

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ROSENAU-RLW DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
SONLU FARK YÖNTEMİ ÜZERİNE TEMELLENMİŞ
BİR NÜMERİK ŞEMA



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuba KARADAŞ

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

AĞUSTOS 2023

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ROSENAU-RLW DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN
SONLU FARK YÖNTEMİ ÜZERİNE TEMELLENMİŞ
BİR NÜMERİK ŞEMA



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tuba KARADAŞ
(36203614010)

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY
Eş Danışman: Prof. Dr. Yusuf UÇAR

AĞUSTOS 2023

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten, tezimin hazırlanmasında emeklerini esirgemeyen, deneyim ve tecrübeleriyle büyük ölçüde katkıda bulunan ve her zaman değerli vaktini ayıran tez danışmanlığımı yapan değerli hocalarım Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY ve Prof. Dr. Yusuf UÇAR'a teşekkürü bir borç bilir ve şükranlarımı sunarım. Bu tez çalışmam üzerinde çok büyük emekleri olan değerli hocam Prof. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Alaattin ESEN olmak üzere tüm bölüm hocalarıma, tezimin yazım düzeninde önerilerinden faydalandığım Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, eğitim-öğretim hayatım süresince daima yanımda bulunan hiçbir zaman yardımlarını esirgemeyen ve hayatımdaki en kıymetli destekcim olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Rosenau-RLW Denkleminin Çözümü için Sonlu Fark Yöntemi Üzerine Temellenmiş Bir Nümerik Şema” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Tuba KARADAŞ



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET	vii
ABSTRACT	viii
1. GİRİŞ	1
2. MODEL PROBLEM İÇİN BİR SONLU FARK ŞEMASI	6
2.1 Sonlu Farklar Yönteminin Ana Prensipleri	6
2.2 Model Problemin Crank-Nicolson Sonlu Fark Şeması	8
3. MODEL PROBLEMİN BAZI ÖZEL DURUMLARI VE NÜMERİK SONUÇLAR	14
4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	24
KAYNAKLAR.....	26
ÖZGEÇMİŞ	28

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 : Durum 1'in farklı T zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 2, h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 30$).	18
Çizelge 3.2 : Durum 2'nin farklı T zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları($p = 2, h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).	18
Çizelge 3.3 : Durum 2'nin h 'nın farklı değerleri için $T = 10$ zamanında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 2, k = 0.1 -30 \leq x \leq 120$).	18
Çizelge 3.4 : Durum 2'nin $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan doğruluk mertebeleri ($p = 2, -30 \leq x \leq 120$).	19
Çizelge 3.5 : Durum 3'ün h 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 4, k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).	19
Çizelge 3.6 : Durum 3'ün $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan doğruluk mertebeleri ($p = 4, -30 \leq x \leq 120$).	19
Çizelge 3.7 : Durum 4'ün farklı T zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 2, h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).	20
Çizelge 3.8 : Durum 5'in farklı T zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 3, h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).	20
Çizelge 3.9 : Durum 5'in $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan doğruluk mertebeleri ($p = 3, -30 \leq x \leq 120$).	20
Çizelge 3.10: Durum 6'nın farklı T zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 6, h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).	21
Çizelge 3.11: Durum 6'nın $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan doğruluk mertebeleri ($p = 6, -30 \leq x \leq 120$).	21
Çizelge 3.12: Model problemin farklı p değerleri ve farklı T zamanlarında hesaplanan korunum sabitleri ($h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).	22

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 : Farklı p değerlerinde ve farklı T zamanlarında hesaplanan nümerik ve tam çözümlerin dalga profilleri ($h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).	23
---	----



SEMBOLLER VE KISALTMALAR

h	: Konum Yönünde Adım Uzunluğu
k	: Zaman Yönünde Adım Uzunluğu
$u(x_j, t_n)$	: Analitik Çözüm
u_j^n	: Yaklaşık Sayısal Çözüm
L_2	: Ortalama Hata Normu
L_∞	: Maksimum Hata Normu
KDD	: Kısmi Diferansiyel Denklem
KdV	: Korteweg de Vries
RLW	: Düzenli Uzun Dalga (Regularized Long Wave)
Q	: Kütle
E	: Enerji

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ROSENAU-RLW DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN SONLU FARK YÖNTEMİ ÜZERİNE TEMELLENMİŞ BİR NÜMERİK ŞEMA

TUBA KARADAŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

28+viii sayfa

2023

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Bu tezin içeriği şu şekilde düzenlenmiştir: Bölüm 1 de tezde ele alınacak olan 1-boyutlu lineer olmayan genel Rosenau-RLW denklemi üzerine özellikle nümerik anlamda yapılan çalışmalarla ilgili bir literatür taraması verildi.

Bir sonraki bölümde yani Bölüm 2 de önce bu çalışmada sunulacak olan nümerik şemanın temelini oluşturan türevlere fark yaklaşımlarından ve sonlu fark yönteminin bir başlangıç ve sınır değer problemine uygulanışındaki temel prensiplerle birlikte tutarlılık, kararlılık, yakınsaklık ve Lax'ın denklik teoreminden kısaca bahsedildi. Sonra, model problem olarak göz önüne alınan 1-boyutlu lineer olmayan genel Rosenau-RLW denklemiyle verilen başlangıç ve sınır değer probleminin sonlu farklar yöntemine dayanan bir nümerik şemasının çıkarılmasına geçildi. Bunun için önce denklemde görülen zaman yönündeki türevler yerine birinci mertebeden hata terimli standart ileri fark formülü ve konum yönündeki türevler yerine de Crank-Nicolson tipi yaklaşımı yazılarak sadece zaman yönünde ayrıklaştırılmış fark denklemi bulundu. Bundan sonra, konum yönünde ayrıklaştırma için, denklemdeki lineer olmayan terim yerine zamana göre ikinci mertebeden hata terimli Rubin-Graves tipi lineerleştirme yaklaşımı ve konuma göre tüm türevler yerine de ikinci mertebeden hata terimli standart merkezi fark formülleri yazılarak lineer cebirsel denklem sistemiyle sonuçlanan ve kolayca uygulanabilen tamamen ayrıklaştırılmış Crank-Nicolson tipi fark şeması elde edildi.

Bölüm 3 de ise sunulan şema, model problemde görülen parametrelerin bazı özel durumları için seçilen örnek problemlere uygulandı. Şemanın doğruluğu ve güvenilirliği ile birlikte mevcut yöntemin yakınsama oranı analizini desteklediğini göstermek için elde edilen yaklaşık nümerik sonuçlar (çözümün noktasal değerleri, ortalama ve maksimum hata normları, kütle ve enerji korunum sabitleri, şemanın yakınsaklık mertebesi) analitik ve diğer araştırmacıların buldukları sonuçlarla karşılaştırmalı olarak çizelgeler halinde verildi. Ayrıca, mevcut çözümlerin sürekliliğini ve problemin doğru fiziksel davranışlarını sergilediğini doğrulamak için bazı grafikler çizildi.

Son olarak Bölüm 4 de kısa bir sonuçla birlikte ileriye yönelik çalışmalardan bahsedilerek bu tez çalışması sonlandırıldı.

Anahtar Kelimeler: Rosenau-RLW Denklemi, Sonlu Farklar, Crank- Nicolson Tipi Yaklaşım, Rubin-Graves Tipi Lineerleştirme Tekniği, Kararlılık Testi

ABSTRACT

Master Thesis

A NUMERICAL SCHEME BASED ON FINITE DIFFERENCE METHOD FOR THE SOLUTION OF THE ROSENAU-RLW EQUATION

Tuba KARADAŞ

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

28+viii pages

2023

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

The content of this thesis is organized as follows: In Chapter 1, a literature survey is given on the general 1-dimensional non-linear Rosenau-RLW equation, which is going to be discussed in the thesis, especially with regard to the numerical studies.

In the next chapter, namely Chapter 2, the difference approaches to derivatives that form the basis of the numerical scheme, which is going to be presented in this study, and the fundamental principles of applying the finite difference method to an initial and boundary value problem, as well as consistency, stability, convergence and Lax's equivalence theorem are briefly mentioned. Next, a numerical scheme based on the finite difference method of the initial and boundary value problem given by the general 1-dimensional nonlinear Rosenau-RLW equation, which is considered as the model problem, is obtained. For this aim, instead of the derivatives in the temporal direction seen in the equation, the standard forward difference formula with the first order error terms and the Crank-Nicolson type approach instead of the derivatives in the spatial direction are written, and only the discretized difference equation in the temporal direction is found. After that, for discretization in the spatial direction, Rubin-Graves type linearization approach with the second-order error terms with respect to time instead of the non-linear term in the equation and standard central difference formulas with the second-order error terms instead of all derivatives with respect to spatial direction, resulting in a system of linear algebraic equations and easily applicable completely discretized Crank-Nicolson type difference scheme has been obtained.

The scheme presented in Chapter 3 is applied to sample problems selected for some special cases of the parameters seen in the model problems. The approximate numerical results obtained (point-wise values of the solution, mean and maximum error norms, mass and energy conservation constants, the order of convergence of the present scheme) are presented in tabular form in comparison with the analytical results and those results found by other researchers in order to show the accuracy and reliability of the scheme, as well as the support of the current method for convergence rate analysis. Also, some graphs are drawn to verify the continuity of the existing solutions and that the problem exhibits the correct physical behaviors.

Finally, namely in Chapter 4, the present thesis is concluded by mentioning future studies together with a brief conclusion.

