamma_i\right)$$

kadardır. Burada $\gamma_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{if } j \in S_i^* \\ \frac{a_{ij}|w_j^*|}{\hat{a}_{ir^*}|w_{r^*}^*|}, & \text{if } j \in J_i \setminus S_i^* \end{cases}$ ve $r^* = \arg \min_{r \in S_i^* \cup \{t_i^*\}} \hat{a}_{ir} |w_r^*|$ ’dir.

- γ_{ij} ‘nin büyüklüğü $j \in J_i \setminus S_i^*$ için $\gamma_{ij} \leq 1$ ’dir (Bertsimas ve Sim (2004)).

Kanıt:

- w^*, S_i^* ve t_i^* Bertsimas ve Sim robust optimizasyon modelinin çözümü olsun. O halde i . Kısıt denkleminin bozulma olasılığı şu şekildedir.

¹⁴ Bertsimas ve Sim (2004) çalışmasında “The price of robustness” olarak ifade edilmiştir.

$$\begin{aligned}
P\left(\sum_j \tilde{a}_{ij}w_j^* > b_i\right) &= P\left(\sum_j a_{ij}w_j^* + \sum_{j \in J_i} \eta_{ij}\hat{a}_{ij}w_j^* > b_i\right) \\
&\leq P\left(\sum_{j \in J_i} \eta_{ij}\hat{a}_{ij}|w_j^*| > \sum_{j \in S_i^*} \hat{a}_{ij}|w_j^*|\right) \\
&= P\left(\sum_{j \in J_i \setminus S_i^*} \eta_{ij}\hat{a}_{ij}|w_j^*| > \sum_{j \in S_i^*} \hat{a}_{ij}|w_j^*|(1 - \eta_{ij})\right) \\
&\leq P\left(\sum_{j \in J_i \setminus S_i^*} \eta_{ij}\hat{a}_{ij}|w_j^*| > \hat{a}_{ir^*}|w_{r^*}^*|\left(\sum_{j \in S_i^*} (1 - \eta_{ij})\right)\right) \\
&= P\left(\sum_{j \in S_i^*} \eta_{ij} + \sum_{j \in J_i \setminus S_i^*} \frac{\hat{a}_{ij}|w_j^*|}{\hat{a}_{ir^*}|w_{r^*}^*|} \eta_{ij} > \Gamma_i\right) \\
&= P\left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij}\eta_{ij} > \Gamma_i\right) \\
&\leq P\left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij}\eta_{ij} \geq \Gamma_i\right)
\end{aligned}$$

Teorem: $\eta_{ij}, j \in J_i$ durumunda $[-1, +1]$ aralığında değişen simetrik ve bağımsız dağılan bir değişken ise;

$$P\left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij}\eta_{ij} \geq \Gamma_i\right) \leq \exp\left(-\frac{\Gamma_i^2}{2|J_i|}\right)$$

olur Bertsimas ve Sim (2004).

Kanıt: $\theta > 0$ koşuluyla;

$$\begin{aligned}
 P\left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij} \geq \Gamma_i\right) &\leq \frac{E[\exp(\theta \sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij})]}{\exp(\theta \Gamma_i)} \\
 &= \frac{\prod_{j \in J_i} E[\exp(\theta \gamma_{ij} \eta_{ij})]}{\exp(\theta \Gamma_i)} \\
 &= \frac{\prod_{j \in J_i} 2 \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \gamma_{ij} \eta)^{2k}}{(2k)!} dF_{\eta_{ij}}(\eta)}{\exp(\theta \Gamma_i)} \\
 &\leq \frac{\prod_{j \in J_i} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta \gamma_{ij})^{2k}}{(2k)!}}{\exp(\theta \Gamma_i)} \\
 &\leq \frac{\prod_{j \in J_i} \exp\left(\frac{\theta^2 \gamma_{ij}^2}{2}\right)}{\exp(\theta \Gamma_i)} \\
 &\leq \exp\left(|J_i| \frac{\theta^2}{2} - \theta \Gamma_i\right)
 \end{aligned}$$

Bertsimas ve Sim son olarak aşağıdaki teoremi vererek belirsiz parametre sayısı Γ_i 'ya bağlı olarak kısıtların bozulma olasılıkları için sınırları çizmiştir.

Teorem :

- $\eta_{ij}, j \in J_i$ durumunda $[-1, +1]$ aralığında değişen simetrik ve bağımsız dağılan bir değişken ise;

$$P\left(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij} \geq \Gamma_i\right) \leq B(n, \Gamma_i)$$

Burada;

$$B(n, \Gamma_i) = \frac{1}{2^n} \left\{ (1 - \mu) \sum_{l=[v]}^n \binom{n}{l} + \mu \sum_{l=[v]+1}^n \binom{n}{l} \right\} = \frac{1}{2^n} \left\{ (1 - \mu) \binom{n}{[v]} + \sum_{l=[v]+1}^n \binom{n}{l} \right\}, \text{dir.}$$

Ayrıca $n = |J_i|, v = \frac{\Gamma_i + n}{2}$ ve $\mu = v - [v]$ 'dir.

- $P(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij} \geq \Gamma_i) \leq B(n, \Gamma_i)$ sınırı $\Gamma_i \geq 1$ ve $\Gamma_i + n$ aralığında olmak üzere, kesikli olasılık dağılımı $P(\eta_{ij} = -1) = 1/2$ ve $P(\eta_{ij} = 1) = \frac{1}{2}, \gamma_{ij} = 1$ olan η_{ij} için gerendirir.

- $P(\sum_{j \in J_i} \gamma_{ij} \eta_{ij} \geq \Gamma_i) \leq B(n, \Gamma_i)$ sınırı aşağıdaki eşitsizliği sağlar.

$$B(n, \Gamma_i) \leq (1 - \mu)C(n, \lfloor \nu \rfloor) + \sum_{l=\lfloor \nu \rfloor+1}^n C(n, l)$$

Burada;

$$C(n, l) = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & ; \quad \text{if } l = 0 \text{ ya da } l = n, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{n}{(n-l)l}} \exp\left(\ln\log\left(\frac{n}{2(n-l)}\right) + \ln\log\left(\frac{n-l}{l}\right)\right); & \text{Aksi Halde} \end{cases}$$

- $\Gamma_i = \theta\sqrt{n}$ için,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B(n, \Gamma_i) = 1 - \Phi(\theta)$$

Burada, $\Phi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$ 'dir ve kümülatif standart normal dağılım fonksiyonudur (Bertsimas ve Sim, 2004).

BÖLÜM VI

ANALİZ

6.1. Portföy Optimizasyon Modeli

Klasik ortalama varyans modeli, belli bir risk kabulü altında getiri maksimizasyonu, belli bir getiri beklentisi altında risk minimizasyonu veya risk ile beklenen getirinin yer aldığı model olmak üzere üç farklı şekilde kullanılmaktadır. Üç modelin de sonuçları denktir ve biri diğerinden üstün değildir. Ortalama varyans modeline daha sonra Sharpe tarafından risksiz faiz oranı da eklenerek amaç fonksiyonu bir orana dönüştürülmüştür. Bu orana Sharpe oranı denilmektedir. Sharpe oranı portföyün beklenen getirisiyle risksiz faiz oranı arasındaki farkın portföy riskine bölünmesiyle elde edilmektedir. Temel olarak ortalama varyans modeli ağırlıkların toplamının bir olması kısıtı ve açığa satışa izin vermeyen kısıtı içermektedir. Fakat Markowitz'in modeline uygulamada bir dizi yeni kısıt eklenmiştir. Bu kısıtlar model için hayati derecede önemli olmasa da araştırmacı veya yatırımcının beklentilerine göre sıkça kullanılmaktadır. Bunlara endeks sapması kısıtı, lop kısıtı, maksimum ağırlık ve minimum ağırlık kısıtı, açığa satış kısıtı, işlem maliyeti kısıt, maksimum sektör oranı kısıtı vb. birçok kısıt örnek olarak verilebilir. Sonuçta çeşitlendirmeyi sağlayacak kısıtlar ile yatırımcının beklentilerini karşılayacak kısıtların modellere eklenmesi çözüme direkt etki etmektedir. Genel bir ifadeyle portföyün beklenen getirisi ve portföy riski aşağıdaki şekilde ifade edilebilir.

$$E[R_p] = w_1\mu_1 + \dots + w_n\mu_n = \mu^T w \quad (6.1)$$

$$\text{Var}[R_p] = \sum_{i,j} \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j w_i w_j = w^T \Sigma w \quad (6.2)$$

$E[R_p]$ ortalama varyans modelinde beklenen getiriyi, $\text{Var}[R_p]$ ise portföy riskini ifade etmektedir. Burada ρ_{ij} varlıklar arasındaki korelasyon katsayısı, σ_i ilgili varlığın standart sapması, $w_1, \dots, w_n$ ilgili varlığın portföy içindeki ağırlık oranı ve $\mu_1, \dots, \mu_n$ ilgili varlığın beklenen getiri oranıdır. Markowitz, portföy beklenen getiri oranını ve riskini birlikte bir optimizasyon probleminin içinde kullanmıştır.

$$Z_{maks} = \{E[R_p] = \mu^t w\} \quad (6.3)$$

s.t.

$$\text{Var}[R_p] = w^t \Sigma w \leq \sigma_0^2$$

$$w^t \iota = 1$$

Bu model belli bir risk altında (maksimum σ_0^2) getiri maksimizasyonu sağlayan modeldir.

$$Z_{min} = \{\text{Var}[R_p] = w^t \Sigma w\}$$

s.t.

(6.4)

$$E[R_p] = \mu^t w \geq \mu_0$$

$$w^t \iota = 1$$

(6.4)'deki model ise belli bir beklenen getiri miktarına (μ_0) koşullu risk minimizasyonu problemidir. Her iki problemde ağırlıkların toplamının bire eşit olması kısıtı yer almaktadır. Modellerde $w \geq 0$ kısıtı eklenirse ağırlıkların negatif olması engellenmiş olacaktır. Böylelikle optimizasyon modelleri açığa satışa izin vermeyecektir. Üçüncü bir optimizasyon modeli riskten kaçınma katsayısını içeren modeldir.

$$Z_{maks} \{ \mu^t w - \lambda \cdot w^t \Sigma w \}$$

s.t.

(6.5)

$$w^t \iota = 1$$

$$w \geq 0$$

Burada λ bir sabittir ve riskten kaçınma katsayısı olarak ifade edilir. Bu katsayı genelde sıfır ile bir arasındadır.

6.1.1. Sharpe Oranı

Sharpe oranı, Sharpe (1966) tarafından ortalama varyans modeline eklenmiştir. Sharpe oranına göre yatırımcı, portföyünde N-1 adet riskli varlık ve bir adet risksiz varlık bulundurmaktadır. Buna göre risksiz getiri oranı ile N-1 riskli varlıktan oluşturulan portföyün etkin sınıra teğet olduğu noktadaki portföy en etkin portföydür.

$$Sharpe\ Oranı = \frac{E[R_p] - R_f}{\sqrt{\text{Var}[R_p]}} = \frac{\mu^t w - R_f}{\sqrt{w^t \Sigma w}}$$

s.t.

(6.6)

$$w^t \mathbf{1} = 1$$

$$w \geq 0$$

Sharpe oranıyla oluşturulan portföyler getiri maksimizasyonu ve risk minimizasyonunu aynı anda yapmaktadır. Ayrıca portföy getiri oranının risksiz getiri oranından (R_f) yüksek olmasını sağlar. Bu şekilde oluşturulan portföy yatırımcı açısından en etkin portföydür.

6.1.2. Robust Portföy Modeli

Ortalama varyans modeli risk ile getiri arasında güçlü bir bağ kurmasına rağmen ve uygulamada ciddi avantajlar sağlamasına rağmen bir takım pratik zorluklar veya dezavantajlar da içermektedir. Dezavantajlarının başında modelin belirsiz parametre içermemesi gelir. Finans çalışmalarında kullanılan veriler doğası gereği belirsizlik taşımaktadır. Belirsiz parametreleri içermeyen modeller teoride işe yarsa da gerçekte çoğu zaman yanlış veya geçersiz çözümler üretebilmektedir. Aslında yöneylem biliminde sıkça kullanılan duyarlılık analizi benzeri analizler bir bakıma belirsizlik karşısında modelin verdiği tepkileri ölçmeyi amaçlar. Fakat değişken sayısı ve kısıt sayısı arttıkça her bir kısıt ve değişkenin bireysel duyarlılığını hesaplamak zorlaşmaktadır. Dahası duyarlılıklar hesaplanırsa bile duyarlılık analizi mevcut “kesin parametreler” üzerinden optimize edilen modelden elde edildiği için çözüm garantisi vermemektedir. Zira belirsizlik, modelden kaynaklı değil modeldeki parametreler veya katsayılarından kaynaklıdır. Belirsiz parametrenin, modelde kullanılan tahmin değerinden sapması optimizasyon probleminin yanlış çözüm üretmesi anlamına gelir. Duyarlılık analizi de bu noktada “yanlış” çözüm üzerinden hesaplamalar yapacağı için güvenilir sonuçlar üretmeyecektir.

Robust modeller, belirsizliğin kısıt katsayılarında veya amaç fonksiyonun katsayılarında olduğunu varsaymaktadır. Robust modeller parametredeki belirsizliği çözüm aşamasından önce dikkate alarak optimizasyon yapmaktadır. Bu, robust optimizasyon probleminin avantajı en önemli avantajıdır. Bu modellerin ürettiği

çözümler belirsizliklere karşı dirençlidir. Bilindiği gibi, doğrusal programlama problemleri optimal çözümü feasible alanın uç noktalarının birinde aramaktadır. Dolayısıyla çözümün parametrelerdeki sapmalara duyarlılığı yüksektir. Fakat robust problemlerde çözüm uç noktaların bir miktar altında (belirsizliğin yüksek olması durumunda muhtemelen uç noktanın çok altında) bir noktada gerçekleşmektedir. Dolayısıyla çözüm, katsayı belirsizliklerine daha dirençli olmaktadır. Diğer bir ifade ile katsayıların tahmin değerlerinden sapmalar olsa bile çözüm yüksek ihtimalle optimal kalmaya devam etmektedir.

Uygulama bölümünde Bertsimas ve Sim (2004) tarafından önerilen ve belirsiz parametre sayısını kontrol etmeyi sağlayan robust model kullanılmıştır. Bertsimas ve Sim'in önerdiği model, belirsizliğin kısıt katsayılarında olduğunu varsaymaktadır. Biz belirsizliğin amaç fonksiyonu katsayılarında olduğunu varsayıyoruz. Dolayısıyla önerilen modeldeki belirsizliklerin amaç fonksiyonunda olmasına göre uyarlanması gerekmektedir. Uyarlanmış model daha sonra Sharpe oranına entegre edilmiştir. Sonuç olarak Sharpe oranıyla birleştirilip kullanılan robust optimizasyon formülasyonu, belirsizliğe karşı dirençli çözümler üretmek için kullanılmıştır.

Bertsimas ve Sim tarafından önerilen model şu şekildedir;

$$\begin{aligned}
 & Z_{maks} = \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} \\
 & \text{s.t.} \\
 & \sum_j a_{ij}w_j + \min_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = |\Gamma_i|, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \hat{a}_{ij}y_j \right\} \leq b_i \quad ; \forall i \\
 & -y_j \leq w_j \leq y_j \\
 & \mathbf{l} \leq \mathbf{w} \leq \mathbf{u} \\
 & \mathbf{y} \geq \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

Bu model, amaç fonksiyonu katsayılarının belirsizlik içereceği şekilde uyarlandığında aşağıdaki amaç fonksiyonuna ulaşılır.

$$Z_{maks} = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i w_i + \min_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = |\Gamma_i|, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \tilde{\mu}_j |w_j| \right\}$$

Modelde $[\Gamma_i]$ belirsiz parametre sayısını, $\tilde{\mu}_j$ ise belirsiz değişken j 'in realizasyonunu göstermektedir. Burada $\tilde{\mu}_j = [\mu_j - \hat{\mu}_j, \mu_j + \hat{\mu}_j]$, j değişkenine ilişkin tahmin değeri ile realizasyon arasındaki farktır. Amaç fonksiyonunda iç içe geçmiş iki optimizasyon problemini bulunmaktadır. Fonksiyon optimal değeri ararken öncelikle iç kısımdaki probleminin optimizasyonunu gerçekleştirir, bu değere bağlı olarak amaç fonksiyonunu optimize eder. Amaç fonksiyonu Sharpe oranına dahil edildiğinde aşağıdaki nihai model elde edilir.

$$\text{Sharpe Oranı} = \frac{E[R_p] - R_f}{\sqrt{\text{Var}[R_p]}}$$

$$\text{Burada } E[R_p] = Z_{maks} = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i w_i + \min_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = |\Gamma_i|, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \tilde{\mu}_j |w_j| \right\}$$

olduğu için Sharpe Oranı;

$$\frac{Z_{maks} = \sum_{i=1}^{\kappa} \mu_i w_i + \min_{\{S_i \cup \{t_i\} | S_i \subseteq J_i, |S_i| = |\Gamma_i|, t_i \in J_i \setminus S_i\}} \left\{ \sum_{j \in S_i} \tilde{\mu}_j |w_j| \right\} - R_f}{\sqrt{\text{Var}[R_p]}}$$

olacaktır. Amaç fonksiyonu bu şekilde oluşturulan modele farklı amaçlarla bir dizi kısıt eklenmiştir.

Model kısıtları:

- (1) $\sum_{i=1}^N w_i = 1$; Toplam ağırlık kısıtıdır. Burada N toplam varlık sayısıdır.
- (2) $\frac{\sum_{i=1}^N a_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \leq 7.00$; Piyasa değeri defter değeri (PDDD) kısıtıdır. Yatırım yapılan hisse senetlerinin ortalama PDDD oranının maksimum yedi olmasını sağlamaktadır. PDDD tek başına bir hisse senedinin ucuz olduğunu göstermese de iyi bir göstergedir. Bu oran ne kadar düşükse hisse senedinin değerlendirme olasılığının o derece yüksek olduğu düşünülür. Analizde BİST100'de işlem gören hisse senetleri kullanılmıştır. Fakat mali kuruluşların bilançolarından dolayı PDDD genelde daha düşük hesaplanır.

Dolayısıyla, portföyde mali kuruluşlara ve bankalara ait hisse senetlerinin ağırlıkları gereğinden yüksek olmaktadır. Bu problemten kaçınmak için mali kuruluşlar ve bankalar analizden çıkarılmıştır.

- (3) $\frac{\sum w_{imalat}}{\sum_{i=1}^N w_i} \leq 0.35$; İmalat sektörü kısıtıdır. İmalat sektöründeki hisse senetlerinin portföy içindeki ağırlığının maksimum %35 olmasını sağlamaktadır.
- (4) $\frac{\sum w_{Toptan}}{\sum_{i=1}^N w_i} \geq 0.05$; Toptan ve Perakende Ticaret, Lokanta ve Oteller sektöründeki hisse senetlerinin portföy içindeki ağırlıklarının minimum %5 olmasını sağlamaktadır.
- (5) $\frac{\sum w_{Teknoloji}}{\sum_{i=1}^N w_i} \geq 0.20$; Teknoloji sektöründeki hisse senetlerinin portföy içindeki ağırlıklarının minimum %20 olmasını sağlamaktadır.
- (6) $\frac{\sum w_{Kimya}}{\sum_{i=1}^N w_i} \geq 0.10$; Kimya, petrol sektöründeki hisse senetlerinin portföy içindeki ağırlıklarının minimum %10 olmasını sağlamaktadır.
- (7) $\frac{\sum w_{Ulaştırma}}{\sum_{i=1}^N w_i} \geq 0.08$; Ulaştırma, depolama ve haberleşme sektöründeki hisse senetlerinin portföy içindeki ağırlıklarının minimum %8 olmasını sağlamaktadır.
- (8) $-y_j \leq w_j \leq y_j$; Amaç fonksiyonun belirsiz parametre sayısının kontrolünü sağlayan kısıttır. Burada j belirsiz parametreleri ifade eder.
- (9) $w_i, w_j \leq 0.05$; Maksimum ağırlık kısıtıdır ve portföye eklenen hisse senedinin ağırlığını sınırlamaktadır.
- (10) $w_i, w_j \geq 0$; $y_j = 0,1$; Açığa satışa izin vermeyen kısıtlardır.

Burada (3), (4), (5), (6) ve (7) numaralı kısıtlar sektör kısıtlarıdır. Bu kısıtların sağ taraf sabitleri ilgili sektördeki hisse senedi sayısının toplam hisse senedi içindeki yaklaşık oranına eşittir. Modele sektör kısıtlarının eklenmesinin amacı portföydeki hisse senetlerinin bir sektöre toplanmasını engellemek ve hisse çeşitliliği sağlamaktır. (9) numaralı kısıt da modele benzer bir nedenle eklenmiştir. Bu kısıt söz gelimi, %30 yatırım yapılan teknoloji hisselerinin kendi içinde de çeşitlenmesini sağlamaktadır. Amaç fonksiyonunda bir adet risksiz varlığın yer aldığı yukarıda açıklanmıştı. Risksiz getiri oranı olarak **Türkiye Cumhuriyeti Hazinesinin çıkardığı devlet iç borçlanma senetlerinden (DİBS)** iki yıllık devlet tahvili faiz oranı kullanılmıştır.

6.1.2.1. Belirsizlik Setleri

Robust optimizasyon problemlerinde belirsizlik setlerinin oluşturulması optimal çözümü etkileyen faktörlerin başında gelmektedir. Finansal serilerin genellikle normal dağılmadığı veya bu serilerin normal dağıldığını varsayacak hiçbir kanıtın olmadığı bilinmektedir [bkz. Lobo ve Boyd, 2000; Markowitz, 1991; Zymler vd., 2011]. Hisse senedi getirilerinin normal dağılmaması hatta çoğu zaman kalın kuyruk dağılması, belirsizlik setlerinin oluşturulması aşamasındaki “belirsizlik setleri simetrik” varsayımının çiğnenmesi anlamına gelmektedir. Normal dağılmayan bir getiri için normal dağılıyormuş gibi belirsizlik setlerinin oluşturulması güvenilir olmayan optimizasyon sonuçlarına neden olacaktır. Dolayısıyla belirsizlik setlerinin doğru kurgulanması optimizasyon probleminin sonuçları açısından son derece önemlidir.

Uygulamada belirsizlik setlerinin student t dağılımı, standart normal dağılım veya farklı yaklaşımlarla hesaplandığı birçok çalışma mevcuttur [bkz Delage ve Ye, 2010; Shawe-Taylor ve Cristianini, 2003; Halldórsson ve Tütüncü 2000; Goldfarb ve Iyengar, 2003; Ben-Tal ve Nemirovski 1998; El Ghaoui ve Lebret 1997]. Bu tezde ise bootstrap yöntemi, belirsizlik setlerinin tanımlanması için kullanılmıştır. Literatürde bootstrap metodunu belirsizlik setlerinde kullanan sadece bir çalışmaya rastlanmıştır. Fakat ilgili çalışmadaki kullanım amacı bu tezdeki kullanım amacından farklıdır. Bertsimas, Gupta ve Kallus (2018) bootstrap yöntemini belirsizlik setlerinin güvenilirliğini test etmek ve bir çeşit kritik değer hesaplamak için kullanmıştır.

Bootstrap yöntemi ilk kez Efron (1979) tarafından güven aralıkları ve önem derecelerini tahmin etmek amacıyla ortaya atılmış olan ve çıkarım yapmaya yarayan asimptotik bir yöntemidir. Bootstrap yöntemi uygulamada bir değişkenin dağılımını elde etmenin mümkün olmadığı durumlarda kullanılır (Bickel ve Freedman, 1981). Temel mantığı, ana kütlede farklı örneklem çekerek veya örneklemde farklı alt örneklem çekerek değişkenin dağılımıyla ilgili çıkarım yapmaktır (Sinhg and Xie, 1992). Fakat bilindiği gibi çoğu zaman ana kütle bilinmediği için, bilindiği durumlarda herhangi bir çıkarıma gerek olmadığından bootstrap yöntemi eldeki örneklemde alt örneklem çekilmesi yoluyla ana kütleyle ilişkin çıkarım yapmak amacıyla kullanılmaktadır. Bootstrap yönteminin amacı başka örneklem veya bilgiye gerek olmadan sadece var olan bir örneklemde, Monte Carlo simülasyon yardımıyla ana kütle parametrelerine ilişkin istatistikler elde etmektir.

Bootstrap yöntemiyle elde edilen belirsizlik setleri, robust optimizasyon problemlerinin belirsizlik setleriyle ilgili gerek duyduğu varsayımları karşılamaktadır. Bir belirsizlik setinin simetrik olmak, kapalı küme olmak, belli bir düzey için olasılık garantisi vermek ve bu setlere dayalı çözümlerin belli bir düzeye göre feasible kalmasını sağlamak gibi varsayımları karşılaması gerekmektedir. Özellikle belirsizlik setinin simetrik olması ve kapalı küme olması uygulama açısından kritiktir. Bootstrap yöntemi bu varsayımları Merkezi Limit Teoremi (MLT) yardımıyla sağlamaktadır. MLT'ne göre başlangıçtaki dağılımı ne olursa olsun örneklem boyutu yeterince büyük olması koşuluyla, ilk dağılımdan çekilen örneklemelerin ortalamalarının dağılımı normal dağılıma yakınsamaktadır [Dudley, 2014; Pollard, 1985]. Böylelikle bootstrap yöntemiyle elde edilmiş ortalamalara ilişkin dağılımlar, normal dağılımın bütün varsayımlarını karşılayacaktır.

