

**KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİMDALI

**(s,m)-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI SONUÇLAR
VE EŞİTSİZLİKLER**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İlknur MİHYAZ

**HAZİRAN 2022
TRABZON**



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**(s,m)- KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI SONUÇLAR
VE EŞİTSİZLİKLER**

İlknur MİHYAZ

ORCID : - - -

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
“YÜKSEK LİSANS (MATEMATİK)”
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih : 15 / 06 / 2022

Tezin Savunma Tarihi : 01 / 07 / 2022

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ
ORCID : - - -

Trabzon 2022

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim süresince gerek tez konumum belirlenmesinde gerekse çalışmalarında bana yol gösteren, tezin bu hale gelmesinde her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen saygıdeğer danışman hocam Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ'a teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Eğitim ve öğretim hayatım süresince maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen, her pes edişlerimde beni ayağa kaldıran, akademik çalışmalarımı başından sonuna kadar destekleyen her şeyden önce insanlığı, adaleti ve öğretmenliği öğreten annem İkrām MİHYAZ ve babam Fahrettin MİHYAZ'a teşekkürlerimi borç bilirim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimimde yanımda olan ve zorlukları birlikte omuzladığımız ev arkadaşım Gizem KAYA'ya teşekkür ederim.

İlknur MİHYAZ
Trabzon, 2022

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “ (s,m) -konveks fonksiyonlar için bazı sonuçlar ve eşitsizlikler” başlıklı bu çalışmayı baştan sona danışman hocam Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 13/06/2022

İlknur MİHYAZ

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VI
SUMMARY	VII
SEMBOLLER DİZİNİ	VIII
1. GENEL BİLGİLER.....	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Genel Kavramlar	2
1.2.1. Ölçüler.....	1
1.2.2. Ölçüm Uzayı.....	2
1.2.3. Ölçülebilir Fonksiyonlar.....	9
1.2.4. İntegral.....	11
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR	15
2.1. (s,m)-Konveks Fonksiyonların Bazı Özellikleri	15
2.2. Bazı İntegral Eşitsizlikleri	20
3. SONUÇLAR	32
4. ÖNERİLER	34
5. KAYNAKLAR.....	35
ÖZGEÇMİŞ	

Yüksek Lisans Tezi

ÖZET

(s, m) - KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN BAZI SONUÇLAR VE EŞİTSİZLİKLER

İlknur MİHYAZ

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı
Danışman: Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ
2022, 38 Sayfa

Bu tez iki bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan tanımlara, teoremlere ve literatürde çokça bilinen ve kullanılan ölçümlerin doğruluğu ve Lebesgue integraline yer verilmiştir. İkinci bölümde ise bu tez çalışmasında kullanılan $[0, d]$, $d > 0$ aralığı üzerinde tanımlanan ve $m \in (0,1)$ aralığı üzerinde birinci ve ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonların bazı özellikleri tanımlanmıştır. Ek olarak bazı integral eşitsizlikleri, negatif olmayan ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonları ve sonlu ölçümlü ölçülebilir uzay için incelenmiştir. Alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

Anahtar Kelimeler:İntegral eşitsizlikleri, Ölçülebilir uzay, (s, m) -konveks fonksiyon

Master Thesis

SUMMARY

SOME RESULTS AND İNEQUALİTİES FOR (s, m) -CONVEX FUNCTION

İlknur MİHYAZ

Karadeniz Technical University
İnstitute of Sciences
Department of Mathematics
Supervisor: Doç. Dr. Meltem SERTBAŞ
2022, 38 Pages

This thesis consists of two chapters. In the first chapter, definitions, theorems and the birth of measurements that are widely known and used in the literature and Lebesgue integral that will be used in other chapters of the thesis are included. In the two chapter, some properties of the (s, m) -convex functions in the first and second sense, defined on the interval $[0, d]$, $d > 0$ and used in this thesis study, on the interval $m \in (0, 1)$ are given. In addition, some integral inequalities have been studied for (s, m) -convex functions and measurable space in the non-negative second sense. The results obtained were supported by examples.

Key Words: Integral inequalities, Measure space, (s, m) -convex function

SEMBOLLER DİZİNİ

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar kümesi

$\overline{\mathbb{R}}$: Genişletilmiş reel sayılar kümesi

f' : f fonksiyonunun birinci mertebeden türevi

d : Uzaklık fonksiyonu

$2^X = P(X)$: Güç kümesi

$(L) \int_{[a,b]} f d\lambda$: Lebesgue anlamında integrallenebilir fonksiyon

$(R) \int_a^b f(x)dx$: Reiman anlamında integrallenebilir fonksiyon

$f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$: Noktasal yakınsaklık

$\limsup$: Üst limit

$\liminf$: Alt limit

(X, Σ, μ) : Ölçüm uzayı

1.GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Eşitsizlik, büyüklük ve küçüklük bakımından verilen matematiksel denklemlerin karşılaştırılması olarak ifade edilebilir. Eşitsizliklerin asıl amaçlarından biri de değeri tam olarak hesaplanamayan matematiksel ifadelerin değerinin daha iyi hesaplanması ve tam bir değere sahip olmayan fonksiyonları üstten ve alttan sınırlayarak verilen fonksiyonların sonucunun tahmin edilmesinde katkıda bulunmaktır. Eşitsizlikler Matematik biliminin yanı sıra diğer bilim dallarında da değeri tam olarak hesaplanamayan problemlerin çözümünde önemli bir yer teşkil etmektedir. Bunların yanı sıra eşitsizlikler; Sobolev eşitsizlikleri, öz fonksiyon ve spektral eşitsizlikleri, saçılma, kolerasyon ve majorizasyonon eşitsizlikleri şeklinde gruplanır [27]. Geçmişten günümüze kadar eşitsizlikler hakkında birçok araştırmalar yapılmış ve kitaplar yazılmıştır. Bu yapılan çalışmaların ilkinin ise Polya, Hardy ve Littlewood'un 1934 yılında yazdıkları "Inequalities" adlı kitaplarıdır [22]. Eşitsizlikler üzerine hazırlanan ikinci kaynak ise 1961 yılında R.Bellman ve E.F.Beckenbach tarafından yazılan "Inequalities" adlı kitaptır [10]. Eşitsizlikler üzerine yazılan üçüncü kaynak ise 1970 yılında Mitronovic'in yazdığı "Analytic Inequalities" adlı kitaptır [31].

Analitic Inequalities adlı kaynakta daha kapsamlı araştırmalar ve çalışmalar yapılarak diğer iki kaynak kitaplarda bulunmayan eşitsizlikler bulunmaktadır. Bu ilk üç ana kaynağın dışında Mitronovic ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmalar eşliğinde "Classical and new Inequalities in Analysis" [33] ve "Their Integrals and Derivatives" [32] adlı kitapları yazmışlardır. Niculescu ve Persson'un yazmış oldukları "Convex Functions and Their Applications" [35], Pachpatte'nin yazmış olduğu "Mathematical Inequalities" [31] kaynaklar örnek olarak sıralanabilir.

Eşitsizliklerin bir diğer uğraş alanı ise konvekslik kavramı ve konveks fonksiyonlardır. Konveks fonksiyonlar eşitsizlik teorisinde önemli bir çalışma alanıdır. 1905-1906 yıllarında J. Jensen'in yaptığı çalışmadan sonra konveks fonksiyonların daha sistemli olarak çalışılması sağlanmıştır. J. Jensen'in yaptığı önemli çalışmaların ardından konveks fonksiyonlar üzerine yapılan araştırmalar ve çalışmalar hız kazanmıştır. Son

yıllarda ise bilinen konvekslik tanımından daha genel olarak konveks fonksiyonların tanımları ve çeşitleri araştırılmıştır. 1978 yılında Breckner s-konveks fonksiyonları yazmış olduğu “Stetigkeit Aussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Raumen” adlı çalışmasında tanıtmıştır [13]. 1994 yılında Hudzig ve Maligranda s-konveks fonksiyonların bazı özelliklerini “Some remarks on s-convex functions” adlı çalışmasında kullanmıştır [23]. Konveks fonksiyonlar ve uygulama alanları da günlük yaşamımızda birçok alanı etkilemektedir. Bu uygulama alanları ise mühendislik, endüstri, fizik, ekonomi, veri analizi, istatistik, sanat, tıp gibi iş alanlarını etkilemektedir [27]. Matematik anabilim dallarında ise uygulamalı matematik, olasılık teorisi, matematiksel analiz, cebir ve diğer alanları doğrudan ya da dolaylı olarak etkilemektedir.

Eşitsizlikler hakkında Persons ve Nicelescu tarafından yazılan “Convex Functions and Their Applications” [35] ve Pandpate tarafından yazılan “Mathematical Inequalities” [40] kaynakları da örnek verilebilir. Verilen tüm bu kaynakların dışında, S.S.Dragomir, R.P.Agarwal, V.Lakshmikantham gibi araştırmacıların birçok makale, monografi ve kitapları eşitsizlik alanında yapılan çalışmalar arasında gösterilebilir. Eşitsizlikler üzerine günümüze kadar birçok araştırılmalar yapılmış, makale ve kitaplar yazılmıştır. Bu çalışmaların önemli bir kısmı S.S.Dragomir ve C.E.M.Perace tarafından 2002 yılında yazılmış olan kaynaktan toparlanmıştır [19]. Bu tez çalışmasında bazı konveks fonksiyonların tanımları verilmiş ve bazı özellikleri üzerinde durulmuştur. Özellikle ikinci anlamda (s,m) -konveks fonksiyonlar üzerinde durulmuştur. Bu tez çalışmasında $[0,d]$, $d > 0$ aralığı üzerinde tanımlanan ve $m \in (0,1)$ aralığı üzerinde birinci ve ikinci anlamda (s,m) -konveks fonksiyonların bazı özellikleri tanımlanmıştır. Ayrıca bazı integral eşitsizlikleri, negatif olmayan ikinci anlamda (s,m) -konveks fonksiyonları için ve ölçülebilir uzay için incelenmiştir. Alınan sonuçlar örneklerle desteklenmiştir.

1.2.Genel Kavramlar

Bu bölümde ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar teorisinin temel kavramları ve sonuçları verilmektedir.

1.2.1.Ölçüler

Tanım 1.2.1.1.([7] s.15-19)

1) X herhangi bir küme ve X 'in bir Σ sınıfı için

a) $X \in \Sigma$,

b) $A \in \Sigma$ ise $A^c = X \setminus A \in \Sigma$,

c) Her $A_n \subset \Sigma$ için $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

şartları sağlanırsa Σ 'ya X kümesi üzerinde bir σ -cebiri denir.

2) Bir X kümesi ve X kümesi üzerindeki bir Σ -cebiri oluşturduğu (X, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzay denir.

3) Σ 'nın her bir elemanına Σ -ölçülebilir küme veya ölçülebilir küme denir.

Şimdi, ölçülebilir (X, Σ) uzayları ile ilgili aşağıdaki

a) $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ ise $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \Sigma$,

b) $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ ise $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \Sigma$,

c) $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset \Sigma$ ise $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$,

d) $A, B \in \Sigma$ ise $A \cap B^c \in \Sigma$

önergelerin doğruluğu kolayca gösterilir.

Örnek 1.2.1.2. $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = \{\emptyset, \{3, 6, 9, \dots, 3n, \dots\}, \{m \in \mathbb{N} : m \neq 3n, n \in \mathbb{N}\}, \mathbb{N}\}$ olarak alınırsa Σ, X kümesi üzerinde bir σ -cebiri.

Örnek 1.2.1.3. $f: X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere, Σ, Y kümesi üzerinde bir σ -cebiri olduğunda

$$f^{-1}(\Sigma) = \{f^{-1}(A) : A \in \Sigma\}$$

fonksiyonu da X kümesi üzerinde bir σ -cebiri.

Öncelikle;

a) Σ, Y kümesi üzerinde bir σ -cebiri olduğundan $Y \in \Sigma$ olur. Bu halde $f^{-1}(Y) \in f^{-1}(\Sigma)$ olup diğer taraftan $f^{-1}(Y) = X$ olacağından $X \in f^{-1}(\Sigma)$ olduğu elde edilir.

b) $B \in f^{-1}(\Sigma)$ olsun. B kümesi en az bir $A \in \Sigma$ 'nin ters görüntüsüdür. Yani $B \in f^{-1}(\Sigma)$ ise $B^c = f^{-1}(A^c)$ olduğu görülür. Σ bir σ -cebiri olduğundan $A^c \in \Sigma$ olur. Dolayısıyla $f^{-1}(A^c) \in f^{-1}(\Sigma)$ ise $B^c \in f^{-1}(\Sigma)$ elde edilir.

c) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $B_n \in f^{-1}(\Sigma)$ olduğu kabul edilsin. $A_n \in \Sigma$ olmak üzere her bir B_n kümesi için öyle bir A_n kümesi bulunabilir ki $B_n = f^{-1}(A_n)$ 'dir. Böylece $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(A_n) = f^{-1}(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$ olduğu görülür. Σ bir σ -cebiri olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma$

Σ ve dolayısıyla $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in f^{-1}(\Sigma)$ olup, Σ 'nın Y kümesi üzerinde bir σ -cebiri olduğu elde edilir.