Keywords: Rosenau-RLW Equation, Finite Differences, Crank-Nicolson Type Approximation, Rubin-Graves Type Linearization Technique, Stability Test

1. GİRİŞ

Bilim insanlarının üzerinde çalışmalar yaptıkları önem arz eden konulardan biri de doğa olaylarını matematiksel olarak ifade etmektir. Uzay, fizik, kimya, tıp, biyoloji, mekanik, jeoloji ve diğer birçok alandaki sorunların yanısıra doğada karşılaşılan her bir olay genellikle diferansiyel denklemler kullanılarak ifade edilebilir. Bu tip denklemler genellikle lineer olmayıp birçoğunun matematiksel modellerinin oluşturulması düşünüldüğü kadar güç olmamakla birlikte karmaşık yapı ve kullanılan malzeme türleri yüzünden analitik çözümlerini elde etmek, bazı özel durumlar hariç, oldukça uğraştırıcı ve zordur. Bu nedenle bu tür denklemlerin analitik çözümlerinden ziyade yaklaşık sayısal çözümlerinin elde edilmesiyle ilgilenilir. Bunun için ya yeni bir nümerik yöntem geliştirilir yada literatürde mevcut olan uygun bir nümerik yöntem kullanılır. Literatürdeki mevcut çalışmalara bakıldığında lineer olmayan diferansiyel denklemlerin yaklaşık sayısal çözümleri için geliştirilen ve kullanılan çok sayıda nümerik yöntemlerin olduğu görülür. Bunlardan biri olan Sonlu fark yöntemleri en eski yöntemlerden biri olmasına rağmen günümüzde halen hem lineer hem de non-lineer birçok diferansiyel denklemin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında sıklıkla başarılı bir şekilde kullanılmaktadır.

Doğa olaylarında meydana gelen dalga hareketleri maddenin transferi olmadan enerjinin bir noktadan diğerine aktarılmasını veya akışını ifade eder. Dalgaların çeşitli hareketlerini modelleyen ve literatürde sıklıkla kullanılan kısmi diferansiyel denklemler için KdV (Korteweg-de Vries) denklemi, RLW (Regularized Long Wave) denklemi, Rosenau denklemi, Rosenau-KdV denklemi, Rosenau-RLW denklemi vd. verilebilir. 1895 yılında Korteweg ve de Vries [1] tarafından verilen ve kendi isimleriyle bilinen KdV denklemi, μ bilinen bir sabit olmak üzere,

$$u_t + \mu u_{xxx} + uu_x = 0 \quad (1.0.1)$$

olarak tanımlanır. KdV denklemi, sığ su yüzeyinde meydana gelen dalganın hareketlerini açıklamaktadır. Bu denklemde uu_x terimi lineer olmamayı, u_{xxx} terimi dispersif etkiyi ifade etmektedir. Lineer olmayan terim dalganın dikleşerek şeklinin bozulmasına neden olurken dispersif etki dalganın tepesinin düzleşmesine neden olmaktadır. Yüksek genlikli dalgaların şekli ve davranışı bu denklemle yeteri kadar iyi açıklanamamaktadır. Dalgaların tek yönlü hareketi KdV denklemi ile açıklanmakta olup dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimlerini açıklayamamaktadır. KdV denkleminin zayıf yönlerinin giderilmesi amacıyla 1988 yılında Rosenau tarafından

$$u_t + u_x + u_{xxxxt} + uu_x = 0 \quad (1.0.2)$$

biçimindeki Rosenau denklemi önerilmiştir [2].

(1.0.2) ile verilen denklemin genel formuna $-u_{xxt}$ teriminin eklenmesiyle genel Rosenau-RLW denklemi olarak bilinen, $p \geq 2$ ve α bir sabit olmak üzere,

$$u_t + u_{xxxxt} - u_{xxt} + u_x + \alpha(u^p)_x = 0$$

denklemin literatürde yerini aldı ve uygun başlangıç ve sınır şartlarıyla sayısal yaklaşık çözümleri araştırıldı. Bu problemle ilgili literatürde var olan çalışmalardan bazıları şunlardır: örneğin, Wang vd. [3], genelleştirilmiş Rosenau-RLW denkleminin başlangıç-sınır değer problemi için yeni bir korunumlu sonlu farklar şeması sundular ve sayısal çözümlerin tekliğini gösterdiler. Ayrık sobolev uzaylarında şemaların enerji ve kütle korunumlarının elde edilebilir olduğunu verdiler. Ayrıca şemanın ikinci mertebeden yakınsak ve koşulsuz kararlı olduğunu kanıtladılar. Son olarak, teorik ve sayısal sonuçlardan şemanın verimli ve doğru olduğunu gösterdiler. Wang vd. [4] yine başka bir makalelerinde, genelleştirilmiş Rosenau-RLW denkleminin başlangıç ve sınır değer problemi için yeni bir korunumlu yüksek mertebeli kompakt sonlu farklar şemasını verdiler. Yeni kararlı doğrusal olmayan dördüncü mertebeden kompakt sonlu fark şemalarını tasarladılar ve şemanın çözümünün tekliğini gösterdiler. Bu yaklaşım için enerji korunumu ve kütle korunumlarını hesapladılar ve ayrıca, teorik analizi desteklemek için sayısal sonuçlar verdiler. Sayısal deneylerden elde edilen sonuçlardan, teorinin doğru ve önerilen yöntemin verimli ve güvenilir olduğunu gösterdiler. Wongsaijai vd. [5], Rosenau-RLW denklemini çözmek için bir kompakt sonlu farklar yöntemi önerdiler. Üç seviyeli ortalama kapalı sonlu farklar tekniği kullanılarak modele sayısal bir yöntem uyguladılar. Denklemin temel korunum özelliğini, sunulan sayısal şema ile korunur olduğunu ve sayısal çözümün varlığını ve tekliğini kanıtladılar. Ayrıca, sayısal çözümün yakınsama ve kararlılığıyla birlikte yöntemin zaman ve uzay yönünde sırasıyla ikinci ve dördüncü mertebeden doğrulukta olduğunu gösterdiler. Bunlarla birlikte, nümerik algoritmanın ortaya çıkarılmasında konumsal türevlere yaklaşmak için beş noktalı şablon kullandılar ve sayısal deneylerden önerilen yöntemin çözümün doğruluğunu önemli ölçüde artırdığını gösterdiler. Pan ve Zhang [6], genel Rosenau-RLW denklemi için sayısal çözümleri ele aldılar ve enerji korunumlu lineerleştirilmiş bir sonlu fark şeması önerdiler. Fark şeması için çözümlerin varlığı ile birlikte enerji yöntemi kullanılarak şemanın kararlılığını, yakınsaklığını ve önsel hata tahmini

kanıtladılar. Sayısal sonuçlardan sunulan yöntemin verimli ve güvenilir olduğunu gösterdiler. Zuo vd. [7], genel Rosenau-RLW denkleminin başlangıç-sınır değer problemi için yeni bir kararlı sonlu fark şeması sundular ve fark çözümlerinin varlığını Brouwer sabit nokta teoremi ile kanıtladılar. Ayrıca, ayrık enerji yöntemiyle şemanın benzersiz bir şekilde çözülebilir, koşulsuz kararlı ve ikinci mertebe yakınsak olduğunu gösterdiler. Mittal ve Jain [8], doğrusal olmayan genel Rosenau-RLW denkleminin çözümüne yaklaşmak için denklemden görülen non-lineer olmayan terimler yerine alınılmış herhangi bir lineerleştirme tekniği kullanmadan sonlu elemanlar üzerine temellenen ve birinci dereceden adi diferansiyel denklemler sistemi ile sonuçlanan beşinci dereceden B-spline kollakasyon yöntemi önerdiler. Pan ve Zhang [9], Rosenau-RLW denkleminin başlangıç ve sınır değer problemini çözmek için sonlu farklar yöntemi üzerine temellenen ve denklemin korunum özelliklerini koruyan üç seviyeli ve lineer-kapalı bir korunumlu şema tasarladılar. Ayrıca bu çalışmada ayrık enerji yöntemi ile sonlu fark yaklaşık çözümlerinin hata tahmini ve ikinci mertebeden yakınsaklığı tartışıldı. Şemanın etkinliği ve doğruluğunu göstermek için nümerik sonuçlar verdiler. Pan vd. [10], Rosenau-RLW denklemi'nin sayısal çözümleri için Crank–Nicolson tipi sonlu farklar yöntemi kullandılar. Sayısal çözümlerin varlığını Brouwer sabit nokta teoremi ile elde ettiler. Sonlu fark çözümleri için bir önsel (priori) sınır ve hata tahminlerinin yanı sıra ayrık kütle ve ayrık enerjinin korunumunu da gösterdiler. Ayrıca, ayrık enerji yöntemi yardımıyla şemanın şartsız kararlılığını, ikinci mertebe yakınsaklığını ve tekliğini ispatladılar. Teorik sonuçları doğrulamak için bazı nümerik deneyler yapmışlardır. Hu ve Wang [11], Rosenau-RLW denklemi için kütle ve enerji korunum özelliklerini, fark çözümünün varlığını, tekliğini ve sonsuz normdaki ön tahminlerinin elde edilmesini sağlayan üç seviyeli bir lineer sonlu fark şeması önerdiler. Ayrıca, enerji yöntemiyle şemanın yakınsaklığını ve kararlılığını incelediler. Wongsaijai ve Poochinapan [12], Rosenau-KdV denklemi ve Rosenau-RLW denklemini birleştirerek doğrusal olmayan dalganın çözümünü elde etmek için üç seviyeli ortalama kapalı sonlu farklar tekniği kullanan bir sayısal yöntem önerdiler. Zaman ve konuma göre ikinci mertebeden doğruluğa sahip olan şemanın denklemin temel korunum özelliklerini sağladığını, sayısal çözümün varlığını ve tekliğini ispatladılar. Ayrıca, sayısal çözümün yakınsaklığını ve kararlılığını da gösterdiler. Caia vd. [13], Lagrangian çerçeve üzerinde çalıştılar, genelleştirilmiş Rosenau tipi denklemlerin varyasyonel formülasyonlarını ve bunların çok anlamlı yapılarını sundular. Ayrık varyasyon ilkesine dayanarak, bu denklem sınıfının soliter çözümlerinin evrimlerini çözmek için varyasyonel ayrıklaştırmalar oluşturdular. He ve Pan [14], Rosenau-RLW denklemi ile birleşen Rosenau-KdV denkleminin sayısal çözümleri elde etmek için temel korunum özelliklerini