Tezin uygulamasında 89 gözlemden oluşan veri seti kullanılmıştır. Belirsizlik setleri, 89 gözlemden her defasında 36-48 gözlem olmak üzere 15.000 bootstrap alt örnekleminden elde edilmiştir. Elde edilen belirsizlik setleri %99, %97.5, %95, %90, %80 ve %70 güven düzeyleriyle hesaplanmıştır. Böylelikle belirsizlik setlerinin kapalı küme ve simetrik olma varsayımlarının yanında belli bir alfa değerine karşılık olasılık garantisi de sağlanmıştır.

6.2. Veri ve Uygulama

Robust optimizasyona dayalı portföy seçimi yapmak için Borsa İstanbul 100 (BİST100) endeksinde işlem gören hisse senetlerinin aylık fiyat verileri kullanılmıştır. Analiz dönemi Ocak 2014 ile Mart 2021 tarihlerini kapsamaktadır. Veriler son işlem gününün kapanış fiyatlarıdır ve hisse senetlerinin getirileri bu fiyatlardan hesaplanmıştır. Aylık getiriler, günlük ve haftalık getirilere göre daha az oynaklık taşımaktadır. Portföy çalışmalarında günlük veya haftalık veriler kullanan çalışmalara rastlamak mümkündür. Sıklığı yüksek olan verilerin normal dağılımına olasılıkları aylık verilere göre daha yüksektir. Seriler normal dağılsa bile robust modellerin daha etkin çözümler üreteceği düşüncesindeyiz. Kullanılan modellerin gücünü görmek adına verilerin normal dağılıma olasılıklarının daha yüksek olduğu aylık veriler kullanılmıştır. Zira normal dağılımdan uzaklaştıkça robust modellerin klasik optimizasyondan daha güçlü çözümler üreteceği açıktır.

Analiz döneminin başında ve sonunda endekste yer almayan şirketler ile bankalar ve mali kuruluşlar analizlerden dışlanmıştır. Sonuç olarak analizde kullanılmak üzere 56 tane hisse senedinin verisi kalmıştır ve portföyler bu hisse senetleri uzayından oluşturulmuştur. Mali kuruluşlar ve bankalar, modelde piyasa değeri defter değeri oranı kullanıldığı için ve bu kuruluşların bilançolarındaki farklı hesaplamalardan dolayı analize dâhil edilmemiştir. Yatırımcılar portföy oluştururken düşük piyasa değeri defter değerine sahip hisse senetlerine yatırım yapmaya özen gösterirler. Çünkü piyasa değeri defter değeri oranı, ilgili şirketin hisse senedinin piyasada ucuz mu ya da pahalı mı olduğunu gösteren önemli bir gösterge olarak kabul edilmektedir. Mali kuruluşlar ve bankalar, örneğin imalat yapan şirketlere oranla çok düşük öz sermayeye sahip oluğu için piyasa değeri defter değeri her zaman düşük olacaktır. Dolayısıyla model, mali kuruluşlar ve bankaların hisselerine gereğinden fazla ağırlık verecektir. Bu yanlış sonuçlardan kaçınmak için genelde mali kuruluşlar ve bankalar analizlere dâhil edilmemektedir [Bkz. Azimli, 2020; Fama ve French, 1992; Fama ve French, 1993; Fama ve French, 1993].

Hisse senetleri getiri serileri, ilgili ayın ilk işlem günü kapanış fiyatı ile son işlem günü kapanış fiyatı arasındaki yüzde değişim olarak hesaplanmıştır. Analiz dönemi verileri için Finnet veri tabanı kullanılmıştır¹⁵.

Klasik optimizasyon yöntemlerinde parametrelerin (katsayıların) kesin olarak bilindiği varsayılmaktadır ve yapılan tüm analizler kesin katsayılar üzerinden yapılmaktadır. Fakat robust optimizasyon modelleri katsayıların değişebileceğini varsaymaktadır ve bu değişiklikleri göz önüne alarak optimizasyon yapmaktadır. Bilindiği üzere Covid-19 pandemisi döneminde tüm dünya borsaları inanılmaz dalgalanmalar yaşamıştır. Bu dönemi kapsayan çalışmalarda, klasik optimizasyon ile elde edilen çözümlerin büyük oranda geçersiz olacağı açıktır. Robust optimizasyon modellerinin temelinde bu sapmalar (belirsizlik) olduğu için ve pandemi dönemi modellere dahil edilmiştir.

¹⁵ <https://www.finnet.com.tr/FinnetStore/Tr/Urun/AeHisseExpert>

Tablo 1.

Hisse Senetleri ve İşlem Gördükleri Sektörler

<i>Elektrik, Gaz ve Su</i>	<i>İmalat</i>			
AKSEN	AEFES	CEMTS	FROTO	KLMSN
ODAS	ARCLK	CIMSA	GUBRF	KORDS
ZOREN	BTCIM	DEVA	HEKTS	OTKAR
CCOLA	BRSAN	EGEEN	KRDMD	TOASO
TATGD	BRISA	ERBOS	KARSN	TMSN
ULKER	BUCIM	EREGL	KARTN	
	VESTL	YATAS	TTRAK	
<i>İnşaat</i>	<i>Maden, Taş Ocağı</i>	<i>Petrol, Kimya</i>		
ENKAI	IPEKE	AKSA		
	KOZAL	ALKIM		
	KOZAA	AYGAZ		
		PETKM		
		SASA		
		TUPRS		
<i>Teknoloji</i>	<i>Toptan ve Perakende Ticaret, Lokanta ve Oteller</i>	<i>Ulaştırma, Depolama ve Haberleşme</i>		
ASELS	BIMAS	CLEBI		
İNDES	BİZİM	PGSUS		
KAREL	DOAS	TCELL		
LOGO	MGROS	THYAO		
NETAS		TTKOM		

Tablodaki analizde kullanılan hisse senetlerinin borsada işlem gördükleri isimler ve sektörlerini özetlenmiştir. Hisse senetlerinin %46.42'si imalat sanayi sektöründe, %10.71'i elektrik, gaz ve su sektöründe, %10.71'i petrol ve kimya sektöründe, %8.92'si ulaştırma, depolama ve haberleşme sektöründe, %8.92'si teknoloji, %7.14'ü toptan ve perakende ticaret, lokanta ve otel sektörü, %5,35'i maden ve taş ocağı sektöründe işlem görmektedir. Bir tane hisse senedi ise inşaat sektöründe işlem görmektedir. Petrol ve kimya başlığı altındaki şirket hisselerinin imalat sektörüne dâhil edilmesi de mümkündür. Fakat analizlerde imalat sektöründe işlem gören hisselerin toplam hisse grubu içindeki payının yüksek olmasından dolayı ve portföylerde çeşitlendirmeyi sağlamak amacıyla bu hisseler farklı bir sektör olarak tercih edilmiştir. Böylelikle imalat sanayi sektöründeki hisse senetlerinin ağırlıkları sınırlandırılmıştır.

6.2.1. Uygulama Sonuçları

Hisse senedi getirileri genelde normal dağılmayan ve oynaklığı (volatilite) yüksek serilerdir. Bu yüzden tahmini oldukça zordur. Oynaklık bir yana, getirilerin normal dağılmama sorunu hem portföy seçimi yaparken hem de getiriler ile ilgili çıkarım yaparken önemli bir sorundur. Daha önce yapılmış birçok çalışma hisse senedi getirilerinin normal dağılmadığını göstermektedir [Bkz. Sheikh ve Qiao, 2009; Epaphra, 2016; Karoglu, 2010]. Hisse senedi getirilerinin normal dağıldığını bilseydik klasik ortalama varyans modelinin sonuçlarına büyük ölçüde güvenebilirdik. Normal dağılım varsayımı altında parametrelerin öngörü değerleriyle realizasyonları arasındaki fark muhtemelen önemsiz olacaktı. Böylelikle robust modellere ihtiyaç olmadan klasik modellerle portföyler oluşturmanın sakıncası olmayacaktı.

Birçok bilimsel çalışmanın sonucuna göre, getiri serilerinin normal dağılmadığı ifade edilmişti. Dolayısıyla belirsilik setlerini oluşturmadan önce yatırım uzayındaki hisse senetlerinin öze istatistiklerine bakmak gerekmektedir. Tablo 2’de hisse senetlerinin ilgili istatistikleri yer almaktadır. Normal dağılmayan getirilerin standart sapmalarının görece daha yüksek olduğu görülmektedir. Önemli diğer bir istatistik, bu getirilerin minimum ile maksimum değerleri arasındaki farkın yüksek olmasıdır. Başka bir ifadeyle, normal dağılmayan getiriler diğerlerine göre daha geniş bir gerçekleşme aralığına sahiptir.

Etkin piyasa hipotezine göre, etkin çalışan bir piyasada yeni bir bilgi yatırımcılar arasında çok hızlı yayılmaktadır. Yeni bilgi piyasaya çok hızlı yayıldığı için hisse senedi fiyatları bu bilgiye hemen tepki verip, fiyatlamaktadır. Sonuçta bir yatırımcının piyasadan önce bu bilgiyi kullanıp, piyasa ortalama getirisinden yüksek bir getiri elde etmesi mümkün değildir. Bu noktada özet istatistiklere ek olarak birim kök test sonuçlarının da verilmesi gerektiği düşünülebilir. Fakat burada fiyat serileriyle değil getiri serileriyle analiz yapılmaktadır. ADF birim kök sonuçlarına göre çalışmadaki tüm getiri serileri durağandır. Getiri serileri, fiyat serilerinin farkından elde edildiği için ve bu tür seriler genelde fark durağan $I(1)$ olduğu için birim kök sonuçları çalışmaya eklenmemiştir.

Tablo 2.

Hisse Senedi Getiri Serisi Özet İstatistikler

Hisse	Ortalama	Ortanca	Maksimum	Minimum	Std. Sapma	Çarpıklık	Basıklık	Jarque- Bera
<i>AEFES</i>	0.3150	0.6092	22.0349	-24.1659	8.4649	-0.1240	3.1286	0.2797
<i>AKSA</i>	2.4267	1.8881	31.1028	-21.9984	9.8738	0.1987	3.3894	1.1090
<i>AKSEN</i>	1.9684	1.6522	32.6684	-22.2327	10.0216	0.3759	3.5679	3.1808
<i>ALKIM</i>	3.0070	2.0292	23.1818	-11.5960	7.8166	0.3417	2.4243	2.8611
<i>ARCLK</i>	1.5713	0.8974	23.2610	-31.6438	9.2155	-0.4849	4.2556	9.0191*
<i>ASELS</i>	2.5865	1.6410	25.5025	-20.4559	8.4654	-0.0735	2.9790	0.0791
<i>AYGAZ</i>	1.6218	1.0957	21.4230	-24.9812	8.1576	-0.0179	3.6514	1.5253
<i>BIMAS</i>	1.7093	1.1709	17.1957	-11.7491	5.9819	0.3115	2.7599	1.5972
<i>BIZIM</i>	0.2831	-0.2670	35.8875	-25.1672	10.5091	0.2559	4.2464	6.5059*
<i>BRISA</i>	2.3489	1.0325	30.1242	-20.1433	9.9867	0.3068	3.0690	1.3661
<i>BRSAN</i>	2.5848	1.8151	54.0025	-28.4653	12.2664	0.6465	5.8334	34.7578*
<i>BTCIM</i>	2.2915	2.2327	82.1490	-41.9583	15.2604	1.4439	10.9435	255.9878*
<i>BUCIM</i>	1.8364	0.7557	33.1557	-22.4004	10.3039	0.8895	4.3510	17.8824*
<i>CCOLA</i>	0.6456	0.5857	22.1806	-25.3534	8.7975	0.0619	3.5043	0.9663
<i>CEMTS</i>	3.2288	2.7497	37.7640	-25.5679	12.0502	0.4428	3.3708	3.3035
<i>CIMSA</i>	1.2458	0.9673	25.0732	-35.9046	9.3755	-0.2695	5.3063	20.1009*
<i>CLEBI</i>	4.2812	2.7487	69.5855	-32.1584	14.6238	1.7136	9.0683	174.0414*
<i>DEVA</i>	3.4105	3.1500	44.7274	-24.5254	11.0277	0.7074	5.7719	34.7057*
<i>DOAS</i>	2.3868	1.7903	45.7350	-33.8957	14.0201	0.7054	4.6783	17.2252*
<i>EGEEN</i>	4.2440	1.9577	49.7902	-29.5151	11.4311	0.5699	5.0426	19.6070*
<i>ENKAI</i>	1.2213	0.5146	18.7040	-10.9421	6.0057	0.4287	3.2689	2.8931
<i>ERBOS</i>	3.1661	2.3409	35.7826	-23.6031	11.6618	0.2495	2.9782	0.8939
<i>EREGL</i>	2.7728	1.6450	30.5477	-21.2561	10.1177	0.0268	2.6697	0.4013
<i>FROTO</i>	2.9904	3.7054	25.0367	-39.0014	9.4944	-0.7744	6.0860	42.7202*
<i>GUBRF</i>	3.8371	2.2713	50.9471	-25.9825	14.2595	1.0415	5.1168	31.60352*
<i>HEKTS</i>	4.9627	4.0055	41.5214	-22.7044	10.4969	0.6538	4.8219	18.0210*
<i>INDES</i>	3.0465	3.2595	33.7491	-30.7718	12.9149	-0.1853	3.6020	1.7907
<i>IPEKE</i>	2.0894	-1.8124	55.6672	-57.9819	17.7770	0.3192	4.2261	6.8478*
<i>KAREL</i>	3.8255	2.7094	32.0298	-37.2428	13.8096	-0.0707	2.8179	0.1905
<i>KARSN</i>	2.0359	1.9778	48.1676	-40.3064	14.7694	0.5124	5.1504	20.3331*

Tablo 3.

Hisse Senedi Getiri Serisi Özet İstatistikler (Devam)

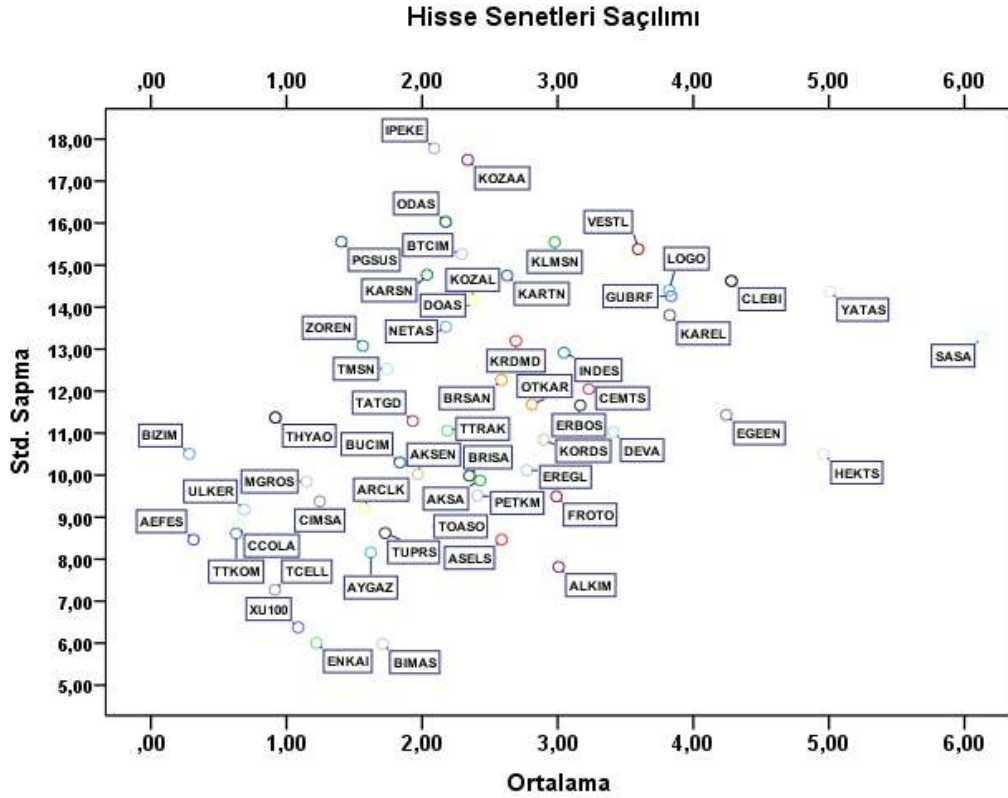
Hisse	Ortalama	Ortanca	Maksimum	Minimum	Std. Sapma	Çarpıklık	Basıklık	Jarque-Bera
KARTN	2.6267	0.1468	93.8490	-22.6288	14.7523	3.1809	18.9559	1057.3070*
KLMSN	2.9781	2.4267	35.1398	-40.0417	15.5505	-0.2741	3.2803	1.3584
KORDS	2.8973	2.2364	32.3715	-35.4519	10.8454	0.0973	4.5244	8.4627*
KOZAA	2.3358	-0.1293	50.0673	-39.2562	17.5043	0.4251	3.2694	2.8508
KOZAL	2.3734	2.9711	45.5618	-32.9182	14.1774	-0.0141	3.4742	0.8086
KRDMD	2.6921	0.5693	45.7833	-31.3658	13.1951	0.3418	3.9119	4.6536*
LOGO	3.8226	2.3638	63.5174	-23.8766	14.3982	1.1937	5.8489	49.5071*
MGROS	1.1480	1.5035	25.8351	-35.7415	9.8493	-0.4263	4.2800	8.4751*
NETAS	2.1760	0.4260	41.9854	-25.2288	13.5314	0.7987	4.0434	13.0450*
ODAS	2.1737	0.8787	55.4997	-36.5460	16.0303	0.1652	4.2243	5.762559*
OTKAR	2.8105	2.5314	38.2950	-35.0937	11.6822	-0.0805	4.6763	10.1616*
PETKM	2.4080	2.7013	21.5910	-37.0464	9.5129	-0.8021	5.4742	31.1573*
PGSUS	1.4044	-0.8991	43.8066	-45.6758	15.5595	0.1468	3.7163	2.1475
SASA	6.1285	4.7964	47.7166	-22.1592	13.2776	0.7714	4.1483	13.2544*
TATGD	1.9317	2.2465	27.8948	-22.1080	11.2899	0.0795	2.3520	1.5953
TCELL	0.9135	1.6319	17.5864	-19.9469	7.2724	-0.4039	3.2480	2.5583
THYAO	0.9185	-0.2767	24.6682	-30.6542	11.3738	-0.0397	2.8862	0.0690
TMSN	1.7428	1.1191	48.9797	-33.3836	12.5313	0.4486	5.1216	19.0144*
TOASO	2.0340	0.5862	30.6053	-33.6998	8.7456	-0.2325	6.0250	33.5657*
TTKOM	0.6291	0.2497	25.6430	-27.1153	8.6109	-0.1522	4.2414	5.8542*
TTRAK	2.1864	2.1771	36.2818	-35.3773	11.0590	0.1168	5.2726	18.7028*
TUPRS	1.7279	2.3973	19.6710	-29.3954	8.6227	-0.3527	3.9542	5.0457*
ULKER	0.6884	0.2626	22.6546	-19.6506	9.1801	0.0883	2.6707	0.5004
VESTL	3.5935	3.8457	40.9454	-36.3348	15.3826	-0.0387	3.0738	0.0409
YATAS	5.0074	4.9127	38.3486	-37.4455	14.3735	-0.4399	3.2771	3.0486
ZOREN	1.5631	1.1234	62.3903	-22.6910	13.0762	1.2060	7.3103	87.4211*

Not: (*) işareti olan hisse senetlerinin getiri serileri normal dağılmamaktadır.

Tablo 2 ve tablo 3’de verilen ortalama ve standart sapma değerleri aylık gözlemlerden hesaplanmıştır. Portföy oluşturma aşamasında, bu istatistikler yıllıklandırılmıştır. Özet istatistiklere göre SASA %6.1285 ile en yüksek aylık getiri ortalamasına sahip hisse senedi, BİZİM %0.2831 ile en düşük aylık ortalama getiriye sahip hisse senedir. Ortalama varyans modelinde getiri maksimizasyonu veya risk minimizasyonu yapıldığı için hisselerin standart sapması (riski), varlığın portföye alınması açısından önemlidir. Buna göre IPEKE 17.7770 ile en yüksek riske sahip hisse senedi, BİMAS 5,9819 ile en düşük riske sahip hisse senedir.

Ortalama getiriler ve standart sapmaların yanında, getiri dağılımlarının da portföy için oldukça önemli olduğu vurgulanmıştır. Bu noktada getiri dağılımının çarpıklığı, basıklığı gibi dağılım ölçülerine de dikkat edilmelidir. Bir serinin Kurtosis (çarpıklık) değeri yaklaşık olarak üç civarında ve Skewness (basıklık) değeri de sıfır etrafındaysa normal dağılıma sahip olduğu söylenebilir. Kurtosis değeri üçten büyük ise

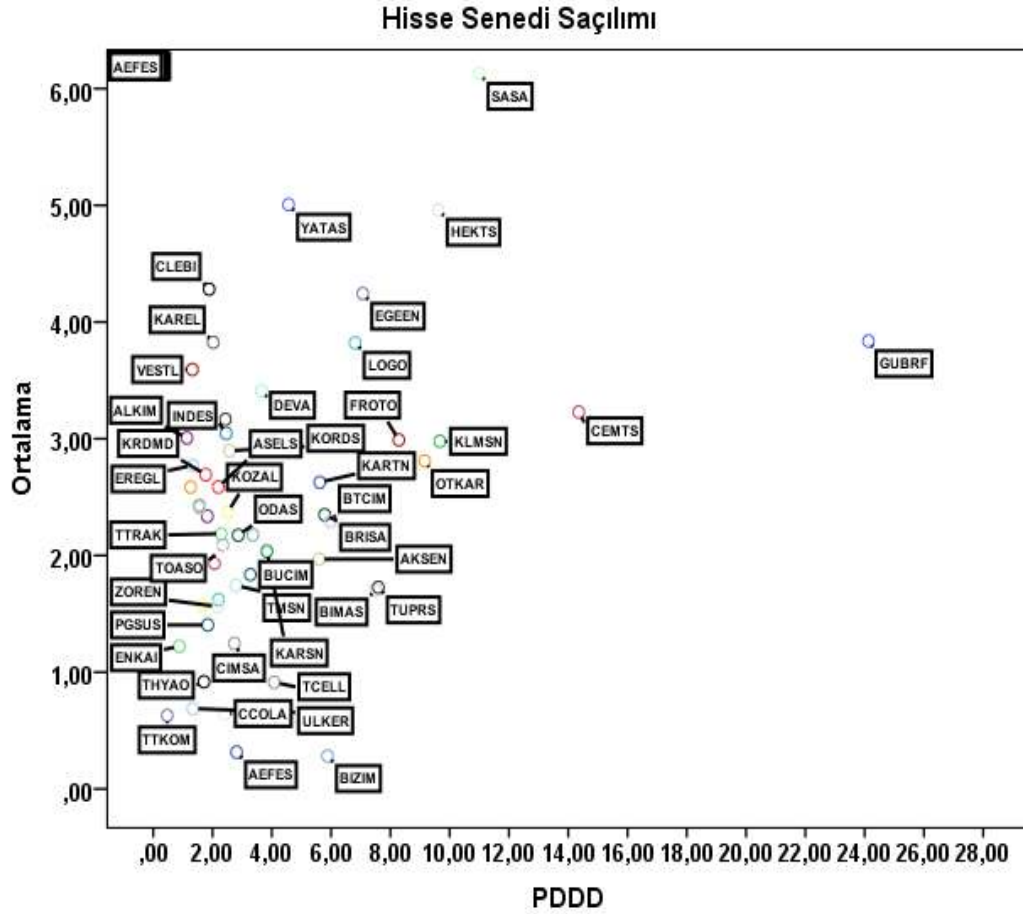
dağılımın olması gerektiğinden daha sivri, düşük ise gerekenden daha basık olduğu söylenebilir. Benzer şekilde Skewness katsayısı sıfırın altındaysa dağılım sola yatıktır. Yani ortalamanın solunda daha fazla gözlem vardır. Skewness sıfırın üzerindeyse sağa yatıktır ve gözlemlerin çoğu ortalamanın sağındadır. Bir diğer gösterge ise Jarque-Bera testidir. Bu testin boş hipotezi “Seriler normal dağılmaktadır” şeklindedir. Yani boş hipotezin ret edilmesi serinin normal dağılmadığını gösterir. Yukarıdaki verilere göre 56 tane hisse senedinden 31 tanesinin getiri serisi normal dağılmamaktadır. Bu oran toplam örnek uzayının yarısından fazladır. Üstelik veri sıklığının artırılması bu oranı daha da yukarı çekecektir. Öyleyse getiri serilerinin normal dağıldığını varsaymak, oluşturulacak model çözümlerini geçersiz kılacaktır.



Şekil 8. Hisse senedi getirilerinin ortalama ve riske göre saçılım grafiği

Şekil 8 hisse senetlerinin ortalama getiri ve hisse riskine (standart sapma veya varyans) göre serpilme diyagramını göstermektedir. Aylık ortalama getiriler %0 ile %6 arasında değişmektedir. YATAS, SASA ve HEKTS en yüksek ortalama getiriye sahip hisse senetleridir. Buna karşı BİZİM, AEFES, TTKOM ve ULKER getirisi düşük hisse senedi grubunda yer almaktadır. IPEKE, KOZAA ve ODAS en riskli hisseler iken

(oynaklığı yüksek), oynaklığı en düşük hisseler ENKAI ve BIMAS'dır. Şekil 9 hisse senedi ortalama getirisi ve PDDD oranlarına göre saçılımını göstermektedir.



