



GİRESUN
ÜNİVERSİTESİ



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RUNGE-KUTTA-FEHLBERG YÖNTEMİNİN KÜÇÜK
GÜRÜLTÜLÜ İTÔ STOKASTİK DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN GENİŞLETİLMESİ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Yüksek Lisans Tezi
Dudu AYDIN OĞUR
172110012

2020

GİRESUN

Yüksek Lisans Tezi

Ad Soyad : Dudu AYDIN OĞUR

Yıl : 2020

T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**RUNGE-KUTTA-FEHLBERG YÖNTEMİNİN KÜÇÜK
GÜRÜLTÜLÜ İTÔ STOKASTİK DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN GENİŞLETİLMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Öğrencinin Adı SOYADI : Dudu AYDIN OĞUR
ORCID : orcid.org/0000-0003-3394-0106
Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 21.07.2020

Enstitü Anabilim Dalı : Matematik

Tez Danışmanı : Dr. Öğr. Üyesi Hande G. AKDEMİR
ORCID : orcid.org/0000-0003-3241-1560

Haziran 2020
GİRESUN

**T.C.
GİRESUN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**RUNGE-KUTTA-FEHLBERG YÖNTEMİNİN KÜÇÜK
GÜRÜLTÜLÜ İTÔ STOKASTİK DİFERANSİYEL
DENKLEMLER İÇİN GENİŞLETİLMESİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Dudu AYDIN OĞUR

Enstitü Anabilim Dalı

:

Matematik

Bu tez 30/06/2020 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından oybirliği ile kabul edilmiştir.

**Doç. Dr.
Mehmet KORKMAZ**

Jüri Başkanı

**Dr. Öğr. Üyesi
Murat GÜL**

Üye

**Dr. Öğr. Üyesi
Hande GÜNAY
AKDEMİR
Üye**

**Doç. Dr.
Bahadır KOZ
Enstitü Müdürü**

BEYAN

Tez içindeki tüm verilerin akademik kurallar çerçevesinde tarafımdan elde edildiğini, görsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçların akademik ve etik kurallara uygun şekilde sunulduğunu, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezde yer alan verilerin bu üniversite veya başka bir üniversitede herhangi bir tez çalışmasında kullanılmadığını beyan ederim.

Dudu AYDIN OĞUR

30/06/2020

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi birikimi ve kişiliğiyle her zaman örnek olan, çalışmalarında büyük emeği ve desteğiyle yol gösteren, öğrencisi olmaktan büyük mutluluk duyduğum danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Hande GÜNAY AKDEMİR'e teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Hayatım boyunca bana destek olan, hep yanımda olan canım aileme, bu süreçte en büyük desteğim sevgili eşime çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	I
İÇİNDEKİLER	II
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	IV
ŞEKİLLER LİSTESİ	VI
TABLolar LİSTESİ	VII
ÖZET	VIII
SUMMARY	IX
BÖLÜM 1. GİRİŞ	1
BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI.....	4
BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM	7
3.1. Ön Bilgiler	7
3.1.1. Stokastik Süreç	7
3.1.2. Brown Hareketi Süreci ve Özellikleri.....	8
3.1.3. Toplam ve Kuadratik Varyasyonlar	12
3.1.4. Riemann-Stieltjes İntegralleri	13
3.1.5. Itô Stokastik İntegrali.....	15
3.1.6. Stokastik Diferansiyel ve Itô Kuralı	18
3.2. Sayısal Yöntemler	22
3.2.1. Euler-Maruyama Yöntemi	23
3.2.2. Milstein Yöntemi	23
3.2.3. Stokastik Taylor Açılımı (Platen-Wagner Açılımları).....	23
3.2.4. Stokastik Runge-Kutta Tipli Yöntemler	37

3.2.4.1 Stokastik Heun Yöntemi	39
3.2.4.2 Türevsiz Milstein Yöntemi	39
3.2.4.3 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 2 – Saito	39
3.2.4.4 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 3 – Newton.....	41
3.2.4.5 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 4 – Kaneko	41
3.2.4.6 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 5– Rössler	42
3.2.4.7 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 6 – Kloeden ve Platen	45
 BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI	46
4.1. Stokastik Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi	46
4.2. Simülasyon Çalışmaları.....	48
 BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ	53
 KAYNAKLAR.....	55
EKLER	59
ÖZGEÇMİŞ	63

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Ω	: Örnek uzay
$\mathfrak{F}$	: Sigma cebir
$(\Omega, \mathfrak{F}, P)$	: Olasılık uzayı
ω	: Deneme sonucu, gözlem, olay
X veya $X(\omega)$	: Rastgele değişken
$X(\omega, t), X_t(\omega), X(t)$ veya X_t	: Stokastik süreç
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar
B_t	: Tek boyutlu Brown hareketi süreci
$E[X]$	: X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$Var(X)$	: X rastgele değişkeninin varyansı
$N(\mu, \sigma^2)$	: μ ortalamalı σ^2 varyanslı normal dağılım
$Cov(X, Y)$	: X ile Y rastgele değişkenlerinin kovaryansı
Z	: Standart normal dağılımlı rastgele değişken
$m.s.$ $\cong$	: Kuadratik orta anlamda yakınsar
dB_t	: B_t sürecinin diferansiyeli
ΔB_n	: Brown hareketi sürecinin artımları
$a(t, X_t)$	: Stokastik diferansiyel denklemde sürüklenme terimi
$b(t, X_t)$	: Stokastik diferansiyel denklemde difüzyon terimi
X_{t_n}	: Stokastik diferansiyel denklemin $t = t_n$ için analitik çözümü (gerçek çözüm)

Y_n	: X_{t_n} sürecinin yaklaşım süreci
h	: Adım boyu
$I_{(.)}$	: Tek katlı stokastik integral
$I_{(.,.)}$	: İki katlı stokastik integral
$I_{(.,.,.)}$	: Üç katlı stokastik integral
$O(.)$	: Büyük- O notasyonu
p	: Nümerik yöntemin mertebesi
BHS	: Brown Hareketi Süreci
EMY	: Euler-Maruyama Yöntemi
SDD	: Stokastik Diferansiyel Denklem
SHY	: Stokastik Heun Yöntemi
SRKF	: Stokastik Runge-Kutta-Fehlberg
STA	: Stokastik Taylor Açılımı
WPY	: Wagner-Platen Yaklaşımı

ŞEKİLLER LİSTESİ

Şekil 3.1. Brown Hareketinin Bir Realizasyonu	10
---	----



TABLolar LİSTESİ

Tablo 3.1. Örnek 3.6 için Ortalama Mutlak Hatalar	35
Tablo 3.2. Örnek 3.6 için Uydurulan Doğruların Katsayıları	36
Tablo 3.3. Örnek 3.7 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları	36
Tablo 3.4. Örnek 3.8 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları	40
Tablo 3.5 Örnek 3.9 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları	40
Tablo 3.6 Tablo 3.5 (Devamı)	41
Tablo 3.7 Örnek 3.10 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları	44
Tablo 3.8 Örnek 3.11 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları	44
Tablo 4.1. Örnek 4.1 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Kestirilen Mertebe Değerleri	50
Tablo 4.2. Örnek 4.2 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Kestirilen Mertebe Değerleri	51
Tablo 4.3. Örnek 4.3 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Kestirilen Mertebe Değerleri	52

RUNGE-KUTTA-FEHLBERG YÖNTEMİNİN KÜÇÜK GÜRÜLTÜLÜ İTÔ STOKASTİK DİFERANSİYEL DENKLEMLER İÇİN GENİŞLETİLMESİ

ÖZET

Bu tezde, öncelikle skaler Stokastik Diferansiyel Denklemlerin (SDD) nümerik çözümleri için gerekli altyapının yanı sıra kapsamlı bir literatür taraması verilmiştir. Runge-Kutta (RK) tipli açık yöntemlerin güçlü yakınsak stokastik versiyonları incelenmiş ve karşılaştırmalı simülasyon çalışmaları yapılmıştır. Küçük gürültü durumu için, Fehlbeg katsayılarının Stokastik RK (SRK) tipli yöntemle uyarlanmasıyla elde edilen SRK-Fehlbeg (SRKF) yöntemi önerilmiştir.

Anahtar kelimeler: Brown hareketi süreci, Itô integrali, Itô stokastik adi diferansiyel denklemler, nümerik çözümler, güçlü yakınsaklık mertebesi, stokastik Runge-Kutta metodu, küçük gürültü.

AN EXTENSION OF THE RUNGE-KUTTA-FEHLBERG METHOD FOR ITÔ STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SMALL NOISE

SUMMARY

In this thesis, necessary preliminary information for numerical solutions of scalar Stochastic Differential Equations (SDE), as well as a comprehensive literature review, are given first. Strong stochastic versions of explicit Runge-Kutta (RK) methods are examined and comparative simulation studies are carried out. By adapting the Fehlberg coefficients to the Stochastic RK (SRK) type of method, SRK-Fehlberg (SRKF) method is proposed for SDE with small noise.

Keywords: Brownian motion process, Itô integrals, Itô stochastic ordinary differential equations, numerical solutions, strong order of convergence, stochastic Runge-Kutta method, small noise.

BÖLÜM 1. GİRİŞ

Bir mühendislik problemi, fizik kanunları gereğince veya deneyler gösterir ki; bir fonksiyonun zamana bağlı değişim hızını (türevini) içeren bir diferansiyel denklem ile ifade edilen matematiksel bir modele dönüşebilir. Deterministik olarak adlandırılan denklemlerde belirsizlik, yani şans faktörü göz önüne alınmaz. Ancak gerçek hayat problemlerinde, birbiriyle etkileşen çok sayıda bileşen içeren karmaşık sistemler vardır ve dış etkenlerin etkisiyle sonuçları tam olarak kestirilemeyen, yani tahmin edilemeyen durumlar ortaya çıkabilir. Koşullar değişmeden tekrarlanan bir deneyin sonuçları aynı olmayabilir. Deterministik adı verilen denklemlerden daha gerçekçi bir model temsili elde edilmek istenirse, ölçüm ve yuvarlama hataları, dalgalanmalar ve düzensizlikler, yani belirsizlik (gürültü) göz önüne alınmalıdır. Stokastik analizin konusu, rastgele fonksiyonların olduğu ve özellikle mikro ölçekli yapıları olan problemlerdir.

Bir rastgele fonksiyonu ifade etmek için Stokastik Süreç kavramı kullanılmaktadır. Bir rastgele değişkenler ailesi olarak tanımlanabilecek stokastik süreç, bir olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış ölçülebilir bir fonksiyondur ve indis kümesi genellikle zamanı ifade eder. Dolayısıyla iki değişkenli bir fonksiyon olan stokastik süreç, şans faktörünün ortadan kalktığı düşünüldüğünde sadece zamana bağlı bir fonksiyon (realizasyon); zamanın belirli bir anında ise bir rastgele değişkendir.

1828’de Botanikçi Robert Brown, çok küçük bir polen parçacığının suyun içine bırakıldığında çok düzensiz ve tahmin edilemez bir yörünge çizdiğini gözlemlemiştir [1]. Einstein 1905’te bu durumu, polenin su molekülleri tarafından rastgele yönlerde bombardımana tutulması olarak açıklamıştır [2]. Rastgele bir güç alanında hareket eden bir parçacığın hız denklemi ilk kez Langevin tarafından 1908’de formüle edilmiştir [3]. 1923’te Wiener, Brown Hareketi Sürecini (BHS)

tanımlamıştır [4]. SDD'nin sistematik olarak ele alınışı ise 1940'ların başlarında Japon matematikçi Kazufumi Itô ile başlamıştır [5].

BHS, Itô SDD'nin temellerinde önemli bir yer tutmaktadır. Bir modelde belirsizlik faktörünü göz önüne almak için Gürültü (Noise) terimi diferansiyel denkleme eklenir. Çok hızlı değişen rastgele dalgalanmalar beyaz gürültü adını alır. Beyaz gürültü süreci, BHS'nin türevi gibi görülebilir.

Deterministik bir denklemin çözümü, denklemi sağlayan fonksiyonun bulunmasıdır. Uygun koşullar altında ve belirli bir başlangıç koşuluna göre çözüm tek türdür. Diğer taraftan, stokastik bir denklemin çözümü ise sürekli bir stokastik süreçtir ve denklemi çözerek bu stokastik sürecin karakteristiklerinin elde edilmesi istenir. Örneğin:

$$\begin{aligned}y' &= ry \\ y(0) &= y_0\end{aligned}$$

deterministik üstel büyüme (ya da bozunma) modelinde büyüme (ya da bozunma) oranı olarak adlandırılan r sabit bir sayıdır. Bu oranın zamana bağlı değişen deterministik bir fonksiyonun civarında salınan bir rastgele değişken, yani $r_t = a(t) + \text{gürültü}$ şeklindeki bir stokastik süreç olduğu kabulü daha gerçekçidir.

Analitik çözümlerin olmadığı ya da zor olduğu karmaşık problemler bilgisayar teknolojisine dayalı nümerik (algoritmik) tekniklerle çözülmektedir. SDD'nin çözümü için uygulanan analitik ve nümerik yöntemler, stokastik dinamikleri göz önüne alacak şekilde düzenlenmiş deterministik tekniklere dayanmaktadır. SDD, fizik ve ekonomi gibi farklı alanlardaki uygulamalarından dolayı önemli bir yere sahiptir. Maalesef çoğu durumda bu denklemlerin analitik çözümleri yoktur. Bu durum, Taylor açılımlarına dayalı nümerik yöntemlerle yaklaşımı gerektirmiştir. Taylor yaklaşımlarının en büyük dezavantajı katsayıların yüksek mertebeden türevlerinin her iterasyonda hesaplanma zorluğudur. Taylor açılımlarındaki türevler yerine sonlu farklar getirildiğinde nümerik yöntemlerin önemli bir sınıfı olan SRK

yöntemleri elde edilir. Bu nedenle, SDD'lerin çözümü için SRK yöntemlerinin geliştirilmesine büyük ilgi gösterilmiştir.

Nümerik yöntemin etkinliğini veren iki önemli kriter: zayıf ve güçlü yakınsaklık mertebesidir [6]. Bazı durumlarda nümerik yaklaşımın realizasyonlarının gerçek çözüme yakın olması (yani güçlü yakınsaklık) önemlidir, diğer durumlarda ise sadece momentlerle ilgilenilebilir (yani zayıf yakınsaklık önemlidir) [7].

Bu tezde deterministik DD'lerin nümerik çözümlerinde kullanılan RK tipli açık yöntemlerin stokastik versiyonları incelenmiştir. Kapsamlı bir literatür taramasından elde edilen mevcut yöntemler, ön bilgileri de içeren Bölüm 3'te verilmiştir. Bu tezde, denklem sistemlerine değil de tek bir Stokastik Adi DD'nin olduğu skaler gürültü durumlarına ve güçlü yakınsak açık yöntemlere odaklanılmıştır. Ayrıca, bu tezin orijinal katkısı küçük dalgalanmalardan etkilenen bir sistemin modellenmesinde, yani kısaca küçük gürültü durumu için, Fehlberg [8] katsayılarının SRK tipli yönteme uyarlanmasıdır. Gürültü küçük olduğunda, farklı bir analitik karaktere sahip olmasına rağmen, stokastik denklemin bir şekilde deterministik olana "yakın" bir çözümü olması beklenebilir [9]. Araştırma bulgularına yer verilen Bölüm 4'te küçük gürültü terimi içeren Itô SDD için önerilen SRKF yöntemi verilmiştir. Yöntemin etkinliğini gösterebilmek üzere, yine aynı bölümde simülasyon çalışmaları yer almaktadır. Bu çalışmalar sonucu mertebenin 1'e yakınsadığı görülmüştür.