koruyan sonlu farklar yöntemine dayanan bir Crank-Nicolson sözde-kompakt korunumlu sayısal şema önerdiler. Fark çözümlerinin varlığını Brouwer sabit nokta teoremi ile gösterdiler. Ayrıca şemanın koşulsuz kararlılığını, ikinci mertebeden yakınsaklığını ve şemanın hata tahminlerini ayırık enerji yöntemiyle kanıtladılar. Yağmurlu vd. [15], Rosenau tipi denklemlerden biri olan Rosenau-RLW denkleminin Galerkin kübik B-spline sonlu elemanlar yöntemi kullanılarak sayısal çözümlerini elde ettiler. Yöntemin uygulanması sonucu oluşan adi diferansiyel denklem sisteminin çözümünde dördüncü mertebeden Runge-Kutta tekniğini kullandılar. Yöntemin doğruluğunu ve verimliliğini test etmek için L_2 ve L_∞ hata normlarını hesapladılar ve elde edilen sonuçları analitik ve diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırdılar. Guo vd. [16], Rosenau-RLW denklemini çözmek için denkleme bir çoklu integral sonlu hacim yöntemi ve Lagrange enterpolasyonu uygulayarak konuma göre üçüncü ve zamana göre ikinci mertebeden doğruluğa sahip iki seviyeli tamamen ayrıklaştırılmış bir kapalı şema verdiler. Wongsaijai vd. [17], homojen sınır koşullarına bağlı olarak Rosenau-RLW denklemine sonlu bir fark yönteminin modifikasyonuna dayalı doğrusal olmayan bir algoritma olan bir kütle koruma şeması önerdiler. Yaklaşık çözümlerin doğruluğunu artırmaya yönelik yöntemin temel özelliği, doğrusal olmayan kapalı şemayı çözmek için yinelemeli bir algoritma ile birlikte kompakt bir yüksek mertebeden şema geliştirdiler. Konum yönündeki türevi ayrıklaştırmak için beş noktalı bir formülü ve zaman yönündeki türevi ayrıklaştırmak için de üç mertebeli ortalama fark tekniğini kullandılar. Kütle korunumu ile birlikte sayısal çözümün varlığını ve tekliğini kanıtladılar. Sayısal sonuçlardan kompakt şemanın hesaplama verimliliğinin kompakt olmayan şemalardan daha yüksek olduğu sonucuna vardılar. Mustahsan vd. [18], alışılmış ve modifiye edilmiş Rosenau-RLW lineer olmayan denklemlerin yaklaşık çözümlerini bulmak için ağırlıklı genişletilmiş B-spline kollokasyon yöntemini kullandılar. Karakoc [19], doğrusal olmayan genelleştirilmiş Rosenau-RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için bir araç olarak septik B-spline'lara dayalı bir kollokasyon sonlu elemanlar yöntemini uyguladı. Bu yöntemin avantajlarından biri de bazlar yüksek derecede seçildiğinde daha iyi sayısal çözümler elde edilmesidir. Yöntemin etkinliğini, denklemi çeşitli başlangıç ve sınır koşullarıyla çözerek gösterdi. Ayrıca, yöntemin performansını tespit etmek için L_2 ve L_∞ hata normları ile denklemin en düşük iki değişmezlerinden olan kütle ve enerji korunumlarını hesapladı. Elde edilen sayısal sonuçları benzer parametreler için literatürdeki bazı sonuçlarla karşılaştırdı ve önerilen algoritmanın koşulsuz kararlı olduğunu gösterdi. Wongsaijai ve Pochinapan [20], Rosenau-RLW denklemi ve Rosenau-Burgers denkleminin birleştirilmesiyle modellenen, dağılan sığ su dalgalarının bir çözümünün asimptotik davranışını incelediler.

Modelin çözümünün enerji bozunma (decay) oranları Fourier dönüşümü yöntemiyle incelediler. Ayrıca, modeli çözmek, çözümün davranışlarını incelemek ve teorik sonuçlarla doğrulamak için sözde kompakt bir sonlu fark şemasını geliştirdiler. Sayısal çözümün varlığını, tekliğini, yakınsaklığını ve kararlılığını teorik olarak analiz ettiler. Mevcut yöntemin doğruluğunu ve güvenilirliğini bazı test problemler üzerinde gösterdiler. Son yıllarda, Kutluay vd. [21] uygun başlangıç- sınır değerleri ile verilen genelleştirilmiş Rosenau-RLW denklemini çözmek için Strang zaman ayırma tekniği kullanarak beşinci dereceden B-spline kollokasyon sonlu elemanlar yöntemine dayanan bir nümerik şema verdiler. Bunun için ele alınan problemi önce herbiri zamana göre türevi içeren iki alt probleme ayırdılar. Sonra, zaman integrasyonu için beşinci dereceden B-spline kollokasyon metodu kullanarak her bir alt problemi adi differansiyel denklemlerden oluşan bir sisteme dönüştürdüler. Daha sonra adi differansiyel denklem sistemini dördüncü mertebeden klasik Runge-Kutta algoritması yardımıyla Strang zaman ayırma tekniğini kullanarak çözdüler. Verdikleri şemanın doğruluğu ve etkinliğini test etmek için tam çözüme sahip bir model problemi göz önüne aldılar ve denklemde görülen p parametresinin çeşitli değerleri için hesaplanan ortalama ve maksimum hata normlarını, kütle ve enerji korunum sabitlerini ve şemanın hata normları cinsinden doğruluk mertebelerini sundular ve diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırdılar. Bu makale, bu tezin hazırlanmasında esas kaynaklardan biri olarak göz önüne alındı ve kullanıldı.

2. MODEL PROBLEM İÇİN BİR SONLU FARK ŞEMASI

Bu bölümde 1-boyutlu Rosenau-RLW denklemi olarak bilinen

$$u_t + u_{xxxxt} - u_{xxt} + u_x + \alpha(u^p)_x = 0, \quad x_l \leq x \leq x_r, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.0.1)$$

denklemini

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x_l \leq x \leq x_r, \quad (2.0.2)$$

başlangıç şartı ve

$$u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0, \quad u_{xx}(x_l, t) = u_{xx}(x_r, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.0.3)$$

sınır şartları ile ele alındı. Burada $p \geq 2$ bir tamsayı, $u_0(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $[x_l, x_r] \subset \mathbb{R}$ dir. (2.0.1) denklemini $p = 2$ için alışılmış Rosenau-RLW denklemi ve $p = 3$ için modifiye edilmiş Rosenau-RLW denklemi olarak adlandırılır.

Bu tez çalışmasının esasını oluşturan bu bölümde, (2.0.1)-(2.0.3) denklemleri ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin bazı özel durumlarda yaklaşık sayısal çözümlerini elde etmek için Rubin-Graves tipi bir lineerleştirme tekniği kullanılarak sonlu farklar yöntemine dayalı Crank-Nicolson tipi bir sonlu fark şeması verilecektir. Şemanın çıkarılmasına geçmeden önce sonlu farklar yönteminin esas unsurlarından aşağıda kısaca bahsedildi.

2.1 Sonlu Farklar Yönteminin Ana Prensipleri

Sonlu farklar yöntemi uygulamalı matematikte, mühendislikte ve birçok bilim dalında karşılaşılan uygun başlangıç ve sınır değerleriyle verilen özellikle lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin yaklaşık sayısal çözümlerinin bulunmasında kullanılan en eski metotlardan biri olmasına rağmen günümüzde halen birçok bilim insanı tarafından kullanılmaktadır.

Bir $u = u(x, t)$ bilinmeyen fonksiyonu için genel olarak

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, \dots) = 0$$

biçiminde olan bir kısmi diferansiyel denklemin uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte $(x, t) \in [a, b] \times [0, \infty)$ çözüm bölgesinde verildiğini kabul edelim. Böyle bir problemin sonlu farklar yöntemiyle yaklaşık sayısal çözümlerinin bulunmasında genellikle izlenecek temel adımlar kısaca şöyle sıralanabilir:

– Önce, problemin tanımlı olduğu çözüm bölgesinde $x \in [a, b]$ aralığı, $x_j = x_l + jh$, $h = (x_r - x_l)/J$ ($j = 0(1)J$) olmak üzere $x_0 = x_l < x_1 < x_2 < \dots x_{J-1} < x_J = x_r$ ve $t \in [0, T]$ aralığı $t = nk$ ($n = 0(1)N$), $k = T/N$, olmak üzere $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots t_{N-1} < t_N = T$ olacak şekilde eşit uzunluklu alt aralıklara bölünür. Böylece çözüm bölgesi, kesişim yerleri (x_j, t_n) ($j = 0(1)J$, $n = 0(1)N$) düğüm noktaları olan genellikle dikdörtgensel alt bölgelerden oluşan kafeslere ayrılmış olur. Bu tez boyunca (x_j, t_n) düğüm noktalarında u 'nun yaklaşık sayısal değerleri u_j^n ile gösterilecektir. Böylece, u_j^n değeri denklemin $u(x_j, t_n)$ tam değerine bir yaklaşım olacaktır.

– Sonra denklem ile birlikte sınır değerlerindeki kısmi türevler yerine Taylor serisinden türetilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır [22] ve böylece başlangıç ve sınır değer problemi cebirsel denklem sistemi ile sonuçlanan bir sayısal şemaya indirgenir.

– Son olarak cebirsel denklem sisteminden elde edilecek olan çözümlerin problemin tam çözümüne yakınsaması için şemanın yakınsaklığı incelenir. Bunun için genellikle Lax'ın denklik teoreminden faydalanılır.

Çözümün Tutarlılığı, Kararlılığı, Yakınsaklığı ve Lax'ın Denklik Teoremi [22]

Tutarlılık: Konum ve zaman adım uzunluklarının küçültülmesiyle kesme hatası terimlerinin sıfıra yaklaşması sağlanıyorsa sonlu fark yaklaşımı tutarlıdır denir.

Kararlılık: Bir sonlu fark şemasında hesaplamaların her aşamasındaki hatalar, hesaplamalar ilerledikçe yani zaman adımı arttıkça büyümüyorsa şema kararlıdır denir.

Yakınsaklık: Sonlu farklar yöntemi kullanılarak elde edilen çözümün konum ve zaman adım uzunlukları sıfıra yaklaştıkça çözümün KDD denklemin gerçek yani tam çözümüne yaklaşması anlamına gelir.

Lax'ın Denklik Teoremi: Bir sonlu fark yönteminin yakınsak olması için gerek ve yeter şart yöntemin tutarlı ve kararlı olmasıdır.