Şekil 9. Hisse senedinin PDDD ve ortalamaya göre saçılım grafiği

Piyasa değeri defter değeri için (PDDD) hisse senedi fiyatlamasında kullanılan önemli istatistiklerden biri olduğu daha önce belirtilmişti. Bu değer genel olarak birin altındaysa hisse senedinin olması gerekenden daha ucuz olduğu söylenir. Fakat piyasa değeri defter değerinin birin altında olması her zaman ucuz hisse senedi anlamına gelmemektedir. Şirketin zor durumda olması, zarar etmesi veya aşırı satışlar bu değeri birin altına çekebilir. Dolayısıyla PDDD oranına göre hisse seçilirken dikkatli olmak gerekmektedir. Bu kısıt modele, portföydeki hisse senetlerinin PDDD değeri oranı en fazla yedi olacak şekilde eklenmiştir. Böylelikle model, olabildiğince küçük PDDD'ne sahip hisseleri seçerken PDDD birin altında olan varlıklara gereğinden fazla ağırlık vermeyecektir. Yukarıdaki şekil incelendiğinde hisselerin genel olarak 0 ile 10 arasına konumlandığı görülmektedir. AEFES yüksek beklenen ortalama getiriye sahipken çok

düşük bir PDDD oranına sahiptir. Bunun dışında SASA yüksek bir getiri ortalamasına sahipken PDDD oldukça yüksektir.

Robust optimizasyonun temel dayanağı parametre katsayılarının değişkenlik (sapma) göstermesi fikridir. Katsayılardaki değişkenlik ise belirsizlik setleri ile ifade edilmektedir. Burada Bootstrap yöntemi kullanılarak %99, %97.5, %95, %90, %80 ve %70 güven düzeyleriyle olmak üzere altı farklı belirsizlik seti oluşturulmuştur. Güven düzeylerinin farklı seçilmesi, oluşturulan portföylerin belirsizlik setlerine duyarlılığını ölçmek amacını taşımaktadır. Güven düzeyi %50 seçildiği zaman modeller neredeyse aritmetik ortalamalara eşdeğer sonuçlar üretecektir. Çünkü başlangıçtaki dağılımı ne olursa olsun, dağılımdan çekilmiş örneklemelerin ortalamasının dağılımı normaldir ve 50. kantil aritmetik ortalamaya denk düşmektedir. Aşağıdaki tabloda bootstrap yöntemiyle elde edilmiş belirsizlik setleri özetlenmiştir. Alt ve üst değerler hisse senetlerinin aylık ortalama getirilerinin (yüzde) alt ve üst sınırlarıdır. Örneğin AKSA hisse senedi %99 güven düzeyinde aylık ortalama minimum -1.25 ortalama getiriye sahiptir. Aynı şekilde AEFES hissesi %95 güven düzeyi ile aylık ortalama minimum -2.01 getiriye sahip olurken, maksimum 2.64 ortalama aylık getiriye sahip olacaktır. Özetle AEFES için gerçekleşecek 100 realizasyonun 95 tanesinin -2.01 ile 2.64 arasında olması beklenmektedir.

Tablo 4.

Bootstrap Belirsizlik Setleri

Hisse	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.30$
AKSA	[-1.25, 6.11]	[-0.71, 5.57]	[-0.24, 5.09]	[0.34, 4.51]	[1.05, 3.80]	[1.58, 3.28]
AKSEN	[-1.73, 5.67]	[-1.17, 5.11]	[-0.70, 4.63]	[-0.15, 4.08]	[0.59, 3.35]	[1.10, 2.84]
ALKIM	[0.07, 5.94]	[0.50, 5.51]	[0.88, 5.13]	[1.35, 4.66]	[1.92, 4.10]	[2.34, 3.68]
AEFES	[-2.97, 3.60]	[-2.43, 3.06]	[-2.01, 2.64]	[-1.49, 2.12]	[-0.88, 1.51]	[-0.39, 1.02]
ARCLK	[-2.09, 5.24]	[-1.51, 4.65]	[-0.99, 4.13]	[-0.42, 3.56]	[0.30, 2.84]	[0.79, 2.36]
ASELS	[-0.74, 5.92]	[-0.21, 5.39]	[0.26, 4.91]	[0.79, 4.39]	[1.40, 3.77]	[1.86, 3.32]
AYGAZ	[-1.54, 4.78]	[-1.04, 4.28]	[-0.58, 3.83]	[-0.09, 3.33]	[0.50, 2.75]	[0.93, 2.32]
BTCIM	[-3.24, 7.83]	[-2.37, 6.95]	[-1.67, 6.26]	[-0.84, 5.43]	[0.15, 4.43]	[0.92, 3.66]
BIMAS	[-0.53, 3.95]	[-0.19, 3.61]	[0.11, 3.31]	[0.44, 2.97]	[0.86, 2.56]	[1.20, 2.22]
BIZIM	[-3.74, 4.30]	[-3.10, 3.67]	[-2.55, 3.11]	[-1.93, 2.50]	[-1.17, 1.73]	[-0.63, 1.19]
BRSAN	[-2.01, 7.18]	[-1.33, 6.50]	[-0.78, 5.95]	[-0.01, 5.18]	[0.91, 4.26]	[1.50, 3.67]
BRISA	[-1.44, 6.14]	[-0.89, 5.59]	[-0.35, 5.05]	[0.24, 4.46]	[0.97, 3.73]	[1.51, 3.18]
BUCIM	[-2.00, 5.67]	[-1.38, 5.05]	[-0.89, 4.57]	[-0.32, 3.99]	[0.41, 3.26]	[0.91, 2.76]
CCOLA	[-2.84, 4.13]	[-2.22, 3.51]	[-1.74, 3.03]	[-1.21, 2.50]	[-0.59, 1.88]	[-0.10, 1.39]
CLEBI	[0.23, 8.34]	[0.81, 7.75]	[1.32, 7.24]	[1.93, 6.63]	[2.69, 5.88]	[2.94, 5.63]
CEMTS	[-1.38, 7.83]	[-0.53, 6.99]	[0.06, 6.40]	[0.72, 5.73]	[1.57, 4.89]	[2.17, 4.29]
CIMSA	[-2.39, 4.88]	[-1.81, 4.31]	[-1.30, 3.79]	[-0.74, 3.23]	[-0.05, 2.54]	[0.42, 2.07]
DEVA	[-0.70, 7.52]	[-0.04, 6.86]	[0.51, 6.31]	[1.13, 5.69]	[1.90, 4.92]	[2.44, 4.38]
DOAS	[-2.67, 7.45]	[-1.97, 6.74]	[-1.27, 6.04]	[-0.52, 5.29]	[0.44, 4.33]	[1.19, 3.59]
EGEEN	[-0.05, 8.54]	[0.62, 7.87]	[1.19, 7.30]	[1.84, 6.64]	[2.66, 5.83]	[3.23, 5.26]
ENKAI	[-1.04, 3.49]	[-0.70, 3.14]	[-0.42, 2.86]	[-0.06, 2.50]	[0.37, 2.07]	[0.71, 1.73]
ERBOS	[-1.21, 7.55]	[-0.55, 6.89]	[0.06, 6.27]	[0.75, 5.58]	[1.55, 4.79]	[2.14, 4.19]
EREGL	[-1.19, 6.74]	[-0.57, 6.11]	[-0.01, 5.56]	[0.62, 4.92]	[1.36, 4.18]	[1.89, 3.65]
FROTO	[-0.83, 6.81]	[-0.15, 6.13]	[0.35, 5.63]	[0.94, 5.04]	[1.66, 4.32]	[2.17, 3.81]
GUBRF	[0.09, 7.58]	[0.66, 7.02]	[1.13, 6.55]	[1.70, 5.97]	[2.41, 5.27]	[2.55, 5.12]
HEKTS	[1.14, 8.78]	[1.65, 8.27]	[2.20, 7.73]	[2.76, 7.16]	[3.52, 6.40]	[4.02, 5.90]
INDES	[-1.96, 8.05]	[-1.18, 7.27]	[-0.54, 6.64]	[0.27, 5.83]	[1.22, 4.87]	[1.94, 4.15]
IPEKE	[-4.56, 8.73]	[-3.59, 7.77]	[-2.66, 6.84]	[-1.61, 5.79]	[-0.35, 4.53]	[0.57, 3.61]

Tablo 5.

Bootstrap Belirsizlik Setleri (Devam)

Hisse	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.20$	$\alpha = 0.30$
KRDMD	[-2.38, 7.76]	[-1.55, 6.93]	[-0.83, 6.21]	[-0.08, 5.47]	[0.87, 4.51]	[1.54, 3.84]
KAREL	[-1.38, 9.03]	[-0.60, 8.25]	[0.07, 7.58]	[0.87, 6.78]	[1.89, 5.76]	[2.66, 4.99]
KARSN	[-3.60, 7.68]	[-2.70, 6.77]	[-2.01, 6.08]	[-1.07, 5.14]	[-0.06, 4.13]	[0.76, 3.31]
KARTN	[-1.01, 6.27]	[-0.56, 5.81]	[-0.05, 5.30]	[0.48, 4.77]	[1.13, 4.12]	[1.21, 4.04]
KLMSN	[-3.07, 9.03]	[-2.18, 8.14]	[-1.30, 7.26]	[-0.27, 6.23]	[0.83, 5.12]	[1.62, 4.34]
KORDS	[-1.28, 7.07]	[-0.62, 6.41]	[-0.06, 5.86]	[0.60, 5.19]	[1.40, 4.39]	[1.98, 3.81]
KOZAL	[-3.04, 7.79]	[-2.16, 6.90]	[-1.44, 6.19]	[-0.64, 5.38]	[0.41, 4.34]	[1.12, 3.63]
KOZAA	[-4.29, 8.96]	[-3.21, 7.88]	[-2.42, 7.09]	[-1.34, 6.01]	[-0.04, 4.71]	[0.79, 3.88]
LOGO	[-0.22, 7.86]	[0.38, 7.26]	[0.91, 6.74]	[1.52, 6.13]	[2.27, 5.37]	[2.51, 5.14]
MGROS	[-2.68, 4.98]	[-2.04, 4.33]	[-1.57, 3.87]	[-1.01, 3.31]	[-0.25, 2.55]	[0.31, 1.99]
NETAS	[-2.81, 7.16]	[-2.05, 6.40]	[-1.39, 5.74]	[-0.64, 5.00]	[0.29, 4.06]	[1.02, 3.33]
ODAS	[-3.81, 8.16]	[-3.01, 7.36]	[-2.17, 6.52]	[-1.23, 5.58]	[-0.06, 4.41]	[0.78, 3.57]
OTKAR	[-1.72, 7.35]	[-0.99, 6.61]	[-0.36, 5.98]	[0.34, 5.28]	[1.19, 4.43]	[1.81, 3.82]
PGSUS	[-4.48, 7.29]	[-3.56, 6.37]	[-2.79, 5.59]	[-1.80, 4.61]	[-0.72, 3.53]	[0.06, 2.75]
PETKM	[-1.48, 6.29]	[-0.85, 5.67]	[-0.27, 5.08]	[0.36, 4.45]	[1.08, 3.74]	[1.60, 3.21]
SASA	[1.25, 11.00]	[1.99, 10.27]	[2.63, 9.63]	[3.39, 8.87]	[4.29, 7.96]	[4.95, 7.31]
TATGD	[-2.34, 6.20]	[-1.70, 5.56]	[-1.13, 4.99]	[-0.46, 4.33]	[0.36, 3.51]	[0.95, 2.91]
TOASO	[-1.44, 5.51]	[-0.85, 4.92]	[-0.36, 4.43]	[0.16, 3.90]	[0.83, 3.24]	[1.29, 2.78]
TCELL	[-2.00, 3.83]	[-1.55, 3.37]	[-1.12, 2.95]	[-0.66, 2.48]	[-0.11, 1.94]	[0.29, 1.53]
TMSN	[-3.03, 6.51]	[-2.25, 5.74]	[-1.63, 5.12]	[-0.89, 4.37]	[0.03, 3.46]	[0.67, 2.82]
TUPRS	[-1.68, 5.14]	[-1.10, 4.56]	[-0.63, 4.09]	[-0.10, 3.55]	[0.54, 2.92]	[0.97, 2.48]
THYAO	[-3.47, 5.31]	[-2.77, 4.61]	[-2.19, 4.03]	[-1.53, 3.37]	[-0.66, 2.50]	[-0.07, 1.91]
TTKOM	[-2.73, 3.99]	[-2.16, 3.42]	[-1.70, 2.96]	[-1.19, 2.45]	[-0.55, 1.80]	[-0.11, 1.37]
TTRAK	[-2.09, 6.47]	[-1.36, 5.74]	[-0.79, 5.17]	[-0.18, 4.55]	[0.65, 3.72]	[1.22, 3.15]
ULKER	[-2.91, 4.29]	[-2.34, 3.72]	[-1.84, 3.22]	[-1.29, 2.66]	[-0.62, 1.99]	[-0.12, 1.50]
VESTL	[-2.36, 9.54]	[-1.42, 8.60]	[-0.61, 7.80]	[0.33, 6.85]	[1.43, 5.76]	[2.27, 4.91]
YATAS	[-0.70, 10.72]	[0.28, 9.74]	[1.07, 8.95]	[1.98, 8.03]	[3.02, 6.99]	[3.75, 6.27]
ZOREN	[-3.08, 6.21]	[-2.39, 5.52]	[-1.81, 4.94]	[-1.10, 4.23]	[-0.23, 3.35]	[0.40, 2.73]

Güven düzeyi azaldıkça hisse senetleri ortalamasına ilişkin aralıklar da daralmaktadır. En son güven düzeyi %50 seviyesine çekilecek olursa, oluşacak aralık ortalamanın hemen sağında ve solunda olacaktır. Robust optimizasyon için oluşturulan belirsizlik setlerinin en önemli varsayımı setin kapalı küme ve simetrik olmasıdır. Yukarıda da belirtildiği gibi başlangıç dağılımı ne olursa olsun bir değişkenden çekilen örneklemelerin ortalamalarının dağılımı, merkezi limit teoremi gereği normal dağılmalıdır. Bootstrap yöntemi, verilen değişkenin içinden rastgele gözlemler seçmek kaydıyla alt örneklemeler seçip ortalamalarını hesaplar. En son bu ortalamaların dağılımından yukarıdaki tabloda verilen aralıklara bağlı olarak ortalama için belirsizlik setleri oluşturur. Uygulamada hisse senetlerine ait 89 aylık getiri kullanılmıştır. Bu getirilerden her defasında 36 gözlem çekilmek koşulu ile 15000 adet bootstrap alt örnekleme seçilmiş ve hepsinin ortalaması hesaplanmıştır. Sonuçta 15000 ortalamanın dağılımından güven düzeylerine bağlı olarak belirsizlik setleri oluşturulmuştur. Böylelikle, robust optimizasyon problemlerin simetrik ve kapalı küme varsayımı yerine gelmiş olmaktadır.

Hisse senetleri belirsizlik kümelerinin alt ve üst limitleri de dahil olmak üzere bu aralıktaki herhangi bir değeri rastsal olarak alabilmektedir. Robust optimizasyon değişkenlerin en kötü senaryosu üzerinden optimizasyon yaptığı için muhtemelen model optimizasyonu sırasında uç değerlerden birine yönelecektir. Buna belirsiz değişkenin realizasyonu denilmektedir. Önceki grafikte varlıkların ortalama ve risklerine göre saçılım grafiği verilmişti. İlgili tabloda riski, yani standart sapması/varyansı yüksek olan hisse senetlerinin belirsizlik setlerinin sınır değerlerinin de buna bağlı olarak geniş olduğu görülmektedir. Robust optimizasyon modeli portföy seçerken muhtemelen belirsizliği yüksek olan hisse senetlerini seçmekten kaçınacaktır.

Tablo 6.

Belirsizlik Setlerine Bağlı Olarak Sharpe Oranı, Beklenen Getiri Oranı ve Portföy Riski

Gama	Sharpe Oranı	Portföy Beklenen Getiri Oranı	Portföy Riski		Sharpe Oranı	Portföy Beklenen Getiri Oranı	Portföy Riski
Gama=0	0.01812	%52.090	25.66250				
Gama=1				Gama=4			
Alfa				Alfa			
0.01	0.01810	%52.095	25.69165	0.01	0.01490	%41.232	23.93431
0.03	0.01679	%51.590	27.40047	0.03	0.01507	%41.161	23.60751
0.05	0.01682	%51.590	27.34654	0.05	0.01490	%41.233	23.93460
0.10	0.01683	%51.590	27.33443	0.10	0.01503	%40.878	23.48085
0.20	0.01683	%51.590	27.34187	0.20	0.01504	%40.869	23.46321
0.30	0.01683	%51.590	27.33671	0.30	0.01512	%40.987	23.41536
Gama=2				Gama=5			
Alfa				Alfa			
0.01	0.01447	%41.352	24.72033	0.01	0.01500	%40.877	23.52785
0.03	0.01449	%41.354	24.69168	0.03	0.01519	%40.672	23.10580
0.05	0.01448	%41.352	24.70964	0.05	0.01491	%40.910	23.69429
0.10	0.01460	%41.336	24.48440	0.10	0.01494	%40.907	23.64958
0.20	0.01481	%41.257	24.09595	0.20	0.01492	%40.917	23.67919
0.30	0.01486	%41.243	24.00307	0.30	0.01555	%40.950	22.73802
Gama=3				Gama=6			
Alfa				Alfa			
0.01	0.01448	%41.342	24.69349	0.01	0.01497	%40.888	23.58361
0.03	0.01490	%41.231	23.93338	0.03	0.01493	%40.927	23.67791
0.05	0.01496	%41.207	23.81680	0.05	0.01489	%40.912	23.73513
0.10	0.01506	%41.159	23.61990	0.10	0.01494	%40.914	23.65005
0.20	0.01508	%41.156	23.58866	0.20	0.01493	%40.903	23.65299
0.30	0.01508	%41.162	23.59105	0.30	0.01564	%40.901	22.57634

Tablo 6 ve devamındaki iki tablo modeldeki belirsiz parametre sayısına bağlı olarak oluşturulan portföylerin Sharpe oranı, portföylerin beklenen getiri oranları (%) ve portföy risklerini özetlemektedir. Gama modele dâhil edilen belirsiz parametre sayısını gösterirken, alfa her bir gama değerine bağlı olarak modellerin güven düzeylerini

göstermektedir. Gama sıfırdan başlayarak 56'ya kadar farklı değerler almaktadır. Gamanın sıfır olduğu durum modelde hiç belirsiz değişkenin olmadığı durumu ifade etmektedir. Gamanın sıfır olduğu model Markowitz'in klasik ortalama varyans modeliyle aynı modeldir. İlk tabloda gama değerinin sıfır ile altı olduğu durumlar yer almaktadır. Buna göre Sharpe oranı, gama değeri yükseldikçe düşmektedir. Bu beklenen bir durumdur. Çünkü modeldeki belirsiz parametre sayısı arttıkça modelin beklenen getirisi düşer ve portföy riski artar. Sonuç olarak Sharpe oranı bir bütün olarak düşer. Benzer bir yorum portföyün beklenen getirileri için de yapılabilir. Zira yine gama değeri arttıkça beklenen getiri oranı düşme eğilimi göstermiştir.

Tablo 7.

Belirsizlik Setlerine Bağlı Olarak Sharpe Oranı, Beklenen Getiri Oranı ve Portföy Riski (Devam)

Rho	Sharpe Oranı	Portföy Beklenen Getiri Oranı	Portföy Riski	Sharpe Oranı	Portföy Beklenen Getiri Oranı	Portföy Riski
Gama=7				Gama =10		
<i>Alfa</i>				<i>Alfa</i>		
0.01	0.01451	%39.445	23.33683	0.01	0.01389	%37.804 23.19995
0.03	0.01456	%39.764	23.48076	0.03	0.01440	%39.449 23.52189
0.05	0.01482	%39.752	23.04991	0.05	0.01455	%39.869 23.55889
0.10	0.01445	%39.595	23.53577	0.10	0.01451	%39.430 23.32053
0.20	0.01636	%39.629	20.81128	0.20	0.01525	%39.181 22.03867
0.30	0.01577	%39.621	21.58526	0.30	0.01479	%39.373 22.85181
Gama =8				Gama =15		
<i>Alfa</i>				<i>Alfa</i>		
0.01	0.01459	%39.606	23.31754	0.01	0.01258	%31.950 20.95607
0.03	0.01499	%39.597	22.68478	0.03	0.01337	%32.126 19.85943
0.05	0.01623	%39.690	21.01095	0.05	0.01382	%32.230 19.28916
0.10	0.01623	%39.693	21.01858	0.10	0.01425	%32.031 18.55739
0.20	0.01631	%39.622	20.87055	0.20	0.01437	%32.344 18.62489
0.30	0.01582	%39.557	21.47177	0.30	0.01294	%33.887 21.87488
Gama =9				Gama =20		
<i>Alfa</i>				<i>Alfa</i>		
0.01	0.01556	%39.800	21.99614	0.01	0.01116	%29.720 21.62301
0.03	0.01533	%40.000	22.44770	0.03	0.01187	%29.777 20.39177
0.05	0.01515	%40.000	22.71826	0.05	0.01272	%29.790 19.03467
0.10	0.01478	%39.674	23.07072	0.10	0.01323	%31.510 19.60297
0.20	0.01469	%39.732	23.24393	0.20	0.01444	%31.086 17.65632
0.30	0.01546	%39.663	22.04826	0.30	0.01449	%31.294 17.74135

Yukarıdaki tabloda ise gama değerinin 7 ile 20 arasında değiştiği durumlar gösterilmiştir. Uygulamada gamanın sıfırdan 10'a kadar değerleri birer artırılmıştır. Bu aralıkta portföylerin belirsiz parametrelere duyarlılığı çok daha yüksektir. Gama sayısı yükseldikçe modellerin belirsiz parametre sayısına olan duyarlılığı da belirli oranda

düşmektedir. Bunu Sharpe oranlarındaki değişimlerden okumak mümkündür.

Genel olarak gamanın sıfır olması beklenen bir durum değildir. Yani model portföyler oluşturulurken, tahmin edilen ortalama değerlerinin tamamının doğru ve geleceği mükemmel temsil etmesi beklenen bir sonuç değildir. Dolayısıyla gamanın sıfır olduğu durumda portföyler oluşturulsa bile bunun gerçekte karşılığının olmadığı bilinmelidir. Gama değerlerini belirlemek yatırımcının beklentisi ve almak istediği risk oranıyla ilgilidir. Bir model portföyde kaç tane hisse senedinin kötü performans göstermesi gerektiği sorusu tamamıyla beklentilerle ilgilidir.

Tablo 8.

Belirsizlik Setlerine Bağlı Olarak Sharpe Oranı, Beklenen Getiri Oranı ve Portföy Riski (Devam)

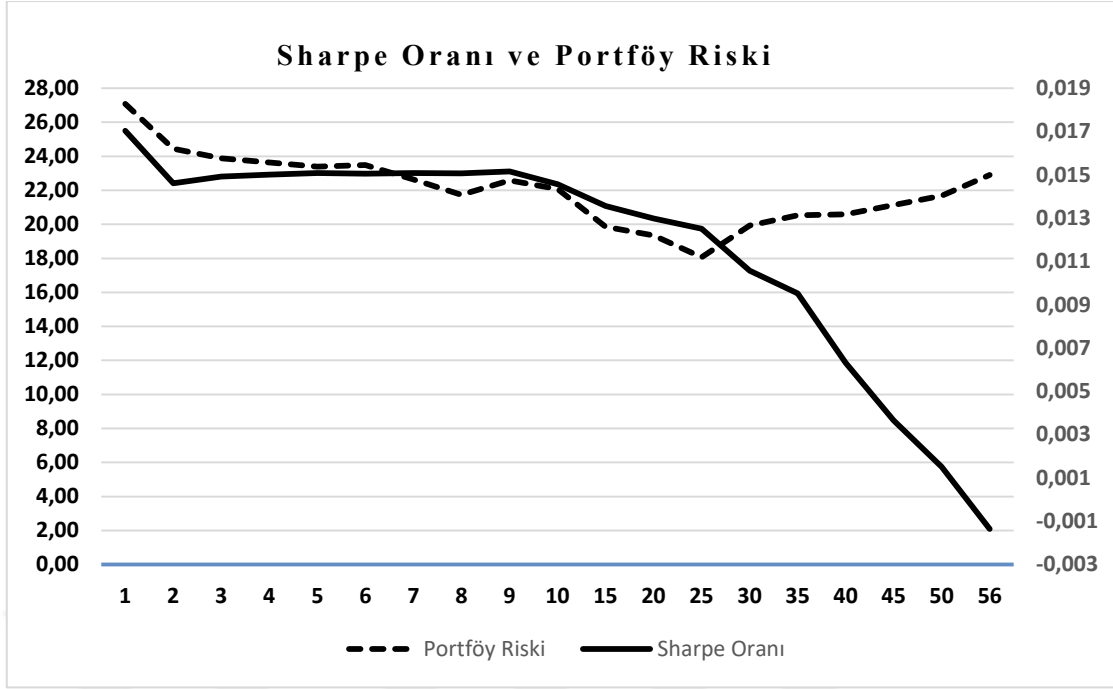
Rho	Sharpe Oranı	Portföy Beklenen Getiri Oranı	Portföy Riski	Sharpe Oranı	Portföy Beklenen Getiri Oranı	Portföy Riski
Gama=25				Gama=45		
<i>Alfa</i>				<i>Alfa</i>		
0.01	0.01094	%24.713	17.48019	0.01	0.00156	%08.758 20.37770
0.03	0.01146	%24.871	16.83025	0.03	-0.00404	-%3.229 21.79424
0.05	0.01221	%29.008	19.19222	0.05	-0.00100	%3.330 22.50142
0.10	0.01308	%29.662	18.40892	0.10	0.00703	%20.133 20.70634
0.20	0.01334	%30.895	18.98228	0.20	0.00670	%19.610 20.93639
0.30	0.01400	%30.152	17.55368	0.30	0.01168	%29.536 20.51471
Gama=30				Gama=50		
<i>Alfa</i>				<i>Alfa</i>		
0.01	0.00827	%22.543	20.49859	0.01	-0.00462	-%4.218 21.19801
0.03	0.00905	%23.848	20.17857	0.03	-0.00472	-%4.980 22.37153
0.05	0.00984	%24.842	19.56484	0.05	0.00343	%12.725 20.82131
0.10	0.01081	%27.116	19.92363	0.10	0.00099	%7.779 22.17366
0.20	0.01223	%30.099	20.04710	0.20	0.00889	%23.904 20.60759
0.30	0.01324	%31.285	19.40741	0.30	0.00515	%17.368 22.90443
Gama=35				Gama=56		
<i>Alfa</i>				<i>Alfa</i>		
0.01	0.00768	%21.013	20.10443	0.01	-0.00720	-%9.667 21.17044
0.03	0.00692	%20.000	20.84462	0.03	-0.00649	-%9.251 22.84614
0.05	0.00864	%23.427	20.64725	0.05	-0.00577	-%10.000 27.01822
0.10	0.00981	%25.708	20.51236	0.10	-0.00175	%1.618 22.60142
0.20	0.01133	%28.724	20.42488	0.20	0.00246	%11.248 23.07066
0.30	0.01275	%31.929	20.66964	0.30	0.01063	%27.633 20.74802
Gama=40						
<i>Alfa</i>						
0.01	0.00141	%8.471	20.45621			
0.03	0.00441	%14.461	20.12527			
0.05	0.00492	%15.811	20.78953			
0.10	0.00671	%19.545	20.80928			
0.20	0.00819	%22.684	20.89197			
0.30	0.01227	%30.707	20.47823			

Son olarak tablo 8, gama değerlerinin (belirsiz parametre sayısının) 25 ile 56 arasında değiştiği modellerin istatistiklerini göstermektedir. Belirsiz parametre sayısı arttıkça modelin Sharpe oranı düşmeye devam etmektedir. Öyle ki belirsiz parametre sayısı 45'in üzerine çıktığında Sharpe oranı negatife dönmüştür. Sharpe oranı ancak portföy beklenen getirisi risksiz faiz oranının altına düştüğünde negatif olabilir. Demek ki hisse uzayımızdaki hisselerin çok büyük bir kısmı kötü performans gösterirse portföyden elde edilecek getiri oranı, risksiz getiri oranının bile altına düşmektedir.