BÖLÜM 2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Rumelin [10], geleneksel RK yöntemlerinin SDD'lerin çözümündeki kullanımını araştırmış, ortaya çıkan yaklaşımların yakınsaklığı için yapılması gereken düzeltme işlemini ve katsayıların seçiminde dikkat edilmesi gereken kriterleri vermiştir. Rumelin'in önerdiği formülasyonlar için güçlü yakınsaklık mertebesinin $3/2$ değerini aşamayacağı gösterilmiştir [11].

Newton, çıkış noktası Taylor açılımları olan, asimptotik olarak etkin, 1 ve $3/2$ güçlü yakınsaklık mertebesindeki SRK yöntemlerini geliştirmiş ve yöntemlerle ilgili istatistiksel analizleri yapmıştır [12].

Kaneko, önerdiği 4 aşamalı SRK metodunun güçlü yakınsaklık mertebesinin $3/2$ olduğunu göstermiştir [13]. Ancak, bu yöntemin etkinliği Kloeden ve Platen'in [14]'te önerdiği yöntemle oranla daha fazla sayıda değerlendirme gerektirdiği için Rössler tarafından eleştirilmiştir [15].

Burrage ve Burrage, 1996'da güçlü yakınsaklık mertebesi 2 olan, dört aşamalı, açık SRK yöntemler ailesini vermiştir [11]. Yazarlar [16]'da, [11]'de verilen SRK yöntemlerinin mertebesini belirlemek üzere bir formülasyon vermiştir. Deterministik RK yöntemlerinin mertebelerinin belirlenmesi için Butcher [17] tarafından verilen köklü ağaç (rooted tree) kavramı, Burrage ve Burrage [11, 18] ve Rössler [15] tarafından SRK yöntemleri için renkli köklü ağaçlar ismiyle uyarlanmıştır. [18]'de SRK tipli nümerik yöntemlerin oluşturulmasında ve mertbe koşullarının yapılandırılmasında Taylor seri açılımlarının kullanıldığı metodolojik bir yol olan köklü ağaç teorisi ile analiz yapılmıştır. Ancak, daha karmaşık mertbe koşulları içeren, daha yüksek mertbeden yöntemlerin yapılandırılmasındaki güçlüğün giderilmesi için yazarlar [19]'da bağımsız ara aşamaları tanımlamıştır.

Kloeden [20]'de SDD için yüksek mertebeden nümerik yöntemlerin sistematik olarak Stokastik Taylor açılımından (STA) elde edilebileceğini belirtmiş, çeşitli gelişmelerle beraber kodlama aşamasında karşılaşılan sorunları ve açık araştırma alanlarını not düşmüştür.

Rössler [21]'de tek boyutlu bir Wiener sürecine göre Itô SDD sistemlerinin güçlü yakınsaması için SRK yöntemlerinin yeni bir sınıfını tanımlamıştır. Bir SRK metodu için güçlü anlamda en az $3/2$ merteye ile yakınsayan bazı katsayılar bulunmuştur. Bunun yanında, küçük gürültülü SDD için deterministik mertebesi 4 olan özel bir SRK metodu önerilmiştir.

Kim ve Stanescu tarafından [22]'de SDD'lerin çözümü için düşük depolamalı, $3/2$ güçlü yerel mertebeli sayısal yöntemler uyarlanmış ve hem komütatif hem de komütatif olmayan m -boyutlu SDD üzerinde test edilmiştir.

[15]'te, Rössler tarafından komütatif, skaler, köşegen veya toplamsal gürültü gibi özel durumları içeren SDD sistemleri için 1 ve $3/2$ güçlü yakınsaklık mertebesinde SRK yöntemleri tanımlanmıştır. Tüm verilen SRK yöntemlerinde, iyi bilinen yöntemlere kıyasla önemli ölçüde hesaplama karmaşıklığı azaltılmıştır. Yazar, zayıf ve güçlü yaklaşımların verildiği kapsamlı bir literatür çalışması sunmuştur.

Ekonomik deterministik RK yöntemlerinin stokastik uzantısı [23]'te verilmiştir. Verilen sınıf açık, üç aşamalı ve 1 güçlü yakınsaklık mertebesinde dir.

Kapalı yöntemler, onların mertebeleri ve kararlılık analizleri için okuyucu Kloeden ve Platen [24], Burrage ve Tian [25], Loghmani [26], Wang [27], Haghghi ve ark. [28] çalışmalarına başvurabilir.

Şimdi, küçük gürültülü Itô SDD için SRK tipli yöntemleri içeren ilgili literatüre geçelim. Özellikle küçük gürültüyü göz önüne alan Milstein ve Tretyakov [29-31] verdikleri yöntemlerin yakınsaklık mertebelerini ayrıntılı incelemiştir. Güçlü yakınsaklık mertebesi $3/2$ ve zayıf yakınsaklık mertebesi 2 olan yöntemler sırasıyla

Rössler [21, 32] çalışmalarında verilmiştir. Komori [33], küçük gürültü için deterministik mertebesi 4 olan ve 2 zayıf yakınsaklık mertebesindeki SRK yöntemlerini önermiştir. Yazar iki aşamalı, kapalı, 1. veya 2. mertebeden SRK yöntemi için kararlılık özelliklerini [34] çalışmasında incelemiştir. Açık başka bir yöntem için okuyucu [35] çalışmasına başvurabilir. Buckwar ve ark. [36] deterministik mertebesi 2 ve 3 olan iki aşamalı iyileştirilmiş SRK yöntemini önermişler ve bu yöntemin hata analizlerini yapmışlardır. Buckwar ve Riedler [37] sıçramalı-difüzyon DD için RK-Maruyama yöntemlerini ele almışlar ve özellikle küçük gürültü için bu yöntemlerin sıçramasız durumu da içeren lokal ve global hata davranışlarını analiz etmişlerdir. Buckwar ve arkadaşlarının makalelerini referans alan, sabit değil de uyarlanabilir (adaptive) adım boyu kullanılan ve küçük gürültülü SDD için yerel hata analizleri yapan iki çalışma Valinejad ve Hosseini [38, 39]'dur. RKF katsayılarını kullanan, uyarlanabilir başka bir yöntem için okuyucu Averina ve ark. [40] çalışmasına başvurabilir. Wang [41], çarpımsal gürültü içeren SDD için kararlılık (A-stability) özelliğine sahip SRK yöntemleri incelemiş ve güçlü yakınsaklık mertebelerini hesaplamıştır. Tang ve Xiao [42], DD sistemlerinin çözümleri için açık, yarı kapalı ve kapalı SRK tipli yöntemleri vermişlerdir. Difüzyon teriminde küçük bir çarpan olan Itô SDD için SRKF yöntemi [43]'te önerilmiştir.

BÖLÜM 3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Ön Bilgiler

Temel olasılık teorisi bilgisinin mevcut olduğu düşünülerek, bu bölümde bazı gerekli tanımlara, özelliklere, teoremlere, örneklerle ve literatürden bazı temel nümerik yöntemlere yer verilmiştir. Stokastik analiz ile ilgili daha ayrıntılı bilgi için okuyucu [44-45] kaynaklarına başvurabilir. Nümerik yöntemleri tartışmaya STA tipli yöntemlerden başlanmıştır.

3.1.1. Stokastik Süreç

Tanım 3.1. $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı olmak üzere, Ω örnek uzayı üzerinde tanımlanmış, $\mathfrak{F}$ -ölçülebilir, reel değerli $X = X(\omega)$ fonksiyonuna **rastgele değişken** denir.

Tanım 3.2. $T \subseteq \mathbb{R}$ olsun. Eğer reel değerli $X(\omega, t)$ veya $X_t(\omega)$ fonksiyonu her $t \in T$ için Ω örnek uzayında tanımlanmış bir rastgele değişken ise bu fonksiyona **rastgele fonksiyon**, eğer $T = \mathbb{R}^+$ ve t parametresi zamanı ifade ediyorsa bu durumda $X(\omega, t)$ rastgele fonksiyonuna **stokastik süreç** denir. Genellikle, süreç kısaca $X(t)$ veya X_t ile gösterilir.

Bu tanımdan görüleceği gibi stokastik süreç, rastgele değişkenden farklı olarak ω değişkeninin yanı sıra t zamanına bağlı bir fonksiyondur.

Tanım 3.3. Eğer $X(\omega, t)$ rastgele fonksiyonunda bir an için belirsizlik faktörünün

ortadan kalktığı düşünülürse, bu fonksiyon sadece t parametresine bağlı, rastgele olmayan bir fonksiyon olur. Bu durumda stokastik sürecin bir **realizasyonu** elde edilir.

3.1.2. Brown Hareketi Süreci ve Özellikleri

Tanım 3.4. $B = (B_t, t \in [0, \infty))$ stokastik süreci aşağıdaki şartları sağlıyorsa (Standart) **BHS** adını alır.

- $B_0 = 0$, süreç orijinden başlar.
- B_t sürecinin artımları durağan ve bağımsızdır, yani $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ için $(B_{t_1} - B_{t_0}), (B_{t_2} - B_{t_1}), \dots, (B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ bağımsız rastgele değişkenler ve $(B_t - B_s)$ ile $(B_{t+h} - B_{s+h})$ aynı dağılıma sahiptir.
- B_t sıfır ortalamalı, t varyanslı normal dağılıma uyan rastgele değişkendir $(B_t \sim N(0, t))$.

Teorem 3.1. $0 \leq s < t$ için $B_t - B_s \sim N(0, t - s)$.

İspat: $B_t = (B_t - B_s) + (B_s - B_0) = (B_t - B_s) + B_s$ şeklinde yazılır ve her iki tarafın da beklenen değeri alınır

$$E[B_t] = E[B_t - B_s] + E[B_s]$$

olur ve $E[B_t] = E[B_s] = 0$ olduğundan

$$E[B_t - B_s] = 0$$

bulunur. Her iki tarafın varyansı alındığında ise $(B_t - B_s)$ ile $(B_s - B_0)$ artımlarının bağımsız olma özelliğinden

$$\text{Cov}(B_t - B_s, B_s) = 0$$

ve

$$\text{Var}(B_t) = \text{Var}(B_t - B_s) + \text{Var}(B_s)$$

elde edilir. Buradan ve Tanım 3.4'ten $\text{Var}(B_t) = t$, $\text{Var}(B_s) = s$ olduğundan ve

$$\text{Var}(B_t - B_s) = t - s$$

bulunur. Dolayısıyla, $(B_t - B_s)$ de 0 ortalamalı, $(t - s)$ varyanslı normal dağılımlı süreçtir.

Teorem 3.2. $0 \leq s < t$ için $\text{Cov}(B_t, B_s) = s$.

İspat: Yine $(B_t - B_s)$ ile B_s bağımsız olduğundan

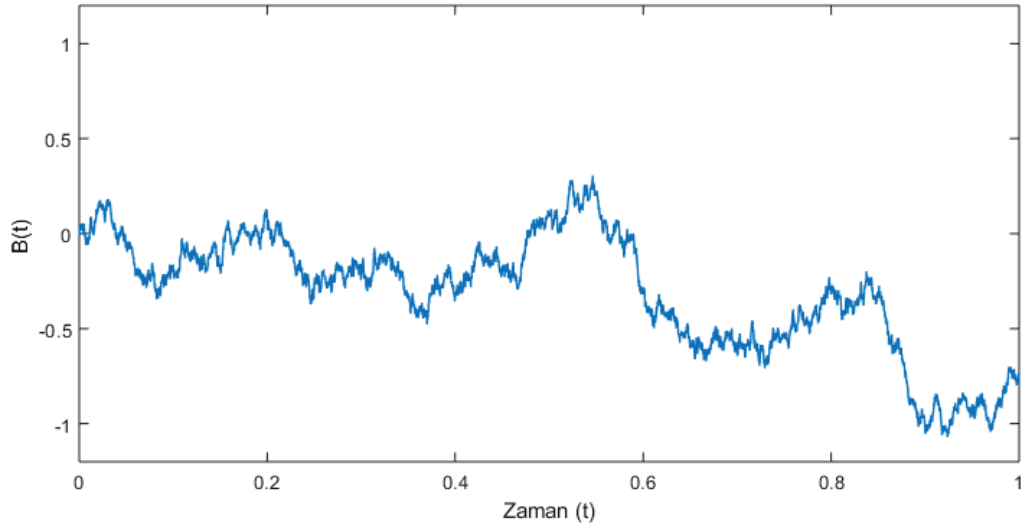
$$\begin{aligned} \text{Cov}(B_t, B_s) &= \text{Cov}((B_t - B_s) + B_s, B_s) = E\left[\left((B_t - B_s) + B_s\right)B_s\right] - E\left[(B_t - B_s) + B_s\right]E[B_s] \\ &= E\left[(B_t - B_s)B_s\right] + E\left[B_s^2\right] - E[B_t - B_s]E[B_s] + s = s \neq 0 \end{aligned}$$

şeklinde ispat tamamlanır.

Sonuç 3.1. Teorem 3.2'ye göre, B_t ve B_s süreçleri bağımlı rastgele değişkenlerdir.

BHS'nin bir realizasyonu Şekil 3.1'de verilmiştir.

Önerme 3.1. BHS hemen hemen her yerde türevsizdir, yani neredeyse tüm realizasyonları bir t noktasında türevli değildir.



Şekil 3.1. Brown hareketinin bir realizasyonu

İspat: Eğer türev mevcutsa

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\Delta t}$$

formunda olmalıdır. Türev sürecinin varyansı hesaplandığında

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \text{Var} \left(\frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\Delta t} \right) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \text{Var} (B_{t+\Delta t} - B_t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta t)^2} \Delta t = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} = \infty$$

şeklinde elde edilir.

Şimdi türevin sonlu olmadığını, yani dağılımsal olarak sonsuza gittiğini gösterelim.

$B_{t+\Delta t} - B_t \sim N(0, \Delta t)$ olduğundan, $Z \sim N(0,1)$ standart normal rastgele değişken olmak üzere,

$$\frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\sqrt{\Delta t}} = Z$$

olur ve

$$\frac{B_{t+\Delta t} - B_t}{\Delta t} = \frac{Z}{\sqrt{\Delta t}}$$

şeklinde elde edilir.

Çok büyük M sayısı için türevin sonsuza gitme olasılığı,

$$P\left\{\left|\frac{Z}{\sqrt{\Delta t}}\right| > M\right\} = P\left\{\frac{Z}{\sqrt{\Delta t}} > M, \frac{Z}{\sqrt{\Delta t}} < -M\right\}$$

elde edilir. Özel olarak, $\Delta t = 10^{-20}$, $M = 10^8$ alınırsa, standart normal dağılım tablosundan olasılık $P\{|Z| > 0,01\} = 0,992 \cong 1$ olarak okunur. Bu da türevin dağılımsal olarak sonsuza gittiğini gösterir [46].