Model problemde görülen u_t , u_x , u_{xx} ve u_{xxx} türevlerine sonlu fark formülleri Taylor seri açılımından, h ve k sırasıyla konum ve zaman adım uzunlukları olmak üzere,

$$(u_t)_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + O(k) \quad (2.1.1)$$

$$(u_x)_j^n = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + O(h^2) \quad (2.1.2)$$

$$(u_{xx})_j^n = \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.1.3)$$

$$(u_{xxx})_j^n = \frac{u_{j-2}^n - 4u_{j-1}^n + 6u_j^n - 4u_{j+1}^n + u_{j+2}^n}{h^4} + O(h^2) \quad (2.1.4)$$

dir [22]. Burada büyük "O" harfi sonsuz terime sahip bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(k)$ ve $O(h^2)$ hata terimlerinin h ve k sifra yaklaştıkça sırasıyla sifra gideceği anlamına gelir. Yani, $k \rightarrow 0$ iken $O(k) \rightarrow 0$ ve $h \rightarrow 0$ iken $O(h^2) \rightarrow 0$ dır.

2.2 Model Problemin Crank-Nicolson Sonlu Fark Şeması

Bu kısımda (2.0.1)- (2.0.3) denklemleri ile verilen problemin Crank-Nicolson sonlu fark şeması verildi. Bunun için (2.0.1) denkleminde görülen zaman yönündeki türevler yerine (2.0.1) ile verilen ileri fark formülü ve konum yönündeki tüm türevler yerine de Crank-Nicolson tipi yaklaşımlar yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \frac{(u_{xxx})_j^{n+1} - (u_{xxx})_j^n}{k} - \frac{(u_{xx})_j^{n+1} - (u_{xx})_j^n}{k} \\ & + \frac{(u_x)_j^{n+1} + (u_x)_j^n}{2} + \alpha \frac{(u_x^p)_j^{n+1} + (u_x^p)_j^n}{2} = 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

zamana göre ayrılaştırılmış denklemini bulunur. Sonra (2.2.1) eşitliğinde görülen u_x , u_{xx} ve u_{xxx} türevleri yerine $O(h^2)$ hatası ihmal edilerek (2.1.2), (2.1.3) ve (2.1.4) fark yaklaşımları ile birlikte yine denklemde görülen (x_j, t_{n+1}) düğüm noktasında $(u^p)_x = pu^{p-1}u_x$ lineer olmayan terimi yerine $O(k^2)$ hatası ihmal edilerek

$$(u^{p-1}u_x)_j^{n+1} = (u^{p-1})_j^n (u_x)_j^{n+1} + (p-1) (u^{p-2})_j^n (u_x)_j^n u_j^{n+1} - (p-1) (u^{p-1})_j^n (u_x)_j^n$$

veya

$$\begin{aligned} (u^{p-1}u_x)_j^{n+1} &= (u^{p-1})_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + (p-1) (u^{p-2})_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} u_j^{n+1} \\ &\quad - (p-1) (u^{p-1})_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Rubin-Graves yaklaşımı yazılırsa, konum ve zamana göre tamamen ayrıklaştırılmış, $j = 1(1)J - 1$ ve $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} + \frac{u_{j-2}^{n+1} - 4u_{j-1}^{n+1} + 6u_j^{n+1} - 4u_{j+1}^{n+1} + u_{j+2}^{n+1}}{kh^4} \\
& - \frac{u_{j-2}^n - 4u_{j-1}^n + 6u_j^n - 4u_{j+1}^n + u_{j+2}^n}{kh^4} - \frac{u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}}{kh^2} + \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{kh^2} \\
& + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4h} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4h} \\
& + \alpha p [(u^{p-1})_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4h} + (p-1)(u^{p-2})_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4h} u_j^{n+1} \\
& - (p-1)(u^{p-1})_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4h}] - \alpha p (u^{p-1})_j^n \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4h} = 0
\end{aligned}$$

Crank-Nicolson fark şeması elde edilir. Bu şema gerekli matematiksel işlemler ve düzenlemelerden sonra, $j = 1(1)J - 1$ ve $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^{n+1} - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} \\
& + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha p (p-1)(u^{p-2})_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} \right] u_j^{n+1} \\
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^n - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (p-1)(u^{p-1})_j^n}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^n \\
& + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} \right] u_j^n \\
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p (p-1)(u^{p-1})_j^n}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^n + \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^n \quad (2.2.3)
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

Sınır Şartlarının Kullanılması: (2.0.3) de verilen $u(x_l, t) = 0$ ve $u(x_r, t) = 0$ homojen Dirichlet sınır şartlarından

$$u_j^n = u_j^{n+1} = 0 \quad (j = 0) \text{ ve } u_j^n = u_j^{n+1} = 0 \quad (j = J);$$

$u_{xx}(x_l, t) = 0$ homojen Neumann sınır şartından $(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)/h^2 = 0$ ve $(u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1})/h^2 = 0$ olup

$$u_{j-1}^n = 2u_j^n - u_{j+1}^n \quad (j=0) \text{ ve } u_{j-1}^{n+1} = 2u_j^{n+1} - u_{j+1}^{n+1} \quad (j=0);$$

$u_{xx}(x_r, t) = 0$ sınır şartından da bir öncekine benzer şekilde

$$u_{j+1}^n = 2u_j^n - u_{j-1}^n \quad (j=J) \text{ ve } u_{j+1}^{n+1} = 2u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} \quad (j=J)$$

elde edilir.

$j=0$ ve $j=J$ için yukarıda verilen eşitliklerden problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen u 'nun, u_{-1}^n ve u_{-1}^{n+1} , u_{J+1}^n ve u_{J+1}^{n+1} hayali değerleri ortaya çıkar. Bu değerler şu şekilde yok edilir: (2.2.3) ile verilen şema $j=1$ ve $j=J-1$ için yazılır ve sonra yukarıda $j=0$ ve $j=J$ için sınırlarda ortaya çıkan değerler arasından, gerekli bir takım matematiksel işlemler ve düzenlemelerden sonra, $n=0(1)N$ olmak üzere,

$j=1$ için

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{k} + \frac{5}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha p(p-1)(u^{p-2})_j^n u_{j+1}^n}{4h} \right] u_j^{n+1} \\ & - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p(u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^{n+1} \\ & = \left[\frac{1}{k} + \frac{5}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} \right] u_j^n \\ & - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p(p-1)(u^{p-1})_j^n}{4h} + \frac{\alpha p(u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^n + \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^n \end{aligned}$$

$j=2$ için

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-2})_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} \right] u_j^{n+1} \\
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^{n+1} \\
& = - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-1})_j^n}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^n + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} \right] u_j^n \\
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-1})_j^n}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^n + \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^n
\end{aligned}$$

$j = 3(1)J - 3$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^{n+1} - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} \\
& + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-2})_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} \right] u_j^{n+1} \\
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^n - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-1})_j^n}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^n \\
& - \left[\frac{1}{k} - \frac{6}{kh^4} - \frac{2}{kh^2} \right] u_j^n \\
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-1})_j^n}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^n + \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^n
\end{aligned}$$

$j = J - 2$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^{n+1} - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} \\
& + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} + \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-2})_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} \right] u_j^{n+1} - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^n - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-1})_j^n}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^n \\
& + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} \right] u_j^n - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-1})_j^n}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j+1}^n
\end{aligned}$$

$j = J - 1$ için

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^{n+1} - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} \\
& + \left[\frac{1}{k} + \frac{5}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} - \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-2})_j^n (u_{j-1}^n)}{4h} \right] u_j^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^n - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p (p-1) (u^{p-1})_j^n}{4h} - \frac{\alpha p (u^{p-1})_j^n}{4h} \right] u_{j-1}^n \\
& + \left[\frac{1}{k} + \frac{5}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} \right] u_j^n
\end{aligned}$$

lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu sistem kapalı olarak

$$A \underline{u}^{n+1} = \underline{d} \quad (2.2.4)$$

formunda yazılabilir ve cebirsel denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan direkt yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülür. Böylece göz önüne alınan model problemin arzu edilen (x_j, t_n) düğüm noktalarında yaklaşık sayısal çözümleri bulunmuş olur.

Bir sonlu fark şemasının yakınsak olması için yani yaklaşık nümerik çözümlerin analitik çözüme yeterince yakın olması için gerek ve yeter şart şemanın tutarlı ve kararlı olmasıdır [22].

Sonlu farklar yöntemi çıkarılışında göz önünde bulundurulmuş sezgisel yaklaşımı nedeniyle tutarlıdır. Bundan ötürü şemanın yakınsaklığı için sadece kararlılığını incelemek yeterlidir.

Şemanın Kararlılık Analizi:

Bunun için önce (2.0.1) denkleminde görülen $(u^p)_x = pu^{p-1}u_x$ non-lineer teriminde $u = C$ lokal sabit alınırsa denklemin Crank-Nicolson sonlu fark şeması, $j = 1(1)J - 1$ ve $n = 0(1)N$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^{n+1} - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p C}{4h} \right] u_{j-1}^{n+1} + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} - \frac{2}{kh^2} \right] u_j^{n+1} \\
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} - \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p C}{4h} \right] u_{j+1}^{n+1} + \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^{n+1} \\
& = \frac{1}{kh^4} u_{j-2}^n - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} - \frac{1}{4h} - \frac{\alpha p C}{4h} \right] u_{j-1}^n + \left[\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} \right] u_j^n \\
& - \left[\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} + \frac{1}{4h} + \frac{\alpha p C}{4h} \right] u_{j+1}^n - \frac{1}{kh^4} u_{j+2}^n
\end{aligned} \quad (2.2.5)$$

olarak elde edilir. Bu şemanın kararlılık analizi

$$u_j^n = \xi^n e^{i\beta jh} \quad (2.2.6)$$

olmak üzere von-Neumann tekniği ile incelendi [22]. Burada $i = \sqrt{-1}$, β mod sayısı ve ξ amplifikatör çarpanıdır. (2.2.5) de u_j^n yerine (2.2.6) eşitliği yazılır ve gerekli matematiksel işlemler yapılırsa

$$\xi [\lambda_1 + i\lambda_2] = \lambda_1 - i\lambda_2$$

veya

$$\xi = \frac{\lambda_1 - i\lambda_2}{\lambda_1 + i\lambda_2} \quad (2.2.7)$$

bulunur. Burada, $\eta = \frac{\alpha p C}{4h}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{2}{kh^4} \cos(2\beta h) - 2 \left(\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{kh^2} \right) \cos(\beta h) + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{2}{kh^2} \right) \\ \lambda_2 &= 2 \left(\frac{1}{4h} + \eta \right) \sin(\beta h) \end{aligned}$$

dir. Kararlılık için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. (2.2.7) den açıkça $|\xi| = 1$ olup sunulan şema şartsız kararlıdır.

3. MODEL PROBLEMİN BAZI ÖZEL DURUMLARI VE NÜMERİK SONUÇLAR

Bu bölümde (2.0.1)-(2.0.3) denklemleri ile verilen model problemin yani

$$u_t + u_{xxxxt} - u_{xxt} + u_x + \alpha(u^p)_x = 0, \quad x_l \leq x \leq x_r, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x_l \leq x \leq x_r$$

$$u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0, \quad u_{xx}(x_l, t) = u_{xx}(x_r, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T$$

probleminin p 'nin bazı özel durumlarında Bölüm 2 de verilen Crank-Nicolson sonlu fark şemasından elde edilecek yaklaşık nümerik çözümlerini hesaplamak için örnek problemler göz önüne alındı. Bu başlangıç-sınır değer problemi sırasıyla enerji ve kütle olarak bilinen ve

$$\begin{aligned} E(t) &= \|u\|_{L^2}^2 + \|u_x\|_{L^2}^2 + \|u_{xx}\|_{L^2}^2 = E(0) \\ &= \int_{x_l}^{x_r} [u^2(x, t) + u_x^2(x, t) + u_{xx}^2(x, t) dx] \\ &\simeq h \sum_{j=1}^{J-1} [(u_j^2) + ((u_j^2)_x)^2 + ((u_j)_{xx})^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(t) &= \int_{x_l}^{x_r} u(x, t) dx = \int_{x_l}^{x_r} u(x, 0) dx = Q(0) \\ &\simeq h \sum_{j=1}^{J-1} u_j \end{aligned}$$

olarak tanımlanan korunum niceliklerini sağlayıp tam çözümü

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \exp\left(\frac{\ln \frac{(p+3)(3p+1)(p+1)}{2(p^2+3)(p^2+4p+7)}}{p-1}\right) \sec h^{4/(p-1)} \left[\frac{P-1}{\sqrt{4p^2+8p+20}}(x-ct) \right], \\ c &= (p^4 + 4p^3 + 14p^2 + 20p + 25)/(p^4 + 4p^3 + 10p^2 + 12p + 21) \end{aligned}$$

dir [23].

(2.2.4) ile verilen şemanın yani

$$A\bar{u}^{(n+1)} = \bar{d}$$

nin (2.0.1) de görülen p 'nin bazı özel değerleri için göz önüne alınan örnek problemlere uygulanması sonucu elde edilen yaklaşık nümerik sonuçların doğruluğunu ve güvenilirliğini göstermek için, (x_j, t_n) düğüm noktasında u 'ya karşılık gelen analitik ve sayısal değerleri sırası ile $u(x_j, t_n)$ ve u_j^n olmak üzere,

$$L_2 = \left(h \sum_{j=1}^{J-1} |u(x_j, t_n) - u_j^n|^2 \right)^{1/2}$$

ve

$$L_\infty = \max_{1 \leq j \leq J-1} |u(x_j, t_n) - u_j^n|$$

olarak tanımlanan ortalama hata ve maksimum hata normları ile birlikte yukarıda verilen enerji ve kütle korunumları hesaplandı. Bunlarla birlikte sunulan şemanın yakınsaklık mertebesini hesaplamak için

$$\text{Mertebe}(L) = \log_2 [L(2h, 2k) / L(h, k)]$$

ile verilen formül kullanıldı. Burada, h ve k sırasıyla yeterince küçük konum ve adım uzunlukları olup L ise L_2 ve L_∞ normlarından birini temsil eder [24].

Gözönüne alınan tüm sayısal örneklerde literatürde mevcut olan ilgili çalışmalarla karşılaştırma yapmak için tüm hesaplamalarda $\alpha = 1$ için aynı parametreler ve Matlab kullanıldı.

Durum 1: Bu durum için $p = 2$ ve $[x_l, x_r] = [-30, 30]$ seçildi. $h = k = 0.1$ için farklı T zamanlarında (2.2.4) ile verilen mevcut şemadan elde edilen L_∞ hata normları [9, 21] de verilen değerler ile birlikte Çizelge 3.1 de karşılaştırıldı. Çizelge 3.1 den L_∞ hata normunun yeterince küçük ve [9, 21] deki sonuçlarla da uyumlu olduğu görüldü. Bu ise bilindiği gibi hata normlarının yeterince küçük olması yaklaşık ve tam çözümlerin birbirine çok yakın olduğu anlamına gelir.

Durum 2: Bu örnek için $p = 2$ fakat $[x_l, x_r] = [-30, 120]$ seçildi. $h = k = 0.1$ için farklı T zamanlarında (2.2.4) ile verilen mevcut şemadan elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları [8, 21] de verilen sonuçlarla Çizelge 3.2 de karşılaştırıldı. Mevcut sonuçların yeterince küçük ve diğer araştırmacıların verdikleriyle de uyumlu olduğu görüldü. Ayrıca L_2 ve L_∞ hata normları $k = 0.1$ ve h 'ın farklı konum adım uzunlukları için $T = 10$ zamanında hesaplandı ve diğer araştırmacılar tarafından verilenlerle kıyaslaması Çizelge 3.2 de verildi. Çizelge 3.2 den mevcut hata normlarının yeterince küçük olduğu, h değeri küçülürken hatalarında gittikçe küçülerek şemadan beklenen yakınsaklığı sergilediği açıkça görülmektedir. Bunlarla birlikte

$p = 2$ durumunda fakat $h = k$ 'nın yarılanarak 0.4 den 0.025'e kadar olan değerleri için $T = 60$ da L_2 ve L_∞ hata normlarından hesaplanan şemanın doğruluk mertebesi Çizelge 3.3 de listelendi. Bu çizelgeden ayırık noktalarda hesaplanan doğruluk mertebesinin şemanın tam değeri olan 2 ye oldukça yakın olduğu görüldü. Bu ise mevcut şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinin bir başka delilidir.

Durum 3: Bu durum için $[x_l, x_r] = [-30, 120]$ fakat $p = 4$ alındı. $k = 0.1$ ve h 'nin farklı konum adım uzunlukları için $T = 60$ da mevcut nümerik şemadan hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının [8, 21] de verilenlerle karşılaştırılması Çizelge 3.4 de sunuldu. Çizelge 3.4 ye bakıldığında mevcut normların yeterince küçük ve h değeri küçülürken gittikçe küçüldüğü fakat diğer araştırmacıların verdikleri sonuçların biraz daha iyi olduğu görüldü. Bunlarla birlikte $p = 4$ durumunda fakat $h = k$ 'nın yarılanarak 0.4 den 0.025'e kadar olan değerleri için $T = 60$ da L_2 ve L_∞ hata normlarından elde edilen şemanın doğruluk mertebesi Çizelge 3.5 de verildi. Bu çizelgeden ayırık noktalarda hesaplanan doğruluk mertebesinin şemanın tam değeri olan 2'nin çok yakın civarında olduğu görülmektedir. Bu ise yine sunulan şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinin bir başka kanıtıdır.

Durum 4: Bu durum için $[x_l, x_r] = [-30, 120]$ fakat $p = 2$ alındı. $h = k = 0.1$ için T 'nin bazı seçilmiş $T = 60$ zamanına kadar mevcut şemadan elde edilen L_2 ve L_∞ normlarının değerleri Çizelge 3.6 da listelendi ve [3, 7, 8, 21] çalışmalarında verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelge 3.6 dan hesaplanan hata normlarının yeterince küçük ve $T = 60$ zamanında [3, 7] dekilerden çok daha iyi fakat [8, 21] deki sonuçların daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Durum 5: Bu durum için $p = 3$ ve $[x_l, x_r] = [-30, 120]$ alındı. $h = k = 0.1$ için T 'nin $T = 60$ 'a kadar bazı seçilmiş zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ normları Çizelge 3.7 de sunuldu ve ayrıca [3, 7, 8, 21] deki sonuçlarla bir karşılaştırılması verildi. Çizelge 3.7 ye bakıldığında hesaplanan sonuçların yeterince küçük ve [3, 7] dekilerle uyumlu olduğu fakat [8, 21] deki sonuçların daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Bunlarla birlikte $p = 3$ durumunda fakat $h = k$ 'nın yarılanarak 0.4 den 0.025'e kadar olan değerleri için $T = 60$ da L_2 ve L_∞ hata normları yardımıyla hesaplanan mevcut şemanın yakınsaklık veya doğruluk mertebesi çizelgeden ayrılaştırılmış noktalarda elde edilen doğruluk mertebesinin şemanın tam değeri olan 2'nin oldukça yakın komşuluğunda olduğu görülmektedir. Bu ise yine mevcut şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinin bir diğer delilidir.

Durum 6: Bu durumda ise $[x_l, x_r] = [-30, 120]$ fakat $p = 6$ alındı. $h = k = 0.1$ değerleri için T 'nin $T = 60$ 'a kadar bazı seçilmiş zamanlarında mevcut şemadan hesaplanan L_2 ve L_∞ normları Çizelge 3.9 da listelendi ve ayrıca [3, 7, 8, 21] çalışmalarında sunulan sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelge 3.9 dan mevcut şemadan elde edilen her iki normun yeterince küçük ve [3, 7] de verilenlerle uyumlu olduğu ancak [8, 21] deki sonuçların daha iyi olduğu görüldü. Bunlarla birlikte $p = 6$ durumunda fakat $h = k$ 'nın yarılanarak 0.4 den 0.025'e kadar olan değerleri için $T = 60$ da L_2 ve L_∞ hata normlarından elde edilen mevcut şemanın yakınsaklık veya doğruluk mertebesi Çizelge 3.10 da listelendi. Bu çizelgeden açıkça ayırıklaştırılmış noktalarda hesaplanan doğruluk mertebesi şemanın tam değeri olan 2'nin oldukça yakın civarında olduğu görülmektedir. Bu ise yine verilen şemanın seçilen parametrelerde doğruluğu ve güvenilirliğinin bir başka kanıtıdır.

Yukarıdaki yaklaşık nümerik sonuçlara ilave olarak $p = 2, 3, 4, 6$ değerlerinde $h = k = 0.1$ için T 'nin farklı zamanlarında kütle (Q) ve enerji (E) korunum sabitlerinin mevcut şemadan elde edilen ayırık noktalarda hesaplanan değerleri Çizelge 3.11 de listelendi ve [7] de verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgeden kütle (Q) ve enerji (E) korunum sabitlerinin T zamanı artarken oldukça iyi korunduğu, neredeyse değişmeden sabit kaldığı, analitik değerlerine çok yakın olduğu ve ayrıca [7] deki çalışmada verilen değerlerle de iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Ayrıca $[x_l, x_r] = [-30, 120]$ aralığında her bir $p = 2, 3, 4, 6$ değerlerinde $h = k = 0.1$ için $T = 0, 30, 60$ zamanlarında mevcut şemadan elde edilen yaklaşık nümerik çözümlerin sürekliliğini ve tam çözüm ile birlikte problemin doğru fiziksel davranışı sergilediğini göstermek için her iki çözümün grafikleri Şekil 1 de verildi. Şekilden çözümlerin dalga grafiklerinin ayırt edilemeyecek kadar birbirlerine oldukça yakın olduğu ve mevcut şemadan elde edilen çeşitli zamanlardaki dalga profillerinin ise $T = 0$ dakilerle iyi uyum içinde olduğu görülmektedir. Bu durum açıkça (2.2.4) ile verilen sayısal şemanın doğruluğu, güvenilirliği ve etkinliğini gösteren önemli bir delildir.

Çizelge 3.12 de (2.2.4) ile verilen şemadan sırasıyla $p = 2, 3$ ve 6 değerlerinde $k = h = 0.1$ ve $x \in [-30, 120]$ için farklı T zamanlarında hesaplanan Q^n kütle ve E^n enerji değişmezlerinin [7] de sunulan değişmezler ile karşılaştırılması verildi. Çizelge 3.12 den her iki değişmezin iyi korunduğu ve ayrıca [7] de sunulan değişmezler ile de oldukça iyi uyum

Çizelge 3.1 : Durum 1'in farklı T zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 2$, $h = k = 0.1$, $-30 \leq x \leq 30$).

t	L_2		L_∞	
	Mevcut	Mevcut	[9]($\theta = 0.5$)	[21]
2	$1.7407e-04$	$6.71082e-05$	$8.34099e-05$	$0.2528e-05$
4	$3.4641e-04$	$1.35420e-04$	$1.68611e-04$	$0.6252e-05$
6	$5.1583e-04$	$2.04417e-04$	$2.51387e-04$	$2.5497e-05$
8	$6.8393e-04$	$2.70651e-04$	$3.29181e-04$	$10.3546e-05$
10	$8.8532e-04$	$4.17005e-04$	$4.17005e-04$	$41.7005e-05$

Çizelge 3.2 : Durum 2'nin farklı T zamanlarında L_2 ve L_∞ hata normları($p = 2$, $h = k = 0.1$, $-30 \leq x \leq 120$).

t	L_2			L_∞			
	Mevcut	[8]	[21]	Mevcut	[9]	[8]	[21]
2	$1.7406e-04$	$5.8217e-06$	$0.5194e-05$	$6.7108e-05$	$1.7282e-04$	$2.8908e-06$	$2.5278e-06$
4	$3.4639e-04$	$1.0632e-05$	$0.9656e-05$	$1.3542e-04$	$3.3671e-04$	$5.1694e-06$	$4.5794e-06$
6	$5.1555e-04$	$1.4223e-05$	$1.3106e-05$	$2.0442e-04$	$4.8067e-04$	$6.4804e-06$	$5.8405e-06$
8	$6.8042e-04$	$1.6523e-05$	$1.5662e-05$	$2.7065e-04$	$1.0355e-04$	$7.1646e-06$	$6.6311e-06$
10	$8.4023e-04$	$1.8123e-05$	$1.7569e-05$	$3.3280e-04$	$4.1701e-04$	$7.6292e-06$	$7.1795e-06$

Çizelge 3.3 : Durum 2'nin h 'nin farklı değerleri için $T = 10$ zamanında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 2$, $k = 0.1$ $-30 \leq x \leq 120$).

h	L_2			L_∞		
	Mevcut	[8]	[21]	Mevcut	[8]	[21]
0.5	$1.1365e-02$	$4.5438e-04$	$4.5205e-04$	$4.5151e-03$	$1.9117e-04$	$1.8971e-04$
0.25	$3.1506e-03$	$1.1308e-04$	$1.1206e-04$	$1.2509e-03$	$4.7606e-05$	$0.4693e-04$
0.125	$1.0879e-03$	$2.8287e-05$	$0.2764e-04$	$4.3128e-04$	$1.1908e-05$	$0.1145e-04$
0.0625	$5.7201e-04$	$7.1601e-06$	$0.0683e-04$	$2.2601e-04$	$1.9950e-06$	$0.0256e-04$
0.03125	$4.4316e-04$	$2.0284e-06$	-	$1.7468e-04$	$7.6750e-07$	-

Çizelge 3.4 : Durum 2'nin $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan doğruluk mertebeleri ($p = 2, -30 \leq x \leq 120$).

L_2				
h	Mevcut	Mertebe(L_2)	[4]	[7]
0.4	$5.923628e-02$	-	$3.5235e-03$	$5.476327e-02$
0.2	$1.510290e-02$	1.9717	$8.0413e-04$	$1.385256e-02$
0.1	$3.794134e-03$	1.9930	$1.9123e-04$	$3.474318e-03$
0.05	$9.496890e-04$	1.9982	$4.6595e-05$	$8.691419e-04$
0.025	$2.375380e-04$	1.9993	-	$2.059064e-04$
L_∞				
Mertebe(L_∞)				
0.4	$2.08386e-02$	-	$1.9587e-02$	$1.958718e-02$
0.2	$5.33423e-03$	1.9659	$4.9838e-03$	$4.983761e-03$
0.1	$1.34165e-03$	1.9913	$1.2520e-03$	$1.252185e-03$
0.05	$3.35876e-04$	1.9980	$3.1346e-04$	$3.134571e-04$
0.025	$8.40105e-05$	1.9993	-	$7.550730e-05$

Çizelge 3.5 : Durum 3'ün h 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 4, k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).

L_2				L_∞		
h	Mevcut	[8]	[21]	Mevcut	[8]	[21]
1.0	$4.6863e-01$	$3.0217e-02$	$2.0799e-02$	$1.6478e-01$	$1.1541e-02$	$0.8308e-02$
0.5	$1.2671e-01$	$5.5853e-03$	$0.5136e-02$	$4.5480e-02$	$2.2164e-03$	$0.2054e-02$
0.25	$3.6064e-02$	$1.3010e-03$	$0.1316e-02$	$1.3024e-02$	$5.1848e-04$	$0.0523e-02$
0.125	$1.3222e-02$	$3.5071e-04$	$0.0388e-02$	$4.7789e-03$	$1.2789e-04$	$0.0142e-02$
0.0625	$7.5068e-03$	$1.8243e-04$	$0.0205e-02$	$2.7095e-03$	$3.1864e-05$	$0.0046e-02$

Çizelge 3.6 : Durum 3'ün $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan doğruluk mertebeleri ($p = 4, -30 \leq x \leq 120$).

L_2			L_∞	
h	Mevcut	Mertebe(L_2)	Mevcut	Mertebe(L_∞)
0.4	$1.65826e-01$	-	$5.92184e-02$	-
0.2	$4.19992e-02$	1.9812	$1.51351e-02$	1.9681
0.1	$1.04787e-02$	2.0029	$3.78595e-03$	1.9992
0.05	$2.61725e-03$	2.0013	$9.44676e-04$	2.0028
0.025	$6.74913e-04$	1.9553	$2.35822e-04$	2.0021

Çizelge 3.7 : Durum 4'ün farklı T zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 2, h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).

t	L_2			L_∞		
	Mevcut	[8]	[21]	Mevcut	[8]	[21]
10	$8.4023e-04$	$1.8132e-05$	$1.7569e-05$	$3.3280e-04$	$7.6292e-06$	$0.7180e-05$
20	$1.5607e-03$	$2.2513e-05$	$2.2618e-05$	$5.9277e-04$	$9.0949e-06$	$0.8634e-05$
30	$2.1806e-03$	$2.5463e-05$	$2.5020e-05$	$8.0294e-04$	$1.0274e-05$	$0.9419e-05$
40	$2.7434e-03$	$2.8139e-05$	$2.6567e-05$	$9.9067e-04$	$1.1378e-05$	$0.9994e-05$
50	$3.2763e-03$	$3.0753e-05$	$2.7735e-05$	$1.1684e-03$	$1.2447e-05$	$1.0470e-05$
60	$3.7941e-03$	$3.3375e-05$	$2.8718e-05$	$1.3416e-03$	$1.3495e-05$	$1.0897e-05$
60 [7]	$L_2 = 3.4743e-03$			$L_\infty = 1.2522e-05$		
60 [3]				$L_\infty = 0.1912e-05$		

Çizelge 3.8 : Durum 5'in farklı T zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ($p = 3, h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).

t	L_2			L_∞		
	Mevcut	[8]	[21]	Mevcut	[8]	[21]
10	$1.6201e-03$	$4.9409e-05$	$0.4910e-04$	$6.5151e-04$	$2.1569e-05$	$2.1511e-05$
20	$3.0762e-03$	$6.5313e-05$	$0.6931e-04$	$1.1822e-03$	$2.7517e-05$	$2.8701e-05$
30	$4.4222e-03$	$7.9999e-05$	$0.8613e-04$	$1.6535e-03$	$3.3326e-05$	$3.5042e-05$
40	$5.7147e-03$	$9.4787e-05$	$1.0236e-04$	$2.1041e-03$	$3.9091e-05$	$4.1167e-05$
50	$6.9816e-03$	$1.0984e-04$	$1.1855e-04$	$2.5464e-03$	$4.4846e-05$	$4.7239e-05$
60	$8.2365e-03$	$1.2513e-04$	$1.3484e-04$	$2.9862e-03$	$5.0589e-05$	$5.3277e-05$
60 [7]	$L_2 = 7.3571e-03$			$L_\infty = 2.7090e-03$		
60 [3]				$L_\infty = 0.3849e-03$		

Çizelge 3.9 : Durum 5'in $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan doğruluk mertebeleri ($p = 3, -30 \leq x \leq 120$).