Örnek 1.2.1.4. X keyfi bir küme ve $\Sigma = 2^X$ ise (X, Σ) ikilisine bir ölçülebilir uzaydır denir ve bu aile en geniş σ -cebiridir.

Gerçekten,

- a) $X, \emptyset \in \Sigma$ ise $X, \emptyset \in \Sigma = 2^X$,
- b) Keyfi bir $A \in \Sigma$ için $A \subset X$ olup $A^c = X \setminus A \subset X$ olduğundan $A^c \in \Sigma = 2^X$,
- c) Keyfi alınan bir $A_n \subset \Sigma$ için her $n \geq 1$ değerlerinde $A_n \subset X$ olduğundan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset X$ olup $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma = 2^X$ olduğu elde edilir.

Tanım 1.2.1.5. ([7] s.18) X keyfi bir küme ve γ , X 'in alt kümelerinin boş olmayan ailesi olmak üzere γ 'yı içeren en küçük σ -cebirine γ tarafından doğurulan σ -cebiridir.

Tanım 1.2.1.6.([46] s.70) $X = \mathbb{R}$ kümesi için $a, b \in \mathbb{R}$ olsun. (a, b) şeklindeki bütün aralıkların doğurduğu σ -cebirine Borel cebiridir ve $\beta(\beta_{\mathbb{R}})$ notasyonu ile gösterilir.

1.2.2. Ölçüm Uzayı

Tanım 1.2.2.1. ([7] s.22)

1) (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olmak üzere, Σ, X 'in bazı alt kümelerinin oluşturduğu bir σ -cebiri ve $\mu: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

- a) $\mu(\emptyset) = 0$,
- b) Her $E \in \Sigma$ için $\mu(E) \geq 0$,
- c) Her ayrık ölçülebilir kümelerin $E_n \subset \Sigma$ dizisi

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n), n \in \mathbb{N}$$

yukarıdaki özellikleri sağlıyorsa bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonuna da kısaca ölçüm adı verilir.

Örnek 1.2.2.2. X kümesi için $\text{card } X \geq 2$ ve bu kümenin $P(X)$ güç kümesi verilsin. $P(X)$ kümesi üzerinde

$$\mu(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ 1, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

ile verilen μ dönüşümünün ölçü fonksiyonu olup olmadığı incelensin. O halde;

- i. Tanım gereği $\mu(\emptyset) = 0$ olduğu açıktır.
- ii. Her $A \in P(X)$ için $\mu(X) \geq 0$,

iii. Her $n \in \mathbb{N}$ için (A_n) dizisi $P(X)$ kümesindeki ayrık kümelerin bir dizisi olmak üzere aşağıdaki durumlar söz konusudur;

- a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n = \emptyset$ ise $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ gerçekleşir.
b) $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \leq n_0$ için $A_n = \emptyset$, her $n, m \geq n_0$ için $A_n, A_m \neq \emptyset$ ve $A_n \cap A_m = \emptyset$ olsun.

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=n_0+1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$$

olup,

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$$

eşitliği sağlanır. Diğer yandan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \mu(A_n) = 1 + 1 + \dots = +\infty$$

olduğundan

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \neq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

sağlanır.

Dolayısıyla $\mu, P(X)$ kümesi üzerinde bir ölçü fonksiyonu değildir.

Örnek 1.2.2.3. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n; \Sigma, \sigma$ -cebiri üzerinde bir ölçü ve $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ negatif olmayan reel sayı ise Σ üzerinde

$$v(E) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k(E), k \in \mathbb{N}$$

ile tanımlı v dönüşümünün σ -cebiri üzerinde bir ölçü olup olmadığı incelensin. Geçekten,

$$\text{i. } v(\emptyset) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k(\emptyset) = 0,$$

ii. $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ ölçü olduğundan her $E \in \Sigma$ için

$$v(E) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k(E) \geq 0,$$

iii. $(E_m), \Sigma$ daki ayrık kümelerin bir dizisi ve $1 \leq k \leq n$ için μ_k dönüşümleri ölçü olduğundan

$$\begin{aligned} v(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m) &= \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k(\bigcup_{m=1}^{\infty} E_m) \\ &= \sum_{k=1}^n \alpha_k [\sum_{m=1}^{\infty} \mu_k(E_m)] \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k(E_m) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k(E_m)) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} v(E_m) \end{aligned}$$

olup istenilen elde edilir. Dolayısıyla v dönüşümü σ -cebiri üzerinde ölçüdür.

Tanım 1.2.2.4.([7] s.22) (X, Σ) bir ölçüm uzayı olmak üzere,

1) Her $E \in \Sigma$ için $\mu(E) < \infty$ ise μ ölçümüne göre sonlu ölçüm denir.

2) $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, $E_n \subset \Sigma$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(E_n) < +\infty$ ise μ ölçümüne σ -sonlu ölçüm denir.

Tanım 1.2.2.5.([7] s.23) X herhangi bir küme, X 'in alt kümelerinin bir Σ σ -cebiri ve Σ üzerinde tanımlı bir μ ölçümünden oluşan (X, Σ, μ) ölçüsüne ölçüm uzayı adı verilir.

Örnek 1.2.2.6. X boş olmayan bir küme ve $p \in X$ sabit bir nokta, $\Sigma = P(X)$ olmak üzere $E \in \Sigma$ için

$$\mu(E) = \begin{cases} 1, & p \in E \\ 0, & p \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ fonksiyonu bir sonlu ölçümdür. Bu ölçümep noktasındaki yoğunlaşmış birim ölçümveyaDirac Ölçümü adı verilir.

Örnek 1.2.2.7. $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = P(\mathbb{N}) = 2^{\mathbb{N}}$ ve $\mu: \Sigma \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$,

$$\mu(E) = f(x) = \begin{cases} \text{card}(E), & E \text{ sonlu} \\ +\infty, & E \text{ sonsuz} \end{cases}$$

ise μ fonksiyona Σ üzerinde bir sayım ölçümüadı verilir. Verilen bu ölçü sonlu olmayıp σ -sonludur. Eğer $E_n = \{n\}$ seçilir ve $\bigcup E_n$ sonlu ise E_n kümeleri sonlu elemanlıdır ve eleman sayılarının toplamı $\bigcup E_n$ 'nin eleman sayısına eşittir. $\bigcup E_n$ sonsuz ve E_n kümeleri sonlu elemanlı ise E_n kümesinin eleman sayılarının toplamı sonsuzdur. Gerçekten de $\mathbb{N} = \bigcup_{n \geq 1} \{E_n\}$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(E_n) = 1$ olduğu açıktır.

Örnek 1.2.2.8. $(\mathbb{R}, \beta)$ ölçülebilir uzay olsun. β Borel cebiri üzerinde tanımlı ve her $E = (a, b)$ ($a, b \in \mathbb{R}$) açık aralığında aralığın boyunu veren λ ölçümüne Borel veya β Borel cebiri üzerinde Lebesgue ölçümü denir. $\lambda(a, b) = b - a$ notasyonu ile gösterilir.

Teorem 1.2.2.9.([7] s.23) (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olsun. Eğer $A, B \in \Sigma$ ve $A \subset B$ ise

$$\mu(A) \leq \mu(B)$$

olup, ayrıca $\mu(A) < \infty$ ise

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

eşitliği elde edilir.

Önerme 1.2.2.10.([7] s.24) (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olsun.

a) Eğer (B_n) , Σ içinde artan bir dizi ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n), n \in \mathbb{N}$$

b) Eğer (E_n) , Σ içinde azalan bir dizi ve $\mu(E_1) < +\infty$ ise

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n), n \in \mathbb{N}$$

özellikleri sağlanır.

Örnek 1.2.2.11. $X = \mathbb{N}$, $\Sigma = 2^{\mathbb{N}}$ ve μ , $\mathbb{N}$ üzerinde sayım ölçümü olup

$$F_n = \{m \in \mathbb{N} : m \geq n\}, n \geq 1$$

olarak tanımlansın. Bu halde $F_n \in \Sigma$, F_n monoton ve

$$\mu(F_1) = \mu(\mathbb{N}) = +\infty$$

olup

$$\mu(\bigcap_{n \geq 1} F_n) = \mu(\emptyset) = 0$$

olmasına rağmen

$$\mu(F_n) = +\infty$$

böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = +\infty \neq 0 = \mu(\bigcap_{n \geq 1} F_n)$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 1.2.2.12.([7] s.26) (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere, Σ 'ya ait kümelerin herhangi bir (A_n) dizisi için

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanır.

Örnek 1.2.2.13. (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olup $B \subset X$ olsun

$$\mu^*(B) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j) : E_j \in \Sigma, B \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \right\}$$

şeklinde tanımlanan $\mu^*: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonuna μ -ölçümünün doğurduğu dış ölçüm denir.

Teorem 1.2.2.14.([7] s.30) X herhangi bir küme ve $\mu^*: 2^X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu

- a) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
- b) Her $A \in 2^X$ için $\mu^*(A) \geq 0$,
- c) Her $B, E \subset X$ ve $B \subset E$ için $\mu^*(B) \leq \mu^*(E)$,
- d) Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in 2^X$ ise

$$\mu^*(\bigcup_{n \geq 1} E_n) \leq \sum_{n \geq 1} \mu^*(E_n)$$

özelliklerini sağlar.

Örnek 1.2.2.15. $\mathbb{R}$ 'nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir (I_n) dizisi,

$$\tau_A = \{(I_n) : A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}, n \in \mathbb{N}$$

şeklinde alınsın. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \iota(I_n) : (I_n) \in \tau_A \right\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür ve Lebesgue dış ölçüsü olarak adlandırılır.

Şimdi bu fonksiyonun dış ölçü şartlarını sağladığını gösterelim:

- a) Her $\varepsilon > 0$ için en az bir (I_n) dizisi bulunabilir ki $\emptyset \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \iota(I_n) < \varepsilon$ olur.

(Örneğin $I_n = (0, \frac{\varepsilon}{2^{n+1}})$ alınabilir.) Dolayısıyla $\emptyset \leq \lambda^*(\emptyset) < \varepsilon$ olur ki bu $\lambda^*(\emptyset) = 0$ olmasını gerektirir.

b) İnfimumu alınan bir kümenin her elemanı pozitif veya sıfır olduğundan kümenin infimumu negatif olamaz. Bu halde her $A \subset X$ için $\lambda^*(A) \geq 0$ sağlanır.

c) $A \subset B$ olsun. B kümesini örten açık aralıklar A kümesini de örter. Dolayısıyla

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \iota(I_n) : (I_n) \in \tau_A\} \leq \inf\{\iota(I_n) : (I_n) \in \tau_B\} = \lambda^*(B)$$

eşitliği sağlanır.

d) (A_m) , $\mathbb{R}$ 'nin alt kümelerinin her hangi bir dizisi olmak üzere, eğer

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_m) = +\infty$$

ise

$$\lambda^*(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_m)$$

olacağı açıktır.

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_m) < \infty$$

olsun. $\varepsilon > 0$ verildiğinde, infimum özelliğinden her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \iota(I_{m,n}) < \lambda^*(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}$$

olacak şekilde en az bir $(I_{m,n}) \in \tau_{A_m}$ dizisi vardır. $A_m \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_{m,n}$ olduğundan

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_{m,n} \right)$$

yazılabilir. λ^* 'ın tanımından ve $\sum_{n=1}^{\infty} \iota(I_{m,n}) < \lambda^*(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m}$ 'den

$$\begin{aligned} \lambda^*(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \iota(I_{m,n}) \\ &< \sum_{m=1}^{\infty} \left[\lambda^*(A_m) + \frac{\varepsilon}{2^m} \right] \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_m) + \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. ε keyfi olarak seçildiğinden

$$\lambda^*(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) \leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda^*(A_m)$$

elde edilir.

Örnek 1.2.2.16. λ^* Lebesgue dış ölçüsü ve $A \subset \mathbb{R}$ kümesi λ^* ölçülebilir olmak üzere,

a) Her $x \in \mathbb{R}$ için $\lambda^*(A + x) = \lambda^*(A)$,

b) $A + x = \{a + x : a \in A\}$ kümesi λ^* ölçülebilirdir.

Gerçekten,

$$\mathbf{i.} \tau_A = \{(I_k) = (a_k, b_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)\}$$

için

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \iota(I_k) : (I_k) \in \tau_A\}$$

$$= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) : (I_k) \in \tau_A\}$$

eşitliğinin sağlandığı bilinir.

$$\tau_{A+x} = \{(I_{k+x}) = ((a_{k+x}, b_{k+x})) : A+x \subset \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_{k+x}, b_{k+x})\}$$

olup,

$$\begin{aligned} \lambda^*(A+x) &= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \iota((a_{k+x}, b_{k+x})) : ((a_{k+x}, b_{k+x})) \in \tau_{A+x}\} \\ &= \inf\{\sum_{k=1}^{\infty}((b_k - a_k)) : ((a_k, b_k)) \in \tau_A\} \\ &= \lambda^*(A) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır.

ii. $A+x$ kümesinin λ^* ölçülebilir olması için her $E \subset \mathbb{R}$ için

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap (A+x)) + \lambda^*(E \cap (A+x)^c)$$

eşitliğinin sağlandığı gösterilmelidir.

$$E \cap (A+x) = [(E-x) \cap A] + x$$

$$E \cap (A+x)^c = [(E-x) \cap A^c] + x$$

hatırlatması kullanılarak a) şikkı yardımıyla,

$$\begin{aligned} \lambda^*(E \cap (A+x)) &= \lambda^*([(E-x) \cap A] + x) \\ &= \lambda^*((E-x) \cap A) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \lambda^*(E \cap (A+x)^c) &= \lambda^*([(E-x) \cap A^c] + x) \\ &= \lambda^*((E-x) \cap A^c) \end{aligned}$$

sağlanır. A kümesi Lebesgue ölçülebilir olduğundan

$$\begin{aligned} \lambda^*(E \cap (A+x)) + \lambda^*(E \cap (A+x)^c) &= \lambda^*([(E-x) \cap A]) + \lambda^*([(E-x) \cap A^c]) \\ &= \lambda^*(E-x) \\ &= \lambda^*(E) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Böylece $A+x$ kümesinin λ^* ölçülebilir olduğu gösterilmiştir.

Tanım 1.2.2.17.([7] s.36) X bir küme ve $E \subset X$ olsun. Eğer her $A \subset X$ için

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A/E)$$

koşulu sağlanıyorsa E kümesine μ^* -ölçülebilirdir denir. X kümesinin bütün μ^* -ölçülebilir kümelerinin oluşturduğu aile Σ^* notasyonu ile gösterilecektir.

Teorem 1.2.2.18.([7] s.36). Σ^* σ -cebiri ve μ^* ölçümü için eğer $E \in \Sigma^*$, $\mu^*(E) = 0$ ve $B \subset E$ ise $B \in \Sigma^*$ ve $\mu^*(B) = 0$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.2.2.19.([7] s.37)

μ^* -ölçülebilir küme oluşturdugu Σ^* ailesini ve Σ cebirini içeren bir σ -cebiridir. Ayrıca, eğer $E_n \subset \Sigma^*$ ayrık bir dizi ise

$$\mu^*(\bigcup_{n \geq 1} E_n) = \sum_{n \geq 1} \mu^*(E_n)$$

eşitliği doğrudur. Bu teorem C.Caratheodory Genişletme Teoremiolarak ifade edilir.

Örnek 1.2.2.20. $P(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlı

$$\mu_1^*(A) = \begin{cases} 0, & A = \emptyset \\ +\infty, & A \neq \emptyset \end{cases}$$

dış ölçüm olduğu gösterilsin. Gerçekten;

i. $\mu_1^*(\emptyset) = 0$ tanımdan sağlanır.

ii. Her $A \in P(\mathbb{R})$ için $\mu_1^*(A) \geq 0$ olduğu tanımdan açıktır.

iii. Her $B, E \in P(\mathbb{R})$ ve $B \subset E$ olduğundan $\mu_1^*(B) \leq \mu_1^*(E)$ olduğu gösterilmelidir. Bunun için iki durum söz konusudur:

a) $B = \emptyset$ ise $E \neq \emptyset$ ya da $E = \emptyset$ 'dir. O halde $\mu_1^*(B) = 0$, $\mu_1^*(E) = +\infty$ ya da $\mu_1^*(E) = 0$ 'dır. Böylece $\mu_1^*(B) \leq \mu_1^*(E)$ eşitliği sağlanır.

b) $B \neq \emptyset$ ise $E \neq \emptyset$ olması gerekir. O halde $\mu_1^*(B) = +\infty$ ve $\mu_1^*(E) = +\infty$ olup $\mu_1^*(B) \leq \mu_1^*(E)$ eşitliği sağlanır.

iv. $P(\mathbb{R})$ kümesindeki herhangi bir (E_n) dizisi için $\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(E_n)$ sağlandığı gösterilmelidir. Bunu için aşağıdaki durumlar sağlanmalıdır.

a) Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n = \emptyset$ olsun. $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ olup $\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = 0$ olur.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(E_n) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

olduğundan

$$\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(E_n)$$

eşitliği sağlanır.

b) $n_0 \in \mathbb{N}$ öyle ki her $n \leq n_0$ için $E_n \neq \emptyset$ ve her $n > n_0$ için $E_n = \emptyset$ olsun. Bu halde

$$\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{n_0} E_n) = +\infty$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(E_n) = \sum_{n=1}^{n_0} \mu_1^*(E_n) = +\infty$$

gerçekleşip istenen eşitlik sağlanır.

c) Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \neq \emptyset$ olsun.

$$\mu_1^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = +\infty \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^*(E_n) = +\infty$$

olduğundan istenilen eşitlik elde edilir. Böylece $P(\mathbb{R})$ kümesi üzerinde μ_1^* dış ölçüdür.

1.2.3. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 1.2.3.1. ([7] s.44)

- 1) (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olmak üzere, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna Σ -ölçülebilirdir denir ancak ve ancak her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \in \Sigma$ koşulu sağlanır.
- 2) X 'den $\mathbb{R}$ 'ye bütün Σ -ölçülebilir fonksiyonların oluşturduğu aile $M_0(X, \Sigma)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 1.2.3.2.([7] s.44) (X, Σ) bir ölçülebilir uzay olsun. $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için

- a) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $A_\alpha = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \in \Sigma$,
- b) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $B_\alpha = \{x \in X: f(x) \leq \alpha\} \in \Sigma$,
- c) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $C_\alpha = \{x \in X: f(x) \geq \alpha\} \in \Sigma$,
- d) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha = \{x \in X: f(x) < \alpha\} \in \Sigma$

önergeleri denktir.

Tanım 1.2.3.3.([7] s.44-49) Σ üzerinde tanımlı bir reel değerli f fonksiyonu eğer tanım bölgesi olan X kümesi ölçülebilir ve Önerme 1.2.3.2'nin dört durumundan biri sağlanıyorsa ölçülebilir olarak adlandırılır.

Örnek 1.2.3.4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sgn}x$ olarak tanımlansın. f fonksiyonu Borel ölçülebilirdir. Gerçekten;

Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in \mathbb{R}: f(x) > \alpha\} \in \beta(\mathbb{R})$ olduğu gösterilmelidir.

Şimdi,

$$f(x) = \text{sgn}x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

- a) $\alpha < -1$ ise $\{x \in \mathbb{R}: f(x) > \alpha\} = \mathbb{R} \in \beta(\mathbb{R})$,
- b) $-1 \leq \alpha < 0$ ise $\{x \in \mathbb{R}: f(x) > \alpha\} = [0, +\infty) \in \beta(\mathbb{R})$,
- c) $0 \leq \alpha < 1$ ise $\{x \in \mathbb{R}: f(x) > \alpha\} = (0, +\infty) \in \beta(\mathbb{R})$,
- d) $\alpha > 1$ ise $\{x \in \mathbb{R}: f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \beta(\mathbb{R})$.

Böylece f fonksiyonunun Borel ölçülebilir olduğu gösterilmiştir.

Örnek 1.2.3.5. (X, Σ) ölçülebilir uzay olmak üzere, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = c$ (c sabit) ve $c, x \in \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir. Gerçekten,

- a) $\alpha \geq c$ için $\{x \in X: f(x) > \alpha\} = \emptyset \in \Sigma$,
- b) $\alpha < c$ için $\{x \in X: f(x) > \alpha\} = X \in \Sigma$.

Tanım 1.2.3.6.([7]s.45) Herhangi bir E kümesi için

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \in X \setminus E \end{cases}$$

şeklinde tanımlı $\chi_E: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna E kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. (X, Σ) ölçülebilir uzay ve $E \subset X$ olsun. $\chi_E: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerekli olan şart $E \in \Sigma$ olmasıdır.

E kümesi ölçülebilir olduğundan χ_E ölçülebilirdir. Gerçekten;

$$\{x \in X: \chi_E(x) \leq \alpha\} = \begin{cases} \emptyset, & \alpha < 0 \\ E^c, & 0 \leq \alpha < 1 \\ X, & \alpha \geq 1 \end{cases}$$

Böylece $\{x \in X: \chi_E(x) \leq \alpha\} \in \Sigma$, her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve χ_E, X kümesi üzerinde Σ ölçülebilirdir.

Teorem 1.2.3.7.([7] s.46) $f, g \in M_0(X, \Sigma)$ ve $c \in \mathbb{R}$ ise $f^2, fg, f \pm g, cf, |f| \in M_0(X, \Sigma)$ fonksiyonları da ölçülebilirdir.

Tanım 1.2.3.8.([7] s.49) $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$) bir fonksiyon ve her $x \in X$ için

$$f^+(x) = \sup\{f(x), 0\},$$

$$f^-(x) = \sup\{-f(x), 0\}$$

şeklinde tanımlanan ve negatif değerler almayan $f^+: X \rightarrow \mathbb{R}$ ve $f^-: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarına sırasıyla f fonksiyonun pozitif ve negatif kısımları denir.

Tanım 1.2.3.9.([7] s.47)

1) $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon ve (X, Σ) ölçülebilir uzay olsun. Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in X: f(x) > \alpha\} \in \Sigma$$

ise f 'ye Σ -ölçülebilirdir ya da ölçülebilirdir denir.

2) X kümesi üzerinde tanımlı ve genişletilmiş reel değerli ($\overline{\mathbb{R}}$) Σ -ölçülebilir fonksiyonların kümesi $M(X, \Sigma)$ notasyonu ile gösterilir. $M(X, \Sigma)$ kümesindeki negatif değerler almayan fonksiyonların kümesi ise $M^+(X, \Sigma)$ notasyonu ile gösterilir.

Önerme 1.2.3.10.([7] s.48) $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir fonksiyon ve bu fonksiyonunun Σ -ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$A_f = \{x \in X: f(x) = +\infty\} \in \Sigma,$$

$$B_f = \{x \in X: f(x) = -\infty\} \in \Sigma$$

olması ve $f_0: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonu için

$$f_0(x) = \begin{cases} f(x), & x \notin A_f \cup B_f \\ 0, & x \in A_f \cup B_f \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonunun Σ -ölçülebilir olmasıdır.

Önerme 1.2.3.11.([7] s.51) $M(X, \Sigma)$ kümesi içinde alınan (f_n) dizisi $\overline{\mathbb{R}}$ değerli ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi ise,

$$f(x) = \inf_{(n)} f_n(x) \text{ ve } F(x) = \sup_{(n)} f_n(x), x \in X, n \in \mathbb{N}$$

$$f^*(x) = \liminf f_n(x) \text{ ve } F^*(x) = \limsup f_n(x), x \in X, n \in \mathbb{N}$$

fonksiyonları da $M(X, \Sigma)$ kümesi içindedir.

Sonuç 1.2.3.12.([7] s.51) Eğer $(f_n) \subset M(X, \Sigma)$ ve $f \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$ (noktasal yakınsak) ise $f \in M(X, \Sigma)$ olur.

Gerçekten;

$$A(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} \liminf f_n(x), & x \in X \\ \limsup f_n(x), & x \in X \end{cases}$$

eşitliği ve Önerme 1.2.3.11. den sonuca ulaşılır.

Önerme 1.2.3.13.([7] s.45) Eğer $f \in M(X, \Sigma)$ ve $E \in \Sigma$ ise $f\chi_E \in M(X, \Sigma)$.

Önerme 1.2.3.14.([7] s.46) Eğer $f, g \in M(X, \Sigma)$ ise $fg \in M(X, \Sigma)$.

Önerme 1.2.3.15.([9]) $f \in M^+(X, \Sigma)$ olsun. Bu durumda $M^+(X, \Sigma)$ içinde olan ve aşağıdaki

a) Her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $0 \leq \psi_n(x) \leq \psi_{n+1}(x)$,

b) Her $x \in X$ için $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x)$,

c) Her $n \in \mathbb{N}$ için ψ_n fonksiyonu sonlu sayıda değer alır

koşullarını sağlayan bir (ψ_n) fonksiyon dizisi vardır.

Teorem 1.2.3.21. ([9] s.111)

Eğer Σ cebiri üzerinde tanımlı μ ölçümü σ -sonlu bir ölçüm ise bu ölçüm Σ' 'yı içeren bir Σ^* σ -cebirine tek biçimde genişletilebilir. Bu teoreme Hahn Genişletişim Teoremi denir.

1.2.4. İntegral

Tanım 1.2.4.1.([7] s.55) Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen fonksiyonlar **basit fonksiyon** olarak adlandırılır. Basit ölçülebilir bir $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $a_j \in \mathbb{R}$, χ_{E_j} , E_j kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\psi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}, E_j = \{x \in X: \psi(x) = a_j\}, j = 1, 2, \dots, n$$

şeklinde yazılır. Burada $a_j, j = 1, 2, \dots, n$ reel sayılarının farklı olma koşulu koyulduğunda basit bir $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun

$$\psi = \sum_{j=1}^n a_j \chi_{E_j}$$

şeklinde ifade edilen gösterimine ψ fonksiyonunun temel (standart) gösterimi adı verilir.

Tanım 1.2.4.2.([7] s.56) (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere, $\psi \in M^+(X, \Sigma)$ fonksiyonunun temel gösterimi tanım 1.2.4.1 şeklinde bir basit fonksiyon ise ψ fonksiyonunun X kümesi üzerinde μ ölçümüne göre integrali

$$\int_X \psi d\mu = \sum_{j=1}^n a_j \mu(E_j)$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş sayıya denir.

Önerme 1.2.4.3.([7] s.57) (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere, $\varphi, \psi \in M^+(X, \Sigma)$ iki basit fonksiyon ve $c \geq 0$ olarak seçilsin. Bu durumda

a) $\int_X (c\varphi) d\mu = c \int_X \varphi d\mu,$

b) $\int_X (\varphi + \psi) d\mu = \int_X \varphi d\mu + \int_X \psi d\mu,$

c) Her $x \in X$ için $\varphi(x) \leq \psi(x)$ ise $\int_X \varphi(x) d\mu \leq \int_X \psi(x) d\mu$

önergeleri doğrudur.

Tanım 1.2.4.4.([7] s.60) (X, Σ, μ) bir ölçüm uzay olsun,

1) $f \in M^+(X, \Sigma)$ olarak seçilsin. f fonksiyonunun μ ölçümüne göre integrali

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \psi d\mu : \psi \in M^+(X, \Sigma), \forall x \in X, 0 \leq \psi(x) \leq f(x) \right\}$$

şeklinde tanımlanan genelleştirilmiş reel sayıya denir.

2) $E \in \Sigma$ olarak seçilsin. f fonksiyonunun μ ölçümüne göre E kümesi üzerindeki integrali ise

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$$

şeklinde tanımlanan reel sayıya denir.

Önerme 1.2.4.5.([7] s.65) (X, Σ, μ) ölçülebilir uzay olsun,

a) $f \in M^+(X, \Sigma)$ ve $c \geq 0$ ise $cf \in M^+(X, \Sigma)$ ve $\int_X (cf) d\mu = c \int_X f d\mu,$

b) $f, g \in M^+(X, \Sigma)$ ise $(f + g) \in M^+(X, \Sigma)$ ve $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

eşitlikleri sağlanmaktadır.

Önerme 1.2.4.6.([7] s.60) (X, Σ, μ) bir ölçülebilir uzay olsun,

a) $f, g \in M^+(X, \Sigma)$ ve $f \leq g$ ise $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu,$

b) $f \in M^+(X, \Sigma)$ ve $E, F \in \Sigma, E \subset F$ ise $\int_E f d\mu \leq \int_F f d\mu$

eşitsizlikleri sağlanmaktadır.

Önerme 1.2.4.7.([7] s.67) (X, Σ, μ) ölçüm uzayı ve $X = \mathbb{N}, \Sigma = P(X)$ ve $\mu, \mathbb{N}$ üzerinde bir sayım ölçümü olmak üzere, $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$ bir fonksiyon ise

$$\int_{\mathbb{N}} f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

eşitliği sağlanır.

Tanım 1.2.4.8.([7] s.69) (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere, $f \in M(X, \Sigma)$ olarak seçilsin. Eğer $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integralleri de sonlu ise f fonksiyonuna X kümesi üzerinde tanımlı ve μ ölçümüne göre integrallenebilirdenir ve bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

şeklinde ifade edilir. X kümesinde tanımlı ve μ ölçümüne göre integrallenebilir fonksiyonlar ailesi $L = L(X, \Sigma, \mu)$ gösterimi ile ifade edilir.

Teorem 1.2.4.9.([7] s.70) (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olmak üzere, $f \in M(X, \Sigma)$ olarak seçilsin. Bu taktirde $f \in L$ integrallenebilirdir ancak ve ancak $|f| \in L'$ dir. Ayrıca,

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

eşitsizliği doğrudur.

Tanım 1.2.4.10.([7] s.72) Bir önermenin herhangi bir (X, Σ, μ) ölçüm uzayında μ - hemen her yerde geçerli (doğru) olması, μ -ölçümü sıfır olan Σ - ölçülebilir bir kümeni tümleyeninde de geçerli olması demektir. (μ - hemen hemen her yerde yeterlik özelliği μ -h.h.y. şeklinde yazılır).

Örneğin, X üzerinde tanımlı bir (f_n) fonksiyon dizisinin bir f fonksiyonuna μ -h.h.y. yakınsaması demek, $\mu(A) = 0$ olan ölçülebilir bir $A \in \Sigma$ kümesinin tümleyenindeki her $x \in X \setminus A$ değeri için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

sağlanır. Bu durumda “ $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{X} f$ μ - h.h.y.” şeklinde yazılır.

Önerme 1.2.4.11.([7] s.72) (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olmak üzere, $f \in M^+(X, \Sigma)$ fonksiyonu için $f = 0$ μ - h.h.y. ancak ve ancak

$$\int_X f d\mu = 0$$

koşulunun sağlanmasıdır.

Önerme 1.2.4.12. (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olmak üzere, $(f_n) \in M^+(X, \Sigma)$ monoton artan bir fonksiyonlar dizisi ve $f \in M^+(X, \Sigma)$ fonksiyonuna μ - h.h.y. yakınsıyor ise

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu$$

eşitliği doğrudur.

Önerme 1.2.4.13.([7] s.74) (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olmak üzere, eğer $f \in M(X, \Sigma)$, $g \in L(X, \Sigma, \mu)$ ve $|f| \leq |g|$ ise $f \in L(X, \Sigma, \mu)$ ve

$$\int_X |f| d\mu \leq \int_X |g| d\mu$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 1.2.4.14.([7] s.77) (X, Σ, μ) bir ölçüm uzayı olmak üzere, f ve g fonksiyonları X kümesi üzerinde integrallenebilen reel değerli fonksiyonlar ve $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere aşağıdaki

a) $\alpha f \in L$ ve $f + g \in L$,

b) $\int_X (\alpha f) d\mu = \alpha \int_X f d\mu$,

c) $\int_X (f + g) d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$

eşitlikler sağlanır.

Önerme 1.2.4.15.([7] s.83-84) (X, Σ, μ) ölçüm uzayı olmak üzere, $X = (a, b]$ olarak tanımlansın. Σ, X kümesinin Borel alt kümesi ve λ, Σ üzerinde Lebesgue ölçümü olsun. Eğer f, X üzerinde tanımlı pozitif ve sürekli bir fonksiyon ise

$$(L) \int_{[a,b]} f d\lambda = (R) \int_a^b f(x) dx$$

olarak gösterilir.

Teorem 1.2.4.16.([49] s.257). $f, [a, b]$ aralığında tanımlı reel değerli artan bir fonksiyon olmak üzere, f' türev fonksiyonu $(a, b) \setminus E$ ve negatif değerlidir. Burada E kümesi (a, b) aralığında bulunan ve $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_L, \mu_L)$ ölçüm uzayında boş bir kümedir. Ayrıca f' fonksiyonu $\mathfrak{M}_L$ ölçülebilirdir ve $(a, b) \setminus E$ üzerinde μ_L -integrallenebilirdir ve

$$\int_{[a,b]} f' d\mu_L \leq f(b) - f(a)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu teorem H. Lebesgue Teoremi olarak adlandırılır.

2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. (s,m)-Konveks Fonksiyonların Bazı Özellikleri

Tanım 2.1.1.([49]) $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ fonksiyonu her $x, y \in [0, d]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ değerleri için

$$f((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu konveks fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.2.([19]) $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ fonksiyonu her $x \in [0, d]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ değerleri için

$$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu yıldız biçimli (starshaped) fonksiyon olarak tanımlanır.

Açıklama 2.1.3.([21]) $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ fonksiyonu her $a, b \in [0, d]$, $a < b$ değerleri için bir konveks fonksiyon olmak üzere

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği geçerlidir. Tanımlanan bu eşitsizlik Hermite-Hadamard Eşitsizliği olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.4.([19]) $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ fonksiyonu her $x, y \in [0, d]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ değerleri için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + m(1 - \alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $m \in (0, 1]$ değeri için $[0, d]$ aralığı üzerinde **m-konveks fonksiyon** olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.5.([17], [36]) Bir $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ fonksiyonu $\beta, \alpha \geq 0$ iken $\beta + \alpha = 1$ ve her $x, y \in [0, d]$ değerleri için

$$f(\beta x + \alpha y) \leq \beta^s f(x) + \alpha^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $s \in (0, 1]$ değeri için $[0, d]$ aralığı üzerinde birinci anlamda s-konveks fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.6.([13], [23]) Bir $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ fonksiyonu her $\alpha \in [0, 1]$ ve her $x, y \in [0, d]$ değerleri için

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha^s f(x) + (1 - \alpha^s)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $s \in (0,1]$ değeri için $[0, d]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda s -konveks fonksiyon olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.7.([40]) f konveks fonksiyon ve $x_m \geq 0, 1 \leq m \leq n$

$$\sum_{m=1}^n \alpha_m = 1$$

olup

$$f(\sum_{m=1}^n \alpha_m x_m) \leq \sum_{m=1}^n \alpha_m f(x_m)$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlik Jensen Eşitsizliği olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.8.([20]) Bir $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}, d > 0$ fonksiyonu her $x, y \in [0, d]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ değerleri için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq \alpha^s f(x) + m(1 - \alpha)^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $(s, m) \in (0, 1]^2$ değerleri için $[0, d]$ aralığı üzerinde birinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon olarak tanımlanır.

Dahası, Eftekhari 2014 yılında ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonları tanım 2.1.9'da tanımlamıştır.

Tanım 2.1.9.([20]) $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}, d > 0$ fonksiyonu, herhangi bir $x, y \in [0, d]$ ve $\alpha \in [0, 1]$ değerleri için

$$f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) \leq \alpha^s f(x) + m(1 - \alpha)^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonu $(s, m) \in (0, 1]^2$ reel değerleri için $[0, d]$ aralığı üzerinde ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon olarak tanımlanır.

Örnek 2.1.10. $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, s, m \in (0, 1]$ ve $h \in [1, +\infty)$ için

$$f(x) = x^h + c, c \leq 0$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu ikinci anlamda bir (s, m) -konveks fonksiyondur.

Gerçekten, $\alpha \in [0, 1]$, her $x, y \in [0, +\infty)$ ve $(s, m) \in [0, 1]$ için

$$\begin{aligned} f(\alpha x + m(1 - \alpha)y) &= (\alpha x + m(1 - \alpha)y)^h + c \\ &\leq \alpha x^h + m^h(1 - \alpha)y^h + c \\ &\leq \alpha^s x^h + m(1 - \alpha)^s y^h + (\alpha^s + m(1 - \alpha)^s)c \\ &\leq \alpha^s f(x) + m(1 - \alpha)^s f(y) \end{aligned}$$

olduğu ispat edilir ve böylece f fonksiyonu ikinci anlamda bir (s, m) -konveks fonksiyondur denir.

Negatif olmayan bir fonksiyon, konveks ve yıldız (starshaped) biçimindeyse, her $(s, m) \in (0, 1]^2$ değeri için ikinci anlamda bir (s, m) -konveks fonksiyondur. Bu fonksiyon sınıfları ikinci anlamda $(s, 1)$ -konveks fonksiyon olan ikinci anlamda s -konveks

fonksiyonun bir uzantısıdır [12]. Dragomir ve Fitzpatrick, [17]'deki f fonksiyonunun tanım kümesindeki herhangi bir c noktası için ikinci anlamda bir s -konveks fonksiyonu $f(c) = 0$ olduğunda Reimann integrallenebilir olduğunu açıkladılar. Aynı zamanda $f[a, b]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olduğundan $[a, b]$ aralığı üzerinde f ikinci anlamda bir s -konveks fonksiyonu için Hermite-Hadamartipi eşitsizliği

$$2^{s-1}f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}$$

şeklinde verilir.

Yine de $m \in (0,1)$ ile ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonların integrallenebilirliği için herhangi bir sonuç yoktur ve bu nedenle araştırmacıların ([29], [46], [47])'da verilen integrallenebilirliği şart koşması gerekir.

Şimdi $m \in (0,1)$ ile birinci veya ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonlar için bazı özellikler ve bazı eşitsizlikler ele alınacaktır.

Teorem 2.1.11. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0,1)$ için birinci veya ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon ise f' hemen hemen her yerde vardır. E kümesi (a, b) aralığında $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_L, \mu_L)$ ölçüm uzayında ölçümü sıfır olan bir küme ve her $x \in (a, b) \setminus E$, $[a, b] \subset (0, d]$ değerleri için

$$sf(x) \leq xf'(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

ispat: $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ olmak üzere $m \in (0,1)$ için birinci anlamda veya ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$f(0) \leq mf(0),$$

ve böylece

$$f(0) \leq 0$$

olduğu açıktır. Ayrıca her $0 < x \leq y$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}y + m\left(1 - \frac{x}{y}\right)0\right) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^s f(y) + m\left(1 - \left(\frac{x}{y}\right)^s\right)f(0) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^s f(y)$$

yada

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y}y + m\left(1 - \frac{x}{y}\right)0\right) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^s f(y) + m\left(1 - \frac{x}{y}\right)^s f(0) \leq \left(\frac{x}{y}\right)^s f(y)$$

eşitsizliği mevcuttur. Yani

$$\frac{f(x)}{x^s} \leq \frac{f(y)}{y^s}, 0 < x \leq y \leq d$$

eşitsizliği elde edilir.

Bu eşitsizlik ile $g(x) = \frac{f(x)}{x^s}$ fonksiyonu $[a, d]$, $a > 0$ aralığı üzerinde monoton artan fonksiyon olduğu anlamına gelir.

$g(x) = \frac{f(x)}{x^s}$ ve $h(x) = x^s$ fonksiyonları hemen hemen her yerde türevlenebilir olduğundan H. Lebesgue teoremine göre f' fonksiyonu hemen hemen her yerde vardır ve E kümesi (a, b) aralığında $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}_L, \mu_L)$ ölçüm uzayında ölçümü sıfır olan bir küme, her $x \in (a, b) \setminus E$, $[a, b] \subset (0, d]$ değerleri için

$$sf(x) \leq xf'(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 2.1.12. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0, 1)$ için birinci veya ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon ise f fonksiyonu $[a, d]$, $a > 0$ aralığı üzerinde Reimann integrallenebilir.

İspat. Bir önceki teoremin ispatından $g(x)$ fonksiyonunun $[a, d]$ aralığı üzerinde monoton artan olduğu bilinir. Sonuca göre g fonksiyonu integrallenebilir. Dolayısıyla h fonksiyonu da integrallenebilir olduğundan $h \cdot g$ çarpım fonksiyonu da integrallenebilir.

Sonuç 2.1.13. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0, 1)$ için birinci veya ikinci anlamda negatif olmayan (s, m) -konveks fonksiyon ise f sıfırda sürekli, $f(0) = 0$ ve monoton artan bir fonksiyondur. Böylece f fonksiyonunun $[0, d]$ aralığı üzerinde Reimann integrali alınabilir.

İspat: $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0, 1)$ için pozitif değerli birinci anlamda veya ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonu olsun. Bu durumda her $x, y \in (0, d]$ aralığı için

$$\frac{f(x)}{x^s} \leq \frac{f(y)}{y^s}, \quad 0 < x \leq y$$

olup f fonksiyonu pozitif değerli olduğundan

$$f(x) = x^s \frac{f(x)}{x^s} \leq \frac{x^s}{y^s} f(y) \leq f(y)$$

öyle ki

$$f(x) \leq f(y)$$

olup f fonksiyonu monoton artandır. Diğer taraftan $x > 0$ için

$$0 \leq f(x) \leq \frac{x^s}{y^s} f(y), \quad 0 < x \leq y$$

olup,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca

$$0 \leq f(0) = f(m \cdot 0) \leq mf(0) \leq m^2 f(0)$$

olup, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq f(0) \leq m^n f(0)$$

eşitliği sağlanır. Buradan $f(0) = 0$ sağlanır. f fonksiyonu $[0, d]$ aralığı üzerinde sürekli ve sonuç 2.1.13'den f fonksiyonu $[0, d]$ üzerinde Reimann İntegrallenebilir olduğu elde edilir.

Sonuç 2.1.14. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0, 1)$ için birinci veya ikinci anlamda negatif olmayan (s, m) -konveks fonksiyon ve $(0, d)$ aralığı üzerinde bir fonksiyonun türevi ise f fonksiyonu $[0, d)$ aralığı üzerinde süreklidir.

İspat. Bu sonuç, türev fonksiyonunun ancak ikinci tip süreksizlik noktalarına sahip olması durumunda süreksizlik noktalarına sahip olduğu gerçeğinden alınmıştır.

Teorem 2.1.15. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0, 1)$ için birinci veya ikinci anlamda negatif olmayan (s, m) -konveks fonksiyonu herhangi bir $[0, c]$, $c \leq d$ aralığı üzerinde sürekli ise

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^s}$$

limiti mevcuttur.

İspat: Farz edelim ki $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0, 1)$ için birinci anlamda veya ikinci anlamda negatif olmayan (s, m) -konveks fonksiyonu herhangi bir $[0, c]$, $c \leq d$ aralığında sürekli olsun.

Öyleyse $g: [0, c] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$g(x) = x^{1-s} f(x)$$

şeklinde tanımlanan herhangi bir $[0, c]$ alt aralığında sürekli bir fonksiyondur, her $n \in \mathbb{N}$ ve her $x \in [0, c]$ için

$$g\left(\frac{1}{n}x\right) = \left(\frac{1}{n}x\right)^{1-s} f\left(\frac{1}{n}x\right) \leq x^{1-s} \left(\frac{1}{n}\right)^{1-s} \left(\frac{1}{n}\right)^s f(x) = \frac{1}{n} g(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

Çalışma [14]'deki Teorem 6'ya göre $g(x)x = 0$ noktasında da türevlenebilir bir fonksiyondur. Bu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^s}$$

limitinin var olduğu anlamına gelir.

Teorem 2.1.16. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0, 1)$ için birinci veya ikinci anlamda negatif değerli (s, m) -konveks fonksiyonu ise f fonksiyonu $[0, d]$ aralığı üzerinde bir yıldız şekilli (starshaped) fonksiyonudur.

İspat. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0,1)$ için birinci anlamda veya ikinci anlamda negatif değerli (s, m) -konveks fonksiyonu, her $x \in [0, d]$ için $f(x) < 0$ olup f fonksiyonunun yıldız şekilli fonksiyon olmadığını varsayalım. Buradan $t_0 \in (0,1)$ ve $x_0 \in [0, d]$ olmak üzere iki nokta vardır öyle ki

$$t_0 f(x_0) < f(t_0 x_0)$$

bağıntısı sağlanır. f fonksiyonu $m \in (0,1)$ için birinci anlamda veya ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonu olduğundan

$$t_0 f(x_0) < f(t_0 x_0) \leq t_0^s f(x_0)$$

eşitsizliği doğrudur. Ayrıca f negatif değerli bir fonksiyon olduğundan $t_0 \in (0,1)$ için

$$t_0^s < t_0$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece f fonksiyonunun $[0, d]$ aralığında yıldız şekilli fonksiyon olduğu elde edilir.

Sonuç 2.1.17. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0,1)$ için birinci veya ikinci anlamda negatif değerli (s, m) -konveks fonksiyonu ise bir $c \in [0, d]$ noktası vardır öyleki $f\chi_{[0,c]}$ fonksiyonu $[0, c]$ üzerinde pozitif olmayan yıldız şekilli bir fonksiyondur. Aynı zamanda χ_A fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'nin A alt kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $f\chi_{[c,d]}$, $[c, d]$ aralığı üzerinde negatif olmayan monoton artan bir fonksiyondur.

2.2. Bazı İntegral Eşitsizlikleri

Teorem 2.2.1. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $[a, b]$ aralığı üzerinde Reimann integrallenebilirdir ve ikinci anlamda (s, m) -konveks bir fonksiyon olsun, $0 \leq a \leq mb \leq b \leq d$ için

$$2^{s-1} f\left(m \frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{m}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq m \frac{(mb-a)f(a) + (b-ma)f(b)}{(s+1)(b-a)}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. f ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon olduğundan ve her $x, y \in [a, b]$ için

$$f\left(m \frac{x+y}{2}\right) \leq m \frac{f(x)+f(y)}{2^s}$$

eşitsizliğinden yararlanılarak,

eğer $x = ta + (1-t)b$ ve $y = tb + (1-t)a$ seçilirse

$$f\left(m \frac{b+a}{2}\right) \leq \frac{m}{2^s} (f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a))$$

eşitsizliği elde edilir.

Son eşitsizliğin integrali alınarak

$$f\left(m\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{m}{2^{(s-1)}} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

eşitsizliği elde edilir.

$a \leq mb$ ve $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} \int_a^b f(y)dy &= \int_a^{mb} f(x)dx + \int_{mb}^b f(x)dx \\ &= (mb-a) \int_0^1 f(ta + m(1-t)b)dt + (b-mb) \int_0^1 f(tb + m(1-t)b)dt \\ &\leq (mb-a) \int_0^1 (t^s f(a) + m(1-t)^s f(b))dt \\ &\quad + (b-mb) \int_0^1 (t^s + m(1-t)^s) f(b)dt \\ &= (mb-a) \left(\frac{t^{s+1}}{s+1} f(a) - \frac{m(1-t)^{s+1}}{s+1} f(b) \right) \Big|_0^1 \\ &\quad + (b-mb) \left(\frac{t^{s+1}}{s+1} - \frac{m(1-t)^{s+1}}{s+1} \right) f(b) \Big|_0^1 \\ &= (mb-a) \left(\frac{f(a)}{s+1} + \frac{m}{s+1} f(b) \right) + (b-mb) \left(\frac{f(b)}{s+1} + \frac{m}{s+1} f(b) \right) \\ &= \frac{(mb-a)f(a)}{s+1} + \frac{1}{s+1} (m^2b - ma + b - mb + ma - m^2b) f(b) \\ &= \frac{(mb-a)f(a)}{s+1} - \frac{(ma-b)f(b)}{s+1} \\ &= \frac{1}{s+1} [m(bf(a) - af(b)) + bf(b) - af(a)] \\ &= \frac{1}{s+1} [(mb-a)f(a) + (b-ma)f(b)] \\ &= \frac{(mb-a)f(a) + (b-mb)f(b)}{s+1} \end{aligned}$$

olup

$$f\left(m\frac{a+b}{2}\right) \leq m \frac{2^{1-s}}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq m 2^{1-s} \frac{(mb-a)f(a) + (b-ma)f(b)}{(s+1)(b-a)}$$

eşitsizliği sağlanır.

Not: Teorem 2.2.1. de $m = 1$ ve $s = 1$ alındığı takdirde

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(b)+f(a)}{2}$$

eşitsizliği ünlü Hermite-Hadamard eşitsizliğidir.

Sonuç 2.2.2. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonu ise f' fonksiyonu $[a, b]$ aralığı üzerinde Reimann integrali alınabilir, $0 \leq a \leq mb \leq b \leq d$ ise,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \min \left\{ \frac{bf(b) - af(a)}{s+1}, \frac{(mb-a)f(a) + (b-ma)f(b)}{(s+1)} \right\}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.3. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon ve $[a, b]$ aralığına Riemann integrallenebilir olduğundan

$$f\left(m\frac{a+b}{2}\right) \leq m\frac{2^{1-s}}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \frac{(((a-ma)^{s+1}-(b-ma)^{s+1})f(b)+m(b-a)^{s+1}f(a))}{(s+1)(b-ma)^s}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat : f her $x, y \in [a, b]$ için ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonu olduğundan ve Teorem 2.2.1'ün ispatından

$$f\left(m\frac{b+a}{2}\right) \leq \frac{m}{2^{s-1}} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

olduğu açıktır. Şimdi $x = \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)b + m\left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)\right)a$ olarak tanımlansın,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \int_a^b f\left(\left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)b + m\left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)\right)a\right)dx \\ &\leq \int_a^b \left\{\left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)^s f(b) + m\left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)\right)^s f(a)\right\}dx \\ &= \left(\frac{(b-m)}{s+1} \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)^{s+1} f(b) - \frac{m(b-ma)}{s+1} \left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)\right)^{s+1} f(a)\right) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{(s+1)(b-ma)^s} ((x-ma)^{s+1} f(b) - m(b-x)^{s+1} f(a)) \Big|_a^b \\ &= \frac{1}{(s+1)(b-ma)^s} ((a-ma)^{s+1} f(b) - (b-ma)^{s+1} f(b) + m(b-a)^{s+1} f(a)) \\ &= \frac{(((a-ma)^{s+1}-(b-ma)^{s+1})f(b)+m(b-a)^{s+1}f(a))}{(s+1)(b-ma)^s}. \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} &= m\frac{2^{1-s}}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ &\leq \frac{(((a-ma)^{s+1}-(b-ma)^{s+1})f(b)+m(b-a)^{s+1}f(a))}{(s+1)(b-m)^s} \end{aligned}$$

olduğu ve

$$\begin{aligned} f\left(m\frac{b+a}{2}\right) &\leq m\frac{2^{1-s}}{b-a} \int_a^b f(x)dx \\ &\leq \frac{(((a-ma)^{s+1}-(b-ma)^{s+1})f(b)+m(b-a)^{s+1}f(a))}{(s+1)(b-ma)^s} \end{aligned}$$

eşitsizliği ispat edildi.

Teorem 2.2.4. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ ve $a, b \in [0, d]$, $a < b$ aralığı üzerinde ikinci anlamda negatif olmayan (s, m) -konveks fonksiyonu ve negatif olmayan $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{ma+b}{2}$ için simetrik olsun. Böylece

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{mf(a)+f(b)}{2} \left[\int_a^b \left(\frac{x-m}{b-ma} \right)^s g(x)dx + \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-ma} \right)^s g(x)dx \right]$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat: f ve g reel değerli negatif olmayan fonksiyonlar olduğundan, g integrallenebilir fonksiyon ve $\frac{ma+b}{2}$ ye göre simetrik olacaktır. $x = \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) \right) a$ olarak tanımlansın,

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)g(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\int_a^b f(x)g(x)dx + \int_a^b f(ma+b-x)g(ma+b-x)dx \right] \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x)dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^b f \left(\left(\frac{ma+b-x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{ma+b-x-ma}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[f \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(\frac{b-x}{b-ma} \right) a \right) + f \left(\left(\frac{b-x}{b-ma} \right) b + m \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) a \right) \right] g(x)dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right)^s f(b) + m \left(\frac{b-x}{b-ma} \right)^s f(a) \right) g(x)dx \\ &+ \frac{1}{2} \int_a^b \left(\left(\frac{b-x}{b-ma} \right)^s f(b) + m \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right)^s f(a) \right) g(x)dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left\{ \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right)^s + \left(\frac{b-x}{b-ma} \right)^s \right) f(b) + m \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right)^s + \left(\frac{b-x}{b-ma} \right)^s \right) f(a) \right\} g(x)dx \\ &= \frac{mf(a)+f(b)}{2} \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-ma} \right)^s g(x)dx + \frac{mf(a)+f(b)}{2} \int_a^b \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right)^s g(x)dx \end{aligned}$$

eşitsizliği ile ispat tamamlanır.

Not: Eğer bir önceki teoremden $m = 1$ alınırsa s -konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard-Fejer türünde eşitsizlik olduğu görülür. Yani;

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)g(x) dx \\ &< \frac{f(b)+f(a)}{2} \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^s g(x)dx + \frac{f(b)+f(a)}{2} \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^s g(x)dx \\ &= \frac{f(b)+f(a)}{2} \left[\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^s g(x)dx + \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a} \right)^s g(x)dx \right]. \end{aligned}$$

Sonuç 2.2.5. Teorem 2.2.4’de $g(x) = 1$ alınırsa

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{mf(a)+f(b)}{2^{s+1}} \left(\frac{(b+a-2ma)^s - (b-a)^s}{(b-ma)^s} \right).$$

İspat: Eğer $g(x) = 1$ alınırsa

$$\int_a^b f(x) dx$$

$$\leq \frac{mf(a)+f(b)}{2} \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-ma} \right)^s dx + \frac{mf(a)+f(b)}{2} \int_a^b \left(\frac{x-m}{b-ma} \right)^s dx$$

eşitsizliği elde edilir.

$0 < s < 1$ olup $\varphi(x) = x^s$ içbükey fonksiyonu alındığında Jensen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \\ & \leq \frac{mf(a)+f(b)}{2} \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b \frac{b-x}{b-ma} dx \right)^s + \frac{mf(a)+f(b)}{2} \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b \frac{x-ma}{b-ma} dx \right)^s \\ & = \frac{mf(a)+f(b)}{2^{s+1}} \left(\frac{(b-a)^2}{(b-a)(b-ma)} \right)^s + \frac{mf(a)+f(b)}{2^{s+1}} \left(\frac{(b-a)(b+a-2a)}{(b-a)(b-ma)} \right)^s \\ & = \frac{mf(a)+f(b)}{2^{s+1}} \left(\frac{(b-a)^s(b+a-2m)}{(b-a)^s(b-ma)^s} + \frac{(b-a)^{2s}}{(b-a)^s(b-ma)^s} \right) \\ & = \frac{mf(a)+f(b)}{2^{s+1}} \left(\frac{(b+a-2ma)^s + (b-a)^s}{(b-ma)^s} \right) \end{aligned}$$

olduğu ispatlanır.

Teorem 2.2.6. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ ve $a, b \in [0, d]$, $a < b$ aralığında ikinci anlamda negatif olmayan (s, m) -konveks fonksiyonu ve negatif olmayan $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{ma+b}{2}$ için simetrik olsun.

Böylece,

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{ma+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \\ & \leq \frac{1}{2^s} \int_a^b f\left(\left(\frac{b-x}{b-ma}\right)b + m\left(1 - \left(\frac{b-x}{b-ma}\right)\right)a\right) g(x) dx \\ & \quad + \frac{1}{2^s} \int_a^b f\left(\left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)b + m\left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)\right)a\right) g(x) dx \end{aligned}$$

olarak tanımlanır.

İspat: $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$ ve $d > 0$ ikinci anlamda negatif olmayan (s, m) -konveks fonksiyon ve negatif olmayan $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{ma+b}{2}$ için simetrik olsun.

Bu durumda $x = \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)b + m\left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)\right)a$ olarak alınsın ve

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{ma+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \\ & = \int_a^b f\left(\frac{ma+b-x+x}{2}\right) g(x) dx \\ & \leq \int_a^b \frac{1}{2^s} [f(ma+b-x) + f(x)] g(x) dx \\ & = \frac{1}{2^s} \int_a^b f(ma+b-x) g(x) dx + \frac{1}{2^s} \int_a^b f(x) g(x) dx \\ & = \frac{1}{2^s} \int_a^b f(ma+b-x) g(ma+b-x) dx + \frac{1}{2^s} \int_a^b f(x) g(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{ma+b-x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{ma+b-x-ma}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x) dx \\
&+ \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(\frac{b-x}{b-ma} \right) a \right) g(x) dx \\
&= \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{b-x}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x) dx \\
&+ \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x) dx.
\end{aligned}$$

Yani,

$$\begin{aligned}
&f \left(\frac{ma+b}{2} \right) \int_a^b g(x) dx \\
&\leq \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{b-x}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x) dx \\
&+ \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x) dx
\end{aligned}$$

olduğu ispatlanır.

Not: Eğer Teorem 2.2.6. da $m = 1$ alınırsa s-konveks fonksiyonlar için

$$\begin{aligned}
&f \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_a^b g(x) dx \\
&\leq \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{b-x}{b-a} \right) b + \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right) a \right) g(x) dx \\
&+ \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{x-a}{b-a} \right) b + \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) a \right) g(x) dx
\end{aligned}$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard-Fejer türünde eşitsizlik olduğu görülür.

Teorem 2.2.7. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ ve $a, b \in [0, d]$, $a < b$ aralığı üzerinde ikinci anlamda negatif olmayan (s, m) -konveks fonksiyonu ve negatif olmayan $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu integrallenebilir ve $\frac{ma+b}{2}$ için simetrik olsun.

Böylece,

$$2^s f \left(\frac{ma+b}{2} \right) \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx.$$

İspat: $x = \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) \right) a$ olarak alınsın, bu durumda

$$\begin{aligned}
f \left(\frac{ma+b}{2} \right) \int_a^b g(x) dx &= \int_a^b f \left(\frac{ma+b-x+x}{2} \right) g(x) dx \\
&\leq \int_a^b \left(\frac{1}{2^s} f(ma+b-x) + \frac{1}{2^s} f(x) \right) g(x) dx \\
&= \frac{1}{2^s} \int_a^b f(ma+b-x) g(ma+b-x) dx + \frac{1}{2^s} \int_a^b f(x) g(x) dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{ma+b-x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{ma+b-x-ma}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x) dx \\
&+ \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(\frac{b-x}{b-ma} \right) a \right) g(x) dx \\
&= \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{b-x}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x) dx \\
&+ \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) b + m \left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma} \right) \right) a \right) g(x) dx
\end{aligned}$$

olup

$$2^s f \left(\frac{ma+b}{2} \right) \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.2.8. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $[0, d]$ aralığı üzerinde türevlenebilir ve $|f'|$ fonksiyonu $m \in (0,1)$ için $[0, d]$ aralığında ikinci anlamda (s, m) -konveks bir fonksiyonu için

$$\left| f(mx) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right| \leq \frac{|f'(b)|}{b-a} \left[\frac{(m(s+1)+1)((mx-a)^2 + (b-mx)^2)}{(s+1)(s+2)} \right], \quad x \in [a, b]$$

$[a, b] \subset [0, d]$ eşitsizliği sağlanır.

İspat: Bu durumda, Cerone ve Dragomir'in [15]'deki çalışmasında verilen eşitsizlik kullanılarak

$$\begin{aligned}
&\left| f(mx) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(y) dy \right| \\
&= \left| \frac{(mx-a)^2}{b-a} \int_0^1 t f'(tmx + (1-t)a) dt - \frac{(b-mx)^2}{b-a} \int_0^1 t f'(tmx + (1-t)b) dt \right| \\
&\leq \frac{(mx-a)^2}{b-a} \int_0^1 t |f'(tmx + (1-t)a)| dt + \frac{(b-mx)^2}{b-a} \int_0^1 t |f'(tmx + (1-t)b)| dt \\
&\leq \frac{(mx-a)^2}{b-a} \int_0^1 t (mt^s + (1-t)^s) |f'(b)| dt \\
&+ \frac{(b-mx)^2}{b-a} \int_0^1 t (mt^s + (1-t)^s) |f'(b)| dt \\
&= \frac{|f'(b)|}{b-a} \left[\frac{(m(s+1)+1)((mx-a)^2 + (b-mx)^2)}{(s+1)(s+2)} \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

Uyarı: Teorem 2.2.8'de $m = 1$ değeri için sonuç sağlanır. Bu sonuç Alomari [2] çalışmasında yer almaktadır.

Teorem 2.2.9. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $[0, d]$ aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer $|f'|$ fonksiyonu $[0, d]$ aralığında ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonu ise aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\left| f\left(\frac{ma+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq f'\left(\frac{ma+b}{2}\right) \left[\frac{\left(\frac{ma+b}{2}-a\right)^2 + \left(b-\frac{ma+b}{2}\right)^2}{(b+a)(s+2)} \right] + \frac{(|f'(a)|+|f'(b)|)m}{(s+1)(s+2)}.$$

İspat: $x = \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)b + m\left(1 - \left(\frac{x-ma}{b-ma}\right)\right)a$ olarak tanımlansın ve

$$\left| f\left(\frac{ma+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

denklemini için;

$$\begin{aligned} &\leq \left| f' \left(t \left(\left(\frac{\frac{ma+b}{2}-ma}{b-ma} \right) b + m \left(\frac{b-\frac{ma+b}{2}}{b-ma} \right) a \right) + m(1-t)a \right) \right| \\ &= \left| f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)a \right) \right| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} &\leq \left| f' \left(t \left(\left(\frac{\frac{ma+b}{2}-ma}{b-ma} \right) b + m \left(\frac{b-\frac{ma+b}{2}}{b-ma} \right) a \right) + m(1-t)b \right) \right| \\ &= \left| f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)b \right) \right| \end{aligned}$$

denklemleri teoremin çözümü için tanımlansın. Yani;

$$\begin{aligned} &\left| f\left(\frac{ma+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{\left(\frac{ma+b}{2}-a\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left| f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)a \right) \right| dt \\ &\quad + \frac{\left(b-\frac{ma+b}{2}\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left| f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)b \right) \right| dt \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

$|f'|$ fonksiyonu $[0, d]$ aralığında her $t \in [0, 1]$ için ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonu olarak tanımlanırsa,

$$\left| f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)a \right) \right| \leq t^s \left| f' \left(\frac{ma+b}{2} \right) \right| + m(1-t)^s |f'(a)|$$

ve

$$\left| f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)b \right) \right| \leq t^s \left| f' \left(\frac{ma+b}{2} \right) \right| + m(1-t)^s |f'(b)|$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi,

$$\left| f\left(\frac{ma+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \frac{\left(\frac{ma+b}{2}-a\right)^2}{b-a} \int_0^1 t f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)a \right) dt \right. \\
&\quad \left. - \frac{\left(b-\frac{ma+b}{2}\right)^2}{b-a} \int_0^1 t f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)b \right) dt \right| \\
&\leq \frac{\left(\frac{ma+b}{2}-a\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left| f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)a \right) \right| dt \\
&\quad + \frac{\left(b-\frac{ma+b}{2}\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left| f' \left(t \left(\frac{ma+b}{2} \right) + m(1-t)b \right) \right| dt \\
&\leq \frac{\left(\frac{ma+b}{2}-a\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left(t^s \left| f' \left(\frac{ma+b}{2} \right) \right| + m(1-t)^s |f'(a)| \right) dt \\
&\quad + \frac{\left(b-\frac{ma+b}{2}\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left(t^s \left| f' \left(\frac{ma+b}{2} \right) \right| + m(1-t)^s |f'(b)| \right) dt \\
&= \frac{\left(\frac{ma+b}{2}-a\right)^2}{b-a} \left[\frac{|f'(\frac{ma+b}{2})|}{s+2} + \frac{m|f'(a)|}{(s+1)(s+2)} \right] + \frac{\left(b-\frac{ma+b}{2}\right)^2}{b-a} \left[\frac{|f'(\frac{ma+b}{2})|}{s+2} + \frac{m|f'(b)|}{(s+1)(s+2)} \right] \\
&= f' \left(\frac{ma+b}{2} \right) \left[\frac{\left(\frac{ma+b}{2}-a\right)^2 + \left(b-\frac{ma+b}{2}\right)^2}{(b+a)(s+2)} \right] + \frac{(|f'(a)|+|f'(b)|)m}{(s+1)(s+2)}
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.2.10. Bir önceki teoremin tüm varsayımlarının karşılandığı varsayılın, o zaman aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\begin{aligned}
&\left| f \left(\frac{b+ma}{2} \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \\
&\leq \frac{|f'(b)|}{2^s(s+2)} \left[\frac{\left(\frac{b+ma}{2}-a\right)^2 + \left(b-\frac{b+ma}{2}\right)^2}{b-a} \right] - \frac{m(s+3-2^{s+2})}{2^s(s+1)(s+2)} \left[\frac{\left(\frac{b+ma}{2}-a\right)^2}{b-a} |f'(a)| + \frac{\left(b-\frac{b+ma}{2}\right)^2}{b-a} |f'(b)| \right].
\end{aligned}$$

İspat:

$t \left(\frac{b+ma}{2} \right) + m(1-t)a = \frac{t}{2}b + m \left(1 - \frac{t}{2} \right)a$ ve $|f'|$ fonksiyonu $[0, d]$ üzerinde de ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon olduğu bilindiğinden herhangi bir $t \in [0, 1]$ için aşağıdaki eşitsizliklerden biri alınabilir;

$$\left| f' \left(t \left(\frac{b+ma}{2} \right) + m(1-t)a \right) \right| \leq \left(\frac{t}{2} \right)^s |f'(b)| + m \left(1 - \frac{t}{2} \right)^s |f'(a)|,$$

$$\left| f' \left(t \left(\frac{b+ma}{2} \right) + m(1-t)b \right) \right| \leq \left(\frac{t}{2} \right)^s |f'(b)| + m \left(1 - \frac{t}{2} \right)^s |f'(b)|$$

ve böylece

$$\left| f \left(\frac{b+ma}{2} \right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right|$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\left(\frac{b+ma}{2}-a\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left| f' \left(t \left(\frac{b+ma}{2} \right) + m(1-t)a \right) \right| dt \\
&+ \frac{\left(b-\frac{b+ma}{2}\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left| f' \left(t \left(\frac{b+ma}{2} \right) + m(1-t)b \right) \right| dt \\
&\leq \frac{\left(\frac{b+ma}{2}-a\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left| f' \left(t \left(\frac{b+ma}{2} \right) + m(1-t)a \right) \right| dt \\
&+ \frac{\left(b-\frac{b+ma}{2}\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left| f' \left(t \left(\frac{b+ma}{2} \right) + m(1-t)b \right) \right| dt
\end{aligned}$$

olup,

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\left(\frac{b+ma}{2}-a\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left(\left(\frac{t}{2}\right)^s |f'(b)| + m \left(1-\frac{t}{2}\right)^s |f'(a)| \right) dt \\
&+ \frac{\left(b-\frac{b+ma}{2}\right)^2}{b-a} \int_0^1 t \left(\left(\frac{t}{2}\right)^s |f'(b)| + m \left(1-\frac{t}{2}\right)^s |f'(b)| \right) dt \\
&= \frac{|f'(b)|}{2^s(s+2)} \left[\frac{\left(\frac{b+ma}{2}-a\right)^2 + \left(b-\frac{b+ma}{2}\right)^2}{b-a} \right] - \frac{m(s+3-2^{s+2})}{2^s(s+1)(s+2)} \left[\frac{\left(\frac{b+ma}{2}-a\right)^2}{b-a} |f'(a)| + \frac{\left(b-\frac{b+ma}{2}\right)^2}{b-a} |f'(b)| \right]
\end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Uyarı: Teorem 2.2.10'de $m = 1$ için sonuç sağlanır. Bu sonuç Alomari [2] çalışmasında yer almaktadır.

Teorem 2.2.11. $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, herhangi bir $m \in (0,1)$ için ikinci anlamda (s, m) -konveks bir fonksiyon olsun. Bu halde $\sum_{k=1}^n h_k \leq 1$, $h_k \in [0,1]$ ve $x_k \in [a, b]$ olmak üzere

$$f(m \sum_{k=1}^n h_k x_k) \leq m \sum_{k=1}^n h_k^s f(x_k)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Çalışma [41]'daki gibi matematiksel tümevarım yöntemi kullanılarak ispatı verilecektir. Öncelikle $m \in (0,1)$ ile ikinci anlamda bir (s, m) -konveks fonksiyonu olduğundan $n = 1$, $h \in [0,1]$ ve $x \in [a, b]$ için

$$f(mhx) = f(mhx + (1-h)0) \leq (1-h)^s f(0) + mh^s f(x) \leq mh^s f(x)$$

Şimdi tümevarımın bir sonraki adımı için 2.2.11'deki denklemin $n-1$ için doğru olduğunu varsayalım. Bu durumda eğer

$$\sum_{k=1}^n h_k \leq 1$$

ise $1 \leq k \leq n-1$ sağlanır ve

$$\begin{aligned}
f(m \sum_{k=1}^n h_k x_k) &= f(m(1-h_n) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{1-h_n} x_k + mh_n x_n) \\
&\leq (1-h_n)^s f \left(m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{1-h_n} x_k \right) + mh_n^s f(x_n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - h_n)^s m \sum_{k=1}^{n-1} \frac{h_k}{1-h_n} f(x_k) + m h_n^s f(x_n) \\
&= m \sum_{k=1}^{n-1} h_k^s f(x_k) + m h_n^s f(x_n) \\
&= m \sum_{k=1}^n h_k^s f(x_k).
\end{aligned}$$

Teorem 2.2.12. (X, Σ, μ) sonlu bir ölçüm uzayı ve $h: X \rightarrow [0, +\infty)$ μ -integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $h(x) \leq \frac{1}{\mu(X)}$ olduğunu varsayalım. Eğer $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$ herhangi bir $m \in (0,1)$ için pozitif olmayan ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon ve $g: X \rightarrow [0, d]$ μ -integrallenebilir fonksiyon ise herhangi bir $E \in \Sigma$ için

$$f\left(m \int_E h(x) g(x) d\mu(x)\right) \leq m \int_E h(x) f(g(x)) d\mu(x)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $I = \bigcup_{k=1}^n I_{n_k}$, $n \in \mathbb{N}$ için I_{n_k} ayrık aralıklarının herhangi bir bölümü olsun. g bir μ -integrallenebilir fonksiyon olduğundan $E_{n_k} = g^{-1}(I_{n_k}) \cap E$ herhangi bir $E \in \Sigma$ kümesi için Σ içindedir ve $E = \bigcup_{k=1}^n E_{n_k}$. Her bir E_{n_k} kümesinde herhangi bir x_{n_k} noktası seçilsin. h pozitif değerli fonksiyon ve

$$\int_X h(x) d\mu(x) \leq 1$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^n \mu(E_{n_k}) h(X_{n_k}) g(X_{n_k})$$

lineer kombinasyonu yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için $[0, d]$ aralığının içerisindedir. f fonksiyonu $[0, d]$ aralığı üzerinde herhangi $m \in (0,1)$ için pozitif olmayan (s, m) -konveks fonksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
f\left(m \sum_{k=1}^n \mu(E_{n_k}) h(X_{n_k}) g(X_{n_k})\right) &\leq m \sum_{k=1}^n \mu^s(E_{n_k}) h^s(X_{n_k}) f(g(X_{n_k})) \\
&\leq \sum_{k=1}^n \mu(E_{n_k}) h(X_{n_k}) f(g(X_{n_k}))
\end{aligned}$$

eşitsizliği bir önceki teorem kullanılarak elde edilir.

Bu teoremin ispatı f fonksiyonunun süreklilik varsayımı altında tamamlanır.

Tanım 2.2.13 ([3], [34], [25]) q -integrali'ni Thomas ve Jackson $t \in (0,1)$ olmak üzere

$$\int_0^1 f(t) d_q t = (1 - q) \sum_{n=0}^{+\infty} f(q^n) q^n$$

şeklinde tanımlamışlardır. Jackson q -integrali için daha genel bir tanım vererek

$$\int_0^b f(t) d_q t = b(1 - q) \sum_{n=0}^{+\infty} f(bq^n) q^n$$

ve

$$\int_a^b f(t) d_q t = \int_0^b f(t) d_q t - \int_0^a f(t) d_q t$$

şeklinde ifade etmiştir.

Örnek 2.2.14. $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ için f fonksiyonu

$$\int_0^1 f(x) d_q x = (1-q) \sum_{n=0}^{+\infty} f(q^n) q^n$$

şeklinde tanımlansın. Eğer f fonksiyonu $m \in (0,1)$ değeri için pozitif tanımlı ve $[0,1]$ aralığında ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyon ise

$$f\left(m \int_0^1 x d_q x\right) \leq m \int_0^1 f(x) d_q x$$

olur ve buradan,

$$f\left(\frac{m}{1+q}\right) \leq m(1-q) \sum_{n=0}^{+\infty} f(q^n) q^n$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca f fonksiyonu pozitif değerli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} f(q^n) &= f(q^n 1 + m(1-q^n)0) \\ &\leq q^{sn} f(1) + m(1-q^n)^s f(0) \\ &= q^{sn} f(1) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{1+q}\right) &\leq m(1-q) \sum_{n=0}^{+\infty} f(q^n) q^n \\ &\leq m(1-q) f(1) \sum_{n=0}^{+\infty} q^{(s+1)n} \\ &= m(1-q) f(1) \frac{1}{1-q^{s+1}} \\ &= m f(1) \frac{1-q}{1-q^{s+1}} \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece verilen bu integralde $\mu(A) = (1-q) \sum_{n=1}^{+\infty} \chi_A(q^n) q^n$ şeklinde tanımlanır. $\sum = 2^{[0,1]}$ olup $\mu([0,1]) = 1$ sağlanır.

3.SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında $f: [0, d] \rightarrow \mathbb{R}$, $d > 0$, $m \in (0,1)$ için birinci anlamda veya ikinci anlamda (s, m) -konveks fonksiyonu için;

1. f fonksiyonunun $[a, d]$, $a > 0$ aralığı üzerinde Reimann integrallenebilir olduğu gösterilmiştir (Sonuç 2.1.12.).
2. f sıfırda sürekli, $f(0) = 0$ ve monoton artan bir fonksiyondur. Böylece f fonksiyonunun $[0, d]$ aralığı üzerinde Reimann integrallenebilir olduğu gösterilmiştir (Sonuç 2.1.13.).
3. f fonksiyonu $(0, d)$ aralığı üzerinde bir fonksiyonun türevi ise $[0, d]$ aralığı üzerinde sürekli olduğu gösterilmiştir (Sonuç 2.1.14.).
4. $f\chi_{[0,c]}$ fonksiyonu $[0, c]$ üzerinde pozitif olmayan yıldız şekilli bir fonksiyondur. Aynı zamanda χ_A fonksiyonu $\mathbb{R}$ 'nin A alt kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $f\chi_{[c,d]}$, $[c, d]$ aralığı üzerinde negatif olmayan monoton artan bir fonksiyon olduğu gösterilmiştir (Sonuç 2.1.17.).
5. Teorem 2.2.1. de $m = 1$ ve $s = 1$ alındığı takdirde elde edilen eşitsizliğin ünlü Hermite-Hadamard eşitsizliği olduğu gösterilmiştir.
6. f' fonksiyonunun $[a, b]$ aralığı üzerinde Reimann integralinin alınabilirliği gösterilmiştir. (Sonuç 2.2.2.).
7. Teorem 2.2.4. de $m = 1$ alınırsa s -konveks fonksiyonlar için

$$\begin{aligned} & \int_a^b f(x)g(x) dx \\ & < \frac{f(b)+f(a)}{2} \int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^s g(x) dx + \frac{f(b)+f(a)}{2} \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s g(x) dx \\ & = \frac{f(b)+f(a)}{2} \left[\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^s g(x) dx + \int_a^b \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^s g(x) dx \right] \end{aligned}$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard-Fejer türünde eşitsizlik olduğu gösterilmiştir.

8. Teorem 2.2.4. de $g(x) = 1$ alınırsa

$$\frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{mf(a)+f(b)}{2^{s+1}} \left(\frac{(b+a-2m)^s - (b-a)^s}{(b-ma)^s} \right)$$

eşitsizliğinin sağlandığı gösterilmiştir.

9. Teorem 2.2.6. da $m = 1$ alınırsa s -konveks fonksiyonlar için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{b-x}{b-a} \right) b + \left(1 - \left(\frac{b-x}{b-a} \right) \right) a \right) g(x) dx \\ &+ \frac{1}{2^s} \int_a^b f \left(\left(\frac{x-a}{b-a} \right) b + \left(1 - \left(\frac{x-a}{b-a} \right) \right) a \right) g(x) dx \end{aligned}$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard-Fejer türünde eşitsizlik olduğu gösterilmiştir.

Yapılan bu tez çalışmasında ilgili teoremler ispatlanmış ve sonuçlara ulaşılmış olup bulgular makale olarak Maltepe Journal Of Mathematics dergisinde yayınlanmıştır [44].



4. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında $m \in (0,1)$ ile birinci veya ikinci anlamda (s,m) -konveks fonksiyonlar için birçok yeni integral eşitsizlikleri ve sonuçları elde edildi. Benzer şekilde literatürde (s,m) -konveks fonksiyonlar sınıflarına benzer başka fonksiyon sınıfları için elde edilen eşitsizliklerinin sağlanıp sağlanmadığı incelenebilir. İncelenen bu integral eşitsizlikleri ve sonuçları kesirli integraller yardımı ile daha da genişletilebilir ve daha genel sonuçlar elde edilebilir.



5.KAYNAKLAR

1. Aliprantis, C.D. ve Burkinshaw, O., Principles of Real Analysis, Academic Press,1998.
2. Alomari, M., Darus, M., Dragomir, S.S., ve Cerone, P., Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives are s -convex in the second sense, Appl. Math. Lett., 23 (2010) 1071–1076.
3. Annaby, M.H. ve Mansour, Z.S., q -Taylor and interpolation series for Jackson q -difference operators, Journal of Mathematical Analysis and Applications, (2008), 344, 472-483.
4. Bakula, M.K., Pecaric, J. ve Ribicic, M., Companion inequalities to Jensen's for inequality for m -convex and (α, m) -convex functions, J. Inequal. Pure Appl. Math. 7, 5 (2006), 194.
5. Bakula, M.K., Pecaric, J., ve Ribicic, M., Hadamard type inequalities for m -convex and (s, m) -convex functions, J. Inequal. Pure Appl. Math. 5, 4 (2008), 96.
6. Bakula, M.K., Özdemir M.E. ve Pecaric J., Hadamard type inequalities for m -convex and (α, m) -convex functions, J. Inequal. Pure Appl. Math. 9, 4 (2008), 96.
7. Balcı M., Reel Analiz, Balcı Yayıncılık, Ankara, (2009) 15-84.
8. Bartle R.G., The Elements of Integration, John Wiley, New York , 1966.
9. Bayraktar, M., Fonksiyonel Analiz, Ankara, 2006.
10. Beckenbach, E.F. ve Bellman, R., Inequalities, Springer-Verlag, Berlin, (1961) 198.
11. Borwein, J.M., ve Vanderwerff, Jon D., Convex Functions: Constructions, Characterizations and Counterexamples, Cambridge University Press., (2010) 172.
12. Bracamonte, M., Gimenez, J., ve Vivas-Cortez, M.J., Hermite-Hadamard-Fejer type inequalities for strongly (s, m) -convex functions with modulus c in second sense, Appl. Math. Inf. Sci., 10, 6 (2016) 2045–2053.
13. Breckner, W.W., Stetigkeit Aussagen für eine Klasse verallgemeinerter konvexer funktionen in topologischen linearen Räumen, Publications PInstitut Mathematique, 23 (1978) 13-20.
14. Bruckner, A.M. ve Ostrow, E., Some function classes related to the class of convex functions, Pacific J. Math., 12 (1962) 1203–1215.

15. Cerone, P. ve Dragomir, S.S., Ostrowski type inequalities for functions whose derivatives satisfy certain convexity assumptions, Demonstratio Math., 37, 2 (2004) 299–308.
16. Dernek, A.N., Reel Analiz Çözümlü Problemler, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara, 2013.
17. Dragomir, S.S. ve Fitzpatrick, S., The Hadamard's inequality for s -convex functions in the second sense and applications. Demonstration Math., 32, 4 (1999) 687–696.
18. Dragomir, S.S. ve Fitzpatrick, S., The Hadamard's inequality for s -convex functions in the second sense and applications. Demonstration Math., 31,3, (1999) 633-642.
19. Dragomir, S.S. ve Pearce, C.E.M., Selected topic on Hermite-Hadamard inequalities and applications. Melbourne and Adelaide, Victoria University, Australia, 2002.
20. Eftekhari, N., Some remarks on (s, m) -convexity in the second sense, J. Math. Inequal., 8, 2 (2014) 489–495.
21. Fejer, L., Uber die Fourierreihen, II. Math. Naturwiss. Anz.Ungar.Akad. Wiss., 24 (1906) 369-390.
22. Hardy, G.H., Littlewood, J.E. ve Polya, G., Inequalities, Cambridge University Press., 1952.
23. Hudzik, H. ve Maligranda, L., Some remark on s -convex functions. Aequationes Mathematicae, 48 (1) (1994) 100-111.
24. İbikli, E., Ankara Üniversitesi açık ders malzemeleri, <https://acikders.ankara.edu.tr/course/view.php?id=80>, 18 Mayıs 2014.
25. Jackson, F.H., On q -definite integrals. Quart. J. Pure and Appl. Math., 41 (1910) 193–203.
26. Kunt, M. ve İşcan, İ., Hermite- Hadamard type inequalities for harmonically (α, m) -convex functions by using fractional integrals, Konuralp J. Math., 5, 1 (2017) 201–213.
27. Karaoğlu, A., (k, h) -konveks fonksiyonlar ve bazı integral eşitsizlikleri üzerine, Yüksek Lisans Tezi, Ordu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ordu, 2017.
28. Latif, M.A., Dragomir, S.S. ve Momoniat, E., On Hermite-Hadamard type integral inequalities for n -times differentiable m - and (α, m) -logarithmically convex functions, Filomat, 30, 11 (2016) 3101–3114.
29. Lian, T., Tang, W. ve Zhou, R., Fractional Hermite-Hadamard inequalities for (s, m) -convex or s -concave functions, J. Inequal. Appl., (2018) 240.

30. Miheşan, V.G., A generalization of the convexity, Seminar on Functional Equations, Approx. and Convex., Cluj-Napoca, Romania, 1993.
31. Mitrinovic, D.S., Analytic inequalities. Springer-Verlag, Berlin, 1970.
32. Mitrinovic, D.S., Pecaric, J.E. ve Fink, A.M., Inequalities involving functions and their integrals and derivatives, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, (1991) 587.
33. Mitrinovic, D.S., Pecaric, J.E. ve Fink, A.M., Classical and new inequalities in analysis. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/ Boston/ London, 1993.
34. El-Shahet, M. ve Hassan, H.A., Positive solutions of q -difference equation, Proceedings of the American Mathematical Society, 138 (2010) 1733-1738.
35. Niculescu, C. ve Persson, L., Convex functions and their applications, A Contemporary Approach, Springer Science Business Media, (2006) 253.
36. Orlicz, W., A note on modular spaces. IX, Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Sci. Math., Astronom., 16 (1968) 801-808.
37. Özcan, S., Hermite-Hadamard type inequalities for m -convex and (α, m) -convex functions, J. Inequal. Appl., 175 , (2020) 1–10.
38. Özdemir, M. E., Kavurmacı, H. ve Set, E., Ostrowski's Type Inequalities for (α, m) -Convex Functions, Kyungpook Math. J., 50 (2010) 371–378
39. Özdemir, M.E., Set, E. ve Sarıkaya, M.Z., Some new Hadamard type inequalities for coordinated m -convex and (α, m) -convex functions, Hacet. J. Math. Stat., 40, 2 (2011) 219– 229.
40. Pachpatte, B.G., Mathematical Inequalities. Elsevier B.V., Amsterdam, The Netherlands. 67 (2005) 591,
41. Pavic, Z. ve Ardiç, M. A., The most important inequalities of m -convex functions, Turk J Math., 41 (2017) 625–635.
42. Rudin, W., Principles of Mathematical Analysis. Mcgraw-Hill, New York, 1953.
43. Set, E., Sardari, M., Özdemir, M.E. ve Roojin, J., On generalization of the Hadamard inequality for (α, m) -convex functions, Kyungpook Math. J., 52 (2012) 307–317.
44. Sertbaş, M. ve Mihyaz, İ., Some results for (s, m) -convex function in the second sense, Maltepe Journal of Mathematics, 2022.
45. Set, E., Özdemir, M.E., Sarıkaya, M.Z. ve Karakoç, F., Hermite-Hadamard type inequalities for (α, m) -convex functions via fractional integrals, Moroccan J. Pure Appl. Anal., 3, 1 (2017) 15–21.

- 46. Vivas-Cortez, M., Fejer type inequalities for (s, m) -convex functions in second sense, Appl Math Inform Sci, 10 (2016) 1–8.
- 47. Vivas-Cortez, M., Ostrowski and Jensen-type inequalities via (s, m) -convex functions in the second sense, Bol. Soc. Mat. Mex., 26 (2020) 287–302.
- 48. Yang, Z., Li, Y. ve Du, T., A generalization of Simpson type inequality via differentiable functions using (s, m) -convex functions, Italian J. Pure Appl. Math., 35 (2015) 327–338.
- 49. Yeh, J., Real Analysis, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., USA, 2006.



ÖZGEÇMİŞ

İlknur Mihyaz, İlköğrenimini ve ortaöğretimini Kars ilinin Susuz ilçesinde, liseyi İstanbul ilinin Sultanbeyli ilçesinde Orhangazi Anadolu lisesinde tamamladı. 2014–2015 eğitim-öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü'ne girdi. 2017-2018 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fatih Eğitim Fakültesi'nde Matematik Öğretmenliği Pedagojik Formasyonu'nu onur öğrencisi olarak ve 2018 yılının Haziran ayında lisans eğitimini tamamlayarak üniversitesinden üçüncülük ile mezun oldu. 2019-2020 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Yabancı Diller Fakültesi'nde hazırlık bölümünden mezun oldu. 2020-2021 eğitim öğretim yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı yüksek lisans öğrenimine başladı.