Örnek 3.1. (Geometrik BHS)

BHS negatif değerler alabilmektedir, ancak örneğin hisse senedi fiyatları gibi bazı çokluklar negatif olamaz. Bu tür modellerde, Geometrik BHS:

$$X_t = \exp(\sigma B_t + t(\mu - \frac{\sigma^2}{2})), \quad t \geq 0$$

kullanılabilir. Burada, μ sürüklenme (drift) terimi ve σ difüzyon terimi adını alır. Standart durumda $\mu = 0$ ve $\sigma = 1$ olarak alınır. Z , standart normal dağılımlı değişken olmak üzere $E[\exp(\lambda Z)] = \exp\left(\frac{\lambda^2}{2}\right)$ olduğundan X_t sürecinin beklenen değeri ve varyansı:

$$E[X_t] = E\left[\exp(\sigma B_t + t(\mu - \frac{\sigma^2}{2}))\right] = \exp(t(\mu - \frac{\sigma^2}{2}))E[\exp(\sigma B_t)]$$

$$= \exp\left(t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) E\left[\exp(\sigma Z \sqrt{t})\right] = \exp\left(t\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right) \exp\left(\frac{(\sigma \sqrt{t})^2}{2}\right) = \exp(\mu t) ,$$

$$\begin{aligned} E\left[X_t^2\right] &= E\left[\exp(2\sigma B_t + t(2\mu - \sigma^2))\right] = \exp(t(2\mu - \sigma^2)) E\left[\exp(2\sigma Z \sqrt{t})\right] \\ &= \exp(t(2\mu - \sigma^2)) \exp\left(\frac{(2\sigma \sqrt{t})^2}{2}\right) = \exp(2\mu t + \sigma^2 t) , \end{aligned}$$

$$Var(X_t) = E\left[X_t^2\right] - E\left[X_t\right]^2 = \exp(2\mu t + \sigma^2 t) - \exp(2\mu t) = \exp(2\mu t)(\exp(\sigma^2 t) - 1)$$

şeklinde bulunur.

3.1.3. Toplam ve Kuadratik Varyasyonlar

Tanım 3.5. $[a, b]$ aralığının bir parçalanışı $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ olmak üzere, reel sayılar üzerinde tanımlı bir g fonksiyonu için

$$V_g([a, b]) = \sup \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|$$

değerine g fonksiyonunun **toplam varyasyonu** denir. Üçgen eşitsizliğinden açıktır ki, sağ tarafa yeni değerler eklendikçe sağ tarafın değeri artar.

$[a, b]$ aralığının parçalanışları üzerinden supremum (maksimum) alındığından

$\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ olmak üzere toplam varyasyon,

$$V_g([a, b]) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})|$$

şeklinde hesaplanır.

Eğer $V_g([a, b]) < \infty$ ise g fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde **sonlu varyasyona sahiptir** denir. $V_g([0, t])$ yerine kısaca $V_g(t)$ gösterimi kullanılır. Açıktır ki $V_g(t)$, t değişkeninin azalmayan bir fonksiyonudur. Ayrıca, sonlu varyasyona sahip bir fonksiyonunun süreksizlik noktalarının tamamı sıçramalıdır ve bunlar sayılabilir.

Eğer $g(t)$ fonksiyonu sürekli türeve sahip, $g(t) = \int_0^t g'(s) ds$ ve $\int_0^t g'(s) ds < \infty$ ise ortalama değer teoreminden $\varepsilon_i \in [t_{i-1}, t_i]$ olmak üzere, toplam varyasyon;

$$V_g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |g(t_i) - g(t_{i-1})| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n |g'(\varepsilon_i)(t_i - t_{i-1})| = \int_0^t |g'(s)| ds$$

şeklinde elde edilir. Sınırlı türeve sahip fonksiyonlar sonlu varyasyona sahiptir.

Tanım 3.6. $[0, t]$ aralığının bir parçalanışı $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ ve $\delta = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1})$ olmak üzere, reel sayılar üzerinde tanımlı bir g fonksiyonunun **kuadratik varyasyonu**:

$$[g](t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (g(t_i) - g(t_{i-1}))^2$$

şeklinde tanımlanır. Sürekli ve sonlu varyasyona sahip bir fonksiyonun kuadratik varyasyonu 0'dır [45].

3.1.4. Riemann-Stieltjes İntegralleri

Tanım 3.7. f ve g fonksiyonları reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı olsun. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $y_i \in [t_{i-1}, t_i]$ olmak üzere, $\Delta_i g = g(t_i) - g(t_{i-1})$ şeklinde tanımlansın. Eğer

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(y_i)(g(t_i) - g(t_{i-1})) = \sum_{i=1}^n f(y_i)\Delta_i g$$

olmak üzere,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(y_i)\Delta_i g$$

limiti mevcut ise bu limite f fonksiyonunun g fonksiyonuna göre $[a, b]$ aralığı üzerinde **Riemann-Stieltjes integrali** denir ve bu integral

$$S = \int_a^b f(t) dg(t)$$

şeklinde gösterilir. Eğer f sürekli ve g sonlu varyasyona sahipse (g türevli olmak zorunda değildir.) Riemann-Stieltjes integrali mevcuttur. Riemann-Stieltjes integralinde $g(t) = t$ alınırsa Riemann integrali elde edilir. Itô Stokastik İntegrali, Riemann-Stieltjes integrali formunda tanımlanmıştır.

Tanım 3.8. Eğer her $t \in T$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left(X_n(\omega, t) - X(\omega, t) \right)^2 = 0$$

oluyorsa $(X_n(\omega, t))$ stokastik fonksiyonlar dizisi $X(\omega, t)$ stokastik fonksiyonuna **kuadratik orta anlamda** yakınsar denir ve

$$X_n(\omega, t) \overset{m.s.}{\cong} X(\omega, t)$$

şeklinde gösterilir.

3.1.5. Itô Stokastik İntegrali

BHS türevli olmadığından $\frac{dB_t}{dt}$ anlamlı değildir. Ancak BHS'nin sonsuz küçük artımları anlamlıdır. Bu artımlar:

$$dB_t = B_{t+dt} - B_t \sim N(0, dt)$$

şeklinde rastgele değişkendir. Riemann integrali dt diferansiyeline göre alınırken, Itô integrali dB_t diferansiyeline göre alınır. Dolayısıyla, Riemann integralinin sonucu sadece bir reel sayı iken, Itô integralinin sonucu bir rastgele değişkendir.

Standart normal dağılımın özelliklerinden yararlanarak aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir:

$$\begin{aligned} (dB_t)^2 &= (B_{t+dt} - B_t)^2 = (Z\sqrt{dt})^2 = Z^2 dt, \\ E[(dB_t)^2] &= E[Z^2 dt] = \text{Var}(Z)dt = dt. \end{aligned}$$

Kısmi integrasyondan yararlanarak,

$$E\left[\left((dB_t)^2 - dt\right)^2\right] = E\left[\left(Z^2 dt - dt\right)^2\right] = E\left[Z^4 - 2Z^2 + 1\right](dt)^2 = 2(dt)^2 \rightarrow 0$$

elde edilir, yani $(dB_t)^2$ kuadratik orta anlamda dt 'ye yakınsar $\left((dB_t)^2 \stackrel{m.s}{\cong} dt\right)$.

Şimdi, $I = \int_0^t B_s dB_s$ integralini Riemann-Stieltjes integrali olarak yazalım. Burada,

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ ve $i = 1, 2, \dots, n$ için $\Delta_i = t_i - t_{i-1}$ olmak üzere, $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$

şeklinde tanımlayalım. Kısmi toplamlar dizisi

$$S_n = \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} \Delta_i B = \sum_{i=1}^n B_{t_{i-1}} (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n (B_{t_{i-1}} B_{t_i} - B_{t_{i-1}}^2)$$

şeklinde elde edilir. Tam kare açılımından,

$$B_{t_{i-1}} B_{t_i} = \frac{1}{2} [B_{t_i}^2 + B_{t_{i-1}}^2 - (\Delta_i B)^2]$$

kısmi toplamlar dizisinde yerine yazılırsa,

$$S_n = \sum_{i=1}^n (B_{t_{i-1}} B_{t_i} - B_{t_{i-1}}^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [B_{t_i}^2 - B_{t_{i-1}}^2 - (\Delta_i B)^2] = \frac{B_t^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (\Delta_i B)^2$$

olarak elde edilir.

Buradaki $\sum_{i=1}^n (\Delta_i B)^2$ terimi $Q_n(t)$ olarak isimlendirilsin. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\Delta_i B = B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ artımlarının bağımsız olma özelliği kullanılarak, $Q_n(t)$ ifadesinin beklenen değeri ve varyansı,

$$\begin{aligned} E[Q_n(t)] &= E\left[\sum_{i=1}^n (\Delta_i B)^2\right] = \sum_{i=1}^n E\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right] \\ &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) = t, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Q_n(t)) &= \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n (\Delta_i B)^2\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ E\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^4\right] - \left(E\left[(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})^2\right]\right)^2 \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ E\left[Z^4(t_i - t_{i-1})\right] - \left(E\left[Z^2(t_i - t_{i-1})\right]\right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^n \{3\Delta_i^2 - \Delta_i^2\} = 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2$$

şeklinde bulunur. $n \rightarrow \infty$ iken limite geçilirse; $\max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}) = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta_i \rightarrow 0$ olduğundan

$$Var(Q_n(t)) = 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i^2 \leq 2 \sum_{i=1}^n \Delta_i \max \Delta_i = 2t \max \Delta_i \rightarrow 0$$

olur. Yine $E[Q_n(t)] = t$ ve $Var(Q_n(t)) = 0$ olduğundan

$$E[(Q_n(t) - t)^2] = 0$$

olarak elde edilir (Önerme 4.9.1, Sayfa 104, [45]). Böylece, $Q_n(t)$ kuadratik orta anlamda t ye yakınsar. Bu durumda,

$$I = \int_0^t B_s dB_s \stackrel{m.s}{\cong} \frac{1}{2} (B_t^2 - t)$$

aranan integralin sonucudur. Aslında, Itô stokastik integralleri, Riemann-Stieltjes toplamalarının kuadratik orta anlamda limitidir.

I Itô integralinin ortalaması,

$$E \left[\int_0^t B_s dB_s \right] = E \left[\frac{1}{2} (B_t^2 - t) \right] = \frac{1}{2} (E[B_t^2] - t) = 0$$

şeklinde, varyansı ise

$$\begin{aligned}
\text{Var}\left(\int_0^t B_s dB_s\right) &= \text{Var}\left(\frac{1}{2}(B_t^2 - t)\right) = \frac{1}{4} \text{Var}(B_t^2) \\
&= \frac{E[B_t^4] - (E[B_t^2])^2}{4} = \frac{E[Z^4 t^2] - (E[Z^2 t])^2}{4} = \frac{3t^2 - t^2}{4} = \frac{t^2}{2}
\end{aligned}$$

olarak bulunur.

Özellik 3.1. Riemann integrallerinin sahip olduğu toplamsallık, homojenlik ve ayırma özellikleri Itô integraller için de geçerlidir. Diğer bazı temel özellikler aşağıda verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\text{a. } \int_0^t dB_s &= \sum_{i=1}^n (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) = (B_{t_1} - B_{t_0}) + (B_{t_2} - B_{t_1}) + \dots + (B_{t_n} - B_{t_{n-1}}) \\
&= B_{t_n} - B_{t_0} = B_t - B_0 = B_t
\end{aligned}$$

$$\text{b. } \int_a^b c dB_s = c(B_b - B_a)$$

c. İzometri özelliği

$$E\left[\left(\int_0^t f(B_s, s) dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_0^t (f(B_s, s))^2 ds\right]$$

d. Kovaryans özelliği

$$E\left[\int_0^t f(B_s, s) dB_s \int_0^t g(B_s, s) dB_s\right] = E\left[\int_0^t f(B_s, s) g(B_s, s) ds\right]$$

3.1.6. Stokastik Diferansiyel ve Itô Kuralı

Stokastik diferansiyel alma kuralları temel analizdeki bazı diferansiyel kurallarıyla benzeşir. Burada unutulmamalıdır ki, $(dB_t)^2 = dt$ ve $(dt)^2 = dB_t dt = 0$ şeklindedir.

Aşağıdaki kuralların ispatında X_t sürecinin diferansiyelinin tanımı $dX_t = X_{t+dt} - X_t$ kullanılır. Aşağıdaki özellikler sağlanır.

$$\begin{aligned} \text{a. } d(cX_t) &= cd(X_t) \\ \text{b. } d(X_t \mp Y_t) &= d(X_t) \mp d(Y_t) \\ \text{c. } d(X_t Y_t) &= X_t d(Y_t) + Y_t d(X_t) + d(X_t) d(Y_t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\text{d. } d(f(t)Y_t) = f(t)d(Y_t) + Y_t d(f(t)) \quad (3.2)$$

Itô kuralı klasik analizdeki zincir kuralının benzeridir. Klasik analizdeki Taylor açılımında olduğu gibi ikinci mertebe türevleri içeren terimler göz ardı edilmez, üçüncü ve daha yüksek mertebeden türevleri içeren terimler ihmal edilir. Yararlanılan formüller (3.3) eşitlikleriyle verilmiştir.

$$\begin{aligned} d(f(B_t)) &= f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)(dB_t)^2 = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2} f''(B_t)dt, \\ d(f(t, B_t)) &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \left(\frac{\partial f}{\partial x} dB_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dB_t)^2 \right)_{x=B_t} \\ &= \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) dt + \frac{\partial f}{\partial x} dB_t \right]_{x=B_t} \end{aligned} \quad (3.3)$$

$t \in [0, \infty)$ için, bilinen $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlı X_t sürekli stokastik süreç, $P\{X_0 = \varsigma\} = 1$ ve B_t de BHS olmak üzere, Itô formunda verilen SDD ve onun eşdeğer integral denklemi sırasıyla:

$$\begin{aligned} dX_t &= a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t, \\ X_t &= \varsigma + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dB_s \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklindedir. Burada $a(t, X_t)$ fonksiyonuna sürüklenme terimi, $b(t, X_t)$ fonksiyonuna ise difüzyon terimi adı verilir.

Örnek 3.2. μ, σ sabitler olmak üzere,

$$\begin{cases} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

denklemini için stokastik diferansiyel alma kurallarını göz önünde bulunduran deterministik çözüm yöntemi uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \int \frac{dX_t}{X_t} &= \int \mu dt + \int \sigma dB_t \\ X_t &= ke^{\mu t + \sigma B_t} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Burada $k = k(t)$ şeklindedir. (3.5) eşitliğinin her iki tarafının da diferansiyeli alınır (3.2) eşitliğinden

$$dX_t = d\left(ke^{\mu t + \sigma B_t}\right) = e^{\mu t + \sigma B_t} dk + k d\left(e^{\mu t + \sigma B_t}\right)$$

elde edilir. $f(t, x) = e^{\mu t + \sigma x}$ olmak üzere, (3.3) kuralından $f_t = \mu f$, $f_x = \sigma f$, $f_{xx} = \sigma^2 f$ ve

$$dX_t = e^{\mu t + \sigma B_t} dk + ke^{\mu t + \sigma B_t} \left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \right) \quad (3.6)$$

şeklindedir. (3.5) ve (3.6) eşitlikleri esas denklemde yerine yazılırsa,

$$e^{\mu t + \sigma B_t} dk + k e^{\mu t + \sigma B_t} \left(\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t \right) = \mu k e^{\mu t + \sigma B_t} dt + \sigma k e^{\mu t + \sigma B_t} dB_t$$

$$\frac{dk}{k} = -\frac{\sigma^2}{2} dt$$

$$k = c e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}},$$

$$X_t = k e^{\mu t + \sigma B_t} = c e^{-\frac{\sigma^2 t}{2}} e^{\mu t + \sigma B_t} = c e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t}$$

şeklinde denklem çözülmüş olur. Başlangıç koşulu uygulanırsa denklemin çözümü:

$$X_t = x_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t}$$

şeklinde Geometrik BHS olarak bulunur.

Örnek 3.3. r ve α sabitler olmak üzere,

$$dX_t = r dt + \alpha X_t dB_t$$

diferansiyel denkleminde deterministik diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan integral çarpanı yöntemi uygulanırsa bu çarpan,

$$\rho_t = e^{-\int_0^t \alpha ds + \frac{1}{2} \int_0^t \alpha^2 ds} = e^{-\alpha B_t + \frac{1}{2} \alpha^2 t}$$

şeklinde alınır [45].

Itô formülü (3.3)'ten, $f(t, x) = e^{-\alpha x + \frac{1}{2} \alpha^2 t}$ olarak alındığında, (3.6) eşitliğindeki işlemlere benzer şekilde

$$\begin{aligned}
d\rho_t &= \frac{\alpha^2}{2} e^{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} dt - \alpha e^{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} dB_t + \frac{1}{2} \alpha^2 e^{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} dt \\
&= -\alpha e^{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} dB_t + \alpha^2 e^{-\alpha B_t + \frac{1}{2}\alpha^2 t} dt = \rho_t (\alpha^2 dt - \alpha dB_t)
\end{aligned}$$

şeklindedir. (3.1)'den

$$\begin{aligned}
d(\rho_t X_t) &= X_t d\rho_t + \rho_t dX_t + d\rho_t dX_t \\
&= X_t \rho_t (\alpha^2 dt - \alpha dB_t) + \rho_t (r dt + \alpha X_t dB_t) + (r dt + \alpha X_t dB_t) \rho_t (\alpha^2 dt - \alpha dB_t) \\
&= \alpha^2 X_t \rho_t dt - \alpha X_t \rho_t dB_t + \rho_t r dt + \alpha \rho_t X_t dB_t + r \rho_t \alpha^2 (dt)^2 - \alpha r \rho_t dB_t dt \\
&\quad + \alpha^2 X_t \rho_t dB_t dt - \alpha^2 \rho_t X_t (dB_t)^2 = \rho_t r dt,
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned}
\rho_t X_t &= \rho_0 X_0 + r \int_0^t \rho_s ds, \\
X_t &= \frac{1}{\rho_t} X_0 + \frac{r}{\rho_t} \int_0^t \rho_s ds = X_0 e^{\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t} + r \int_0^t e^{\alpha(B_t - B_s) - \frac{1}{2}\alpha^2(t-s)} ds
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

3.2. Sayısal Yöntemler

Bu bölümde tezde kullanılan bazı sayısal yöntemler verilmiştir. $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ olmak üzere, $[0, T]$ aralığının $\{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ parçalanışı ve her $n = 0, 1, \dots, N-1$ için adım boyu $h = t_{n+1} - t_n$ şeklinde eşit seçilerek $Y_n \cong X_{t_n}$ olacak şekilde X_{t_n} analitik çözümünün yaklaşım sürecini Y_n ile gösterelim.

3.2.1. Euler-Maruyama Yöntemi

$$X_t = X_0 + a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dB_t$$

SDD için yaklaşım süreci,

$$Y_{n+1} = Y_n + a(t_n, Y_n)h + b(t_n, Y_n)\Delta B_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.7)$$

şeklinde elde edildiğinde en basit ve en bilinen Taylor yaklaşımı, **Euler-Maruyama Yöntemi** (EMY) elde edilir [47]. Burada, $\Delta B_n = B_{n+1} - B_n \sim N(0, h)$ şeklindedir.

3.2.2. Milstein Yöntemi

Bu yöntem EMY'nin hatasını azaltır. EMY'den farklı olarak difüzyon teriminin türevini içerir. Yaklaşım süreci (3.8) eşitliği ile verilmiştir [6].

$$Y_{n+1} = Y_n + a(t_n, Y_n)h + b(t_n, Y_n)\Delta B_n + \frac{1}{2}b(t_n, Y_n)\frac{\partial b(t_n, x)}{\partial x}\bigg|_{x=Y_n} \left((\Delta B_n)^2 - h \right) \quad (3.8)$$
$$n = 0, 1, 2, \dots, N-1$$

Burada $\left((\Delta B_n)^2 - h \right)$ terimi $\int_{u=0}^h \int_{s=0}^u dB_s dB_u = \int_{u=0}^h B_u dB_u = \frac{B_h^2 - h}{2}$ şeklindeki karışık stokastik integrallerden biridir.

3.2.3. Stokastik Taylor Açılımı (Wagner-Platen Açılımları)

Sadece sürece bağlı katsayılarla sahip olan

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dB_t \quad (3.9)$$

diferansiyel denklemi alınsın. Itô formülünden,

$$d(f(X_t)) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)(dX_t)^2$$

elde edilir. Burada (3.9) eşitliğindeki dX_t yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} d(f(X_t)) &= f'(X_t)a(X_t)dt + f'(X_t)b(X_t)dB_t \\ &+ \frac{1}{2}f''(X_t)\left(a(X_t)^2(dt)^2 + 2a(X_t)b(X_t)dt dB_t + b(X_t)^2(dB_t)^2\right) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(dt)^2 = dB_t dt = 0, (dB_t)^2 = dt$ olduğundan,

$$\begin{aligned} d(f(X_t)) &= f'(X_t)a(X_t)dt + f'(X_t)b(X_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(X_t)b(X_t)^2 dt \\ &= \left(f'(X_t)a(X_t) + \frac{1}{2}f''(X_t)b(X_t)^2\right)dt + f'(X_t)b(X_t)dB_t \end{aligned}$$

şeklindedir.

Bu diferansiyel yazılışından integral yazılışına geçilirse,

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_{s=0}^t \left(a(X_s) \frac{\partial f(X_s)}{\partial x} + \frac{b^2(X_s)}{2} \frac{\partial^2 f(X_s)}{\partial x^2} \right) ds \\ &+ \int_{s=0}^t b(X_s) \frac{\partial f(X_s)}{\partial x} dB_s \end{aligned} \quad (3.10)$$

şeklinde bulunur. Burada ilk integral Riemann, ikinci integral Itô anlamındadır. Daha basit bir şekilde ifade edebilmek için L_0 ve L_1 operatörleri,

$$\begin{aligned} L_0 &= a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \\ L_1 &= b \frac{\partial}{\partial x} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırsa (3.10) denklemi,

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_{s=0}^t L_0 f(X_s) ds + \int_{s=0}^t L_1 f(X_s) dB_s \quad (3.11)$$

şeklinde olur. Burada $f(x) = x$ seçilirse,

$$L_0 f = a \frac{\partial}{\partial x} x + \frac{b^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} x = a$$

$$L_1 f = b \frac{\partial}{\partial x} x = b$$

şeklinde bulunur. Böylece, (3.11) denklemi (3.9) orijinal SDD'ye indirgenir.

Şimdi iki katlı integrallere geçiş yapmak için (3.11) denkleminde sırasıyla $f(X_t) = a(X_t)$ ve $f(X_t) = b(X_t)$ alınırsa,

$$a(X_t) = a(X_0) + \int_{s=0}^t L_0 a(X_s) ds + \int_{s=0}^t L_1 a(X_s) dB_s, \quad (3.12)$$

$$b(X_t) = b(X_0) + \int_{s=0}^t L_0 b(X_s) ds + \int_{s=0}^t L_1 b(X_s) dB_s. \quad (3.13)$$

elde edilir. Ayrıca (3.9) denkleminin,

$$X_t = X_0 + \int_{s=0}^t a(X_s) ds + \int_{s=0}^t b(X_s) dB_s$$

integral gösterilişinde (3.12) ve (3.13) ifadeleri yerine konulursa,

$$X_t = X_0 + \int_{s=0}^t \left[a(X_0) + \int_{z=0}^s L_0 a(X_z) dz + \int_{z=0}^s L_1 a(X_z) dB_z \right] ds$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{s=0}^t \left[b(X_0) + \int_{z=0}^s L_0 b(X_z) dz + \int_{z=0}^s L_1 b(X_z) dB_z \right] dB_s \\
& = X_0 + a(X_0) \int_{s=0}^t ds + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s L_0 a(X_z) dz ds + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s L_1 a(X_z) dB_z ds \\
& + b(X_0) \int_{s=0}^t dB_s + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s L_0 b(X_z) dz dB_s + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s L_1 b(X_z) dB_z dB_s \quad (3.14)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
L_0 a(X_z) &= a(X_z) \frac{\partial a(X_z)}{\partial x} + \frac{b^2(X_z)}{2} \frac{\partial^2 a(X_z)}{\partial x^2} = aa' + \frac{b^2}{2} a'', \\
L_1 a(X_z) &= b(X_z) \frac{\partial a(X_z)}{\partial x} = ba', \\
L_0 b(X_z) &= a(X_z) \frac{\partial b(X_z)}{\partial x} + \frac{b^2(X_z)}{2} \frac{\partial^2 b(X_z)}{\partial x^2} = ab' + \frac{b^2}{2} b'', \\
L_1 b(X_z) &= b(X_z) \frac{\partial b(X_z)}{\partial x} = bb'
\end{aligned}$$

şeklindedir. Bu durumda (3.14) ifadesi,

$$\begin{aligned}
X_t &= X_0 + a(X_0) \int_{s=0}^t ds + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s \left[a(X_z) a'(X_z) + \frac{b^2(X_z)}{2} a''(X_z) \right] dz ds \\
& + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s b(X_z) a'(X_z) dB_z ds + b(X_0) \int_{s=0}^t dB_s \\
& + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s \left[a(X_z) b'(X_z) + \frac{b^2(X_z)}{2} b''(X_z) \right] dz dB_s \\
& + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s b(X_z) b'(X_z) dB_z dB_s \quad (3.15)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. (3.15) ifadesindeki katsayıların bağımlılığı göz ardı edilerek bu katsayılar integralin dışına alınır. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
X_t = X_0 &+ a(X_0) \int_{s=0}^t ds + \left(aa' + \frac{b^2}{2} a'' \right) \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dz ds + ba' \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dB_z ds \\
&+ b(X_0) \int_{s=0}^t dB_s + \left(ab' + \frac{b^2}{2} b'' \right) \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dz dB_s + bb' \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dB_z dB_s \quad (3.16)
\end{aligned}$$

olur.

(3.16) ifadesindeki iki katlı integraller sırasıyla $I_{(0,0)}, I_{(1,0)}, I_{(0,1)}$ ve $I_{(1,1)}$ olarak adlandırılınsın. Burada 0 Riemann integrali, 1 ise Itô integrali alınacağını göstermektedir.

$$I_{(0,0)} = \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dz ds = \frac{t^2}{2},$$

$$I_{(0,1)} = \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dz dB_s = \int_{s=0}^t s dB_s = s B_s \Big|_{s=0}^t - \int_{s=0}^t B_s ds = t B_t - \int_{s=0}^t B_s ds,$$

Burada, $\int_{s=0}^t s dB_s$ rastgele değişkeninin dağılımı incelenirse,

$$E \left[\int_{s=0}^t s dB_s \right] = 0$$

ve Özellik 3.1 c ile verilen izometriden,

$$Var \left(\int_{s=0}^t s dB_s \right) = E \left[\left(\int_{s=0}^t s dB_s \right)^2 \right] = E \left[\int_{s=0}^t s^2 ds \right] = \frac{t^3}{3}$$

bulunur. Dolayısıyla,

$$I_{(0,1)} \sim N(0, \frac{t^3}{3})$$

şeklinde elde edilir. Ayrıca,

$$\int_{s=0}^t B_s ds = tB_t - \int_{s=0}^t s dB_s = \int_{s=0}^t (t-s) dB_s$$

ve dolayısıyla,

$$Var\left(\int_{s=0}^t B_s ds\right) = Var\left(\int_{s=0}^t (t-s) dB_s\right) = E\left[\left(\int_{s=0}^t (t-s) dB_s\right)^2\right] = E\left[\int_{s=0}^t (t-s)^2 ds\right] = \frac{t^3}{3},$$

$$I_{(1,0)} = \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dB_z ds = \int_{s=0}^t B_s ds \sim N(0, \frac{t^3}{3}),$$

olur. Buradan $I_{(0,1)} = tB_t - I_{(1,0)}$ şeklinde olduğu görülür.

Z_1^n ve Z_2^n bağımsız standart normal dağılımlı rastgele değişkenler olmak üzere,

$$I_{(1,0)} = \frac{1}{2} \left(Z_1^n + \frac{1}{\sqrt{3}} Z_2^n \right) h^{3/2} = \Delta Z_n$$

şeklinde alınacaktır. Normal dağılımlı ΔZ_n değişkeni için

$$E[\Delta Z_n] = 0, \quad E[(\Delta Z_n)^2] = \frac{1}{3} h^3 \quad \text{ve} \quad E[\Delta B_n \Delta Z_n] = \frac{1}{2} h^2$$

olur.

Son olarak,

$$I_{(1,1)} = \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dB_z dB_s = \int_{s=0}^t B_s dB_s = \frac{1}{2} (B_t^2 - t) = \frac{1}{2} (I_{(1)}^2 - I_{(0)})$$

ile hesaplanır.

Şimdi (3.11) denkleminde $f \equiv L_1 b$ alınıp elde edilen ifade (3.14) ifadesinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} X_t &= X_0 + a(X_0) \int_{s=0}^t ds + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s L_0 a(X_z) dz ds + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s L_1 a(X_z) dB_z ds + b(X_0) \int_{s=0}^t dB_s \\ &+ \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s L_0 b(X_z) dz dB_s + L_1 b(X_0) \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s dB_z dB_s + \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s \int_{u=0}^z L_0 L_1 b(X_u) du dB_z dB_s \\ &+ \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s \int_{u=0}^z L_1^2 b(X_u) dB_u dB_z dB_s + R_1 \\ &= X_0 + a(X_0) I_{(0)} + b(X_0) I_{(1)} + \left(aa' + \frac{b^2}{2} a'' \right) I_{(0,0)} + ba' I_{(1,0)} \\ &+ \left(ab' + \frac{b^2}{2} b'' \right) I_{(0,1)} + bb' I_{(1,1)} + \left(b(b')^2 + b^2 b'' \right) I_{(1,1,1)} + R_2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned} L_1 b(X_z) &= L_1 b(X_0) + \int_{u=0}^z L_0 L_1 b(X_u) du + \int_{u=0}^z L_1^2 b(X_u) dB_u, \\ L_1 L_1 b &= \left(b \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(b \frac{\partial b}{\partial x} \right) = \left(b \frac{\partial (bb')}{\partial x} \right) = b(b'b' + bb'') = b(b')^2 + b^2 b'', \\ I_{(1,1,1)} &= \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s \int_{u=0}^z dB_u dB_z dB_s = \int_{s=0}^t \int_{z=0}^s B_z dB_z dB_s \\ &= \int_{s=0}^t \frac{1}{2} (B_s^2 - s) dB_s = \frac{1}{2} \left(\frac{B_t^3}{3} - t B_t \right) = \frac{1}{6} (I_{(1)}^2 - 3I_{(0)}) I_{(1)} \end{aligned}$$

şeklindedir ve $\int_{s=0}^t \int_{z=0}^s \int_{u=0}^z L_0 L_1 b(X_u) du dB_z dB_s$ integrali R_2 kalan teriminin içine katılmıştır.

Tek bir adım boyu için,

$$I_{(0,0)} = \frac{h^2}{2}, \quad I_{(1,0)} \sim N(0, \frac{h^3}{3}) \rightarrow \Delta Z_n, \quad I_{(0,1)} = h\Delta B_n - \Delta Z_n \text{ ve } I_{(1,1)} = \frac{1}{2}((\Delta B_n)^2 - h)$$

olacağından (3.17) ifadesine eşdeğer STA ise,

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = Y_n + ah + b\Delta B_n + \frac{1}{2} \left(aa' + \frac{b^2}{2} a'' \right) h^2 + ba' \Delta Z_n + \left(ab' + \frac{b^2}{2} b'' \right) (h\Delta B_n - \Delta Z_n) \\ + \frac{1}{2} bb' ((\Delta B_n)^2 - h) + \frac{1}{2} (b(b')^2 + b^2 b'') \Delta B_n \left(\frac{(\Delta B_n)^2}{3} - h \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

olarak verilir. Bu yaklaşım literatürde **Wagner-Platen Yaklaşımı (WPY)** olarak bilinir [14].

Tanım 3.9. $E[|X_{t_n} - Y_n|] \leq Ch^p$ olacak şekilde h maksimal adım boyu ve n indisine bağlı olmayan $C > 0$ bulunabiliyorsa, kuadratik ortalama doğruluk (güçlü yakınsaklık) mertebesi p olur denir.

Örnek 3.4. Örnek 3.2 ile verilen Geometrik BHS için, (3.7) denklemi ile verilen EMY ile yapılan yaklaşımda güçlü yakınsaklık mertebesi aşağıdaki şekilde bulunur [6]. Bir adımlık yaklaşımda

$$|E[X_h - Y_1]|$$

mutlak beklenen hatasının mertebesi (yerel mertebe) p_1 ,

$$E[|X_h - Y_1|]$$

hata standart sapmasının mertebesi p_2 olmak üzere, eğer $p_2 \geq 1/2$ ve $p_1 \geq p_2 + 1/2$ ise genel (global) mertebe $p = p_2 - 1/2$ olur.

$$\begin{aligned} |E[(X_h - Y_1)]| &= \left| X_0 E \left[e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma B_h} - (1 + \mu h + \sigma B_h) \right] \right| \\ &= |X_0| \left| e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h} E[e^{\sigma Z \sqrt{h}}] - (1 + \mu h) \right| \\ &= |X_0| \left| e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h} e^{\frac{\sigma^2 h}{2}} - (1 + \mu h) \right| \\ &= |X_0| |e^{\mu h} - (1 + \mu h)| = |X_0| \left| \frac{(\mu h)^2}{2} + \dots \right| = O(h^2) \end{aligned}$$

olduğundan $p_1 = 2$ elde edilir.

$$\begin{aligned} E[(X_h - Y_1)^2] &= X_0^2 E \left[\frac{e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + 2\sigma B_h} - 2(1 + \mu h + \sigma B_h)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h + \sigma B_h} + (1 + \mu h + \sigma B_h)^2}{2} \right] \\ &= X_0^2 \left(\frac{e^{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h} E[e^{2\sigma Z \sqrt{h}}] - 2(1 + \mu h)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h} E[e^{\sigma Z \sqrt{h}}] - 2e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) h} E[\sigma Z \sqrt{h} e^{\sigma Z \sqrt{h}}] + (1 + \mu h)^2 + \sigma^2 h}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= X_0^2 \left(e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)h} - 2(1+\mu h)e^{\mu h} - 2e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)h} E\left[\sigma Z\sqrt{h}e^{\sigma Z\sqrt{h}}\right] + (1+\mu h)^2 + \sigma^2 h \right)$$

$$E\left[\sigma Z\sqrt{h}e^{\sigma Z\sqrt{h}}\right] = I \text{ olmak üzere,}$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma x \sqrt{h} e^{\sigma x \sqrt{h}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma x \sqrt{h} e^{\sigma x \sqrt{h} - \frac{x^2}{2}} dx$$

integralinde dönüşüm uygulanırsa,

$$\sigma x \sqrt{h} - \frac{x^2}{2} = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma \sqrt{h}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{\sigma^2 h}{2} = \frac{-(x - \sigma \sqrt{h})^2}{2} + \frac{\sigma^2 h}{2}$$

$$x - \sigma \sqrt{h} = u, \quad dx = du$$

olur ve

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \sqrt{h} (\sigma \sqrt{h} + u) e^{\frac{\sigma^2 h}{2} - \frac{u^2}{2}} du$$

$$= e^{\frac{\sigma^2 h}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sigma^2 h e^{-\frac{u^2}{2}} du + \int_{-\infty}^{\infty} \sigma \sqrt{h} u e^{-\frac{u^2}{2}} du \right]$$

$$= e^{\frac{\sigma^2 h}{2}} \left[\sigma^2 h + \sigma \sqrt{h} E[Z] \right] = e^{\frac{\sigma^2 h}{2}} \sigma^2 h$$

şeklinde elde edilir. O halde,

$$E\left[(X_h - Y_1)^2\right] = X_0^2 \left(e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)h} - 2(1+\mu h)e^{\mu h} - 2e^{\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)h} e^{\frac{\sigma^2 h}{2}} \sigma^2 h + (1+\mu h)^2 + \sigma^2 h \right)$$

$$\begin{aligned}
&= X_0^2 \left\{ e^{\left(2\mu+\sigma^2\right)h} - 2(1+\mu h+\sigma^2 h)e^{\mu h} + (1+\mu h)^2 + \sigma^2 h \right\} \\
&= X_0^2 \left\{ 1 + \left(2\mu+\sigma^2\right)h + \frac{\left(\left(2\mu+\sigma^2\right)h\right)^2}{2} + O_1(h^3) \right. \\
&\quad \left. - 2(1+\mu h+\sigma^2 h) \left(1 + \mu h + \frac{(\mu h)^2}{2} + O_2(h^3) \right) + (1+\mu h)^2 + \sigma^2 h \right\} \\
&= X_0^2 \left\{ \frac{\sigma^4 h^2}{2} + O_1(h^3) - 2O_2(h^3) - \mu^3 h^3 - 2\mu h O_2(h^3) - \sigma^2 \mu^2 h^3 - 2\sigma^2 h O_2(h^3) \right\} \\
&= O(h^2)
\end{aligned}$$

bulunur ve dolayısıyla $E\left[\left(X_h - Y_1\right)^2\right]^{1/2} = E\left[\left|X_h - Y_1\right|\right] = O(h)$ ve $p_2 = 1 > 1/2$ şeklindedir. Ayrıca, $p_1 \geq p_2 + 1/2$ olduğundan $p = 1/2$ olarak elde edilir. Dolayısıyla,

$$E\left[\left|X_{t_n} - Y_n\right|\right] \leq O(h^{1/2}).$$

Güçlü yakınsaklık mertebeleri, EMY, Milstein yöntemi ve WPY için sırasıyla $1/2$, 1 ve $3/2$ 'dir. Yaklaşımın iyi, yani hatanın düşük olması için bu mertebenin yüksek olması istenir.

Tanım 3.10. f herhangi bir fonksiyon olmak üzere, eğer $\left|E\left[f\left(X_T\right)\right] - E\left[f\left(Y_N\right)\right]\right| \leq Ch^p$ ise zayıf yakınsaklık mertebesi p olur denir.

Örnek 3.5. Geometrik BHS için (3.7) denklemi ile verilen EMY yaklaşımında zayıf yakınsaklık mertebesi 1 'dir [48]. Bir adımlık yaklaşımda

$$\left| E[f(X_h)] - E[f(Y_1)] \right|$$

hatasının mertebesi $(p+1)$ olur. $f(x) = x^2$ seçilerek,

$$\begin{aligned} & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{(2\mu+\sigma^2)h} - ((1+\mu h)^2 + \sigma^2 h)}{h^2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2\mu + \sigma^2) e^{(2\mu+\sigma^2)h} - (2\mu(1+\mu h) + \sigma^2)}{2h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{(2\mu + \sigma^2)^2 e^{(2\mu+\sigma^2)h} - 2\mu^2}{2} \right\} = \frac{2\mu^2 + 4\mu\sigma^2 + \sigma^4}{2} \neq 0 \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left| E[(X_h)^2] - E[(Y_1)^2] \right| = (X_0)^2 \left| e^{(2\mu+\sigma^2)h} - ((1+\mu h)^2 + \sigma^2 h) \right| = O(h^2)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, $p = 1$ bulunur.

Milstein yöntemi için de zayıf yakınsaklık mertebesi 1'dir. Güçlü yakınsaklık mertebeleri $1/2, 1, 3/2, 2, \dots$ gibi rasyonel sayılar olabiliyorken, zayıf yakınsaklık mertebeleri $1, 2, 3, \dots$ gibi tam sayılar olur.

Örnek 3.6. Bu örnekte, Örnek 3.2'deki SDD'de $X_0 = 1, \mu = 0.06, \sigma = 0.2$ ve $T = 1$ alınmıştır [49]. 5000 realizasyon üzerinden hata analizi yapılmıştır. k realizasyon sayacı olmak üzere, ortalama mutlak hata formülü:

$$\text{Hata} = \frac{1}{5000} \sum_{k=1}^{5000} |X_T^k - Y_N^k|$$

şeklindedir.

Bu bölümde verilen üç yöntem (EMY, Milstein, WPY) için hesaplanan ortalama mutlak hatalar Tablo 3.1’de verilmiştir. Hatırlanacak olursa bu yöntemlerin güçlü yakınsaklık mertebeleri sırasıyla 1/2, 1 ve 3/2 idi.

$$E\left[\left|X_{t_n} - Y_n\right|\right] = Ch^p$$

ortalama mutlak hata ifadesinde her iki tarafın da 2 tabanında logaritması alınır

$$\log_2\left(E\left[\left|X_{t_n} - Y_n\right|\right]\right) = \log_2(C) + p \log_2(h)$$

şeklinde elde edilir. Tablo 3.1’deki ortalama mutlak hataların 2 tabanındaki logaritma değerleri bağımlı değişken değerleri ve adım boyunun 2 tabanındaki logaritma değerleri bağımsız değişken değerleri olmak üzere, doğrusal regresyon yöntemiyle doğrular uydurulduğunda elde edilen katsayılar Tablo 3.2’de verilmiştir. $\log_2(h)$ teriminin katsayısı mertebeyi belirttiğinden hesaplamalar tutarlıdır.

Tablo 3.1. Örnek 3.6 için Ortalama Mutlak Hatalar

h	EMY	Milstein Yöntemi	WPY
2^0	2,1172E-02	8,8327E-03	1,0863E-03
2^{-1}	1,5326E-02	4,7107E-03	4,1221E-04
2^{-2}	1,1301E-02	2,4661E-03	1,5831E-04
2^{-3}	8,3312E-03	1,2597E-03	6,0270E-05
2^{-4}	5,8315E-03	6,5684E-04	2,1712E-05
2^{-5}	4,3120E-03	3,3667E-04	8,0950E-06
2^{-6}	2,9542E-03	1,6735E-04	2,8003E-06
2^{-7}	2,1348E-03	8,2938E-05	1,0170E-06
2^{-8}	1,5086E-03	4,2154E-05	3,6036E-07
2^{-9}	1,0326E-03	2,0633E-05	1,2293E-07

Tablo 3.2. Örnek 3.6 için Uydurulan Doğruların Katsayıları

Katsayı	EMY	Milstein Yöntemi	WPY
$\log_2(C)$	-5,5107	-6,7393	-9,7338
p	0,4823	0,9726	1,4559

Örnek 3.7. Bu örnekte, [15]'te

$$dX_t = -\frac{1}{4} X_t(1 - X_t^2)dt + \frac{1}{2} X_t(1 - X_t^2)dB_t$$

ile verilen ve çözümü

$$X_t = \frac{(1 + X_0) \exp(B_t) + X_0 - 1}{(1 + X_0) \exp(B_t) + 1 - X_0}$$

şeklinde olan SDD'de $X_0 = 1/2$ ve $T = 1$ alınmıştır. 5000 realizasyon üzerinden hata analizi yapılmıştır. Bu bölümde verilen üç yöntem (EMY, Milstein, WPY) için hesaplanan ortalama mutlak hatalar ve uydurulan doğruların katsayıları Tablo 3.3'te verilmiştir.

Tablo 3.3. Örnek 3.7 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları

h	EMY	Milstein Yöntemi	WPY
2^0	7,2490E-02	2,2193E-02	3,4286E-02
2^{-1}	6,0680E-02	1,2992E-02	1,3987E-02
2^{-2}	4,5734E-02	8,6751E-03	5,7873E-03
2^{-3}	3,2086E-02	5,0227E-03	2,1251E-03
2^{-4}	2,2229E-02	2,6460E-03	7,8887E-04
2^{-5}	1,5837E-02	1,4111E-03	2,9328E-04
2^{-6}	1,1401E-02	7,4237E-04	1,0592E-04
2^{-7}	8,0396E-03	3,6978E-04	3,8291E-05
2^{-8}	5,6344E-03	1,8885E-04	1,3620E-05
2^{-9}	3,8916E-03	9,3692E-05	4,7519E-06
$\log_2(C)$	-3,5926	-5,2099	-4,6745
p	0,4817	0,8828	1,4302

3.2.4. Stokastik Runge-Kutta Tipli Yöntemler

SRK tipli yöntemler deterministik RK yaklaşımlarına dayanır. Dolayısıyla, bu bölümde önce deterministik RK yöntemlerine değinilecektir. Ayrıntılar için okuyucu [50] kaynağına başvurabilir.

$$\begin{aligned}x' &= f(t, x), \\x(t_0) &= x_0\end{aligned}$$

başlangıç değer probleminin yaklaşık çözümünde kullanılan $s \in \mathbb{N}$ aşamalı açık (explicit) genel RK formülasyonu, $i = 1, \dots, s$ için $\alpha_i, c_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$ olmak üzere (3.19) ile verilmiştir.

$$\begin{aligned}y_0 &= x_0 \\k_i &= y_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} f(t_n + c_j h, k_j) \quad i = 1, \dots, s\end{aligned}$$

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^s \alpha_i f(t_n + c_i h, k_i) \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.19)$$

Burada $c_1 = 0$ ve $i = 2, \dots, s$ için $c_i = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$ koşulları sağlanır. Genellikle katsayılar

Butcher tablosu adı verilen (3.20) tablosu ile verilir.

$$\begin{array}{c|ccc}0 & & & \\c_2 & a_{21} & & \\c_3 & a_{31} & a_{32} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\c_s & a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{s,s-1} \\ \hline & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{s-1} & \alpha_s\end{array} \quad (3.20)$$

(3.19) ile verilen RK formülasyonu, Taylor açılımlarıyla karşılaştırılırsa 1, 2, 3 ve 4. mertebeden olma koşulları (3.21) ile sırasıyla verilmiştir.

$$\begin{aligned}
\text{a. } & \sum_{i=1}^s \alpha_i = 1 \\
\text{b. } & \text{a koşulu ve } \sum_{i=1}^s \alpha_i c_i = \frac{1}{2} \\
\text{c. } & \text{a, b koşulları, } \sum_{i=1}^s \alpha_i c_i^2 = \frac{1}{3} \text{ ve } \sum_{i,j=1}^s \alpha_i a_{ij} c_j = \frac{1}{6} \\
\text{d. } & \text{a - c koşulları, } \sum_{i=1}^s \alpha_i c_i^3 = \frac{1}{4}, \sum_{i,j=1}^s \alpha_i c_i a_{ij} c_j = \frac{1}{8}, \sum_{i,j=1}^s \alpha_i a_{ij} c_j^2 = \frac{1}{12} \\
& \text{ve } \sum_{i,j,k=1}^s \alpha_i a_{ij} a_{jk} c_k = \frac{1}{24}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

(3.4) denklemleri ile verilen SDD için, (3.19) deterministik yaklaşımının stokastik versiyonu (3.22) ile verilmiştir [10].

$$\begin{aligned}
F_0 &= a(t_i + \alpha_0 h, y_i), & G_0 &= b(t_i + \alpha_0 h, y_i), \\
y_i^{(1)} &= y_i + \beta_{10} F_0 h + \gamma_{10} G_0 \Delta B_i, \\
F_1 &= a(t_i + \alpha_1 h, y_i^{(1)}), & G_1 &= b(t_i + \alpha_1 h, y_i^{(1)}), \\
y_i^{(2)} &= y_i + [\beta_{20} F_0 + \beta_{21} F_1] h + [\gamma_{20} G_0 + \gamma_{21} G_1] \Delta B_i, \\
F_2 &= a(t_i + \alpha_2 h, y_i^{(2)}), & G_2 &= b(t_i + \alpha_2 h, y_i^{(2)}) \\
&\vdots \\
y_i^{(m)} &= y_i + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_{mk} F_k h + \sum_{k=0}^{m-1} \gamma_{mk} G_k \Delta B_i, \\
F_m &= a(t_i + \alpha_m h, y_i^{(m)}), & G_m &= b(t_i + \alpha_m h, y_i^{(m)}) \\
\sum_{j=0}^m p_j &= \sum_{j=0}^m q_j = 1
\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$y_0 = x_0, y_{i+1} = y_i + \sum_{j=0}^m p_j F_j h + \sum_{j=0}^m q_j G_j \Delta B_i. \quad (3.22)$$

3.2.4.1 Stokastik Heun Yöntemi

Güçlü yakınsaklık mertebesi 1 olan, Stokastik Heun yöntemi (SHY) (3.23) ile verilmiştir [51].