Gama değerinin sıfır olması ya da başka bir ifade ile modelde belirsiz parametre olmamasının beklenmedik bir durum olduğu ifade edilmişti. Aynı durum maksimum belirsiz parametre sayısı için de geçerlidir. Yani varlık uzayındaki tüm hisselerin aynı anda kötü performans göstermesi de beklenen bir durum değildir. Gerçek hayatta realizasyonlar genelde bu iki durum arasında gerçekleşmektedir. Buna göre gama değerinin 56 olması teorik olarak mümkün olsa da gerçekte beklenen bir durum değildir. Çeşitlendirme bu yönüyle çok önemlidir. Çünkü portföyünüze farklı sektör ve özellikteki hisse senetleri eklediğinizde muhtemelen bir sektörün hisse senetleri kötü performans gösterirken diğer sektör hisseleri iyi performans gösterecektir. Burada kötü performanstan kasıt hisse senedinin beklenen getirisinden daha düşük bir getiri sağlamasıdır. Benzer şekilde iyi performans göstermesi beklenen ortalama getirinin üzerinde bir getiri sağlamasıdır.

Bir bütün olarak gama ve alfa değerlerine göre incelendiğinde, model portföylerin Sharpe oranı ve portföy beklenen getiri oranları sistematik olarak düşmektedir. Fakat aynı durumun portföy riskleri için geçerli olmadığı ilk bakışta görülmektedir. Portföy riskleri genel olarak gama değerinin artmasıyla artmakta olduğu gözlenmiş olsa da daha yüksek bir gama ve alfa değeri için daha düşük bir portföy riski bulmak olasıdır. Yani portföy riskindeki düşüş veya yükselişler sistematik değildir.

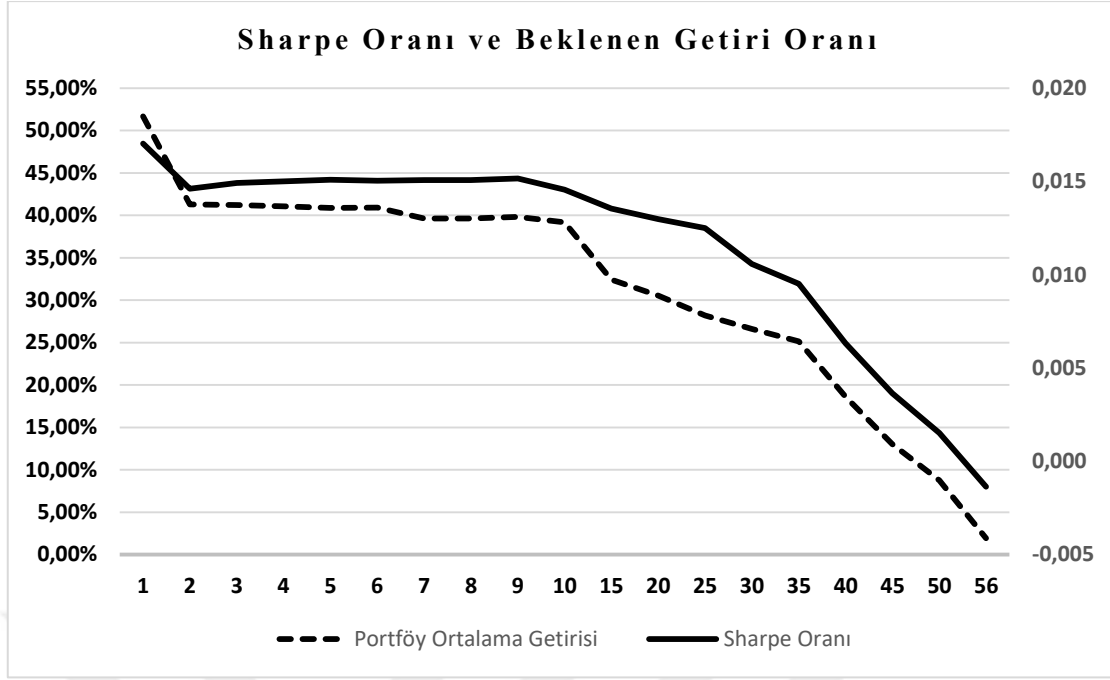
Belirsiz parametre sayısı ile model portföylerin beklenen getiri oranları arasındaki ilişki bu şekilde ortaya konulmasına rağmen hangi gama değerleri için bu değişimlerin daha yüksek olduğunu tablolardan göstermek çok mümkün değildir. Bu amaçla öncelikle belirsiz parametre sayılarına bağlı olarak portföylerin ortalama beklenen getirileri bir grafik üzerinde gösterilmelidir.



Şekil 10. Gama değerlerine göre sharpe oranı ve portföy riski

Belirsiz parametre sayısına bağlı olarak değişen Sharpe oranı grafikte gösterilmiştir. Sharpe oranı belirsiz parametre sayısı birden ikiye çıkınca önemli bir düşüş göstermiştir. Belirsiz parametre sayısı iki ile on arasındayken Sharpe oranının istikrarlı kaldığı, daha sonra ilave her beş belirsiz parametrede düşüş hızının arttığı görülmektedir. Aynı aralıklarda portföylerin ortalama risk oranları da istikrarlıyken, özellikle belirsiz parametre sayısı yirmi beşin üzerine çıktığında portföy riskinin önemli ölçüde attığı görülmektedir. İki seri aynı anda değerlendirildiğinde, risk düşerken portföyün beklenen getiri oranı da düşmektedir. Belirsiz parametre sayısı yirmi beş ve üzerindeyken Sharpe oranındaki düşüş, portföy riskindeki yükselişten daha hızlı gerçekleşmiştir. Bu da belirsizlikle birlikte risk artarken beklenen getiri oranının düştüğünü göstermektedir.

Belirsizlik ile Sharpe oranı arasındaki ilişki gösterilirken en etkin portföyün hangisi olduğu önemli bir problemdir. Öncelikle daha önce belirtildiği gibi araştırmacının belirsizlik ile ilgili beklentisi ve riske karşı duyarlılığı portföy seçiminde kritiktir. Fakat genel bir değerlendirmeye söz gelimi araştırmacının kötü performans beklentisi %15 civarındaysa (ki bu gama değerinin 8 veya 9 olduğu portföye denk gelir), sekizinci noktadaki portföylerden birine yatırımı öngörebilir. Bu noktada Sharpe oranı komşu noktalarla eşit düzeydeyken portföy riski daha düşük düzeydedir. Dolayısıyla bu noktadaki portföy araştırmacı için en etkin portföy olacaktır.



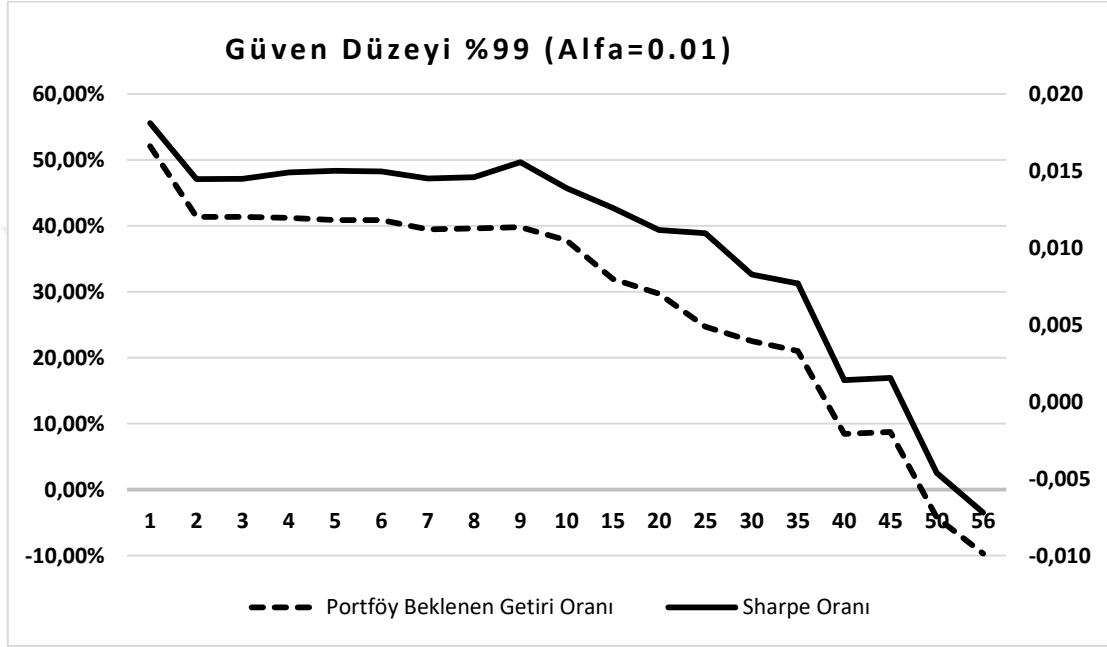
Şekil 11. Gama değerlerine göre sharpe oranı ve portföy beklenen getiri oranı

Şekil 11, gama değerlerine göre değişen ortalama portföy beklenen getirilerini ve Sharpe oranlarını göstermektedir. Öncelikle belirtmelidir ki belirsiz parametre sayısının bir veya iki olması arasında önemli bir fark vardır. Bir belirsiz parametre içeren modele bir belirsiz parametre daha eklendiğinde Sharpe oranı ve beklenen getiri önemli ölçüde düşmektedir. Modele üçüncü bir belirsiz parametre eklendiğinde bu etki çok daha kısıtlı olmuştur. Tıpkı Sharpe oranı gibi portföylerin ortalama getiri oranları da belirsiz parametre sayısının artmasıyla önce istikrarlı ilerlerken, belli bir gama değerinden sonra artan oranda azalmaya başlamıştır. Bertsimas ve Sim (2004) bu durumu Robust modelin fiyatı olarak tanımlamaktadır¹⁶. Belirsizlik, vazgeçmek zorunda olunan beklenen getiri olarak da tanımlanabilir. Belirsizlik içeren bir modeli kullanmanın en büyük avantajı beklenen getiri kaybını göze almasına rağmen araştırmacıya en kötü senaryoda bile optimal çözümü garanti etmesidir.

Her yatırımcı belli bir risk düzeyinde maksimum beklenen getiri elde etmeyi amaçlar. Fakat finansal seriler doğası gereği çok fazla belirsizlik içerir. Portföy oluştururken belirsizlik göz ardı edilirse oluşturulan modelin optimal çözümü, belirsizliklerden dolayı belli kısıtların sağlanamamasına neden olacaktır. Kısıtların sağlanmaması veya yerine getirilmemesi aslında yanlış modelin optimizasyonu anlamına gelmektedir ve sonuçları güvenilir değildir.

¹⁶ Bertsimas ve Sim (2004) bu olguyu “Price of Robustness” olarak tanımlamıştır.

Yukarıdaki şekillerde Sharpe oranı, beklenen getiri ve portföy riski grafik üzerinde gösterilirken güven düzeyleri göz önüne alınmamıştır. Alfa değerlerine (güven düzeyi) bağlı olarak Sharpe oranı, portföy beklenen getiri oranı ve portföy riski farklı tepkiler verebilir. Aşağıdaki grafikler belirlenmiş alfa düzeylerinde bu oranların nasıl davrandığını göstermektedir. Başka bir ifadeyle, model portföyler için alfa değerlerinin getiri ve risk üzerindeki etkisi gösterilmiştir.

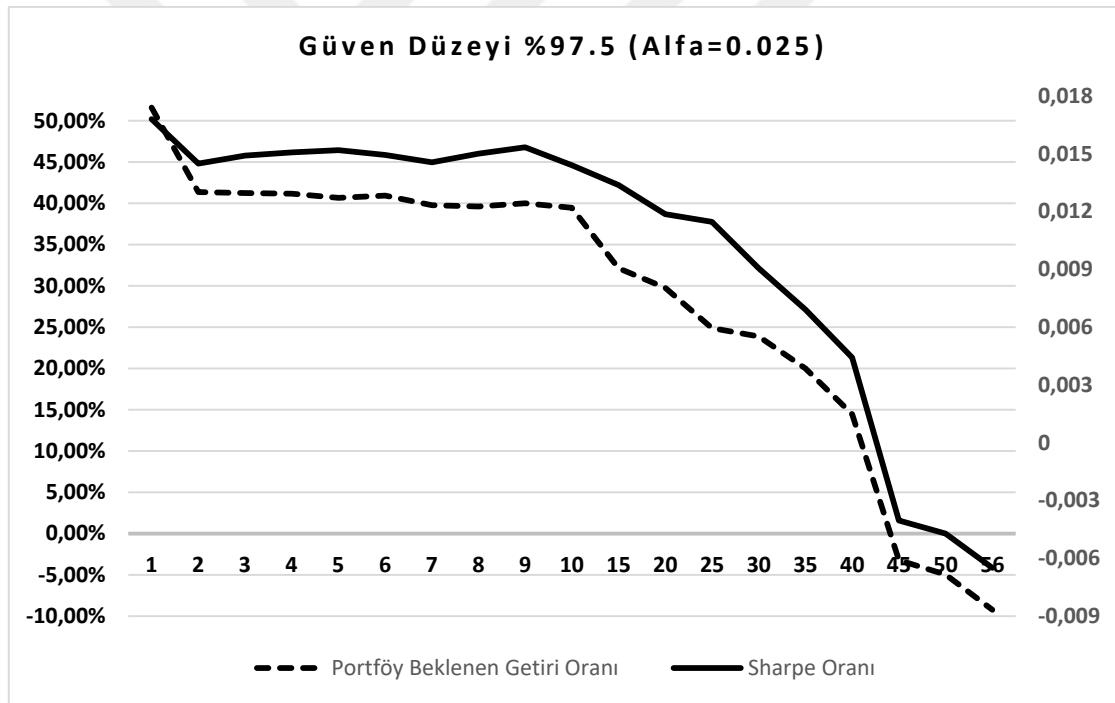


Şekil 12. Alfa= 0.01 için sharpe oranı ve beklenen getiri oranları

Hisse senetlerine ait belirsizlik setleri için %99 güven düzeyiyle oluşturulmuş model portföylerin getiri oranları ve Sharpe oranları şekil 12’de gösterilmiştir. Güven düzeyi, bir hisse senedinin belirlenen bir olasılıkla yaşayabileceği maksimum kaybı göstermektedir. Gamanın bir olması ve güven düzeyinin %99 olması, modele dâhil edilen hisse senetlerinden bir tanesinin %99 olasılıkla yaşayabileceği maksimum kaybı göz önüne alarak oluşturulan portföyü ifade eder. Hisse senetlerinin tarihsel verilerinden beklenen ortalama getiri oranları hesaplandıktan sonra, her bir hisse senedi için bootstrap yöntemiyle oluşturulan belirsizlik kümesinden en fazla sapmayı yaşayacak olan hisse belirsiz hisse senedi olarak modellere dâhil edilmektedir. Gamanın bir olması durumunda model, en yüksek sapmaya sahip hisse senedini belirsiz hisse senedi olarak alacağı için, oluşturulacak model portföy gamanın bir olduğu her durumda optimal olmaya devam edecektir. Öyle ki N varlıklı bir uzayda geriye kalan N-1 tane hisse senedinin hiçbir tanesi, seçilen 1 hisse senedinin sapmasından daha fazla sapma

yaşamayacağı için çözümün optimal kalması garanti altına alınmış olacaktır.

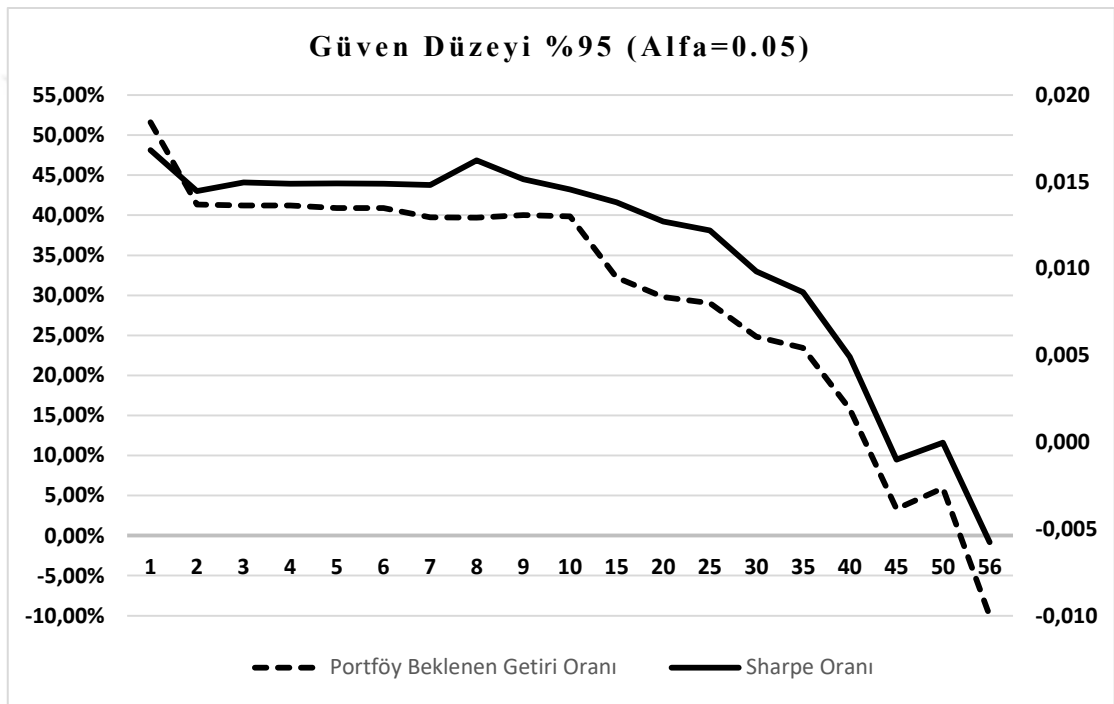
Alfanın 0.01 olması ya da aynı anlama gelen, %99 güven düzeyi oldukça yüksek bir düzeydir. Dolayısıyla araştırmacı yüksek bir güven düzeyi için portföyün beklenen getiri oranının bir kısmından feragat etmek zorundadır. Üstelik bu feragat veya beklenen getiriden vazgeçiş gama değerinin büyümesiyle daha da artacaktır. Zira belirsiz parametre sayısının bir ve güven düzeyinin %99 olduğu yukarıdaki grafikte, yıllık beklenen portföy getiri oranı %50 civarındayken, bu oran gama değerinin artmasıyla birlikte sıfırın bile altına düşmüştür. Bu sonuç gösteriyor ki araştırmacı çok muhafazakar davranıp, modeldeki tüm hisse senetlerinin kötü performans sergileyeceğini düşünür ve oluşturduğu portföylerin %99 oranında optimal kalmasını isterse negatif beklenen getiriye razı olmak zorundadır. Böylelikle hem riskini minimum yapacaktır hem de her şartta optimal kalan modeller oluşturacaktır.



Şekil 13. Alfa= 0.025 için sharpe oranı ve beklenen getiri oranları

Portföydeki hisse senetlerinin güven düzeyi %97.5 olarak belirlendiğinde model portföy getirilerinin ve Sharpe oranının verdikleri tepkiler yukarıdaki grafikte gösterilmiştir. Grafiğin sol ekseninde model portföylerin yıllık ortalama beklenen getiri oranları, sağ ekseninde ise Sharpe oranları yer almaktadır. Portföy beklenen getiri oranlarını temsil eden alttaki çizgiye göre, modeldeki belirsiz parametre sayısı arttığında beklenen getiri oranı önce sabit kalmakta belli bir noktadan sonra hızlı bir düşüş

göstermektedir. Belirsiz parametre sayısı onun üzerine çıktığında beklenen getirinin düşme eğilimi artmaktadır. Benzer bir yorum Sharpe oranı için de yapılabilir. Buna göre gama değerinin iki ile 10 arasında olduğu durumlarda Sharpe oranı önemli bir değişiklik göstermezken, gama değerinin on ile 40 arasında olduğu durumda düşüş gözlenmiş ve kırktan sonra düşüş hızı artmıştır. Sonuç olarak portföy beklenen getiri oranı yıllık ortalama %50 seviyesinden -%10 seviyesine kadar düşmüştür. Sharpe oranı da belirsiz parametre sayısı 40'ın üzerine çıktığında negatif değerler almıştır. Bu sonuçlar güven düzeyinin %99 olduğu bir önceki grafik ile paraleldir. Güven düzeyini %99'dan %97.5'e indirmek portföy getirileri ve Sharpe oranı üzerinde kısıtlayıcı bir etki yaratmıştır.

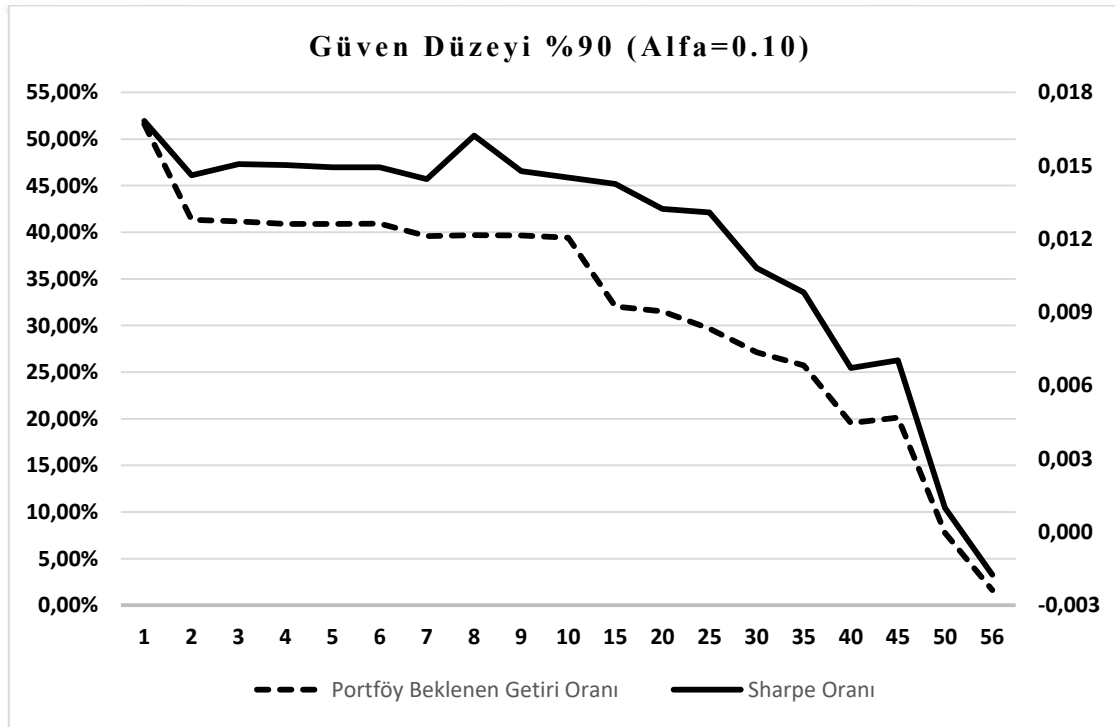


Şekil 14. Alfa= 0.05 için sharpe oranı ve beklenen getiri oranları

Güven düzeyi %95'e indirildiğinde oluşan portföyler yukarıdaki grafikte sunulmuştur. Genel olarak %99 ve %97.5 güven düzeyleriyle paralel sonuçlar olsa da belirsiz parametre sayısının elli olduğu durumda portföy beklenen getirisi ile Sharpe oranı hafif yükselmiştir. Robust optimizasyon modelleri rastgele fakat ortalamadan sapmaları maksimum yapacak toplam sapmayı dikkate aldığı için farklı belirsizlik seviyelerinde farklı hisse senedi kombinasyonu seçmesi mümkündür. Dolayısıyla daha yüksek bir belirsizlik sayısı için daha yüksek beklenen getiri durumu olasıdır.