L_2				
h	Mevcut	Mertebe(L_2)	[4]	[7]
0.4	$1.294124e-01$	-	$5.2629e-03$	$1.164674e-01$
0.2	$3.289011e-02$	1.9763	$1.4684e-03$	$2.940136e-02$
0.1	$8.236484e-03$	1.9976	$3.8492e-04$	$7.357052e-03$
0.05	$2.057961e-03$	2.0008	$4.6595e-05$	$1.837759e-03$
0.025	$5.147622e-04$	1.9992		$4.283535e-04$
L_∞				
Mertebe(L_∞)				
0.4	$4.65671e-02$	-	$1.9587e-02$	$4.251029e-02$
0.2	$1.18995e-02$	1.9684	$4.9838e-03$	$1.080424e-02$
0.1	$2.98623e-03$	1.9945	$1.2520e-03$	$2.708996e-03$
0.05	$7.46565e-04$	2.0000	$3.1346e-04$	$6.772212e-04$
0.025	$1.86571e-04$	2.0005		$1.596208e-04$

Çizelge 3.10 : Durum 6'nın farklı T zamanlarında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları
($p = 6, h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).

t	L_2			L_∞		
	Mevcut	[8]	[21]	Mevcut	[8]	[21]
10	$1.9401e-03$	$6.5998e-04$	$0.6542e-03$	$7.4180e-04$	$3.1032e-04$	$3.0980e-04$
20	$3.8765e-03$	$1.1382e-03$	$1.1404e-03$	$1.4290e-03$	$3.1897e-04$	$3.1897e-04$
30	$5.8738e-03$	$1.4631e-03$	$1.4673e-03$	$2.1226e-03$	$3.2836e-04$	$3.2756e-04$
40	$7.9923e-03$	$1.7187e-03$	$1.7255e-03$	$2.8511e-03$	$3.41813e-04$	$3.4099e-04$
50	$1.0251e-02$	$1.9368e-03$	$1.9468e-03$	$3.6222e-03$	$3.4127e-04$	$3.4115e-05$
60	$1.2656e-02$	$2.1280e-03$	$2.1422e-03$	$4.4409e-03$	$3.3650e-04$	$3.3622e-05$
60 [7]	$L_2 = 1.1569e-02$			$L_\infty = 4.1593e-03$		
60 [3]	-			$L_\infty = 1.8246e-03$		

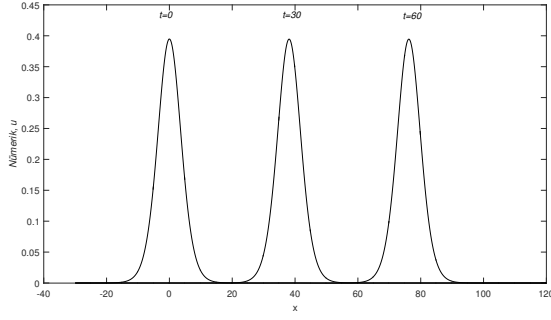
Çizelge 3.11 : Durum 6'nın $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan doğruluk mertebeleri ($p = 6, -30 \leq x \leq 120$).

h	L_2			
	Mevcut	Mertebe(L_2)	[4]	[7]
0.4	$1.967825e-01$	-	$3.1535e-02$	$1.787127e-01$
0.2	$5.016257e-02$	1.9719	$7.4328e-03$	$4.598952e-02$
0.1	$1.265646e-02$	1.9867	$1.8246e-03$	$1.156944e-02$
0.05	$3.865346e-03$	1.7112	$4.5437e-4$	$2.892147e-03$
0.025	$2.526960e-03$	0.6132		$6.585307e-04$
	L_∞			
	Mertebe(L_∞)			
0.4	$6.911542e-02$	-	$6.3539e-02$	$6.353868e-02$
0.2	$1.778464e-02$	1.9584	$1.6967e-02$	$1.649585e-02$
0.1	$4.440870e-03$	2.0017	$4.1593e-03$	$4.159339e-03$
0.05	$1.10581e-03$	2.0057	$1.0409e-03$	$1.040878e-03$
0.025	$3.73859e-04$	1.5645	-	$2.375782e-04$

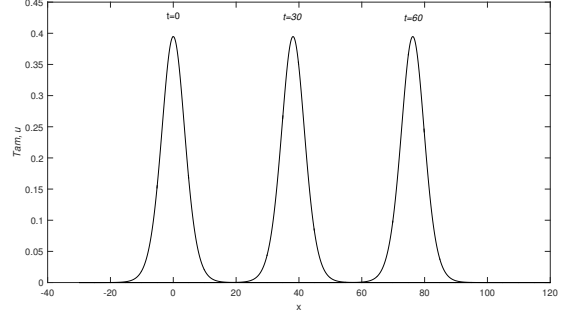
Çizelge 3.12 : Model problemin farklı p değerleri ve farklı T zamanlarında hesaplanan korunum sabitleri ($h = k = 0.1, -30 \leq x \leq 120$).

p	t	Q^n		E^n	
		Mevcut	[7]	Mevcut	[7]
2	10	1.897659909156 72	1.89765826296001	0.53317025755160	0.53317523158085
	20	1.89766151665176	1.89765826887321	0.53317016933458	0.53317523187251
	30	1.89766307808440	1.89765826299393	0.53317011007779	0.53317523117725
	40	1.89766457586974	1.89765826556893	0.53317007468520	0.53317523147809
	50	1.89766609080850	1.89765826097587	0.53317005420888	0.53317523177618
	60	1.89766768278485	1.89765826538488	0.53317004247998	0.53317523107405
3	10	2.67262470084804	2.67260867526530	1.11344456939867	1.11346267885270
	20	2.67264001034500	2.67260867623658	1.11344162045879	1.11346267846522
	30	2.67265485842323	2.67260867414713	1.11343877498031	1.11346267808394
	40	2.67266933868579	2.67260867263988	1.11343600048864	1.11346267871158
	50	2.67268324459194	2.67260867287471	1.11343327096924	1.11346267833006
	60	2.67269910476673	2.67260867972944	1.11343057002872	1.11346267895871
6	10	3.990233980923087	3.98866332039089	1.917645761586568	1.91761301465671
	20	3.991726640451229	3.98866326085426	1.917637415824638	1.91761301473989
	30	3.993164724456416	3.98866326085426	1.917629141075405	1.91761301482083
	40	3.994567262412403	3.98866326085426	1.917620930177676	1.91761301492744
	50	3.995946779582793	3.98866397335989	1.917612772336146	1.91761301400971
	60	3.997304935218438	3.98866362197259	1.917604659354527	1.91761301467917

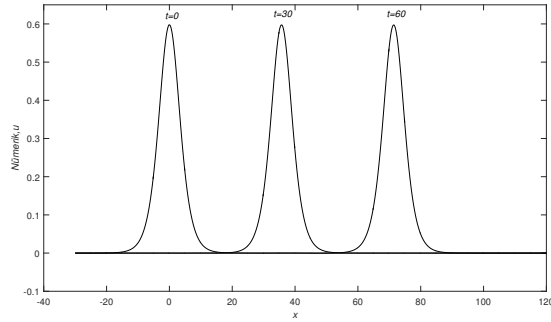
içinde olduğu görülmektedir. Değişmezlerin artan zamanla neredeyse değişmeden sabit kalması yani korunuyor olması mevcut şemanın doğruluğu ve güvenilirliğinin bir göstergesidir.



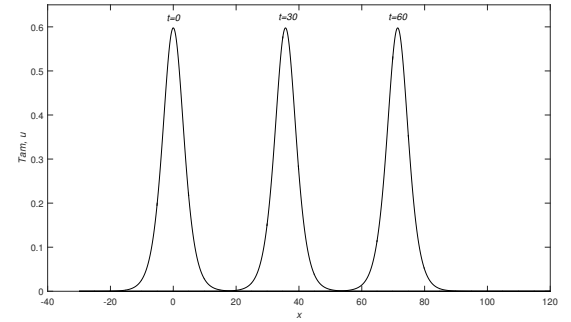
(a) $p=2$ için nümerik çözüm



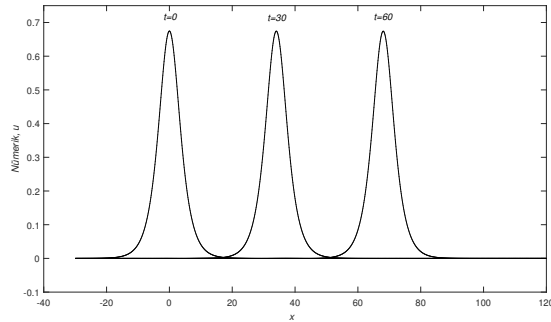
(b) $p=2$ için tam çözüm



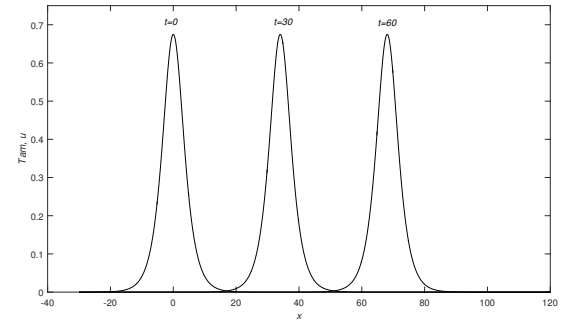
(c) $p=3$ için nümerik çözüm



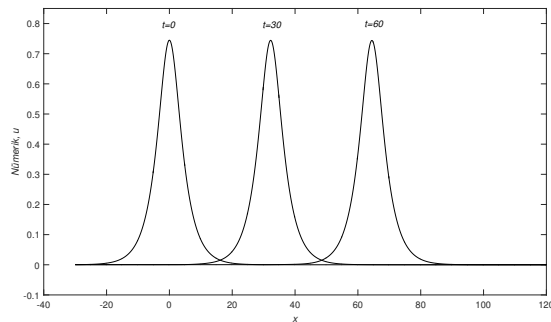
(d) $p=3$ için tam çözüm



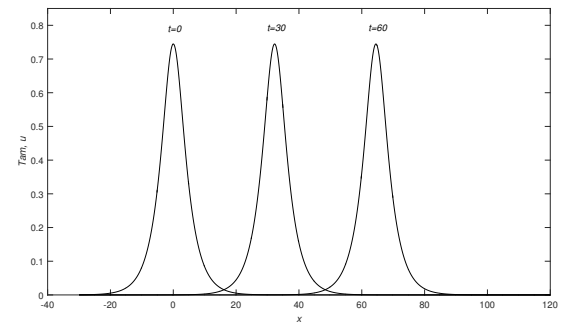
(e) $p=4$ için nümerik çözüm



(f) $p=4$ için tam çözüm



(g) $p=6$ için nümerik çözüm



(h) $p=6$ için tam çözüm

Şekil 3.1 : Farklı p değerlerinde ve farklı T zamanlarında hesaplanan nümerik ve tam çözümlerin dalga profilleri ($h = k = 0.1$, $-30 \leq x \leq 120$).

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, 1-boyutlu lineer olmayan genel Rosenau-RLW denkleminin verilen başlangıç ve sınır değer probleminde görülen p parametresinin $p = 2, 3, 4$ ve 6 durumları göz önüne alındı. Herbir p durumu için ortaya çıkan başlangıç ve sınır değer probleminin yaklaşık nümerik sonuçlarını hesaplamak için Bölüm 3 de (2.2.4) ile verilen şema başarılı bir şekilde kullanıldı.

Mevcut şemadan elde edilen yaklaşık sonuçların analitik çözümden elde edilen sonuçlara ne kadar doğrulukta ve yakınlıkta olduklarını test etmek için L_2 ve L_∞ ile gösterilen ortalama ve maksimum hata normları, Q^n ve E^n ile temsil edilen kütle ve korunum sabitleri, ve şemanın doğruluk mertebeleri hesaplandı. Elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının genel olarak yeterince küçük olduğu; Q^n ve E^n korunum sabitlerinin iyi korunduğu, T zamanı büyüdükçe değişimin çok küçük ve neredeyde sabit kaldığı; doğruluk mertebelerinin 2'nin çok yakın komşuluğunda yani şemanın gerçek doğruluk mertebesi olan $O(h^2) + O(k^2)$ ile iyi uyum içinde olduğu görüldü.

Elde edilen tüm sonuçlardan ve Çizelge 4.1 den konum ve zaman adım uzunlukları iyileştirildiğinde yaklaşık nümerik çözümlerin gittikçe analitik çözümlere yaklaştığı açıkça görüldü. Her ne kadar adım uzunluklarının gittikçe küçülmesi durumunda yaklaşık çözümler gittikçe analitik sonuçlara yaklaştıysa da bu durumda hesaplama maliyetinin artacağı kaçınılmazdır.

Sonuç olarak uygulaması kolay olan sunulan şema doğru ve güvenilir sonuçlar verdiğinden özellikle matematiksel fizikte, uygulamalı matematikte ve diğer birçok mühendislik dallarında ortaya çıkan lineer olmayan dalga hareketlerini tanımlamada önemli olan başlangıç ve sınır şartları ile verilen Rosenau-RLW denklemi gibi lineer olmayan birçok kısmi differansiyel denklemin yaklaşık nümerik çözümlerini elde etmek için kolayca ve başarılı bir şekilde kullanılabilir.

Çizelge 4.1 : Sunulan şemadan p ve $h = k$ 'nın farklı değerleri için $T = 60$ zamanında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normları ile birlikte doğruluk mertebeleri ($-30 \leq x \leq 120$).

p	h	L_2	$Mertebe(L_2)$	L_∞	$Mertebe(L_\infty)$
2	0.5	$9.11869e-02$	—	$3.20393e-02$	—
	0.25	$2.35120e-02$	1.9554	$8.30354e-03$	1.9480
	0.125	$5.92294e-03$	1.9890	$2.09362e-03$	1.9877
	0.0625	$1.48355e-03$	1.9973	$5.24681e-04$	1.9965
3	0.5	$1.99081e-01$	—	$7.10812e-02$	—
	0.25	$5.12672e-02$	1.9572	$1.85253e-02$	1.9400
	0.125	$1.28689e-02$	1.9941	$4.66375e-03$	1.9899
	0.0625	$3.21622e-03$	2.0005	$1.16665e-03$	1.9991
4	0.5	$2.54826e-01$	—	$9.06794e-02$	—
	0.25	$6.55611e-02$	1.9586	$2.35893e-02$	1.9426
	0.125	$1.63883e-02$	2.0002	$5.91793e-03$	1.9950
	0.0625	$4.08772e-03$	2.0033	$1.47697e-03$	2.0025
6	0.5	$2.99767e-01$	—	$1.04395e-01$	—
	0.25	$7.82644e-02$	1.9374	$2.76986e-02$	1.9142
	0.125	$1.96382e-02$	1.9947	$6.94646e-03$	1.9955
	0.0625	$5.35374e-03$	1.8750	$1.72987e-03$	2.0056

KAYNAKLAR

- [1] **Korteweg, D.J. ve de Vries, G..** (2015). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves,, *The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of science* 39(240), 422-443.
- [2] **Rosenau, P.** (1988). Dynamics of Dense Discrete Systems: High Order Effects, *Progress of Theoretical Physics*, 79(5), 1028–1042.
- [3] **Wang, H., Li, S. ve Wang, J.** (2015). A conservative weighted finite difference scheme for the generalized Rosenau-RLW equation, *Computational and Applied Mathematics*, 36(1), 63–78.
- [4] **Wang, H., Wang, J. ve Li, S.** (2015). A new conservative nonlinear high-order compact finite difference scheme for the general Rosenau-RLW equation, *Boundary Value Problems*, 77(1), 1-16, 2015(1).
- [5] **Ben Wongsaijai, K.P. ve Disyadej, T.** (2014). A Compact Finite Difference Method for Solving the General Rosenau–RLW Equation, *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 44(4), 1-7.
- [6] **Pan, X. ve Zhang, L.** (2012). Numerical Simulation for General Rosenau-RLW Equation: An Average Linearized Conservative Scheme, *Mathematical Problems in Engineering Article ID 517818*, 2012, 1–15.
- [7] **Zuo, J.M., Zhang, Y.M., Zhang, T.D. ve Chang, F.** (2010). A New Conservative Difference Scheme for the General Rosenau-RLW Equation, *Boundary Value Problems* 10(1), 1-13, 2010(1), 516260.
- [8] **Mittal, R. ve Jain, R.** (2012). Numerical solution of General Rosenau-RLW Equation using Quintic B-splines Collocation Method, *Communications in Numerical Analysis Article ID cna-00129*, 2012, 1–19.
- [9] **Pan, X. ve Zhang, L.** (2012). On the convergence of a conservative numerical scheme for the usual Rosenau-RLW equation, *Applied Mathematical Modelling*, 36(8), 3371–3378.
- [10] **Pan, X., Zheng, K. ve Zhang, L.** (2013). Finite difference discretization of the Rosenau-RLW equation, *Applicable Analysis*, 92(12), 2578–2589.
- [11] **Hu, J. ve Wang, Y.** (2013). A High-Accuracy Linear Conservative Difference Scheme for Rosenau-RLW Equation, *Mathematical Problems in Engineering Article ID 870291*, 2013, 1–8.
- [12] **Wongsaijai, B. ve Poochinapan, K.** (2014). A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau–KdV equation and the Rosenau–RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 289–304.

- [13] **Cai, W., Sun, Y. ve Wang, Y.** (2015). Variational discretizations for the generalized Rosenau-type equations, *Applied Mathematics and Computation*, 271, 860–873.
- [14] **He, D. ve Pan, K.** (2015). A linearly implicit conservative difference scheme for the generalized Rosenau–Kawahara-RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 271, 323–336.
- [15] **Yağmurlu, N.M., Karaağaç, B. ve Kutluay, S.** (2017). Numerical Solutions of Rosenau-RLW Equation Using Galerkin Cubic B-Spline Finite Element Method, *American Journal of Computational and Applied Mathematics* 7(1), 1-10, 2015(1).
- [16] **Guo, C., Li, F., Zhang, W. ve Luo, Y.** (2019). A conservative numerical scheme for Rosenau-RLW equation based on multiple integral finite volume method, *Boundary Value Problems* 19(1), 1-17, 2019(1).
- [17] **Wongsaijai, B., Mouktonglang, T., Sukantamala, N. ve Poochinapan, K.** (2019). Compact structure-preserving approach to solitary wave in shallow water modeled by the Rosenau-RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 340, 84–100.
- [18] **Mustahsan, M., Kiran, A., Singh, J., Nisar, K.S. ve Kumar, D.** (2020). Higher order B-spline differential quadrature rule to approximate generalized Rosenau-RLW equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 43(11), 6812–6822.
- [19] **Karakoc, S.B.** (2018). A new numerical application of the generalized Rosenau-RLW equation, *cientia Iranica SciTech Solutions* 27(2), 772–783.
- [20] **Wongsaijai, B. ve Poochinapan, K.** (2021). Optimal decay rates of the dissipative shallow water waves modeled by coupling the Rosenau-RLW equation and the Rosenau-Burgers equation with power of nonlinearity, *Applied Mathematics and Computation*, 405, 126202.
- [21] **Kutluay, S., Karta, M. ve Uçar, Y.** (2021). *Strang time-splitting technique for the generalised Rosenau-RLW equation* 148(95), 1-10.
- [22] **Smith, G.D.** (1987). Numerical solution of partial differential equations: Finite difference methods 97(5), 1-352, *Clarendon Press, Oxford*.
- [23] **Wang, J.** (2015). Numerical Analysis of A Mixed Finite Element Method for Rosenau-Burgers Equation, *Proceedings of the 2015 International Industrial Informatics and Computer Engineering Conference* 100(70), 610-614, Atlantis Press.
- [24] **Mittal, R.C. ve Jain, R.** (2012). Application of Quintic B-splines Collocation Method on Some Rosenau Type Nonlinear Higher Order Evolution Equations, *Int. Journal of Nonlinear Science*, 13, 1749–3889.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Tuba KARADAŞ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı