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[a - \frac{1}{2} b b' \right] (x) \\ F_1 &= F(Y_n), \quad G_1 = b(Y_n) \\ F_2 &= F(Y_n + F_1 h + G_1 \Delta B_n), \quad G_2 = b(Y_n + F_1 h + G_1 \Delta B_n) \\ Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{2} (F_1 + F_2) h + \frac{1}{2} (G_1 + G_2) \Delta B_n \end{aligned} \quad (3.23)$$

3.2.4.2 Türevsiz Milstein Yöntemi

$\hat{Y}_n = Y_n + b(Y_n) \sqrt{h}$ olmak üzere, Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 1'in (SRKY1) formülasyonu (3.24) ile verilmiştir [14].

$$Y_{n+1} = Y_n + a(Y_n) h + b(Y_n) \Delta B_n + \left(b(\hat{Y}_n) - b(Y_n) \right) \frac{1}{2\sqrt{h}} \left((\Delta B_n)^2 - h \right) \quad (3.24)$$

3.2.4.3 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 2 – Saito

Güçlü yakınsaklık mertebesi 1 olan SRKY2'nin formülasyonu (3.25) ile verilmiştir [52].

$$\begin{aligned} F(x) &= \left[a - \frac{1}{2} b b' \right] (x) \\ F_1 &= F(Y_n), G_1 = b(Y_n), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= F(Y_n + \frac{1}{3}F_1h + \frac{1}{3}G_1\Delta B_n), \quad G_2 = b(Y_n + \frac{1}{3}F_1h + \frac{1}{3}G_1\Delta B_n), \\
F_3 &= F(Y_n + \frac{2}{3}F_2h + \frac{2}{3}G_2\Delta B_n), \quad G_3 = b(Y_n + \frac{2}{3}F_2h + \frac{2}{3}G_2\Delta B_n), \\
Y_{n+1} &= Y_n + \frac{1}{4}(F_1 + 3F_3)h + \frac{1}{4}(G_1 + 3G_3)\Delta B_n + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left[a'b - b'a - \frac{1}{2}b''b^2 \right]_{Y_n} h\Delta B_n
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Örnek 3.8. Örnek 3.6'daki hesaplamalar bu bölümde verilen üç yöntem (SHY, Türevsiz Milstein Yöntemi, SRKY2-Saito) için uygulanmış ve bulunan ortalama mutlak hatalar ve uydurulan doğruların katsayıları Tablo 3.4'te verilmiştir.

Tablo 3.4. Örnek 3.8 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları

h	SHY	SRKY1 Türevsiz Milstein	SRKY2 Saito
2^0	1,2819E-03	4,5620E-03	1,2615E-04
2^{-1}	7,3480E-04	2,3896E-03	5,4757E-05
2^{-2}	4,3070E-04	1,2519E-03	2,7423E-05
2^{-3}	2,3970E-04	6,4314E-04	1,3489E-05
2^{-4}	1,3234E-04	3,3753E-04	6,8119E-06
2^{-5}	6,4677E-05	1,6229E-04	3,2469E-06
2^{-6}	3,4107E-05	8,3011E-05	1,6731E-06
2^{-7}	1,7283E-05	4,1919E-05	8,3211E-07
2^{-8}	8,6029E-06	2,0533E-05	4,1477E-07
2^{-9}	4,2881E-06	1,0344E-05	2,0691E-07
$\log_2(C)$	-9.3998	-7.7031	-13.0839
p	0.9188	0.9789	1.0175

Tablo 3.5 Örnek 3.9 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları

h	SHY	SRKY1 Türevsiz Milstein	SRKY2 Saito
2^0	3,7910E-02	5,2854E-02	5,1393E-03
2^{-1}	2,6318E-02	2,6360E-02	2,5929E-03
2^{-2}	1,5818E-02	1,4481E-02	1,1219E-03
2^{-3}	8,4490E-03	7,3934E-03	4,4471E-04
2^{-4}	4,4972E-03	3,7017E-03	2,0609E-04
2^{-5}	2,3257E-03	1,8949E-03	9,6328E-05

Tablo 3.6 Tablo 3.5 (Devamı)

2^{-6}	1,1575E-03	9,4119E-04	4,6019E-05
2^{-7}	5,9170E-04	4,6709E-04	2,2788E-05
2^{-8}	3,0609E-04	2,4498E-04	1,1348E-05
2^{-9}	1,4998E-04	1,2355E-04	5,4490E-06
$\log_2(C)$	-4,3308	-4,2100	-7,6601
p	0,9095	0,9732	1,1079

Örnek 3.9. Örnek 3.7’deki hesaplamalar bu bölümde verilen üç yöntem (SHY, Türevsiz Milstein Yöntemi, SRKY2-Saito) için uygulanmış ve bulunan ortalama mutlak hatalar ve uydurulan doğruların katsayıları Tablo 3.5-3.6’da verilmiştir.

3.2.4.4 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 3 – Newton

Güçlü yakınsaklık mertebesi 1.5 olan SRKY3’ün formülasyonu (3.26) ile verilmiştir [12].

$$F_1 = a(Y_n), G_1 = b(Y_n)$$

$$F_2 = a(Y_n + F_1 h + G_1 \Delta B_n), G_2 = b(Y_n - \frac{2}{3} G_1 (\Delta B_n + \sqrt{3h}))$$

$$G_3 = b(Y_n + \frac{2}{9} G_1 (3\Delta B_n + \sqrt{3h}))$$

$$G_4 = b(Y_n - \frac{20}{27} F_1 h + \frac{10}{27} (G_2 - G_1) \Delta B_n - \frac{10}{27} G_2 \sqrt{3h}) \quad (3.26)$$

$$Y_{n+1} = Y_n + \frac{1}{2} (F_1 + F_2) h + \frac{1}{40} (37G_1 + 30G_3 - 27G_4) \Delta B_n + \frac{1}{16} (8G_1 + G_2 - 9G_3) \sqrt{3h}$$

3.2.4.5 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 4 – Kaneko

Güçlü yakınsaklık mertebesi 1.5 olan SRKY4’ün formülasyonu (3.27) ile verilmiştir [13].

$$Y_{n+1} = Y_n + \left(\frac{1}{6} k_1 - \frac{2}{9} k_2 + \frac{8}{9} k_3 + \frac{1}{6} k_4 \right) h + \left(\frac{1}{6} \bar{k}_1 - \frac{2}{9} \bar{k}_2 + \frac{8}{9} \bar{k}_3 + \frac{1}{6} \bar{k}_4 \right) \Delta B_n$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{6}\tilde{k}_1-\frac{2}{9}\tilde{k}_2+\frac{8}{9}\tilde{k}_3-\frac{5}{6}\tilde{k}_4\right)\Delta\tilde{B}_n+\left(-\frac{1}{18}\hat{k}_2+\frac{8}{9}\hat{k}_3-\frac{5}{6}\hat{k}_4\right)\sqrt{3}h \quad (3.27)$$

Burada $i = 1, 2, 3, 4$ için $k_i, \bar{k}_i, \tilde{k}_i$ ve $\hat{k}_i$ değerleri

$$\{a_{ij}\} = \{\bar{a}_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/3 & -2 & 8/3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{\tilde{a}_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\{\hat{a}_{ij}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -13/32 & 5/32 & 0 & 0 \\ -7/24 & 1/8 & 1/6 & 0 \end{pmatrix}$$

katsayıları kullanılarak

$$k_i = f\left(\bar{x}_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + \Delta B_n \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} \bar{k}_j + \frac{\Delta \tilde{B}_n}{\sqrt{3}} \sum_{j=1}^{i-1} \tilde{a}_{ij} \tilde{k}_j\right),$$

$$\bar{k}_i = g\left(\bar{x}_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + \Delta B_n \sum_{j=1}^{i-1} \bar{a}_{ij} \bar{k}_j + \sqrt{vh} \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij} \hat{k}_j\right), \quad v = 3$$

$$\tilde{k}_i = g\left(\bar{x}_n + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j + \sqrt{vh} \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij} \hat{k}_j\right), \quad \hat{k}_i = g\left(\bar{x}_n + \sqrt{vh} \sum_{j=1}^{i-1} \hat{a}_{ij} \hat{k}_j\right)$$

denklemlerinden elde edilir.

3.2.4.6 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 5– Rössler

Güçlü yakınsaklık mertebesi 1.5 olan SRKY5'in formülasyonu (3.28) ile verilmiştir [15].

$$H_i^{(0)} = Y_n + \sum_{j=1}^s A_{ij}^{(0)} a(t_n + c_j^{(0)} h_n, H_j^{(0)}) h_n + \sum_{j=1}^s B_{ij}^{(0)} b(t_n + c_j^{(1)} h_n, H_j^{(1)}) \frac{I_{(1,0)}}{h_n},$$

Tablo 3.7 Örnek 3.10 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları

h	SRKY3 Newton	SRKY5 Rössler
2^0	1,3513E-03	1,0577E-03
2^{-1}	4,8490E-04	4,2318E-04
2^{-2}	1,8197E-04	1,6120E-04
2^{-3}	6,7902E-05	5,9378E-05
2^{-4}	2,6002E-05	2,2002E-05
2^{-5}	9,6504E-06	7,9057E-06
2^{-6}	3,4223E-06	2,8487E-06
2^{-7}	1,2353E-06	1,0022E-06
2^{-8}	4,2836E-07	3,5414E-07
2^{-9}	1,5565E-07	1,2485E-07
$\log_2(C)$	-9,7334	-9,5035
p	1,4561	1,4493

Örnek 3.11. Örnek 3.7’deki hesaplamalar bu bölümde verilen iki yöntem (SRKY3-Newton ve SRKY5-Rössler) için uygulanmış ve bulunan ortalama mutlak hatalar ve uydurulan doğruların katsayıları Tablo 3.8’de verilmiştir.

Tablo 3.8 Örnek 3.11 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Uydurulan Doğruların Katsayıları

h	SRKY3 Newton	SRKY5 Rössler
2^0	3,1758E-02	2,0158E-02
2^{-1}	1,3144E-02	2,3181E-02
2^{-2}	5,3544E-03	4,1846E-03
2^{-3}	2,1400E-03	1,7602E-03
2^{-4}	7,8350E-04	6,9081E-04
2^{-5}	2,8576E-04	2,6642E-04
2^{-6}	1,0914E-04	1,0574E-04
2^{-7}	3,7828E-05	3,7462E-05
2^{-8}	1,3972E-05	1,4201E-05
2^{-9}	4,8321E-06	4,8664E-06
$\log_2(C)$	-4,9306	-4,7725
p	1,3965	1,4142

3.2.4.7 Stokastik Runge-Kutta Yaklaşımı 6 – Kloeden ve Platen

Güçlü yakınsaklık mertebesi 1.5 olan SRKY6'nın formülasyonu (3.29) ile verilmiştir [14].

$$\begin{aligned} F_1 &= Y_n + ah + b\sqrt{h}, \quad F_2 = Y_n + ah - b\sqrt{h} \\ G_1 &= F_1 + b(F_1)\sqrt{h}, \quad G_2 = F_1 - b(F_1)\sqrt{h} \\ Y_{n+1} &= Y_n + b\Delta B_n + \frac{1}{2}\sqrt{h}\{a(F_1) - a(F_2)\}\Delta Z + \frac{1}{4}\{a(F_1) + 2a - a(F_2)\}h \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{h}}\{b(F_1) - b(F_2)\}\{(\Delta B_n)^2 - h\} + \frac{1}{2h}\{b(F_1) - 2b + b(F_2)\}\{\Delta B_n h - \Delta Z\} \\ &\quad + \frac{1}{4h}[b(G_1) - b(G_2) - b(F_1) + b(F_2)]\left\{\frac{1}{3}(\Delta B_n)^2 - h\right\}\Delta B_n \end{aligned} \quad (3.29)$$

BÖLÜM 4. ARAŞTIRMA BULGULARI

Bu bölümde ise Buckwar ve arkadaşlarının [36] çalışmasında verdiği, stokastik integralleri kullanan, iki aşamalı iyileştirilmiş SRK yönteminin; deterministik mertebesi 5 olan, 6 aşamalı bir uyarlaması verilmiştir. Küçük gürültü için deterministik mertebenin 2, 3 ve 4 olduğu durumlar daha önce analiz edilmiştir. Dolayısıyla, bu tezde deterministik mertebe 5 olarak seçilmiştir. Ancak, mertebe yükseldikçe aşama sayısı artmaktadır. Tercih edilen herhangi bir deterministik mertebeden RK katsayıları kullanılarak yöntem uyarlanabilir. Bu çalışmada Fehlberg'in [8]'de verdiği katsayıların uyarlanarak kullanılması tercih edilmiştir. Algoritmaların tamamlanma süreleri ve deterministik mertebe kriterleri göz önüne alınarak aşama sayısı seçilmelidir.

Ayrıca bu tezde, bilinen SRK yöntemlerinden farklı olarak, tahminleyici ile daha iyi yaklaşımlar sağlayabilmek amacıyla, ara aşama değerleri iyileştirilmiştir. Dolayısıyla, önerilen yöntem açık olmasına rağmen tahminleyici-düzeltici tipli bir RK yaklaşımı olarak da görülebilir.

4.1. Stokastik Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi

Bu bölümde önerilen açık yöntem olan 6 aşamalı SRKF yöntemi verilmiştir.

$Z_1^n, Z_2^n \sim N(0,1)$ bağımsız,

$$\frac{I_{(1,0)}^{t_n, t_{n+h}}}{h} = h^{3/2} \frac{\frac{Z_1^n}{\sqrt{3}} + Z_2^n}{2h} = \frac{\frac{Z_1^n \sqrt{h}}{\sqrt{3}} + Z_2^n \sqrt{h}}{2} = \frac{\frac{\Delta B_h^{1,n}}{\sqrt{3}} + \Delta B_h^{2,n}}{2} = \frac{I_n}{2},$$

$I_{(1)}^{t_n, t_{n+h}} = Z_2^n \sqrt{h} = \Delta B_h^{2,n}$ kullanılan stokastik integraller,

$$F_i^n = Y_n + \sum_{j=1}^6 A_{ij} a(t_n + c_j h, F_j^n) h + \sum_{j=1}^6 B_{ij} b(t_n + \hat{c}_j h, G_j^n) \frac{I_{(1,0)}^{t_n, t_n+h}}{h}$$

$$G_i^n = Y_n + \sum_{j=1}^6 \hat{A}_{ij} a(t_n + c_j h, F_j^n) h \quad i = 1, \dots, 6$$

Yardımcı değişkenleri ara aşama değerleri olmak üzere,

$$Y_{n+1} = Y_n + \sum_{i=1}^6 \beta_i a(t_n + c_i h, F_i^n) h + \sum_{i=1}^6 \gamma_i b(t_n + \hat{c}_i h, G_i^n) \frac{I_{(1)}^{t_n, t_n+h}}{h} + \sum_{i=1}^6 \eta_i b(t_n + \hat{c}_i h, G_i^n) \frac{I_{(1,0)}^{t_n, t_n+h}}{h}.$$

Yöntemin katsayılarını veren Butcher tablosu aşağıdaki gibidir.

$$\mathbf{c}^T = \left(0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{8} \quad \frac{12}{13} \quad 1 \quad \frac{1}{2}\right), \hat{\mathbf{c}} = 2\mathbf{c},$$

$$\boldsymbol{\beta}^T = \left(\frac{16}{135} \quad 0 \quad \frac{6656}{12825} \quad \frac{28561}{56430} \quad -\frac{9}{50} \quad \frac{2}{55}\right),$$

$$\boldsymbol{\gamma}^T = \left(\frac{25}{216} \quad 0 \quad \frac{1408}{2565} \quad \frac{2197}{4104} \quad -\frac{1}{5} \quad 0\right),$$

$$\boldsymbol{\eta}^T = \left(\frac{181}{360} \quad 0 \quad -\frac{128}{4275} \quad -\frac{2197}{75240} \quad -\frac{12}{25} \quad \frac{2}{55}\right),$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ \frac{1}{4} & 0 & & & & \\ \frac{3}{32} & \frac{9}{32} & 0 & & & \\ \frac{1932}{2197} & -\frac{7200}{2197} & \frac{7296}{2197} & 0 & & \\ \frac{439}{216} & -8 & \frac{3680}{513} & -\frac{845}{4104} & 0 & \\ -\frac{8}{27} & 2 & -\frac{3544}{2565} & \frac{1859}{4104} & -\frac{11}{40} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{alt üçgensel}),$$

$\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{B} = 2\mathbf{A}$ olmak üzere,

$\mathbf{c}$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$	
$\hat{\mathbf{c}}$	$\hat{\mathbf{A}}$		
	$\boldsymbol{\beta}^T$	$\boldsymbol{\gamma}^T$	$\boldsymbol{\eta}^T$

Ayrıca, $\mathbf{e}^T = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1)$ olmak üzere, mertebe koşulları:

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= \mathbf{A}\mathbf{e}, & \hat{\mathbf{c}} &= \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e}, & \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{e} &= 1, & \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{e} &= 1, & \boldsymbol{\eta}^T \mathbf{e} &= 0, \\ \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{A}\mathbf{e} &= \frac{1}{2}, & \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{B}\mathbf{e} &= 1, & \boldsymbol{\gamma}^T \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} &= 1, & \boldsymbol{\eta}^T \hat{\mathbf{A}}\mathbf{e} &= -1. \end{aligned}$$

şeklindedir.

Verilen örneklerde gürültünün küçüklüğünü belirtebilmek için difüzyon teriminde $b(t, X_t) = \varepsilon \hat{b}(t, X_t)$ şeklinde küçük bir $\varepsilon > 0$ çarpanı kullanılmıştır. Esas formülasyonda bu parametreye ihtiyaç duyulmamasına rağmen, gürültünün küçük olması mertebe koşullarının sayıca az olmasına, çözüm sürecinin varyansının ve dolayısıyla hatanın küçük olmasına sebep olmaktadır. Ayrıca, (3.4) denklemi $\varepsilon \rightarrow 0$ iken deterministik denkleme yaklaşacaktır.

4.2. Simülasyon Çalışmaları

Bu bölümde, Bölüm 3'te verilen Milstein yöntemi ile bu bölümde önerilen SRKF yöntemini karşılaştırmak için analitik çözümü bilinen üç problem üzerinde hata analizleri raporlanmıştır. 100 realizasyon üzerinden hata analizleri yapılmıştır. k realizasyon sayacı olmak üzere, ortalama mutlak hata formülü:

$$e = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} |X_T^k - Y_N^k|$$

şeklindedir.

Tüm analizler MATLAB programı kullanılarak yapılmıştır. Daha iyi karşılaştırmalar yapabilmek üzere, yöntemlerin her adımda aynı BHS realizasyonlarını kullanması için hata değerleri tek bir kod içinde elde edilmiştir. Dolayısıyla, örnek uzayın elemanı olan belirli bir durum için iki yöntemin nasıl yaklaşımlar vereceği karşılaştırılmıştır.

Örnek 4.1. Örnek 3.2’de verilen Geometrik BHS’de $X_0 = 1, T = 1$ olmak üzere, sürüklenme ve difüzyon katsayıları sırasıyla $\mu = -1, \sigma = 10^{-6}$ olarak alınmıştır.

SRKF yönteminin formülasyonları kullanılarak MATLAB programı kullanılarak fonksiyonlar oluşturulmuştur. $\text{randn} \sim N(0,1)$ olmak üzere, sürüklenme ve difüzyon terimlerini tanımlayan fonksiyonlar ve ara adımlarda kullanılan EM tahminleyicisi sırasıyla:

$$\begin{aligned} \text{Drift}(x) &= -x, \quad \text{Difussion}(x) = 10^{-6}x, \\ \text{Euler}(\Delta, x) &= x + \Delta \cdot \text{Drift}(x) + \sqrt{\Delta} \cdot \text{randn} \cdot \text{Difussion}(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Burada $\text{Euler}(\Delta, X_{t_n}) = X_{t_n+\Delta}$ şeklindedir.

Ek I’de verilmiş olan diğer fonksiyonlar birbirini çağıran yapıdadır. Buradan, iteratif denklemler:

$$\begin{aligned} Y_{n+1} = & Y_n + \frac{16h}{135} a(t_n, F_1^n) + 0ha(t_n + h/4, F_2^n) + \frac{6656h}{12825} a(t_n + 3h/8, F_3^n) \\ & + \frac{28561h}{56430} a(t_n + 12h/13, F_4^n) - \frac{9h}{50} a(t_n + h, F_5^n) + \frac{2h}{55} a(t_n + h/2, F_6^n) \\ & + \Delta B_h^{2,n} \left(\frac{25}{216} b(t_n, G_1^n) + 0b(t_n + h/2, G_2^n) + \frac{1408}{2565} b(t_n + 3h/4, G_3^n) \right. \\ & + \frac{2197}{4104} b(t_n + 24h/13, G_4^n) - \frac{1}{5} b(t_n + 2h, G_5^n) + 0b(t_n + h, G_6^n) \Big) \\ & + \frac{I_n}{2} \left(\frac{181}{360} b(t_n, G_1^n) + 0b(t_n + h/2, G_2^n) - \frac{128}{4275} b(t_n + 3h/4, G_3^n) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2197}{75240}b(t_n + 24h/13, G_4^n) - \frac{12}{25}b(t_n + 2h, G_5^n) + \frac{2}{55}b(t_n + h, G_6^n)) \\
& = Y_n + \frac{16h}{135}\text{Drift}(Y_n) + 0hF2(h/4, Y_n, I_n) + \frac{6656h}{12825}F3(3h/8, Y_n, I_n) \\
& + \frac{28561h}{56430}F4(12h/13, Y_n, I_n) - \frac{9h}{50}F5(h, Y_n, I_n) + \frac{2h}{55}F6(h/2, Y_n, I_n) \\
& + \Delta B_h^{2,n}(\frac{25}{216}\text{Diffusion}(Y_n) + 0G2(h/2, Y_n) + \frac{1408}{2565}G3(3h/4, Y_n, I_n) \\
& + \frac{2197}{4104}G4(24h/13, Y_n, I_n) - \frac{1}{5}G5(2h, Y_n, I_n) + 0G6(h, Y_n, I_n)) \\
& + \frac{I_n}{2}(\frac{181}{360}\text{Diffusion}(Y_n) + 0G2(h/2, Y_n) - \frac{128}{4275}G3(3h/4, Y_n, I_n) \\
& - \frac{2197}{75240}G4(24h/13, Y_n, I_n) - \frac{12}{25}G5(2h, Y_n, I_n) + \frac{2}{55}G6(h, Y_n, I_n))
\end{aligned}$$

olarak elde edilir. İki yöntem için de $[0,1]$ aralığı $N = 100, 1000, 10000$ eşit parçaya bölünerek hesaplamalar yapılmıştır. Mutlak hatalar ve kestirilen mertebe değerleri Tablo 4.1’de verilmiştir.

Tablo 4.1. Örnek 4.1 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Kestirilen Mertebe Değerleri

h	Milstein	SRKF
0.0100	1.84710E-03	1.84397E-03
0.0010	1.84016E-04	1.83982E-04
0.0001	1.83947E-05	1.83274E-05
p	1.0009	1.0013

Örnek 4.2. Stokastik lojistik (Pearl Verhulst) denklemi [53],

$$\begin{cases} dX_t = \lambda(\bar{X} - X_t)X_t dt + \sigma X_t dB_t \\ X_0 = x_0 \end{cases}$$

denkleminin çözümü:

$$X_t = \frac{\exp\left(\left(\lambda \bar{X} - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)}{\frac{1}{X_0} + \lambda \int_{s=0}^t \exp\left(\left(\lambda \bar{X} - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma B_s\right) ds}$$

şeklindedir. Burada,

$$Z_t = \int_{s=0}^t \exp\left(\left(\lambda \bar{X} - \frac{\sigma^2}{2}\right)s + \sigma B_s\right) ds$$

şeklindeki integrale edilmiş BHS, yaklaşık integrasyon yöntemlerinden dikdörtgenler kuralı vasıtasıyla üretilmiştir. $X_0 = 0.2$, $T = 20$ olmak üzere, $\lambda = 0.8$, $\bar{X} = 0.625$, $\sigma = 2^{-15}$ olarak alınmıştır.

SRKF yöntemi için, Örnek 4.1'den farklı olarak sadece sürüklenme ve difüzyon fonksiyonları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\text{Drift}(x) = \lambda (\bar{X} - x)x,$$

$$\text{Difussion}(x) = \sigma x.$$

Tablo 4.2. Örnek 4.2 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Kestirilen Mertebe Değerleri

h	Milstein	SRKF
2^{-6}	2.43651E-03	2.43404E-03
2^{-7}	1.21984E-03	1.22073E-03
2^{-8}	6.10321E-04	6.05016E-04
p	0.9986	1.0042

İki yöntem için de $[0, 20]$ aralığı $N = 1280, 2560, 5120$ eşit parçaya bölünerek hesaplamalar yapılmıştır. Mutlak hatalar ve kestirilen mertebe değerleri Tablo 4.2'de verilmiştir.

Örnek 4.3. Örnek 3.7’de verilen

$$\begin{cases} dX_t = -(\alpha + \beta^2 X_t)(1 - X_t^2)dt + \beta(1 - X_t^2)dB_t, & t \in [0,1] \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

nonlineer skaler SDD’nin çözümü:

$$X_t = \frac{\exp(-2\alpha t + 2\beta B_t) - 1}{\exp(-2\alpha t + 2\beta B_t) + 1}$$

şeklindedir. Burada, $T = 1$ olmak üzere, $\alpha = 1, \beta = 2^{-12}$ olarak alınmıştır. Mutlak hatalar ve kestirilen mertebe değerleri Tablo 4.3’te verilmiştir.

Tablo 4.3. Örnek 4.3 için Ortalama Mutlak Hatalar ve Kestirilen Mertebe Değerleri

h	Milstein	SRKF
2^{-6}	2,86094E-03	2,87744E-03
2^{-7}	1,42685E-03	1,43414E-03
2^{-8}	7,12507E-04	6,99095E-04
p	1.0028	1.0206

BÖLÜM 5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tezde deterministik DD'lerin nümerik çözümlerinde kullanılan RK tipli açık yöntemlerin stokastik versiyonları incelenmiştir. Çözümü önceden bilinen Geometrik BHS gibi bazı örnekler için Euler-Maruyama, Milstein ve Wagner-Platen yöntemlerinin karşılaştırmalı hata analizleri yapılmış ve böylece bu yöntemler örneklendirilmiştir. Ayrıca yine bu örnekler için bazı SRK tipli yöntemlerin karşılaştırmalı tabloları verilmiştir.

Bu tezin orijinal katkısı olarak önerilen yöntem, difüzyon teriminde küçük bir çarpan olan Itô SDD'ler için SRKF yöntemidir. Bu yöntemin deterministik mertebesi 5'tir ve stokastik integralleri kullanan 6 aşamalı bir yöntemdir.

Buckwar ve arkadaşlarına [36] göre, p deterministik yöntemin mertebesi olmak üzere, global hata:

$$O(\varepsilon^2 h^{1/2} + \varepsilon h^2 + h^p)$$

mertebesindedir. Yazarlar, önerdikleri yöntemi güçlü yakınsaklık mertebesi 3/2 olan STA ile karşılaştırmışlardır.

Bu çalışmada, $p = 5$ seçildiğinden üç bölge oluşur. $h > \varepsilon^{1/3}$ için üçüncü, $\varepsilon^{2/3} \leq h \leq \varepsilon^{1/3}$ için ikinci ve $h < \varepsilon^{2/3}$ için ise birinci terim baskın gelir. Örneğin, Örnek 4.1'de $\varepsilon = 10^{-6}$ ve $h = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$ olduğundan ikinci terim baskındır ve mertebe 1 olmalıdır. Analizlerimizden mertebenin asimptotik olarak 1'e yaklaştığı gözlemlenmiştir.

Aynı örnekte, hatanın da minimum olabilmesi için $\varepsilon = 10^{-6}$ iken $h = 10^{-2}$ seçilirse, p değeri 1.3671 olarak bulunmuştur. Benzer analizler Örnek 4.2 ve 4.3 için de verilebilir. Teorik değerlerle Tablo 4.1-4.3'te verilen deneysel sonuçlar uyumludur.



KAYNAKLAR

- [1] Brown, R., On the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies. *Edinburgh New Philos. J.*, 5, 358-371, 1828.
- [2] Einstein, A., Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Ann. Phys.*, 322(8), 549-560, 1905.
- [3] Langevin, P., Sur la théorie du mouvement brownien. *Compt. Rendus*, 146, 530-533, 1908.
- [4] Wiener, N., Differential-Space. *J. Math. Phys.*, 2(1-4), 131-174, 1923.
- [5] Ito, K., On Stochastic Differential Equations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 4, 1-51, 1951.
- [6] Milstein, G. N., Numerical integration of stochastic differential equations (Vol. 313). Springer Science & Business Media, 1994.
- [7] Burrage, P. M., Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. Department of Mathematics at The University of Queensland, PhD Thesis, 1999.
- [8] Fehlberg, E., Low-order classical Runge-Kutta formulas with stepsize control and their application to some heat transfer problems. NASA Technical Report 315, 1969.
- [9] Sickenberger, T., Weinmüller, E., & Winkler, R., Local error estimates for moderately smooth problems: Part II—SDEs and SDAEs with small noise. *BIT*, 49(1), 217-245, 2009.
- [10] Rumelin, W., Numerical treatment of stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 19(3), 604-613, 1982.
- [11] Burrage, K., & Burrage, P. M., High strong order explicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 22(1-3), 81-101, 1996.
- [12] Newton, N. J., Asymptotically efficient Runge-Kutta methods for a class of Ito and Stratonovich equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 51(2), 542-567, 1991.

- [13] Kaneko, J., Explicit Order 1.5 Runge-Kutta Scheme for Solutions of Ito Stochastic Differential Equations (2nd Workshop on Stochastic Numerics). 1995.
- [14] Kloeden, P. E., & Platen, E., Numerical solution of stochastic differential equations (Vol. 23). Springer Science & Business Media, 2013.
- [15] Rößler, A., Runge–Kutta methods for the strong approximation of solutions of stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 48(3), 922-952, 2010.
- [16] Burrage, K., Burrage, P. M., & Belward, J. A., A bound on the maximum strong order of stochastic Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations. *BIT*, 37(4), 771-780, 1997.
- [17] Butcher, J. C., Coefficients for the study of Runge-Kutta integration processes. *J. Aust. Math. Soc.*, 3(2), 185-201, 1963.
- [18] Burrage, K., & Burrage, P. M., Order Conditions of Stochastic Runge–Kutta Methods by B-Series. *SIAM J. Numer. Anal.*, 38(5), 1626-1646, 2000.
- [19] Xiao, A., & Tang, X., High strong order stochastic Runge-Kutta methods for Stratonovich stochastic differential equations with scalar noise. *Numer. Algorithms*, 72(2), 259-296, 2016.
- [20] Kloeden, P. E., The systematic derivation of higher order numerical schemes for stochastic differential equations. *Milan J. Math.*, 70(1), 187-207, 2002.
- [21] Rößler, A., Explicit order 1.5 schemes for the strong approximation of Itô stochastic differential equations. In *PAMM: Proc. Appl. Math. Mech.* (Vol. 5, No. 1, pp. 817-818). Berlin: WILEY-VCH Verlag, 2005.
- [22] Kim, D., & Stanescu, D., Low-storage Runge–Kutta methods for stochastic differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 58(10), 1479-1502, 2008.
- [23] Costabile, F., & Napoli, A., Economical Runge–Kutta methods with strong global order one for stochastic differential equations. *Appl. Numer. Math.*, 61(2), 160-169, 2011.
- [24] Kloeden, P. E., & Platen, E., Higher-order implicit strong numerical schemes for stochastic differential equations. *J. Stat. Phys.*, 66(1-2), 283-314, 1992.
- [25] Burrage, K., & Tian, T., Predictor-Corrector Methods of Runge--Kutta Type for Stochastic Differential Equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(4), 1516-1537, 2002.
- [26] Loghmani, G. B., High strong order implicit Runge-Kutta methods for stochastic ordinary differential equations. In *22nd System Dynamics Conference*, 2004.

- [27] Wang, W., Wen, L., & Li, S., Nonlinear stability of explicit and diagonally implicit Runge–Kutta methods for neutral delay differential equations in Banach space. *Appl. Math. Comput.*, 199(2), 787-803, 2008.
- [28] Haghighi, A., Hosseini, S. M., & Rößler, A., Diagonally drift-implicit Runge-Kutta methods of strong order one for stiff stochastic differential systems. *J. Comput. Appl. Math.*, 293, 82-93, 2016.
- [29] Milstein, G. N., Tretyakov, M. V., Mean-square numerical methods for stochastic differential equations with small noises. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18(4), 1067-1087, 1997.
- [30] Milstein, G. N., Tretyakov, M. V., Numerical methods in the weak sense for stochastic differential equations with small noise. *SIAM J. Numer. Anal.*, 34(6), 2142-2167, 1997.
- [31] Milstein, G., Tretyakov, M., Numerical algorithms for semilinear parabolic equations with small parameter based on approximation of stochastic equations. *Math. Comp.*, 69(229), 237-267, 2000.
- [32] Rößler, A., Second order Runge–Kutta methods for Itô stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(3), 1713-1738, 2009.
- [33] Komori, Y., Weak second-order stochastic Runge–Kutta methods for non-commutative stochastic differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 206(1), 158-173, 2007.
- [34] Komori, Y., Weak first or second-order implicit Runge–Kutta methods for stochastic differential equations with a scalar Wiener process. *J. Comput. Appl. Math.*, 217(1), 166-179, 2008.
- [35] Komori, Y., Cohen, D., & Burrage, K., Weak Second Order Explicit Exponential Runge--Kutta Methods for Stochastic Differential Equations. *SIAM J. Sci. Comput.*, 39(6), A2857-A2878, 2017.
- [36] Buckwar, E., Rößler, A., & Winkler, R., Stochastic Runge–Kutta methods for Itô SODEs with small noise. *SIAM J. Sci. Comput.*, 32(4), 1789-1808, 2010.
- [37] Buckwar, E., & Riedler, M. G., Runge–Kutta methods for jump–diffusion differential equations. *J. Comput. Appl. Math.*, 236(6), 1155-1182, 2011.
- [38] Valinejad, A., Hosseini, S. M., A variable step-size control algorithm for the weak approximation of stochastic differential equations. *Numer. Algorithms*, 55(4), 429-446, 2010.
- [39] Valinejad, A., Hosseini, S. M., A stepsize control algorithm for SDEs with small noise based on stochastic Runge–Kutta Maruyama methods. *Numer. Algorithms*, 61(3), 479-498, 2012.

- [40] Averina, T. A., Artemiev, S. S., & Schurz, H., Simulation of stochastic auto-oscillating systems through variable stepsize algorithms with small noise. WIAS, Berlin, Preprint 116, 1994.
- [41] Wang, P., A-stable Runge–Kutta methods for stiff stochastic differential equations with multiplicative noise. *Comput. Appl. Math.*, 34(2), 773-792, 2015.
- [42] Tang, X., & Xiao, A., Efficient Stochastic Runge-Kutta Methods for Stochastic Differential Equations with Small Noises. *Adv. Appl. Math. Mech.*, 10(4), 845-878, 2018.
- [43] G. Akdemir, H., A. Oğur, D., Küçük Gürültü Terimi İçeren Itô Stokastik Diferansiyel Denklemler için Stokastik Runge-Kutta-Fehlberg Yöntemi. *Erzincan Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi* 32. Ulusal Matematik Sempozyumu Özel Sayısı, Kabul edildi.
- [44] Aliyev, R., *Stokastik Süreçler Teorisi (Ders Notları)*. 2009.
- [45] Calin, O., *An informal introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific, 2015.
- [46] Klebaner, F. C., *Introduction to stochastic calculus with applications*. World Scientific Publishing Company, 2005.
- [47] Maruyama, G., Continuous Markov processes and stochastic equations. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 4(1), 48, 1955.
- [48] Abukhaled, M. I., & Allen, E. J., A class of second-order Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations. *Stoch. Anal. Appl.*, 16(6), 977-991, 1998.
- [49] Platen, E., *Numerical Methods of Finance*. School of Finance and Economics and Department of Mathematical Sciences University of Technology, Sydney, 230-232.
- [50] Rößler A., *Runge-Kutta Methods for the Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Shaker Verlag, 2003.
- [51] Saito, Y., & Mitsui, T., Stability analysis of numerical schemes for stochastic differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 33(6), 2254-2267, 1996.
- [52] Saito, Y., & Mitsui, T., *Discrete approximations for stochastic differential equations*. 1991.
- [53] Hu, G., Wang, K., The estimation of probability distribution of SDE by only one sample trajectory. *Comput. Math. Appl.*, 62(4), 1798-1806, 2011.



EKLER

Ek I. SRKF yöntemi için kullanılan yardımcı fonksiyonlar

$$F_1^n = Y_n = X_{t_n}$$

$$G_1^n = Y_n = X_{t_n}$$

$$F_2^n = X_{t_n} + \frac{h}{4} \text{Drift}(X_{t_n}) + \frac{I_n}{4} \text{Diffusion}(X_{t_n})$$

$$G_2^n = X_{t_n} + \frac{h}{2} \text{Drift}(X_{t_n})$$

$$F2(\Delta, x, y) = \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{h}{4} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{y}{4} \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x))$$

$$G2(\Delta, x) = \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{h}{2} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x))$$

$$F_3^n = X_{t_n} + \frac{3h}{32} \text{Drift}(X_{t_n}) + \frac{9h}{32} F2(\frac{h}{4}, X_{t_n}, I_n) + \frac{3I_n}{32} \text{Diffusion}(X_{t_n}) \\ + \frac{9I_n}{32} G2(\frac{h}{2}, X_{t_n})$$

$$G_3^n = X_{t_n} + \frac{3h}{16} \text{Drift}(X_{t_n}) + \frac{9h}{16} F2(\frac{h}{4}, X_{t_n}, I_n)$$

$$F3(\Delta, x, y) = \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{3h}{32} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{9h}{32} F2(\frac{h}{4}, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\ + \frac{3y}{32} \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{9y}{32} G2(\frac{h}{2}, \text{Euler}(\Delta, x))$$

$$G3(\Delta, x, y) = \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{3h}{16} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) \\ + \frac{9h}{16} F2(\frac{h}{4}, \text{Euler}(\Delta, x), y)$$

$$F_4^n = X_{t_n} + \frac{1932h}{2197} \text{Drift}(X_{t_n}) - \frac{7200h}{2197} F2(\frac{h}{4}, X_{t_n}, I_n) + \frac{7296h}{2197} F3(\frac{3h}{8}, X_{t_n}, I_n) \\ + \frac{1932I_n}{2197} \text{Diffusion}(X_{t_n}) - \frac{7200I_n}{2197} G2(\frac{h}{2}, X_{t_n}) + \frac{7296I_n}{2197} G3(\frac{3h}{8}, X_{t_n}, I_n)$$

$$G_4^n = X_{t_n} + \frac{3864h}{2197} \text{Drift}(X_{t_n}) - \frac{14400h}{2197} F2(\frac{h}{4}, X_{t_n}, I_n) + \frac{14592h}{2197} F3(\frac{3h}{8}, X_{t_n}, I_n)$$

$$\begin{aligned}
F4(\Delta, x, y) = & \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{1932h}{2197} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) \\
& - \frac{7200h}{2197} F2(h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y) + \frac{7296h}{2197} F3(3h/8, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\
& + \frac{1932y}{2197} \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) - \frac{7200y}{2197} G2(h/2, \text{Euler}(\Delta, x)) \\
& + \frac{7296y}{2197} G3(3h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G4(\Delta, x, y) = & \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{3864h}{2197} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) \\
& - \frac{14400h}{2197} F2(h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y) + \frac{14592h}{2197} F3(3h/8, \text{Euler}(\Delta, x), y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_5^n = & X_{t_n} + \frac{439h}{216} \text{Drift}(X_{t_n}) - 8hF2(h/4, X_{t_n}, I_n) + \frac{3680h}{513} F3(3h/8, X_{t_n}, I_n) \\
& - \frac{845h}{4104} F4(12h/13, X_{t_n}, I_n) + \frac{439I_n}{216} \text{Diffusion}(X_{t_n}) \\
& - 8I_n G2(h/2, X_{t_n}) + \frac{3680I_n}{513} G3(3h/4, X_{t_n}, I_n) - \frac{845I_n}{4104} G4(24h/13, X_{t_n}, I_n) \\
G_5^n = & X_{t_n} + \frac{439h}{108} \text{Drift}(X_{t_n}) - 16hF2(h/4, X_{t_n}, I_n) + \frac{7360h}{513} F3(3h/8, X_{t_n}, I_n) \\
& - \frac{845h}{2052} F4(12h/13, X_{t_n}, I_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F5(\Delta, x, y) = & \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{439h}{216} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) - 8hF2(h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\
& + \frac{3680h}{513} F3(3h/8, \text{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{845h}{4104} F4(12h/13, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\
& + \frac{439y}{216} \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) - 8yG2(h/2, \text{Euler}(\Delta, x)) \\
& + \frac{3680y}{513} G3(3h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{845y}{4104} G4(24h/13, \text{Euler}(\Delta, x), y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G5(\Delta, x, y) = & \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) + \frac{439h}{108} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) \\
& - 16hF2(h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y) + \frac{7360h}{513} F3(3h/8, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\
& - \frac{845h}{2052} F4(12h/13, \text{Euler}(\Delta, x), y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_6^n &= X_{t_n} - \frac{8h}{27} \text{Drift}(X_{t_n}) + 2hF2(h/4, X_{t_n}, I_n) - \frac{3544h}{2565} F3(3h/8, X_{t_n}, I_n) \\
&+ \frac{1859h}{4104} F4(12h/13, X_{t_n}, I_n) - \frac{11h}{40} F5(h, X_{t_n}, I_n) - \frac{8I_n}{27} \text{Diffusion}(X_{t_n}) \\
&+ 2I_n G2(h/2, X_{t_n}) - \frac{3544I_n}{2565} G3(3h/4, X_{t_n}, I_n) + \frac{1859I_n}{4104} G4(24h/13, X_{t_n}, I_n) \\
&- \frac{11I_n}{40} G5(2h, X_{t_n}, I_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_6^n &= X_{t_n} - \frac{16h}{27} \text{Drift}(X_{t_n}) + 4hF2(h/4, X_{t_n}, I_n) - \frac{7088h}{2565} F3(3h/8, X_{t_n}, I_n) \\
&+ \frac{1859h}{2052} F4(12h/13, X_{t_n}, I_n) - \frac{11h}{20} F5(h, X_{t_n}, I_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F6(\Delta, x, y) &= \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) - \frac{8h}{27} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) + 2hF2(h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\
&- \frac{3544h}{2565} F3(3h/8, \text{Euler}(\Delta, x), y) + \frac{1859h}{4104} F4(12h/13, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\
&- \frac{11h}{40} F5(h, \text{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{8y}{27} \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) \\
&+ 2yG2(h/2, \text{Euler}(\Delta, x)) - \frac{3544y}{2565} G3(3h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\
&+ \frac{1859y}{4104} G4(24h/13, \text{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{11y}{40} G5(2h, \text{Euler}(\Delta, x), y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G6(\Delta, x, y) &= \text{Diffusion}(\text{Euler}(\Delta, x)) - \frac{16h}{27} \text{Drift}(\text{Euler}(\Delta, x)) \\
&+ 4hF2(h/4, \text{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{7088h}{2565} F3(3h/8, \text{Euler}(\Delta, x), y) \\
&+ \frac{1859h}{2052} F4(12h/13, \text{Euler}(\Delta, x), y) - \frac{11h}{20} F5(h, \text{Euler}(\Delta, x), y)
\end{aligned}$$

ÖZGEÇMİŞ

Dudu AYDIN OĞUR 1990 yılında Amasya'nın Merzifon ilçesinde doğdu. İlk, orta ve lise eğitimini Amasya'da tamamladı. 2008 yılında Merzifon Anadolu Lisesi'nden mezun oldu. 2008 yılında başladığı Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nü 2012 yılında bitirdi. 2013'te Ondokuz Mayıs Üniversitesi'nde pedagojik formasyon eğitimi aldı. 2017 yılında Giresun Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı.