

KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(s, S) TİPLİ YARI-MARKOV ENVANTER MODELLERDE MOMENT
BAZLI YAKLAŞIMLAR

DOKTORA TEZİ

Feyrouz BAGHEZZA

TEMMUZ 2024
TRABZON



KARADENİZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(s, S) TİPLİ YARI-MAKOV ENVANTER MODELLERDE MOMENT
BAZLI YAKLAŞIMLAR

Feyrouz BAGHEZZA

Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsünde
"DOKTOR (MATEMATİK)"
Unvanı Verilmesi İçin Kabul Edilen Tezdir.

Tezin Enstitüye Verildiği Tarih :02 / 07 / 2024

Tezin Savunma Tarihi :29 / 07 / 2024

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Tülay YAZIR

Trabzon 2024

ÖNSÖZ

“(s, S) Tipi Yarı-Markov Envanter Modellerde Moment Bazlı Yaklaşımlar” başlıklı bu tez, Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Programı kapsamında hazırlanmıştır.

Tez çalışmam süresince, bana sağladığı değerli bilgi ve tecrübeleriyle bilim insanı olma yolunda attığım ilk adımlarıma ışık tutan danışmanım Sayın Prof. Dr. Tülay YAZIR’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca, yapıcı eleştirileri ve önerileriyle çalışmama büyük katkılarda bulunan kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Tahir KHANİYEV’e ve tez izleme komitesi üyeleri olan Sayın Prof. Dr. Türkan ERBAY DALKILIÇ ve Sayın Prof. Dr. Selçuk Han AYDIN’a teşekkür ederim.

Doktora eğitimim süresince her türlü destek ve yardımlarıyla yanımda olan kıymetli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Aslı BEKTAŞ KAMIŞLIK’a en içten teşekkürlerimi sunarım.

Türkiye Bursları Kurumu’na, doktora eğitimim boyunca sağladıkları burs ile verdikleri destek için teşekkür ederim.

Son olarak, doğduğum günden bu yana her zaman yanımda olan, aldığım tüm kararlarda bana rehberlik eden ve maddi-manevi desteklerini esirgemeyen annem Aziza ZİYANİ, babam Ahmed BAGHEZZA ve kardeşlerime en derin teşekkürlerimi ve minnettarlığımı sunarım.

Feyrouz BAGHEZZA

Trabzon 2024

TEZ ETİK BEYANNAMESİ

Doktora Tezi olarak sunduğum “ (s, S) tipli yarı-Markov envanter modellerde moment bazlı yaklaşımlar” başlıklı bu çalışmayı baştan sona kadar danışmanım Sayın Prof. Dr. Tülay YAZIR’ın sorumluluğunda tamamladığımı, verileri/örnekleri kendim topladığımı, deneyleri/analizleri ilgili laboratuvarlarda yaptığımı/yaptırdığımı, başka kaynaklardan aldığım bilgileri metinde ve kaynakçada eksiksiz olarak gösterdiğimi, çalışma sürecinde bilimsel araştırma ve etik kurallara uygun olarak davrandığımı ve aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ettiğimi beyan ederim. 29/07/2024

Feyrouz BAGHEZZA

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa No</u>
ÖNSÖZ.....	III
TEZ ETİK BEYANNAMESİ.....	IV
İÇİNDEKİLER.....	V
ÖZET	VII
SUMMARY	VIII
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	IX
TABLOLAR DİZİNİ.....	X
SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ	XI
1. GENEL BİLGİLER	1
1.1. Giriş.....	1
1.2. Stokastik Süreçler.....	4
1.3. Yenileme Süreçleri.....	10
1.4. Yenileme Fonksiyonu.....	15
1.5. Yenileme Fonksiyonu İçin Moment-Bazlı Yaklaşım.....	18
1.6. (s, S) Tipli Yarı-Markov Envanter Modeller	21
1.7. Literatür Araştırması	24
2. YAPILAN ÇALIŞMALAR.....	31
2.1. Klasik (s, S) Tipli Yarı-Markov Envanter Model İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar	31
2.1.1. $X(t)$ Sürecinin Matematiksel Kuruluşu	33
2.1.2. $X(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımı ve Ergodik Dağılımının Momentleri için Kesin Formüller	34
2.1.3. $W_{\beta}(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımı İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar	39
2.1.4. $\tilde{X}(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar.....	42
2.1.5. $X(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımının Beklenen Değeri İçin Yaklaşık Formüllerin Karşılaştırılması	47
2.2. Asimetrik Üçgensel Müdahaleli (s, S) Tipli Yarı-Markov Envanter Model İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar	51
2.2.1. Sürecinin Matematiksel Kuruluşu.....	52
2.2.2. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Kesin Formüller	54
2.2.3. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar	58

2.2.4. Özel Örnekler	72
2.2.5. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentlerin Kesin Formülü	75
2.2.6. Sürecin Ergodik Dağılımının n . Mertebeden Momentleri İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar.	77
3. BULGULAR.....	93
4. SONUÇLAR.....	94
5. ÖNERİLER.....	95
6. KAYNAKLAR	96
ÖZGEÇMİŞ	



Doktora tezi

ÖZET

(s, S) TIPLİ YARI-MARKOV ENVANTER MODELLERDE MOMENT BAZLI YAKLAŞIMLAR

Feyrouz BAGHEZZA

Karadeniz Teknik Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
Danışman: Prof. Dr. Tülay YAZIR
2024, 101 Sayfa

Bu çalışma, literatürdeki önemli stok kontrol modellerinden biri olan (s, S) tipli yarı-Markov bir envanter model için moment bazlı yaklaşımlar geliştirmeyi amaçlamaktadır. Bu model için literatürde çeşitli asimptotik açılımlar bulunmaktadır. Tüm bu çalışmalar, temelde talep rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonu olan $F(t)$ 'nin yapısının bilinmesi koşuluna dayanmakta ve bu koşul doğrultusunda üretilen yenileme fonksiyonunun asimptotik açılımının elde edilmesini gerektirmektedir. Ancak, yenileme fonksiyonunun elde edilmesi belirli dağılım aileleri için zor olabilmekte, yenileme fonksiyonu elde edilse bile bu fonksiyonun matematiksel yapısı uygulamada zorluklar yaratabilmektedir. Ancak, birçok durumda $F(t)$ ' momentlerini hesaplamak oldukça basittir. Bu nedenle, bu çalışmada (s, S) stokastik kontrol modelinin belli özellikleri talep rasgele değişkenlerinin yalnızca ilk üç momentinin bilinmesi koşuluna dayanılarak incelenmiştir. Bu metotla (s, S) tipli stokastik kontrol modelini ifade eden stokastik sürecin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için basit ve kompakt yaklaşımlar elde edilmiştir. Bu çalışmada, yenileme fonksiyonu için Kambo vd., (2012) tarafından önerilen, yenileme fonksiyonunu oluşturan rasgele değişkenlerin ilk üç momentine dayalı yaklaşım kullanılmıştır.

Anahtar Kelimeler: (s, S) tipli envanter modelleri, Ödüllü yenileme süreçleri, Ergodik dağılım fonksiyonu, Ergodik dağılımın momentleri, Asimetrik üçgensel dağılım, Moment-bazlı yaklaşımlar.

PhD. Thesis

SUMMARY

MOMENT BASED APPROXIMATIONS FOR SEMI-MARKOVIAN INVENTORY MODELS OF TYPE (s, S)

Feyrouz BAGHEZZA

Karadeniz Technical University
The Graduate School of Natural and Applied Sciences
Mathematics Graduate Program
Supervisor: Prof. Dr. Tülay YAZIR
2024, 101 Pages

This research aims to develop moment-based approximations for a semi-Markov inventory model of type (s, S) , which is one of the important inventory control models in the literature. There are various asymptotic expansions for this model in the literature. All these studies are basically based on the condition of knowing the structure of the distribution function $F(t)$ of the demand random variables and obtaining the asymptotic expansion of the renewal function generated in accordance with this requirement. However, obtaining the renewal function may be difficult for certain families of distributions, and even if the renewal function is obtained, the mathematical structure of this function may create difficulties in practice. In many cases it is simple to compute the moments of $F(t)$. Therefore, in this study, certain properties of the (s, S) stochastic control model are investigated based on the condition that only the first three moments of the demand random variables are known. With this method, simple and compact approximations are obtained for the ergodic distribution of the stochastic process expressing the stochastic control model of type (s, S) and for the n th order moments of the ergodic distribution. In this study, we use the approach proposed by Kambo et al., (2012) for the renewal function based on the first three moments of the random variables constituting the renewal function.

Key Words: Inventory models of type (s, S) , Reward-renewal processes, Ergodic distribution function, Moments of ergodic distribution, Asymmetric triangular distribution, Moment-based approximations.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa No

Şekil 1. On ülkede nem oranı (Bir stokastik sürecin realizasyonları)	5
Şekil 2. Türkiye’de nem oranı (Stokastik sürecin bir realizasyonu)	6
Şekil 3. t sabit tutulduğunda stokastik sürecin realizasyonları	6
Şekil 4. Bir stokastik sürecin beklenen değeri.....	9
Şekil 5. Varışlar arası geçen zaman.....	11
Şekil 6. Sayma sürecinin bir realizasyonu.....	13
Şekil 7. Klasik (s, S) tipli yarı-Markov envanter modelin bir realizasyonu	33
Şekil 8. Kesikli müdahaleli yarı-Markov envanter modelin bir realizasyonu.....	52
Şekil 9. ζ_1 değişkeninin $p_\zeta(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu.....	56

TABLÖLER DİZİNİ

Sayfa No

Tablo 1. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri için yaklaşık formüllerin karşılaştırılması.....	50
--	----



SEMBOLLER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$E(X)$	: X rasgele değişkenin beklenen değeri.
$E(X^n)$	: X rasgele değişkenin n . dereceden momenti.
$Var(X)$	: X rasgele değişkenin varyansı.
$F(x) * G(x)$	: F ve G fonksiyonlarının konvölüsyon çarpımı.
$F^{*n}(x)$	: F fonksiyonun n . konvölüsyon çarpımı.
$F(x) \approx G(x)$	: $F(x)$ fonksiyonu yaklaşık olarak $G(x)$ ' e eşittir.
$A \equiv B$	: A ve B birbirine denktir.
$\Gamma(x)$	: Büyük Gamma fonksiyonu.
$P\{A\}$	: A olayının meydana gelme olasılığı.
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	: Olasılık uzayı.
$\tilde{F}(\lambda)$	: $F(x)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü.
$F'(x)$	: $F(x)$ fonksiyonun birinci dereceden türevi.
$L^{-1}(F(\lambda))$	: $F(\lambda)$ ' nin ters Laplace dönüşümü.
$\mathbb{R}$	: Reel sayıların kümesi.
$[a, b]$	: Alt sınırı a , üst sınırı b olan reel sayıların sınırlı ve kapalı aralığı.
$\emptyset$	: Boş küme.
$\subseteq$	: Altküme.

1. GENEL BİLGİLER

1.1. Giriş

Stokastik süreçler, rasgele değişken dizileri arasındaki dinamik ilişkileri nicelleştirme teknikleriyle ilgilenir. Modern istatistik teorisinin temellerini oluşturulmasına önemli katkıda bulunan Neyman, 1960 yılında yazdığı bir makalede stokastik süreçlerin önemini şu şekilde vurgulamıştır:

“Şu anda, bilimde dinamik belirsizlik döneminde, gerçekçi bir şekilde incelenirse, stokastik süreçler üzerindeki işlemleri içermeyen ciddi bir araştırma neredeyse yoktur.” (Neyman, 1960).

Rasgeleliğin etrafımızdaki olayların çoğunun ayrılmaz bir parçası olması nedeniyle, stokastik modeller, doğa ve mühendislik bilimlerindeki problemlerini modellemede kritik bir rol oynamaktadır. Bu modeller gen mutasyonları gibi biyolojik ve tıp bilimlerinde var olan değişkenliği analiz etmek için kullanılabilir. Stokastik modeller ayrıca ekonomi ve psikolojiden elektronik ve bilgisayar bilimlerine kadar pek çok farklı alanda çeşitli olayları modellemek için kullanılır. Bu tür modeller, modelleyicilere yeni bakış açıları ve bilgiler sağlar. Daha yeni süreçler, modelleme uzmanlarının ihtiyaçlarına uygun olarak gelişmeye devam etmektedir. Ancak, Markov süreçleri, rasgele yürüyüş ve yenileme süreçleri gibi temel süreçler, uygulama esnekliği açısından diğer süreçlerine göre daha yüksek performans göstermektedir.

Yenileme süreçleri, "kendisini yenileyen süreçlerin" çalışmasından ortaya çıkmış ve ilk olarak Poisson sürecinin bir genellemesi olarak tanıtılmıştır. Yenileme süreçleri, birçok farklı alanda kullanılabilen esnek ve güçlü bir modelleme aracı olarak hizmet vermektedir. Güvenilirlik mühendisliğinden finansa, biyolojiden endüstriyel sistemlere kadar, yenileme süreçlerinin uygulama alanları oldukça geniştir. Örneğin, güvenilirlik mühendisliğinde, arıza ve tamir süreçlerini modellerken, envanter yönetiminde stok seviyelerini ve yenileme politikalarını optimize etmek için kullanılırlar. Aynı zamanda, kuyruk teorisinde, bekleyen müşterilerin ve işlemlerin zamanlamasını analiz etmek için de önemli bir rol oynarlar. Finansal sistemlerde, özellikle sigorta ve risk yönetimi alanlarında, hasar ödemelerinin ve risklerin zaman içindeki dağılımlarını modellemek için yenileme süreçleri kullanılır. Biyolojide ve tıpta ise, hastalık ilerlemesi ve tedavi planlaması gibi süreçlerin

modellenmesinde önemli bir rol oynarlar. Bu çeşitli uygulama alanları, yenileme süreçlerinin geniş kullanımı ve pratikteki önemini vurgular.

Yenileme süreçlerinin analizinde ve uygulamalarında anahtar araçlardan biri yenileme fonksiyondur. Bu fonksiyon, herhangi bir zaman aralığında yenileme sayısının beklenen değerini verir. Yenileme fonksiyonu, yenileme süreçleri için çok önemlidir çünkü süreci tamamen karakterize eder. Yenileme fonksiyonu, yenileme denklemi olarak bilinen bir integral denklemin çözümü olarak ifade edilebilir. Ancak, bu denklemlerin analitik çözümü genellikle mümkün olmadığı için, pratikte kullanımları zor olabilir.

Bu integral denklemler, yenileme fonksiyonunu içerir ve bu fonksiyonun açık bir şekilde incelenmesi sadece çok az spesifik durumda mümkündür. Bu nedenle, yenileme fonksiyonlarının incelenmesinde yaklaşım yöntemleri, genellikle analitik çözümlerin mümkün olmadığı durumlarda, büyük önem taşır. Feller (1971), yenileme denklemleri sağlayan birçok olguyu örneklemiştir. Keyfitz (1968), yenileme denklemin demografi alanındaki kullanımını, Bartholomew (1973) sosyal süreçlerdeki kullanımını, Bartholomew (1976) ve Bartholomew & Forbes (1979) insan gücü çalışmalarındaki kullanımını ve Şahin (1983) stok modellerindeki kullanımını incelemiştir. Yenileme fonksiyonunun pratik uygulamalardaki önemi nedeniyle, bu fonksiyon için çeşitli yaklaşımlar önerilmiştir (Smeitink & Dekker, 1990; Politis & Pitts, 1998; Xie, 1989; Xie vd., 2003; Parsa & Jin, 2013; Mitov & Omev, 2014; Campbell, 2018; Jiang, 2020; 2022).

Bu alanda yapılan önemli çalışmalardan biri de yenileme fonksiyonu için Kambo vd., (2012) tarafından önerilen basit yaklaşımdır. Bu yaklaşım, yalnızca talep rasgele değişkenlerinin ilk üç momenti mevcut, sonlu ve bilinir olduğunda uygulanabilmekte ayrıca yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonlarının kapalı formunun bilinmesini gerektirmemektedir.

Yarı-Markov envanter modellerinin uygulamaları stok kontrolü, güvenilirlik, sigorta ve kuyruk teorisi gibi çok çeşitlidir. Mevcut literatürde bu modellerin olasılık ve sayısal özellikleri üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. Bu konudaki önemli çalışmalardan (Nasirova vd., 1998; Khaniyev & Mammadova 2006; Khaniyev & Atalay, 2010; Khaniyev & Aksop, 2011; Bekar vd., 2013; Khaniyev vd., 2013; Aliyev vd., 2016; Hanalioğlu vd., 2018; Hanalioğlu & Khaniyev, 2019; Aliyev, 2016; Kamışlık vd., 2018; Gevev & Khaniyev (2022); Kamışlık vd., 2020; Kamışlık vd., 2023) tarafından yapılan çalışmalardır.

Literatürde en çok kullanılan (s, S) tipli yarı-Markov stok kontrol modellerinin karakteristikleri incelenirken talep rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme

fonksiyonu kullanılmaktadır. Pratik uygulamalarda, yenileme fonksiyonunun kullanılması için bir yenileme süreci ile bağılı dağılım fonksiyonunun fonksiyonel formunun bilinmesi gereklidir. Bu nedenle, yarı-Markov envanter modelleriyle ilgili önceki çalışmalar, talep rasgele değişkenlerinin dağılım fonksiyonları olan $F(t)$ 'nin bilinmesi gerektirmektedir. Ancak, yenileme fonksiyonunu gerçek dünya problemlerine uygulanırken bu varsayımın karşılanması her zaman mümkün olmayabilir. Bunun nedeni çoğu dağılım için yenileme fonksiyonunun kesin formunun elde edilmesinin zor oluşudur. Ancak, birçok durumda, yenileme fonksiyonunu üreten rasgele değişkenlerin momentlerini hesaplamak nispeten kolaydır. Bu durumda (s, S) tipli stokastik kontrol modelinin özelliklerini araştırmak için moment-bazlı bir yaklaşım kullanmak bahsedilen zorlukları aşmak açısından önemlidir.

Bu çalışmada, (s, S) tipli bir yarı-Markov envanter modeli, ödüllü yenileme süreci olarak adlandırılan yarı-Markov bir stokastik süreç yardımı ile modellenecek ve modeli ifade eden süreç matematiksel olarak kurulacaktır. Daha sonra, Kambo vd., (2012) çalışmasında önerilen yenileme fonksiyonunun moment-bazlı yaklaşımı kullanılarak, (s, S) tipli envanter modeli ifade eden sürecin belirli bazı karakteristikleri incelenecektir.

Bu tür modeller için sunulan yaklaşımların aşağıdaki gereklilikleri sağlaması arzu edilir:

- Doğruluk
- Basitlik: Özellikle, kapalı formda bir ifadeye sahiptir ve ek sayısal hesaplama gerekliliğini ortadan kaldırarak doğrudan kullanılabilir.
- Uygulanabilirlik: Belirli bir dağılımla sınırlı olmak yerine daha geniş bir dağılım ailesine uygulanabilir olmalıdır.
- Açıklık: Kalan terimlerin sıfıra doğru nasıl yakınsadığı açık olmalıdır.

Bu çalışmada, yukarıda listelenen tüm gereksinimleri karşılayan bir yaklaşım sunulmaktadır.

Bu çalışmanın amacı, özellikle asimptotik açılımların önerildiği durumlarda, önceki araştırmalarda tespit edilen bir boşluğu gidermektir. Literatürde şimdiye kadar elde edilen sonuçlar asimptotik açılımlar olduğundan, ilk iki veya üç terimden sonra kalan terimler genellikle küçük oh (o) veya büyük oh (O) notasyonlarıyla gösterilir. Bu durumda kalan terimlerin sıfıra nasıl yakınsadığını tam olarak gözlemlemek mümkün değildir. Ancak, kalan terimlerin sıfıra nasıl yakınsadığını anlamak uygulama için çok önemlidir. Bu amaçla, Kambo'nun yaklaşımını kullanılarak yarı-Markov stokastik modelimiz ifade eden $X(t)$

yenileme sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımın n . dereceden momentleri için yaklaşık formüller elde edilecektir.

Bu tez iki ana kısımdan oluşmaktadır. Birinci ana kısım 7 bölümden oluşmaktadır. 1.2 ve 1.3 bölümlerde sırasıyla, stokastik süreçler ve yenileme süreçlerinin bazı temel kavramları gözden geçirilmiştir. 1.4 bölümde ise yenileme denkleminin çözümü olan yenileme fonksiyonu tanıtılmış ve onun moment-bazlı yaklaşımı 1.5 bölümde verilmiştir. 1.6 bölümde (s, S) tipli yarı-Markov envanter modelleri kısaca anlatılmıştır. Ayrıca, 1.7 bölüm, literatür taraması için ayrılmıştır.

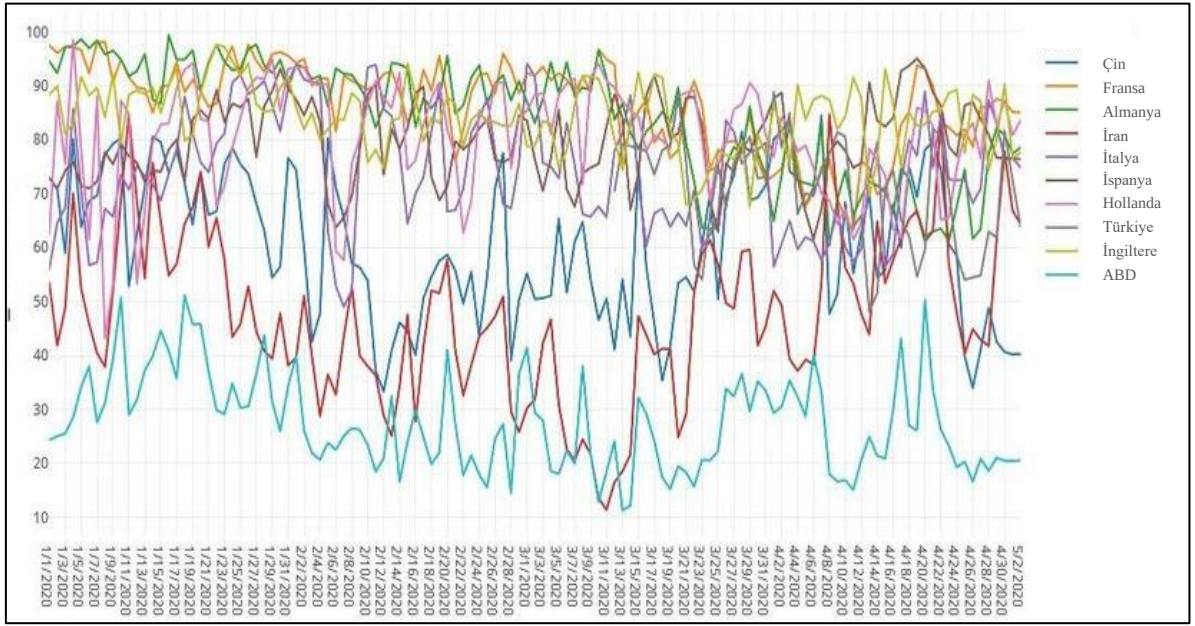
İkinci ana kısım ise iki bölüm halinde şöyle düzenlenmiştir. 2.1 bölümde, klasik (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli ele alınmış ve ödüllü yenileme sürecinin değiştirmesiyle ifade edilmiştir. Daha sonra, sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının n . merteben momentleri için Kambo anlamında moment-bazlı yaklaşımlar elde edilmiştir. Kambo'nun yaklaşımına göre elde edilen yaklaşık formüllerin, literatürde mevcut olan (genellikle Feller yaklaşımı olarak bilinir) formüllerine göre daha etkin olduğunu göstermek için özel bir örneği ele alınmıştır. 2.2 bölümde ise, modelimize asimetrik üçgensel müdahale koyularak, sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının momentleri için moment-bazlı yaklaşımlar elde edilmiştir. Son olarak, ortaya çıkan sonuçları kullanılarak, sürecin ilk dört momenti ve varyansı için yaklaşık formülleri elde edilmiştir.

1.2. Stokastik Süreçler

Stokastik süreçler, matematik, istatistik, fizik, ekonomi ve biyoloji gibi çeşitli alanlarda temel öneme sahiptir, çünkü belirsizlik ve rasgeleliği modellemek için güçlü bir çerçeve sunarlar. Doğasında belirsizlik olan sistemleri analiz ederek, karmaşık fenomenleri anlamamıza yardımcı olmaktadır. Tahmine yönelik modellerinde, stokastik süreçler, gelecekteki olaylardaki belirsizliği dikkate alan olasılıksal tahminler yapmamızı sağlar. Finans, sigorta ve mühendislikte risk değerlendirmesi için, stokastik süreçler rasgele dalgalanmaları ve aşırı olayları modelleyerek riskleri ölçer ve azaltma stratejileri tasarlar. Ayrıca, stokastik süreçler simülasyon ve optimizasyon çalışmalarında, belirsizlik altındaki sistem davranışlarını analiz etmeye ve sağlam sistemler tasarlayıp optimal kararlar almaya imkân tanır. Çıkarımsal istatistikte, örneklerden popülasyonlar hakkında olasılıksal sonuçlar çıkarılmasını sağlarlar. Makine öğreniminde, stokastik süreçler zaman serisi analizi ve olasılıksal modelleme gibi görevlerde algoritmaları geliştirerek veri belirsizliğini

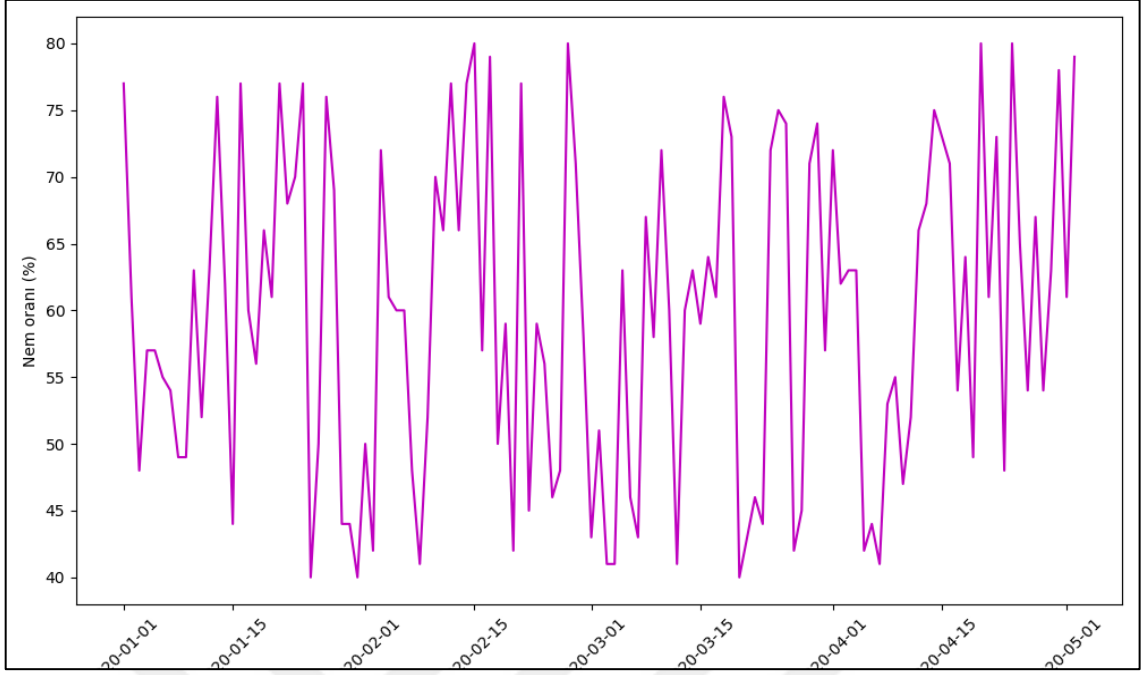
belirlemeye yardımcı olur. Kalite kontrolünde ise, stokastik süreçler üretim süreçlerindeki rasgele değişimleri analiz ederek, kaynakları belirlemeye ve daha iyi kalite için süreçleri optimize etmeye yardımcı olur. Genel olarak, stokastik süreçler, çeşitli disiplinlerde belirsizliği anlama, tahminler yapma, riskleri yönetme ve süreçleri optimize etmek için kapsamlı bir matematiksel çerçeve sağlar.

Aşağıdaki grafik on ülkede nem oranının zamana göre değişimini göstermektedir. Bu oranının zamana göre değişimini bir stokastik sürecidir.



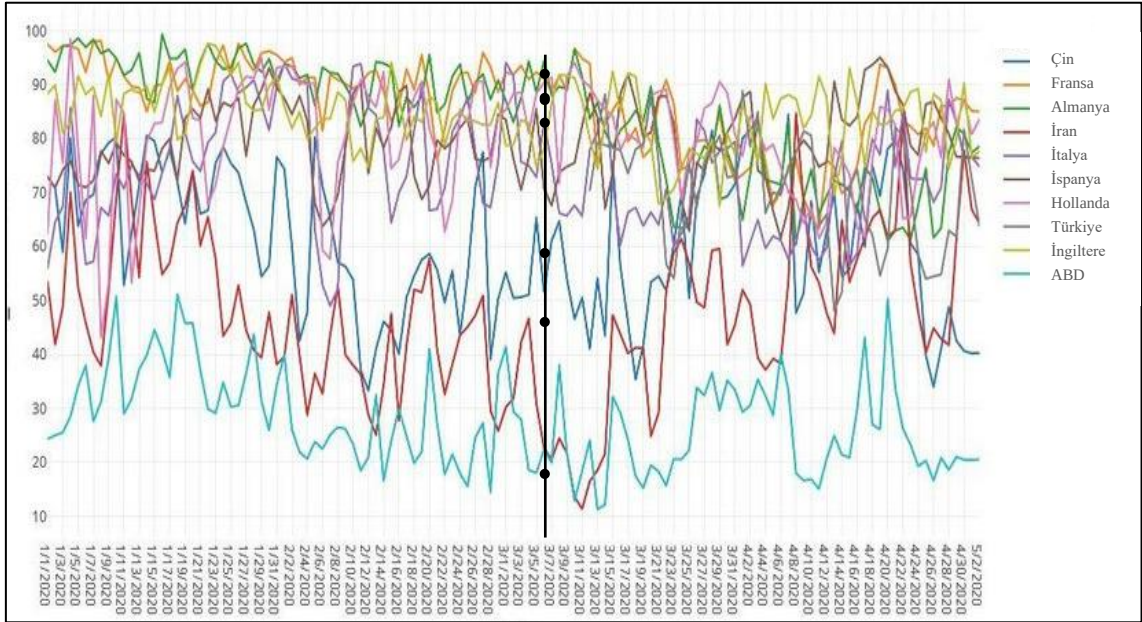
Şekil 1. On ülkede nem oranı (Bir stokastik sürecin realizasyonları) (Stephen vd., 2022)

Seçilmiş bir ülkede nem oranının değişimi göz önüne alındığında t ' ye bağlı olan ve rasgele olmayan bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyon stokastik sürecin bir realizasyonu denir.



Şekil 2. Türkiye’de nem oranı (Stokastik sürecin bir realizasyonu)

Stokastik sürecin t parametresi sabit tutulursa, bu durumda bir rasgele değişken elde edilir.



Şekil 3. t sabit tutulduğunda stokastik sürecin realizasyonları (Stephen vd., 2022)

Stokastik süreçlerin tanımlanabilmesi için matematiksel çerçeveler üzerinde durulması gerekmektedir.

Bir olasılık modelin elemanları

- Örnek uzayı Ω : Bir deneyin mümkün tüm sonuçlarının kümesidir.
- Olasılık ölçüsü: Mümkün sonuçlardan oluşan bir A kümesine (olay olarak da adlandırılır) negatif olmayan bir $P(A)$ sayısı (A 'nın olasılığı olarak adlandırılır) veren fonksiyondur. A 'nın elemanlarının olasılığı hakkındaki bilgi verir.
- Ω örnek uzayında σ -cebiri.

Bu yapıların matematiksel tanımları verelim.

Tanım 1.2.1 (Nasirova vd., 2009)

Ω örnek uzayının bazı alt kümelerinden oluşan kümeler sınıfını U olsun. Eğer bu sınıf aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ona Ω ' da cebir denir.

- 1) $\Omega \in U$,
- 2) $A \in U$ ise $\bar{A} \in U$,
- 3) $A, B \in U$ ise $A \cup B \in U$.

Burada, 3. koşulu aşağıdaki gibi de verebiliriz.

- 3) $A, B \in U$ ise $A \cap B \in U$.

Bir Ω kümesinin bütün alt kümelerinin oluşturduğu sınıfa kuvvet kümesi denir.

Tanım 1.2.2 (Nasirova vd.,2009)

$\mathcal{F}$, Ω ' nin bir sınıfı olsun. Eğer $\mathcal{F}$ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa ona bir σ -cebiri denir.

- 1) $\Omega \in \mathcal{F}$,
- 2) $A \in \mathcal{F}$ ise $\bar{A} \in \mathcal{F}$,
- 3) $A_k \in \mathcal{F}, k \geq 1$ ise $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$.

Ω bir örnek uzayı olsun. Eğer $\mathcal{F}$, Ω 'da bir σ -cebiri ise çiftine $(\Omega, \mathcal{F})$ ölçülebilir uzay denir. Her A , Ω ' nin alt kümesi için $A \in \mathcal{F}$ koşulu sağlıyor ise A ' ya rasgele olay denir.

Tanım 1.2.3 (Nasirova vd.,2009)

$\mathcal{F}$, Ω ' nin herhangi bir σ -cebiri olsun. $\mathcal{F}$ cebirinin elemanları üzerinde tanımlanmış $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu

- 1) $\forall A \in \mathcal{F}$ için $P(A) \geq 0$,
- 2) $P(\Omega) = 1$,
- 3) $\mathcal{F}$ 'dan alınan her ayrık $\{A_k\}$ küme dizisi için

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

koşullarını sağlayan P fonksiyona olasılık ölçüsü denir. $P(A)$ ise A 'nin olasılığı denir.

Tanım 1.2.4 (Grimmett & Welsh, 2014)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ölçüsü aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bir olasılık uzayı denir.

- 1) Ω boş olmayan bir küme,
- 2) $\mathcal{F}$ sınıfı, Ω üzerinde tanımlanmış bir σ -cebiri,
- 3) P , $(\Omega, \mathcal{F})$ üzerinde tanımlanmış bir olasılık ölçüsüdür.

Bir kümenin altkümelerin üzerinde tanımlanmış en küçük σ -cebiri, Borel σ -cebiri denir.

Tanım 1.2.5 (Nasirova vd.,2009)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı olsun. $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ kümesinin alt kümelerin üzerinde tanımlanmış Borel σ -cebiri $B_{\mathbb{R}}$ olsun. Ω 'da tanımlanmış, $\mathbb{R}$ kümesinden değerler alan $X = X(\omega)$ fonksiyona rasgele değişken denir. Burada, $\{\omega: X(\omega) \in B_{\mathbb{R}}\} \in \mathcal{F}$ olmalıdır.

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayı üzerinde tanımlanmış $X = \{X(\omega, t), t \in T\}$ rasgele değişkenler ailesine rasgele fonksiyon denir. $T \in \mathbb{R}$ kümesine X rasgele fonksiyonunun indis kümesi denir.

Eğer $T = \mathbb{R}^+$ ve t parametresi zaman temsil ediyorsa $X(\omega, t)$ rasgele fonksiyona bir stokastik süreç denir. T indis kümesi sayılabilir ise, $X(\omega, t)$ sürecine kesikli zamanlı stokastik süreç, T bir aralık ise $X(\omega, t)$ 'ye sürekli zamanlı stokastik süreç denir. Her bir t için bir tane rasgele değişken elde edilir.

Her bir sabit tutulan ω parametresi için, sadece t ye bağlı rasgele olmayan bir fonksiyon elde edilir. Bu fonksiyona $X(\omega, t)$ stokastik sürecinin realizasyonu (gerçekleştirilmesi) denir.

Bilinmektedir ki, herhangi bir X rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu $F_X(x) = P\{X \leq x\}$ ile ifade edilir. n tane rasgele değişkenin $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ vektörünün ortak dağılım fonksiyonu $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}$ şeklindedir.

Bir stokastik süreç $t \in T$ indisli rasgele değişkenlerin ailesi olduğundan dağılım fonksiyonları rasgele değişkenlerin vektörlerine benzer şekilde ortak dağılım fonksiyonu yardımı ile ifade edilebilir.

Tanım 1.2.6 (Aliyev, 2010)

$X(\omega, t)$ bir stokastik süreç olsun, $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$. $X(\omega, t_1), X(\omega, t_2), \dots, X(\omega, t_n)$ rasgele değişkenlerinin

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(\omega, t_1) \leq x_1, \dots, X(\omega, t_n) \leq x_n\}, \quad x_i \in \mathbb{R}, i \geq 1$$

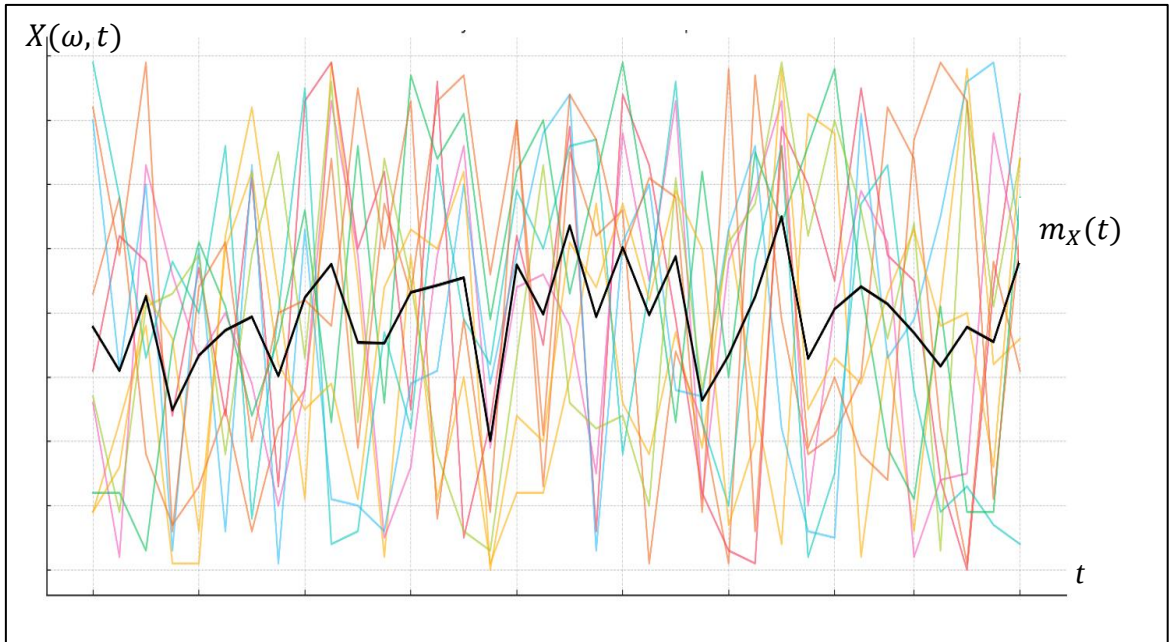
ortak dağılım fonksiyonuna $X(\omega, t)$ sürecinin n -boyutlu dağılım fonksiyonu denir.

Tanım 1.2.7 (Aliyev, 2010)

$X(\omega, t)$ bir stokastik süreç olsun. $F_t(x)$, $X(\omega, t)$ 'nin bir boyutlu dağılım fonksiyonu olmak üzere. Eğer $\forall t \in T$ için $\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_t(x)$ sonlu ise

$$E(X(\omega, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_t(x)$$

integraline $X(\omega, t)$ sürecinin beklenen değeri denir ve $m_X(t)$ ile gösterilebilir.



Şekil 4. Bir stokastik sürecin beklenen değeri

Tanım 1.2.8 (Aliyev, 2010)

$X(\omega, t)$ bir stokastik süreç olsun. $m_X(t)$ sürecinin beklenen değeri olmak üzere,

$Var(X(\omega, t)) = E(X(\omega, t) - m_X(t))^2$ fonksiyona $X(\omega, t)$ sürecinin varyansı denir.

Yenileme fonksiyonlarını anlamak ve bunların ardındaki teoriyi kavrayabilmek için, bu devam eden bölümünde yenileme teorisi hakkında temel kavramları sunuyoruz ve ayrıca yenileme fonksiyonlarına yaklaşımlarla ilgili mevcut literatürü gözden geçiriyoruz.

1.3. Yenileme Süreçleri

Yenileme teorisi, parçaların bozulması ve değiştirilmesiyle ilgili bazı özel sorunları inceleyerek başlamıştır. Bununla birlikte, teorinin uygulamalarının zenginliği, teori ve uygulamanın son derece uyumlu hale gelmesine yol açmıştır.

Yenileme süreçleri, zaman içinde aynı olayların gerçekleşmesini modelleyen stokastik süreçlerdir.

Yenileme süreçlerinde, her bir varış veya olay bir yenileme olarak adlandırılır. Ardışık iki yenileme arasındaki zaman aralıklarını temsil eden rasgele değişkenler bağımsız ve aynı dağılıma sahip oldukları için, her bir yenileme ile bu süreç olasılıksal olarak yeniden başlar. Yani, her yenileme, bir öncekinden bağımsız olarak gerçekleşir ve bu nedenle yenileme süreci her bir yenileme ile yeniden başlar. Bu özellik, yenileme süreçlerinin temel özelliklerinden biridir ve bu süreçlerin analizinde önemli bir rol oynamaktadır. Yenileme süreçlerinin daha iyi anlaşılabilmesi için aşağıdaki örnekler verilsin.

Örnek 1

$T_0, T_1, \dots$ araçların bir otoyol üzerinde belirli bir sabit noktadan geçtiği ardışık anlar olsun. Eğer $X_1, X_2, \dots$ iki ardışık araba arasında geçen zamanı göstermek üzere bu rasgele değişkenler birbirinden bağımsızsa ve aynı dağılıma sahipse, o zaman $\{T_n; n \geq 0\}$ bir yenilenme sürecidir. Özellikle, eğer $\{X_i, i \geq 1\}$ rasgele değişkenlerin dağılımı üstel ise, o zaman yenileme süreci T_n , bir Poisson süreci olur.

Örnek 2

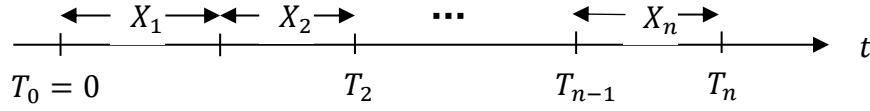
Ömürleri birbirinden bağımsız aynı özelliklere sahip ampulleri içeren bir deneyi ele alalım. Deneyde her seferinde bir ampul kullanılıyor ve ampul arızalandığında yerine hemen setten başka bir ampul takılıyor. Arızalı bir ampulün değiştirildiği her sefer bir yenileme olayını ifade eder. $X_i, i \geq 1$ rasgele değişken olmak üzere i . ampulün ömrünü gösterebilir, burada $X_0 = 0$ dır. Ampullerin benzer olduğu varsayıldığından, $X_i, i \geq 1$ rasgele değişkenleri bağımsızdır ve aynı dağılıma sahip olur. $N(t)$, ilk ampulün $t = 0$ anında kullanılmaya başladığını varsan $[0, t]$ aralığında yenileme olaylarının sayısını gösterebilir. İlk n ampulün arızalanma süresi T_n şu şekilde verilir: $T_0 = 0, T_1 = X_1, T_2 = X_1 + X_2, \dots, T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

$T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ bir yenileme sürecidir.

$\{X_n, n \geq 1\}$ bağımsız, aynı dağılıma sahip ve negatif olmayan rasgele değişkenlerin dizisi olsun. Burada, X_n rasgele değişkeni, $(n - 1)$. ve n . varışların arasında geçen süreyi temsil etmektedir. $\{X_n, n \geq 1\}$ dizisine arışlar arası geçen zamanlar dizisi denir.

Tanım 1.3.1 (Ross, 1996)

X_i , $(i - 1)$. ve i . varışlar arasında geçen zaman olmak üzere, $\{X_n, n \geq 1\}$ bağımsız, aynı dağılıma sahip ve negatif olmayan rasgele değişkenler dizisine varışlar arası geçen zaman dizisi denir.



Şekil 5. Varışlar arası geçen zaman

$P\{X_n = 0\} < 1$ olduğunu varsayalım. X_n Rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonu $F(t) = P\{X_n \leq t\}$ olsun. X_n negatif olmadığına göre, beklenen değeri $E(X_n)$ mevcuttur ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$E(X_n) = \mu = \int_0^{\infty} xF(x)dx.$$

Burada μ sonsuz olabilir. $\mu \rightarrow \infty$ olduğunda $\frac{1}{\mu} \rightarrow 0$ olarak yorumlanacaktır. $\{T_n\}$ rasgele değişken dizisi,

$$T_0 = 0; T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n, n \geq 1 \quad (1)$$

olarak tanımlansın. T_n , n . olayın zamanı verir ve T_n rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonu $P\{T_n \leq t\} = F^{*n}(t)$ gibi verilir.

Burada, $F^{*n}(t)$, $F(t)$ 'in n . konvolüsyon çarpımıdır. Yani,

$$F^{*n}(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-x) dF(x),$$

ve

$$F^{*0}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

dir. $N(t)$, t anına kadar meydana gelen olayların sayısı olmak üzere,

$$N(t) = \sup\{n \geq 1, T_n \leq t\} \quad (2)$$

ile tanımlansın. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma süreci denir.

Zaman içerisinde meydana gelen belirli olayların sayısını modellemek, çeşitli problemlerin çözümünde önemlidir. Sayma süreçleri, bu tür problemleri modellemek için kullanılan, negatif olmayan, değerleri artan ve tam sayı değerli özel stokastik süreçlerdir.

Tanım 1.3.2 (Sayma süreci)

Eğer $\{N(t), t \in [0, \infty)\}$ stokastik süreci, 0 zamanından t zamanına kadar ve t zamanı da dahil olmak üzere, meydana gelen olayların sayısı ise sayma süreci olarak adlandırılır. Sayma süreci aşağıdaki şartları sağlar:

- 1) $N(0) = 0$
- 2) $\forall t \in [0, \infty), N(t) \in \{1, 2, \dots\}$
- 3) $0 \leq s < t$ ise $N(t) - N(s)$, $[s, t)$ aralığında varışların sayısıdır.

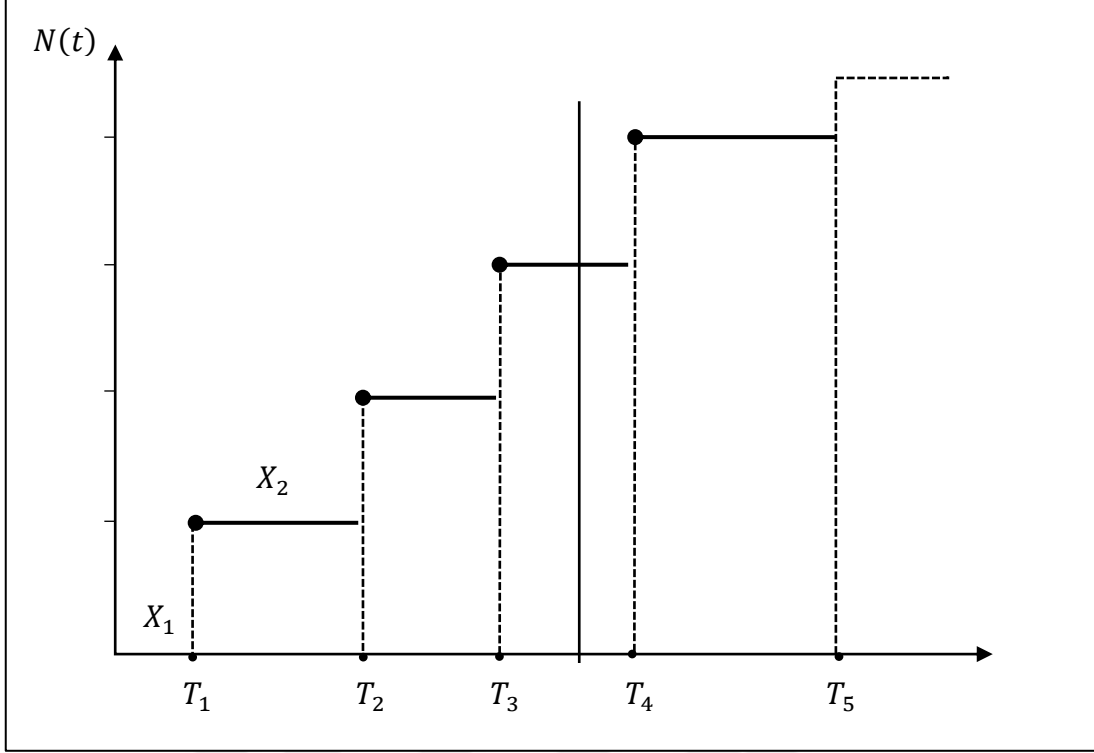
$N(t)$, indigatör fonksiyonu kullanılarak matematiksel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$N_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} I_{[0,t]} T_n(\omega), \quad t \geq 0, \quad \omega \in \Omega.$$

Burada, $I_{[0,t]} = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, t] \\ 0, & \omega \notin [0, t] \end{cases}$

biçiminde tanımlanır.

$N(t)$, sayma sürecinin realizasyonu aşağıdaki Şekil 6. ile gösterilir.



Şekil 6. Sayma sürecinin bir realizasyonu

Şekil 6.' de görüldüğü gibi, eğer olaylar $T_1, T_2, T_3 \dots$ anlarında gerçekleşiyorsa, her sabit tutulmuş t için $N(t), T_i \leq t$ olan T_i 'nin sayısını göstermektedir. Örneğin $t \in [T_3, T_4)$ olduğunda $N(t) = 3$ olmaktadır çünkü t zamanına kadar 3 olay meydana gelmiştir.

Tanım 1.3.3 (Yenileme süreci) (Feller 1971)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında, $\{X_n, n \geq 1\}$, bağımsız, pozitif ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. X_n , $(n - 1)$. ve n . varışlar arasında geçen zamanı gösteren rasgele değişkendir.

$$T_n = \sum_{i=1}^n X_i, \quad T_0 = 0$$

olsun. T_n , n . varışın gerçekleştiği zamandır.

$N(t)$, $[0, t]$ aralığında meydana gelen yenilemelerin sayısını veren rasgele değişkendir. $\{N(t), t \geq 0\}$ sayma sürecine yenileme süreci denir.

Genellikle, bir yenileme süreciyle bir ödül veya maliyet sisteminin var olduğu durumları göz önünde bulundurmamız gerekir. Ödüller zaman içinde sürekli olarak

biriktirilebilir veya belirli zaman noktalarında belirli geçişler gerçekleştiğinde bu ödülleri kazanabiliriz. Bu durumda ödüllü yenileme süreci ile ilgileniyoruz.

Tanım 1.3.4 (Ödüllü yenileme süreci) (Feller, 1971)

$N(t)$ bir yenileme süreci olsun, $\{X_n, n \geq 1\}$, bağımsız, pozitif ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi verilsin. X_n , $(n-1)$. ve n . varışlar arasında geçen zamanı gösteren rasgele değişkendir. Her yenilemenin ardından sisteme bir ödül verildiği varsayalım. R_n , n . yenileme sırasında kazanılan ödül olmak üzere

$$R_n(t) = \sum_{n=1}^{N(t)} R_n$$

t anına kadar sisteme verilen toplam ödüllerin sayısıdır.

$\{R_n, n \geq 1\}$ bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenlerin dizisidir. $\{R_n, n \geq 1\}$ ve $\{X_n, n \geq 1\}$ dizileri birbirinden bağımsızdır. $\{R(t), t \geq 0\}$ biçiminde tanımlanan sürece ödüllü yenileme süreci denir.

Şimdi, $N(t)$ yenileme süreci için büyük sayılar kanunu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.1.1.1 (Mitov & Omey, 2014)

$E[X_1] = \mu_1$ sonlu olsun. Bu durumda her ε için $t \rightarrow \infty$ iken

$$P \left\{ \left| \frac{N(t)}{t} - \frac{1}{\mu_1} \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$

doğrudur.

$N(t)$ yenileme süreci için merkezi limit teorimi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.1.1.2 (Mitov & Omey, 2014)

$E[X_1] = \mu_1$ ve $V[X_1] = \sigma^2$ ise $t \rightarrow \infty$ iken

$$P \left\{ \left| \frac{N(t) - \frac{1}{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1^3 t \sigma^2}} \right| < x \right\} \rightarrow \Phi(x),$$

burada, $\Phi(x)$ standart normal dağılımın dağılım fonksiyonudur. $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

1.4. Yenileme Fonksiyonu

Yenileme fonksiyonu, belirli bir zaman aralığında meydana gelen toplam yenileme sayısı $N(t)$ 'nin beklenen değerini tanımlayan bir fonksiyondur. Bu fonksiyon, yenileme sürecinin davranışını analiz etmek ve modellemek için önemlidir.

Herhangi bir t zamanında, $N(t)$ 'nin beklenen değerini ifade edebilmek için negatif olmayan bir fonksiyonun konvolüsyon kavramını tanıtmamız gerekmektedir.

Tanım 1.4.1 (Çinlar, 1995)

$F, \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlanan bir dağılım fonksiyonu olsun ve $g, \mathbb{R}^+$ üzerinde tanımlanan, herhangi bir sonlu aralık $[0, t]$ üzerinde sınırlı, negatif olmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $F * g$ fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$$F * g(t) = \int_0^t g(t-x) dF(x), \quad (3)$$

(3) ile tanımlı değere $t \in \mathbb{R}$ için konvolüsyon çarpımı denir.

Pratikte, g yerine bir dağılım fonksiyonu G ile verilirse, $F * G$ bir dağılım fonksiyon olur. $F * G$ 'nin ifade ettiği anlamı görmek için X, Y 'nin bağımsız rasgele değişkenler olduğunu ve F ve G 'nin sırası ile dağılımları olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\begin{aligned} P\{X + Y \leq t\} &= E[P\{X + Y \leq t \mid X\}] \\ &= E[G(t - X)] \\ &= \int_0^t G(t - x) dF(x) \end{aligned} \quad (4)$$

F ve G nin aynı olması durumunda, $F * F$ için F^{*2} kullanılır aynı şekilde $F^{*3} = F * F^{*2}$ gibidir. Böylece, $F^{*(n+1)} = F * F^{*n}$ olur.

Denklem (4)'ten, kolayca görülür ki F^{*n} , n tane rasgele değişkenin toplamının dağılımıdır. Başka deyişle, $P\{T_n \leq t\} = F^{*n}(t)$ dir.

$\{T_n, n \geq 0\}$, $F(t)$ dağılımına sahip bağımsız rasgele değişkenler tarafından üretilen yenilenme süreci olsun. Ve $N(t)$, $[0, t]$ aralığında varışların sayısı olsun.

Varış zamanları ve sayma rasgele değişkenleri arasındaki ilişki aşağıdaki denklik ifade ile verilebilir.

$$\{N(t) \geq n\} \equiv \{T_n < t\}. \quad (5)$$

Yenileme teorisinde $N(t)$ 'nin dağılımının bilinmesi önemlidir. $N(t)$ 'nin dağılımı,

$$P\{N(t) = n\} = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)$$

biçiminde tanımlanır. Bu aşağıdaki gibi açıklanabilir.

$$\begin{aligned} P\{N(t) = n\} &= P\{N(t) \geq n\} - P\{N(t) \geq n+1\} \\ &= P\{T_n \leq t\} - P\{T_{n+1} \leq t\} \\ &= F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t). \end{aligned}$$

$N(t)$ 'nin beklenen değer, varyans ve otokorelasyon fonksiyonu gibi çeşitli istatistiksel özellikleri arasında en çok ilgilenilen ölçü beklenen değerdir. $E[N(t)] = M(t)$ fonksiyonu, $N(t)$ sürecinin *yenileme fonksiyonu* denir ve $[0, t]$ aralığında gerçekleştirilen yenilemelerin sayısının beklenen değerini temsil eder.

Yenileme sayısının beklenen değeri şu şekilde hesaplanabilir:

$$M(t) = E[N(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} nP\{N(t) = n\} = \sum_{n=1}^{\infty} n(F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)).$$

Dolayısıyla ile,

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t) \quad (6)$$

olur. Bu denkleme Laplace dönüşümü uygulanırsa,

$$\tilde{M}(\lambda) = \frac{\tilde{F}(\lambda)}{\lambda[1 - \tilde{F}(\lambda)]} \quad (7)$$

elde edilir. Burada, $\tilde{M}(\lambda)$ ve $\tilde{F}(\lambda)$ sırayla, $M(t)$ ve $F(t)$ fonksiyonların Laplace dönüşümüdür.

(7) denkleminde,

$$\tilde{F}(\lambda) = \frac{\lambda \tilde{M}(\lambda)}{1 + \tilde{M}(\lambda)} \quad (8)$$

elde edilir.

(7) ve (8) denklemleri birlikte, $M(t)$ ve $F(t)$ fonksiyonlarının birbirinden elde edilebileceğini göstermektedir. $M(t) = E(N(t))$ ' in kesin bir fonksiyon olduğuna ve rasgele ya da stokastik süreç olmadığına dikkat edilmeli. Yenileme yoğunluğu $m(t)\Delta t$; $(t, t + \Delta t)$ gibi çok küçük bir zaman aralığında bir veya daha fazla yenilemenin gerçekleşme olasılığını ifade eder. Bunu görmek için şunu gözlemleyelim

$$\begin{aligned} m(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{(t, t + \Delta t) \text{ aralığında bir veya daha fazla yenileme olması}\}}{\Delta t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{(t, t + \Delta t) \text{ aralığında } n. \text{ yenileme olması}\}}{\Delta t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f^{*n}(t)\Delta t + o(\Delta t)}{\Delta t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f^{*n}(t) \\ &= M'(t) \end{aligned} \quad (9)$$

Ayrıca, $m(t)$ fonksiyonu t civarındaki küçük bir aralıkta beklenen yenilemelerin ortalama sayısını belirtir. (9) Denkleminin her iki tarafına da Laplace dönüşümü alarak ve (7) kullanılarak kolayca görülür ki:

$$\tilde{m}(\lambda) = \frac{\tilde{f}(\lambda)}{1 - \tilde{f}(\lambda)} . \quad (10)$$

$M(t)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki verilen integral denklemi elde edilebilir:

$$M(t) = F(t) + \int_0^t M(t-x) dF(x) . \quad (11)$$

Yenileme fonksiyonu tarafından sağlanan yenileme denklemi (11) bir Volterra integral denklemidir.

Tanım 1.4.2 (Volterra integral) (Krasnov vd., 1976)

λ sayısal bir parametre, $f(x)$ ve $G(x, t)$ bilinen fonksiyonlar olsun. $\varphi(x)$ ise bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x G(x, t) \varphi(t) dt$$

denklemini Volterra lineer integral denklemi olarak adlandırılır.

Bu denklemin kapalı form çözümü, yenileme sürecinin üstel veya Gamma gibi dağılımları tarafından üretildiği çok az durum dışında mevcut değildir. Yenileme fonksiyonunun pratik uygulamalardaki önemi göz önünde bulundurularak, bunun için çeşitli yaklaşımlar önerilmiştir. Katkıda bulunmuş olan bazı yaklaşımları kısaca gözden geçirelim.

Güvenilirlik, kuyruk teorisi ve envanter teorisi gibi yenileme denklemleriyle karşılaşılan birçok uygulama vardır. Yenileme denkleminin çözümü için kapalı bir form ifadesi mevcut olmadığından, çoğu durumda sınırlar, sayısal ve asimptotik yöntemleri kullanılmıştır. Yenileme fonksiyonuna daha basit yaklaşımlar bulmak için çeşitli yönlerde araştırmalar yapılmıştır. Bunlar arasında Laplace dönüşüm yöntemleri Abate (1995), yaklaşık yöntemler (Bartholomew 1963; Deligonul 1985; Smeitink & Dekker 1990; Politis & Pitts, 1998), Pade' yaklaşımları (Garg & Kalagnanam, 1998) bulunmaktadır, kuvvet serisi açılımları (Smith & Leadbetter, 1963), Riemann-Stieltjes integral yöntemleri (Xie, 1989; Xie vd., 2003) ve sınırlar yöntemleri (Daley, 1976; Ayhan vd., 1999; Li & Luo, 2005; Ran vd., 2006, Omey & Mitov 2014).

1.5. Yenileme Fonksiyonu İçin Moment-Bazlı Yaklaşım

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreç olsun. Bu sürecin yenileme fonksiyonu, $[0, t]$ aralığında yenilemelerin ortalama sayısı olarak tanımlansın, $M(t) = E[N(t)]$ aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$M(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t), \quad t \geq 0. \quad (12)$$

Not edelim ki $F^{*n}(t)$ 'nin $[0, t]$ aralığında n veya daha fazla yenilemenin gerçekleşme olasılığı olmaktadır. İyi bilinmektedir ki $t \rightarrow \infty$ için

$$M(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2 - 2\mu_1^2}{2\mu_1^2} + o(1) \quad (13)$$

(13)'nin sağ tarafı asimptotik bir sonuçtur. Kambo vd., (2012) çalışmasında $F(t)$ dağılım fonksiyonunun kapalı formuna değil yalnızca ilk üç momentine dayalı basit bir yaklaşım önermiştir.

$\{X_n, n \geq 1\}$ bağımsız, negatif olmayan ve aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. $T_0 = 0, T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olsun. $\{N(t), t \geq 0\}$, yenilemelerin sayısını veren sayma süreci

$$N(t) = \sup \{n: T_n \leq t\}$$

gibi tanımlansın (Smith, 1959). Bu durumda Kambo'nun önerdiği yakalaşım aşağıdaki teorem ile verilsin.

Teorem 1.5.1 (Kambo vd., 2012)

X_1 rasgele değişkenin $\mu_n = E(X_n)$; $n = 1, 2, 3$ momentlerinin mevcut ve sonlu olduğunu varsayalım. $T_0 = 0, T_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ olsun.

Bu durumda, $M(t) = E(N(t))$ için aşağıdaki yaklaşım verilebilir:

$$M(t) \approx \frac{t}{\mu_1} + \frac{(1 - e^{s_0 t})(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_1^2}, \quad (14)$$

burada,

$$s_0 = \frac{-6\mu_1(\mu_2 - \mu_1^2)}{2\mu_1\mu_3 - 3\mu_2^2} \quad (15)$$

dir.

İspat:

Yenilenme yoğunluk fonksiyonu $m(t) = M'(t)$ integral denklemini sağlar:

$$m(t) = f(t) + \int_0^t m(t-x)f(x)dx. \quad (16)$$

(16)'nin her iki tarafına Laplace dönüşümü uyguladığımızda:

$$\tilde{m}(\lambda) = \frac{\tilde{f}(\lambda)}{1 - \tilde{f}(\lambda)} \quad (17)$$

elde ederiz.

$\tilde{m}(\lambda)$, bunu aşağıdaki gibi rasyonel bir fonksiyonla yaklaşık olarak hesaplarız:

$$\tilde{m}(\lambda) \approx \frac{A}{\lambda} + \frac{B}{\lambda - s_0} . \quad (18)$$

Ters Laplace dönüşüm uygulanıp integral alarak,

$$M(t) \approx At - \frac{B(1 - e^{s_0 t})}{s_0} . \quad (19)$$

A, B ve s_0 'yi elde etmek için , aşağıdaki şekilde ilerleriz.

Bir yoğunluk fonksiyonunun Laplace dönüşümü olan $\tilde{f}(\lambda)$ 'nin aşağıdaki kuvvet seri açılımını kabul ettiği bilinmektedir.

$$\tilde{f}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \lambda^n}{n!} \mu_n . \quad (20)$$

(20) ve (18)'i (17)'de kullanarak ve her iki taraftaki $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2$ katsayılarını karşılaştırarak

$$A = 1/\mu_1 ,$$

$$B = -s_0(\mu_2 - 2\mu_1^2)/2\mu_1^2 ,$$

$$s_0 = -6\mu_1(\mu_2 - \mu_1^2)/(2\mu_1\mu_3 - 3\mu_2^2)$$

elde edilir.

Böylece, yenileme fonksiyonu için

$$M(t) \approx \frac{t}{\mu_1} + \frac{(1 - e^{s_0 t})(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_1^2}$$

yaklaşımı elde edilir.

Not 1.5.1

Bu yaklaşım $s_0 < 0$ olduğunda geçerlidir. Bu koşul üstel, Gamma, Lognormal ve Weibull gibi birçok dağılım sınıfı için pratikte geçerlidir. Ayrıca, bu koşul bazı özel koşullarla birlikte kesilmiş (truncated) normal ve ters normal dağılım durumunda da geçerlidir (Kambo vd., 2012).

1.6. (s, S) Tipli Yarı-Markov Envanter Modeller

Envanter yönetimi öncelikle bir şirketin envanterinin planlanması ve kontrolü ile ilgilidir ve tedarik zinciri yönetiminin önemli bir bileşenidir. Tedarik zincirinin çeşitli noktalarındaki malzeme gereksinimlerinin tahmin edilmesi, gerekli malzeme miktarının belirlenmesi, sipariş frekansı ve güvenlik stok seviyeleri gibi konuları içermektedir. Ayrıca envanter görünürlüğü, envanter yönetimi, teslim süresi, envanter nakliye maliyetleri, envanter değerlemesi, gelecekteki envanter fiyatlarının tahmini, mevcut fiziksel alan, kalite yönetimi, iadeler ve kusurlu mallar ve talep tahminini de içermektedir. Genel maliyetlerin azaltılmasında ve hızlı yanıt hedeflerinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Etkili envanter yönetimi, sistem maliyetlerini en aza indirmek ve müşteri ihtiyaçlarını karşılamak için doğru envanterin doğru zamanda doğru yerde olmasını gerektirmektedir.

Stok kontrol problemlerinin temel amacı, her bir üründen ne kadar sipariş verileceğinin ve bu siparişlerin ne zaman verileceğinin belirlenmesiyle, toplam maliyeti minimum seviyeye indirmektir. Stok kontrolünün önemi birkaç açıdan incelenebilir:

- **Maliyet Optimizasyonu:** Stok kontrolü, fazla stok tutma veya stok eksikliği gibi durumların önlenmesine yardımcı olarak işletmenin maliyetlerini optimize etmeye yardımcı olur. Doğru miktarda stok tutarak, depo alanı maliyetlerinden kaçınılır ve talep karşılanırken fazla stoklama nedeniyle ortaya çıkan maliyetler azaltılır.
- **Müşteri Memnuniyeti:** Stok kontrolü, müşteri taleplerini zamanında karşılamaya ve doğru ürünleri sunmaya yardımcı olur. Bu, müşteri memnuniyetini artırır.
- **Verimlilik ve Operasyonel Süreklilik:** Doğru stok seviyelerinin korunması, üretim ve dağıtım süreçlerinin düzenli bir şekilde devam etmesini sağlar. Stok kontrolü, tedarik zinciri içindeki süreçlerin verimliliğini artırır ve operasyonel sürekliliği destekler.

- Finansal yönetim: Stok kontrolü, işletmenin finansal yönetimini etkiler. Fazla stok tutma, sermaye bağlayıcıdır ve likiditeyi azaltabilir. Aynı şekilde, stok eksikliği, satış kayıplarına ve müşteri memnuniyetsizliğine yol açabilir. Doğru stok kontrolü, finansal performansı iyileştirir ve nakit akışını optimize eder.

Matematiksel analiz, envanter sistemlerinin kontrolünün geliştirilmesinde çok önemli bir rol oynamaktadır. Matematik envanter problemlerinin çözümüne uygulandığında, incelenecek sistemin matematiksel olarak tanımlanması gerekir. Böyle bir tanımlama genellikle matematiksel model olarak adlandırılır. Bu durumda yapılacak işlem, ilgilenilen sistemin matematiksel bir modelini oluşturmak ve ardından modelin özelliklerini incelemektir. Gerçek dünyayı tam bir doğrulukla temsil etmek hiçbir zaman mümkün olmadığından, matematiksel bir model oluştururken belirli yaklaşımlar ve basitleştirmeler yapılmalıdır. Bunun birçok nedeni vardır. Bunlardan biri, gerçek dünyanın gerçekte neye benzediğini bulmanın mümkün olmamasıdır. Bir diğeri ise, gerçek dünyanın kesin bir modelinin matematiksel olarak çalışılmasının son derecede zor olabilmesidir. Son bir neden de doğru modellerin genellikle ekonomik gerekçelerle haklı gösterilememesidir. Basit yaklaşık modeller yeterince iyi sonuçlar verecektir, böylece kesin modelin karmaşıklığı veya sağladığı yararlar, onun uygulama maliyetine veya ekonomik faydalarına kıyasla yeterince karlı olmayabilir. (Hadley &Whitin, 1963).

Literatürde en çok kullanılan envanter modellerden biri bu çalışmanın ana konusu olan (s, S) tipli envanter modellerdir. Bu model yeniden sipariş seviyesi ve deponun maksimum kapasitesi ile karakterize edilir. Bu model ile ilgili temel kavram ve tanımlar aşağıdaki gibidir:

Yeniden sipariş seviyesi (s): Stok seviyesi bu değerin altına düştüğünde yeni bir sipariş verilir.

Deponun maksimum kapasitesi (S): Sipariş miktarı stok seviyesini S seviyesine çıkaracak şekilde belirlenir.

Depodaki stok seviyesinin önceden belirlenmiş bir minimum s seviyesinin altına düştüğü ana kadar her bir rasgele T_n anında sisteme rasgele miktarda talepler gelmektedir. Genel olarak, envanter sisteminin stokladığı ürün ya da ürünler için gelen talepler üzerinde hiçbir kontrolü olmadığını varsayacağız.

Envanter seviyesi s altına düştüğünde, müdahale edilir ve stok maksimum S seviyesinin üstüne çıkmayacak şekilde doldurulur. Klasik envanter modellerde, S seviyesine kadar

doldurulur. Bu model değiştirerek başka modeller elde edilir örneğin rasgele müdahaleli modellerde, (s, S) aralığında rasgele bir seviyeye doldurulur. Ayrıca müdahale, stok seviyesi s altına düştüğü anda yapılabilir ya da bir rasgele sreden sonra yapılabilir, bu son durumda gecikmeli model elde edilir.

Bu modelleri ifade etmek için yarı-Markov süreçler kullanılmaktadır. Markov özelliği, mevcut durum bilindiğinde, gelecekteki durumların geçmiş durumlardan bağımsız olduğunu ifade eder. Bu, mevcut durumun, sistemin gelecekteki evrimi hakkında gereken tüm bilgiyi içerdiği anlamına gelir. İlk olarak Markov sürecin tanımını aşağıdaki gibi verilsin.

Tanım 1.6.1 (Aliyev, 2010)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ bir olasılık uzayı olsun ve $T = \mathbb{R}^+$ olsun. $X(\omega, t): \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ bir stokastik süreç olsun. $X(t)$ süreci aşağıdaki koşul sağlıyorsa, ona Markov süreç denir.

$0 < t_1 < t_2 \dots < t_n, n \geq 1$ ve $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_{n-1}) \leq x_{n-1}\} \\ = P\{X(t_n) \leq x_n \mid X(t_{n-1}) \leq x_{n-1}\} \end{aligned}$$

Bir Markov süreçte kalma süreleri üstel dağılıma sahiptir. Genel durumlarda kalma sreler üstel olmayabilir. Literatürde bu tür süreçlere yarı-Markov süreçler denir. Dolaysı ile, yarı-Markov süreçleri, Markov süreçlerinin bir genellemesidir. Bu zellik, yarı-Markov süreçleri gerçek dünyadaki birçok karmaşık sistemi modellemek için uygundur. Örneğin, telekomünikasyon ağlarındaki veri trafiği analizi, finansal piyasaların modellenmesi, biyomedikal alanında hastalık ilerleyişinin incelenmesi ve mühendislikte güvenilirlik analizi gibi çeşitli uygulama alanlarında kullanılır (Grabski,2014; Kaalen & Nyberg, 2020; Qi vd.,2021).

Yarı-Markov süreçlerin yapısı, stok seviyelerinin zamanla nasıl değiştiğini ve stok yenileme işlemlerinin nasıl gerçekleştiğini modellemek için uygundur. Yarı-Markov süreçler, durum uzayı, geçiş olasılıkları ve geçiş süreleri ile karakterize edilir. (s, S) tipli envanter modellere nasıl uyguladığını aşağıdaki gibi açıklanabilir.

Durum uzayı (State space): Stok seviyelerini temsil eder.

Geçiş olasılıkları (Transition probabilities): Stok seviyeleri arasındaki geçiş olasılıklarını belirtir, burada talep rasgele değişkenlerin dağılımını temsil etmektedir.

Geçiş süreleri (Transition times): Ardışık talepler arasındaki geçen sürelerinin dağılımıdır.

Bu kısma kadar genel olarak (s, S) tipli yarı-Markov envanter modelleri ifade eden temel kavramlar ele alınmış ve bazı tanımlamalara yer verilmiş ve modelin temel çalışma prensibi anlatılmıştır. 1.7. kısmında model ile ilgili literatürde yapılmış çalışmalar verilecek daha sonra yapılan çalışmalar kısmında bu modelin matematiksel yapısı ve kurulumu ayrıntılı olarak verilecektir.

1.7. Literatür Araştırması

Yenilenme teorisinin uygulanabileceği bir modelin temel özelliği, yenilenme noktalarının bulunmasıdır. Yani, sürecin gelecekteki davranışının geçmişten bağımsız olduğu ve her yenilemede bu süreç olasılıksal olarak yeniden başlar. Bu fikir ilk olarak Lotka (1939), Frechet (1949) tarafından incelenmiştir. Yenileme teorisi üzerine bir literatür taraması yazarken üç zorluk ortaya çıkmaktadır. Öncelikle, modern matematik literatüründe yenileme teorisinin içeriği net bir şekilde sınırlandırılmamıştır. Bir yenileme sürecinin başlangıçtaki klasik şemasının çeşitli genellemeleri bizi rasgele yürüyüş süreçlerine, bağımsız artışlara sahip süreçlerin yörüngelerinin çeşitli özelliklerinin incelenmesine, sayma süreçlerine vb. götürür. İkinci olarak, Yenileme teorisi, genellikle stokastik süreçler ve bekleme zamanı analizi gibi konuları içeren bir matematiksel teoridir. Bu teoriyi açıklayan birçok akademik makale var. Ancak, bu teori, pratik uygulamalarda da yaygın olarak kullanılıyor ve bu uygulamalar üzerine yazılan makaleler, teorik makalelerin arasında kaybolabiliyor. Son olarak, yenileme teorisinin bir dereceye kadar aydınlatıldığı bir dizi kitap ve araştırma makalesi zaten mevcuttur. Yenileme teorisinin ilk gelişmelerin iyi bir özeti Smith'in (1958) anket makalesinde verilmiştir. Feller, 1948; 1949 yıllarında yayınladığı iki makalesinde yenileme teorisinin yöntemlerini tanım savunmuştur. Şimdi yenileme süreci olarak adlandırdığımız tekrarlayan olaylar (recurent events) terimini ortaya koymuştur. Daha sonra Feller'in sunduğu yöntemleri Takacs'in birçok makalesinde (1951; 1953; 1954; 1955; 1956) uygulama alanı bulmuştur. Cox'un 1962'de yayınlanan kitabını, Cox ve Lewis'in (1969) kitabında yenileme teorisinin bazı istatistiksel yönleri ele alınmıştır. İki ciltlik çalışmasında Feller (1971) ilk cildin 13. Bölümü ve ikinci cildin 6, 11 ve 14. Bölümleri yenileme teorisine ayrılmıştır.

Bu temel çalışmaların ardından, yenileme teorisinin önemli bir unsuru olan yenileme fonksiyonu üzerinde durmak gerekir. Yenileme fonksiyonu, yenileme teorisinde merkezi bir role sahiptir ve belirli bir süre içinde gerçekleşen yenileme olaylarının beklenen sayısını ifade eder. Yenileme fonksiyonunun hesaplanması ve analizi, sistemlerin performansını artırmak ve kaynakların verimli kullanılmasını sağlamak için önemli bilgiler sunar. Burada şunu belirtebiliriz ki çoğu uygulamada (pratik veya teorik) yenileme fonksiyonunun, $M(t)$ 'nin bilinmesi, hatta t 'nin büyük değerleri için asimptotik davranışının bilinmesi, sormamız gerek soruların çoğuna cevap verir.

Literatürde en basit ve en genel $M(t)$ ile ilgili sonuç, elementer yenileme teoremi (*elementary renewal theorem*) olarak adlandırılır.

Theorem 2.1.1.1 (Elementer yenileme teorimi) (Feller, 1971)

$X_i, i = 1, 2, 3 \dots$ negatif olmayan rasgele değişken dizisi olsun. X_i yenilemeler arasında geçen süresi olsun. $N(t), t > 0, [0, t]$ aralığında yenilemelerin sayısı gösteren yenileme süreci olsun. Bu durumda, $M(t) \equiv E(N(t))$ aşağıdaki asimptotik ifadesi sağlıyor:

$$\frac{M(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{\mu_1}, \quad t \rightarrow \infty,$$

burada, $0 < \mu_1 = E(X_i) < \infty$.

Elementer yenileme teoreminin ilk ciddi ispatı, Laplace integralleri için Tauber teoremini kullanan Feller'e (1941) ait gibi görünmektedir, daha sonra bir dizi ispat yapılmıştır. Ancak Doob'un (1948) ispatı, yalnızca olasılık teorisine dayanmasıyla yapılmıştır. (Smith, 1958).

Başka önemli teorem birinci yenileme teoremidir literatürde Blackwell teorimi olarak bilinmektedir. Uzun süredir çalışan bir yenileme sürecinde, α uzunluğundaki bir aralıkta yapılan yenilemelerin beklenen sayısının $\frac{\alpha}{\mu_1}$ dir.

Theorem 2.1.1.2 (Blackwell Teorimi) (Blackwell, 1948)

$X_i, i = 1, 2, 3 \dots$ negatif olmayan rasgele değişken dizisi olsun. X_i yenilemeler arasında geçen süresi olsun. $N(t), t \geq 0, [0, t]$ aralığında yenilemelerin sayısı gösteren yenileme süreci olsun. Ayrıca, $\mu_1 = E(X_i)$ olsun. $M(t) \equiv E(N(t))$ olmak üzere, $\forall \alpha > 0$ sabit için,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M(t + \alpha) - M(t) = \frac{\alpha}{\mu_1}.$$

Blackwell'in yenileme teoremi literatürde birinci yenileme teorimi olarak da bilinmektedir.

$Q(t)$ pozitif t 'nin negatif olmayan artmayan ve integrallenebilir bir fonksiyonu olsun. Bu durumda Blackwell teoreminin versiyonu olan anahtar yenileme teoremi aşağıdaki gibi verilmiştir.

Teorem 2.1.1.3 (Anahtar yenileme Teoremi) (Feller,1971)

$X_i, i = 1,2,3 \dots$ negatif olmayan rasgele değişken dizisi olsun. $N(t), t \geq 0$ yenileme süreci olsun. Ayrıca, $Q(t), (0, \infty)$ aralığında sonlu integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t-u) dM(u) = \frac{1}{\mu_1} \int_0^\infty Q(u) du$$

dir.

$\mu_1 = E(X_i^2)$ sonlu olduğunu varsayalım. Bu durumda $M(t)$ hakkında önemli bir bilgiye ulaşılabilir.

Teorem 2.1.1.4 (Feller 1971)

$N(t), t \geq 0$ bir yenileme süreci olsun. $X_i, i = 1,2,3 \dots$ rasgele değişkenleri $F(x)$ aritmetik olmayan dağılım fonksiyona μ_1, σ^2 sonlu beklenen değer ve varyansa sahip olsunlar. Bu durumda, $t \rightarrow \infty$ için

$$M(t) - \frac{1}{\mu_1} \rightarrow \frac{\mu_1^2 + \sigma^2}{\mu_1^2}$$

dir.

Sonuç olarak, X_i rasgele değişkenin μ_1, μ_2 sonlu ise, $t \rightarrow \infty$ için $M(t)$ yenileme fonksiyonu aşağıdaki asimptotik açılımı sağlar.

$$M(t) = \frac{t}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{\mu_1^2} + o(1).$$

$\{N(t), t \geq 0\}$ bir yenileme süreç olmak üzere, bu sürecin yenileme fonksiyonu her yerde sonludur. Başka deyişle, herhangi $t \geq 0$ ve $k \geq 0$ için $E(N^k(t)) < \infty$.

Yenileme teorisinin integral denkleminin yaklaşık çözümleri konusunda çalışan Bartholomew (1963), ilk araştırmacılardan biriydi. Yenileme yoğunluk fonksiyona bir yaklaşık ifade vermiştir. Deligonul (1985), Bartholomew'un yaklaşımını daha da geliştirerek, yüksek derece çarpıklık sahip yenileme yoğunluk fonksiyon için oldukça sağlam bir yöntem sunmuştur. Smeitink ve Dekker (1990), $F(t)$ dağılım fonksiyonunu aynı ortalama ve varyansa sahip başka bir dağılım fonksiyonuyla değiştirerek bir yaklaşım önermiştir. Politis ve Pitts (1998), bilinmeyen analitik formuna sahip bir yenileme yoğunluk fonksiyonu, kolayca hesaplanabilir ve aynı karakteristiklere sahip bir fonksiyonla değiştirerek yaklaşık formülü elde etmişlerdir.

Riemann-Stieltjes yöntemleri, yenileme denklemini sayısal Riemann-Stieltjes integral kullanarak değerlendirmeye dayanır. Xie, (1989), toplam aralığı alt aralıklara parçalayarak ve sayısal analizde orta nokta yöntemini kullanarak yenileme integrali çözmek için “programlaması kolay, oldukça anlaşılır ve iyi yakınsama özelliklerine sahip” bir yaklaşım tekniği önermiştir. Bu yöntem, özellikle olasılık yoğunluk fonksiyonunun tekil noktalara sahip olduğu durumlarda kullanışlıdır. Ayhan vd., (1999) ise Riemann-Stieltjes integralin alt ve üst toplamaları hesaplayarak yenileme fonksiyonuna sınırlar vermiştir. Xie vd., (2003), Riemann-Stieltjes integral yöntemi kullanılarak yenileme fonksiyonu için üst sınırlar ve hata terimlerini elde etmiştir. (Mitov & Omev, 2014) çalışmada, Laplace Stieltjes dönüşümlerinin açılımlarına dayalı olarak yenileme fonksiyon için yaklaşımlar elde etmek üzere yeni bir yöntem sunmuştur. Omev vd., (2018) çalışmada ise bu yaklaşımları iki değişkenli duruma genelleştirmiş ve düzenli değişen artışlara uygulamıştır.

Sınır yöntemleri, yenileme denklemlerinin çözümlerinin asimptotik davranışını ve sınırlarını inceler. Marshall (1973), en keskin sınırlar olan ve iterasyonlar tüm t değerleri için monoton olarak $M(t)$ yenileme fonksiyonuna yakınsayan lineer sınırlar dizisi tanımlamıştır. Daley (1976) klasik bir çalışmasında $M(t)$ yenileme fonksiyonunun $F(t)$ 'den bağımsız belirli bir C sabiti için $M(t) \leq \frac{t}{\mu_1} + C \frac{\mu_2}{\mu_1^2}$ sağladığını göstermiştir. Ran vd., (2006), basit bir yinelemeli prosedüre dayalı olarak yenileme fonksiyonunun analitik ve sayısal sınırlarını incelemiş ve bazı monotonluk özellikleri ve yaklaşık hata oranlarını çalışmışlardır. Yenileme fonksiyonunun sınırlarının uygulamadaki önemi nedeniyle, araştırmacılar her zaman literatürde yer alan sınırları geliştirmeye çalışmaktadırlar, örneğin (Politis & Koutras, 2006; Stathis & George 2022; Losidis, 2024; Stathis, 2023).

Diğer araştırma yönleri arasında Cui ve Xie (2003), Weibull dağılımını normal dağılımla ilk iki momenti eşitleyerek yaklaşık olarak ifade etmiştir. Pade yaklaşımı (Garg & Kalagnanam, 1998), kuvvet serisi genişlemeleri (Smith & Leadbetter, 1963) ve Laplace dönüşüm yöntemleri (Abate, 1995) bulunmaktadır.

Mevcut çok sayıda yaklaşım arasında hiçbiri, her dağılım fonksiyonu için kullanılabileceği anlamında “her durum için yaklaşım” olarak adlandırılamaz. Belirli bir yöntemin kullanımı, iyi bir yaklaşım sağlamak için çarpıklık, kurtosis, modlar ve tekil noktalar açısından dikkate alınan dağılım fonksiyonunun özelliklerine bağlıdır. Ayrıca, literatürdeki yöntemlerin her biri dağılım fonksiyonunun açık formunun önceden bilindiğini varsaymaktadır. Bu çok kısıtlayıcı bir varsayımdır çünkü birçok pratik durumda dağılım fonksiyonunun formunu bilinmeyebilir, ancak uygun varsayımlar yapılabilir. Tipik örnekler, güvenilirlik teorisindeki parçaların arıza dağılımı ve kuyruk teorisindeki varış ve hizmet dağılımları ve stok kontrol modellerde taleplerin dağılımları. Bu gibi durumlarda, X_i rasgele değişkeninin gerçekleşmesi hakkında veri toplanabilir ve X_i 'nin momentlerinin etkin tahmin edicileri hesaplanabilir.

Kambo vd., (2012) çalışmasında, yenileme fonksiyonu için moment-bazlı yaklaşım önermiştir. Bu yaklaşım X_i rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonu olan $F(t)$ 'nin fonksiyonel formuna değil, sadece $F(t)$ 'nin ilk üç momentine dayalı basit ve değerlendirmesi kolay bir yenileme fonksiyonu yaklaşımı önermiştir. Bu çalışmadan sonra, Arunachalam ve Calvache (2014) iki değişkenli yenileme fonksiyonu için moment-bazlı yaklaşım önermiştir.

Literatürde, (s, S) tipli yarı-Markov envanter modellerinin asimptotik olarak incelenmesi üzerine birçok çalışma mevcuttur. Bu konuda yapılmış en önemli çalışmalardan biri Nasirova vd., (1998) tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada (s, S) tipli yarı-Markov envanter modelinde stok seviyesini temsil eden stokastik sürecini incelenmiş ve sürecinin ergodik dağılımının kesin formülü elde edilmiştir. (Nasirova vd., 1998) çalışmasında elde edilen sonuçlar, bu modellerin çeşitli modifikasyonlarının analizini kolaylaştırmıştır. (Khaniyev & Atalay 2010) çalışmasında üçgensel müdahaleli bir model incelenmiş ve ergodik dağılım fonksiyonu için kesin formül ve asimptotik açılım elde edilmiş daha sonra zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır. Khaniyev ve Aksop (2011) tarafından yapılan çalışmada (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli genelleştirilmiş beta dağılımlı müdahale ile incelenmiştir.

Bekar vd., (2013) çalışmasında ise bu model Weibull müdahale ile incelenmiştir. Aliyev vd., (2016) tarafından yapılan çalışmada, (s, S) tipli envanter modeli genel müdahale ile ele alınmış ve sürecinin ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için asimptotik açılımlar elde edilmiştir.

Bahsedilen yarı-Markov envanter modelleri üzerine yapılan klasik çalışmaların çoğunda, talep rasgele değişkenlerinin herhangi bir mertebeden momentlere sahip olasılık dağılımından geldiği varsayılmıştır. Envanter kontrol modellerinde yapılan bazı çalışmalar, ağır kuyruklu talep dağılımlarının var olduğuna dair gerçek hayattan örnekler sunmuştur. Bu nedenle, ağır kuyruklu talep miktarlarına sahip stok kontrol modellerinin teorik olarak incelenmesi ve etkilerinin analiz edilmesi önemli bir çalışma alanı olmuştur. Ağır kuyruklu dağılıma sahip yarı-Markov envanter modellerinin incelenmesine yönelik ilk çalışmalar şu şekildedir: (s, S) tipli envanter modeli, Aliyev, (2016; 2018), Kesemen vd., (2016), Kamışlık vd., (2018; 2019) gibi birçok önemli çalışmada ağır kuyruklu talep altında da incelenmiştir. Aliyev (2016) ve Kesemen vd., (2016), sırası ile klasik (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli ve kesikli müdahaleli modelini alt-üstel talepler altında incelemiştir. Ayrıca, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Kamışlık vd., (2018) çalışmasında talep rasgele değişkenleri sonsuz varyanslı ağır kuyruklu dağılımların düzenli değişen alt sınıfından herhangi bir dağılım fonksiyonuna sahip olduğunda $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının momentlerinin asimptotik davranışını araştırılmıştır. Kamışlık vd., (2018) çalışmasında talep rasgele değişkenleri, ağır kuyruklu dağılımların $L \cap D$ sınıfları ile incelemiş ve sürecin ergodik dağılımı için asimptotik açılım elde edilmiştir. Ayrıca, Kamışlık vd., (2019) tarafından yapılan yayında (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli, sonsuz varyanslı ağır kuyruklu dağılımların genel sınıfı ile incelenmiştir.

Khaniyev vd., (2013) (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli simetrik üçgensel dağılıma sahip müdahale ile incelemiştir ve bazı zayıf koşullar altında asimptotik açılımlar elde edilmiştir. Ancak simetrik bir dağılımın varsayıldığı durumlarda, mod dağılımının orta noktası ile çakışır ve her ikisi de $0,5(s + S)$ değerine eşittir, burada s ve S sırasıyla stok kontrolünü ve maksimum stok seviyesini temsil eder. Ancak pratik durumlarda stok seviyesinin tam olarak bu orta noktada tutulması gerçekçi değildir.

Ayrıca, Hanalioglu ve Khaniyev (2018) tarafından yapılan çalışmada (s, S) tipli yarı-Markov stokastik model asimetric üçgensel dağılımlı müdahale ve gecikme ile incelenmiştir. Daha sonra, bazı zayıf koşullar altında bu modeli ifade eden sürecinin ergodikliği ispatlanmış ve ergodik dağılımın momentleri için asimptotik açılımlar elde

edilmiştir. Hanalioglu vd., (2018) tarafından yapılan çalışmada ise, normal dağılımlı müdahale kullanılarak ödüllü yenileme süreci araştırılmış ve sonuç olarak, ergodik dağılımın n . dereceden momentleri için asimptotik açılımlar elde edilmiştir. (Aliyev vd., 2020) çalışmasında normal dağılıma sahip müdahaleli model için zayıf yakınsama teoremi ispatlanmıştır.

Kamışlık vd., (2023) makalesinde Kambo vd., (2012)' nin sonuçları kullanılarak, klasik (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli incelenmiş ve sürecin bazı karakteristikleri için moment-bazlı yaklaşımları elde edilmiştir.



2. YAPILAN ÇALIŞMALAR

2.1. Klasik (s, S) Tipli Yarı-Markov Envanter Model İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar

Bu bölümde, klasik (s, S) tipli yarı-Markov envanter model ele alınacak. Modeli karakterize eden $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının n . mertebeden momentleri için moment-bazlı yaklaşımlar elde edilecektir. Bu sonuçlara ulaşmak için Kambo vd., (2012) tarafından önerilen yenileme fonksiyonunun yaklaşık formülü kullanılacaktır. Kambo çalışmasına göre talep rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonun kapalı formunu değil yalnızca ilk üç momentleri bilinmesi gerekmektedir.

En uygun envanter yönetimi stratejisini geliştirmeyi planlayan bir şirket düşünün. Bu durumda, $X(t)$ stokastik süreci rasgele t zamanında şirketin deposundaki stok seviyesini temsil etmektedir. Bu deponun maksimum depolama kapasitesini ifade etmek için S kullanılsın ve başlangıç stok seviyesinin $t = 0$ zamanında maksimum stok seviyesinde olsun, $X(0) \equiv S$, ve s stok kontrol seviyesini temsil etmektedir, yeniden sipariş verme düzeyi de denilir.

Klasik (s, S) tipli stokastik kontrol modelini tanımlamak için öncelikle aşağıdaki notasyonları tanıtağız:

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$	: Olasılık uzayı,
$X(t)$	: t anındaki stok seviyesi,
S	: Maksimum stok seviyesi,
$\{\eta_n\}_{n \geq 1}$	: $T_i, i = 0, 1, \dots, n$ rasgele zamanındaki gelen talep miktarları temsil eden rasgele değişkenler,
$F(x)$	: η_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,
$\{\xi_n\}_{n \geq 1}$	: Ardışık iki talep arasındaki geçen zamanın rasgele değişkenleri,
$\Phi(t)$	: ξ_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu,
s	: Stok kontrol seviyesi,
μ_n	: η_1 rasgele değişkenin n . momentleri,
τ_1	: Stok seviyesinin s seviyesinin altına düştüğü n . an,
$U_\eta(t)$	: Talep miktarları temsil eden rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonu.

Klasik (s, S) tipli stok kontrol modelinde, sistem her periyodun başında maksimum kapasitede olduğu varsayılmaktadır. Ayrıca, stok seviyesinin her T_i $i = 1, 2, \dots$ zamanında η_i miktarında azaldığı düşünülür. ξ_i ise ardışık iki talep arasındaki geçen süreyi gösteren rasgele değişkendir. Bu durumda, $T_0 = 0$ varsayılarak,

$$T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$$

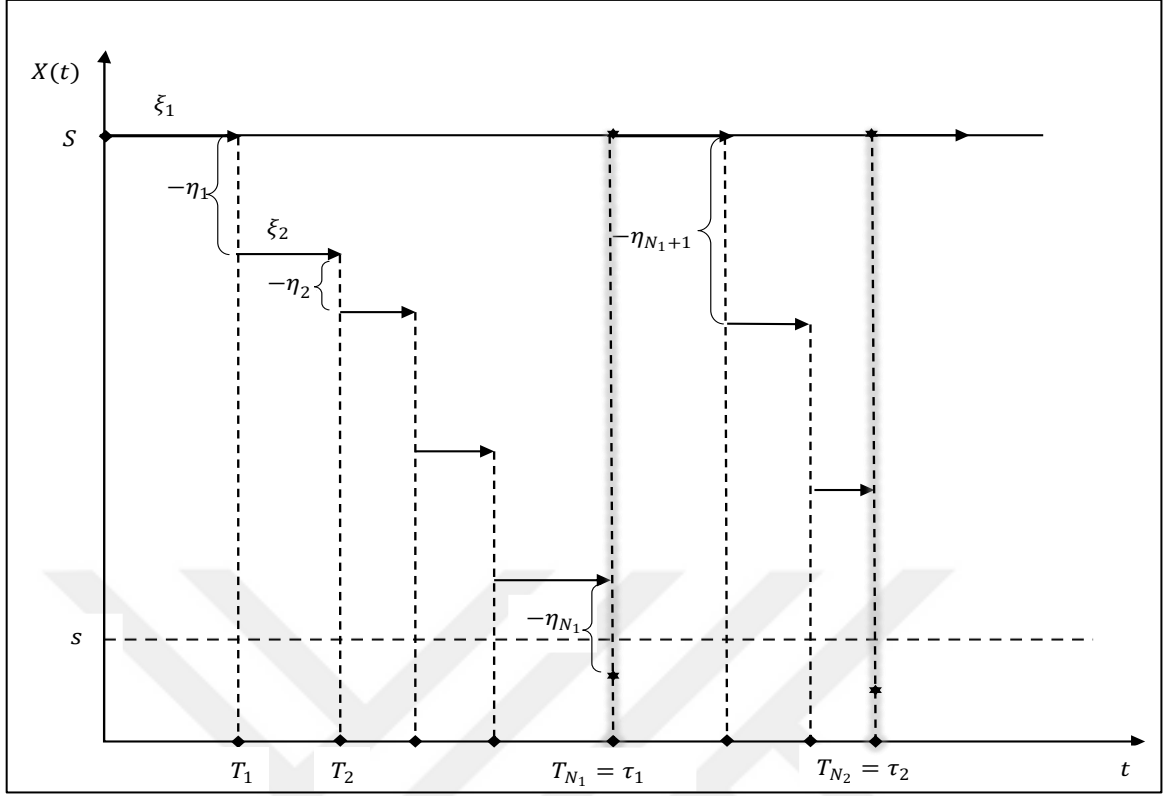
biçiminde olacaktır. Rasgele bir T_i zamanında stok miktarı aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv X(T_1) = S - \eta_1 \\ X_2 &\equiv X(T_2) = S - (\eta_1 + \eta_2) \\ &\vdots \\ X_n &\equiv X(T_n) = S - \sum_{i=1}^n \eta_i \end{aligned}$$

Bu değişim, stok seviyesi τ_1 olarak gösterilen rasgele zamanda kontrol seviyesi s altına düşene kadar devam eder. Başka bir deyişle, τ_1 stok seviyesinin kontrol seviyesi s altına düştüğü ilk andır. Depodaki stok seviyesi, kontrol seviyesinin altına düştüğü anda, beklemeden depo maksimum stok seviyesine kadar doldurulur. Böylece birinci periyot tamamlanmış olur. İkinci periyot, yeniden S seviyesinden başlayarak, birinci periyoda olduğu gibi devam eder.

Bu modelden ihtiyaca göre başka modeller modifiye edilebilir. Örneğin, stok miktarı seviyesi düştüğünde, maksimum seviyeye S kadar doldurmak yerine bir rasgele miktarla doldurulabilir veya stok miktarı stok kontrol seviyesinin altına düştüğünde stokun hemen doldurulması yerine, belirli ya da rasgele bir süre bekledikten sonra doldurulabilir. Bu gecikmeli model, (Hanalioğlu & Khaniyev, 2018) çalışmasında incelenmiş ve ergodik dağılımın n . mertebeden momentleri için asimptotik sonuçlar elde edilmiştir.

Klasik (s, S) tipli envanter modelini ifade eden sürecin realizasyonu aşağıdaki gibi verilmektedir.



Şekil 7. Klasik (s, S) tipli yarı-Markov envanter modelin bir realizasyonu

2.1.1. $X(t)$ Sürecinin Matematiksel Kuruluşu

$\{(\xi_n, \eta_n)\}, n \geq 1 ; (\Omega, \mathcal{F}, P)$ olasılık uzayında tanımlanan bağımsız, aynı dağılıma sahip ve pozitif değerli rasgele değişkenlerin bir vektörü olsun. Talep rasgele değişkenlerinin yenileme dizisi

$$Y_n: n \geq 1, \quad Y_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$$

şeklinde tanımlansın.

$N_0 = 0$ olsun, $\{N_n\}$ tam değerli rasgele değişken dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_{n+1} = \min\{k \geq N_n + 1 : S - (Y_k - Y_{N_n}) < s\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Ayrıca,

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_n = T_{N_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$v(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}.$$

Bu durumda, depodaki stok miktarının değişimini gösteren $X(t)$ süreci

$$X(t) = S - (Y_{v(t)} - Y_{N_k}), \quad \tau_k < t < \tau_{k+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (21)$$

biçiminde tanımlanır.

Önceki çalışmalarda, klasik (s, S) tipli stokastik kontrol modelinde talep rasgele değişkenlerinin dağılımlarının ya belirli parametrelerle bilindiği ya da ağır kuyruklu veya $\Gamma(g)$ gibi belirli bir dağılım kategorisine ait olduğunu varsayılmaktadır. Ancak bu varsayım, modeli bazı gerçek dünya problemlerine uygularken çok kısıtlayıcıdır. Dağılım fonksiyonlarının bilinmediği ya da bu dağılımlar tarafından üretilen yenileme fonksiyonunun yapısının uygulamak için yeterince pratik olmadığı birçok durum vardır. Bu çalışmanın amacı, talep rasgele değişkenlerinin sadece ilk üç momentinin bilindiği ve hesaplanabildiği durumda, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu ve n . dereceden ergodik momentleri için basit moment-bazlı yaklaşımlar önermektir.

2.1.2. $X(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımı ve Ergodik Dağılımının Momentleri için Kesin Formüller

Ergodiklik kavramı, olasılık teorisi ve stokastik süreçlerde temel bir kavramdır. Bir ergodik süreç, uzun bir süre boyunca yani $t \rightarrow \infty$ iken gözlemlenen sürecin istatistiksel özelliklerinin, ortalama, varyans ve daha yüksek dereceden momentler gibi, sürecin tek bir periyodun istatistiksel özelliklerine eşit olduğu bir süreçtir.

Nasirova vd., (1998) tarafından yapılan çalışmasında, sürecin ergodik olup olmadığını ve ergodik dağılımının kesin formüllü belirli koşullar altında aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.1.2.1 (Nasirova vd., 1998)

$\{\xi_n\}, \{\eta_n\}$, $n \geq 1$, başlangıç rasgele değişkenler aşağıdaki şartlar sağlasın.

- 1) $E(\xi_1) < \infty$,
- 2) $E(\eta_1^2) < \infty$,
- 3) $\eta_k, k \geq 1$ aritmetik olmayan rasgele değişkenlerdir.

Yukarıdaki belirtilen şartlar altında $X(t)$ süreci ergodiktir.

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu olan $Q_X(x)$ 'nin kesin formülü aşağıdaki gibi yazılır.

$$Q_X(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq x\} = 1 - \frac{U_\eta(S - x)}{U_\eta(S - s)}, \quad s \leq x \leq S. \quad (22)$$

Burada, $U_\eta(t)$, talep rasgele değişkenler olan $\{\eta_n\}, n \geq 1$ tarafından üretilen yenileme fonksiyondur.

Not 2.1.2.1 Teorem 2.1.2.1'deki şartlara ek olarak, $\mu_k = E(\eta^k)$, $k = 1, 2, 3$ olan, η_1 talep rasgele değişkenin momentler mevcut ve sonlu olsun. $X(t)$ sürecinin, $W_\beta(t)$ olarak tanımlanan standart bir biçimi tanımlayalım:

$$W_\beta(t) \equiv \frac{1}{\beta}(X(t) - s), \quad \beta \equiv S - s. \quad (23)$$

$W_\beta(t)$ Sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun kesin hali aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Q_{W_\beta}(x) = 1 - \frac{U_\eta(\beta(1 - x))}{U_\eta(\beta)}, \quad \beta \equiv S - s, x \in (0, 1). \quad (24)$$

Burada, $U_\eta(\beta)$ talep rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonudur.

İspat:

$W_\beta(t)$ Sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunu

$$Q_{W_\beta}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(W_\beta(t) \leq x)$$

biçiminde tanımlanır. Dolayısı ile,

$$\begin{aligned} Q_{W_\beta}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\left(\frac{1}{\beta}(X(t) - s) \leq x\right) \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} P(X(t) \leq \beta x + s) \\ &= 1 - \frac{U_\eta(S - \beta x - s)}{U_\eta(S - s)}, \quad s < \beta x + s < S \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$Q_{W_\beta}(x) = 1 - \frac{U_\eta(\beta(1-x))}{U_\eta(\beta)}, \quad x \in (0,1)$$

eşitliği doğrudur.

$X(t)$ sürecinin bir diğer temel özelliği de ergodik dağılım fonksiyonunun n . dereceden momentleridir. Notasyon kolaylığı açısından $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n . dereceden momentleri $E(X^n)$ ile gösterilecektir. Bu durumda $E(X^n) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} E(X^n(t))$, $n \geq 1$ dir. Ek olarak $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olan $\tilde{X}(t)$ süreci aşağıdaki gibi verilsin.

$$\tilde{X}(t) \equiv X(t) - s. \quad (25)$$

Khaniyev vd., (2013)' da (25) ile verilen sürecin n . dereceden ergodik momentleri için kesin formüller aşağıdaki teoremdedir.

Teorem 2.1.2.2 (Khaniyev vd., 2013)

Teorem 2.1.2.1'deki şartları sağlansın. Eğer, $\tilde{X}(t) \equiv X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının n . mertebeden momentleri mevcut ve sonlu ise, $E(\tilde{X}^n)$ kesin formu aşağıdaki formda yazılabilir.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(\tilde{X}^n(t)) \equiv E(\tilde{X}^n) = \frac{n U_\eta^n(\beta)}{U_\eta(\beta)}, \quad n \geq 1. \quad (26)$$

Burada,

$$U_\eta^n(\beta) = \beta^{n-1} * U_\eta(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} U_\eta(t) dt, \quad n \geq 1. \quad (27)$$

$U_\eta^n(\beta)$, β^{n-1} ve $U_\eta(\beta)$ fonksiyonların konvolüsyon çarpımıdır.

Formül (22), (26) ve (27) dikkate alındığında, $\{\eta_n\}$, $n \geq 1$ talep rasgele değişkenlerinin yenileme fonksiyonunun hem ergodik dağılım fonksiyonunun hem de ergodik dağılımın momentlerinin hesaplanmasında çok önemli olduğu görülmektedir.

Not edelim ki, eğer

$$Y_n = \sum_{i=1}^n \eta_i$$

biçiminde tanımlanırsa, talep rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme süreci aşağıdaki gibidir (Feller, 1971).

$$N_\eta(z) = \inf\{n \geq 1, Y_n > z\}.$$

Yenileme fonksiyonu; $[0, z]$ aralığında gelen talep sayısının beklenen değeri olarak tanımlanır. Dolaysı ile, $U_\eta(z) = E(N_\eta(z))$, Feller (1971) tarafından aşağıdaki gibi ifade edilmiştir:

$$U_\eta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(z), n \geq 1.$$

Burada $F^{*n}(z)$, $F(z)$ fonksiyonun n . konvolüsyon çarpımı, ve

$$F^{*0}(z) = 1, F(z) = P(\eta_n \leq z)$$

için

$$F^{*n}(z) = \int_0^z F^{*(n-1)}(z-u) dF(u), n = 2, 3 \dots$$

biçiminde tanımlanır.

$N_\eta(z) = \inf\{n \geq 1, Y_n > z\}$ ve $N(z) = \sup\{n : Y_n < z\}$ arasındaki ilişki aşağıdaki gibi verilir:

$$N_\eta(z) = N(z) + 1.$$

Dolaysı ile, Kambo vd., (2012) tarafından önerilen sonuçlara dayanarak, $U_\eta(z)$ yenileme fonksiyonu için aşağıdaki yaklaşık ifade verilebilir:

$$\begin{aligned}
U_{\eta}(z) &= E[N(z) + 1] \\
&= E[N(z)] + 1 \\
&= U(z) + 1
\end{aligned}$$

Dolaysı ile,

$$\begin{aligned}
U_{\eta}(z) &\approx \frac{z}{\mu_1} + \frac{(1 - e^{s_0 z})(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_1^2} + 1 \\
&\approx \frac{z}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{e^{s_0 z}(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_1^2}.
\end{aligned}$$

Böylece, Kambo'nun yaklaşımı Feller'in yaklaşımına göre uyumlanmış halı

$$U_{\eta}(z) \approx \frac{z}{\mu_1} + c_1 - c_2 e^{s_0 z}, \quad (28)$$

gibi elde edilir. Burada,

$$s_0 = -6 \mu_1 (\mu_2 - \mu_1^2) / (2\mu_1 \mu_3 - 3\mu_2^2), \quad (29)$$

$$c_1 = \mu_2 / 2\mu_1^2, \quad c_2 = (\mu_2 - \mu_1^2) / 2\mu_1^2. \quad (30)$$

dır.

Belirli temel dağılımlar haricinde, yenileme fonksiyonunun kapalı formunun mevcut olmaması nedeniyle, çeşitli yaklaşımlar kullanılarak çok sayıda çalışma yapılmıştır. Bu çalışmalar asimptotik açılımların ve sınırların türetilmesiyle sonuçlanmaktadır. Bu çalışmada, (21)'deki $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu ve ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için yaklaşımlar elde etmek için Kambo vd., (2012) tarafından yenileme fonksiyonu için önerilen yaklaşımını kullanılacaktır. Bu yenileme fonksiyonu talep rasgele değişkenlerin $F(t)$ olan dağılım fonksiyonunun fonksiyonel formuna değil yalnızca ilk üç momentine dayalı daha basit bir yaklaşım sunmaktadır.

2.1.3. $W_\beta(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımı için Moment-Bazlı Yaklaşımlar

Bu alt bölümün temel amacı, bölüm 2.1.1'de mevcut literatürden elde edilen sonuçları kullanarak, $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış hali olan $W_\beta(t)$ sürecinin ergodik dağılımı için moment-bazlı yaklaşımlar elde etmektir. Elde edilen temel sonuç aşağıdaki teorem ile verilebilir.

Teorem 2.1.3.1

Teorem 2.1.2.1'deki şartlar sağlansın. Ek olarak η_1 rasgele değişkenin ilk üç momenti mevcut ve sonlu olsun ve $s_0 < 0$ olsun. Bu durumda, her $x \in (0,1)$ için, $W_\beta(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu olan $Q_{W_\beta}(x)$ için aşağıdaki yaklaşım doğrudur:

$$Q_{W_\beta}(x) \approx \frac{\beta x}{\beta + c_3} + \frac{c_4 e^{s_0 \beta (1-x)}}{\beta + c_3} - \frac{c_4 e^{s_0 \beta}}{\beta + c_3}, \quad \beta \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Burada,

$$s_0 = -6 \mu_1 (\mu_2 - \mu_1^2) / (2\mu_1 \mu_3 - 3\mu_2^2),$$

$$c_3 = \mu_2 / 2\mu_1, \quad c_4 = (\mu_2 - 2\mu_1^2) / 2\mu_1$$

dır.

İspat:

Teorem 2.1.2.1 ve Teorem 1.5.1'deki şartların altında, kolayca görülür ki $\beta \rightarrow \infty$ için

$$U_\eta(\beta) \approx \frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{e^{s_0 \beta} (\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_1^2}. \quad (32)$$

İşlemleri kolaylaştırmak amacı ile c_1 ve c_2 sabitleri aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$c_1 = \mu_2 / 2\mu_1^2, \quad c_2 = (\mu_2 - 2\mu_1^2) / 2\mu_1^2.$$

Böylece,

$$U_\eta(\beta) \approx \frac{\beta}{\mu_1} + c_1 - c_2 e^{s_0 \beta} \quad (33)$$

elde edilir. Taylor seri açılım kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{U_\eta(\beta)} &\approx \frac{1}{\frac{\beta}{\mu_1} + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} - \frac{e^{s_0\beta}(\mu_2 - 2\mu_1^2)}{2\mu_1^2}} \\
&\approx \frac{1}{\frac{\beta}{\mu_1} \left(1 + \frac{c_3}{\beta} - \frac{c_4 e^{s_0\beta}}{\beta}\right)} \\
&\approx \frac{1}{\frac{\beta}{\mu_1} \left(1 + \frac{c_3}{\beta}\right) \left(1 - \frac{c_4 e^{s_0\beta}}{\beta}\right)} \\
&\approx \frac{1}{\left(\frac{\beta + c_3}{\mu_1}\right) \left(1 - \frac{c_4 e^{s_0\beta}}{\beta + c_3}\right)} \\
&\approx \frac{\mu_1}{\beta + c_3} + \frac{\mu_1 c_4 e^{s_0\beta}}{(\beta + c_3)^2}
\end{aligned} \tag{34}$$

biçiminde elde edilir.

Diğer taraftan, (33) denkleminde

$$U_\eta(\beta(1-x)) \approx \frac{\beta(1-x)}{\mu_1} + c_1 - c_2 e^{s_0\beta(1-x)} \tag{35}$$

elde edilir.

$\beta \rightarrow \infty$ için (34) ve (35) ifadeleri (24) denkleminde yerine koyularak,

$$\begin{aligned}
Q_{W_\beta}(x) &= 1 - \frac{U_\eta(\beta(1-x))}{U_\eta(\beta)} \\
&\approx \left\{ \frac{\beta x}{\mu_1} - c_2 e^{s_0\beta} + c_2 e^{s_0\beta(1-x)} \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\mu_1}{\beta + c_3} + \frac{\mu_1 c_4 e^{s_0\beta}}{(\beta + c_3)^2} \right\} \\
&\approx \frac{\beta x}{\beta + c_3} + \frac{c_4 e^{s_0\beta(1-x)}}{\beta + c_3} - \frac{c_4 e^{s_0\beta}}{\beta + c_3}, \quad \beta \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece bazı özel koşullar altında, Teorem 2.1.3.1'in sonucu olarak $Q_{W_\beta}(x)$, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonu için bir yaklaşım eldi edilmiştir. Başka önemli bir faktör $Q_{W_\beta}(x)$ 'nin yakınsaklığıdır. Önceki çalışmalar, bu modelin yakınsamasını etkileyen en önemli faktörün müdahalenin dağılım fonksiyonu olduğunu göstermiştir. Bu kısımda ele alınan klasik modelde ise müdahale etkisinin olmadığı varsayılmaktadır. Bu durumda, ergodik dağılımın $x \in (0,1)$ için her zaman düzgün dağılıma yakınsayacağı beklenmektedir.

Sonuç 2.1.3.1

Teorem 2.1.3.1' in şartları sağlansın. Bu durumda, $x \in (0,1)$ için

$$Q_{W_\beta}(x) \rightarrow x, \quad \beta \equiv S - s \rightarrow \infty$$

dır.

İspat:

$\beta \rightarrow \infty$ için, (31) yaklaşık ifadesi elde edilmiştir. Kolayca görülür ki,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\beta x}{\beta + c_3} = x.$$

Diğer taraftan, $s_0 < 0$ ve $x \in (0,1)$ olmak üzere,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\frac{c_4 e^{s_0 \beta (1-x)}}{\beta + c_3} - \frac{c_4 e^{s_0 \beta}}{\beta + c_3} \right) = 0$$

dir. Böylece,

$$Q_{W_\beta}(x) \rightarrow x, \quad \beta \rightarrow \infty$$

elde edilir.

Sonuç 2.1.3.2

Teorem 2.1.3.1'in koşulları sağlansın. $W_\beta(t) \equiv \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ eşitliğinden,

$X(t) \equiv \beta W_\beta(t) + s$ elde edildiğine göre $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı yeterince büyük $\beta \equiv S - s$ için, $[s, S]$ aralığında düzgün dağılıma yakınsar. Yani,

$$Q_X(x) \rightarrow \frac{x-s}{S-s}, \quad x \in [s, S]$$

dir.

İspat:

Sonuç 2.1.3.1, ergodik dağılımın tanımını ve (24) eşitliğini kullanılarak,

$$\begin{aligned} Q_X(x) &= P[X(t) \leq x], \\ &= P[\beta W_\beta(t) + s \leq x], \\ &= P\left[W_\beta(t) \leq \frac{1}{\beta}(x-s)\right], \quad x \in [s, S], \end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q_X(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} Q_{W_\beta}\left(\frac{1}{\beta}(x-s)\right),$$

başka deyişle,

$$Q_X(x) \rightarrow \frac{x-s}{S-s}, \quad x \in [s, S].$$

elde edilir.

2.1.4. $\tilde{X}(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımın Momentleri İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar

Bu alt bölümün amacı, $\tilde{X}(t)$ sürecin ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için yaklaşık formüller elde etmektir. n . dereceden momentler için yaklaşımlar elde etmek için ilk olarak aşağıdaki yardımcı teoremleri verelim.

Yardımcı Teorem 2.1.4.1

$n \geq 1$ ve $s_0 < 0$ için :

$$H_n(\beta) = \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} e^{s_0 t} dt \quad (36)$$

biçiminde tanımlansın. Dolaysı ile $H_n(\beta)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi verilebilir:

$$H_n(\beta) = -(n-1)! D_n(\beta) + \frac{1}{s_0^n} e^{s_0 \beta}, \quad (37)$$

burada,

$$D_n(\beta) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\beta^{n-r-1}}{(n-r-1)! s_0^{r+1}}. \quad (38)$$

İspat:

$h(\beta) = \beta^{n-1}$ ve $g(\beta) = e^{s_0 \beta}$ tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} H_n(\beta) &= \int_0^\beta (\beta - t)^{n-1} e^{s_0 t} dt \\ &= h(\beta) * g(\beta) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\tilde{H}_n(\beta) = \tilde{h}(\beta) \tilde{g}(\beta) \quad (39)$$

elde edilir.

Burada, $\tilde{f}$ bir f fonksiyonun Laplace dönüşümü göstermektedir. Dolaysı ile,

$$\begin{aligned} \tilde{h}(\lambda) &= \int_0^\infty x^{n-1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda^n} \int_0^\infty z^{n-1} e^{-z} dz \\ &= \frac{\Gamma(n)}{\lambda^n} \\ &= \frac{(n-1)!}{\lambda^n}. \end{aligned} \quad (40)$$

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\lambda) &= \int_0^\infty e^{s_0 x} e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{1}{\lambda - s_0} \int_0^\infty e^{-u} du \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\Gamma(1)}{\lambda - s_0} \\
&= \frac{1}{\lambda - s_0}
\end{aligned} \tag{41}$$

Not edelim ki, $\Gamma(x)$ Gamma fonksiyonu denir ve aşağıdaki integral ile tanımlanır:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

(40) ve (41) ifadeleri, denklem (39)'de yerine koyularak,

$$\tilde{H}_n(\lambda) = \frac{(n-1)!}{\lambda^n(\lambda - s_0)} \tag{42}$$

bulunur. Ters laplace dönüşümü elde etmek için, $\tilde{H}_n(\lambda)$ ifadesini uygun terimlere ayırırız.

$$\tilde{H}_n(\lambda) = (n-1)! \left(- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{s_0^{r+1}} \frac{1}{\lambda^{n-r}} + \frac{1}{s_0^n} \frac{1}{\lambda - s_0} \right). \tag{43}$$

(43) ifadesine ters Laplace dönüşümü uygulanıp, $H_n(\beta)$ aşağıdaki gibi bulunur:

$$H_n(\beta) = -(n-1)! D_n(\beta) + \frac{1}{s_0^n} e^{s_0 \beta}.$$

Şimdi $U_\eta^n(\beta) = \beta^{n-1} * U_\eta(\beta)$ fonksiyonu için yaklaşım formülü bulalım.

Yardımcı Teorem 2.1.4.2

Teorem 2.1.2.1 ve Teorem 1.5.1'deki koşullar sağlansın. Bu durumda, $\beta \rightarrow \infty$ için aşağıdaki denklem doğrudur.

$$U_\eta^n(\beta) \approx \frac{\beta^{n+1}}{\mu_1(n+1)n} + \frac{c_1 \beta^n}{n} + c_2(n-1)! D_n(\beta) - \frac{c_2}{s_0^n} e^{s_0 \beta}, \tag{44}$$

burada, $c_1 = \mu_2/2\mu_1^2$, $c_2 = c_1 - 1$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
 U_{\eta}^n(\beta) &= \beta^{n-1} * U_{\eta}(\beta) \\
 &= \int_0^{\beta} (\beta - t)^{n-1} U_{\eta}(t) dt \\
 &\approx \int_0^{\beta} (\beta - t)^{n-1} \left(\frac{t}{\mu_1} + c_1 - c_2 e^{s_0 t} \right) dt \\
 &\approx \frac{1}{\mu_1} \int_0^{\beta} t (\beta - t)^{n-1} dt + c_1 \int_0^{\beta} (\beta - t)^{n-1} dt \\
 &\quad - c_2 \int_0^{\beta} (\beta - t)^{n-1} e^{s_0 t} dt.
 \end{aligned}$$

Bu denklemin sağ taraftaki birinci ve ikinci integrallerine uygun değişken değiştirme yaparak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$\begin{aligned}
 U_{\eta}^n(\beta) &\approx \frac{\beta^{n+1}}{\mu_1} \int_0^1 x(1-x)^{n-1} dx + c_1 \beta^n \int_0^1 (1-x)^{n-1} dx \\
 &\quad - c_2 \int_0^{\beta} (\beta - t)^{n-1} e^{s_0 t} dt.
 \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
 U_{\eta}^n(\beta) &\approx \frac{1}{\mu_1} \beta^{n+1} B(2, n) + c_1 \beta^n B(1, n) + c_2 (n-1)! D_n(\beta) - \frac{c_2}{s_0^n} e^{s_0 \beta} \\
 &\approx \frac{1}{\mu_1 (n+1)n} \beta^{n+1} + c_1 \beta^n \frac{1}{n} + c_2 (n-1)! D_n(\beta) - \frac{c_2}{s_0^n} e^{s_0 \beta}, \quad \beta \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

burada, $B(x, y)$ beta fonksiyonudur ve aşağıdaki integral ile tanımlanır :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

$\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için yaklaşım aşağıdaki teoremlerle verilir:

Teorem 2.1.4.1

Teorem 2.1.2.1 ve Teorem 1.5.1'deki koşullar sağlansın. Bu durumda $E(\tilde{X}^n)$ ile gösterilen $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının n . mertebeden momentleri için $\beta \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki yaklaşım elde edilir:

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{\beta^{n+1}}{(\beta + c_3)(n + 1)} + \frac{c_3\beta^n}{\beta + c_3} + \frac{c_4 n!}{\beta + c_3} A_n(\beta), \quad (45)$$

burada,

$$A_n(\beta) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\beta^{n-r-1}}{(n-r-1)!}.$$

İspat:

(26) ve (27) ifadeleri, sürecinin ergodik dağılım fonksiyonun n . dereceden momentlerin kesin formülleridir. $1/U_\eta(\beta)$ 'nin yaklaşık formülü denklem (34) ile verilmiştir. $U_\eta^n(\beta)$ 'nin yaklaşımı Yardımcı Teorem 2.1.4.2 ile verilmiştir. Dolayısı ile,

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}^n) &= \frac{nU_\eta^n(\beta)}{U_\eta(\beta)} \approx \left\{ \frac{\beta^{n+1}}{\mu_1(n+1)} + c_1\beta^n + c_2n! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\beta^{n-r-1}}{(n-r-1)! s_0^{r+1}} - \frac{nc_2}{s_0^n} e^{s_0\beta} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\mu_1}{\beta + c_3} + \frac{\mu_1 c_4 e^{s_0\beta}}{(\beta + c_3)^2} \right\} \\ &\approx \frac{\beta^{n+1}}{\mu_1(n+1)} \frac{\mu_1}{\beta + c_3} + \frac{\mu_1 c_1 \beta^n}{\beta + c_3} \\ &\quad + \frac{\mu_1 c_2}{\beta + c_3} n! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{\beta^{n-r-1}}{(n-r-1)! s_0^{r+1}} \\ &\approx \frac{\beta^{n+1}}{(\beta + c_3)(n+1)} + \frac{c_3\beta^n}{\beta + c_3} + \frac{c_4 n!}{\beta + c_3} A_n(\beta), \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.1.4.1' in aşağıdaki sonucuna ulaşılır.

Sonuç 2.1.4.1

Teorem 2.1.4.1' in şartları sağlansın. Bu durumda, $\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun ilk dört momentini için yaklaşık ifadeler aşağıdaki gibidir:

$$E(\tilde{X}) \approx \frac{\beta^2}{2(\beta + c_3)} + \frac{c_3\beta}{\beta + c_3} + \frac{c_4}{\beta + c_3} , \quad (46)$$

$$E(\tilde{X}^2) \approx \frac{\beta^3}{3(\beta + c_3)} + \frac{c_3\beta^2}{\beta + c_3} + \frac{2c_4\beta}{\beta + c_3} + \frac{2c_4}{\beta + c_3} , \quad (47)$$

$$E(\tilde{X}^3) \approx \frac{\beta^4}{4(\beta + c_3)} + \frac{c_3\beta^3}{\beta + c_3} + \frac{3c_4\beta^2}{\beta + c_3} + \frac{6c_4\beta}{\beta + c_3} + \frac{6c_4}{\beta + c_3} , \quad (48)$$

$$E(\tilde{X}^4) \approx \frac{\beta^5}{5(\beta + c_3)} + \frac{c_3\beta^4}{\beta + c_3} + \frac{4c_4\beta^3}{\beta + c_3} + \frac{12c_4\beta^2}{\beta + c_3} + \frac{24c_4\beta}{\beta + c_3} + \frac{24c_4}{\beta + c_3} . \quad (49)$$

2.1.5. $X(t)$ Sürecinin Ergodik Dağılımının Beklenen Değeri İçin Yaklaşık Formüllerin Karşılaştırılması

Bu bölümde, Kambo'nun yaklaşımına göre elde edilen yaklaşık formüllerin, literatürde mevcut olan (genellikle Feller yaklaşımı olarak bilinir) formüllerine göre daha etkin olduğunu göstermek için özel bir örneği ele alacağız.

η_n talep rasgele değişkeninin $\lambda > 0$ parametresi ile ikinci dereceden Erlang dağılımına sahip olduğunu varsayalım. Başka bir deyişle, η_n rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde verilmiş olsun:

$$f_\eta(x) \equiv \lambda^2 x e^{-\lambda x} , \quad x \geq 0, \quad \lambda > 0.$$

Bu durumda, $\{\eta_n, n = 1, 2, \dots\}$ dizisinin ürettiği yenileme sürecinin beklenen değerinin (yenileme fonksiyonu) kesin şekli aşağıdaki gibi verilebilir:

$$U_\eta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_\eta^{*n}(x) = \frac{\lambda x}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{4} e^{-2\lambda x} . \quad (50)$$

Diğer taraftan, $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri aşağıdaki şekildedir:

$$E(\tilde{X}) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\tilde{X}(t)) = \frac{U_{\eta}^{(1)}(\beta)}{U_{\eta}(\beta)}. \quad (51)$$

Burada, $U_{\eta}^{(1)}(\beta) = 1 * U_{\eta}(\beta) \equiv \int_0^{\infty} U_{\eta}(x) dx$ dir. $U_{\eta}(x)$ fonksiyonu integralleyerek, kolayca görmek mümkündür ki,

$$U_{\eta}^{(1)}(\beta) = \frac{1}{4}\beta^2 + \frac{3}{4}\beta + \frac{1}{8\lambda} + \frac{1}{8\lambda}e^{-2\lambda\beta}. \quad (52)$$

Dolaysı ile, Erlang $(2, \lambda)$ durumunda $\tilde{X}(t)$ sürecinin beklenen değerinin kesin şekli denklem (51)'de verilmiştir. Denklem (51)'deki $U_{\eta}(x)$ ve $U_{\eta}^{(1)}(\beta)$ fonksiyonlarının kesin şekli sırasıyla denklem (50) ve denklem (52) ile verilmiştir.

Diğer taraftan, Kambo yöntemine göre, $\tilde{X}(t) \equiv X(t) - s$ ergodik dağılımının beklenen değeri için bulduğumuz yaklaşık formül aşağıdaki gibidir:

$$E(\tilde{X}) = \frac{\beta^2}{2(\beta + c_3)} + \frac{c_3\beta}{\beta + c_3} + \frac{c_4}{\beta + c_3}. \quad (53)$$

Ele aldığımız Erlang $(2, \lambda)$ durumunda,

$$c_3 = \frac{3}{2\lambda}, c_4 = -\frac{1}{2\lambda}$$

elde edilir.

Kambo anlamındaki yaklaşık formülü vurgulamak için denklem (53)'teki notasyonu $EK(\tilde{X})$ ile gösterelim ve onun biçimini aşağıdaki şekilde verelim

$$EK(\tilde{X}) = \frac{\beta^2}{2\left(\beta + \frac{3}{2\lambda}\right)} + \frac{\frac{3}{2\lambda}\beta}{\beta + \frac{3}{2\lambda}} - \frac{\frac{1}{2\lambda}}{\beta + \frac{3}{2\lambda}}. \quad (54)$$

Böylece, denklem (54) ile Kambo anlamındaki yaklaşık formülü ifade etmiş oluruz.

Ayrıca, literatürde Feller anlamında yaklaşık formülü olarak bilinen formülü aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$EF(\tilde{X}) = \frac{\beta}{2} + \frac{3}{4\lambda}. \quad (55)$$

Burada, $EF(\tilde{X})$ Feller'in anlamında $\tilde{X}(t) \equiv X(t) - s$ sürecinin beklenen değeri için yaklaşık formülü ifade etmektedir.

Bu özel örneği ele almamızdaki temel amaç, Kambo'nun yaklaşık formülü Feller'in yaklaşık formülüne kıyasla kesin formül $E(\tilde{X})$ ile daha yakın olduğunu göstermektir. Bu yakınlığı ölçmek için aşağıdaki notasyonları sunalım:

$$\Delta_K \equiv |E(\tilde{X}) - EK(\tilde{X})|, \quad \Delta_F \equiv |E(\tilde{X}) - EF(\tilde{X})|,$$

$$\delta_K \equiv \frac{\Delta_K}{E(\tilde{X})} 100\%, \quad \delta_F \equiv \frac{\Delta_F}{E(\tilde{X})} 100\%,$$

$$AP_K = 100 - \delta_K, \quad AP_F = 100 - \delta_F.$$

Burada, Δ_K ve Δ_F ile, Kambo ve Feller anlamındaki yaklaşık formüllerin sırasıyla mutlak hatası; δ_K ve δ_F ile nispi hatalar; AP_K ve AP_F ile ise yaklaşık formüllerin kesin ifadeye uyum yüzdesi gösterilmiştir.

Aşağıdaki tabloda bu parametrelerin değerleri $\beta = 1, 2, \dots, 11$ ve $\lambda = 1$ olduğunda elde edilmiştir.

Tablo 1. $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının beklenen değeri için yaklaşık formüllerin karşılaştırılması

β	$E(\tilde{X})$	$EF(\tilde{X})$	$EK(\tilde{X})$	Δ_F	Δ_K	δ_F (%)	δ_K (%)	AP_F (%)	AP_K (%)
1	0.799	1.250	0.600	0.450	0.199	56.28	24.98	43.716	75.016
2	1.483	1.750	1.286	0.267	0.198	17.99	13.32	82.015	86.683
3	2.053	2.250	1.889	0.197	0.164	9.588	8.000	90.412	92.000
4	2.591	2.750	2.455	0.159	0.136	6.152	5.253	93.848	94.747
5	3.115	3.250	3.000	0.135	0.115	4.321	3.704	95.679	96.296
6	3.633	3.750	3.533	0.117	0.100	3.211	2.752	96.789	97.248
7	4.147	4.250	4.059	0.103	0.088	2.482	2.128	97.518	97.872
8	4.658	4.750	4.579	0.092	0.079	1.977	1.695	98.023	98.305
9	5.167	5.250	5.095	0.083	0.071	1.613	1.383	98.387	98.618
10	5.674	5.750	5.609	0.076	0.065	1.341	1.145	98.659	98.851
11	6.180	6.250	6.120	0.070	0.060	1.133	0.971	98.867	99.029

Tablo 1’den görüldüğü gibi, $\beta = 1$ olduğunda, Feller’in anlamında yaklaşık formülün uyum yüzdesi %43,72 iken, Kambo’nun yaklaşımı için uyum yüzdesi % 75.02 ’dir. Ayrıca, $\beta = 2$ olduğunda, bu yüzdeler sırasıyla Feller’e göre %82,02 ve Kambo’ya göre %86,68 olur. Başka bir deyişle, β ’nın nispeten küçük değerlerinde elde ettiğimiz Kambo’nun yaklaşık formülü Feller’in yaklaşık formülünden daha etkilidir. β değeri arttıkça her iki yaklaşımın doğruluk yüzdesi birbirine yaklaşmaktadır, ama Kambo’nun yaklaşımı daha etkin olduğunu görmek mümkündür. Sonuç olarak Kambo ’nun yaklaşımına göre türetilen yaklaşık formüllerin kullanımının daha tercih edilebilir olduğu sonucuna varılabilir.

2.2. Asimetrik Üçgensel Müdahaleli (s, S) Tipli Yarı-Markov Envanter Model İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar

Bu bölümde, (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeline, asimetrik üçgensel dağılımlı müdahale ekleyerek, model ödüllü yenileme süreci $X(t)$ 'nin değiştirmesi ile ifade edilmiştir. Daha sonra, talep rasgele değişkenlerinin sadece ilk üç momenti kullanılarak, ele alınan sürecinin ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için moment-bazlı yaklaşımlar elde edilmiştir. Ayrıca, bu bölümde incelenen problem daha iyi anlaşılabilmesi için, η_1 talep rasgele değişkeninin $\lambda = 1$ parametresi ile ikinci dereceden Erlang dağılımına sahip olduğu durumda özel örnekler verilmiştir.

Bölüm 2.1'de verildiği ve sistemi oluşturan elemanlara ek olarak, kesikli müdahaleyi temsil eden rasgele değişkenler $\{\zeta_n\}$, $n \geq 1$ ile gösterilsin.

$\{\zeta_n\}_{n \geq 1}$: Kesikli müdahaleyi temsil eden rasgele değişkenlerdir.

$\pi(z)$: Kesikli müdahaleyi temsil eden rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyondur.

Bu sistemin çalışma prensibi aşağıdaki gibi.

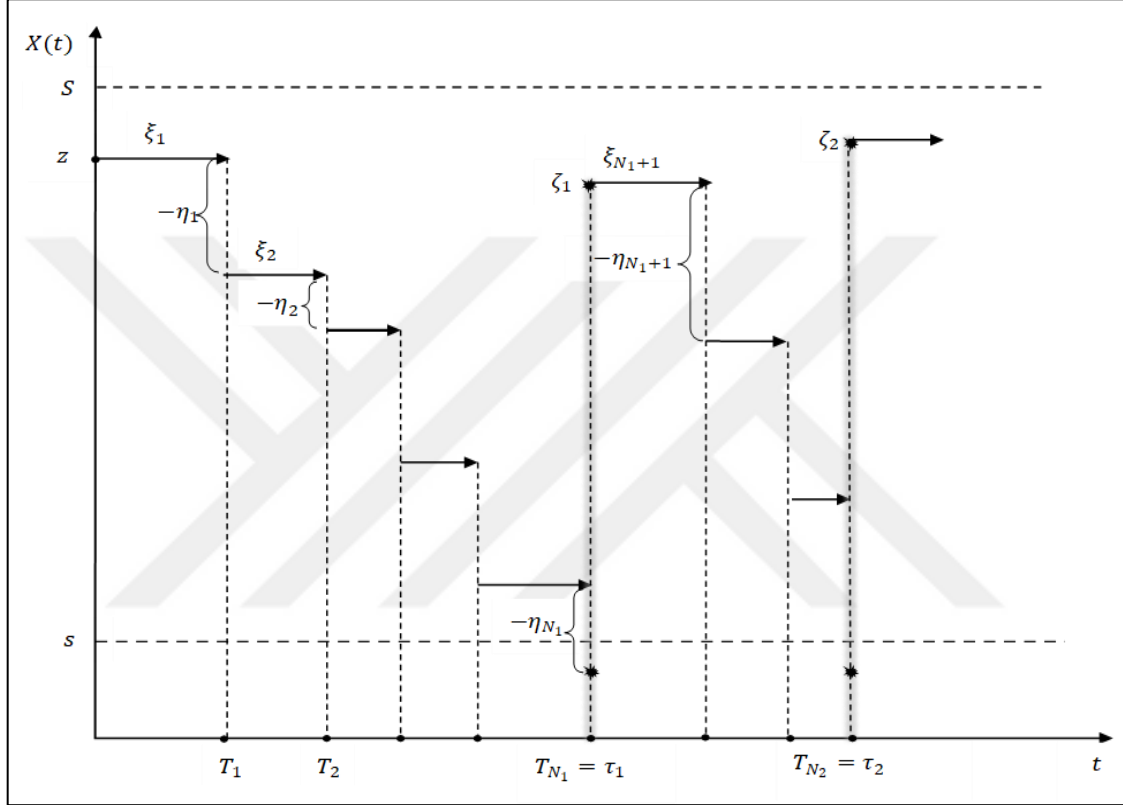
Depoda stok seviyesi başlangıç anında $t = 0$, $X(0) \equiv z \in (s, S)$, $0 < s < S < \infty$ kabul edilir. Depodaki stok seviyesinin önceden belirlenmiş seviyesi s 'nin altına düştüğü ana kadar her bir rasgele T_n , $n = 1, 2, 3 \dots$ anında sisteme rasgele η_n , $n = 1, 2, 3 \dots$ miktarında talepler gelmektedir. Bu durumda, stok seviyesi $\{-\eta_i\}$, $i \geq 1$ 'e göre azalmaktadır. Dolayısıyla, stok seviyesinin değişimi aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} X_1 &\equiv X(T_1) = z - \eta_1, \\ X_2 &\equiv X(T_2) = z - (\eta_1 + \eta_2), \\ &\vdots \\ X_n &\equiv X(T_n) = z - \sum_{i=1}^n \eta_i. \end{aligned}$$

Stok seviyesindeki bu değişim önceden belirlenmiş s stok kontrol seviyesinin altına ilk düştüğü an olan τ_1 anına kadar devam etmektedir. τ_1 anda sistem deponun $[s, S]$ aralığında rasgele ζ_1 seviyesine kadar stokla doldurulur. Böylece ilk periyot tamamlanmış olur. İkinci periyot ζ_1 seviyesinden başlayarak benzer bir şekilde devam eder. Stok seviyesi ikinci kez kontrol seviyesi s 'nin altına düştüğünde, stok seviyesi hemen bir önceki periyoda benzer şekilde rasgele ζ_2 bir seviyesine getirilir ve bu şekilde devam eder. Burada $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \dots$

rasgele değişkenleri kesikli müdahaleli ifade eder ve ergodik bir Markov zinciri oluşturur. Bu rasgele değişkenler bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğu kabul edilir.

$X(t)$ literatürde, *kesikli müdahaleli ödüllü yenileme süreci* olarak bilinen geniş bir stokastik süreç sınıfına aittir. Ele alınan sürecin bir realizasyonu Şekil 8. ile aşağıdaki gibi gösterilebilir.



Şekil 8. Kesikli müdahaleli yarı-Markov envanter modelin bir realizasyonu

2.2.1. Sürecin Matematiksel Kuruluşu

$\{\xi_n, \eta_n, \zeta_n\}$, $n \geq 1$ $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ olasılık uzayında tanımlanmış bağımsız aynı dağılıma sahip rasgele değişkenler dizisi olsun. Sistemde iki ardışık talep miktarı arasında geçen süreleri ifade eden rasgele değişkenleri ξ_n bağımsız aynı dağılıma sahip, talep miktarlarını ifade eden η_n rasgele değişkenleri bağımsız aynı dağılımlı ve müdahaleli ifade eden ζ_n rasgele değişkenleri de bağımsız aynı dağılımlıdır. Bunlara ek olarak ξ_n , η_n ve ζ_n rasgele değişkenleri de birbirinden bağımsızdır. ξ_n ve η_n rasgele değişkenleri pozitif değerler alırken, ζ_n rasgele değişkenleri $[s, S]$ aralığında değerler alır.

Yukarıdaki verilen rasgele değişkenlerin dağılım fonksiyonları aşağıdaki gibidir.

$$\Phi(t) = P\{\xi_n \leq t\}, \quad n \geq 1,$$

$$F(x) = P\{\eta_n \leq x\}, \quad n \geq 1,$$

$$\pi(z) = P\{\zeta_n \leq z\}, \quad n \geq 1.$$

$\{T_n\}$ ve $\{S_n\}$ yenileme dizileri ξ_n , η_n rasgele değişkenler kullanılarak aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_0 = S_0 = 0, \quad T_n = \sum_{i=1}^n \xi_i, \quad S_n = \sum_{i=1}^n \eta_i, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Diğer taraftan, tam değerli rasgele değişken dizisi olan $\{N_n\}$, $n = 1, 2, 3 \dots$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$N_0 = 0, \quad N_1 \equiv N_1(z) = \inf\{k \geq 1 : z - S_k < s\}, \quad z \in [s, S],$$

burada, N_1 , τ_1 anına kadar gelen talep sayısıdır. Dolayısı ile,

$$N_{n+1} \equiv N_{n+1}(\zeta_n) = \inf\{k \geq N_n + 1 : \zeta_n - (S_k - S_{N_n}) < s\}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

elde edilir. Burada $\inf(\phi) = \infty$ olduğu varsayılmıştır. Ayrıca, τ_n n . kez stok seviyesi s seviyesinin geçtiği andır ve aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\begin{aligned} \tau_0 &= 0, \quad \tau_1 = \tau_1(z) = T_{N_1(z)} = \sum_{i=1}^{N_1(z)} \xi_i \\ \tau_n &= T_{N_n(z)} = \sum_{i=1}^{N_n(z)} \xi_i, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Ayrıca, $v(t) = \max\{n \geq 0 : T_n \leq t\}$, $t > 0$ olsun. Böylece, t rasgele anında depodaki stok miktarını temsil eden $X(t)$ stokastik süreci

$$X(t) = \zeta_n - (S_{v(t)} - S_{N_n}), \quad \tau_n \leq t < \tau_{n+1}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (56)$$

biçiminde tanımlanır.

Markov zincirini oluşturan ζ_n rasgele değişkenlerin dağılımının seçme kriterleri Khaniyev vd., (2013) çalışmasında aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

- Sistemin yeniden başlatma seviyeleri ζ_n 'nin kontrol seviyesi s 'ye yakın olmaması istenir. Başka bir deyişle, ζ_n 'nin düşük olasılıkla s 'ye yakın değerler alması istenir. ζ_n , s 'ye yakın değerler aldığı anda sistem çok kısa sürede tekrar yenilenir ve bu da sipariş sayısı artacağı için istenmez, bu da sipariş maliyetinin artmasına neden olur.
- Bazı önemli durumlarda, ζ_n yeniden başlatma durumlarının da maksimum stok seviyesine S yakın olmaması istenir. Yani, ζ_n 'nin düşük olasılıkla S 'ye yakın değerler alması da istenir çünkü depodaki stok seviyesinin yüksek olması zaman içinde elde tutulan stok miktarını artırır ve bu da gereksiz yüksek envanter maliyetinin artmasına sebep olur. Bu nedenle ζ_n 'nin düşük olasılıkla s ve S 'ye yakın değerler alması ve değerlerini $[s, S]$ aralığının içinden alması istenir.

Asimetrik üçgensel dağılım yukarıda belirtilen her iki kriteri de sağlayan bir dağılım türüdür. Dolayısıyla, bu çalışmada ζ_n dizisi $[s, S]$ aralığında durağan bir dağılım olarak asimetrik üçgensel dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır.

2.2.2. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Kesin Formüller

Yukarıdaki verilen $X(t)$ süreç literatürde kesikli müdahaleli yarı-Markov süreçler olarak bilinen bir sınıfa dahildir. Bu sınıf için genel ergodik teorem Smith'in anahtar yenileme teoremi ile verilmiştir (Smith,1954). Genel ergodik teoreme göre, $X(t)$ sürecinin ergodik olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekmektedir.

- 1) Monoton artan rasgele zaman dizisi olan $\{\tau_n\}, n \geq 1$, $X(t)$ sürecinin bu zamanlardaki değerleri, yani $X(\tau_n)$ değerleri, ergodik bir Markov zinciri oluşturmalıdır.
- 2) Ayrıca, $\tau_{n+1} - \tau_n, n \geq 1$ farklarının beklenen değerleri, sonlu olmalıdır, yani $E(\tau_{n+1} - \tau_n) < \infty$ olmalıdır.

Bu çalışmada ele alınan ve (56) ile ifadesi verilen süre $X(t)$ sürecin ergodikliği (Khaniyev & Atalay ,2010) çalışmada ispatlanmış ve aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

Teorem 2.2.2.1 (Khaniyev & Atalay, 2010)

$\{\xi_n\}, \{\eta_n\}, n \geq 1$, başlangıç rasgele değişkenler aşağıdaki şartlar sağlasın.

- 1) $0 < E(\xi_1) < \infty$,
- 2) $0 < E(\eta_1)$,
- 3) $\{\eta_n\}, n \geq 1$ aritmetik olmayan rasgele değişkenlerdir,
- 4) Markov zincirini oluşturan $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin $\pi(z)$ dağılım fonksiyonu $[s, S]$ aralığında sürekli dağılıma sahiptir, ve

$$P[\zeta_1 = s] = P[\zeta_1 = S] = 0.$$

Yukarıdaki belirtilen şartlar altında $X(t)$ süreci ergodiktir ve ergodik dağılım fonksiyonu $Q_X(x)$ gösterilsin. $Q_X(x) \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq x\}, s \leq x \leq S$ olsun.

$Q_X(x)$ fonksiyonun kesin formülü aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$Q_X(x) = 1 - \frac{\int_x^S U_\eta(z - x) d\pi(z)}{\int_s^S U_\eta(z - s) d\pi(z)}, \quad x \in [s, S]. \quad (57)$$

Burada, $U_\eta(x)$, gelen talepleri ifade eden $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyondur.

Not 2.2.2.1

Bu kısımda, müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisinin (s, m, S) parametrelili asimetrik üçgensel dağılıma sahip olduğu varsayılmıştır.

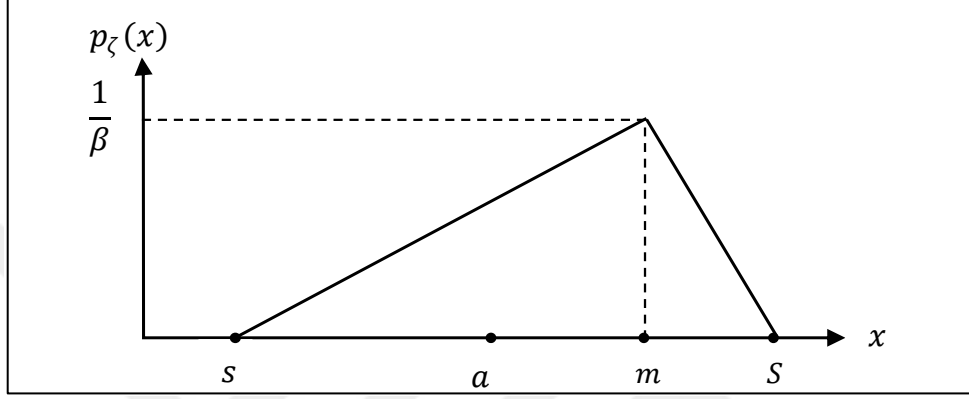
Burada $s \leq m \leq S$ ve m rasgele değişkenin modudur (frekansı en büyük olan değer). ζ_1 rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$\pi(z) = P\{\zeta_1 \leq z\} = \begin{cases} \frac{(z - s)^2}{(m - s)(S - s)} & s \leq z \leq m \\ 1 - \frac{(S - z)^2}{(S - m)(S - s)} & m < z \leq S \end{cases}.$$

$p_\zeta(x)$ fonksiyonu ζ_1 rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun, bu durumda

$$p_{\zeta}(x) = \begin{cases} \frac{(x-s)}{\beta(m-s)} & s \leq x \leq m \\ \frac{(S-x)}{\beta(S-m)} & m \leq x \leq S \end{cases}$$

dır. Aşağıdaki grafik, ζ_1 değişkeninin $p_{\zeta}(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu göstermektedir.



Şekil 9. ζ_1 değişkeninin $p_{\zeta}(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonunu

Ayrıca, $X(t)$ sürecinin standartlaştırılmış halı olan $W_{\beta}(t) \equiv \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$, $\beta \equiv \frac{S-s}{2}$ sürecinin ergodik dağılımını $Q_{W_{\beta}}(v)$ ile gösterilsin. $Q_{W_{\beta}}(v)$ 'nin kesin formülü (Hanalioglu & Khaniyev 2018) çalışmasında aşağıdaki Teorem 2.2.2.2 ile verilmiştir.

Teorem 2.2.2.2 (Hanalioglu & Khaniyev 2018)

Teorem 2.2.2.1'in koşullara ek olarak kesikli müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler $[s, S]$ aralığında asimetrik üçgensel dağılıma sahip olsun. Bu durumda, $W_{\beta}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının kesin formülü aşağıdaki gibi verilir.

$$Q_{W_{\beta}}(v) = 1 - \frac{\int_{\beta v}^{2\beta} U_{\eta}(x - \beta v) \tilde{p}(x) dx}{\int_0^{2\beta} U_{\eta}(x) \tilde{p}(x) dx}, \quad v \in [0, 2]. \quad (58)$$

Burada, $\tilde{p}(x)$, $\tilde{\zeta}_1 \equiv \zeta_1 - s$ rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonudur. ζ_1 rasgele değişkeni (s, m, S) parametrelili üçgensel dağılıma sahipken $\tilde{\zeta}_1$ rasgele değişken $(0, \beta(1 + \gamma), 2\beta)$ parametrelili üçgensel dağılıma sahip olacaktır. Burada,

$$\gamma \equiv \frac{m-a}{\beta} \in (-1; 1), \quad a = \frac{S+s}{2} \quad (59)$$

sırası ile asimetri katsayısı ve orta nokta ifade etmektedir. $\tilde{p}(x)$ aşağıdaki gibidir:

$$\tilde{p}(x) = \begin{cases} \frac{x}{\beta^2(1+\gamma)}, & 0 \leq x \leq \beta(1+\gamma) \\ \frac{2\beta-x}{\beta^2(1-\gamma)}, & \beta(1+\gamma) < x \leq 2\beta \end{cases}. \quad (60)$$

İspat:

Bilinmektedir ki,

$$\begin{aligned} Q_{W_\beta}(v) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P[W_\beta(t) \leq v], \quad v \in [0, 2] \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} P[X(t) \leq \beta v + s] \\ &= Q_X(\beta v + s) \\ &= 1 - \frac{\int_{\beta v + s}^S U_\eta(x - \beta v - s) d\pi(z)}{\int_s^S U_\eta(x) d\pi(z)}, \quad v \in [0, 2]. \end{aligned}$$

$\tilde{\zeta}_1 \equiv \zeta_1 - s$ olduğunu varsayalım. $\tilde{\zeta}_1$ rasgele değişkenin dağılım fonksiyonu

$$\begin{aligned} P(\tilde{\zeta}_1 \leq x) &= P(\zeta_1 - s \leq x) \\ &= P(\zeta_1 \leq x + s) \\ &= \pi(x + s) \end{aligned}$$

gibi elde edilir. Dolaysı ile,

$$P\{\tilde{\zeta}_1 \leq x\} = \begin{cases} \frac{(x+s-s)^2}{(m-s)(S-s)} & s \leq x+s \leq m \\ 1 - \frac{(S-x-s)^2}{(S-m)(S-s)} & m < x+s \leq S \end{cases}$$

elde edilir.

Kolayca görülür ki $\tilde{\zeta}_1$ rasgele değişken $(0, m-s, S-s)$ parametrelili dağılıma sahiptir. Böylece, denklem (59) ile verilen notasyonlar göz önünde bulundurularak, $\tilde{\zeta}_1$ rasgele

değişkenin $(0, \beta(1 + \gamma), 2\beta)$ parametrelili dağılıma sahip olduğu görülür. Böylece, ζ_1 rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu $\tilde{p}(x) = d\pi(x + s)$, denklem (60) ile verilebilir. Dolaysı ile,

$$Q_{W_\beta}(v) = 1 - \frac{\int_{\beta v}^{2\beta} U_\eta(x - \beta v) \tilde{p}(x) dx}{\int_0^{2\beta} U_\eta(x) \tilde{p}(x) dx}, \quad v \in [0, 2]$$

biçiminde elde edilir.

2.2.3. Sürecin Ergodik Dağılım Fonksiyonu İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar

Bu bölümde, verilen asimetrik üçgensel müdahaleli (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli temsil eden stokastik sürecinin ergodik dağılımı için moment bazlı yaklaşımlar elde edilecektir. Teorem 2.2.2.1' deki verilen şartlara ek olarak talep miktarını ifade eden $\{\eta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenlerinin üç ilk moment olan μ_1, μ_2, μ_3 mevcut ve sonlu olsun ve müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\}, n \geq 1$ rasgele değişkenler dizisinin (s, m, S) parametrelili asimetrik üçgensel dağılıma sahip olduğu varsayılmaktadır.

Görüldüğü gibi, eşitlik (58) 'nin sağ tarafı, $U_\eta(x)$ olan η_n talep rasgele değişkenler tarafından üretilen yenileme fonksiyonuna bağlıdır. Bazı özel durumlar dışında, yenileme fonksiyonunun basit ve açık ifadesini bulmak oldukça zordur. Bu nedenle, yenileme fonksiyona Kambo vd., (2012) tarafından önerilmiş yaklaşık formülü kullanarak ergodik dağılımının yaklaşımı elde edilecektir.

Hesaplamayı basitleştirmek amacı ile eşitlik (58)' deki pay ve paydayı sırasıyla şu şekilde gösterelim:

$$J(v) = \int_{\beta v}^{2\beta} U_\eta(x - \beta v) \tilde{p}(x) dx \quad (61)$$

ve

$$J(0) = \int_0^{2\beta} U_\eta(x) \tilde{p}(x) dx. \quad (62)$$

Bu durumda $J(v)$ için Kambo anlamında yaklaşık formülü aşağıdaki gibi verilebilir:

Yardımcı Teorem 2.2.3.1

$J(v)$ fonksiyonu,

$$J(v) = \int_{\beta v}^{2\beta} U_{\eta}(x - \beta v) \tilde{p}(x) dx$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $v \in [0, 2]$ ve $\beta \rightarrow \infty$ için aşağıdaki yaklaşık formülü elde edilir.

$$J(v) \approx \begin{cases} a_1(v)\beta + a_2(v) + a_3(v)\beta^{-1} + a_4\beta^{-2} + a_5\beta^{-2}e^{s_0\beta(1+\gamma-v)} & 0 \leq v \leq 1 + \gamma \\ d_1(v)\beta + d_2(v) + d_3(v)\beta^{-1} + d_4\beta^{-2} - d_4\beta^{-2}e^{s_0\beta(2-v)} & 1 + \gamma < v \leq 2 \end{cases} \quad (63)$$

burada,

$$\begin{aligned} a_1(v) &= \frac{v^3}{6\mu_1(1+\gamma)} - \frac{v}{\mu_1} + \frac{(3+\gamma)}{3\mu_1}, \\ a_2(v) &= c_1 - \frac{c_1 v^2}{2(1+\gamma)}, \quad a_3(v) = \frac{c_2 v}{s_0(1+\gamma)}, \\ a_4 &= \frac{-c_2}{s_0^2(1+\gamma)}, \quad a_5 = \frac{2c_2}{s_0^2(1-\gamma^2)}, \\ d_1(v) &= \frac{(2-v)^3}{6\mu_1(1-\gamma)}, \quad d_2(v) = \frac{(2-v)^2}{2(1-\gamma)}, \\ d_3(v) &= \frac{c_2(2-v)}{s_0(1-\gamma)}, \quad d_4 = \frac{c_2}{s_0^2(1-\gamma)}, \\ c_1 &= \frac{\mu_2}{2\mu_1^2}, \quad c_2 = c_1 - 1, \quad \gamma \in (-1, 1). \end{aligned}$$

dır.

İspat:

$0 \leq v \leq 1 + \gamma$ için

$$J(v) = \int_{\beta v}^{2\beta} U_{\eta}(x - \beta v) \tilde{p}(x) dx$$

gibi tanımlanmış. Dolayısı ile,

$$J(v) = \int_{\beta v}^{\beta(1+\gamma)} U_{\eta}(x - \beta v) \frac{x}{\beta^2(1+\gamma)} dx + \int_{\beta(1+\gamma)}^{2\beta} U_{\eta}(x - \beta v) \frac{(2\beta - x)}{\beta^2(1-\gamma)} dx \quad (64)$$

dır. Eşitlik (64) 'teki ilk integrali (33) yaklaşık formülünü kullanarak hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \int_{\beta v}^{\beta(1+\gamma)} U_{\eta}(x - \beta v) \frac{x}{\beta^2(1+\gamma)} dx &\approx \int_{\beta v}^{\beta(1+\gamma)} \left(\frac{x - \beta v}{\mu_1} + c_1 - c_2 e^{s_0(x-\beta v)} \right) \frac{x}{\beta^2(1+\gamma)} dx \\ &\approx \frac{1}{\beta^2(1+\gamma)\mu_1} \int_{\beta v}^{\beta(1+\gamma)} (x - \beta v)x dx \\ &\quad + \frac{c_1}{\beta^2(1+\gamma)} \int_{\beta v}^{\beta(1+\gamma)} x dx \\ &\quad - \frac{c_2}{\beta^2(1+\gamma)} \int_{\beta v}^{\beta(1+\gamma)} x e^{s_0(x-\beta v)} dx \\ &\approx \left(\frac{(1+\gamma)^2}{3\mu_1} - \frac{(1+\gamma)v}{2\mu_1} + \frac{v^3}{6\mu_1(1+\gamma)} \right) \beta + \frac{c_1(1+\gamma)}{2} \\ &\quad - \frac{c_1 v^2}{2(1+\gamma)} + \frac{c_2 v}{s_0(1+\gamma)} \beta^{-1} - \frac{c_2}{s_0^2(1+\gamma)} \beta^{-2} \\ &\quad - \frac{c_2}{s_0} \beta^{-1} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)} + \frac{c_2}{s_0^2(1+\gamma)} \beta^{-2} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)} \end{aligned} \quad (65)$$

Şimdi, ikinci integrali hesaplayalım

$$\begin{aligned} \int_{\beta(1+\gamma)}^{2\beta} U_{\eta}(x - \beta v) \frac{(2\beta - x)}{\beta^2(1-\gamma)} dx &\approx \int_{\beta(1+\gamma)}^{2\beta} \left(\frac{x - \beta v}{\mu_1} + c_1 - c_2 e^{s_0(x-\beta v)} \right) \frac{(2\beta - x)}{\beta^2(1-\gamma)} dx \\ &\approx \frac{1}{\mu_1 \beta^2(1-\gamma)} \int_{\beta(1+\gamma)}^{2\beta} (x - \beta v)(2\beta - x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{c_1}{\beta^2(1-\gamma)} \int_{\beta(1+\gamma)}^{2\beta} (2\beta - x) dx \\
& - \frac{c_2}{\beta^2(1-\gamma)} \int_{\beta(1+\gamma)}^{2\beta} (2\beta - x) e^{s_0(x-\beta v)} dx \\
& \approx \left(\frac{4 + (1+\gamma)^3}{3\mu_1(1-\gamma)} - \frac{v(1-\gamma)}{2\mu_1} - \frac{(1+\gamma)^2}{\mu_1(1-\gamma)} \right) \beta \\
& + \frac{c_1(1-\gamma)}{2} + \frac{c_2}{s_0} \beta^{-1} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)} \\
& + \frac{c_2}{s_0^2(1-\gamma)} \beta^{-2} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)} . \tag{66}
\end{aligned}$$

gibi bulunur.

(65) ve (66) eşitlikleri, eşitlik (64)'te yerine koyularak, $0 \leq v \leq 1 + \gamma$ durumunda, $J(v)$ fonksiyonu için aşağıdaki yaklaşım formülü elde edilir:

$$\begin{aligned}
J(v) \approx & \left(\frac{(1+\gamma)^2}{3\mu_1} - \frac{(1+\gamma)v}{2\mu_1} + \frac{v^3}{6\mu_1(1+\gamma)} \right) \beta + \frac{c_1(1+\gamma)}{2} - \frac{c_1 v^2}{2(1+\gamma)} \\
& + \frac{c_2 v}{s_0(1+\gamma)} \beta^{-1} - \frac{c_2}{s_0^2(1+\gamma)} \beta^{-2} - \frac{c_2}{s_0} \beta^{-1} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)} \\
& + \frac{c_2}{s_0^2(1+\gamma)} \beta^{-2} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)} \\
& + \left(\frac{4 + (1+\gamma)^3}{3\mu_1(1-\gamma)} - \frac{v(1-\gamma)}{2\mu_1} - \frac{(1+\gamma)^2}{\mu_1(1-\gamma)} \right) \beta \\
& + \frac{c_1(1-\gamma)}{2} + \frac{c_2}{s_0} \beta^{-1} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)} + \frac{c_2}{s_0^2(1-\gamma)} \beta^{-2} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)} .
\end{aligned}$$

Dolaysı ile,

$$\begin{aligned}
J(v) \approx & \left(\frac{v^3}{6\mu_1(1+\gamma)} - \frac{v}{\mu_1} + \frac{(3+\gamma)}{3\mu_1} \right) \beta + \left(c_1 - \frac{c_1 v^2}{2(1+\gamma)} \right) + \frac{c_2 v}{s_0(1+\gamma)} \beta^{-1} \\
& - \frac{c_2}{s_0^2(1+\gamma)} \beta^{-2} + \frac{2c_2}{s_0^2(1-\gamma^2)} \beta^{-2} e^{\beta s_0(1+\gamma-v)}
\end{aligned}$$

gibi elde edilir .

Benzer şekilde, $1 + \gamma < v \leq 2$ olduğunda $J(v)$ yaklaşık ifadesi aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\begin{aligned}
 J(v) &= \int_{\beta v}^{2\beta} U_{\eta}(x - \beta v) \frac{(2\beta - x)}{\beta^2(1 - \gamma)} dx \\
 &\approx \int_{\beta v}^{2\beta} \left(\frac{x - \beta v}{\mu_1} + c_1 - c_2 e^{s_0(x - \beta v)} \right) \frac{(2\beta - x)}{\beta^2(1 - \gamma)} dx \\
 &\approx \frac{1}{\mu_1 \beta^2(1 - \gamma)} \int_{\beta v}^{2\beta} (x - \beta v)(2\beta - x) dx \\
 &\quad + \frac{c_1}{\beta^2(1 - \gamma)} \int_{\beta v}^{2\beta} (2\beta - x) dx \\
 &\quad - \frac{c_2}{\beta^2(1 - \gamma)} \int_{\beta v}^{2\beta} (2\beta - x) e^{s_0(x - \beta v)} dx \\
 &\approx \frac{(2 - v)^3}{6\mu_1(1 - \gamma)} \beta + \frac{c_1(2 - v)^2}{2(1 - \gamma)} + \frac{c_2(2 - v)}{s_0(1 - \gamma)} \beta^{-1} \\
 &\quad + \frac{c_2}{s_0^2(1 - \gamma)} \beta^{-2} - \frac{c_2}{s_0^2(1 - \gamma)} \beta^{-2} e^{s_0 \beta(2 - v)} .
 \end{aligned}$$

Böylece Yardımcı Teorem 2.2.3.1' ispatı tamamlanmış olur.

Sonuç 2.2.3.1

Yardımcı Teorem 2.2.3.1 kullanılarak, $\beta \rightarrow \infty$ iken aşağıdaki yaklaşık formülüne ulaşılır.

$$J(0) = E \left(U_{\eta}(\tilde{\xi}_1) \right) \approx \int_0^{2\beta} U_{\eta}(x) \tilde{p}(x) dx \approx b_1 \beta + b_2 + b_3 \beta^{-2} + b_4 \beta^{-2} e^{s_0 \beta(1 + \gamma)} . \quad (67)$$

Burada,

$$b_1 = \frac{(3 + \gamma)}{3\mu_1} , \quad b_2 = c_1, \quad b_3 = \frac{-c_2}{s_0^2(1 + \gamma)} , \quad b_4 = \frac{c_2}{s_0^2(1 - \gamma^2)} .$$

c_1, c_2 , denklem (30) ile verilmiştir.

İspat:

$v = 0$ durumunda,

$$\begin{aligned} E(U_\eta(\xi_1)) &= J(0) \approx a_1(0)\beta + a_2(0) + a_3(0)\beta^{-1} + a_4\beta^{-2} + a_5\beta^{-2}e^{s_0\beta(1+\gamma)} \\ &\approx \frac{(3+\gamma)}{3\mu_1}\beta + c_1 - \frac{c_2}{s_0^2(1+\gamma)}\beta^{-2} + \frac{c_2}{s_0^2(1-\gamma^2)}\beta^{-2}e^{s_0\beta(1+\gamma)} \end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi, aşağıdaki teorem ile bu bölümünün ilk temel amacı gösterilecektir.

Teorem 2.2.3.1

Teorem 2.2.2.1'deki verilen koşullarına ek olarak, η_1 rasgele değişkeninin $\mu_k = E(\eta_1^k)$, $k = 1, 2, 3$ momentleri mevcut ve sonlu olsun ve $s_0 < 0$ şartı sağlansın. Bu durumda her $v \in [0, 2]$ için, ergodik dağılım fonksiyonu $Q_{W_\beta}(v)$, $\beta \rightarrow \infty$ olduğunda aşağıdaki yaklaşık formülüne sahiptir.

$$\begin{aligned} Q_{W_\beta}(v) &\approx \begin{cases} \frac{(b_1 - a_1(v))\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{(b_2 - a_2(v))\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{a_3(v)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}, & 0 \leq v \leq 1 + \gamma \\ - \frac{a_5 e^{s_0\beta(1+\gamma-v)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\ \frac{(b_1 - d_1(v))\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{(b_2 - d_2(v))\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{d_3(v)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}, & 1 + \gamma < v \leq 2 \\ + \frac{(b_3 - d_4)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{d_4 e^{s_0\beta(2-v)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \end{cases} \end{aligned} \quad (68)$$

burada,

$\{a_i(v), d_i(v), i = 1, 2, 3\}$, a_5, d_4 ve $\{b_j, j = 1, 2, 3\}$, Yardımcı Teorem 2.2.3.1 ve Sonuç 2.2.3.1' de verilmiştir. c_1, c_2 ise denklem (30) ile verilmiştir.

İspat:

Denklem (61) ve denklem (62) dikkate alındığında, (58) ile verilen $Q_{W_\beta}(v)$ 'nin kesin formunu yazmanın alternatif bir şekli:

$$\begin{aligned}
Q_{W_\beta}(v) &= 1 - \frac{\int_{\beta v}^{2\beta} U_\eta(x - \beta v) \tilde{p}(x) dx}{\int_0^{2\beta} U_\eta(x) \tilde{p}(x) dx} \\
&= \frac{J(0) - J(v)}{J(0)}, v \in [0, 2]
\end{aligned} \tag{69}$$

olur. Taylor serileri kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{J(0)} &\approx \frac{1}{b_1\beta + b_2 + b_3\beta^{-2} + b_4\beta^{-2}e^{s_0\beta(1+\gamma)}} \\
&\approx \frac{1}{(b_1\beta + b_2 + b_3\beta^{-2}) \left[1 + \frac{b_4}{b_1\beta + b_2 + b_3\beta^{-2}} \beta^{-2}e^{s_0(1+\gamma)} \right]} \\
&\approx \frac{\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \frac{1}{\left[1 + \frac{b_4}{b_1\beta + b_2 + b_3\beta^{-2}} \beta^{-2}e^{s_0(1+\gamma)} \right]} \\
&\approx \frac{\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \left[1 - \frac{b_4}{b_1\beta + b_2 + b_3\beta^{-2}} \beta^{-2}e^{s_0(1+\gamma)} \right] \\
&\approx \frac{\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{b_4\beta^2e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3)^2}
\end{aligned} \tag{70}$$

elde edilir. Böylece,

$0 \leq v \leq 1 + \gamma$ için,

$$\begin{aligned}
Q_{W_\beta}(v) &\approx \left\{ (b_1 - a_1(v))\beta + (b_2 - a_2(v)) - a_3(v) \frac{1}{\beta} - a_5 \frac{e^{s_0\beta(1+\gamma-v)}}{\beta^2} \right\} \\
&\quad \times \left\{ \frac{\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{b_4\beta^2e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3)^2} \right\} \\
Q_{W_\beta}(v) &\approx \frac{(b_1 - a_1(v))\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{(b_2 - a_2(v))\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{a_3(v)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
&\quad - a_5 \frac{e^{s_0\beta(1+\gamma-v)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \dots
\end{aligned}$$

ve $1 + \gamma < v \leq 2$ için

$$Q_{W_\beta}(v) \approx \left\{ (b_1 - d_1(v))\beta + (b_2 - d_2(v)) - d_3(v) \frac{1}{\beta} + (b_3 - d_4) \frac{1}{\beta^2} + d_4 \frac{e^{s_0 \beta(2-v)}}{\beta^2} \right\} \\ \times \left\{ \frac{\beta^2}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{b_4 \beta^2 e^{s_0 \beta(1+\gamma)}}{(b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3)^2} \right\}$$

dir. Dolaysı ile,

$$Q_{W_\beta}(v) \approx \frac{(b_1 - d_1(v))\beta^3}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} + \frac{(b_2 - d_2(v))\beta^2}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{d_3(v)\beta}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\ + \frac{b_3 - d_4}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} + d_4 \frac{e^{s_0 \beta(2-v)}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} + \dots$$

gibi elde edilir.

Şimdi, stokastik süreçlerin önemli bir özelliği olan $W_\beta(t)$ sürecinin limit dağılımını elde edebiliriz.

Sonuç 2.2.3.2

Teorem 2.2.2.1 ve Teorem 1.5.1'in koşullarının sağlandığını varsayalım. Bu durumda, $s_0 < 0$ için ve her $v \in [0,2]$ için, $W_\beta(t)$ sürecinin ergodik dağılımı, $R(v)$ olarak tanımlanan limit dağılıma zayıf anlamda yakınsar.

$$R(v) = \begin{cases} \frac{3v}{(3+\gamma)} - \frac{v^3}{2(1+\gamma)(3+\gamma)}, & 0 \leq v \leq 1+\gamma \\ 1 - \frac{(2-v)^3}{2(3+\gamma)(1-\gamma)}, & 1+\gamma < v \leq 2 \end{cases}. \quad (71)$$

Yani, $Q_{W_\beta}(v) \rightarrow R(v)$, $\beta \rightarrow \infty$.

İspat:

Bilinmektedir ki, $\gamma \in (-1,1)$ ve $s_0 < 0$ şartını sağladığında, $v \in [0,2]$ için aşağıdaki limite ulaşılabilir.

$0 \leq v \leq 1+\gamma$ durumda,

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{(b_2 - a_2(v))\beta^2}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{a_3(v)\beta}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{a_5 e^{s_0 \beta(1+\gamma-v)}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} = 0$$

Diğer taraftan $1 + \gamma < v \leq 2$ için,

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{(b_2 - d_2(v))\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{d_3(v)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{(b_3 - d_4)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\ + \frac{d_4 e^{s_0\beta(2-v)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} = 0. \end{aligned}$$

Dolaysı ile,

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} Q_{W_\beta}(v) &= \begin{cases} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{(b_1 - a_1(v))\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}, & 0 \leq v \leq 1 + \gamma \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{(b_1 - d_1(v))\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}, & 1 + \gamma < v \leq 2 \end{cases}, \\ &= \begin{cases} \frac{(b_1 - a_1(v))}{b_1}, & 0 \leq v \leq 1 + \gamma \\ \frac{(b_1 - d_1(v))}{b_1}, & 1 + \gamma < v \leq 2 \end{cases}, \\ &= \begin{cases} \frac{3v}{(3 + \gamma)} - \frac{v^3}{2(1 + \gamma)(3 + \gamma)}, & 0 \leq v \leq 1 + \gamma \\ 1 - \frac{(2 - v)^3}{2(3 + \gamma)(1 - \gamma)}, & 1 + \gamma < v \leq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

elde edilir.

Not 2.2.3.1

(Khaniyev & Atalay 2010) çalışmasında elde edilen limit dağılımının, çalışmamızda Sonuç 2.2.3.2 ile verilen $R(v)$ limit dağılımının asimetri katsayısı $\gamma = 0$ olduğunda özel bir durumu haline geldiği görülmektedir.

Sonuç 2.2.3.3

Teorem 2.2.3.1'deki şartlar sağlansın. Bu durumda, $\beta \rightarrow \infty$ iken, $X(t)$ sürecin ergodik dağılımının aşağıdaki yaklaşık formülü doğrudur.

$$Q_X(x) \approx \begin{cases} \frac{A_1(x)\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_2(x)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_3e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} & s \leq x \leq m \\ \frac{A_4\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_5(x)\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_6(x)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} & m < x \leq S \\ + \frac{A_7(x)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_8e^{2s_0\beta}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} & \end{cases} \quad (72)$$

Burada,

$$A_1(x) = \frac{x-s}{\mu_1}, \quad A_2(x) = -\frac{(x-s)^3}{6\mu_1(1+\gamma)} + \frac{c_1(x-s)^2}{2(1+\gamma)} - \frac{c_2(x-s)}{s_0(1+\gamma)} - a_5e^{-s_0(x-s)},$$

$$A_3 = -a_5, \quad A_4 = -\frac{(1+\gamma)^2}{3\mu_1(1-\gamma)}, \quad A_5(x) = \frac{2(x-s)}{\mu_1(1-\gamma)} - \frac{2}{(1-\gamma)} + c_1,$$

$$A_6(x) = -\frac{(x-s)^2}{\mu_1(1-\gamma)} + \frac{x-s}{(1-\gamma)} - \frac{2c_2}{s_0(1-\gamma)},$$

$$A_7(x) = \frac{(x-s)^3}{6\mu_1(1-\gamma)} - \frac{(x-s)^2}{2(1-\gamma)} - \frac{c_2(x-s)}{s_0(1-\gamma)} - a_5 + d_4e^{-s_0(x-s)},$$

$$A_8 = d_4, \quad \gamma \in (-1,1)$$

dır.

Ayrıca, a_5 , d_4 , ve b_j , $j = 1,2,3$ sırası ile, Yardımcı Teorem 2.2.3.1 ve Sonuç 2.2.3.1’de verilmiştir. c_1 , c_2 denklem (30) ile verilmiştir.

İspat:

$X(t)$ sürecinin ergodik dağılım fonksiyonunun tanımından,

$$Q_X(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} P[X(t) \leq x], \quad x \in [s, S] \quad (73)$$

dır. Diğer taraftan, $W_\beta(t) \equiv \frac{1}{\beta}(X(t) - s)$ eşitliğinden,

$$X(t) \equiv \beta W_\beta(t) + s \quad (74)$$

elde edilir.

Denklem (74), (73) denklemdeki yerine koyularak,

$$\begin{aligned}
Q_X(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P[\beta W_\beta(t) + s \leq x], \quad x \in [s, S] \\
&= \lim_{t \rightarrow \infty} P\left[W_\beta(t) \leq \frac{x-s}{\beta}\right], \\
&= Q_{W_\beta}\left(\frac{x-s}{\beta}\right), \quad x \in [s, S]
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır. Şimdi (58) denklemini ile verilen $Q_{W_\beta}(v)$ ergodik dağılımının yaklaşık formülü kullanılarak, aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

$s \leq x \leq m$ için

$$\begin{aligned}
Q_X(x) \approx & \frac{\left(b_1 - a_1\left(\frac{x-s}{\beta}\right)\right)\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{\left(b_2 - a_2\left(\frac{x-s}{\beta}\right)\right)\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{a_3\left(\frac{x-s}{\beta}\right)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& - \frac{a_5 e^{s_0\beta\left(1+\gamma-\frac{x-s}{\beta}\right)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}
\end{aligned} \tag{75}$$

dir.

Burada,

$$\begin{aligned}
a_1\left(\frac{x-s}{\beta}\right) &= \frac{\left(\frac{x-s}{\beta}\right)^3}{6\mu_1(1+\gamma)} - \frac{\frac{x-s}{\beta}}{\mu_1} + \frac{(3+\gamma)}{3\mu_1}, \\
a_2\left(\frac{x-s}{\beta}\right) &= c_1 - \frac{c_1\left(\frac{x-s}{\beta}\right)^2}{2(1+\gamma)}, \\
a_3\left(\frac{x-s}{\beta}\right) &= \frac{c_2\frac{x-s}{\beta}}{s_0(1+\gamma)}
\end{aligned}$$

gibi elde edilir.

$a_i\left(\frac{x-s}{\beta}\right); i = 1,2,3$ 'in değerleri, denklem (75)' te yerine koyularak

$$Q_X(x) \approx \frac{\left(\frac{(3+\gamma)}{3\mu_1} - \left(\frac{\left(\frac{x-s}{\beta}\right)^3}{6\mu_1(1+\gamma)} - \frac{\frac{x-s}{\beta}}{\mu_1} + \frac{(3+\gamma)}{3\mu_1}\right)\right)\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\left(c_1 - \left(c_1 - \frac{c_1 \left(\frac{x-s}{\beta} \right)^2}{2(1+\gamma)} \right) \right) \beta^2}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{\frac{c_2 \frac{x-s}{\beta}}{s_0(1+\gamma)} \beta}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\
& - \frac{a_5 e^{s_0 \beta \left(1 + \gamma - \frac{x-s}{\beta} \right)}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\
& \approx \frac{\left(-\frac{\left(\frac{x-s}{\beta} \right)^3}{6\mu_1(1+\gamma)} + \frac{\frac{x-s}{\beta}}{\mu_1} \right) \beta^3}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} + \frac{\left(\frac{c_1 \left(\frac{x-s}{\beta} \right)^2}{2(1+\gamma)} \right) \beta^2}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\
& - \frac{\frac{c_2 \frac{x-s}{\beta}}{s_0(1+\gamma)} \beta}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{a_5 e^{s_0 \beta \left(1 + \gamma - \frac{x-s}{\beta} \right)}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} . \\
& \approx \frac{\left(-\frac{\left(\frac{x-s}{\beta} \right)^3}{6\mu_1(1+\gamma)} \right) \beta^3}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} + \frac{\left(\frac{\frac{x-s}{\beta}}{\mu_1} \right) \beta^3}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} + \frac{\left(\frac{c_1 \left(\frac{x-s}{\beta} \right)^2}{2(1+\gamma)} \right) \beta^2}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\
& - \frac{\frac{c_2 \frac{x-s}{\beta}}{s_0(1+\gamma)} \beta}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{a_5 e^{s_0 \beta \left(1 + \gamma - \frac{x-s}{\beta} \right)}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} . \\
& \approx -\frac{(x-s)^3}{6\mu_1(1+\gamma)} \frac{1}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} + \frac{x-s}{\mu_1} \frac{1}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \beta^2 \\
& + \frac{c_1(x-s)^2}{2(1+\gamma)} \frac{1}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{c_2(x-s)}{s_0(1+\gamma)} \frac{1}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\
& - \frac{a_5 e^{s_0 \beta(1+\gamma)}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{a_5 e^{-s_0(x-s)}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} . \\
& \approx \left[\frac{x-s}{\mu_1} \right] \frac{\beta^2}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\
& + \frac{1}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \times
\end{aligned}$$

$$\left[-\frac{(x-s)^3}{6\mu_1(1+\gamma)} + \frac{c_1(x-s)^2}{2(1+\gamma)} - \frac{c_2(x-s)}{s_0(1+\gamma)} - a_5 e^{-s_0(x-s)} \right] \\ - \frac{a_5 e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, $m < x \leq S$ için,

$$Q_X(x) \approx \frac{\left(b_1 - d_1\left(\frac{x-s}{\beta}\right)\right)\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{\left(b_2 - d_2\left(\frac{x-s}{\beta}\right)\right)\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{d_3\left(\frac{x-s}{\beta}\right)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\ + \frac{(b_3 - d_4)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{d_4 e^{s_0\beta\left(2-\frac{x-s}{\beta}\right)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \quad (76)$$

dır. Burada,

$$d_1\left(\frac{x-s}{\beta}\right) = \frac{\left(2 - \frac{x-s}{\beta}\right)^3}{6\mu_1(1-\gamma)}, \quad d_2\left(\frac{x-s}{\beta}\right) = \frac{\left(2 - \frac{x-s}{\beta}\right)^2}{2(1-\gamma)}, \\ d_3\left(\frac{x-s}{\beta}\right) = \frac{c_2\left(2 - \frac{x-s}{\beta}\right)}{s_0(1-\gamma)}$$

dır. $d_i\left(\frac{x-s}{\beta}\right)$, $i = 1, 2, 3$ denklem (76)' de yerine koyularak,

$$Q_X(x) \approx \frac{\left(b_1 - \frac{\left(2 - \frac{x-s}{\beta}\right)^3}{6\mu_1(1-\gamma)}\right)\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{\left(b_2 - \frac{\left(2 - \frac{x-s}{\beta}\right)^2}{2(1-\gamma)}\right)\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{\frac{c_2\left(2 - \frac{x-s}{\beta}\right)}{s_0(1-\gamma)}\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\ + \frac{(b_3 - d_4)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{d_4 e^{s_0\beta\left(2-\frac{x-s}{\beta}\right)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}. \\ \approx \frac{b_1\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{\frac{\left(2 - \frac{x-s}{\beta}\right)^3}{6\mu_1(1-\gamma)}\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{b_2\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\left(2 - \frac{x-s}{\beta}\right)^2}{2(1-\gamma)} \beta^2 - \frac{2c_2}{s_0(1-\gamma)} \frac{\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{(b_3 - d_4)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& - \frac{c_2(x-s)}{s_0(1-\gamma)} \frac{1}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{d_4 e^{2s_0\beta}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{d_4 e^{s_0(x-s)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& \approx \frac{b_1\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{\frac{2^3}{6\mu_1(1-\gamma)}\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{\frac{(x-s)^3}{\beta^3}\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& - \frac{\frac{12}{6\mu_1(1-\gamma)}\frac{x-s}{\beta}\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{\frac{6}{6\mu_1(1-\gamma)}\frac{(x-s)^2}{\beta^2}\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{b_2\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& - \frac{\frac{2^2}{2(1-\gamma)}\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{\frac{(x-s)^2}{\beta^2}}{2(1-\gamma)} \beta^2 + \frac{\frac{2}{2(1-\gamma)}\frac{x-s}{\beta}\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& - \frac{2c_2}{s_0(1-\gamma)} \frac{\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} - \frac{c_2(x-s)}{s_0(1-\gamma)} \frac{1}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& + \frac{(b_3 - d_4)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{d_4 e^{2s_0\beta}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{d_4 e^{-s_0(x-s)}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
Q_x(x) & \approx \left[-\frac{(1+\gamma)^2}{3\mu_1(1-\gamma)} \right] \frac{\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& + \left[\frac{2(x-s)}{\mu_1(1-\gamma)} - \frac{2}{(1-\gamma)} + c_1 \right] \frac{\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& + \left[-\frac{(x-s)^2}{\mu_1(1-\gamma)} + \frac{x-s}{(1-\gamma)} - \frac{2c_2}{s_0(1-\gamma)} \right] \frac{\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
& + \frac{1}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \times \\
& \left[\frac{(x-s)^3}{6\mu_1(1-\gamma)} - \frac{(x-s)^2}{2(1-\gamma)} - \frac{c_2(x-s)}{s_0(1-\gamma)} + (b_3 - d_4) + d_4 e^{-s_0(x-s)} \right]
\end{aligned}$$

$$+ \frac{d_4 e^{2s_0 \beta}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3}$$

elde edilir ve bu ispatı tamamlar.

2.2.4. Özel Örnekler

Bu bölümde sonuçlarımızın daha iyi anlaşılabilmesi için iki açıklayıcı örnek sunulmaktadır.

Örnek 1:

$\eta_1, \lambda = 1$ parametrelili ikinci dereceden Erlang dağılıma sahip olduğunu varsayalım ve stok kontrol seviyesi $s = 0$ olsun, ayrıca ve $\gamma = 0$ varsayalım.

η_1 rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu :

$$f_{\eta_1}(x) = x e^{-x}, \quad x \geq 0.$$

dir.

η_1 rasgele değişkenin ilk üç momentleri μ_1, μ_2, μ_3 aşağıdaki gibi verilir.

$$\mu_1 = E[\eta_1] = 2, \quad \mu_2 = E[\eta_1^2] = 6, \quad \mu_3 = E[\eta_1^3] = 24.$$

Böylece,

$$s_0 = -6 \mu_1 (\mu_2 - \mu_1^2) / (2 \mu_1 \mu_3 - 3 \mu_1^2) = -\frac{2}{7} < 0, \quad c_1 = \frac{3}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2}.$$

Bu durumda,

$$A_1(x) = \frac{x}{2}, \quad A_2(x) = -\frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{4} - \frac{7x}{4} - \frac{49}{4} e^{\frac{2}{7}x},$$

$$A_3 = -\frac{49}{4}, \quad A_4 = -\frac{1}{6}, \quad A_5(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$A_6(x) = -\frac{x^2}{2} + x + \frac{7}{2},$$

$$A_7(x) = \frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} - \frac{7x}{4} - \frac{49}{4} + \frac{49}{8} e^{\frac{2}{7}x}, \quad A_8 = \frac{49}{8},$$

ve,

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{3}{2}, \quad b_3 = a_4 = \frac{-49}{8}, \quad a_5 = \frac{49}{4}$$

gibi bulunabilir. Böylece, $Q_X(x)$

$$Q_X(x) \approx \begin{cases} Q_1(x) & 0 \leq x \leq \beta \\ Q_2(x) & \beta < x \leq 2\beta \end{cases}.$$

dır. Burada,

$$\begin{aligned} Q_1(x) &\approx \frac{\left(\frac{x}{2}\right)\beta^2}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{-\frac{x^3}{12} + \frac{3x^2}{4} + \frac{7x}{4} - \frac{49}{4}e^{\frac{2}{7}x}}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} - \frac{\frac{49}{8}e^{-\frac{2}{7}\beta}}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} \\ &\approx \frac{x\beta^2}{\beta^3 + 3\beta^2 - \frac{49}{4}} + \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} + \frac{7x}{2} - \frac{49}{2}e^{\frac{2}{7}x}}{\beta^3 + 3\beta^2 - \frac{49}{4}} - \frac{\frac{49}{8}e^{-\frac{2}{7}\beta}}{\beta^3 + 3\beta^2 - \frac{49}{4}} \\ &\approx \frac{x\beta^2}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} + \frac{-0,17x^3 + 1,5x^2 - 3,5x - 24,5e^{0,29x}}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} \\ &\quad - \frac{12,25e^{-0,29\beta}}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} \end{aligned}$$

biçiminde bulunur.

Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} Q_2(x) &\approx \frac{A_4\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_5(x)\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_6(x)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\ &\quad + \frac{A_7(x)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_8e^{2s_0\beta}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3}. \\ &\approx \frac{-\frac{1}{6}\beta^3}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\beta^2}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + x + \frac{7}{2}\right)\beta}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} \\ &\quad + \frac{\frac{49}{4}e^{\frac{2}{7}x}\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} - \frac{7x}{4} - \frac{49}{4} + \frac{49}{8}e^{\frac{2}{7}x}}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{\frac{49}{8}e^{2s_0\beta}}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} \end{aligned}$$

$$\approx \frac{-0.34\beta^3}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} + \frac{(2x-1)\beta^2}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} + \frac{(-x^2 + 2x + 7)\beta}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} \\ + \frac{0,17x^3 - x^2 - 3,5x - 24,5 + 12,25e^{0,29x}}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} + \frac{12,25e^{-0,57\beta}}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25}$$

gibi elde edilir.

Örnek 2:

Bu örnekte ise, $\eta_1, \lambda = 1$ parametrelili ikinci dereceden Erlang dağılıma sahip olduğunu varsayalım, ve stok kontrol seviyesi $s = 0$ olsun, ayrıca ve $\gamma = 0,7$ varsayalım.

Bu durumda,

$$A_1(x) = \frac{x}{2}, \quad A_2(x) = -\frac{x^3}{20,4} + \frac{3(x)^2}{2(1,7)} + \frac{7x}{1,7} - \frac{49}{4}e^{\frac{2}{7}(x)}, \\ A_3 = -\frac{49}{4}, \quad A_4 = -\frac{(1,7)^2}{6(0,3)}, \quad A_5(x) = \frac{2(x)}{2(0,3)} - \frac{2}{(0,3)} + \frac{3}{2}, \\ A_6(x) = -\frac{(x)^2}{0,6} + \frac{x}{0,3} + \frac{1}{\frac{2}{7}(0,3)}, \\ A_7(x) = \frac{x^3}{12(0,3)} - \frac{x^2}{0,6} + \frac{7x}{0,6} - \frac{49}{4} - \frac{49}{8}e^{\frac{2}{7}x}, \quad A_8 = -\frac{49}{8}$$

dır. Bu durumda, $Q_X(x)$, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımı aşağıdaki gibi verilir.

$$Q_X(x) \approx \begin{cases} Q_1(x) & 0 \leq x \leq 1,7\beta \\ Q_2(x) & 1,7\beta < x \leq 2\beta \end{cases}$$

Burada,

$$Q_1(x) \approx \frac{\frac{x}{2}\beta^2}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{-\frac{x^3}{20,4} + \frac{3(x)^2}{2(1,7)} + \frac{7x}{1,7} - \frac{49}{4}e^{\frac{2}{7}(x)}}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{-\frac{49}{4}e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} \\ \approx \frac{x\beta^2}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} + \frac{-0,1x^3 + 1,76x^2 + 8,24x - 24,5e^{0,29x}}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} \\ + \frac{-24,5e^{-0,49\beta}}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25}.$$

$Q_2(x)$ ise aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\begin{aligned}
Q_2(x) &\approx \frac{A_4\beta^3}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_5(x)\beta^2}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_6(x)\beta}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
&+ \frac{A_7(x)}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + \frac{A_8e^{2s_0\beta}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
&\approx \frac{-\frac{(1,7)^2}{6(0,3)}\beta^3}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{\left(\frac{x}{0,3} - \frac{1}{3}\right)\beta^2}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{\left(-\frac{(x)^2}{0,6} + \frac{x}{0,3} + \frac{7}{0,6}\right)\beta}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} \\
&+ \frac{\frac{x^3}{12(0,3)} - \frac{x^2}{0,6} + \frac{7x}{0,6} - \frac{49}{4} - \frac{49}{8}e^{\frac{2}{7}x}}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} + \frac{-\frac{49}{8}e^{2s_0\beta}}{\frac{1}{2}\beta^3 + \frac{3}{2}\beta^2 - \frac{49}{8}} \\
&\approx \frac{-3,2\beta^3}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} + \frac{(6,67x - 0,34)\beta^2}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} \\
&+ \frac{(-3,34x^2 + 3,34x + 11,67)\beta}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} \\
&+ \frac{0,56x^3 - 3,34x^2 + 23,34x - 25,5 - 12,25e^{0,29x}}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25} \\
&- \frac{12,25e^{-0,57\beta}}{\beta^3 + 3\beta^2 - 12,25}
\end{aligned}$$

gibi elde edilir.

Sonraki bölümlerde sürecinin ergodik dağılımının n . dereceden momentlerini incelenecek. Öncelikle kesin formülü verilecek daha sonra Kambo yaklaşımına göre moment-bazlı yaklaşımlar elde edilecektir.

2.2.5. Sürecin Ergodik Dağılımının Momentleri İçin Kesin Formülü

$\tilde{X}(t) \equiv X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının n . dereceden momentleri $E(\tilde{X}^n)$ ile gösterilsin. Bu durumda,

$$E(\tilde{X}^n) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(\tilde{X}^n(t)) \text{ ve } E(\tilde{X}^n) \text{'nin kesin formülü Khaniyev vd., (2013)}$$

çalışmasında aşağıdaki teorem ile verilmiştir:

Teorem 2.2.5.1 (Khaniyev vd., 2013)

Teorem 2.2.2.1'in şartları sağlansın. $\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n . dereceden momentleri mevcut ve sonlu ise $E(\tilde{X}^n)$ ' in kesin formülü aşağıdaki gibidir:

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{n E(U_n(\tilde{\zeta}_1))}{E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1))} = \frac{n \int_0^{2\beta} x^{n-1} E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1 - x)) dx}{E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1))}, n = 1, 2, \dots \quad (77)$$

Burada, $\tilde{\zeta}_1 \equiv \zeta_1 - s$, $\beta \equiv \frac{s-s}{2}$ ve $U_\eta(x)$, Talep rasgele değişken tarafından üretilen yenileme fonksiyondur. Ayrıca,

$$U_n(x) \equiv x^{n-1} * U_\eta(x) = \int_0^x t^{n-1} U_\eta(x-t) dt.$$

$U_n(x)$, x^{n-1} ve $U_\eta(x)$ fonksiyonların konvolüsyon çarpımıdır.

İspat:

Bilinmektedir ki,

$$E(\tilde{X}^n) = \int_0^{2\beta} x^n dQ_{\tilde{X}}(x), n = 1, 2, \dots \quad (78)$$

Burada, $x \in [0, 2]$ olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} Q_{\tilde{X}}(x) &= \lim_{t \rightarrow \infty} P\{\tilde{X}(t) \leq x\} = \lim_{t \rightarrow \infty} P\{X(t) \leq x + s\} = Q_X(x + s) \\ &= 1 - \frac{\int_{x+s}^S U_\eta(z - x - s) d\pi(z)}{\int_s^S U_\eta(z - s) d\pi(z)} \\ &= 1 - \frac{E[U_\eta(\zeta_1 - s - x)]}{E[U_\eta(\zeta_1 - s)]} \\ &= 1 - \frac{E[U_\eta(\tilde{\zeta}_1 - x)]}{E[U_\eta(\tilde{\zeta}_1)]} \end{aligned}$$

gibi elde edilir. Ayrıca,

$$E(\tilde{X}^n) = \int_0^{2\beta} x^n dQ_{\tilde{X}}(x) = n \int_0^{2\beta} x^{n-1} d[1 - Q_{\tilde{X}}(x)] \quad (79)$$

elde edilir. Dolaysıyla ile,

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}^n) &= n \int_0^{2\beta} x^{n-1} \frac{E[U_{\eta}(\tilde{\zeta}_1 - x)]}{E[U_{\eta}(\tilde{\zeta}_1)]} dx \\ &= \frac{n \int_0^{2\beta} x^{n-1} E(U_{\eta}(\tilde{\zeta}_1 - x)) dx}{E(U_{\eta}(\tilde{\zeta}_1))} \end{aligned}$$

gibi elde edilir. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\beta} x^{n-1} E(U_{\eta}(\tilde{\zeta}_1 - x)) dx &= \int_0^{2\beta} x^{n-1} \left\{ \int_0^{2\beta} U_{\eta}(z - x) \tilde{p}(z) dz \right\} dx \\ &= \int_0^{2\beta} \tilde{p}(z) \left\{ \int_0^z x^{n-1} U_{\eta}(z - x) dx \right\} dz. \end{aligned}$$

Burada,

$$\int_0^z x^{n-1} U_{\eta}(z - x) dx = x^{n-1} * U_{\eta}(x) = U_n(x)$$

olsun. Böylece denklem (77) elde edilir.

2.2.6. Sürecin Ergodik Dağılımının n . Mertebeden Momentleri İçin Moment-Bazlı Yaklaşımlar

Bu kısımda, müdahaleyi ifade eden $\{\zeta_n\}$ rasgele değişkenleri asimetrik üçgensel dağılıma sahipken, $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının n . mertebeden momentleri için moment-bazlı yaklaşımlar elde edilecektir.

Kısım 2.2.2'de gösterdiğimiz gibi ζ_1 rasgele değişken (s, m, S) parametrelili üçgensel dağılıma sahipken, $\tilde{\zeta}_1 \equiv \zeta_1 - s$ rasgele değişken $(0, \beta(1 + \gamma), 2\beta)$ parametrelili asimetrik üçgensel dağılıma sahiptir. $\tilde{X}(t)$ sürecinin n . mertebeden momentleri için yaklaşımlar elde etmek için öncelikle gereken yardımcı teoremler verelim.

Öncelikle $U_n(y)$ fonksiyonun yaklaşık formülünü inceleyelim.

Yardımcı Teorem 2.2.6.1

$E(\eta_1^k) < \infty, k = 1, 2, 3$ ve $s_0 < 0$ şartları sağlansın. Bu durumda $y \rightarrow \infty$ için, $U_n(y)$ fonksiyonu aşağıdaki yaklaşık formülü sağlar:

$$U_n(y) \approx \frac{y^{n+1}}{(n+1)n\mu_1} + \frac{c_1 y^n}{n} + c_2 (n-1)! D_n(y) - c_2 \frac{e^{s_0 y}}{s_0^n}, \quad n \geq 1 \quad (80)$$

Burada,

$$D_n(y) = \sum_{r=0}^{n-1} \frac{y^{n-1-r}}{(n-1-r)! s_0^{r+1}}$$

ve c_1, c_2 denklem (30) ile verilmiştir.

İspat:

$\tilde{U}_n(\lambda)$, $U_n(y)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü olsun, bu durumda:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_n(\lambda) &= \mathcal{L}[y^{n-1} * U_n(y)] \approx \mathcal{L}\left[y^{n-1} * \left(\frac{y}{\mu_1} + c_1 - c_2 e^{s_0 y}\right)\right] \\ &\approx \mathcal{L}[y^{n-1}] \mathcal{L}\left[\frac{y}{\mu_1}\right] + \mathcal{L}[y^{n-1}] \mathcal{L}[c_1] - c_2 \tilde{H}_n(\lambda) \\ &\approx \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \frac{1}{\mu_1 \lambda^2} + c_1 \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \frac{1}{\lambda} - c_2 \tilde{H}_n(\lambda) \end{aligned} \quad (81)$$

Buradaki $\tilde{H}_n(\lambda)$ ile gösterilen fonksiyonun formülü Yardımcı Teorem 2.1.4.1'de verilmiştir.

Ters Laplace dönüşümü denklem (81)'ye uygulanırsa,

$$\begin{aligned} L^{-1}(\tilde{U}_n(\lambda)) &\approx L^{-1}\left(\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \frac{1}{\mu_1 \lambda^2} + c_1 \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \frac{1}{\lambda} - c_2 \tilde{H}_n(\lambda)\right) \\ &\approx \frac{(n-1)!}{\mu_1} L^{-1}\left(\frac{1}{\lambda^{n+2}}\right) + c_1 (n-1)! L^{-1}\left(\frac{1}{\lambda^{n+1}}\right) \\ &\quad - c_2 L^{-1}(\tilde{H}_n(\lambda)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$U_n(y) \approx \frac{y^{n+1}}{(n+1)n\mu_1} + \frac{c_1 y^n}{n} + c_2 (n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{y^{n-1-r}}{(n-1-r)! s_0^{r+1}} - c_2 \frac{e^{s_0 y}}{s_0^n}$$

elde edilmiş olur.

Yardımcı Teorem 2.2.6.2

$I_1(y) = \int_0^y U_n(t)dt$ biçiminde tanımlansın.

$E(\eta_1^k) < \infty, k = 1, 2, 3$ ve $s_0 < 0$ şartları sağlansın. Bu durumda $y \rightarrow \infty$ için

$$I_1(y) \approx \frac{y^{n+2}}{(n+2)(n+1)n\mu_1} + \frac{c_1 y^{n+1}}{(n+1)n} + c_2 (n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{y^{n-r}}{(n-r)! s_0^{r+1}} - \frac{c_2 (n-1)!}{s_0^n} (e^{s_0 y} - 1), \quad n \geq 1 \quad (82)$$

elde edilir.

c_1, c_2 denklem (30) ile verilmiştir.

İspat:

Bu sonucu aşağıdaki yardımcı teorem yardımı ile ispatlanacaktır.

Yardımcı Teorem 2.2.6.3

$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sonlu ve ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere, $\tilde{g}(\lambda)$ Laplace dönüşümü olsun, bu durumda aşağıdaki ilişki doğrudur:

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^y g(t)dt \right\} = \frac{\tilde{g}(\lambda)}{\lambda}.$$

$I_1(y)$ 'nin tanımını, ve Yardımcı Teorem 2.2.6.1 ile verilen $U_n(y)$ 'nin yaklaşık formülü kullanarak

$$I_1(y) = \int_0^y U_n(t)dt$$

$\tilde{I}_1(\lambda), I_1(y)$ fonksiyonun laplace dönüşümü ise Yardımcı Teorem 2.2.6.3'e göre

$$\tilde{I}_1(\lambda) = \frac{\tilde{U}_n(\lambda)}{\lambda}$$

gibi elde edilir.

$\tilde{U}_n(\lambda)$ 'nin yaklaşık formülü (61) ile verilmiştir. Dolaysı ile,

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(\lambda) &\approx \frac{1}{\lambda} \left[\frac{(n-1)!}{\lambda^n} \frac{1}{\mu_1 \lambda^2} + c_1 \frac{(n-1)!}{\lambda^n} \frac{1}{\lambda} - c_2 (n-1)! \left(- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{s_0^{r+1}} \frac{1}{\lambda^{n-r}} + \frac{1}{s_0^n} \frac{1}{\lambda - s_0} \right) \right] \\ &\approx \frac{(n-1)!}{\lambda^{n+3}} \frac{1}{\mu_1} + c_1 \frac{(n-1)!}{\lambda^{n+2}} - c_2 (n-1)! \left(- \sum_{r=0}^{n-1} \frac{1}{s_0^{r+1}} \frac{1}{\lambda^{n+1-r}} + \frac{1}{s_0^n} \frac{1}{\lambda(\lambda - s_0)} \right). \end{aligned}$$

Şimdi, ters laplace dönüşümü uygulanıp

$$\begin{aligned} I_1(y) &\approx \frac{y^{n+2}}{(n+2)(n+1)n\mu_1} + \frac{c_1 y^{n+1}}{(n+1)n} + c_2 (n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{y^{n-r}}{(n-r)! s_0^{r+1}} \\ &\quad - \frac{c_2 (n-1)!}{s_0^n} (e^{s_0 y} - 1) \end{aligned}$$

elde edilmiştir.

Yardımcı Teorem 2.2.6.4

$I_2(y) = \int_0^y t U_n(t) dt$ biçiminde tanımlansın.

$E(\eta_1^k) < \infty, k = 1, 2, 3$ ve $s_0 < 0$ şartları sağlansın. Bu durumda $y \rightarrow \infty$ için

$$I_2(y) \approx \frac{y^{n+3}}{(n+3)(n+1)n\mu_1} + \frac{c_1 y^{n+2}}{(n+2)n} - \frac{c_2 (n-1)!}{s_0^n} \left[e^{s_0 y} \left(\frac{y}{s_0} - \frac{1}{s_0^2} \right) + \frac{1}{s_0^2} \right] \quad n \geq 1 \quad (83)$$

dir. c_1, c_2 denklem (30) ile verilmiştir.

İspat:

Bu yardımcı teoremi, $I_2(y)$ 'nin tanımını, ve Yardımcı Teorem 2.2.6.1 ile verilen $U_n(t)$ 'nin yaklaşık formülünü kullanılarak, Yardımcı Teorem 2.2.6.2 benzer şekilde ispatlanabilir.

Şimdi, $E(\tilde{X}^n)$ 'yi hesaplayabilmek için gereken $E(U_n(\tilde{\xi}_1))$ 'in yaklaşık formülünü hesaplayalım.

Yardımcı Teorem 2.2.6.5

Teorem 2.2.2.1'in şartlarına ek olarak, $E(\eta_1^3) < \infty$ ve $s_0 < 0$ şartları sağlansın. Bu durumda $\beta \rightarrow \infty$ iken, $n \geq 1$ olmak üzere $E(U_n(\tilde{\zeta}_1))$ için aşağıdaki yaklaşık formülü verilebilir:

$$E(U_n(\tilde{\zeta}_1)) \approx A_{1n}(\gamma) \beta^{n+1} + A_{2n}(\gamma) \beta^n + \sum_{r=0}^{n-1} C_{nr}(\gamma) \beta^{n-1-r} + A_{3n}(\gamma) \beta^{-2} \quad (84)$$

Burada, $A_{jn}, j = 1, 2, 3$ ve $C_{nr}(\gamma)$ aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned} A_{1n}(\gamma) &= \frac{(1+\gamma)^{n+2}}{\mu_1(n+3)(n+1)n} + \frac{2(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+2)(n+1)n} \\ &\quad - \frac{2^{n+3} - (1+\gamma)^{n+3}}{\mu_1(1-\gamma)(n+3)(n+1)n} \\ A_{2n}(\gamma) &= \frac{c_1(1+\gamma)^{n+1}}{(n+2)n} + \frac{2c_1(2^{n+1} - (1+\gamma)^{n+1})}{(1-\gamma)(n+1)n} - \frac{c_1(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+2)n}, \\ A_{3n}(\gamma) &= -\frac{c_2(n-1)!}{(1+\gamma)s_0^{n+2}}, \\ C_{nr}(\gamma) &= c_2(n-1)! \left[\frac{(1+\gamma)^{n-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} + \frac{2(2^{n-r} - (1+\gamma)^{n-r})}{s_0^{r+1}(1-\gamma)(n-r)!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2^{n-1-r} - (1+\gamma)^{n-1-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} \right]. \end{aligned}$$

c_1, c_2 denklem (30) ile verilmiştir.

İspat:

$U_n(\tilde{\zeta}_1)$ 'nin beklenen değerinin tanımını aşağıdaki gibi verilebilir.

$$E(U_n(\tilde{\zeta}_1)) = \int_0^{2\beta} U_n(x) \tilde{p}(x) dx$$

Dolaysı ile,

$$\begin{aligned}
E\left(U_n(\xi_1)\right) &= \int_0^{\beta(1+\gamma)} \frac{x}{\beta^2(1+\gamma)} U_n(x) dx + \int_{\beta(1+\gamma)}^{2\beta} \frac{2\beta}{\beta^2(1-\gamma)} U_n(x) dx \\
&\quad - \int_{\beta(1+\gamma)}^{2\beta} \frac{x}{\beta^2(1-\gamma)} U_n(x) dx \\
&= \frac{1}{\beta^2(1+\gamma)} \int_0^{\beta(1+\gamma)} x U_n(x) dx \\
&\quad + \frac{2\beta}{\beta^2(1-\gamma)} \left[\int_0^{2\beta} U_n(x) dx - \int_0^{\beta(1+\gamma)} U_n(x) dx \right] \\
&\quad - \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} \left[\int_0^{2\beta} x U_n(x) dx - \int_0^{\beta(1+\gamma)} x U_n(x) dx \right]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$I_1(y)$ ve $I_2(y)$ 'nin tanımlarını kullanılarak, $n \geq 1$ için $E\left(U_n(\xi_1)\right)$ aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$\begin{aligned}
E\left(U_n(\xi_1)\right) &= \frac{1}{\beta^2(1+\gamma)} I_2(\beta(1+\gamma)) + \frac{2}{\beta(1-\gamma)} [I_1(2\beta) - I_1(\beta(1+\gamma))] \\
&\quad - \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} [I_2(2\beta) - I_2(\beta(1+\gamma))]. \tag{85}
\end{aligned}$$

Şimdi denklem (85)'in sağ taraftaki birinci terim yaklaşık olarak inceleyelim.

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\beta^2(1+\gamma)} I_2(\beta(1+\gamma)) \\
&\approx \frac{1}{\beta^2(1+\gamma)} \frac{(\beta(1+\gamma))^{n+3}}{(n+3)(n+1)n\mu_1} + \frac{1}{\beta^2(1+\gamma)} \frac{c_1(\beta(1+\gamma))^{n+2}}{(n+2)n} \\
&\quad + \frac{1}{\beta^2(1+\gamma)} c_2(n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\beta(1+\gamma))^{n+1-r}}{(n+1-r)(n-1-r)! s_0^{r+1}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{\beta^2(1+\gamma)} \frac{c_2(n-1)!}{s_0^n} \left[e^{s_0 \beta(1+\gamma)} \left(\frac{(\beta(1+\gamma))}{s_0} - \frac{1}{s_0^2} \right) + \frac{1}{s_0^2} \right] \\
& \approx \frac{(1+\gamma)^{n+2}}{\mu_1(n+3)(n+1)n} \beta^{n+1} + \frac{c_1(1+\gamma)^{n+1}}{(n+2)n} \beta^n \\
& + c_2(n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(1+\gamma)^{n-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} \beta^{n-1-r} \\
& - \frac{c_2(n-1)!}{(1+\gamma)s_0^{n+2}} \beta^{-2}
\end{aligned} \tag{86}$$

dir. İkinci terim ise aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{\beta(1-\gamma)} [I_1(2\beta) - I_1(\beta(1+\gamma))] \\
& \approx \frac{2}{\beta(1-\gamma)} \frac{(2\beta)^{n+2}}{(n+2)(n+1)n\mu_1} + \frac{2}{\beta(1-\gamma)} \frac{c_1(2\beta)^{n+1}}{(n+1)n} \\
& + \frac{2}{\beta(1-\gamma)} c_2(n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(2\beta)^{n-r}}{(n-r)!s_0^{r+1}} - \frac{c_2(n-1)!}{s_0^n} \\
& - \frac{2}{\beta(1-\gamma)} \frac{(\beta(1+\gamma))^{n+2}}{(n+2)(n+1)n\mu_1} - \frac{2}{\beta(1-\gamma)} \frac{c_1(\beta(1+\gamma))^{n+1}}{(n+1)n} \\
& - \frac{2}{\beta(1-\gamma)} c_2(n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\beta(1+\gamma))^{n-r}}{(n-r)!s_0^{r+1}} \\
& + \frac{2}{\beta(1-\gamma)} \frac{c_2(n-1)!}{s_0^n} \\
& \approx \frac{2(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+2)(n+1)n} \beta^{n+1} + \frac{2c_1(2^{n+1} - (1+\gamma)^{n+1})}{(1-\gamma)(n+1)n} \beta^n \\
& + c_2(n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2(2^{n-r} - (1+\gamma)^{n-r})}{s_0^{r+1}(1-\gamma)(n-r)!} \beta^{n-1-r}.
\end{aligned} \tag{87}$$

Ve son terim,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} [I_2(2\beta) - I_2(\beta(1+\gamma))] \\
& \approx \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} \frac{(2\beta)^{n+3}}{(n+3)(n+1)n\mu_1} + \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} \frac{c_1(2\beta)^{n+2}}{(n+2)n} \\
& + \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} c_2(n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(2\beta)^{n+1-r}}{(n+1-r)(n-1-r)! s_0^{r+1}} \\
& - \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} \frac{c_2(n-1)!}{s_0^n} \left[e^{s_0(2\beta)} \left(\frac{2\beta}{s_0} - \frac{1}{s_0^2} \right) + \frac{1}{s_0^2} \right] \\
& - \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} \frac{(\beta(1+\gamma))^{n+3}}{(n+3)(n+1)n\mu_1} - \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} \frac{c_1(\beta(1+\gamma))^{n+2}}{(n+2)n} \\
& - \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} c_2(n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(\beta(1+\gamma))^{n+1-r}}{(n+1-r)(n-1-r)! s_0^{r+1}} \\
& + \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} \frac{c_2(n-1)!}{s_0^n} \left[e^{s_0\beta(1+\gamma)} \left(\frac{\beta(1+\gamma)}{s_0} - \frac{1}{s_0^2} \right) + \frac{1}{s_0^2} \right] \\
& \approx - \frac{2^{n+3} - (1+\gamma)^{n+3}}{\mu_1(1-\gamma)(n+3)(n+1)n} \beta^{n+1} - \frac{c_1(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+2)n} \beta^n \\
& - c_2(n-1)! \sum_{r=0}^{n-1} \frac{2^{n-1-r} - (1+\gamma)^{n-1-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} \beta^{n-1-r} \quad (88)
\end{aligned}$$

gibi bulunur.

Sırasıyla (86), (87), (88) ile verilen aşağıdaki ifadeler

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\beta^2(1+\gamma)} I_2(\beta(1+\gamma)), \quad \frac{2}{\beta(1-\gamma)} [I_1(2\beta) - I_1(\beta(1+\gamma))], \\
& \frac{1}{\beta^2(1-\gamma)} [I_2(2\beta) - I_2(\beta(1+\gamma))],
\end{aligned}$$

denklem (85)' de yerine koyularak

$$\begin{aligned}
E\left(U_n(\tilde{\zeta}_1)\right) &\approx \left[\frac{(1+\gamma)^{n+2}}{\mu_1(n+3)(n+1)n} + \frac{2(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+2)(n+1)n} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2^{n+3} - (1+\gamma)^{n+3}}{\mu_1(1-\gamma)(n+3)(n+1)n} \right] \beta^{n+1} \\
&\quad + \left[\frac{c_1(1+\gamma)^{n+1}}{(n+2)n} + \frac{2c_1(2^{n+1} - (1+\gamma)^{n+1})}{(1-\gamma)(n+1)n} \right. \\
&\quad \left. - \frac{c_1(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+2)n} \right] \beta^n - \left[\frac{c_2(n-1)!}{(1+\gamma)s_0^{n+2}} \right] \beta^{-2} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1} c_2(n-1)! \left[\frac{(1+\gamma)^{n-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2(2^{n-r} - (1+\gamma)^{n-r})}{s_0^{r+1}(1-\gamma)(n-r)!} - \frac{2^{n-1-r} - (1+\gamma)^{n-1-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} \right] \beta^{n-1-r}
\end{aligned}$$

elde edilir.

Son olarak, (67) ve (84) numaralı denklemlerde sırası ile verilen $E\left(U_\eta(\tilde{\zeta}_1)\right)$ ve $E\left(U_n(\tilde{\zeta}_1)\right)$ yaklaşımlarını inceledikten sonra, şimdi bu kısımda ikinci temel hedefimiz olan ele alınan $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecin n . dereceden ergodik momentleri $E(\tilde{X}^n)$ için yaklaşık formüllü aşağıdaki teorem ile verebiliriz.

Teorem 2.2.6.1

Teorem 2.2.2.1 ve Teorem 1.5.1 ve $s_0 < 0$ koşulları sağlansın. Ayrıca ζ_1 rasgele değişkeninin (s, m, S) parametreleri ile asimetrik üçgensel dağılıma sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda, $n \geq 1$ olmak üzere, $\tilde{X}(t) = X(t) - s$ sürecinin ergodik dağılımının n . mertebeden momentleri için $\beta \rightarrow \infty$ için aşağıdaki yaklaşımlar yazılabilir:

$$\begin{aligned}
E(\tilde{X}^n) &\approx D_{1n}(\gamma) \frac{\beta^{n+3}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + D_{2n}(\gamma) \frac{\beta^{n+2}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
&\quad + \sum_{r=0}^{n-1} n c_{nr}(\gamma) \frac{\beta^{n+1-r}}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} + D_{3n}(\gamma) \frac{1}{b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3} \\
&\quad + D_{4n}(\gamma) \frac{\beta^{n+3} e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3 + b_2\beta^2 + b_3)^2}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Burada,

$$D_{1n}(\gamma) = \frac{(1+\gamma)^{n+2}}{\mu_1(n+3)(n+1)} + \frac{2(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+2)(n+1)} - \frac{2^{n+3} - (1+\gamma)^{n+3}}{\mu_1(1-\gamma)(n+3)(n+1)}$$

$$D_{2n}(\gamma) = \frac{c_1(1+\gamma)^{n+1}}{(n+2)} + \frac{2c_1(2^{n+1} - (1+\gamma)^{n+1})}{(1-\gamma)(n+1)} - \frac{c_1(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{(1-\gamma)(n+2)},$$

$$D_{3n}(\gamma) = -\frac{c_2 n!}{(1+\gamma)s_0^{n+2}},$$

$$D_{4n}(\gamma) = -\frac{2c_2}{(1-\gamma^2)s_0^2} \left[\frac{(1+\gamma)^{n+2}}{\mu_1(n+3)(n+1)} + \frac{2(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+1)(n+2)} - \frac{(2^{n+3} - (1+\gamma)^{n+3})}{\mu_1(1-\gamma)(n+1)(n+2)} \right],$$

$$C_{nr}(\gamma) = c_2(n-1)! \left[\frac{(1+\gamma)^{n-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} + \frac{2(2^{n-r} - (1+\gamma)^{n-r})}{s_0^{r+1}(1-\gamma)(n-r)!} - \frac{2^{n-1-r} - (1+\gamma)^{n-1-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} \right].$$

c_1, c_2 denklem (30) verilmiştir. $\gamma \in (0,1)$.

İspat:

$\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n . mertebeden momentleri kesin formülleri

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{n \int_0^{2\beta} x^{n-1} E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1 - x)) dx}{E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1))}, n = 1, 2, \dots$$

biçiminde elde edilmiştir. Ayrıca Yardımcı Teorem 2.2.6.5 ile

$$E(U_n(\tilde{\zeta}_1)) = \int_0^{2\beta} x^{n-1} E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1 - x)) dx$$

ifadesinin yaklaşımı elde edilmiştir.

Diğer taraftan, Sonuç 2.2.3.1 ile $E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1))$ ' nin yaklaşık formülü verilmiştir.

$E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1))$ ve $E(U_n(\tilde{\zeta}_1))$ sonuçları $E(\tilde{X}^n)$ ifadesinde yerine yazılır ise

$$E(\tilde{X}^n) = \frac{n E(U_n(\tilde{\zeta}_1))}{E(U_\eta(\tilde{\zeta}_1))},$$

Dolaysı ile,

$$\begin{aligned} E(\tilde{X}^n) &\approx n \left\{ A_{1n}(\gamma) \beta^{n+1} + A_{2n}(\gamma) \beta^n + \sum_{r=0}^{n-1} C_{nr}(\gamma) \beta^{n-1-r} + A_{3n}(\gamma) \beta^{-2} \right\} \\ &\quad \times \left\{ \frac{\beta^2}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} - \frac{b_4 \beta^2 e^{\beta s_0(1+\gamma)}}{(b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3)^2} \right\}, \\ &\approx \left[\frac{(1+\gamma)^{n+2}}{\mu_1(n+3)(n+1)} + \frac{2(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+2)(n+1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2^{n+3} - (1+\gamma)^{n+3}}{\mu_1(1-\gamma)(n+3)(n+1)} \right] \frac{\beta^{n+3}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\ &\quad + \left[\frac{c_1(1+\gamma)^{n+1}}{(n+2)} + \frac{2c_1(2^{n+1} - (1+\gamma)^{n+1})}{(1-\gamma)(n+1)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_1(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{(1-\gamma)(n+2)} \right] \frac{\beta^{n+2}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\ &\quad + \sum_{r=0}^{n-1} c_2 n! \left[\frac{(1+\gamma)^{n-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(2^{n-r} - (1+\gamma)^{n-r})}{s_0^{r+1}(1-\gamma)(n-r)!} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2^{n+1-r} - (1+\gamma)^{n+1-r}}{s_0^{r+1}(n+1-r)(n-1-r)!} \right] \frac{\beta^{n+1-r}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\ &\quad - \frac{c_2 n!}{(1+\gamma)s_0^{n+2}} \frac{1}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \\ &\quad - \frac{2c_2}{(1-\gamma^2)s_0^2} \left[\frac{(1+\gamma)^{n+2}}{\mu_1(n+3)(n+1)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(2^{n+2} - (1+\gamma)^{n+2})}{\mu_1(1-\gamma)(n+1)(n+2)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2^{n+3} - (1+\gamma)^{n+3})}{\mu_1(1-\gamma)(n+1)(n+2)} \right] \frac{\beta^{n+3} e^{s_0 \beta(1+\gamma)}}{b_1 \beta^3 + b_2 \beta^2 + b_3} \end{aligned}$$

sonucuna ulaşılır.

Sonuç 2.2.6.1

Teorem 2.2.6.1'deki şartları sağlansın. Bu durumda $\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının ilk dört momenti için moment-bazlı yaklaşımlar aşağıdaki gibi verilir.

$$\begin{aligned}
E(\tilde{X}) \approx & D_{11}(\gamma) \frac{\beta^4}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{21}(\gamma) \frac{\beta^3}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + C_{10}(\gamma) \frac{\beta^2}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + D_{31}(\gamma) \frac{1}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{41}(\gamma) \frac{\beta^4 e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2}, \quad (90)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\tilde{X}^2) \approx & D_{12}(\gamma) \frac{\beta^5}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{22}(\gamma) \frac{\beta^4}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + 2C_{20}(\gamma) \frac{\beta^3}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + 2C_{21}(\gamma) \frac{\beta^2}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{32}(\gamma) \frac{1}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + D_{42}(\gamma) \frac{\beta^4 e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2}, \quad (91)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\tilde{X}^3) \approx & D_{13}(\gamma) \frac{\beta^6}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{23}(\gamma) \frac{\beta^5}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + C_{30}(\gamma) \frac{3!\beta^4}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + 3!C_{31}(\gamma) \frac{\beta^3}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + 3!C_{32}(\gamma) \frac{\beta^2}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + D_{33}(\gamma) \frac{1}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{43}(\gamma) \frac{\beta^6 e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3}, \quad (92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(\tilde{X}^4) \approx & D_{14}(\gamma) \frac{\beta^7}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{24}(\gamma) \frac{\beta^6}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + C_{40}(\gamma) \frac{4!\beta^5}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + 4!C_{41}(\gamma) \frac{\beta^4}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + 4!C_{42}(\gamma) \frac{\beta^3}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + 4!C_{43}(\gamma) \frac{\beta^2}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{34}(\gamma) \frac{1}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + D_{44}(\gamma) \frac{\beta^6 e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \quad (93)
\end{aligned}$$

Burada,

$$\begin{aligned}
D_{11}(\gamma) &= \frac{(1+\gamma)^3 + 4}{6\mu_1(1-\gamma)}, \quad D_{21} = \frac{3c_1(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)}, \quad C_{10}(\gamma) = \frac{c_2}{s_0}, \\
D_{31}(\gamma) &= -\frac{7c_2(1+\gamma)^3}{12\mu_1(1-\gamma^2)s_0^2},
\end{aligned}$$

$$D_{12}(\gamma) = \frac{(1+\gamma)^4}{15\mu_1} + \frac{2(2^4 - (1+\gamma)^4)}{12\mu_1(1-\gamma)} - \frac{2^5 - (1+\gamma)^5}{15\mu_1(1-\gamma)},$$

$$D_{22}(\gamma) = \frac{c_1(1+\gamma)^3}{4} + \frac{2c_1(8 - (1+\gamma)^3)}{3(1-\gamma)} - \frac{c_1(2^4 - (1+\gamma)^4)}{4(1-\gamma)},$$

$$C_{20}(\gamma) = 2c_2 \left[\frac{(1+\gamma)^2}{3s_0} + \frac{2(1+\gamma)}{2s_0} - \frac{(1-\gamma)}{3s_0} \right], \quad C_{21}(\gamma) = \frac{2c_2(4+\gamma)}{3s_0^2}$$

$$D_{32}(\gamma) = -\frac{2c_2}{(1+\alpha)s_0^4},$$

$$D_{42}(\gamma) = -\frac{2c_2}{(1-\gamma^2)s_0^2} \left[\frac{(1+\gamma)^4}{15\mu_1} + \frac{2(2^4 - (1+\gamma)^4)}{12\mu_1(1-\gamma)} - \frac{(2^5 - (1+\gamma)^5)}{12\mu_1(1-\gamma)} \right],$$

$$D_{13}(\gamma) = \left[\frac{(1+\gamma)^5}{24\mu_1} + \frac{2(2^5 - (1+\gamma)^5)}{20\mu_1(1-\gamma)} - \frac{2^6 - (1+\gamma)^6}{24\mu_1(1-\gamma)} \right],$$

$$D_{23}(\gamma) = \left[\frac{c_1(1+\gamma)^4}{5} + \frac{2c_1(2^4 - (1+\gamma)^4)}{4(1-\gamma)} - \frac{c_1(2^5 - (1+\gamma)^5)}{5(1-\gamma)} \right],$$

$$C_{30}(\gamma) = 6c_2 \left[\frac{(1+\gamma)^3}{8s_0} + \frac{2(2^3 - (1+\gamma)^3)}{6s_0(1-\gamma)} - \frac{2^2 - (1+\gamma)^2}{8s_0} \right],$$

$$C_{31}(\gamma) = 6c_2 \left[\frac{(1+\gamma)^2}{3s_0^2} + \frac{1+\gamma}{s_0^2} - \frac{(1-\gamma)}{3s_0^2} \right],$$

$$C_{32}(\gamma) = 6c_2 \left[\frac{1+\gamma}{8s_0^3} + \frac{2}{s_0^3} - \frac{2^2 - (1+\gamma)^2}{8s_0^3} \right],$$

$$D_{33}(\gamma) = 6c_2 \left[\frac{4+\gamma}{2s_0^3} - \frac{1}{(1+\gamma)s_0^5} \right].$$

Teorem 2.2.6.1' in ikinci önemli bir sonucu olarak $\tilde{X}(t)$ surecinin varyansı aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Sonuç 2.2.6.2

Teorem 2.2.6.1'deki şartlar sağlansın. Bu durumda, $\tilde{X}(t)$ sürecinin ergodik dağılımının varyansı için yaklaşık formül aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
Var[\tilde{X}] \approx & V_1(\gamma) \frac{\beta^8}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} + V_2(\gamma) \frac{\beta^7}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
& + V_3(\gamma) \frac{\beta^6}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} + V_4(\gamma) \frac{\beta^5}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + V_5(\gamma) \frac{\beta^4}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + V_6(\gamma) \frac{\beta^3}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3}
\end{aligned} \tag{94}$$

Burada,

$$V_1(\gamma) = [D_{11}(\gamma)]^2, \quad V_2(\gamma) = -2D_{11}(\gamma)D_{21}(\gamma)$$

$$V_3(\gamma) = -[[D_{21}(\gamma)]^2 + 2D_{11}(\gamma)C_{10}(\gamma)], \quad V_4(\gamma) = D_{21}(\gamma),$$

$$V_5(\gamma) = D_{22}(\gamma), \quad V_6(\gamma) = 2C_{20}(\gamma).$$

İspat:

Biliyoruz ki,

$$Var[\tilde{X}] = E(\tilde{X}^2) - [E(\tilde{X})]^2.$$

$E(\tilde{X}^2)$ ve $E(\tilde{X})$ Sonuç 2.2.6.1' de elde edilmiştir. Şimdi $[E(\tilde{X})]^2$ ifadesini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
[E(\tilde{X})]^2 \approx & \left\{ D_{11}(\gamma) \frac{\beta^4}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{21}(\gamma) \frac{\beta^3}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \right. \\
& + C_{10}(\gamma) \frac{\beta^2}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{31}(\gamma) \frac{1}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& \left. + D_{41}(\gamma) \frac{\beta^4 e^{s_0 \beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \right\}^2,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[E(\tilde{X})]^2 &\approx [D_{11}(\gamma)]^2 \frac{\beta^8}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} + 2D_{11}(\gamma)D_{21}(\gamma) \frac{\beta^7}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&+ [[D_{21}(\gamma)]^2 + 2D_{11}(\gamma)C_{10}(\gamma)] \frac{\beta^6}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&+ C_{10}(\gamma) \frac{\beta^5}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&+ [[C_{10}(\gamma)]^2 + 2D_{11}(\gamma)D_{31}(\gamma)] \frac{\beta^4}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&+ 2D_{21}(\gamma)D_{31}(\gamma) \frac{\beta^3}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&+ 2C_{10}(\gamma)D_{31}(\gamma) \frac{\beta^2}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} - [D_{31}(\gamma)]^2 \frac{1}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&+ 2D_{11}(\gamma)D_{41}(\gamma) \frac{\beta^8 e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^3}.
\end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned}
Var[\tilde{X}] &\approx D_{12}(\gamma) \frac{\beta^5}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{22}(\gamma) \frac{\beta^4}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + C_{20}(\gamma) \frac{2\beta^3}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
&+ D_{32}(\gamma) \frac{1}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{42}(\gamma) \frac{\beta^4 e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&- [D_{11}(\gamma)]^2 \frac{\beta^8}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} - 2D_{11}(\gamma)D_{21}(\gamma) \frac{\beta^7}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&- [[C_{10}(\gamma)]^2 + 2D_{11}(\gamma)D_{31}(\gamma)] \frac{\beta^4}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&- 2D_{21}(\gamma)D_{31}(\gamma) \frac{\beta^3}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} - 2D_{21}(\gamma)D_{31}(\gamma) \frac{\beta^3}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
&- [D_{31}(\gamma)]^2 \frac{1}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} - 2D_{11}(\gamma)D_{41}(\gamma) \frac{\beta^8 e^{s_0\beta(1+\gamma)}}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^3}
\end{aligned}$$

dır. Dolayısı ile,

$$\begin{aligned}
Var[\tilde{X}] \approx & -[D_{11}(\gamma)]^2 \frac{\beta^8}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} - 2D_{11}(\gamma)D_{21}(\gamma) \frac{\beta^7}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
& - [[D_{21}(\gamma)]^2 + 2D_{11}(\gamma)C_{10}(\gamma)] \frac{\beta^6}{(b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3)^2} \\
& + D_{12}(\gamma) \frac{\beta^5}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} + D_{22}(\gamma) \frac{\beta^4}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} \\
& + 2C_{20}(\gamma) \frac{\beta^3}{b_1\beta^3+b_2\beta^2+b_3} .
\end{aligned}$$

gibi elde edilir.

3. BULGULAR

Yenileme süreçlerinin, güvenilirlik, stok kontrolü ve kuyruk teorisi gibi çeşitli alanlarda uygulanmaları mevcuttur. (s, S) tipli yarı-Markov stok kontrol modellerinin karakteristikleri incelenirken talep rasgele değişkenleri tarafından üretilen yenileme fonksiyonu kullanılmaktadır. Literatürde bugüne kadar kullanılan yenileme fonksiyonlarının tamamı talep rasgele değişkenlerinin dağılımı olan $F(t)$ 'nin yapısının bilinmesini gerektirmektedir. Bu çalışmada ise literatürde Kambo vd., (2012) tarafından önerilmiş olan bir yenileme fonksiyonu kullanılmıştır.

Ayrıca, literatürde bu model için yapılan çalışmalarda asimptotik açılımlar elde edilmiştir, asimptotik açılımların ikinci veya üçüncü terimden sonraki kalan terimleri büyük $oh(O)$ ve küçük $oh(o)$ ile gösterilmiştir. Fakat, bu notasyonlar kalan terimlerin sıfıra yakınsama şekli ile ilgili net bir bilgi vermemektedir.

Bu çalışmada ise, (s, S) tipli yarı-Markov stok kontrol model için kapsamlı ve basit yaklaşımlara ulaşılmıştır.

Öncelikle, klasik (s, S) tipli yarı-Markov stok kontrol modeli ele alınmış ve Kambo vd., (2012) tarafından önerilen yenileme fonksiyonu için yaklaşım formülü kullanılarak, ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için yaklaşımlar elde edilmiştir. Daha sonra, $\beta \rightarrow \infty$ için limit dağılımına ulaşılmıştır. Kambo'nun yaklaşımına göre elde edilen yaklaşık formüllerin, literatürde mevcut olan Feller formüllerine göre daha etkin olduğunu göstermek için özel bir örnek ele alınmıştır.

İkinci olarak, modelimize asimetrik üçgensel müdahale koyarak ergodik dağılımı ve ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için yaklaşık formüller elde edilmiş ve limit dağılım fonksiyonuna ulaşılmıştır.

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, ilk olarak klasik (s, S) tipli yarı-Markov envanter model ele alınmış ve Kambo (2012) tarafından önerilen yenileme fonksiyonu kullanılmıştır.

- 1) Klasik (s, S) tipli yarı-Markov envanter modeli temsil eden $X(t)$ ödüllü yenileme sürecinin ergodik dağılımı için yaklaşık formül elde edilmiştir.
- 2) Bu modelde müdahale etkisinin olmadığı varsayılmaktadır. Bu durumda, $\beta \equiv S - s \rightarrow \infty$ için $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının $x \in (0,1)$ için her zaman düzgün dağılıma yakınsadığı ispatlanmıştır.
- 3) Kambo'nun yaklaşımına göre elde edilen yaklaşık formüllerin, literatürde mevcut olan Feller formüllerine göre daha etkin olduğunu göstermek için özel örnekler ele alınmıştır.
- 4) Kambo'nun yaklaşımına göre türetilen yaklaşık formüllerin kullanımının daha tercih edilebilir olduğu sonucuna varılmıştır.
- 5) Asimetrik üçgensel müdahale ekleyerek, $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının yaklaşık formüllü elde edilmiştir.
- 6) $X(t)$ sürecinin limit dağılımına $\beta \rightarrow \infty$ için ulaşılmıştır.
- 7) Talepler ifade eden rasgele değişken ikinci dereceden Erlang dağılıma sahipken, asimetri katsayısı $\gamma = 0$ ve $\gamma = 0,7$ iki özel örnek incelenmiştir.
- 8) $X(t)$ sürecinin ergodik dağılımının n . dereceden momentleri için yaklaşımlar elde edilmiştir.
- 9) Elde edilen yaklaşımlar kullanılarak $X(t)$ sürecinin ilk dört momenti ve varyansı için yaklaşımlar elde edilmiştir.

5. ÖNERİLER

Literatürde (s, S) tipli yarı-Markov envanter modellerine yönelik pek çok asimptotik açılım bulunmasına rağmen bu modeller için moment bazlı yaklaşım formülleri önerilen çalışma bulunmamaktadır. Bu tez çalışmasının konu ile ilgili literatüre bu açıdan katkı sağlayacağı öngörülmektedir. Bununla beraber, gelecekte bu çalışma aşağıdaki yönlerde geliştirilebilir:

- 1) Müdahaleyi ifade eden rasgele değişkenin farklı dağılımlara sahip olması durumunda benzer modelin incelenmesi.
- 2) Bu çalışmada kullanılan yenileme fonksiyonu için elde edilmiş olan moment-bazlı yaklaşım kullanılarak rasgele yürüyüş süreçlerinin karakteristikleri için moment bazlı yaklaşımlar elde edilmesi.
- 3) Talep miktarını ifade eden rasgele değişkenlerin farklı dağılımlara sahip olduğu durumda, bu rasgele değişkenlerin momentleri hesaplanıp elde edilen sonuçlar kullanılarak, bu çalışmada elde edilmiş olan yaklaşım formülleri geliştirilebilir.

6. KAYNAKLAR

- Abate, J. (1995). Numerical inversion of Laplace transforms probability distributions. *ORSA Journal on Computing*, 7(1), 36-43.
- Aliyev, R. (2016). On a stochastic process with a heavy-tailed distributed component describing inventory model type of (s, S) . *Communications in Statistics- Theory and Methods*, 46 (5), 2571-9.
- Aliyev, R. , Rzazada, G. I., Hanalioğlu, Z. I. & Khaniyev, T. (2020). Weak convergence theorem for a stock control model of type (s, S) with normal distributed interference of chance. *7th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications (COIA)- AUG 26-28*.
- Aliyev, R. (2010). *Stokastik Süreçler Teorisine Giriş*, Karadeniz Teknik Üniversitesi Matbaası, Trabzon.
- Aliyev, R., (2018). Asymptotic expansions for the some probability characteristics of the one stochastic process with a heavy tailed distributed component having finite variance. *Journal of Contemporary Applied Mathematics*, 8(1), 51-61.
- Aliyev, R., Ardıç, Ö. & Khaniyev, T. (2016). Asymptotic approach for a renewal-reward process with a general interference of chance. *Communication in Statistics: Theory and Methods*, 45(14), 4237-4248.
- Arunachalam, V., & Calvache, Á. (2014). Approximation of the bivariate renewal function. *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, 44(1), 154–167.
- Arunachalam, V., Calvache, A., & Tansu, A. (2015). Some useful approximations for the availability function. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 22(02), 1550008–1550115.
- Ayhan, H., Limon-Robles, J., & Wortman, M. A. (1999). An approach for computing tight numerical bounds on renewal functions. *IEEE Transactions on Reliability* ,48(2) 182-188.
- Bartholomew, D. J. (1963). An approximate solution of the integral equation of renewal theory. *The Royal Statistical Society* ,25, 432-441.
- Bartholomew, D.J. & Forbes, A.F. (1979). *Statistical techniques for manpower planning*. Wiley, Chichester.
- Bartholomew, D.J. (1973). *Stochastic models for social processes*. Wiley, Chichester.
- Bartholomew, D.J. (1976). Renewal theory models in manpower planning. *Symp. Proc. Series 8*, 57-73.
- Bekar, N., O., Aliyev, R. & Khaniyev, T. (2013). Asymptotic expansions for a renewal-reward process with weibull distributed interference of chance. *Contemporary Analysis and Applied Mathematics*, 2(1), 200-211.

- Blackwell, D., A. (1948). Renewal theorem, *Duke Mathematic Journal*, 15, 145-150.
- Campbell, A. G. (2018). Simple approximations to the renewal Function. University Honors Program Thesis. University of Nebraska, Omaha.
- Cox, D. R. (1962). *Renewal Theory*, London: Wiley.
- Cox, D.P. & Lewis, P. (1969). *Statistical Analysis of Sequences of Events*, London.
- Cui, L. & Xie, M. (2003). Some normal approximation for renewal function of large weibull shape parameter. *Communication in Statistics, Simulation and Computation*, 32(1), 1-16.
- Çinlar, E.(1975). *An introduction to stochastic processes*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.
- Daley, D. J. (1976). Another upper bound for the renewal function. *The Annals of Probability* 4(1), 109-114.
- Deligonul, Z. S. (1985). An approximate solution of the integral equation of renewal theory. *Applied Probability*, 22,926-931.
- Doob, J.L. (1948). Renewal theory from the point of view of the theory of probability .*Trans. Amer. Math. Soc*, 63, 422-438.
- Feller, W. (1941). On the Integral Equation of Renewal Theory. *The Annals of Mathematical Statistics*, 12(3), 243-267.
- Feller, W. (1948).On probability problems in the theory of counters.
- Feller, W. (1949).Fluctuation theory of recurrent events. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 67, 98-119.
- Feller, W. (1971). *An Introduction to Probability Theory and Its Applications II*. New York: John Wiley.
- Fréchet, M. (1949). Statistical self-renewing aggregates. Cairo: Fouad I University Press.
- Garg, A. and Kalagnanam, J. R. (1998). Approximations for the renewal function. *IEEE Transactions on Reliability*, 47(1), 66-72.
- Gever, B., & Khaniyev, T. (2022). Stationary Characteristics for Renewal-Reward Process with Generalized Reflecting Barrier and Fuzzy Demands. *In Multiple Criteria Decision Making with Fuzzy Sets: MS Excel® and Other Software Solutions*, 193-207. Springer.
- Gihman, I.I., & Skorohod, A.V. (1975). *Theory of stochastic processes II*, Springer.
- Grabski, F. (2014). Semi-Markov Processes: Applications in System Reliability and Maintenance, Elsevier: Amsterdam, The Netherlands. 1–255.

- Grimmett, G., & Welsh, D.(2014). *Probability: An introduction II*. Oxford university press: UK.
- Hadley, G. & Whitin, T.M.(1963). *Analysis of inventory systems*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Hanalioglu, Z. & Khaniyev, T. (2018). Asymptotic results for an inventory model of type (s, S) with asymmetric triangular distributed interference of chance and delay. *Gazi University Journal of Science* 31 (1), 174-187.
- Hanalioglu, Z., Unver, F.N., & Khaniyev T. (2018). Asymptotic expansions for the moments of the renewal-reward process with a normal distributed interference of chance. *Applied and Computational Mathematics*, 17 (2), 141-150.
- Jiang, R. (2020). A novel two-fold sectional approximation of renewal function and its applications. *Reliability Engineering & Systems Safety*, 193, 106624.
- Jiang, R. (2022). Two approximations of renewal function for any arbitrary lifetime distribution. *Ann Oper Res* 311, 151–165.
- Kaalen, S.& Nyberg, M. (2020). Branching Transitions for Semi-Markov Processes with Application to Safety-Critical Systems. *In Proceedings of the 7th International Symposium, IMBSA, Portugal*, 14–16.
- Kambo, N. S., Rangan, A. & Hadji, E. M.. 2012. Moments-based approximation to the renewal function. *Communications in Statistics: Theory and Methods*. 41(5), 851-68.
- Kamışlık A.B., Alakoç, B., Kesemen, T., & Khaniyev, T. (2020). A semi-Markovian renewal reward process with $\Gamma(g)$ distributed demand. *Turkish Journal of Mathematics*, 44 (4), 1250-1262.
- Kamışlık A.B., Baghezz, F. Kesemen, T., & Khaniyev, T. (2023). Moment-based approximations for stochastic control model of type (s, S) . *Communications in Statistics - Theory and Methods*.
- Kamışlık, A. B., Kesemen, T. & Khaniyev, T. (2019). Inventory model of type (s, S) under heavy tailed demand with infinite variance. *Brazilian Journal of Probability and Statistics*, 33 (1), 39-56.
- Kamışlık, A. B., Kesemen, T. & Khaniyev, T. (2018). The class of $L \cap D$ and its application to renewal reward process. *AIP Conference Proceedings*, 1926 (1).
- Kamışlık, A.B., Kesemen, T. & Khaniyev, T.(2018). On the moments for ergodic distribution of an inventory model of type (s, S) with regularly varying demands having infinite variance. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 8(1), 318 – 329.
- Kesemen, T., Kamışlık A.B., Küçük, Z., & Şenol, E. (2016). Inventory model of type (s, S) with subexponential Weibull distributed demand. *Journal of the Turkish Statistical Association*, 9(3), 81-92.

- Keyfitz, N. (1968). *An introduction to mathematics of population*. Addison-Wesley, Reading, MA.
- Khaniyev, T. & Mammadova, Z. (2006). On the stationary characteristics of the extended model of type (s,S) with Gaussian distribution of summands. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 76 (10), 861-874.
- Khaniyev, T., & Aksop, C. (2011). Asymptotic results for an inventory model of type (s, S) with a generalized Beta interference of chance. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics*, 2(1), 223-36.
- Khaniyev, T., & Atalay, R.T. (2010). On the weak convergence of the ergodic distribution for an inventory model of type (s,S). *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 9 (4), 599-611.
- Khaniyev, T., & Sevinç, Ö. A. (2020). Limit theorem for a semi-Markovian random walk with general interference of chance. *Sains Malaysiana*, 49 (4), 919-928.
- Khaniyev, T., Kokangul A, & Aliyev, R.T. (2013). An asymptotic approach for a semi-Markovian inventory model of type (s, S). *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 29 (5), 439-453.
- Li, G. and Luo, J. (2005). Upper and lower bounds for the solutions of Markov renewal equations. *Mathematical Methods and Operations Research*, 62, 243-253.
- Losidis, S. (2024). Refinement bounds for the expected number of renewal epochs over a finite interval. *Statistics*, 58(1), 176–193.
- Lotka, A. J. (1939). A Contribution to the Theory of Self-Renewing Aggregates, With Special Reference to Industrial Replacement. *The Annals of Mathematical Statistics*, 10(1), 1-25.
- Mitov, K. V., & Omev, E. (2014). Intuitive approximations for the renewal function. *Statistics & Probability Letters*, 84, 72–80.
- Mitov, K. V., & Omev, E. (2014). *Renewal processes*. Springer Breifs in statistics.
- Nasirova, T. I., Yapar, C. & Khaniyev, T. (1998). On the probability characteristics of the stock level in the model of type (s, S). *Cybernetics and System Analysis*, 5, 69–76.
- Nasirova, T., Khaniyev, T., Yapar, C., Unver, İ. & Küçük, Z. (2009). *Olasılık*. Kardeniz teknik üniversitesi, Fen-edebiyat fakültesi. Trabzon.
- Neyman, J. (1960). *Journal of American Statistical Association*. page 625.
- Parsa, H., & Jin, M. (2013). An improved approximation for the renewal function and its integral with an application in two-echelon inventory management. *International Journal of Production Economics*, 146(1), 142–152.
- Politis, K., & Koutras, M. V. (2006). Some new bounds for the renewal function. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 20(2), 231–250.

- Politis, K., & Pitts, S. M. (1998). Approximations for solutions of renewal-type equations. *Stochastic Processes and their Applications*, 78(2), 195-216.
- Qi, W. Zong, G. & Zheng, W. X. (2021). Adaptive event-triggered smc for stochastic switching systems with semi-markov process and application to boost converter circuit model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I*: 68(2), 786-796.
- Ran, L., Cui, L., & Xie, M. (2006). Some analytical and numerical bounds on the renewal function. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 35, 1815- 1827.
- Ross, S., M., Stochastic Processes, John Wiley&Sons, New York, 1996.
- Smeitink, E. and Dekker, R. (1990). A simple approximation to the renewal function. *IEEE Transactions on Reliability*, 39(1), 71-75.
- Smith, W. L. (1954). Asymptotic renewal theorems, *Proc. Roy. Soc. Edinb*, 64, 9–48.
- Smith, W. L. (1958). Renewal theory and its ramifications. *J. Roy. Stat. Soc*, 20(2), 243-284.
- Smith, W. L. (1959). On the cumulants of renewal process. *Biometrika*, 46(1/2),1-29.
- Stathis C. & George T. (2022). Improved bounds for the solutions of renewal equations. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, 1-38.
- Stathis, C. (2023). Some bounds for the renewal function and the variance of the renewal process. *Applied Mathematics and Computation*, 436, 127497.
- Stephen, A., Ato, E.F., Appiahene, A. vd. (2022). Machine learning impact assessment of climate factors on daily covid-19 cases. *MedRexiv*.
- Şahin, I. (1983). On the continuous-review (s, S) inventory model under compound renewal demand and random lead times. *Journal of Applied Probability*. 20(1), 213-219.
- Takács, L. (1955). Investigation of waiting time problems by reduction to Markov processes. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, 6, 101–129
- Takács, L. (1951). Occurrence and coincidence phenomena in case of happenings with arbitrary distribution law of duration. *Acta Math. Hung.*, 2, 275–298.
- Takács, L. (1953), A new method for discussing recurrent stochastic processes. *Publications de l'Institut des Mathématiques Appliquées de l'Académie des Sciences de Hongrie*, 2, 135–151.
- Takács, L. (1954). On secondary processes generated by a Poisson process and their applications in physics. *Acta. Math. Hung.*, 5, 203–236.
- Takács, L. (1956). On a probability theorem arising in the theory of counters. *Proc Camb. Phil. Soc.*, 52, 488–498.
- Xie, M. (1989). On the solution of renewal-type integral equations. *Statistical Computation and Simulation*, 18(1), 281-293.

Xie, M., Preuss, W., & Cui, L. (2003). Error analysis of some integration procedures for renewal equation and convolution integrals. *Statistical Computation and Simulation*, 73(1), 59-70.



ÖZGEÇMİŞ

Feyrouz BAGHEZZA, Lise öğrenimini Batna ilinde Bouzina Lisesinde tamamladı. 2011-2016 yılları arasında National Higher School of Statistics and Applied Economics' de uygulamalı istatistik ve ekonometri bölümünde yüksek lisans öğrenimini bölüm birinciliği ile tamamladı.

2017-2018 yılında Bouzina lisesinde matematik öğretmenliği yaptı. 2018 yılında Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında Doktora programında eğitime başladı. Yabancı dili İngilizce Fransızca ve Türkçedir.

Doktora eğitimi sürecinde bilimsel dergilerde yapmış olduğu yayınlar aşağıdaki şekildedir.

A. MAKALELER

Kamışlık A.B., **Baghezza, F.** Kesemen, T., & Khaniyev, T. (2023). Moment-based approximations for stochastic control model of type (s, S) . *Communications in Statistics- Theory and Methods*. <https://doi.org/10.1080/03610926.2023.2268765>.

Baghezza, F., Kamışlık, A.B., Yazır, T. & Khaniyev, T. Moment-based approximations for ergodic distribution of a stochastic control model of type (s, S) with asymmetric triangular distributed interference of chance. *Mediterranean journal of mathematics*. (Değerlendirme aşamasında)

Baghezza, F., Yazır, T., Kamışlık, A.B., & Khaniyev, T. Moment-based approximations for the moments of a renewal-reward process with asymmetric triangular distributed interference of chance. *Gazi university, journal of science*. (Değerlendirme aşamasında).

B. BİLDİRİLER

Khaniyev, T., **Baghezza, F.**, Bektaş Kamışlık, A., & Yazır, T. (2024). Moment Based Approximation for stationary characteristics of a stochastic control model of type (s, S) with asymmetric triangular distributed interference of chance. *V. international applied statistics congress UYIK*, s. 73. İstanbul. Türkiye.

Baghezza, F., Kamışlık, A. B., Kesemen, T., & Khaniyev, T. (2023). Moment Based Approximation for a Semi-Markovian Inventory Model with Asymmetric Triangular Distributed Interference of Chance. *2nd International E-Conference on Mathematical and Statistical Science: A Selcuk Meeting*, s.124. Konya, Turkey.

Bektaş Kamışlık, A., Kesemen, T., Hanalioğlu, T., & **Baghezza, F.**, (2021). Moment Based Approximation for a Semi Markovian Inventory Model of Type (s, S) . *ASMDA 2021 Conference and Demographics Workshop Applied Stochastic Models and Data Analysis International Conference*, s.26. Athens, Yunanistan.