Güven düzeyinin %99, %97.5 ve %95 olduğu üç durumda da belirsiz parametre sayısı arttıkça doğal olarak hem beklenen getiri oranı hem de Sharpe oranı düşüş

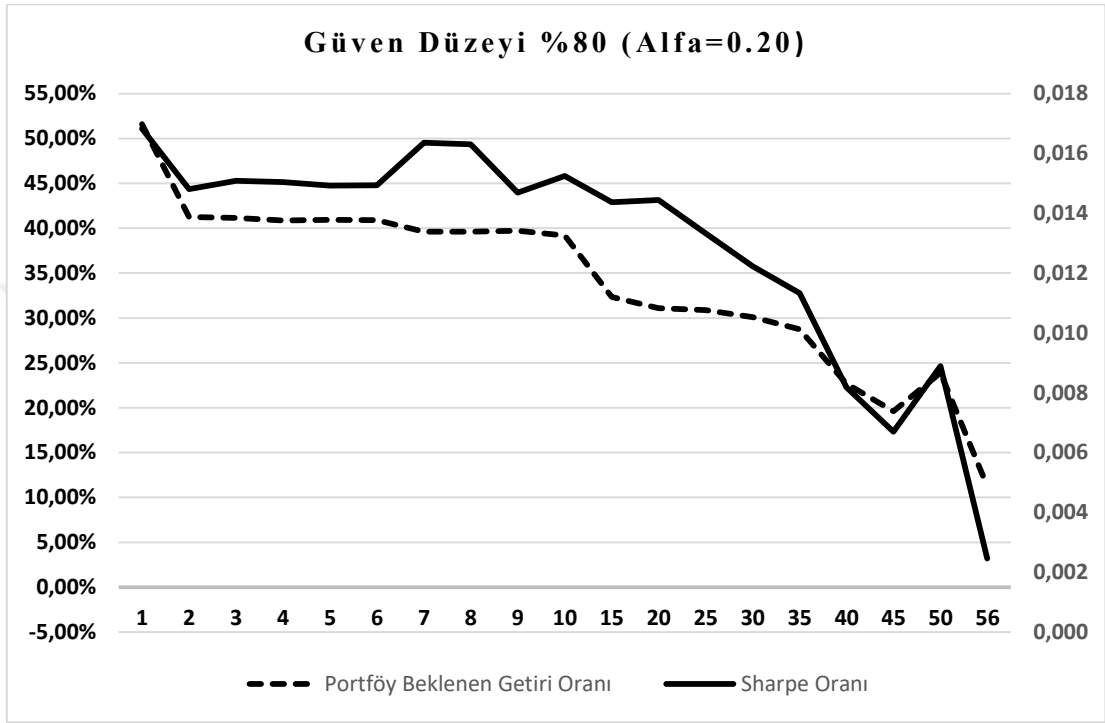
göstermektedir. Ek olarak üç güven düzeyi için de yıllık beklenen getiri oranları %50 seviyesinin biraz üzerinden başlayarak belirsiz parametre sayısının artmasıyla sıfırın altına düşmektedir. Analize konu üç güven düzeyi de araştırmacı için oldukça yüksek düzeylerdir. Hatta bunlara %90 güven düzeyi de eklenebilir. Burada oluşturulan portföylerin optimal kalması olasılığı hisse senetlerinin güven düzeylerinden dolayı oldukça yüksektir. Söz gelimi üç durumda da belirsiz parametre sayısı iki olmasıyla on olması arasında neredeyse hiç fark yoktur. Dolayısıyla sadece iki belirsiz parametreyle bulunan çözüm, on belirsiz parametreye kadar optimal kalmaya devam edecektir. Klasik optimizasyon problemlerinde yaşanacak bu denli yüksek sapmalarda çözüm çoğunlukla optimal olmaktan çıkacaktır.



Şekil 15. Alfa= 0.10 için sharpe oranı ve beklenen getiri oranları

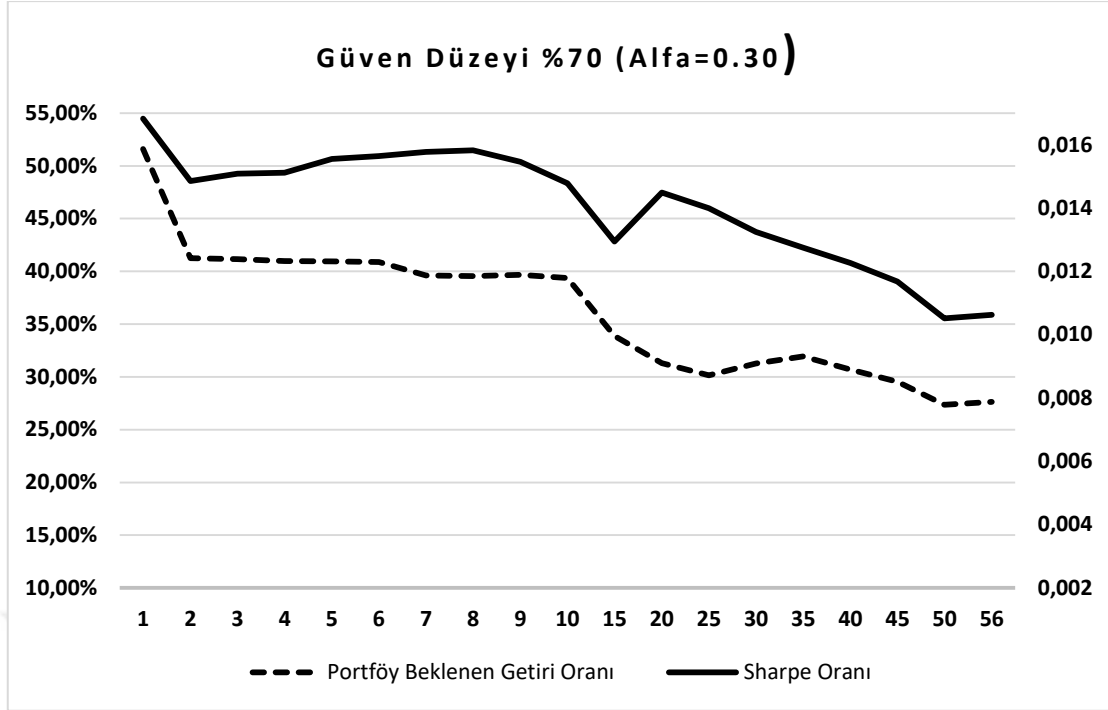
Güven düzeyi %90'a düştüğünde de benzer sonuçlar elde edilmiştir. Yine portföy ortalama beklene getiri oranı %50 civarından başlayarak gama değerinin artırılmasıyla düşüş göstermiştir. Fakat burada portföyün yıllık beklenen ortalama getiri oranı sıfırın altına düşmemiştir. Güven düzeyi düştükçe hisse senetlerinin beklenen ortalama getirilerinden sapmalar da azalmaktadır. Dolayısıyla beklenen ortalama getiriye ne kadar yakın realizasyon olursa portföyün beklenen getiri oranı da o denli yüksek olmaktadır. Söz gelimi 56 hisse senedi uzayından oluşturulan model

portföylerde, on tane hissenin %90 güven düzeyiyle en kötü performansını göstermesi ve geriye kalan tüm hisselerin en azından ortalama değerinde getiriye sahip olması durumunda portföyün sağladığı beklenen getiri oranı %40 civarındadır. Tüm hisselerin kötü performans göstermesi durumunda ise model portföylerin %90 oranında sıfıra yakın bir beklenen getiri sağlayacağı söylenebilir.



Şekil 16. Alfa= 0.20 için sharpe oranı ve beklenen getiri oranları

Hisse senedi getirileri için alfanın 0.50 olması, ortalama değerinin realizasyonu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla güven düzeyinin %80' e düşmesi hisse senetlerinin beklenen getirileriyle gerçekleşecek olan getirileri arasındaki farkın azalması demektir. Yukarıdaki grafiğe göre güven düzeyinin düşmesiyle birlikte hem portföylerin beklenen getiri oranları hem de Sharpe oranları önceki güven düzeylerine göre sınırlı bir düşüş yaşamıştır. Öyle ki gama değerinin 56'ya yükselmesi karşısında daha önce %50 negatif seviyeye düşen beklenen portföy getiri oranı bu kez maksimum %10 seviyesine düşmüştür. Benzer bir yorum Sharpe oranı için de yapılabilir. Zira Sharpe oranındaki düşüş de sınırlı olmuştur.

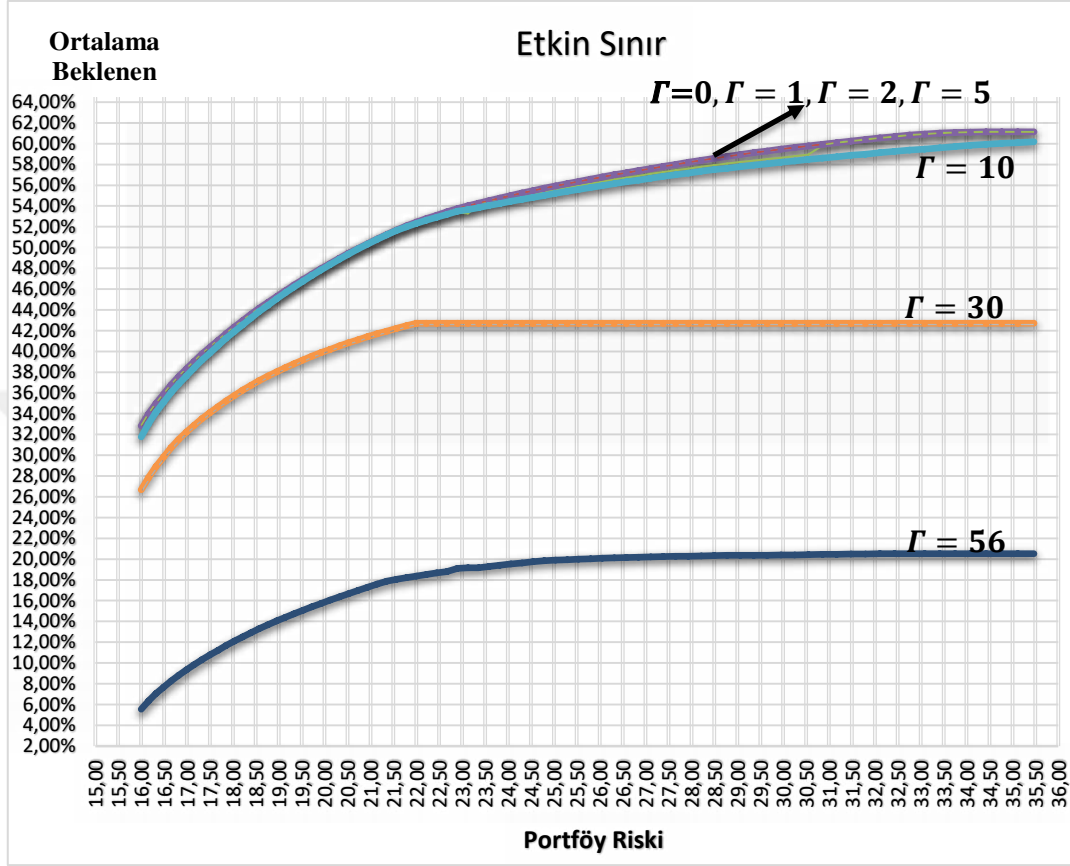


Şekil 17. Alfa= 0.30 için sharpe oranı ve beklenen getiri oranları

Belirsizlik setlerine ilişkin son güven düzeyi %70'dir. Yüksek güven düzeylerinde gerçekleşen portföy ortalama beklenen getiri oranları ve Sharpe oranlarındaki düşüşler burada çok daha sınırlı gerçekleşmiştir. Beklenen model portföy getiri oranları minimum %30 civarına düşmüştür ve gama değerlerine bağlı olarak sadece gamanın birden ikiye yükseldiği durumda ve 10'dan 20'ye yükseldiği durumda ciddi düşüş göstermiştir.

Kullanılan güven düzeylerine ve belirsiz parametre sayılarına bağlı olarak portföylerin yıllık beklenen getiri oranları, tablo ve grafikler yardımıyla detaylı bir şekilde incelenmiştir. Özellikle belirsiz parametre sayılarındaki artışlar portföy beklenen getirilerini ve portföy risklerini dolayısıyla Sharpe oranlarını önemli ölçüde etkilemektedir. Daha önce vurgulandığı gibi robust portföyler yatırımcıları belirsiz hisse senedi risklerine karşı korumaktadır. Yatırımcı yatırım yaptığı portföylerdeki hisse bileşenlerinin en kötü durumda bile geçerli olmasını istemektedir. Robust modeller çözüm uzayındaki tüm realizasyonlara (gama değeri kadar olmak koşuluyla) dirençli çözümler üretmektedir. Hatta robust optimizasyon belirsiz setlerin sınırları içerisinde en kötü senaryoları dikkate aldığı için muhtemelen belirlenen belirsiz parametre sayısından çok daha fazlası için bile çözüm optimal kalmaya devam edecektir. Çünkü gerçek hayatta her hisse senedi her zaman en kötü performansını göstermez. Bazı hisseler beklenenin aksine daha yüksek bir beklenen getiri sağlayabilir veya belirsiz hisse

senetleri belirsiz setlerin en düşük sınırından daha yüksek bir ortalama getiri sağlayabilir. Bu durumda belirlenen gama değerinin çok üstünde bir belirsizlik seti için bile çözüm “yüksek olasılıkla” geçerli olmaya devam edecektir.



Şekil 18. Belirsizlik setlerine bağlı portföy etkin sınırları

Şekil 18’de belirsiz parametre sayılarına bağlı oluşturulan portföylerin etkin sınırları gösterilmiştir. Etkin sınırlar, karşılaştırılma amacıyla sadece $\alpha = 0.05$ olduğu durum oluşturulmuştur. Farklı alfa düzeyleri için de benzer sonuçlar beklendiğinden her bir alfa düzeyinde etkin sınır çizilmemiştir.

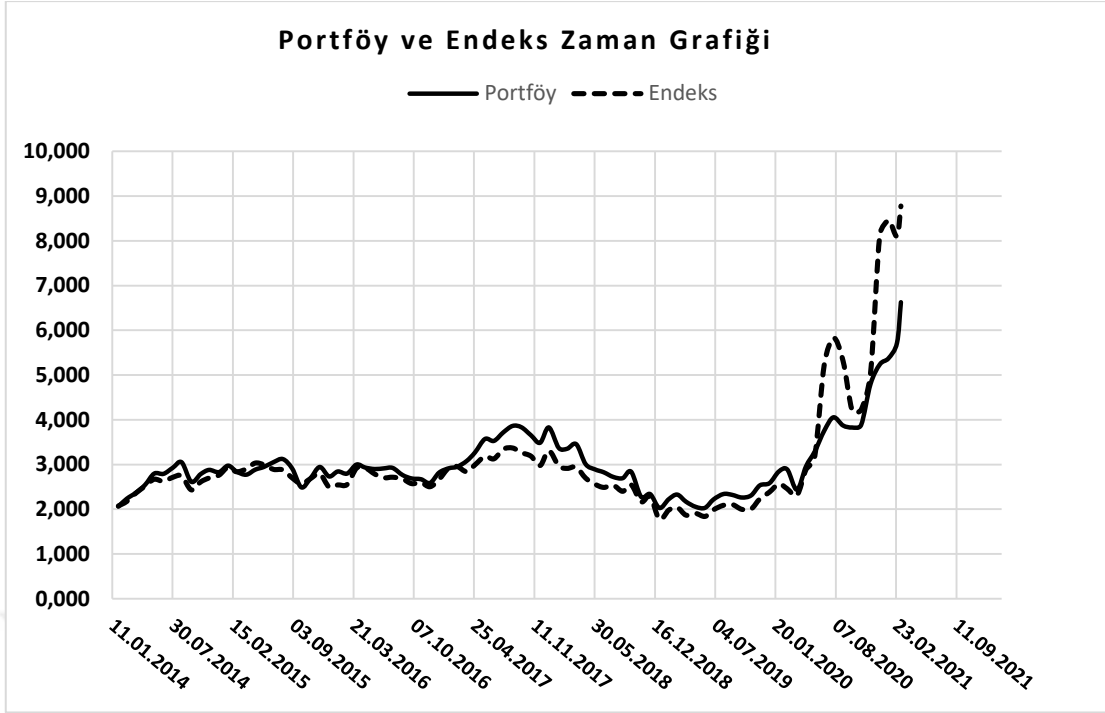
Grafiğe göre gamanın 1,2, 5 ve 10 olduğu durumlarda etkin sınır neredeyse çakışmıştır. Buna göre belirsiz parametre sayısı düşük olduğunda portföy beklenen getiri oranları çok fazla etkilenmemektedir. $\Gamma = 0$ veya $\Gamma = 10$ arasında etkinlik açısından neredeyse hiçbir fark yoktur. Burada robust optimizasyon modellerinin önemi bir kere daha ortaya çıkmaktadır. Etkinlik ve portföy beklenen getiri oranlarında çok fazla (gamanın küçük değerleri için) bir fark görülmesi de klasik optimizasyon modeli, $\Gamma = 0$ iken bulunan optimal çözümün $\Gamma = 10$ olduğunda geçerli olmasını garanti etmez. Fakat robust optimizasyon modeli doğası gereği en kötü senaryoları göz önüne

olarak optimizasyon yaptığından, yüksek bir olasılıkla farklı gama değerlerinde optimal olmaya devam edecektir.

Etkin sınırlar incelendiğinde artan risk iştahıyla ortalama beklenen getiri oranı önce artan oranda artarken, daha sonra azalan bir hızda artmaktadır. Nihayet belli bir risk seviyesinde modelden beklenen getiri oranını arttırmak imkansızdır. Bu noktada artık daha yüksek risk yüklenmeye gerek yoktur.

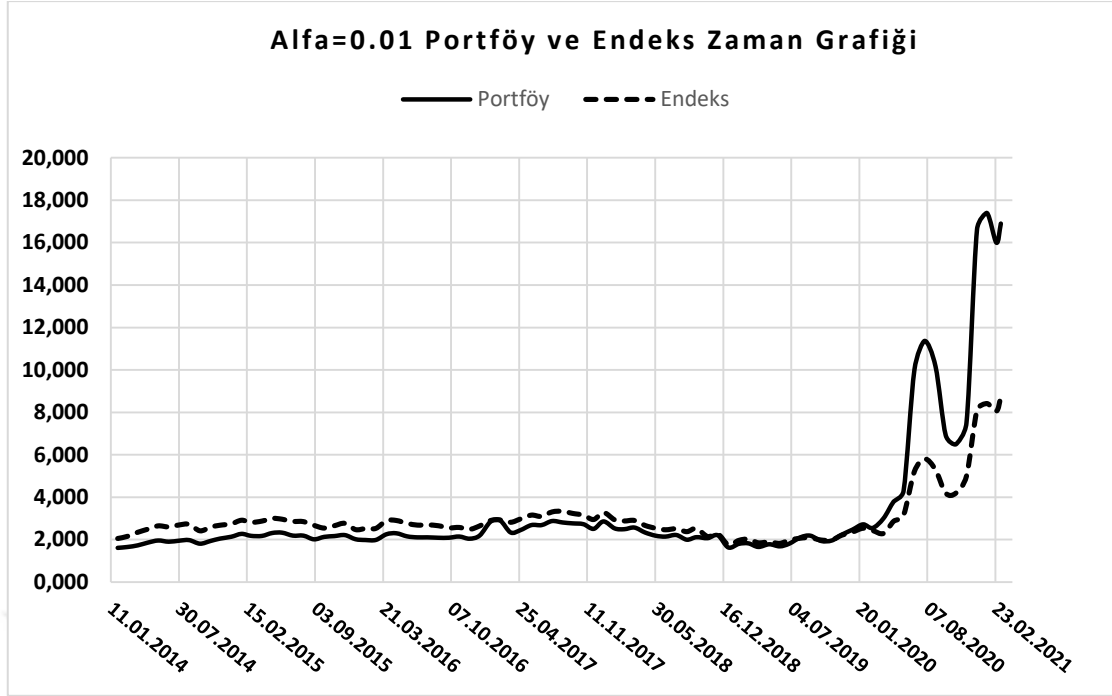
Belirsiz parametre sayısı az olduğunda etkin sınırın bu durumdan çok fazla etkilenmediği aşikârdır. Fakat gama sayısı arttırıldığında etkin sınırın tepkisi çok daha yüksek olmaktadır. $\Gamma = 0$ 'dan $\Gamma = 10$ 'a kadar üst üste binmiş etkin portföy sınırları $\Gamma = 30$ için oldukça farklı bir patika izlemektedir. Belirsiz parametre sayısı ile beklenen getiri arasındaki ters yönlü ilişki burada da görülmektedir. Sonuçta yatırım yapılabilir hisse senedi uzayındaki hisselerin belirsizlik oranları arttıkça beklenen ortalama portföy getirisi düşecektir. $\Gamma = 10$ 'a kadar olan portföylerin ortalama beklenen getiri oranı maksimum %62 civarındayken, belirsizlik arttıkça bu oran önce %42 seviyesine daha sonra %20 seviyesine düştüğü görülmektedir. Zira $\Gamma = 56$ seçildiğinde etkin sınırın daha da düştüğü grafikten anlaşılmaktadır. Bölüm girişinde $\Gamma = 0$ ve $\Gamma = 56$ durumlarının gerçekte çok rastlanılan durumlar olmadığı açıklanmıştı. Çünkü yatırım yapılabilecek hisselerin tamamının yatırım döneminde beklenen getiriden daha düşük bir getiri sağlaması beklenmezken, yatırım yapılan tüm hisselerin çok iyi getiri getirmesi de olası değildir. Bazı hisseler beklenen getirinin altında, bazı hisseler beklenen getirinin üstünde, bazı hisseler de beklentiye paralel getiri sağlayacaktır. Ama her ne şekilde olursa olsun robust optimizasyon yöntemiyle, klasik ortalama varyans modelinden elde edilebilecek kadar getiri elde etmek mümkündür. Ayrıca robust optimizasyon yöntemiyle elde edilmiş çözüm, belirsizlik beklentilerin biraz üstünde olsa dahi optimal kalmaya devam edecektir.

Portföy beklenen ortalama getiri oranlarıyla gerçek bir yatırım sürecinin sonunda elde edilecek getiri oranları aynı şeyi ifade etmez. Oluşturulan portföy gerçek bir yatırımın sürecinde nasıl bir getiri sağlayacağı çoğu zaman portföy beklenen ortalama getirisinden daha önemlidir. Sonuçta teorik olarak oluşturulan portföylerin gerçek yatırım sürecinde de ortalama piyasa getirisinin üzerinde bir getiri getirmesi beklenir.



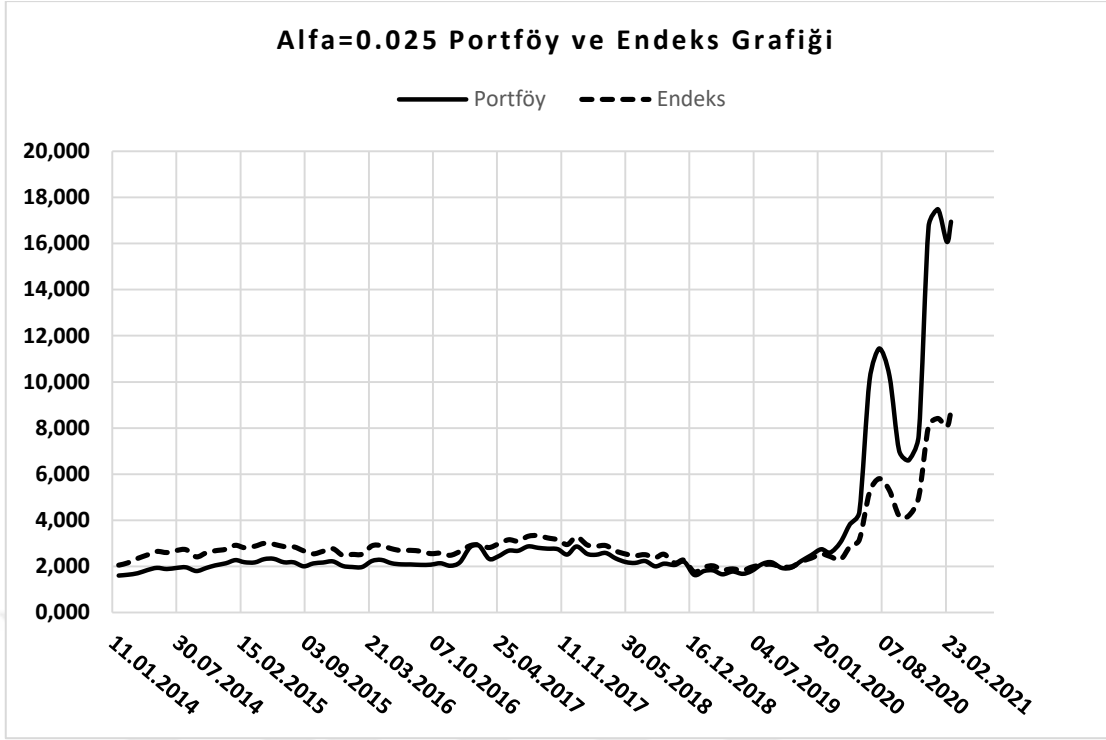
Şekil 19. Ortalama ağırlıklı portföy ve eşit ağırlıklı endeks grafiği

Şekil 19 robust portföylerin ortalama ağırlıkları alınarak oluşturulan ve eşit ağırlıklı portföyün grafiğini göstermektedir. Robust portföyler $\Gamma = 0$ ve $\Gamma = 56$ arasında olmak üzere 20 farklı gama değeri ve 6 farklı güven düzeyi için toplam 120 farklı portföyü içermektedir. Bütün portföylerin ağırlıklarının ortalaması alınarak oluşturulmuş portföy ile eşit ağırlıklara sahip ($1/56=0.01786$) portföyün zaman içindeki değerleri incelendiğinde, robust portföyün değeri yaklaşık olarak 2.00 ile başlamış ve yatırım dönemi sonunda 6.628 portföy değerine ulaşmıştır. Bu dönemde %230 değer kazanmıştır. Eşit ağırlıklı oluşturulan portföyün ise aynı dönemde değeri 2.00'dan 8.70'e yükselmiştir. Eşit ağırlıklı portföyün bu dönemdeki değeri ortalama %325 oranında artış göstermiştir. Bu oranlar Covid-19 pandemisini içerecek şekilde, yani 2021 yılı başına kadarki süreyi kapsamaktadır. Dikkat edilirse robust portföy pandemi başlangıcı olan Mart 2020'ye kadar hep eşit ağırlıklı portföyün üzerinde kalmıştır. Pandemi döneminde ise eşit ağırlıklı portföyün yükselme hızı daha fazladır.



Şekil 20. Alfa=0.01 için ortalama ağırlıklı portföy ve eşit ağırlıklı endeks grafiği

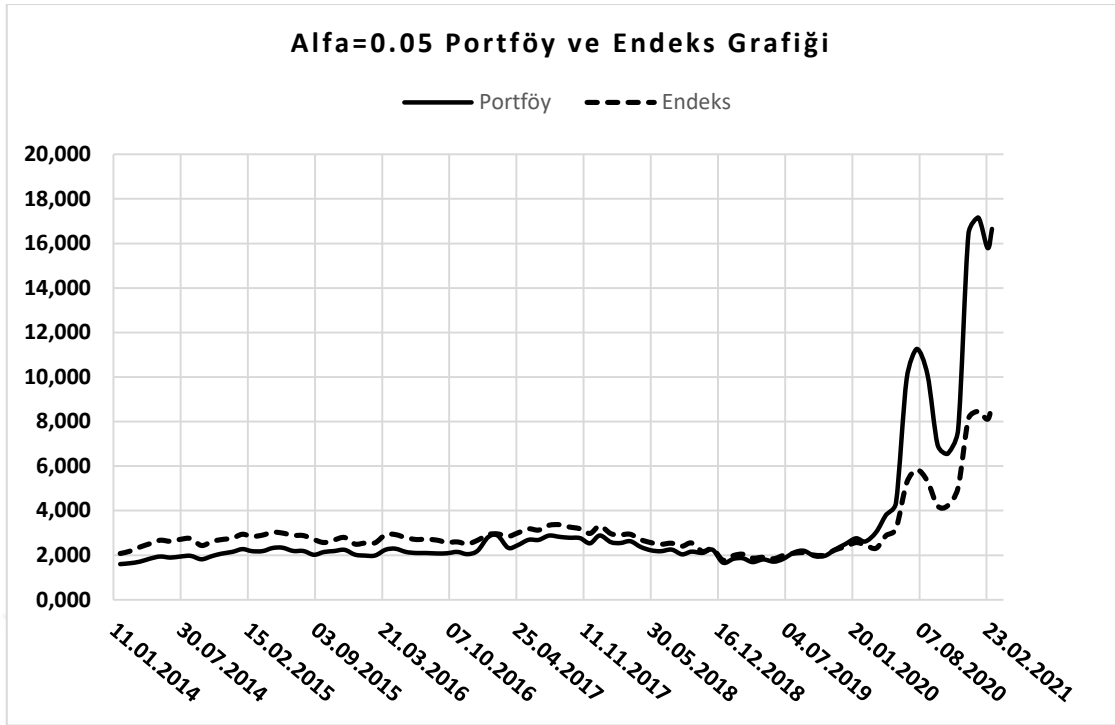
Yukarıdaki grafik 20 farklı gama değeri için güven düzeyinin %99 olduğu portföylerin ortalama ağırlıklarıyla oluşturulmuş portföy ile eşit ağırlıklı portföyün grafiğini göstermektedir. Eşit ağırlıklı portföy bu dönemde yaklaşık %325 oranında değerlendirirken, %99 güven düzeyiyle elde edilen portföy aynı dönemde %950 (yıllık ortalama %130) oranında değer kazanmıştır. Bir kere daha ifade edilmelidir ki model robust portföy, $\Gamma = 0$ 'dan $\Gamma = 56$ 'ya kadar alfanın 0.01 olduğu 20 portföyün ağırlıklarının ortalaması alınarak oluşturulmuştur. Yani bu portföyün ağırlıkları $\Gamma = 0$ gibi en iyimser durumu da içermektedir, $\Gamma = 56$ gibi en kötümser durumu da içermektedir. Yatırımcının veya araştırmacının beklentisine bağlı olarak, söz gelimi $\Gamma = 20$ olması bekleniyorsa, güven düzeyinin %99 ve $\Gamma = 20$ olduğu portföye gidip sadece ilgili portföy ağırlıkları kullanılabilir.



Şekil 21. Alfa=0.025 için ortalama ağırlıklı portföy ve eşit ağırlıklı endeks grafiği

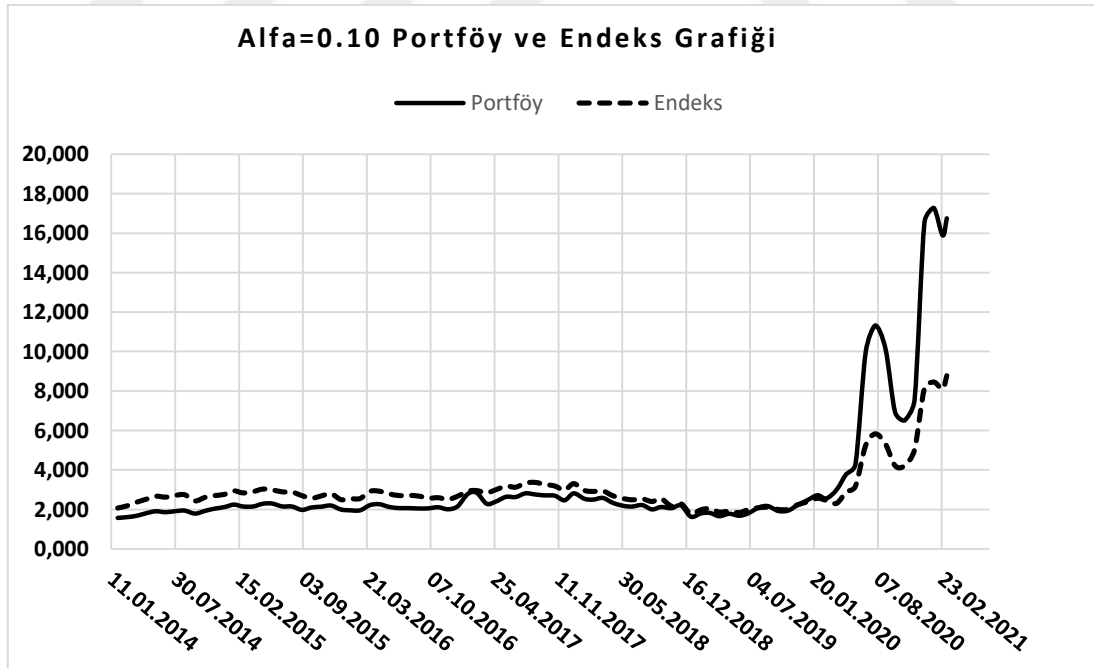
Şekil 21 güven düzeyinin %97.5 olduğu (alfa=0.025) ortalama portföy ve eşit ağırlıklı portföyün (endeks) grafiğini göstermektedir. Model portföyün değeri yatırım dönemi başında 1.60 iken yatırım dönemi sonunda 16.95 değere ulaşmıştır. Yani tüm dönem boyunca yaklaşık %950 oranında değer kazanmıştır. Bu da yıllık ortalama %132 gibi bir büyüme oranına denk gelmektedir. Eşit ağırlıklı portföy ise tüm yatırım döneminde %325 oranında artmıştır. Yani model portföyler, endeksten yaklaşık olarak %630 daha fazla değer kazanmıştır. Başka bir ifadeyle model portföyler yıllık ortalama %86 daha iyi getiri getirmiştir.

Benzer değerlendirme oranları güven düzeyinin %95 olduğu portföylerde de gerçekleşmiştir. Aşağıdaki grafik eşit ağırlıklı portföy ile güven düzeyinin %95 olduğu portföylerin ortalamasıyla oluşturulmuş model portföy grafiğini göstermektedir. Buna göre robust portföyün değeri yatırım dönemi başında 2.00'dan daha düşükken, yatırım dönemi sonunda yaklaşık olarak %940 değer kazanarak 17.00 seviyesine kadar yükselmiştir. Yani yıllık ortalama %129 oranında değer kazanmıştır. Aynı dönemde eşit ağırlıklı portföy yıllık ortalama %45.6 oranında değer kazanmıştır. Robust portföy piyasa ortalama getirisine göre yaklaşık 3 kat değerlendirilmiştir.



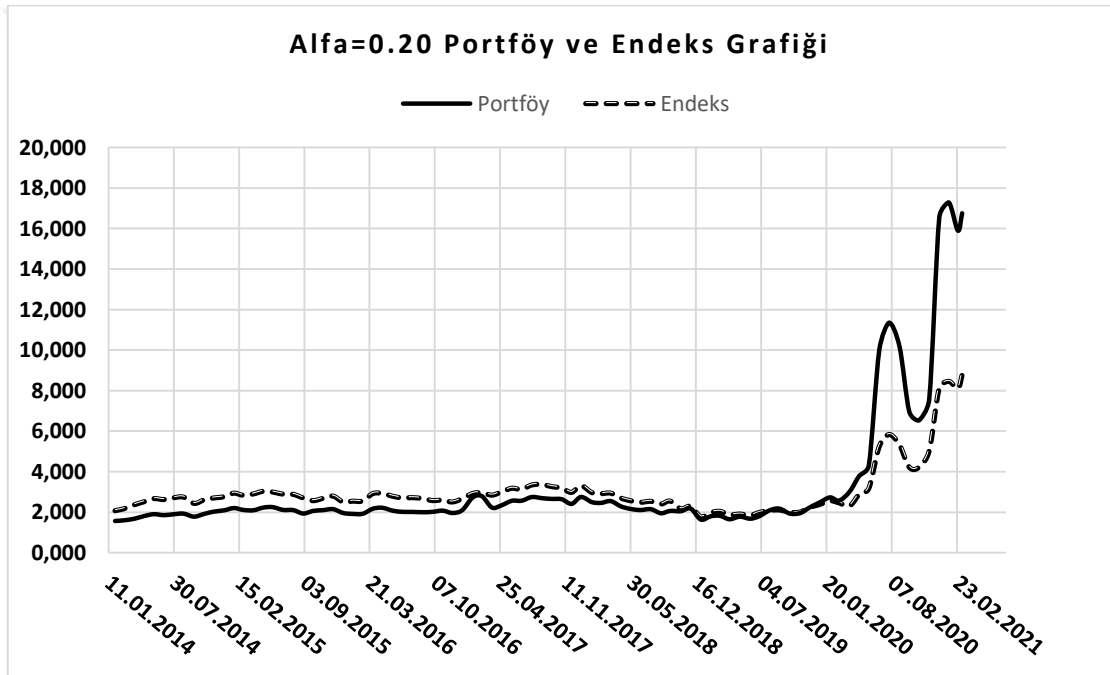
Şekil 22. Alfa=0.05 için ortalama ağırlıklı portföy ve eşit ağırlıklı endeks grafiği

Sadece pandemi öncesi değerlendirme oranları değerlendirildiğinde de robust portföyün değerlendirme oranı eşit ağırlıklı portföyün değerlendirme oranından yüksektir.



Şekil 23. Alfa=0.10 için ortalama ağırlıklı portföy ve eşit ağırlıklı endeks grafiği

Hisse senetleri ortalamasının %90 güven düzeyiyle dalgalanmasına izin veren robust portföyün zaman içindeki değeri Şekil 23'te verilmiştir. %95 güven düzeyiyle oluşturulan robust portföylerle %90 güven düzeyiyle oluşturulan robust portföylerin değeri oranları neredeyse aynıdır. Buradan anlaşılacağı üzere güven düzeyini %95'den %90'a düşmek, portföy değeri oranları açısından neredeyse hiçbir kayba neden olmamaktadır. Yatırım döneminin başından sonuna kadar robust portföy toplamda %966 oranında değeri kazanmıştır ki bu oran yıllık ortalama %133 civarında bir portföy büyümesi anlamına gelmektedir. Pandemi başlangıcına kadar değerlendirildiğinde ise robust portföy yaklaşık %91 oranında büyümüşken, eşit ağırlıklı portföy aynı dönemde sadece %11.5 oranında büyümüştür.

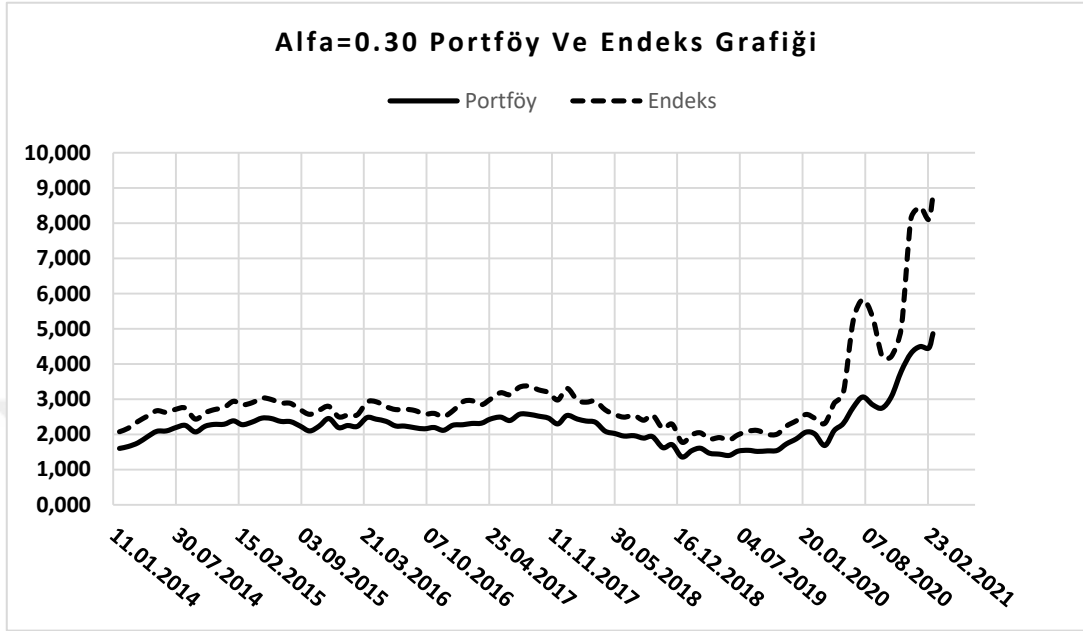


Şekil 24. Alfa=0.20 için ortalama ağırlıklı portföy ve eşit ağırlıklı endeks grafiği

Bir diğer güven düzeyi %80'dir. Bu güven düzeyi için de benzer sonuçlar görülmektedir. Analiz döneminin başında robust portföyün piyasa değeri, eşit ağırlıklı portföyün piyasa değerinin altındayken, dönem sonunda robust portföy çok daha fazla değeri kazanmıştır. Araştırmacı veya yatırımcı açısından güven düzeyi düşse bile %90 güven düzeyiyle oluşturulan portföy kadar getiri sağlandığına göre güven düzeyini düşürmek gereksizdir.

Son olarak güven düzeyinin %70 olduğu robust portföy değeri analizleri aşağıdaki grafikte verilmiştir. %70 oldukça düşük bir güven düzeyidir. Burada hisse

senetlerinin belirsizlik kümesi dahilinde beklenen ortalama getiriden sapması ancak %70 oranında garanti altına alınmaktadır. Hisse senetlerine ilişkin düşük güven düzeyi, portföy değerlendirme oranlarına etkisi önemli midir?



Şekil 25. Alfa=0.30 için ortalama ağırlıklı portföy ve eşit ağırlıklı endeks grafiği

Yukarıdaki grafiğe göre güven düzeyi %70'e düştüğünde eşit ağırlıklı portföy, robust portföyden daha iyi değerlendirme oranı yakalamıştır. Bu güven düzeyi için robust portföyün piyasa değeri hiçbir dönemde eşit ağırlıklı portföyün piyasa değerini geçememiştir. Söz konusu dönemde robust portföyün yatırım dönemi başlangıcında 1.59 olan piyasa değeri yatırım dönemi sonunda %204 artarak 4.86 değerine ulaşmıştır. Aynı dönemde eşit ağırlıklı portföy yaklaşık %330 oranında değer kazanmıştır.

Son olarak aşağıdaki tablo, tüm gama ve alfa değerlerine ilişkin portföylerin ortalama yıllık değerlendirme oranlarını özetlemektedir. Analiz dönemi boyunca eşit ağırlıklı portföy yıllık ortalama %44.60 oranında getiri sağlamıştır. Yatırım dönemi başında eşit ağırlıklı portföye yapılan her 1 Türk Lirası bir yıl sonra ortalama %44.60 oranında değer kazanmıştır. Portföy hesaplamalarında enflasyon oranları dikkate alınmadığı için yaşanan artışlar “nominal getiriyi” ifade etmektedir. Reel getiri için enflasyon oranlarının toplam getirilerden düşürülmesi gerekmektedir. Söz gelimi, analiz dönemi boyunca enflasyon oranı yıllık ortalama %11.496 olarak gerçekleşmiştir. Buna göre $\%44 \times (0.88504) = \%38.941$ reel getiri elde edilmiştir.

Tablo 9.

Gama ve Alfaya Göre Portföylerin Yıllık Ortalama Değerlenme Oranları

Değer.		Endeks		Değer.		Değer.		Değer.	
Gama	Oranı			Gama	Oranı			Gama	Oranı
Gama=0	51.64%			Gama=1	51.64%			Gama=2	51.64%
Gama=1		Gama=5		Gama=9		Gama=25		Gama=45	
Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı
0.01	59.24%	0.01	36.49%	0.01	26.76%	0.01	24.31%	0.01	20.26%
0.025	51.06%	0.025	33.62%	0.025	39.33%	0.025	26.90%	0.025	24.92%
0.05	51.12%	0.05	37.58%	0.05	27.11%	0.05	27.32%	0.05	14.83%
0.10	51.12%	0.10	36.34%	0.10	33.98%	0.10	26.85%	0.10	24.70%
0.20	51.12%	0.20	38.21%	0.20	36.79%	0.20	27.86%	0.20	33.70%
0.30	51.06%	0.30	29.37%	0.30	28.45%	0.30	21.73%	0.30	23.97%
Gama=2		Gama=6		Gama=10		Gama=30		Gama=50	
Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı
0.01	41.72%	0.01	36.62%	0.01	29.91%	0.01	22.04%	0.01	34.80%
0.025	41.70%	0.025	36.60%	0.025	28.35%	0.025	24.41%	0.025	38.15%
0.05	41.70%	0.05	38.00%	0.05	39.38%	0.05	24.33%	0.05	27.73%
0.10	41.80%	0.10	36.71%	0.10	33.02%	0.10	24.66%	0.10	13.98%
0.20	39.94%	0.20	36.43%	0.20	26.88%	0.20	26.37%	0.20	25.71%
0.30	42.46%	0.30	29.15%	0.30	28.18%	0.30	21.80%	0.30	32.12%
Gama=3		Gama=7		Gama=15		Gama=35		Gama=56	
Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı
0.01	39.34%	0.01	38.47%	0.01	27.29%	0.01	23.21%	0.01	24.00%
0.025	40.45%	0.025	50.19%	0.025	27.89%	0.025	21.94%	0.025	36.97%
0.05	40.19%	0.05	29.23%	0.05	27.29%	0.05	24.24%	0.05	38.48%
0.10	37.17%	0.10	34.54%	0.10	27.01%	0.10	23.87%	0.10	12.35%
0.20	36.60%	0.20	27.69%	0.20	27.01%	0.20	20.24%	0.20	34.85%
0.30	36.00%	0.30	28.32%	0.30	22.24%	0.30	20.24%	0.30	23.70%
Gama=4		Gama=8		Gama=20		Gama=40			
Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı	Alfa	Değer. Oranı		
0.01	35.20%	0.01	39.08%	0.01	23.15%	0.01	19.19%		
0.025	36.43%	0.025	33.45%	0.025	26.93%	0.025	31.09%		
0.05	38.18%	0.05	28.02%	0.05	26.90%	0.05	19.83%		
0.10	34.35%	0.10	27.98%	0.10	25.75%	0.10	30.77%		
0.20	34.15%	0.20	27.81%	0.20	27.74%	0.20	36.34%		
0.30	34.89%	0.3	27.95%	0.30	21.81%	0.30	23.05%		

Enflasyon oranından arındırılmış getiri hesabı yukarıda yapılmıştır. Tabii ki enflasyondan arındırılmış getiri oranı harcanabilir getiri değildir. Gayrimenkul yatırımından elde edilen gelir %10 stopaj vergisine tabidir. Dolayısıyla portföyden elde edilmiş getiriden enflasyondan sonra stopaj vergisinin de düşürülmesi gerekmektedir. Analiz aşamasında, her bir hisse senedinden aynı enflasyon oranlarını düşürmek gerektiğinden, tabloda özetlenen portföylerin ağırlıkları bu hesaplamadan etkilenmeyecektir. Başka bir ifadeyle her bir hisse senedinden söz gelimi %10 enflasyon oranını düşürmek, portföyün hisse kombinasyonu açısından hiçbir farklılık oluşturmaz. Sadece portföy beklenen yıllık getiri oranı yukarıda bulduğumuz getirilerden %10 daha düşük hesaplanır ki bu da portföy yıllık ortalama getirisinin hesaplanmasından sonra enflasyon oranının düşürülmesiyle aynı anlama gelmektedir. Optimizasyon temelli portföyler hisse senetleri arasındaki korelasyonları (korelasyonlar enflasyondan etkilenmez) dikkate alarak maksimum getiriyi sağlamaya çalıştığı için tüm değişkenleri aynı sabit ile çarpmak veya bölmek portföy ağırlıklarında herhangi bir değişikliğe neden olmaz.

Yatırımcı yatırım süresinin sonunda beklenen getirisini maksimum yapacak portföyü seçecektir. Uygulamada belirsiz parametre sayısı 0 ile 56 arasında değişen 20 farklı şekilde seçilmiştir. Bootstrap belirsizlik setlerinin güven düzeyleri de %99 ile %70 arasında değişen 6 farklı şekilde seçilmiştir. Sadece bir güven düzeyiyle çalışmak mümkün olsa da portföy getirilerinin güven düzeylerine vereceği tepkileri görmek amacıyla 6 farklı düzey seçilmiştir. Bize göre %99 veya %90 güven düzeylerinden biriyle çalışmak yeterlidir. Fakat, ifade ettiğimiz gibi portföy getirilerinin güven düzeylerine vereceği tepkileri görmek amacıyla güven düzeyleri farklılaştırılmıştır.

Optimizasyon yöntemleri yardımıyla oluşturulan portföy modellerinin amaç fonksiyonları, araştırmacının tercihinin göre değişiklik göstermektedir. Son dönemde amaç fonksiyonu olarak VaR ve CVaR kullanan birçok çalışma mevcuttur. Bunun dışında bir takım robust amaç fonksiyonu kullanan çalışmalar da mevcuttur. Fakat kullanılan amaç fonksiyonlarının birinin diğerinden üstün olduğunu söylemek zordur. Çünkü belli veri döneminde bir fonksiyon daha iyi sonuç verirken başka bir veri döneminde başka bir fonksiyon daha iyi sonuç vermektedir. Optimizasyonu yapılacak amaç fonksiyonun seçimi tamamen araştırmacının veya yatırımcının yatırım beklentisine hizmet etmelidir. Örneğin yatırımcı beklenen getiri maksimizasyonu yerine bütçesindeki kayıpların minimizasyonu ile ilgileniyorsa amaç fonksiyonu VaR veya CVaR olan modeli seçmelidir. Fakat getiri maksimizasyonu ile risk minimizasyonu

aynı anda yapmak istiyorsa Sharpe oranını kullanmalıdır.

Tezde kullanılan robust model, belirsizliğin sadece amaç fonksiyonunda olduğunu varsaymaktadır. Model biraz değiştirilip hem amaç fonksiyonunun hem de kısıtların belirsizlik içermesi şeklinde değiştirilebilir. Ayrıca hisse senedi dağılım fonksiyonlarının her dönem aynı kalmayacağı düşünülürse varyans kovaryans matrisinin de değişmesine izin verilebilir. Muhakkak ki bu modeller gerçeğe daha yakındır ve piyasaları daha iyi temsil etme potansiyelleri vardır. Fakat belirtilmelidir ki, gerçek piyasalara ne kadar yakın bir model oluşturulursa çözümü de o derece zor olacaktır. Zira finansal piyasalar çok karşamşık ve iç içe geçmiş etkileri barındırmaktadır.



BÖLÜM VII

SONUÇ

Yatırımcılar portföy tercihi yaparken riskinin düşük beklenen ortalama getirisinin yüksek olduğu yatırım araçlarına yönelmektedir. Yatırımcıların tasarruflarını değerlendirdiği piyasaların başında menkul kıymetler piyasası gelmektedir. Menkul kıymetler piyasası tasarruf sahiplerine yatırım fırsatları sağlayan likititesi yüksek bir piyasadır. Bu piyasalar yüksek getiri potansiyeline sahip olmalarının yanında riskli piyasalardır. Yatırımcı açısından temel amaç, yatırım getirisini maksimum yapacak varlıkların tahsisini belirlemektir. Yatırımcı getirisini maksimum düzeye çıkarmak isterken üstlendiği riskin de minimum olmasını arzu eder. Dolayısıyla oluşturulan portföydeki varlık tahsisi, yatırım riskini dağıtma noktasında cevap bulunması gereken temel problemidir.

Menkul kıymetler, likiditesi yüksek olmasına rağmen belli miktarda risk barındıran varlıklardır. Modern portföy teorisi yatırımcının beklentisine paralel olarak, getiri maksimizasyonu ile risk minimizasyonunu aynı anda gerçekleştirmeyi amaçlamaktadır. Fakat iki amacı da aynı anda gerçekleştirmek oldukça zordur. Zira menkul kıymetlerin oynaklığı yüksektir ve beklenen getirilerinin tahmin edilmesi bir dizi zorluk içermektedir. Hem tahmin hataları hem de piyasadan kaynaklı sapmaları içeren tahmin değerlerini kesin veya biricik kabul etmek portföy optimizasyonunu çoğu zaman geçersiz kılmaktadır. Yatırım dönemi boyunca bir varlığın beklenen değerini sabit kabul etmektense, belli bir aralıkta değerler alabileceğini varsaymak daha gerçekçi bir yaklaşımdır. Böylelikle belli sınırlar içinde varlığın beklenen getiri tahminindeki hatalar bertaraf edilirken, portföy optimizasyonu probleminin çözümü de garanti altına alınmaktadır.

Robust optimizasyon modelleri, varlıklara ilişkin yatırımcının karşılaştığı tahmin hatlarını ve sapmalardan kaynaklı model hatalarını minimum düzeye indirmektedir. Oluşturulan belirsizlik setleriyle optimizasyon yapılmadan önce belirsizlikler modele dahil edilmektedir. Böylelikle optimizasyon probleminin çözümü azu edilen olasılık düzeyiyle garanti altına alınmaktadır. Tezde kullandığımız robust optimizasyon modeli belli bir düzeyde çözüm garantisi verirken, varlıkların belirsizlik setlerini kontrol etmemize de olanak tanımaktadır. Böylelikle modelin belirsizliğe karşı muhafazakarlığı, yatırımcının beklentisine paralel olarak kontrol edilebilmektedir.

Tezde kullanılan modelin avantajları, bootstrap yönteminin sağladığı avantajlarla birleştirilmiştir. Belirsizlik setlerinin doğru belirlenmesi modelin güvenilirliğini arttıran bir unsurdur. Bootstrap yöntemi tek bir örneklemden yola çıkarak anakütleyle ilişkin çıkarım sağladığı için tezde kullanılan robust modelin güvenilirliğini bir kat daha arttırmıştır. Öyleki modelin yapısı gereği belirsizlik setlerini kontrol etme imkanına sahipken, bootstrap yönteminin modele entegre edilmesiyle belirsizlik setlerinin güven düzeylerini de kontrol etmek mümkün hale gelmiştir. Uygulamada belirsizlik setleri %99, %97.5, %95, %90, %80 ve %70 olmak üzere altı farklı güven düzeyi için oluşturulmuştur. Ayrıca belirsiz parametre sayısı sıfırdan 56'ya kadar kademeli olarak 20 farklı şekilde modele dahil edilmiştir. Sonuçta uygulama aşamasında 120 farklı portföy optimizasyonu gerçekleştirilmiştir. Yatırımcı veya araştırmacı, beklentisine uygun olan modeli belirleyip modelin ağırlıklarını kullanabilmektedir. Riske karşı duyarlı olan bir yatırımcı belirsizlik setleri için yüksek bir olasılık düzeyini ve belirsiz parametre sayısını yüksek seçerek beklenen getirisini maksimum yapan portföye yatırım yapabilir. Riske daha az duyarlı olan bir yatırımcı ise düşük güven düzeyi ve düşük belirsiz parametre sayısına sahip bir portföye yatırım yapabilir. Bu yönüyle tezde kullanılan model yatırımcıya oldukça esnek bir portföy yelpazesi sunmaktadır.

Varlıkların gelecek tahminini yapılırken doğal olarak geçmiş dönem rezlizasyonları kullanılmaktadır. Amaç, gelecekte piyasa ortalama getirisinin üzerinde bir getiri oranı sağlamaktır. Başka bir ifadeyle piyasayı yenmektir. Dolayısıyla önerilen portföylerin sadece beklenen getirileri maksimum yapması yetmemektedir. Model portföyler gerçek verilerle sınıandığında portföy değerini piyasa getirisinin üzerine çıkarmalıdır. Tablo 9'daki sonuçlara göre önerilen model portföylerin önemli bir kısmı piyasa ortalama getirisinin üzerinde getiri sağlamıştır. Yatırımcının riske karşı aşırı duyarlı olduğu kimi durumlarda portföyün değerlenme oranı piyasa getirisinin altında kalmıştır. Bu sonuç riske karşı duyarlı yatırımcıların getirilerinin bir kısmından vazgeçmesi gerektiğini göstermektedir. Söz gelimi belirsiz parametre sayısının düşük olduğu durumlarda portföylerin yıllık ortalama değerlenme oranı yaklaşık olarak %51 dolayındadır. Bu dönemde endeksin ortalama değerlenme oranı yıllık %44.60 olarak gerçekleşmiştir. Yani önerilen portföyler yıllık ortalama %6 daha fazla değerlenmiştir. Bu gruptaki portföyler riski iştahı yüksek yatırımcıların tercih edebileceği portföylerdir. Fakat riske karşı duyarlılığın arttığı, yüksek belirsiz parametre sayısına sahip portföylerde değerlenme oranları daha düşük seviyelerde gerçekleşmektedir.

Portföydeki tüm varlıkların en kötü getiriye sahip olacağını varsayan modelin önerdiği portföy yıllık ortalama %28 değer kazanmıştır. Bu oran, yatırımcının en kötü senaryoda elde edeceği ortalama getiri oranıdır. Bu senaryonun gerçekleşme olasılığı düşüktür. Çünkü bir yıl boyunca tüm varlıkların öngörülen belirlilik setleri dahilinde en kötü beklenen getiri sağlaması oldukça düşük bir ihtimaldir. Bazı sektörler hisseleri kötü getiri getirirken bazı sektörler tam tersi yüksek getiri sağlayacaktır.

Tablo 9'daki sonuçlar yatırımcının, çözümün robust olmasıyla beklenen getiri arasında bir seçim yapmak zorunda olduğunu ortaya koymaktadır. Yatırım yapılan portföyün her şartta feasible kalmasını isteyen yatırımcı kendini tüm olası realizasyonlara karşı korumaktadır. Fakat bunun karşılığında beklenen getirisinin bir kısmından vazgeçmek zorundadır. Amaç fonksiyonu değeri geçmiş değerlerin ortalaması üzerinden elde edilmektedir. İyi bir model örneklem dönemi dışında da piyasa ortalama beklenen getirisinin üzerinde getiri sağlamalıdır. Uygulamada analizler, Ocak 2014 ile Mart 2021 dönemini kapsamaktadır. 1 Nisan 2021 tarihinden 31 Eylül 2021 tarihine kadarki dönem temel alındığında, tavsiye edilen modellerin ortalama getiri oranları piyasa getiri oranlarından yüksek hesaplanmıştır. Söz konusu dönemde belirsizlik setlerinin %99 güven düzeyindeki model portföylerin ortalama getiri oranı %173.54 olarak gerçekleşmiştir. Bu dönemde BIST100 %69.7871, BIST50 %59.67 ve BIST30 %41.19 değer kazanmıştır. Aynı dönemde eşit ağırlıklı portföy %167.10 oranında değer kazanmıştır. %97.5, %95, %90, %80 ve %70 güven düzeyine sahip belirsizlik setleriyle oluşturulan portföyler ise bu dönemde sırasıyla %173.95, %176.01, %173.16, %170.94 ve %163.71 getiri sağlamıştır. Endeks getirileri göz önüne alındığında tüm güven düzeyleri için model portföyler endeks getirilerinin çok üstünde getiri sağlamıştır. Eşit ağırlıklı portföy ile kıyaslandığında ise sadece %70 güven düzeyiyle oluşturulmuş portföylerin ortalama getiri oranı %167.10'nun altında kalmıştır. Diğer tüm güven düzeyleri için model portföyler daha yüksek getiri sağlamıştır. Yani modeller örneklem dönemi dışında da piyasa getirisinden yüksek getiri yakalamayı başarmıştır.

Analiz sonuçları bir bütün olarak değerlendirildiğinde robust portföy modellerinin belirsiz parametre sayısına ve belirsizlik setlerinin güven düzeylerinden etkilendiği söylenebilir. Belirsiz parametre sayısı arttıkça amaç fonksiyonu değerinde bir düşüş gözlenmektedir. Ayrıca varlıklara ilişkin belirsizlik setlerinin güven düzeylerindeki değişiklik de beklenen getiri oranlarını etkilemektedir. Fakat her iki durumda da robust portföy modellerinin önerdiği portföyler endeks getirisinden daha

yüksek ortalama getiri sağlamıştır. Değerlenme oranları da belirsizlik setlerinin güven düzeyi ve belirsiz parametre sayısından etkilenmektedir. Belirsiz parametre sayısı bir seçildiğinde portföy değerlendirilmesi %59.24 olarak hesaplanırken, bu oran belirsiz parametre sayısının 56 olması durumunda %12.35 düzeyine kadar düşmüştür.

Sonuç olarak robust optimizasyonla oluşturulan portföyler hem yüksek getiri sağlamıştır hem de tüm olası durumlar için geçerli çözüm üretmiştir. Belirsiz parametre sayısının sıfır olduğu ve 56 olduğu iki uç durumun gerçekleşmesi beklenen bir durum değildir. Portföy yeterince çeşitlendirildiği zaman iki uç duruma maruz kalma olasılığı da düşmektedir. Modeller kurulurken çeşitlendirmeyi sağlayacak kısıtlar modele dahil edildiği için bu risk ortadan kalkmıştır. Çünkü analiz yapılırken modele dahil edilen bir sektöre maksimum yatırım oranı, aynı sektördeki hisselerle maksimum yatırım kısıtı, bazı sektörlerle yatırım yapma zorunluluğu kısıtları portföylerin her sektörden hisse barındırmasına ve tek bir hisseye gereğinden fazla ağırlık vermemesini sağlamıştır. Dolayısıyla bir sektördeki şirket hisselerinin tamamı düşük beklenen getiri sağlasa bile çeşitlendirme sayesinde diğer sektör hisselerinin bu düşüşü karşılaması olasıdır.

Optimizasyon probleminin çözümü olarak değerlendirildiğinde ise robust portföy modellerini ürettiği portföyler pandemi dönemindeki aşırı dalgalanmalara karşı dirençli sonuçlar üretmiş ve örneklem dışında da yüksek değerlendirme oranları sağlamıştır. Başka bir ifadeyle robust modellerin, parametrelerin belirsizlik durumlarını çözümden önce dikkate alıp bu doğrultuda çözüm yapması optimal noktanın feasible kalmasına yol açmıştır. Başka bir ifadeyle, varlıkların realizasyonundan neredeyse etkilenmeyen portföyler elde edilmiştir.

Piyasa getirisinin üzerinde getiri sağlama fikri bizi etkin piyasalar hipotezine götürmektedir. Etkin piyasalar hipotezine göre hisse senedi fiyatları tüm bilgileri fiyatlamıştır. Çünkü yeni bir bilgi çok hızlı bir şekilde piyasa aktörlerine ulaşmakta, fiyatlar kimsenin anormal kar yapmasına izin vermemektedir. Burada %70 güven düzeyi dışındaki portföyler piyasa getirisinden daha yüksek getiri sağlamıştır. Bir model kullanarak piyasa getirisinden yüksek getiri elde edildiği için Borsa İstanbul'un etkin çalışmadığı sonucuna gidebiliriz. Piyasayı yenmek olarak tabir edilen bu duruma etkin olmayan piyasa, kullanılan modelin gücü veya pandemi dönemindeki aşırı oynaklık sebep olmuş olabilir. Her ne sebeple olursa olsun önerilen modeller piyasanın ortalama getirisinden yüksek getiri oranları sağlamıştır. Pandemi dönemindeki aşırı oynak piyasalar ortalamanın üzerinde getiri sağlamış olabilir. Bu dönemde yabancı yatırımcıların borsadaki oranı düşüş göstermiştir. Ayrıca düşen işlem hacimleri, altın

gibi kriz dönemlerinin güvenli limanı olarak görülen yatırım araçlarına kanalize olan fonlar piyasanın etkin çalışmasına engel olmuş olabilir. Buradaki yorumlar sadece mevcut bilgiler ışığında çıkarım yapmaktır. Tabii ki bir piyasanın etkin çalışıp çalışmadığını tespit etmek için belli testlerin yapılması gerekmektedir.

Son olarak belirsizlik setlerinin sınır değerleri üzerine bir değerlendirme yapılmalıdır. Bootstrap veya başka bir yöntem, bir varlığın hangi aralıklar arasında değerler alacağı ancak belli bir olasılık ile bilinebilir. Örneğin %99 güven düzeyi, bir hisse senedi için 100 getirinin 99 tanesinin belirlediğimiz sınırlar içine düşeceğini söyler. Burada her 100 realizasyonun bir tanesi hala belirlediğimiz sınırın dışına düşebilir. Ayrıca insanlık tarihi boyunca belli dönemlerde pandemiler yaşanmış olsa bile 2019 yılında başlayan pandeminin piyasalara eşi görülmemiş bir etkisi olmuştur. Hiçbir model veya tahmin yönteminin bu gibi bir durumu öngörmesi veya modellemesi mümkün değildir. Dolayısıyla belli bir olasılıkla elde edilmiş belirsiz setinin sınırlarının dışına çıkma sıklığı artacaktır. Sonuç olarak, oluşturulan matematiksel modeller, kullanılan algoritmalar ve yöntemlerin tamamı belli bir olasılığa endeksili çalışmaktadır. Öngörülemeyen durumlar, etkisinin büyüklüğüne bağlı olarak en güçlü modeli bile geçersiz kılabilir.

KAYNAKÇA

- Agra, A., Christiansen, M., Hvattum, L. M., & Rodrigues, F. (2018). robust optimization for a maritime inventory routing problem. *Transportation Science*, 52(3), 509-525.
- Alem, D. J., & Morabito, R. (2012). Production planning in furniture settings via robust optimization. *Computers & Operations Research*, 39(2), 139-150.
- Alexander, G. J., & Baptista, A. M. (2004). A Comparison of VaR and CVaR constraints on portfolio selection with the mean-variance model. *Management Science*, 50, 1261–1273.
- Arditti, F. D., & Levy, H. (1977). Portfolio efficiency analysis in three moments: the multiperiod case. In *Financial Dec Making under Uncertainty*, 137-150. *Academic Press*.
- Atamtürk, A., & Zhang, M. (2007). Two-stage robust network flow and design under demand uncertainty. *Operations Research*, 55(4), 662-673.
- Azimli, A. (2020). Pricing the Common Stocks In an emerging capital market: comparison of the factor models. *Borsa Istanbul Review*, 20(4), 334-346.
- Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4), 769-805.
- Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (1999). Robust solutions of uncertain linear programs. *Operations Research Letters*, 25(1), 1-13.
- Ben-Tal, A., & Nemirovski, A. (2000). Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data. *Mathematical programming*, 88(3), 411-424.
- Berggrun, L., Cardona, E., & Lizarzaburu, E. (2019). extreme daily returns and the cross-section of expected returns: evidence from Brazil. *Journal of Business Research*, 102, 201-211.
- Bertrand, P. (2010). Another look at portfolio optimization under tracking-error constraints. *Financial Analysts Journal*, 66(3), 78-90.
- Bertsimas, D., & Sim, M. (2004). The Price of robustness. *Operations Research*, 52(1), 35-53.
- Bertsimas, D., & Thiele, A. (2006). A robust optimization approach to inventory theory. *Operations research*, 54(1), 150-168.

- Bertsimas, D., Gupta, V., & Kallus, N. (2018). Data-driven robust optimization. *Mathematical Programming*, 167(2), 235-292.
- Best, M. J. (2010). *Portfolio optimization*. CRC Press.
- Best, M. J., & Hlouskova, J. (2005). An algorithm for portfolio optimization with transaction costs. *Management Science*, 51(11), 1676-1688.
- Bhansali, V. (2008). Tail risk management. *The Journal of Portfolio Management*, 34(4), 68-75.
- Bickel, P. J., & Freedman, D. A. (1981). Some asymptotic theory for the bootstrap. *The Annals of Statistics*, 1196-1217.
- Black, F., & Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28-43.
- Brodie, J., Daubechies, I., De Mol, C., Giannone, D., & Loris, I. (2009). Sparse and stable Markowitz portfolios. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 106(30), 12267-12272.
- Buckley, I. R. C., Comezana, G., Djerroud, B., & Seco, L. U. I. S. (2003). Portfolio optimization for alternative investments. In *Seminario de Matematica Financiera Instituto*, 1-15. Unknown Publisher.
- Buckley, I., Saunders, D., & Seco, L. (2008). Portfolio optimization when asset returns have the gaussian mixture distribution. *European Journal of Operational Research*, 185(3), 1434-1461.
- Calafiore, G., & Campi, M. C. (2005). Uncertain convex programs: randomized solutions and confidence levels. *Mathematical Programming*, 102(1), 25-46.
- Campbell, J. Y., & Shiller, R. J. (1988). The dividend-price ratio and expectations of future dividends and discount factors. *The Review of Financial Studies*, 1(3), 195-228.
- Ceria, S., & Stubbs, R. A. (2006). Incorporating estimation errors into portfolio selection: robust portfolio construction. *Journal of Asset Management*, 7(2), 109-127.
- Chen, C., & Zhou, Y. S. (2018). Robust multiobjective portfolio with higher moments. *Expert Systems with Applications*, 100, 165-181.
- Chen, X., Sim, M., & Sun, P. (2007). A robust optimization perspective on stochastic programming. *Operations Research*, 55(6), 1058-1071.
- Chong, E. K., & Zak, S. H. (2004). *An introduction to optimization*. John Wiley & Sons.

- Cohen, M. H., & Natoli, V. D. (2003). Risk and utility in portfolio optimization. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 324(1-2), 81-88.
- Cornuejols, G., & Tütüncü, R. (2006). *Optimization Methods in Finance* (Vol. 5). Cambridge University Press.
- Dai, Z., & Kang, J. (2021). Some new efficient mean–variance portfolio selection models. *International Journal of Finance & Economics*.
- Dai, Z., & Wang, F. (2019). Sparse and robust mean–variance portfolio optimization problems. *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, 523, 1371-1378.
- Delage, E., & Ye, Y. (2010). Distributionally robust optimization under moment uncertainty with application to data-driven problems. *Operations research*, 58(3), 595-612.
- DeMiguel, V., & Nogales, F. J. (2009). Portfolio selection with robust estimation. *Operations Research*, 57(3), 560-577.
- Deng G, Dulaney T, McCann C, Wang O (2013) Robust Portfolio optimization with value-at-risk-adjusted sharpe ratios. *Journal of Asset Management* 14(5),293–305.
- Dudley, R. M. (2014). *Uniform Central Limit Theorems* (Vol. 142). Cambridge University Press.
- Efron, B. (1992). *Bootstrap methods: another look at the Jackknife*. In *Breakthroughs in Statistics*, 569-593. Springer, New York, NY.
- El Ghaoui, L., & Lebret, H. (1997). Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on matrix analysis and applications*, 18(4), 1035-1064.
- El Ghaoui, L., Oustry, F., & Lebret, H. (1998). Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1), 33-52.
- El-Hassan, N., & Kofman, P. (2003). Tracking error and active portfolio management. *Australian Journal of Management*, 28(2), 183-207.
- Elton, E. J., & Gruber, M. J. (1997). Modern portfolio theory, 1950 to date. *Journal of Banking & Finance*, 21(11), 1743-1759.
- Embrechts, P., & Schmidli, H. (1994). Modelling of extremal events in insurance and finance. *Zeitschrift für Operations Research*, 39(1), 1-34.

- Eom, C. (2020). Risk characteristic on fat-tails of return distribution: an evidence of the korean stock market. *Asia-Pacific Journal of Business*, 11(4), 37-48.
- Epaphra, M. (2016). Modeling exchange rate volatility: application of the GARCH and EGARCH Models. *Journal of Mathematical Finance*, 7(1), 121-143.
- Esch, D. N. (2010). Non-normality facts and fallacies. *Journal of Investment Management*, 8.
- Eugene, F., & French, K. (1992). The cross-section of expected stock returns. *Journal of Finance*, 47(2), 427-465.
- Evans, J. L., & Archer, S. H. (1968). Diversification and the reduction of dispersion: an empirical analysis. *The Journal of Finance*, 23(5), 761-767.
- Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A., & Focardi, S. M. (2007). *Robust portfolio optimization and management*. John Wiley & Sons.
- Fama, E. F. (1965). Portfolio analysis in a stable paretian market. *Management Science*, 11(3), 404-419.
- Fama, E. F. (1975). Multiperiod consumption-investment decisions. *Stochastic Optimization Models in Finance*, 389-400.
- Fama, E. F., & French, K. R. (1992). The Cross-section of expected stock returns. *the Journal of Finance*, 47(2), 427-465.
- Fama, E. F., & French, K. R. (1993). French, 1993, Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, 33(1), 3-56.
- Fang, S. C., & Puthenpura, S. (1993). *Linear optimization and extensions: theory and algorithms*. Prentice-Hall, Inc..
- Finnet Hisse Expert. (Erişim Tarihi: 15 Nisan 2021) Web Adresi: <https://www.finnet.com.tr/FinnetStore/Tr/Urun/AeHisseExpert>
- Frey, R., Gabih, A., & Wunderlich, R. (2013). Portfolio optimization under partial information with expert opinions: a dynamic programming approach. *arXiv preprint arXiv:1303.2513*.
- Fulton, L. V., & Bastian, N. D. (2019). Multiperiod stochastic programming portfolio optimization for diversified funds. *International Journal of Finance & Economics*, 24(1), 313-327.
- Geyer, A., Hanke, M., & Weissensteiner, A. (2009). A stochastic programming approach for multi-period portfolio optimization. *Computational Management Science*, 6(2), 187-208.

- Ghaoui, L. E., Oks, M., & Oustry, F. (2003). Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A Conic Programming Approach. *Operations Research*, 51(4), 543-556.
- Giannopoulos, K., Clark, E., & Tunaru, R. (2005). Portfolio selection under VaR constraints. *Computational Management Science*, 2(2), 123-138.
- Goetzmann, W. N., Brown, S. J., Gruber, M. J., & Elton, E. J. (2014). Modern portfolio theory and investment analysis. *John Wiley & Sons*, 237.
- Goldfarb, D., & Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of operations research*, 28(1), 1-38.
- Golsefidi, A. H., & Jokar, M. R. A. (2020). A robust optimization approach for the production-inventory-routing problem with simultaneous pickup and delivery. *Computers & Industrial Engineering*, 143, 106388.
- Gong, X., Yu, C., Min, L., & Ge, Z. (2021). Regret theory-based fuzzy multi-objective portfolio selection model involving DEA cross-efficiency and higher moments. *Applied Soft Computing*, 100, 106958.
- Gonzaga, C. C. (1992). Path-following methods for linear programming. *SIAM Review*, 34(2), 167-224.
- Granito, M., & Walsh, P. (1978). Portfolio efficiency analysis in three moments-the multiperiod case: comment. *The Journal of Finance*, 33(1), 345-348.
- Green, R. C., & Hollifield, B. (1992). When will mean-variance efficient portfolios be well diversified?. *The Journal of Finance*, 47(5), 1785-1809.
- H. Markowitz (1952), *J. Finance* 7 (1), 71–99.
- Halldórsson, B. V., & Tütüncü, R. H. (2003). An interior-point method for a class of saddle-point problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 116(3), 559-590.
- Haugh, M. B., Kogan, L., & Wu, Z. (2006). Portfolio optimization with position constraints: an approximate dynamic programming approach. *Working Paper. Columbia University and MIT*.
- He, H., & Pearson, N. D. (1991). consumption and portfolio policies with incomplete markets and short-sale constraints: the infinite dimensional case. *Journal of Economic Theory*, 54(2), 259-304.
- Hillier, F. S., & Liebermann, G. J. (2014). *Operations Research*. Oldenbourg Wissenschaftsverlag.

- Huang, D., Zhu, S. S., Fabozzi, F. J., & Fukushima, M. (2008). Portfolio selection with uncertain exit time: a robust CVaR approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32(2), 594-623.
- Hubert, M., Debruyne, M., & Rousseeuw, P. J. (2018). Minimum covariance determinant and extensions. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics*, 10(3), e1421.
- Ibragimov, R. (2005). On efficiency of linear estimators under heavy-tailedness. *Harvard Institute of Economic Research Discussion Paper*, (2085).
- Itkin, D., & Larsson, M. (2020). Robust asymptotic growth in stochastic portfolio theory under long-only constraints. *arXiv preprint arXiv:2009.08533*.
- Jabr, R. A. (2020). Distributionally robust CVaR constraints for power flow optimization. *IEEE Transactions on Power Systems*, 35(5), 3764-3773.
- Ji, R., Lejeune, M., & Fan, Z. (2020). Distributionally robust portfolio optimization with STARR performance measure. *Available at SSRN 3542667*.
- Jobson, J. D., & Korkie, R. M. (1981). Putting markowitz theory to work. *The Journal of Portfolio Management*, 7(4), 70-74.
- Jobst, N. J., & Zenios, S. A. (2001). The tail that wags the dog: integrating credit risk in asset portfolios. *The Journal of Risk Finance*.
- Jorion, P. (1985). International portfolio diversification with estimation risk. *Journal of Business*, 259-278.
- Jorion, P. (2003). Portfolio optimization with tracking-error constraints. *Financial Analysts Journal*, 59(5), 70-82.
- Kang, Z., Li, X., & Li, Z. (2020). Mean-CVaR portfolio selection model with ambiguity in distribution and attitude. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 16(6), 30-65.
- Kang, Z., Li, X., Li, Z., & Zhu, S. (2019). Data-driven robust mean-CVaR portfolio selection under distribution ambiguity. *Quantitative Finance*, 19(1), 105-121.
- Kapsos M, Christofides N, Rustem B (2014) Worst-case robust omega ratio. *European Journal of Operational Research* 234(2), 499–507.
- Karmarkar, N. (1984, December). A new polynomial-time algorithm for linear programming. In *Proceedings of the Sixteenth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 302-311.
- Karoglu, M. (2010). Breaking down the non-normality of stock returns. *The European journal of finance*, 16(1), 79-95.

- Karush, W. (1939). Minima of functions of several variables with inequalities as side constraints. *M. Sc. Dissertation. Dept. of Mathematics, Univ. of Chicago*.
- Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 years of portfolio optimization: practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356-371.
- Koumou, G. B. (2020). Diversification and portfolio theory: a review. *Financial Markets and Portfolio Management*, 34, 267-312.
- Kraft, H., & Steffensen, M. (2013). A dynamic programming approach to constrained portfolios. *European Journal of Operational Research*, 229(2), 453-461.
- Kraus, A., & Litzenberger, R. H. (1976). Skewness preference and the valuation of risk assets. *The Journal of finance*, 31(4), 1085-1100.
- Lee, C. F. (1977). Functional form, skewness effect, and the risk-return relationship. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 55-72.
- Lewellen, J. (2014). The Cross section of expected stock returns. *Forthcoming in Critical Finance Review, Tuck School of Business Working Paper*, (2511246).
- Lhabitant, F. S. (2017). *Portfolio diversification*. Elsevier.
- Li, Y., Zhou, B., & Tan, Y. (2021). Portfolio optimization model with uncertain returns based on prospect theory. *Complex & Intelligent Systems*, 1-14.
- Lintner, J. (1969). The Valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets: a reply. *The Review of Economics and Statistics*, 222-224.
- Liu Y, Meskarian R, Xu H (2017) Distributionally robust reward-risk ratio optimization with moment constraints. *SIAM Journal on Optimization* 27(2), 957–985.
- Lobo, M. S., & Boyd, S. (2000). The Worst-case risk of a portfolio. *Unpublished manuscript. Available from <http://faculty.fuqua.duke.edu/%7Emlobo/bio/researchfiles/rsk-bnd.pdf>*.
- Lobo, M. S., Fazel, M., & Boyd, S. (2007). Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs. *Annals of Operations Research*, 152(1), 341-365.
- Lwin, K. T., Qu, R., & MacCarthy, B. L. (2017). Mean-VaR portfolio optimization: a nonparametric approach. *European Journal of Operational Research*, 260(2), 751-766.
- Malkiel, B. G. (2002, March). How Much Diversification is Enough?. In *AIMR Conference Proceedings on Equity Portfolio Construction* (Vol. 5, pp. 18-28).

- Mandelbrot, B. B. (1997). The Variation of Certain Speculative Prices. In *Fractals and scaling in finance*, 371-418. Springer, New York, NY.
- Maxwell, M., & van Vuuren, G. (2019). Active investment strategies under tracking error constraints. *International Advances in Economic Research*, 25(3), 309-322.
- Maxwell, M., Daly, M., Thomson, D., & Van Vuuren, G. (2018). Optimizing tracking error-constrained portfolios. *Applied Economics*, 50(54), 5846-5858.
- McCulloch, J. H. (1996). 13 financial applications of stable distributions. *Handbook of Statistics*, 14, 393-425.
- Mei, X., DeMiguel, V., & Nogales, F. J. (2016). Multiperiod portfolio optimization with multiple risky assets and general transaction costs. *Journal of Banking & Finance*, 69, 108-120.
- Michaud, R. O. (1998). *Efficient asset allocation. a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation*. Harvard Business School Press, Boston, Massachusetts.
- Michaud, R. O., & Michaud, R. O. (2008). *Efficient asset management: a practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation*. Oxford University Press.
- Mittnik, S., & Rachev, S. T. (1993). Modeling asset returns with alternative stable distributions. *Econometric reviews*, 12(3), 261-330.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 768-783.
- Najafi, A. A., & Mushakhian, S. (2015). Multi-stage stochastic mean–semivariance–CVaR portfolio optimization under transaction costs. *Applied Mathematics and Computation*, 256, 445-458.
- Nemirovski, A. (2012). On safe tractable approximations of chance constraints. *European Journal of Operational Research*, 219(3), 707-718.
- Nielsen, L. T. (1990). Existence of equilibrium in CAPM. *Journal of Economic Theory*, 52(1), 223-231.
- Nowak, M., & Trzaskalik, T. (2021). A trade-off multiobjective dynamic programming procedure and its application to project portfolio selection. *Annals of Operations Research*, 1-27.
- Pollard, D. (1985). New ways to prove central limit theorems. *Econometric Theory*, 1(3), 295-313.

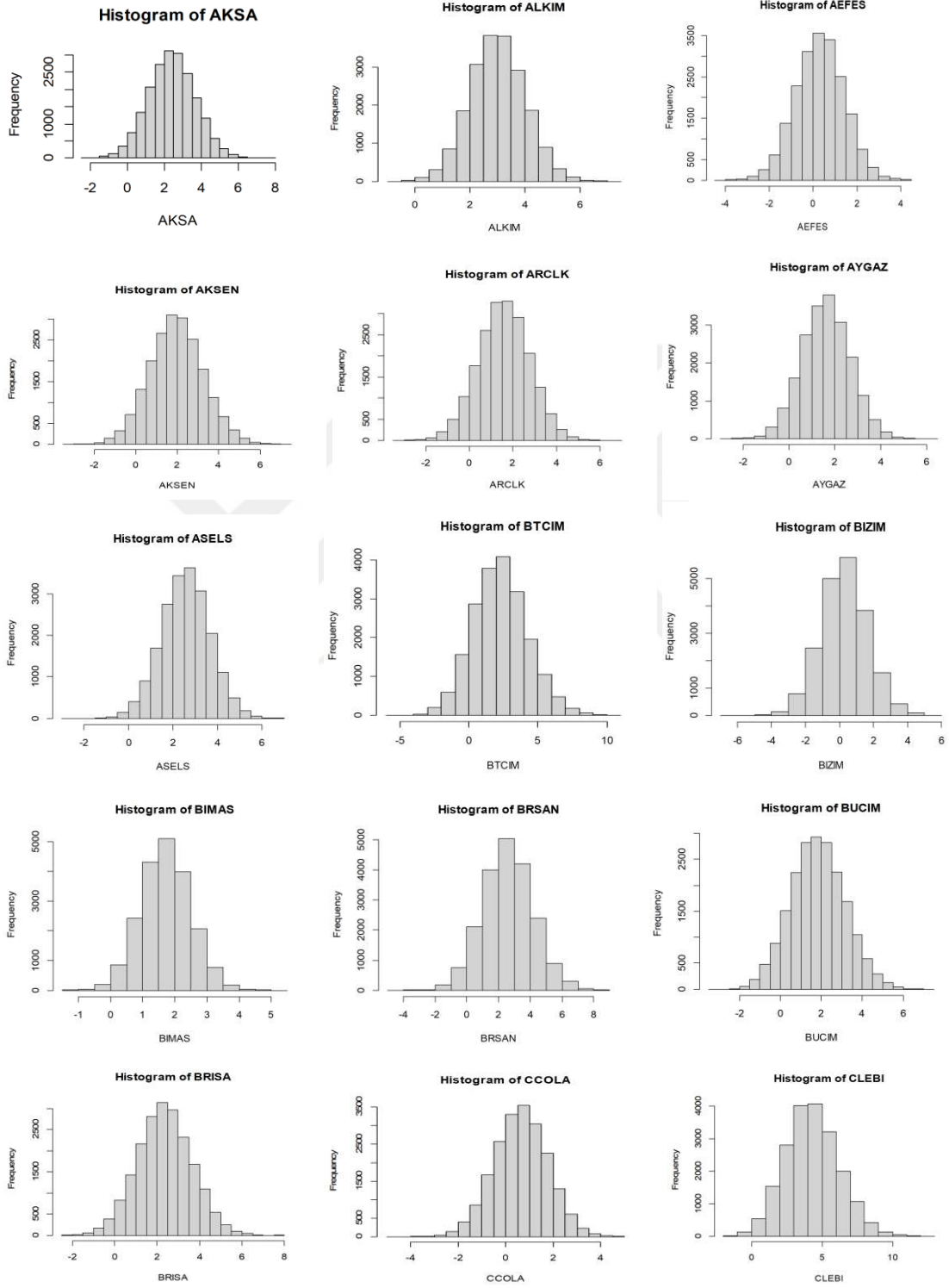
- Puelz, A. V. (2001). Value-at-Risk based portfolio optimization. In *Stochastic Optimization: Algorithms and applications*, 279-302. Springer, Boston, MA.
- Krokhmal, P., Palmquist, J., & Uryasev, S. (2002). Portfolio optimization with conditional Value-at-Risk objective and constraints. *Journal of risk*, 4, 43-68.
- Qian, M., Chen, N., Chen, Y., Chen, C., Qiu, W., Zhao, D., & Lin, Z. (2021). optimal coordinated dispatching strategy of multi-sources power system with wind, hydro and thermal power based on CVaR in Typhoon environment. *Energies*, 14(13), 3735.
- Reyna, F. R., Júnior, A. M. D., Mendes, B. V., & Porto, O. (2005). Optimal portfolio structuring in emerging stock markets using robust statistics. *Brazilian Review of Econometrics*, 25(2), 139-157.
- Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional Value-at-Risk. *Journal of Risk*, 2, 21-42.
- Rodrigues, F., Agra, A., Christiansen, M., Hvattum, L. M., & Requejo, C. (2019). comparing techniques for modelling uncertainty in a maritime inventory routing problem. *European Journal of Operational Research*, 277(3), 831-845.
- Sabuncuoğlu, A. (2008). *Lineer Cebir*. Nobel Yayın Dağıtım.
- Schrijver, A. (1998). *Theory of Linear and Integer Programming*. John Wiley & Sons.
- Scutella, M. G., & Recchia, R. (2013). Robust portfolio asset allocation and risk measures. *Annals of Operations Research*, 204(1), 145-169.
- Sehgal R, Mehra A (2019) Robust reward-risk ratio portfolio optimization. *International Transactions in Operational Research* 00, 1–22.
- Sengupta, R. N., & Kumar, R. (2017). Robust and reliable portfolio optimization formulation of a chance constrained problem. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 42(1), 83-117.
- Sharpe, W. F. (1964). Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The journal of finance*, 19(3), 425-442.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *The Journal of business*, 39(1), 119-138.
- Shawe-Taylor, J., & Cristianini, N. (2003). Estimating the moments of a random vector with applications. In *19° Colloque sur de Traitement du Signal et des Images, FRA, 2003*. GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images.

- Sheikh, A. Z., & Qiao, H. (2009). Non-normality of market returns: a framework for asset allocation decision making. *The Journal of Alternative Investments*, 12(3), 8-35.
- Sim, M. (2004). *Robust Optimization* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).
- Singh, K., & Xie, M. (2008). Bootstrap: a statistical method. *Unpublished Manuscript, Rutgers University, USA*. Web adresi: <http://www.stat.rutgers.edu/home/mxie/RCPapers/bootstrap.pdf>, 1-14.
- Solares, E., Coello, C. A. C., Fernandez, E., & Navarro, J. (2019). Handling uncertainty through confidence intervals in portfolio optimization. *Swarm and Evolutionary Computation*, 44, 774-787.
- Sottinen, T. (2009). Operations research with GNU linear programming kit. *ORMS*, 1020, 200.
- Soyster, A. L. (1973). Convex Programming with Set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming. *Operations research*, 21(5), 1154-1157.
- Stoyanov, S. V., Rachev, S. T., Racheva-Yotova, B., & Fabozzi, F. J. (2011). Fat-tailed models for risk estimation. *The Journal of Portfolio Management*, 37(2), 107-117.
- Tavakoli, M., Shokridehaki, F., Akorede, M. F., Marzband, M., Vechiu, I., & Pouresmaeil, E. (2018). CVaR-based energy management scheme for optimal resilience and operational cost in commercial building microgrids. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems*, 100, 1-9.
- Tepla, L. (2000). Optimal portfolio policies with borrowing and shortsale constraints. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 24(11-12), 1623-1639.
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *The Review of Economic Studies*, 25(2), 65-86.
- Tong X, Wu F (2014) Robust reward-risk ratio optimization with application in allocation of generation asset. *Optimization* 63(11), 1761–1779.
- Tütüncü, R. H., & Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132(1), 157-187.
- Wang, L., & Cheng, X. (2016). Robust Portfolio Selection under Norm Uncertainty. *Journal of Inequalities and Applications*, 2016(1), 1-10.

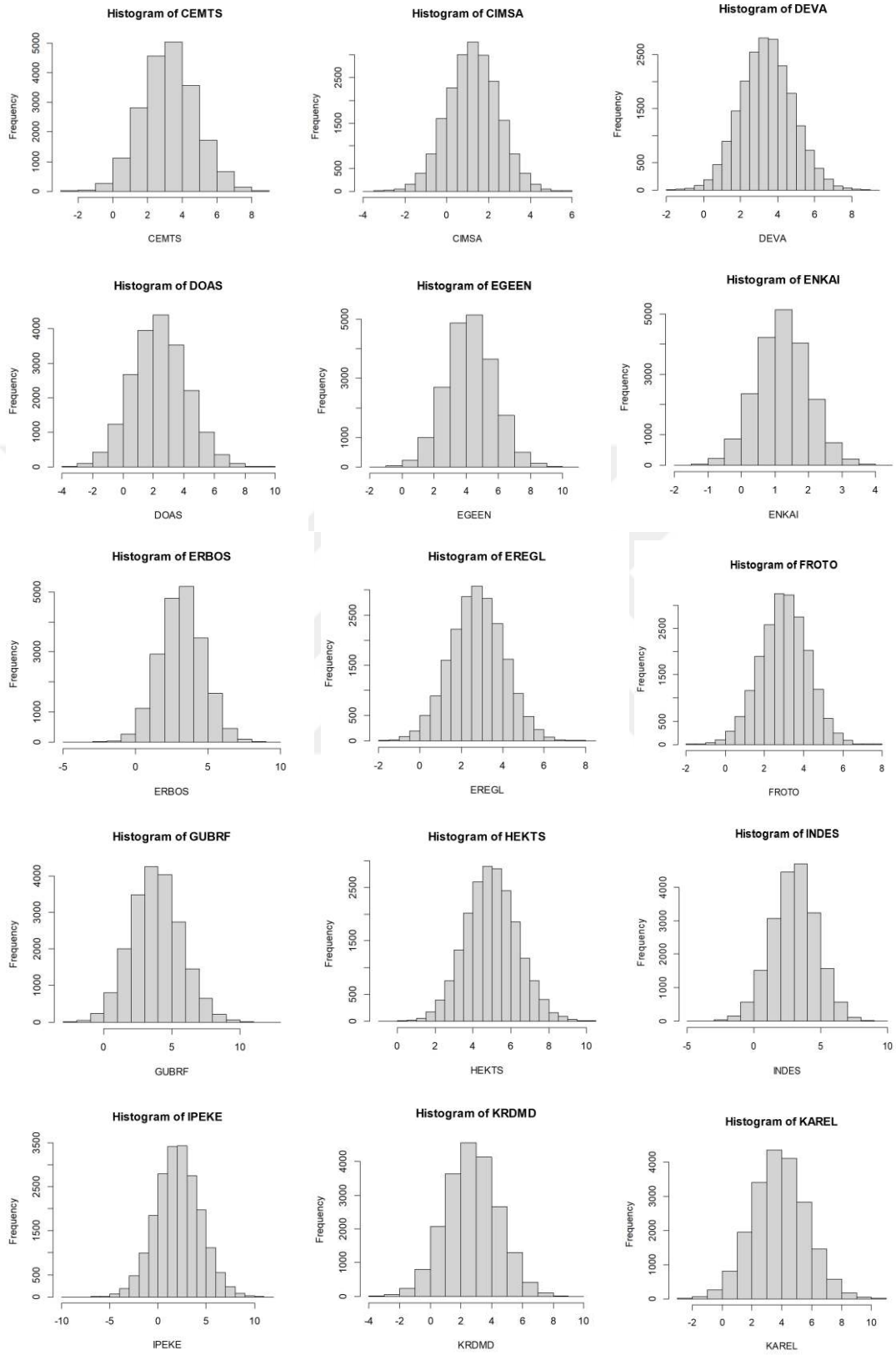
- Welsch, R. E., & Zhou, X. (2007). Application of Robust statistics to asset allocation models. *REVSTAT–Statistical Journal*, 5(1), 97-114.
- Winston, W. L., & Goldberg, J. B. (2004). *Operations research: applications and algorithms* (Vol. 3). Belmont: Thomson Brooks/Cole.
- Yang, L., Couillet, R., & McKay, M. R. (2015). A robust statistics approach to minimum variance portfolio optimization. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 63(24), 6684-6697.
- Yoshimoto, A. (1996). The Mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 39(1), 99-117.
- Zhu, S., & Fukushima, M. (2009). Worst-case conditional Value-At-Risk with application to robust portfolio management. *Operations Research*, 57(5), 1155-1168.
- Zymler, S., Rustem, B., & Kuhn, D. (2011). Robust portfolio optimization with derivative insurance guarantees. *European Journal of Operational Research*, 210(2), 410-424.

EKLER

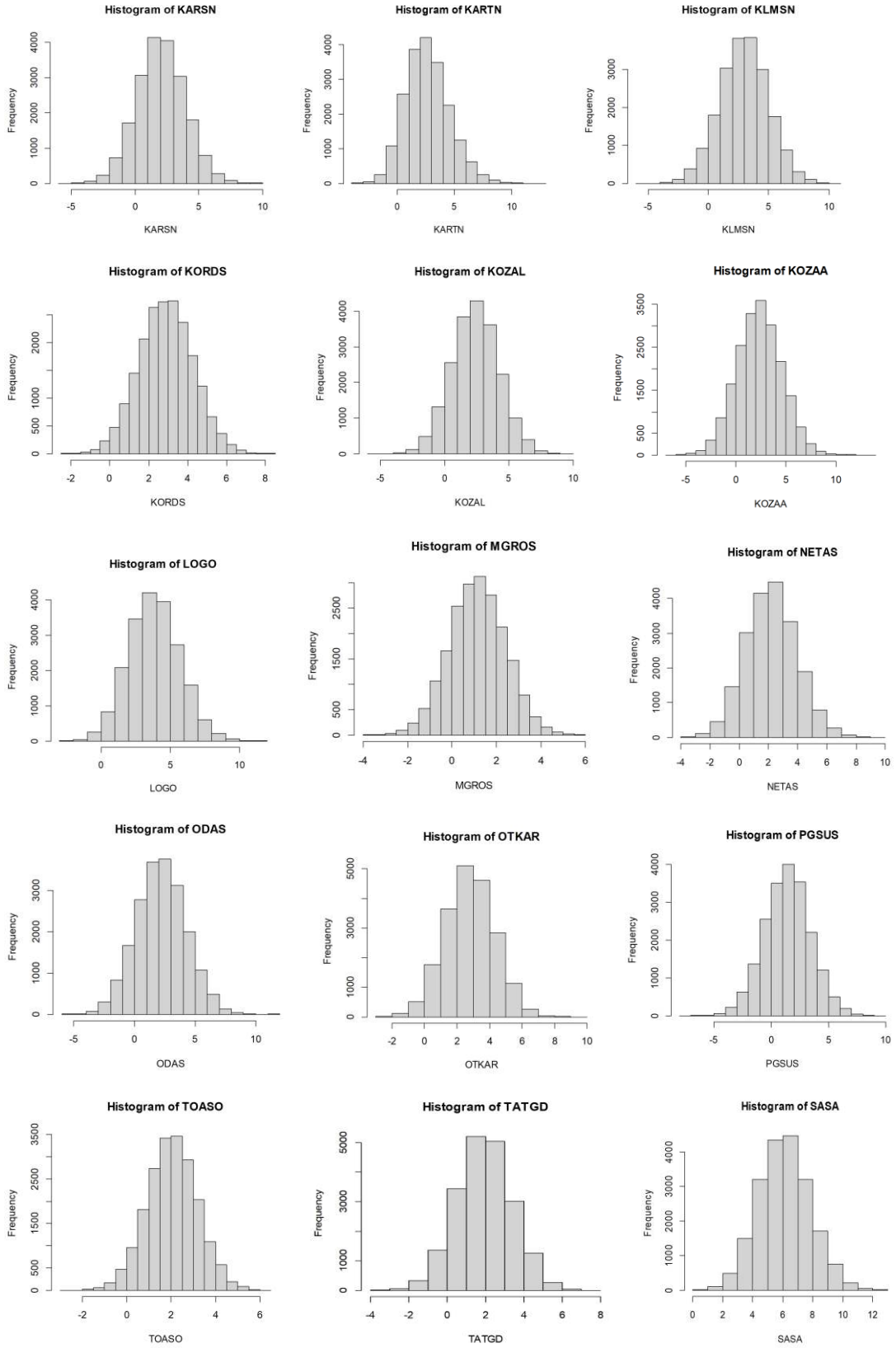
EK-1



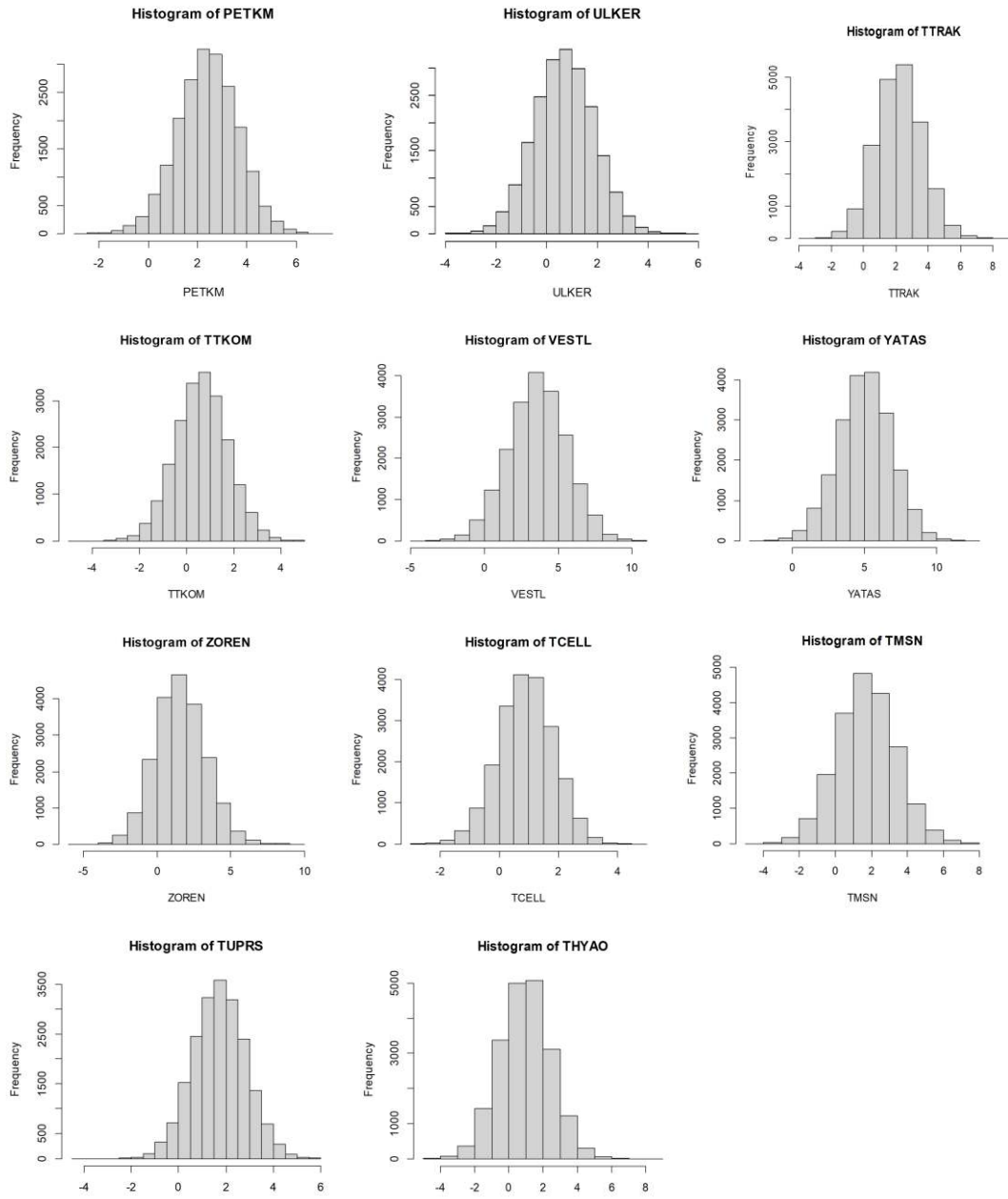
Şekil 26. Hisse senetlerinin bootstrap histogramı



Şekil 27. Hisse senetlerinin bootstrap histogramı (devam)



Şekil 28. Hisse senetlerinin bootstrap histogramı (devam)



Şekil 29. Hisse senetlerinin bootstrap histogramı (devam)