



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SABİT LİMİT UZAYLAR KATEGORİSİNDE AYIRMA
AKSİYOMLARI, KAPALILIK, BAĞLANTILILIK, SOBERLİK
VE KOMPAKTLIK**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra ÇEVİK

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Ayhan ERCİYES**

AKSARAY, 2023

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342401 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Kübra ÇEVİK tarafından hazırlanan “**SABİT LİMİT UZAYLAR KATEGORİSİNDE AYIRMA AKSİYOMLARI, KAPALILIK, BAĞLANTILILIK, SOBERLİK VE KOMPAKTLIK**” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Kayseri Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum

.....

Tez Savunma Tarihi: 11.08.2023

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

.....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Kübra ÇEVİK

TEŞEKKÜR

Tez konumun belirlenmesinde, hazırlanma sürecinin her aşamasında ve sonuçlarının değerlendirilmesinde değerli zamanını ayırarak bana yön gösteren paylaştığı bilgi birikimi ve yapıcı eleştirileriyle farklı bakış açıları kazanmamı sağlayan sabır ve anlayışıyla kendimi geliştirmeme katkıda bulunan güler yüzü ve samimiyetiyle rol model olan Saygıdeğer Hocam Prof. Dr. Ayhan ERCİYES'e teşekkür ederim.

Bu süreçte zaman ve mekân fark etmeksizin kapılarını her daim açık tutarak her türlü destek ve yardımlarını eksik etmeyen Kayseri Üniversitesi'nde görev yapan Sayın Hocam Prof. Dr. Halis BİLGİL ve Aksaray Üniversitesi'nde görev yapan Sevgili Hocam Arş. Gör. Ümmügölsüm ERDİNÇ'e teşekkür ederim.

Son olarak hayatım boyunca yanımda yer alarak göstermiş oldukları sevgi ve hoşgöründen dolayı değerli aileme teşekkür ederim ancak yeterli bulmam.

Kübra ÇEVİK

AKSARAY, 2023

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	3
2.1 Kategori	3
2.2 Fanktor.....	4
2.3 Topolojik Fanktor.....	5
2.4 Süzgeçler	8
3. SABİT LİMİT UZAYLAR.....	12
3.1 Limit Uzaylar	12
3.2 Sabit Limit Uzaylar	12
3.3 <i>ConLim</i> Topolojik Kategorisi Ve Özellikleri.....	13
4. LOKAL T_0 VE T_1 SABİT LİMİT UZAYLARI	15
4.1 Noktada Eksen Dönüşümleri.....	15
4.2 Genelde Eksen Dönüşümleri	18
5. SABİT LİMİT UZAYLARINDA KAPALILIK.....	22
5.1 Kapalı Alt Objeler	22
6. SABİT LİMİT UZAYLARDA KAPANIŞ OPERATÖRLERİ	32
6.1 Kapanış Operatörleri	32
7. SABİT LİMİT UZAYLARDA BAĞLANTILILIK, TAM BAĞLANTISIZLIK VE KALITSAL BAĞLANTISIZLIK	36
7.1 Bağlantılılık.....	36
7.2 Tam Bağlantısızlık Ve Kalıtsal Bağlantısızlık	39
8. SOBER SABİT LİMİT UZAYLARI.....	43
8.1 Soberlik	43
9. KOMPAKT SABİT LİMİT UZAYLARI	47
9.1 Kompaktlık.....	47
10. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	51
KAYNAKLAR	52
ÖZGEÇMİŞ.....	55

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SABİT LİMİT UZAYLAR KATEGORİSİNDE AYIRMA AKSİYOMLARI, KAPALILIK, BAĞLANTILILIK, SOBERLİK VE KOMPAKTLIK

Kübra ÇEVİK

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

Bu tez çalışmasında ilk olarak objeleri sabit limit uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler olan **ConLim** kategorisinin **Set** üzerinde topolojik olduğu gösterilmiştir. Sonrasında hem lokal hem de genelde $i = 0, 1$ için T_i objeler karakterize edilmiş ve **T_i ConLim** şeklinde dolu alt kategoriler elde edilmiştir. Daha sonra bu kategorideki kapalı ve kuvvetli kapalı objeler belirlenerek Tietze Genişleme Teoremi ve Urysohn Lemması gibi Genel Topolojide bilinen teoremler **ConLim** kategorisinde ifade ve ispat edilmiştir. Daha sonra bu topolojik kategorideki bağlantılı, bağlantısız, sober ve kompakt objeler karakterize edilmiş ve aralarındaki ilişkiler belirlenmiştir.

Ayrıca çalışmanın her bir bölümün sonunda **ConLim** deki elde edilen sonuçlar ile diğer topolojik kategorilerdeki sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Topolojik Kategori, Sabit Limit Uzay, Kapanış Operatörü, Bağlantılılık, Bağlantısızlık, Sober Obje, Kompaktlık.

Ağustos, 2023; 55 sayfa

M. Sc. THESIS

SEPARATION AXIOMS, CLOSEDNESS, CONNECTEDNESS, SOBER
OBJECT AND COMPACTNESS IN THE CATEGORY OF
CONSTANT LIMIT SPACES

Kübra ÇEVİK

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ABSTRACT

In this thesis, firstly, it is shown that **ConLim** category, whose objects are constant limit spaces and whose morphisms are continuous maps, is topological on **Set**. Afterwards, T_i objects for both local and general $i = 0, 1$ were characterized and full subcategories as **T_i ConLim** were obtained. Then, closed and strongly closed objects in this category were determined, and theorems known in General Topology such as Tietze Extension Theorem and Urysohn's Lemma were expressed and proved in **ConLim**. Finally, connected, disconnected, sober and compact objects in this topological category were characterized and investigated the relationships between them.

In addition, at the end of each section of the paper, our results for **ConLim** were compared with the results in other topological categories.

Keywords: Topological Category, Constant Limit Space, Closure Operator, Connectedness, Disconnectedness, Sober Object, Compactness.

August, 2023; 55 pages

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1. Set kategorisinde pushout diyagramı.....	7
Şekil 2.2. Pushout diyagramı.	8
Şekil 4.1. Noktada $\bar{T}_0$ diyagramı.....	17
Şekil 4.2. Noktada T_0' diyagramı.....	18
Şekil 4.3. Genelde $\bar{T}_0$ diyagramı	20
Şekil 4.4. Genelde T_0' diyagramı.....	21
Şekil 5.1. Tek nokta kümesinin kapalılık diyagramı.	23
Şekil 5.2. Tek nokta kümesinin kuvvetli kapalılık diyagramı	25
Şekil 5.3. Verilen bir kümenin kapalılık diyagramı.....	25
Şekil 5.4. Verilen bir kümenin kuvvetli kapalılık diyagramı.....	26
Şekil 5.5. ConLim kategorisinde kapalılık diyagramı.....	28
Şekil 5.6. ConLim kategorisinde kuvvetli kapalılık diyagramı.....	28



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1. Kategorik yapılar	4
--------------------------------------	---



SİMGELER VE KISALTMALAR

A_p	p Noktasında Temel Eksen Dönüşümü
$Born$	Bornolojik Uzaylar Kategorisi
$CApp$	Yakınsama Yaklaşım Uzaylar Kategorisi
$cl(M)$	M Kümesinin Kapanışı
$ConFCO$	Sabit Süzgeç Uzaylar Kategorisi
$ConLim$	Sabit Limit Uzaylar Kategorisi
FCO	Süzgeç Uzaylar Kategorisi
$F(X)$	X Kümesi Üzerindeki Tüm Süzgeçlerin Kümesi
Grp	Gruplar Kategorisi
Lim	Limit Uzaylar Kategorisi
Met	Metrik Uzaylar Kategorisi
$Mor(\mathcal{E})$	$\mathcal{E}$ Kategorisinin Morfizmleri Kümesi
$Ob(\mathcal{E})$	$\mathcal{E}$ Kategorisinin Objeleri Kümesi
$psqMet$	Quasi-Metrik Uzayların Kategorisi
$scl(M)$	M Kümesinin Kuvvetli Kapanışı
Set	Kümeler Kategorisi
S_p	p Noktasında Skewed Eksen Dönüşümü
Top	Topolojik Uzaylar Kategorisi
$V_p^\infty X$	p Noktasında X Kümesinin Sayılabilir Sonsuz Ayırık Kopyası
$X \coprod X$	X Kümesinin Ayırık Birleşimi
$X \bigvee_p X$	X Kümesinin p Noktasında Wedge Çarpımı
$\mathcal{E}$	Kategori
∇_p	p Noktasında Katlama Dönüşümü
τ	Topoloji

1. GİRİŞ

Kategori kavramı, 1945 yılında Eilenberg ve MacLane [1] tarafından ortaya atılmıştır. Topolojik kategori ise 1971 yılında Wyler [2] (tam latislerin kategorisine tanımlanan fanktoru kullanarak) ve 1974 yılında Herrlich [3] (başlangıç kaldırmaları kullanarak) tarafından çalışmalarında kullanılmıştır. Genel topolojideki ayırma aksiyomları, kapalılık, kapanış operatörleri, bağlantılılık, tam bağlantısızlık, soberlik, kompaktlık vb. gibi pek çok kavram ile Tietze Genişleme Teoremi, Urysohn Metrikleşme Teoremi, Urysohn Lemması vb. gibi teorem ve lemmaları topolojik kategoriye genişletmek için başlangıç kaldırması, bitiş kaldırması ve diskre obje kavramları değişik bilim insanları tarafından kullanılmıştır [4-11].

Süzgeç kavramı, 1937 yılında Cartan [12] tarafından, yakınsak süzgeç uzay ise 1954 yılında Kowalsky [13] tarafından tanımlanmıştır. Limit uzay kavramı 1659 yılında Frechet [14], 1964 yılında Kent tarafından çalışmalarında kullanılmıştır.

1990 yılında Baran [15], (kuvvetli) kapalılık kavramını başlangıç ve bitiş kaldırmaları ile diskre objeyi kullanarak topolojik kategorilerde tanımlamış ve bu kavramların Dikranjan ve Giuli anlamında [11], kapanış operatörü oluşturduğunu göstermiştir. 1997’de kompaktlık [16], 2006’da bağlantılılık [17], 2022 yılında soberlik [18] ve 2023 yılında tam bağlantısızlık [19] kavramlarını topolojik kategoriye genişletmiştir.

Şimdi ise tez çalışmasında temel teşkil eden süzgeç tabanlı kategorinin seçilmesinin avantajlarını belirtelim. Aşağıdaki ilk üç teorem topolojik uzaylarda dizilerin yetersizliğini gösterirken son üç teorem ise “Neden diziler değil de süzgeçler kullanılmalı?” sorusunun cevabını vermektedir.

(1) (X, τ) topolojik uzayı Hausdorff ise yakınsak her dizinin limiti tektir. Bu durum dizilerin Hausdorff uzayları belirlemedeki yetersizliğini gösterir.

(2) X bir küme, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. $(x_n) \rightarrow x$ olacak şekilde A da (x_n) dizisi varsa $x \in \bar{A}$ dır. Bu durum dizilerin kapalı kümeler belirlemedeki yetersizliğini gösterir.

(3) $f: X \rightarrow Y$ fonksiyon, (x_n) X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. f sürekli ise $(x_n) \rightarrow x$ olacak şekildeki her (x_n) dizisi için $(f(x_n)) \rightarrow f(x)$ dir.

(1*) (X, τ) uzayı Hausdorff tur ancak ve ancak yakınsak her süzgecin limiti tektir.

(2*) X küme ve $A \subset X$ olsun. $x \in \bar{A}$ ancak ve ancak A da x e yakınsayan bir F süzgeci vardır.

(3*) $f: X \rightarrow Y$ fonksiyonu süreklidir ancak ve ancak $F \rightarrow x$ olacak şekilde her F öz süzgeci için $f(F) \rightarrow f(x)$ dir.

Top kategorisindeki aşağıda listelenen bazı eksiklikler vardır. Bunlar:

(1) **Top** kartezyen kapalı değildir.

(2) **Top** da bölüm fonksiyonlarının çarpımı bölüm fonksiyonları olmayabilir.

(3) **Top** da bölüm fonksiyonları kalıtsal değildir.

(4) **Top** da düzgün süreklilik, düzgün yakınsama, Cauchy dizileri (veya Cauchy süzgeçleri) ve tamlık gibi kavramlar yoktur.

Objeleri sabit limit uzaylar, morfizmleri bu uzaylar arasındaki sürekli dönüşümler olan **ConLim** kategorisinde yukarıda ifade edildiği gibi **Top** da bulunan eksiklikler yoktur. Örneğin, **ConLim** bölümlerin çarpımı bölümler olacak şekilde kartezyen kapalı ve kalıtsal bir topolojik kategoridir. Ayrıca **ConLim** süreklilik, kompaktlık, soberlik, indirgenemezlik, bağlantılılık vb. kavramları araştırmak için uygun bir kategoridir.

Bu tez çalışmasının amacı:

(1) **ConLim** kategorisinin topolojik olduğunu göstermek,

(2) T_0 ve T_1 sabit limit uzayları hem noktada hem de genelde karakterize etmek,

(3) Sabit limit uzayların kapalı ve kuvvetli kapalı alt kümelerini belirlemek,

(4) Sabit limit uzaylar için Tietze Genişleme Teoremi ile Urysohn Lemması'nı ifade ve ispat etmek,

(5) **ConLim** de bağlantılılık, bağlantısızlık, tam bağlantısızlık, kalıtsal bağlantısızlık kavramlarını karakterize etmek ve farklı formları ile aralarındaki ilişkileri incelemek,

(6) Sober sabit limit uzayların farklı şekillerini sunmak ve aralarındaki ilişkileri araştırmak,

(7) Kompakt sabit limit uzayları karakterize etmek,

(8) Yukarıda **ConLim** için elde ettiğimiz sonuçlar ile diğer topolojik kategorilerdeki sonuçları karşılaştırmaktır.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Kategori

Kategori Teorisi, küme teorisine alternatif olarak ortaya çıkmış ve birbirinden oldukça farklı görünen iki alan olan topoloji ve cebir arasında bir köprü kurmak için geliştirilmiştir. Fonksiyonel Programlama, Kuantum Fiziği Ve Hesaplamaları, Mantıkta Topos Teorisi, Cebirsel Geometri Ve Homotopi Teorisi, Network Teori Ve Sistemleri, Veri Ve Bilgi Sistemleri alanlarında kategori teorisi etkin bir şekilde kullanılmaktadır.

Tanım 2.1.1 ([20,21]) $\mathcal{E}$ bir yapı olsun. $\mathcal{E}$ nun objeleri (nesneleri) ile objeler arasındaki morfizmleri (dönüşümleri) ve iki morfizmin bileşke işlemi aşağıdaki şartları sağlıyor ise $\mathcal{E}$ a bir kategori denir.

(i) Her $X, Y \in Ob(\mathcal{E})$ için $1_X : X \rightarrow X$ ve $1_Y : Y \rightarrow Y$ birim morfizmleri vardır öyle ki $f : X \rightarrow Y$ morfizmi için,

$$f \circ 1_X = f = 1_Y \circ f$$

dir.

(ii) $f, g, h \in Mor(\mathcal{E})$ için $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$, $h : Z \rightarrow W$ olmak üzere “ $\circ$ ” işlemi birleşme özelliğine sahip olmalıdır yani,

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

dir.

$\mathcal{E}$ daki objelerin sınıfı $Ob(\mathcal{E})$, morfizmlerin sınıfı $Mor(\mathcal{E})$ ve iki obje arasındaki morfizmlerin kümesi $\mathcal{E}(X, Y) = \{f \mid f : X \rightarrow Y \text{ morfizm}\}$ ve verilen iki morfizmin bileşkesi aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\circ : Hom(X, Y) \times Hom(Y, Z) \rightarrow Hom(X, Z)$$

$$(f, g) \mapsto (f, g) = g \circ f$$

Çizelge 2.1. de bazı kategori örnekleri verilmiştir.

Çizelge 2.1. Kategorik yapılar.

<u>Kategori</u>	<u>Objeler</u>	<u>Morfizmler</u>
Born	Bornolojik uzaylar	Morfizmler
CApp	Yaklaşım uzayları	Morfizmler
Fam	Aile uzayları	Sürekli fonksiyonlar
FCO	Süzgeç yakınsak uzaylar	Morfizmler
Grp	Gruplar	Grup homomorfizmleri
Lim	Limit uzaylar	Morfizmler
Met	Metrik uzaylar	Sürekli fonksiyonlar
PBorn	Pre-bornolojik uzaylar	Morfizmler
Poset	Poset uzayları	Bağıntı koruyan morfizmler
psqMet	Quasi-metrik uzaylar	Non-expansive dönüşümler
Ring	Halkalar	Halka homomorfizmleri
Rel	Bağıntılı uzaylar	Bağıntı koruyan fonksiyonlar
RRel	Yansıma bağıntılı uzaylar	Yansıma bağıntı koruyan morfizmler
Set	Kümeler	Fonksiyonlar
Top	Topolojik uzaylar	Sürekli fonksiyonlar
TopGrp	Topolojik gruplar	Grup homomorfizmleri

2.2 Fanktor

Tanım 2.2.1 ([20,21]) $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ iki kategori olsun. $\mathcal{E}$ daki her X objesi için $\mathcal{E}'$ nün objesi $f(X)$ ve $\mathcal{E}$ nun her $f : X \rightarrow Y$ morfizmi için $\mathcal{E}'$ nün morfizmi $F(f) : F(X) \rightarrow F(Y)$ oluyor ve aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ ne bir fanktor denir.

(i) Her $X \in Ob(\mathcal{E})$ için $F(1_X) = 1_{F(X)}$

(ii) $f, g \in Mor(\mathcal{E})$ için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$

Örnek 2.2.2 1. $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ ve $U(X, \tau) = X$ şeklinde tanımlanan U nun fanktordur. Bu fanktora *unutkan (forgetful) fanktor* denir.

2. $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ ve $U(G, *) = G$ tanımlanan morfizm de unutkan fanktor dur.

3. X bir küme olmak üzere $U : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ ve $U(X) = X = (X, P(X))$ dönüşümüne fanktordur ve *diskre fanktor* denir. $U(X) = (X, \{\emptyset, X\})$ ise *indiskre fanktor* denir.

Tanım 2.2.3 ([20,21]) $F : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ fanktor olsun.

(1) Her $X, Y \in Ob(\mathcal{E})$ ve her $F(g) : F(X) \rightarrow F(Y)$ için $F(g) = g$ olacak şekilde en az bir $g : X \rightarrow Y$ ye morfizmi var ise F ye *dolgun (full) fanktor* denir.

(2) Her $X, Y \in Ob(\mathcal{E})$ ve $f, g : X \rightarrow Y$ morfizmleri için $F(f) = F(g)$ olduğunda $f = g$ ise F ye *düzenli (faithful) fanktor* denir.

(3) $\mathcal{E}$ daki her X objesi ve her $f : X \rightarrow X$ morfizmi için $F(f) = 1_{F(X)}$ ve f izomorfizm olduğunda $f = 1_X$ ise F ye *amnestik fanktor* denir. F hem düzenli hem de amnestik ise F ye *belirli (concrete) fanktor* denir.

(4) $\mathcal{E}$ nin her X objesi için $F^{-1}(X) = \{A \in Ob(\mathcal{E}) \mid F(A) = X\}$ küme ise F ye *küçük demetlere sahiptir (small fiber)* denir.

(5) $G \circ F = I_{\mathcal{E}}$ ve $F \circ G = I_{\mathcal{E}'}$ olacak şekilde bir $G : \mathcal{E}' \rightarrow \mathcal{E}$ fanktoru varsa F ye bir *izomorfizm* denir. $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ kategorileri arasında izomorfizm varsa $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ *izomorfik kategoriler* denir ve $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$ ile gösterilir.

2.3 Topolojik Fanktor

Tanım 2.3.1 ([3,20]) $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ kategorileri için $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ fanktoru aşağıdaki şartları sağlıyor ise U ya topolojik fanktor ya da $\mathcal{E}$ a $\mathcal{E}'$ de bir topolojik kategori denir.

(i) U belirli (concrete) olmalıdır.

(ii) $B \in Ob(\mathcal{E})$ için $U^{-1}(B)$ bir kümedir. $U^{-1}(B) = \{X \in Ob(\mathcal{E}) \mid U(X) = B\}$ şeklinde tanımlanır ve B üzerindeki demet olarak adlandırılır.

(iii) Her U -kaynağı (U -source) bir başlangıç kaldırmasına (initial lift) sahip olmalıdır veya duali olarak her U -kavşağı (U -sink) bir bitiş kaldırmasına (final lift) sahip olmalıdır. Yani her $i \in I$ için $\mathcal{E}'$ deki $g_i : B \rightarrow U(X_i)$ ailesinin her $i \in I$ için $\mathcal{E}$ da $\bar{f}_i : X \rightarrow X_i$ ailesi vardır öyle ki $U(\bar{f}_i) = g_i$ dir. $U(h_i : Y \rightarrow X_i) = g_i \circ k : U(Y) \rightarrow B = U(X) \rightarrow U(X_i)$

ise bu takdirde $k : U(Y) \rightarrow U(X)$ morfizminin $\bar{k} : Y \rightarrow X$ kaldırması vardır yani $U(\bar{k}) = k$ ve $\bar{f}_i \circ \bar{k} = h_i$ dir.

Örnek 2.3.2 1. $\mathcal{E} = \mathbf{Top}, \mathbf{Rel}, \mathbf{RRel}, \mathbf{Fam}, \mathbf{Born}$ ve $\mathbf{PBorn}$ için $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktoru topolojik kategoridir.

2. $U : \mathbf{Met} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktoru topolojik değildir. $\mathbf{Met}$ de metrik uzayların keyfi çarpımları metrik uzay değildir. Bu ise U -kaynağının bir başlangıç kaldırmasına sahip olmadığını gösterir.

3. $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ ve $U : \mathbf{Ring} \rightarrow \mathbf{Set}$ unutkan fanktorları topolojik değildir. $\mathbf{Grp}$ de bir grubun alt kümesi grup ve $\mathbf{Ring}$ de bir halkanın alt kümesi halka değildir. Bunlar ise U -kaynağının başlangıç kaldırmasına sahip olmadığını gösterir.

4. $U : \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ fanktoru topolojiktir. $\mathbf{TopGrp}$ deki başlangıç ve final kaldırmalarının tıpkı $\mathbf{Grp}$ deki başlangıç ve final kaldırmaları gibi oluşturulabileceği için bu fanktor topolojiktir. Fakat $U : \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Top}$ fanktoru topolojik değildir.

Tanım 2.3.3 ([20,21]) $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{B}$ topolojik fanktor ve $\mathcal{B}$ nin her sabit X objesi (bitiş objenin alt objeleri) için $U^{-1}(X)$ tek bir yapıya sahip ise U ya normalleştirilmiş topolojik fanktor denir.

Örnek 2.3.4 $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

Teorem 2.3.5 ([20]) $\mathcal{E}$ kategorisi keyfi çarpımlara ve $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ fanktoru belirli ve küçük demetlere sahip olsun. $\mathcal{E}$ topolojik kategoridir ancak ve ancak $\mathcal{E}$ keyfi çarpımlara ile alt uzaylara sahiptir ve $\mathcal{E}$ indiske objelere sahiptir.

Tanım 2.3.6 ([20,21]) $\mathcal{E}$ kategori ve $\{A_i\}_{i \in I}$ ler $\mathcal{E}$ nun objelerinin bir sınıfı olsun. $P \in Ob(\mathcal{E})$ ve her $i \in I$ için $p_i : P \rightarrow A_i$ morfizmi verilsin. $X \in Ob(\mathcal{E})$ olmak üzere her $i \in I$ için $f_i : X \rightarrow A_i$ morfizmleri verildiğinde $p_i \circ \varphi = f_i$ olacak şekilde bir tek $\varphi : X \rightarrow P$ morfizmi var ise $(P, p_i)_{i \in I}$ ikilisine $\{A_i\}_{i \in I}$ objeler sınıfının çarpımı (product) denir.

Örnek 2.3.6 $\mathbf{Set}$ de iki objenin çarpımı, kartezyen çarpım ve dual çarpımı, ayrık birleşimdir. $\mathbf{Grp}$ da iki objenin çarpımı, direkt çarpım ve dual çarpımı, free çarpımdır. $\mathbf{Top}$ da iki objenin çarpımı, topolojik çarpım ve dual çarpımı, topolojik toplamdır.

Tanım 2.3.7 ([20,21]) $\mathcal{E}$ ve $\mathcal{E}'$ iki kategori olsun. $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}'$ topolojik fanktor olsun.

(1) $X \in Ob(\mathcal{E})$ diskredir ancak ve ancak $\mathcal{E}$ nun her Y objesi için $U(X) \rightarrow U(Y)$ morfizmi $X \rightarrow Y$ ye kaldırılabilir.

(2) $X \in Ob(\mathcal{E})$ indiskredir ancak ve ancak $\mathcal{E}$ nun her Y objesi için $U(Y) \rightarrow U(X)$ morfizmi $Y \rightarrow X$ e kaldırılabilir.

Tanım 2.3.8 ([20,21]) Bir $\mathcal{E}$ kategorisinde, her $X \in Ob(\mathcal{E})$ için,

(1) $\{f \mid f : I \rightarrow X \text{ morfizm}\}$ tek elemanlı ise $I \in Ob(\mathcal{E})$ ye başlangıç objesi denir.

(2) $\{f \mid f : X \rightarrow T \text{ morfizm}\}$ tek elemanlı ise $T \in Ob(\mathcal{E})$ ye bitiş objesi denir.

Örnek 2.3.9 Bazı kategorilerdeki başlangıç ve bitiş objesi aşağıdaki gibidir.

1. **Set** de başlangıç obje, $\emptyset$ ve bitiş obje, $\{x\}$ dir
2. **Top** da başlangıç obje, $(\emptyset, \{\emptyset, \{ \} \})$ ve bitiş obje, $(\{x\}, \{\emptyset, \{x\}\})$ dir.
3. **Fam** de başlangıç obje, $(\emptyset, \emptyset)$ ve bitiş obje, $(\{x\}, \{x\})$ dir.
4. **Rel** ve **RRel** de başlangıç obje, $(\emptyset, \emptyset^2)$ ve bitiş obje, $(\{x\}, \{x\}^2)$ dir.
5. **Grp** de başlangıç ve bitiş obje $\{e\}$ dir. Dolayısıyla bu obje *sıfır (zero) obje* dir.
6. **Born** ve **PBorn** de başlangıç obje, $(\emptyset, \{\emptyset\})$ ve bitiş obje, $(\{x\}, \{\{x\}\})$ dir.
7. **Ring** de başlangıç obje, tam sayılar kümesi ve bitiş obje, sıfır halkasıdır.
8. **Met** de başlangıç obje, $(\emptyset, d)$ ve bitiş obje, $(\{x\}, d)$ dir.

Tanım 2.3.10 ([20]) X bir küme ve $p \in X$ olsun. X in p de Wedge çarpımı $X \amalg X$ in p de çakışmasıdır ve $X \vee_p X$ ile gösterilir ki aşağıdaki diyagram bir pushout diyagramıdır.

$$\begin{array}{ccc}
 \{*\} & \xrightarrow{p} & X \\
 p \downarrow & & \downarrow i_1 \\
 X & \xrightarrow{i_1} & X \vee_p X
 \end{array}$$

Şekil 2.1. **Set** kategorisinde pushout diyagramı.

Örnek 2.3.11 *Set* de $f : C \rightarrow A$ ve $g : C \rightarrow B$ iki morfizm olsun. Bu durumda $p_A = A \rightarrow A \amalg B$ ve $p_B = B \rightarrow A \amalg B$ için $p_A(a, b) = a$ ve $p_B(a, b) = b$ dir. Her $x \in C$ için aşağıdaki diyagram $f(x)$ ve $g(x)$ için bir pushout diyagramıdır.

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{g} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow p_B \\
 A & \xrightarrow{p_A} & A \amalg B
 \end{array}$$

Şekil 2.2. Pushout diyagramı.

2.4 Süzgeçler

Genel topolojide kapalılık ve kompaktlık gibi kavramlar diziler ile açıklanamadığı için süzgeçler tercih edilmiştir. Süzgeç kavramı dizilerin genelleştirmesidir. Süzgeçlerin yakınsamasından yola çıkarak bir topoloji belirlenebilir.

Tanım 2.4.1 ([22]) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $F \subset P(X)$ olsun. F aşağıdaki şartları sağlıyorsa F ye X de bir öz süzgeç (proper filter) denir.

- (i) $\emptyset \notin F$,
- (ii) Her $U, V \in F$ için $U \cap V \in F$,
- (iii) Her $U \in F$ için $U \subset V$ ise $V \in F$.

$\emptyset \in F$ ise öz olmayan süzgeç (improper filter) denir. X deki tüm süzgeçlerin kümesi $F(X)$ ile gösterilir.

$M \subset X$ olmak üzere $[M] = \{A \subset X \mid M \subset A\}$ şeklinde tanımlanır. Özel olarak $M = \{x\}$ ise $[x] = \{U \subset X \mid x \in U\}$ dir.

Örnek 2.4.2 $X = \{x\}$ olsun. $P(X) = \{\emptyset, \{x\}\}$ dir. $F \subset P(X)$ için $F = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{x\}\}, P(X)\}$ olmak üzere $F_1 = \emptyset$ ve $F_2 = \{\emptyset\}$ süzgeç değildir. Fakat $F_3 = P(X)$ öz olmayan süzgeçtir ve $F_4 = \{\{x\}\}$ ise öz süzgeçtir.

Örnek 2.4.3 $X = \{x, y\}$ olsun. $P(X) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$ dir. $F \subset P(X)$ için $F_1 = \{X\}$, $F_2 = \{\{x\}, X\}$ ve $F_3 = \{\{y\}, X\}$ öz süzgeçtir ve $F_4 = P(X)$ öz olmayan süzgeçtir

Örnek 2.4.4 $X = \{x, y, z\}$ için $P(X) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$ dir. $F \subset P(X)$ olmak üzere X üzerindeki tüm süzgeçler aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
F_1 &= \{X\} &= [X] \\
F_2 &= \{\{x, y\}, X\} &= [\{x, y\}] \\
F_3 &= \{\{x, z\}, X\} &= [\{x, z\}] \\
F_4 &= \{\{y, z\}, X\} &= [\{y, z\}] \\
F_5 &= \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, X\} &= [x] \\
F_6 &= \{\{y\}, \{x, y\}, \{y, z\}, X\} &= [y] \\
F_7 &= \{\{z\}, \{x, z\}, \{y, z\}, X\} &= [z] \\
F_8 &= P(X) \text{ öz olmayan süzgeç}
\end{aligned}$$

Tanım 2.4.5 ([8]) $\alpha, \beta \in F(Y)$, $\gamma \in F(X)$ ve $f : Y \rightarrow X$ bir fonksiyon olsun.

- (1) $\alpha \cap \beta = \{U \subset X \mid U \in \alpha \text{ ve } U \in \beta\}$
- (2) $\alpha \cup \beta = \{U \subset X \mid \exists V \in \alpha \text{ ve } \exists W \in \beta, U \supset V \cap W\}$
- (3) $f(\alpha) = \{V \subset Y \mid \exists Z \in \alpha, f(Z) \subset V\}$
- (4) $f^{-1}(\gamma) = \{U \subset X \mid \exists Z \in \gamma, f^{-1}(Z) \subset U\}$

şeklinde tanımlanır ve her biri birer süzgeçtirler. Burada $[\alpha \cap \beta] = \alpha \cap \beta$ dır. $\alpha \cap \beta \subset [\alpha \cap \beta]$ olduğu süzgeç tanımından açıktır. $[\alpha \cap \beta] \subset \alpha \cap \beta$ olduğunu gösterelim. $U \in [\alpha \cap \beta]$ alalım. En az bir $V \in \alpha \cap \beta$ vardır öyle ki $V \subset U$ dur. $V \in \alpha \cap \beta$ olup $V \in \alpha$ ve $V \in \beta$ dır. α ve β süzgeç olduğundan $U \in \alpha$ ve $U \in \beta$ dır ki $U \in \alpha \cap \beta$ dır. Ayrıca süzgeçlerin birleşim işleminin kümelerin birleşim işleminden farklı olduğu unutulmamalıdır. Örneğin, $X = \{x, y\}$ için X de iki süzgeç $\alpha = \{\{x\}, X\}$ ve $\beta = \{\{y\}, X\}$ olmak üzere $\alpha \cup \beta = \{\{x\}, \{y\}, X\}$ süzgeç değildir.

Önerme 2.4.6 ([8]) $\alpha, \beta \in F(X)$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun.

- (1) $f(\alpha \cap \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta)$,
- (2) $f(\alpha \cup \beta) \supset f(\alpha) \cup f(\beta)$,
- (3) $f^{-1}(f(\alpha)) \subset \alpha$,
- (4) $\beta \subset f(f^{-1}(\beta))$ dır.

İspat: (1) $U \in f(\alpha \cap \beta)$ olsun. Bu takdirde en az bir $V \in \alpha \cap \beta$ vardır öyle ki $f(V) \subset U$ dur. Bu $f(V) \in \alpha$ ve $f(V) \in \beta$ demektir. Böylece $U \in f(\alpha) \cap f(\beta)$ olup $f(\alpha \cap \beta) \subset f(\alpha) \cap f(\beta)$ dır. Tersine $U \in f(\alpha) \cap f(\beta)$ ise $U \in f(\alpha)$ ve $U \in f(\beta)$ dır. $f(V) \subset U$ ve $f(W) \subset U$ olacak şekilde $V \in \alpha$ ve $W \in \beta$ vardır. $U \supset f(V) \cap f(W) = f(V \cap W) \in f(\alpha \cap \beta)$ olduğundan $U \in f(\alpha \cap \beta)$ dır. Yani $f(\alpha) \cap f(\beta) \subset f(\alpha \cap \beta)$ dır.

(2) $U \in f(\alpha \cup \beta)$ olsun. $U \in f(\alpha)$ veya $U \in f(\beta)$ dır. $f(V) \subset U$ ve $f(W) \subset U$ olacak şekilde $V \in \alpha$ ve $W \in \beta$ vardır. $U \supset f(V) \cap f(W) = f(V \cap W) \in f(\alpha \cup \beta)$ olup $U \in f(\alpha \cup \beta)$ dır. Böylece $f(\alpha \cup \beta) \supset f(\alpha) \cup f(\beta)$ dır.

(3) $U \in f^{-1}f(\alpha)$ ise bazı $V \in f(\alpha)$ için $f^{-1}(V) \subset U$ dur. Bu takdirde $f(W) \subset V$ olacak şekilde $W \in \alpha$ vardır. Buradan $W \subset f^{-1}f(W) \subset f^{-1}(V) \subset U$ olup $U \in \alpha$ dır böylece $f^{-1}f(\alpha) \subset \alpha$ dır.

(4) $U \in \beta$ ise $f(f^{-1}(U)) \in f(f^{-1}(\beta))$ ve $f(f^{-1}(U)) \subset U$ olup $U \in f(f^{-1}(\beta))$ dır. Böylece $\beta \subset f(f^{-1}(\beta))$ dır.

Tanım 2.4.7 ([22]) (1) (X, τ) topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x in tüm komşuluklarını içeren $\mathcal{N}_x = \{U \subset X \mid \exists V \in \tau \text{ ve } x \in V \subset U\} \subset P(X)$ ailesine x in komşuluklar süzgeci denir.

(2) (X, τ) topolojik uzayında F süzgeç ve $x \in X$ olsun. F süzgeci x noktasının $\mathcal{N}_x$ komşuluklar süzgecinden daha ince ise yani $\mathcal{N}_x \subset F$ ise F süzgeci x noktasına yakınsıyor denir ve $F \rightarrow x$ şeklinde gösterilir. X deki F süzgeci x noktasına yakınsıyor ise X üzerinde F den ince olan tüm süzgeçler de x noktasına yakınsar.

(3) $X \neq \emptyset$ bir küme ve F bir süzgeç olmak üzere her $U \subset X$ için $U \in F$ veya $U^c \in F$ ise F ye ultra süzgeç denir.

(4) $X \neq \emptyset$, F ve G iki süzgeç olsun. $F \subset G$ ise F süzgeci G den daha kalındır veya G , F den daha incedir denir.

Örnek 2.4.8 1. Bir X kümesi üzerindeki $F = \{U \subset X \mid U^c \text{ sonlu}\}$ sınıfına *sonlu tümleyenler (cofinite) süzgeci* denir. $X = \mathbb{N}$ ise F ye *Frechet süzgeci* denir.

2. (X, τ) topolojik uzay ve $F = \{U \subset X \mid U \text{ açık}\}$ için F bir süzgeç değildir. Çünkü $(\mathbb{R}, U)$ alışılmış topolojik uzay olmak üzere $(0, 1) \in U$ fakat $[0, 1] \notin U$ dur.

3. X de bir dizi (x_n) ve $X \neq \emptyset$ olsun. $B_k = \{x_n \mid n \geq k\} = \{x_k, x_{k+1}, \dots\}$ olmak üzere $F = \{U \subset X \mid \exists k \in \mathbb{N}, B_k \subset U\}$ bir süzgeçtir.

(i) X de (x_n) bir dizi olduğundan en az bir $k \in \mathbb{N}$ için $U = X$ dir. Böylece $\emptyset \notin F$ tir.

(ii) Her $U, V \in F$ için $U \cap V \in F$ olduğunu gösterelim. $U \in F$ ise en az bir $k \in \mathbb{N}$ için $B_k \subset U$ vardır. $V \in F$ ise en az bir $l \in \mathbb{N}$ için $B_l \subset V$ vardır. Maks $\{k, l\} = m$ olsun. $B_m = U \cap V$ olup $U \cap V \in F$ tir.

(iii) $U \in F$ ise $U \subset V$ için $V \in F$ olduğunu gösterelim. $U \in F$ ise en az bir $k \in \mathbb{N}$ için $B_k \subset U$ vardır. $U \subset V$ olup $B_k \subset V$ dir. Böylece $V \in F$ tir.

Bu süzgece (x_n) dizisi tarafından *doğrulan (üretilen) süzgeç* denir.

Tanım 2.4.9 ([22]) $X \neq \emptyset$, $F \subset P(X)$ ve $F \neq \emptyset$ olsun. F aşağıdaki şartları sağlar ise F ye süzgeç bazı denir.

(i) $\emptyset \notin F$ dir.

(ii) Her $F_1, F_2 \in F$ için $F_3 \subset F_1 \cap F_2$ olacak şekilde $F_3 \in F$ vardır.

Yukarıdaki tanım ışığında $G = \{U \subset X \mid \exists V \in F \text{ vardır } V \subset U\}$ ye ise F tarafından üretilen süzgeç denir.

Örnek 2.4.10 1. $X = \{x, y, z\}$ ve $F = \{\{x\}, X\}$ olsun.

(i) $\emptyset \notin F$

(ii) $\{x\}, X \in F$ için $\{x\} \cap X = \{x\} \in F$ ve buradan $\{x\} \cap \{x\} = \{x\} \in F$ ve $X \cap X = X \in F$ olduğundan dolayı (i) ve (ii) şartlarından F süzgeç bazıdır.

2. $X = \{x, y, z\}$ ve $F = \{\{x\}\}$ olsun. F süzgeç bazıdır. Fakat $\{x\} \subset \{x, z\}$ iken $\{x, z\} \notin F$ olduğundan F süzgeç değildir. F süzgeç bazı tarafından üretilen süzgeç Tanım 2.4.9 dan $F = \{\{x\}, \{x, y\}, \{x, z\}, F\} = [x]$ dir.

3. SABİT LİMİT UZAYLAR

3.1 Limit Uzaylar

Tanım 3.1.1 ([23]) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $L : X \rightarrow P(F(X))$ bir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise L ye yakınsaklık yapısı (X, L) de limit uzayı denir.

- (i) Her $a \in X$ için $[a] \in L(a)$ dır.
- (ii) $L(a)$ ve $\alpha \subset \beta$ için $\alpha \in L(a)$ ise $\beta \in L(a)$ dır.
- (iii) Her $a \in X$ ve her $\alpha, \beta \in L(a)$ olduğunda $\alpha \cap \beta \in L(a)$ dır.

Burada $[a] = \{U \subset X \mid a \in U\}$ ve a ya yakınsayan boş olmayan X deki tüm süzgeçlerin kümesi $L(a)$ dır. $(X, K), (Y, L)$ limit uzayları için $f : (X, K) \rightarrow (Y, L)$ süreklidir ancak ve ancak her $a \in X$ ve $\alpha \in K(X)$ için $f(\alpha) \in L(f(a))$ dır. Objeleri limit uzaylar ve morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan sınıf bir kategoridir. Bu kategoriye limit uzaylar kategorisi denir ve **Lim** şeklinde gösterilir.

3.2 Sabit Limit Uzaylar

Tanım 3.2.1 (1) (X, L) limit uzay olsun. L sabit ise (X, L) ye sabit limit uzay denir. $(X, K), (Y, L)$ limit uzayları olmak üzere $f : X \rightarrow Y$ fonksiyon olsun. f süreklidir ancak ve ancak $\alpha \in K$ için $f(\alpha) \in L$ dir.

Objeleri sabit limit uzayları ve morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan sınıf kategoridir ve sabit limit uzaylar kategorisi olarak adlandırılır ve **ConLim** ile gösterilir.

(2) X bir küme, (X_i, L_i) sabit limit uzayların bir ailesi ve $\{f_i \mid X \rightarrow X_i, i \in I\}$ sınıfı **Set** de bir kaynak olsun. $\{f_i \mid (X, L) \rightarrow (X_i, L_i), i \in I\}$ sınıfı **ConLim** de başlangıç kaldırmasıdır ancak ve ancak $L = \{\alpha \in F(X) \mid f_i(\alpha) \in L_i, \text{ her } i \in I\}$ dır.

(3) X bir küme, (X_i, L_i) sabit limit uzayların bir ailesi ve $\{f_i \mid X_i \rightarrow X, i \in I\}$ sınıfı **Set** de bir kavşak olsun. $\{f_i \mid (X_i, L_i) \rightarrow (X, L), i \in I\}$ sınıfı **ConLim** de final kaldırmasıdır ancak ve ancak her $\alpha \in L$ ise her $i \in I$ için $\bigcap_{i=1}^n f(\alpha_i) \subset \alpha$ olacak şekilde en az bir $\alpha_i \in L_i$ vardır.

(4) X üzerindeki diskre yapı $L = \{\alpha \mid \alpha = [U], U \subset X \text{ sonludur}\}$ olarak tanımlanır.

Tanım 3.2.2 (1) (X, L) sabit limit uzayı ve $X = \prod_{i \in I} X_i$ olsun. X sabit limit uzayların çarpımsal yapısı tüm $\pi_i : (\prod_{i \in I} X_i, L) \rightarrow (X_i, L_i)$ izdüşüm fonksiyonlarını sürekli yapan $L = \{\alpha \in F(X) \mid \text{her } i \in I \text{ için } \pi_i(\alpha) \in L_i\}$ şeklindedir. (X, L) sabit limit uzayına ise çarpım uzayı denir.

(2) (X, L) sabit limit uzayı, $A \subset X$ ve $i : A \rightarrow X$ alt küme fonksiyonu olsun. A üzerindeki sabit limit uzay yapı $L_A = \{\alpha \in F(A) \mid i(\alpha) \in L\}$ dir ve (A, L_A) ya (X, L) uzayının bir alt uzayı denir.

3.3 ConLim Topolojik Kategorisi Ve Özellikleri

Teorem 3.3.1 $U : \mathbf{ConLim} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

İspat: Teorem 2.3.5 in şartlarını sağlatalım:

(i) U nun belirli olduğunu gösterelim.

(a) U nun düzenli olduğunu gösterelim. $f, g : (X, K) \rightarrow (Y, L)$ morfizmleri ve $U(f) = U(g)$ olsun. U unutkan fanktorun tanımından $U(f) = f$ ve $U(g) = g$ olup $U(f) = U(g)$ olduğunda $f = g$ dir. Böylece U düzenlidir.

(b) U nun amnestik olduğunu gösterelim. $f : (X, K) \rightarrow (X, L)$ için $U(f) = f = 1_X : X \rightarrow X$ ve f izomorfizm ise $f = 1_{(X, K)}$ olduğunu göstereceğiz. Her $\alpha \in K$ için $f(\alpha) \in L$ ve buradan $1_X(\alpha) = f(\alpha) \in L$ olur ki $K \subset L$ dir. Tersine $f^{-1} = g : (X, L) \rightarrow (X, K)$ olur. Her $\alpha \in L$ için $f^{-1}(\alpha) \in K$ ve buradan $1_X^{-1}(\alpha) = \alpha \in K$ olup $L \subset K$ dır. Böylece $K = L$ olur. Sonuç olarak $f = 1_{(X, K)}$ dır.

(ii) U nun küçük demetlere sahip olduğunu gösterelim.

$U^{-1}(X) = \{(X, K) \mid U((X, K)) = X\}$ dir. $\sigma = \{K \mid K \subset (X \times P(F(X)))\} \subset P(P(X))$ olsun. $f : U^{-1}(X) \rightarrow \sigma$ $f((X, K)) = K$ olacak şekilde bir fonksiyon tanımlayalım.

$f((X, K)) = f((X, L))$ olup $K = L$ ve $(X, K) = (X, L)$ dir. f birebirdir ve f genelde örten değildir. Buradan $U^{-1}(X) = f(U^{-1}(X)) \subset \sigma$ ve σ bir küme olduğundan $U^{-1}(X)$ de bir kümedir. Böylece U küçük demetlere sahiptir.

(iii) **ConLim** in keyfi çarpımlara sahip olduğunu gösterelim. $\{(X_i, K_i) \mid i \in I\}$ sabit limit uzayların bir sınıfı, $X = \prod_{i \in I} X_i$, X deki çarpım sabit limit yapısı $K = \{\alpha \in F(X) \mid \pi_i(\alpha) \in K_i, i \in I\}$ ve $a \in X$ olsun. Her $a \in X$ için $\pi_i(a) = a_i \in X_i$

ve $\pi_i([a]) = [a_i] \in K_i$ olsun. Bu $[a] \in K$ olmak üzere her $i \in I$ için $\pi_i(a) \in K$ demektir buradan her $i \in I$ için $\pi_i(a) \in K_i$ dir ve $a \in K$ dir.

(Y, L) sabit limit uzay, $f_i : (Y, L) \rightarrow (X_i, K_i)$ morfizm ve $h : Y \rightarrow X$ için $\pi_i \circ h = f_i$ sağlayan fonksiyon olsun. h nin sürekli olduğunu gösterelim. $\alpha \in L$ olsun. Her $i \in I$ için f_i ler sürekli dir ve $f_i(\alpha) \in K_i$ dir. $(\pi_i \circ h)(\alpha) = \pi_i(h(\alpha)) = f_i(\alpha)$ dir. Bu ise $h(\alpha) \in K$ demektir ve böylece h sürekli dir, yani **ConLim** keyfi çarpımlara sahiptir.

(iv) **ConLim** in alt uzaylara sahip olduğunu gösterelim. $A \subset X$ ve $i : A \rightarrow X$ için $i(a) = a$ içine fonksiyon olsun. $K_A = \{\alpha \in F(A) \mid i(\alpha) \in K\}$ oluşturalım. (A, K_A) sabit limit uzay ve $i : (A, K_A) \rightarrow (X, K)$ sürekli dir, yani **ConLim** alt uzaylara sahiptir.

(v) **ConLim** in indiskre objeye sahip olduğunu gösterelim. $X \neq \emptyset$ ve $K = F(X)$ olsun. $(X, F(X)) \in \mathbf{ConLim}$ olduğunu biliyoruz. (Y, L) sabit limit uzay ve $f : Y \rightarrow X$ fonksiyon olsun. $\alpha \in Y$ ise $f(\alpha) \in F(X) = K$ dir böylece f sürekli dir. Teorem 2.3.5 den $U : \mathbf{ConLim} \rightarrow \mathbf{Set}$ bir topolojik fanktordur.

Şimdi ise U nun normalleştirilmiş olduğunu gösterelim. $\{x\}$ ve $\emptyset$ küme bitiş objenin alt objeleri (sabit objeler) olmak üzere $U^{-1}(\{x\})$ ve $U^{-1}(\emptyset)$ un tek bir yapı oluşturup oluşturmadığını incelememiz gerekir. $U^{-1}(\emptyset) = (\emptyset, \emptyset) = (\emptyset, K)$ yani $K = \emptyset$ dur. Buradan $U^{-1}(\{x\}) = (\{x\}, K)$ ve $K = \{[x], [\emptyset]\}$ dur ki $U : \mathbf{ConLim} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiştir.

4. LOKAL T_0 VE T_1 SABİT LİMİT UZAYLARI

4.1 Noktada Eksen Dönüşümleri

Bu kısımda **ConLim** topolojik kategorisinde ayırma aksiyomları, özellikleri ve birbirleri ile olan ilişkileri incelenecektir.

Tanım 4.1.1 ([8]) X boştan farklı bir küme ve X in iki ayrı kopyasının p noktasında çakıştırılması $X \bigvee_p X$ ile gösterilir. $X \bigvee_p X$ de x birinci bileşende ise x_1 ile ikinci bileşende ise x_2 ile gösterilir.

Bunun yanında $A_p i_1 = (id, p) : X \rightarrow X^2$, $A_p i_2 = (p, id) : X \rightarrow X^2$, $S_p i_1 = (id, id) : X \rightarrow X^2$, $S_p i_2 = (p, id) : X \rightarrow X^2$ ve $j = 1, 2$ için $\nabla_p i_j = id$ Tanım 2.3.11 de pushout diyagramına uygulandığında aşağıdaki A_p , S_p ve ∇_p eksen dönüşümleri elde edilir [11-13].

(1) **p de Temel Eksen Dönüşümü:** $A_p : X \bigvee_p X \rightarrow X^2$,

$$A_p(x_i) = \begin{cases} (x, p), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm p noktasındaki temel eksen dönüşümü adını alır.

(2) **p de Skewed Eksen Dönüşümü:** $S_p : X \bigvee_p X \rightarrow X^2$,

$$S_p(x_i) = \begin{cases} (x, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (p, x), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm p noktasındaki Skewed eksen dönüşümü adını alır.

(3) **p de Katlama Dönüşümü:** $\nabla_p : X \bigvee_p X \rightarrow X$, $i = 1, 2$ için $\nabla_p(x_i) = x$ şeklinde tanımlı dönüşüm p noktasındaki katlama dönüşümü adını alır.

Örnek 4.1.2 $X = \mathbb{R}$ ve $p = 0$ olsun. Temel eksen dönüşümünün görüntüsü x ve y eksenlerinin birleşimi, Skewed eksen dönüşümünün görüntüsü $y = x$ doğrusu ve y ekseninin birleşimi, katlama dönüşümünün görüntüsü ise x eksenidir.

Tanım 4.1.3 ([8]) $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $B \in Ob(\mathcal{E})$, $p \in U(B) = X$ ve D diskre fanktor olsun.

(1) B uzayının p de $\bar{T}_0$ olması için gerek ve yeter şart $\{A_p : X \bigvee_p X \rightarrow U(B^2) = X^2 \text{ ve } \nabla_p : X \bigvee_p X \rightarrow UD(X) = X\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır.

(2) B uzayının p de T_1 olması için gerek ve yeter şart $\{S_p : X \bigvee_p X \rightarrow U(B^2) = X^2 \text{ ve } \nabla_p : X \bigvee_p X \rightarrow UD(X) = X\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır.

(3) B uzayının p de T_0' olması için gerek ve yeter şart $\{id : X \bigvee_p X \rightarrow U(X \bigvee_p X)' = X \bigvee_p X \text{ ve } \nabla_p : X \bigvee_p X \rightarrow UD(X) = X\}$

U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskre olmasıdır. Burada $(X \bigvee_p X)'$ üzerindeki yapı $\{i_1, i_2 : X \rightarrow X \bigvee_p X\}$ U -kaynağının final kaldırmasıdır.

Teorem 4.1.4 ([8,24]) $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktoru için X objesi p noktasında T_0 dir ancak ve ancak $X \bigvee_p X$ üzerinde $A_p : X \bigvee_p X \rightarrow (X^2, \tau_*)$ ve $\nabla_p : X \bigvee_p X \rightarrow (X, P(X))$ fonksiyonları tarafından doğrulan topoloji diskredir. X^2 deki çarpım topolojisi τ_* ve X üzerindeki diskre topoloji ise $P(X)$ dir.

Benzer şekilde yukarıda verilen teoremde A_p yerine S_p alınırsa uzayın bilinen anlamda p noktasında T_1 olması durumu elde edilir.

Teorem 4.1.5 Her sabit limit uzayı p noktasında $\bar{T}_0$ dir.

İspat: (X, L) sabit limit uzayı, $p \in X$ ve $X \bigvee_p X$ üzerindeki A_p ve ∇_p tarafından üretilen başlangıç yapısı L_w olsun. Ayrıca kabul edelim ki $\sigma \in L_w$ yani $\pi_1 A_p \sigma$, $\pi_2 A_p \sigma \in L$ ve $\nabla_p \sigma \in L_d$ olsun. X deki diskre yapısı L_d ve X^2 üzerindeki çarpım yapısı L_* olsun. Tanım 3.2.1 den $\nabla_p \sigma \in L_d$ olduğundan $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla_p \sigma = [U]$ dur burada X in sonlu bir alt kümesi U dur.

Eğer $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ ise bu taktirde $\sigma = [\emptyset]$ dur.

$$\begin{array}{ccc}
 (X \bigvee_p X, L_w) & \xrightarrow{s_p} & (X^2, L_*) \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} (X, L) \\
 \downarrow \nabla_p & & \\
 & & (X, L_d)
 \end{array}$$

Şekil 4.1. Noktada $\bar{T}_0$ diyagramı.

Eğer $\nabla_p \sigma = [U]$ ise yani $\nabla_p \sigma$ eğer X in sonlu bir U alt kümesini içeriyor ise bu durumda $U \in \nabla_p \sigma$ olduğundan $U \supset \nabla_p V$ olacak şekilde en az bir $V \in \sigma$ vardır. Burada $\nabla_p V$ nin sonlu olduğuna dikkat edelim yani $\nabla_p V = \{x^1, x^2, x^3, \dots, x^n\}$ dir. Bu ise $V = \{x_j^i \mid i = 1, 2, 3, \dots, n \text{ ve } j = 1, 2\}$ kümesinin $X \bigvee_p X$ in sonlu kümesi olması demektir. Böylece σ sonlu bir V kümesini içerir ve Tanım 3.2.1 den $X \bigvee_p X$ üzerindeki diskre yapı L_w dir. Sonuç olarak Tanım 4.1.3 den (X, L) sabit limit uzayı p de $\bar{T}_0$ dir.

Teorem 4.1.6 Her sabit limit uzayı p noktasında T_1 dir.

İspat: Teorem 4.1.5 in ispatında A_p yerine S_p alınırsa ispat açıktır.

Teorem 4.1.7 Her sabit limit uzayı p noktasında T_0' dir.

İspat: (X, L) sabit limit uzayı, $X \bigvee_p X$ üzerindeki id ve ∇_p tarafından üretilen başlangıç yapısı L_w ve $\sigma \in L_w$ olsun. Tanım 3.2.1 den $\sigma \supset i_1(\sigma_1) \cap i_2(\sigma_2)$ olacak şekilde $\sigma_1, \sigma_2 \in L$ vardır ve $\sigma \in L_d$ dir. Burada X üzerindeki diskre yapı L_d dir. Tanım 3.2.1 den $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla_p \sigma = [U]$ dur. $U \subset X$ dir burada X in sonlu bir alt kümesi U dur.

Eğer $\nabla_p \sigma = [\emptyset]$ ise bu takdirde $\sigma = [\emptyset]$ olur.

Eğer $\nabla_p \sigma = [U]$ ise $U \in \nabla_p \sigma$ olacak şekilde en az bir $V \in \sigma$ vardır. Buradan σ sonlu bir V kümesini içerir ve Tanım 4.1.3 den (X, L) sabit limit uzayı p de T_0' dir.

$$\begin{array}{ccc}
(X \vee_p X, L_w) & \xrightarrow{id} & (X \vee_p X, (X \vee_p X)') \\
\downarrow \nabla_p & & \uparrow i_1 \quad \uparrow i_2 \\
(X, L_d) & & (X, L)
\end{array}$$

Şekil 4.2. Noktada T_0' diyagramı.

Objeleri tüm $p \in X$ için p noktasında sabit limit uzaylardan oluşan **ConLim** in alt kategorisi yine $T_1 \mathbf{ConLim}$ olsun.

Teorem 4.1.8 $\mathcal{E} = \bar{T}_0, T_0', T_1$ olmak üzere objeleri lokal $\mathcal{E}$ sabit limit uzaylar olan **EConLim**, **ConLim** uzaylarının dolu alt kategorisi olmak üzere,

- (1) **EConLim** topolojik kategoridir.
- (2) **EConLim** tüm limitlere (çarpımlar, alt uzaylar, equalizerlar, pullbackler) ve tüm colimitlere (co-çarpımlar, bölüm uzaylar, co-equalizerlar, pushoutlar) sahiptir.
- (3) **EConLim** ile **ConLim** kategorileri izomorfiktir.

4.2 Genelde Eksen Dönüşümleri

Tanım 4.2.1 ([8]) X boştan farklı bir küme olmak üzere X^2 nin iki ayrı kopyasının diyagonal boyunca çakıştırılması $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ ile gösterilir. $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ de (x, y) birinci bileşende ise $(x, y)_1$ ile ikinci bileşende ise $(x, y)_2$ ile gösterilir. Açık olarak $(x, y)_1 = (x, y)_2$ ancak ve ancak $x = y$ dir.

(1) **Temel Eksen Dönüşümü:** $A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$,

$$A((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, x), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm temel eksen dönüşümü adını alır.

(2) **Skewed Eksen Dönüşümü:** $S : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^3$,

$$S((x, y)_i) = \begin{cases} (x, y, y), & i = 1 \text{ ise} \\ (x, x, y), & i = 2 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm Skewed eksen dönüşümü adını alır.

(3) Katlama Dönüşümü: $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow X^2$, $\nabla((x, y)_i) = (x, y)$, $i = 1, 2$ şeklinde tanımlı dönüşüm katlama dönüşümü adını alır. $i_1, i_2 : X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2$ için içermeye fonksiyonlar ise $(x, y) \mapsto i_1(x, y) = (x, y)_1$ ve $(x, y) \mapsto i_2(x, y) = (x, y)_2$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.2.2 ([8]) **(1)** $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $X \in Ob(\mathcal{E})$, $U(B) = X$ için $\{A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(B^3) = X^3 \text{ ve } \nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow UD(X^2) = X^2\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise B objesi $\bar{T}_0$ dır denir. Burada D diskre fanktordur.

(2) $\{S : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(B^3) = X^3 \text{ ve } \nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow UD(X^2) = X^2\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise X objesine T_1 objesi denir.

(3) $(X^2 \vee_{\Delta} X^2)'$, $\{i_1, i_2 : U(B^2) = X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2\}$ U -kavşağının bitiş kaldırması olsun.

$\{id : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow U(X^2 \vee_{\Delta} X^2)' = X^2 \vee_{\Delta} X^2 \text{ ve } \nabla_p : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow UD(X^2) = X^2\}$ U -kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise B objesi T_0' dır denir.

(4) X uzayının en az iki elemanlı alt uzayı indiskre değil ise uzay T_0 dır.

Teorem 4.2.3 ([8,24]) (X, τ) topolojik uzayı için aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) (X, τ) topolojik uzayı T_0 dır,

(2) X üzerindeki çarpım topolojisi τ_* olmak üzere $A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau_*)$ ve $\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir,

(3) $i_1, i_2 : X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2$ tarafından üretilen bitiş topolojisi τ^* olmak üzere $id : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2 \vee_{\Delta} X^2, \tau^*)$ birim fonksiyonu ve $\Delta : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonu tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir,

(4) (X, τ) en az iki elemanlı hiçbir indiskre alt uzay içermez.

Teorem 4.2.4 ([8,24]) (X, τ) topolojik uzayının T_1 olması için gerek ve yeter şart X^3 üzerindeki çarpım topolojisi τ_* olmak üzere $S : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau_*)$ ve

$\nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$ fonksiyonları tarafından üretilen başlangıç topolojisinin diskre olmasıdır.

Teorem 4.2.5 Her sabit limit uzay $\bar{T}_0$ dir.

İspat: (X, L) sabit limit uzay ve $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ üzerinde A ve ∇ tarafından üretilen sabit limit yapısı L_w olsun. Ayrıca kabul edelim ki $\sigma \in L_w$ olsun. Tanım 3.2.1 den $i = 1, 2, 3$ için $\pi_i A\sigma \in L$ ve $\nabla\sigma \in L_d$ dir. Burada X^2 üzerindeki diskre yapı L_d dir.

$$(X^2 \vee_{\Delta} X^2, L_w) \xrightarrow{A} (X^3, L_*) \xrightarrow{\pi_i} (X, L)$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \nabla \\ (X^2, L_d) \end{array}$$

Şekil 4.3. Genelde $\bar{T}_0$ diyagramı.

Tanım 3.2.1 den $\nabla\sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla\sigma = [U]$ olur ki burada $U \subset X^2$ sonludur.

Eğer $\nabla\sigma = [\emptyset]$ ise $\sigma = [\emptyset]$ dur.

Eğer $\nabla\sigma = [U]$ ise $U \in \nabla\sigma$ olur ki en az bir $V \in \sigma$ için Tanım 3.2.1 den $U \supset \nabla V$ dir. Bu ise ∇V nin sonlu olduğunu gösterir. Böylece $V \subset X^2 \vee_{\Delta} X^2$ sonludur yani σ sonlu olan $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ nin alt kümesini içerir. Sonuçta Teorem 4.2.3 den (X, L) uzayı $\bar{T}_0$ dir.

Teorem 4.2.6 Her sabit limit uzay T_1 dir.

İspat: Teorem 4.2.5 in ispatında A yerine S alınırsa ispat açıktır.

Teorem 4.2.7 Her sabit limit uzay T_0' dir.

İspat: (X, L) sabit limit uzayı ve $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ üzerinden id ve ∇ tarafından üretilen başlangıç yapısı L_w olsun. Tanım 3.2.1 den $\sigma \supset i_1\sigma_1 \cap i_2\sigma_2$ olacak şekilde $\sigma_1, \sigma_2 \in L$ vardır ve $\nabla\sigma \in L_d$ dir. X^2 deki diskre yapı L_d olmak üzere

$\nabla\sigma = [\emptyset]$ ve $U \subset X^2$ için $\nabla\sigma = [U]$ dur.

$$\begin{array}{ccc}
(X^2 \vee_{\Delta} X^2, L_w) & \xrightarrow{id} & (X^2 \vee_{\Delta} X^2, (X^2 \vee_{\Delta} X^2)') \\
\downarrow \nabla & & \uparrow i_1 \quad \uparrow i_2 \\
(X^2, L_d) & & (X, L)
\end{array}$$

Şekil 4. 4. Genelde T_0' diyagramı.

Eğer $\nabla\sigma = [\emptyset]$ ise $\sigma = [\emptyset]$ dur.

Eğer $\nabla\sigma = [U]$ ise $U \in \nabla\sigma$ dan en az bir $V \in \sigma$ vardır öyleki $U \supset \nabla V$ olur. Buradan X^2 nin sonlu bir alt kümesi ∇V dir. Böylece $X^2 \vee_{\Delta} X^2$ nin sonlu bir alt kümesi V olur ki bu ise (X, L) uzayının T_0' olduğunu gösterir.

Teorem 4.2.8 (X, L) sabit limit uzayı T_0 dır ancak ve ancak $X = \emptyset$ veya $X = \{x\}$ dir.

İspat: (X, L) sabit limit uzayı T_0 olsun ancak ve X tek nokta kümesi olmasın. Bu durumda $X = \{m, n\}$ olsun. Böylece X deki $L = \{[m], [n], [m] \cap [n]\} = F(X)$ indiskre yapısı elde edilir. Bu Tanım 4.2.2 den (X, L) nin T_0 olması ile çelişir. Sonuç olarak $X = \emptyset$ veya $X = \{m\}$ dir. Tersine $X = \emptyset$ veya $X = \{m\}$ ise Teorem 4.2.3 den (X, L) uzayı T_0 dır.

Teorem 4.2.9 (1) $\bar{T}_0\text{ConLim}$, $T_0'\text{ConLim}$ ve $T_1\text{ConLim}$ kategorileri ikişerli olarak izomorfiktir.

(2) Tanım 3.3.3 den dolayı ConLim kartezyen kapalı olduğu için $\bar{T}_0\text{ConLim}$, $T_0'\text{ConLim}$ ve $T_1\text{ConLim}$ kategorileri kartezyen kapalıdır.

5. SABİT LİMİT UZAYLARINDA KAPALILIK

5.1 Kapalı Alt Objeler

Baran [12], başlangıç ve bitiş kaldırmaları ile diskre objeler kullanarak topolojik kategorilerde “kapalılık” ve “kuvvetli kapalılık” kavramlarını tanımlamıştır. Böylece (kuvvetli) kapalılık kavramı ile kompaktlık, bağlantılılık, (tam) bağlantısızlık ve soberlik gibi kavramları topolojik kategoriye genişletmiş ve karakterize etmiştir.

Bu kısımda, sabit limit uzaylarda (kuvvetli) kapalı alt küme karakterize edildi ve kalıtsal, çarpımsal ve bir fonksiyon altındaki ters görüntü durumları incelendi.

Tanım 5.1.1 ([8,24]) (X, τ) bir topolojik uzay olsun. $M \subset X$ kapalı ve her $x \notin M$ için M nin x i içermeyen bir açık komşuluğu var ise M ye kuvvetli kapalı denir.

Uzay T_1 ise kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları denktir [8,26]. Fakat herhangi bir topolojik kategoride kapalılık ve kuvvetli kapalılık kavramları genelde birbirinden bağımsızdır [25,26]. Hatta topolojik kategorinin objesi T_1 olsa bile bu iki kavram birbirinden bağımsızdır [17].

Örnek 5.1.2 $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ olmak üzere $M = \{b, c\}$ için M kuvvetli kapalıdır. Çünkü $a \notin M$ olmak üzere $M \subset U$ olacak şekilde $a \notin U$ açığı vardır fakat $\{a, b\}$ kapalı olmadığından kuvvetli kapalı değildir.

Tanım 5.1.3 ([8,24]) X bir küme, $p \in X$ ve X in sayılabilir bir kartezyen çarpımı $X^\infty = X \times X \times X \times \dots$ olsun. $\bigvee_p X$ kümesi p de X in sonsuz ayrı kopyasıdır.

(1) $A_p^\infty : \bigvee_p X \rightarrow X^\infty$ ve $A_p^\infty(x_i) = (p, p, \dots, p, x, p, p, \dots)$ şeklinde tanımlı dönüşüme p deki temel eksen dönüşümü adı verilir.

(2) $\nabla_p^\infty : \bigvee_p X \rightarrow X$ ve $\nabla_p^\infty(x_i) = x$ dönüşümüne p deki katlama dönüşümü adı verilir. Burada $x_i \in \bigvee_p X$ demek x_i nin i -inci bileşende olması demektir.

Tanım 5.1.4 ([8,24]) $U : \mathcal{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $B \in Ob(\mathcal{E})$ ve $U(B) = X$ olsun.

(1) $A_p^\infty : V_p^\infty X \rightarrow U(B^\infty) = X^\infty$ ve $\nabla_p^\infty : V_p^\infty X \rightarrow U(D(X)) = X$ şeklinde verilen U -kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise $\{p\}$ ye kapalıdır denir.

(2) $\{*\}$ tek nokta kümesi X / M de kapalı ise $M \subset X$ e kapalıdır denir. Burada X / M U -kavşağının bitiş kaldırmasıdır.

$q : U(B) = X \rightarrow X/M = (X \setminus M) \cup \{*\}$ olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$q(x) = \begin{cases} x, & x \notin M \text{ ise} \\ *, & x \in M \text{ ise} \end{cases}$$

(3) X / M kümesi $*$ da T_1 ise M ye kuvvetli kapalıdır denir.

(4) M kümesinin tümleyeni olan M^c , X de kapalı (kuvvetli kapalı) ise M ye açıktır (kuvvetli açık) denir.

(5) $B = M$ veya $M = \emptyset$ ise M (kuvvetli) kapalıdır.

Örnek 5.1.5 $X = \{a, b\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ olmak üzere (X, τ) topolojik uzayı $M = \{a\}$ kapalıdır. τ_* , X^∞ üzerindeki çarpım topolojisi olmak üzere,

$$\begin{array}{ccc} V_a^\infty X & \xrightarrow{A_a^\infty} & (X^\infty, \tau_*) \\ \downarrow \nabla_a^\infty & & \\ (X, P(X)) & & \end{array}$$

Şekil 5. 1. Tek nokta kümesinin kapalılık diyagramı.

$$\nabla_a^{\infty-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(X) = V_a^\infty X$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(\{a\}) = \{a\}$$

$$\nabla_a^{\infty-1}(\{b\}) = \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\}$$

$$A_a^{\infty-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$A_a^{\infty-1}(X^\infty) = V_a^\infty X$$

$$A_a^{\infty-1}(\{a\} \times X \times X \times X \times \dots) = \{a, b_2, b_3, \dots\}$$

$$A_a^{\infty-1}(X \times \{a\} \times X \times X \times \dots) = \{b_1, a, b_3, \dots\}$$

.

.

.

$$A_a^{\infty-1}(\{a\} \times \{a\} \times X \times X \times \dots) = \{a, b_3, b_4, \dots\}$$

$$A_a^{\infty-1}(\{a\} \times \{a\} \times \{a\} \times X \times \dots) = \{a, b_4, b_5, \dots\}$$

.

.

.

$$A_a^{\infty-1}(\{b\} \times X \times X \times X \times \dots) = \{b_1\}$$

$$A_a^{\infty-1}(X \times \{b\} \times X \times X \times \dots) = \{b_2\}$$

.

.

.

$$A_a^{\infty-1}(\{b\} \times \{b\} \times X \times X \times \dots) = \emptyset$$

$$A_a^{\infty-1}(\{b\} \times \{b\} \times \{b\} \times X \times \dots) = \emptyset$$

.

.

.

$S = \{\emptyset, V_a^\infty X, \{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \dots, \{a\}, \dots, \{b_1, b_2, b_3, \dots\}, \dots\}$ alt bazındaki elemanların

sonlu kesişimleri alınarak $\beta = \{\emptyset, V_a^\infty X, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \dots\}$ bazı elde edilir.

Daha sonra β daki elemanların keyfi birleşimleri alınarak

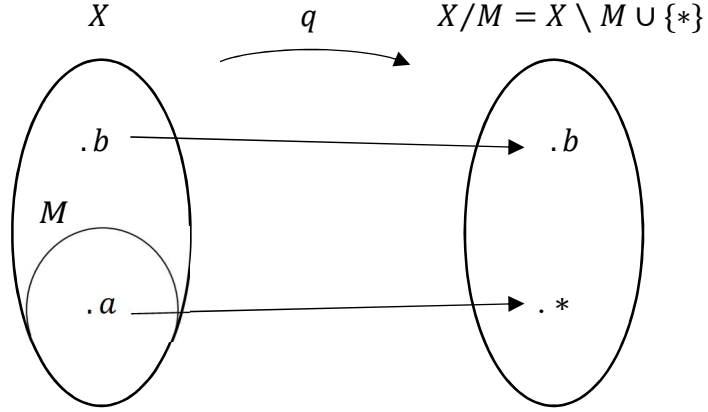
$\tau_W = \{\emptyset, V_a^\infty X, \{a\}, \{b_1\}, \{b_2\}, \{b_3\}, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \{a, b_3\}, \dots\} = P(V_a^\infty X)$ olur.

Tanım 5.1.4 den $M = \{a\}$ kümesi kapalıdır. Şimdi de $M = \{a\}$ nin kuvvetli

kapalılığını Tanım 5.1.4 (2) kullanarak inceleyelim. $\{*\}$ kümesinin X/M de kapalı

olduğunu gösterelim:

$X/M = \{b, *\}$ olmak üzere $q : X \rightarrow X/M = (X \setminus M) \cup \{*\}$, $x \in M$ ise $q(x) = \{*\}$ ve $x \notin M$ ise $q(x) = x$ dönüşümü kullanılarak elde edilen X/M üzerindeki bitiş topolojini oluşturacağız.



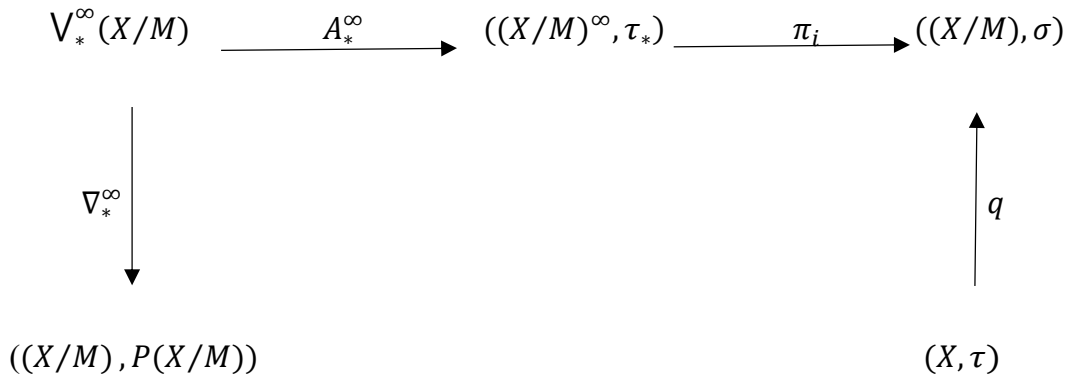
Şekil 5.2. Tek nokta kümesinin kuvvetli kapalılık diyagramı.

X/M deki $\sigma = \{G \subset X/M \mid f^{-1}(G) \in \tau\}$ topolojisi için,

$$\left. \begin{array}{l} G = \emptyset \text{ için } f^{-1}(G) = \emptyset \in G \text{ den } \emptyset \in \sigma \text{ dır.} \\ G = X/M \text{ için } f^{-1}(X/M) = X \in G \text{ den } X/M \in \sigma \text{ dır.} \\ G = \{b\} \text{ için } f^{-1}(G) = \{b\} \in G \text{ den } \{b\} \in \sigma \text{ dır.} \\ G = \{*\} \text{ için } f^{-1}(G) = \{a\} \notin G \text{ den } \{*\} \notin \sigma \text{ dır.} \end{array} \right\} \sigma = \{\emptyset, X/M, \{b\}\} \text{ olur.}$$

$(X/M, \sigma)$ bölüm uzayı $*$ noktasında T_1 olmadığından Tanım 5.1.4 den $M = \{a\}$ kümesi kuvvetli kapalı değildir. Benzer şekilde Tanım 5.1.4 (2) de verilen tanımın başka bir uygulamasını **Top** da gösterelim:

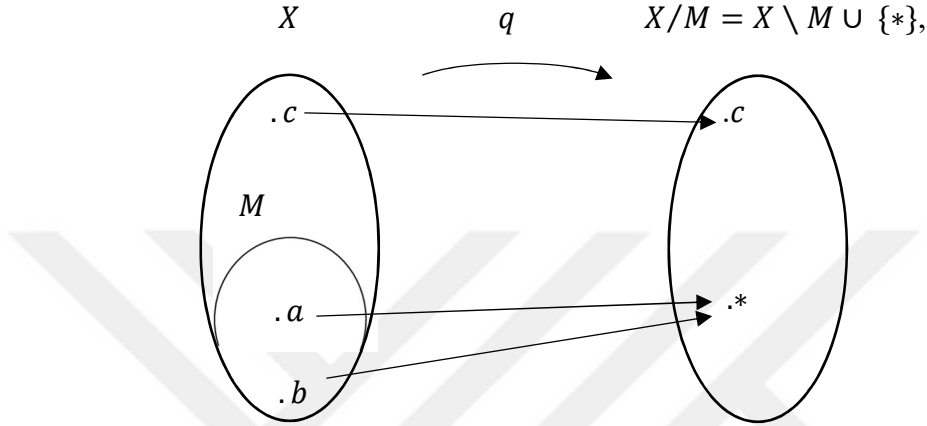
Örnek 5.1.6 $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ olmak üzere $M = \{a, b\}$ kümesinin



Şekil 5.3. Verilen bir kümenin kapalılık diyagramı.

X/M üzerindeki $q = (X, \tau) \rightarrow (X/M, \sigma)$ bölüm fonksiyonu kullanılarak elde edilen bitiş topolojisini oluşturalım.

$$\left. \begin{array}{l} q^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \tau \text{ dan } \emptyset \in \sigma \text{ dır.} \\ q^{-1}(\{c\}) = \{c\} \in \tau \text{ dan } \{c\} \in \sigma \text{ dır.} \\ q^{-1}(\{*\}) = \{a, b\} \notin \tau \text{ dan } \{*\} \notin \sigma \text{ dır.} \\ q^{-1}(X \setminus M) = \{a, b, c\} = X \in \tau \text{ dan } X \setminus M \in \sigma \text{ dır.} \end{array} \right\} \text{ böylece } \sigma = \{\emptyset, \{c\}, X \setminus M\} \text{ dir.}$$



Şekil 5.4. Verilen bir kümenin kuvvetli kapalılık diyagramı.

Şimdi de A_*^∞ ve ∇_*^∞ tarafından doğrulan topolojinin diskre olduğunu gösterelim.

$$A_*^{\infty-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$A_*^{\infty-1}((X/M)^\infty) = \nabla_*^\infty(X/M)$$

$$A_*^{\infty-1}(\{c\} \times X/M \times X/M \times X/M \times \dots) = \{c_1\}$$

$$A_*^{\infty-1}(X \times \{c\} \times X/M \times X/M \times \dots) = \{c_2\}$$

.

.

.

$$A_*^{\infty-1}(\{c\} \times \{c\} \times X/M \times X/M \times \dots) = \emptyset$$

$$A_*^{\infty-1}(\{c\} \times \{c\} \times \{c\} \times X/M \times \dots) = \emptyset$$

.

.

.

$$A_*^{\infty-1}(\{*\} \times X/M \times X/M \times X/M \times \dots) = \{*, c_2, c_3, \dots\}$$

$$A_*^{\infty-1}(X/M \times \{*\} \times X/M \times X/M \times \dots) = \{c_1, *, c_3, \dots\}$$

.

.

.

$$A_*^{\infty-1}(\{*\} \times \{*\} \times X/M \times X/M \times \dots) = \{*, c_3, c_4, \dots\}$$

$$A_*^{\infty-1}(\{*\} \times \{*\} \times \{*\} \times X/M \times \dots) = \{*, c_4, c_5, \dots\}$$

.

.

.

$$\nabla_*^{\infty-1}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\nabla_*^{\infty-1}(X/M) = V_*^{\infty}(X/M)$$

$$\nabla_*^{\infty-1}(\{*\}) = \{*\}$$

$$\nabla_*^{\infty-1}(\{c\}) = \{c_1, c_2, c_3, c_4, \dots\}$$

$S = \{\emptyset, V_*^{\infty}(X/M), \{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}, \dots, \{*\}, \dots, \{c_1, c_2, c_3, \dots\}, \dots\}$ alt bazındaki elemanların sonlu kesişimleri alınarak $\beta = \{\emptyset, V_*^{\infty}(X/M), \{*\}, \{c_1\}, \{c_2\}, \{c_3\}, \dots\}$ bazı elde edilir. Daha sonra β daki elemanların keyfî birleşimleri alınarak

$$\tau_W = \{\emptyset, V_*^{\infty}(X/M), \{*\}, \{c_1\}, \{c_2\}, \dots, \{*, c_1\}, \{*, c_2\}, \{c_1, c_2\}, \dots\} = P(V_*^{\infty}(X/M))$$

olur ki $M = \{a, b\}$ X de kapalıdır.

Teorem 5.1.7 (X, L) sabit limit uzayında $M \subseteq X$ kapalıdır (açıktır) ancak ve ancak $M = X$ dir.

İspat: $M = \emptyset$ ise Tanım 5.1.4 den ispat açıktır. Kabul edelim ki $\emptyset \neq M \subset X$ ve $M \neq X$ kapalı olsun. Bu durumda en az bir $x \in X$ vardır öyle ki $x \notin M$ dir. $\sigma = \cap_{i=1}^{\infty} [x_i]$ ve $x_i \in X/M$ alalım. Böylece her $i \in I$ için $\nabla_* \sigma = [x] \in L_d$ ve $\pi_j A_*^{\infty} \sigma = [x] \cap [*] \in L_1$ vardır burada X/M üzerindeki final yapı L_1 ve X/M üzerindeki diskre yapı L_d dir. σ süzgeci $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ kümesi tarafından üretildiğinden sonlu bir küme içermez. Bu ise Tanım 5.1.4 (2) den $\{*\}$ ın kapalı olmasıyla çelişir. Sonuç olarak $M = X$ dir.

$$\begin{array}{ccccc}
V_*^\infty(X/M) & \xrightarrow{A_*^\infty} & (X/M)^\infty & \xrightarrow{\pi_j} & ((X/M), L_1) \\
\downarrow \nabla_*^\infty & & & & \uparrow q \\
((X/M), L_d) & & & & (X, L)
\end{array}$$

Şekil 5.5. *ConLim* kategorisinde kapalılık diyagramı.

Eğer $M = X$ ise bu durumda $V_*^\infty(X/M) = \{*\}$ ve Tanım 5.1.4 (1) den $\{*\}$ kapalıdır ve sonuç olarak Tanım 5.1.4 (2) den M kapalıdır.

Benzer şekilde M nin açık olmasının ispatı Tanım 5.1.4 den kolayca görülür.

Teorem 5.1.8 Sabit limit uzayının her alt kümesi kuvvetli kapalı (kuvvetli açık) dır.

İspat: Kabul edelim ki (X, L) sabit limit uzay ve $M \subset X$ olsun. $M = \emptyset$ ise Tanım 5.1.4 den M kuvvetli kapalıdır. $M \neq \emptyset$ ve $q : (X, L) \rightarrow (X/M, L_q)$ tarafından üretilen X/M üzerindeki bölüm yapısı L_1 olsun. $(X/M) V_*(X/M)$ üzerindeki S_* ve ∇_* tarafından üretilen başlangıç yapısı ise L_W olsun.

$$\begin{array}{ccc}
((X/M) V_*(X/M), L_W) & \xrightarrow{S_*} & ((X/M)^2, L_1^2) \xrightleftharpoons[\pi_2]{\pi_1} ((X/M), L_q) \\
\downarrow \nabla_* & & \\
((X/M), L_d) & &
\end{array}$$

Şekil 5.6. *ConLim* kategorisinde kuvvetli kapalılık diyagramı.

burada $(X/M)^2$ üzerindeki çarpım yapısı L_q^2 ve (X/M) deki diskre yapısı L_d dir.

$\sigma \in L_W$ olsun. Bu durumda Tanım 3.2.1 den $\pi_1 S_* \sigma, \pi_2 S_* \sigma \in L_q$ ve $\nabla_* \sigma \in L_d$ dir. Bu $\nabla_* \sigma = [\emptyset]$ veya $\nabla_* \sigma = [U]$ olup $U \subset (X/M)$ olacak şekilde sonlu bir U için sonludur.

Eğer $\nabla_*\sigma = [\emptyset]$ ise $\sigma = [\emptyset]$ dur.

Eğer $\nabla_*\sigma = [U]$ ise en az bir $V \in \sigma$ vardır öyle ki $U \supset \nabla_*V$ dir. U sonlu olduğundan V sonludur. Böylece Tanım 4.1.3 (2) den $(X/M, L_1)$ uzayı $*$ da T_1 dir. Sonuç olarak Tanım 5.1.4 (3) den M kuvvetli kapalıdır. Benzer şekilde M nin kuvvetli açık olmasının ispatı kolayca görülür.

Top da uzay T_1 ise kapalılık (açıklık) ile kuvvetli kapalılık (kuvvetli açıklık) denktir.

Örnek 5.1.9 $X = \{a, b, c\}$ ve X kümesi üzerindeki sabit limit yapı $L = \{\emptyset, [a], [b], [c], [a] \cap [b], [a] \cap [c], [b] \cap [c], [a] \cap [b] \cap [c]\}$ için $M = \{a, c\}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuçları yazabiliriz.

1. M , Teorem 5.1.7 den ne açık ne kapalıdır. Ancak X kümesi hem açık hem kapalıdır.
2. M , Teorem 5.1.8 den hem kuvvetli açık hem de kuvvetli kapalıdır.
3. (X, L) uzayı Teorem 4.1.6 dan T_1 dir. M kapalı değildir fakat kuvvetli kapalıdır.

Teorem 5.1.10 (X, L) sabit limit uzay olsun.

- (1) Her $i \in I$ için $M_i \subset X$ kapalı (açık) ise $\bigcap_{i \in I} M_i$ kapalı (açık) dır.
- (2) Her $i \in I$ için $M_i \subset X$ kapalı (açık) ise $\bigcup_{i \in I} M_i$ kapalı (açık) dır.
- (3) Her $i \in I$ için $M_i \subset (X_i, L_i)$ kapalı (açık) ise $\prod_{i \in I} M_i$ kümesi de $(X = \prod_{i \in I} X_i, L)$ L de kapalı (açık) dır. Burada L , X deki çarpım yapısıdır.

İspat: İspat açıktır.

Teorem 5.1.11 (1) $f : (X, K) \rightarrow (Y, L)$ **ConLim** de bir morfizm olsun. $M \subset Y$ (kuvvetli) kapalı ise $f^{-1}(M) \subset X$ (kuvvetli) kapalıdır.

(2) $f : (X, K) \rightarrow (Y, L)$ **ConLim** de bir morfizm olsun. $F \subset X$ (kuvvetli) kapalı ise $f(F) \subset Y$ (kuvvetli) kapalıdır.

(3) (X, L) sabit limit uzay olsun. $M \subset N$ ve $N \subset X$ (kuvvetli) kapalı ise $M \subset X$ (kuvvetli) kapalıdır.

İspat: İspat açıktır.

Teorem 5.1.12 (Tietze Genişleme Teoremi) (B, K) sabit limit uzayı $\bar{T}_0$ (T_0' ve T_1) ve A ise (B, K) nın boştan farklı kapalı alt uzayı ise her $f : (A, L) \rightarrow (\mathbb{R}, S)$ morfizmi $g : (B, K) \rightarrow (\mathbb{R}, S)$ bir genişleme morfizmi vardır.

İspat: Teorem 5.1.7 den $A = B$ dir ancak ve ancak A kapalıdır. Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki lemmayı ifade ve ispat edebiliriz.

Teorem 5.1.13 (Urysohn Lemması) (B, K) sabit limit uzayı $\bar{T}_0$ (T_0' ve T_1) ve M ile N ise X in boştan farklı ayrık alt kümeleri olsun. Bu durumda $x \in M$ ise $f(x) = 0$ ve $x \in N$ ise $f(x) = 1$ olacak şekilde en az bir $f : (B, K) \rightarrow ([0, 1], L)$ morfizmi vardır.

İspat: $f : B \rightarrow [0, 1]$ morfizmi, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in M \text{ ise} \\ 1, & x \notin M \text{ ise} \end{cases}$ şeklinde tanımlansın. $\alpha \in K$ ise $f(\alpha) \in L$ olduğunu gösterelim.

Eğer $\alpha = [\emptyset]$ ise bu takdirde $f(\alpha) = [\emptyset]$ ve buradan $f(\alpha) \in L$ dir.

Eğer $\alpha \neq [\emptyset]$ bu takdirde $f(\alpha) = [0] \in L$ veya $f(\alpha) = [1] \in L$ veya $f(\alpha) = [0] \cap [1] \in L$ dir. Çünkü $[0, 1]$ üzerindeki sabit limit yapı L dir. Böylece f morfizmi $f(M) = \{0\}$ ve $f(N) = \{1\}$ dir.

Sonuç 5.1.14 (1) ConLim $p \in X$ ve $\emptyset \neq F \subset X$ için Teorem 5.1.7 ve 5.1.8 den

- (i) F kapalıdır ancak ve ancak $F = X$ dir.
- (ii) Sabit limit uzayının her alt kümesi kuvvetli kapalıdır.

(2) PBorn, Born kategorilerinde $p \in X$ ve $\emptyset \neq F \subset X$ olmak üzere [24] deki Teorem 2.13, 3.9 ve 3.10 dan,

- (i) $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak $X = \{p\}$ dir.
- (ii) F kapalıdır ancak ve ancak $X = F$ dir.
- (iii) Her $\emptyset \neq F \subset X$ kuvvetli kapalıdır.

(3) CApp kategorisinde (X, λ) yakınsak approach uzay, $p \in X$ ve $F \subset X$ olmak üzere [25] deki Teorem 3.7-3.9 dan,

- (i) $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak $x \neq p$ olmak üzere her $x \in X$ için $\lambda([x])(p) = \infty$ veya $\lambda([p])(x) = \infty$ dir.

(ii) F kapalıdır ancak ve ancak her $x \in B$ için $x \notin F$ ve her $y \in F$ için $\lambda([x])(y) = \infty$ veya her $x \in X$ için $x \notin F$, β süzgeci için $\beta \cup [F]$ öz süzgeç ise $\lambda(\beta)(x) = \infty$ dir.

(iii) F kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak

(a) Her $x \in X$ için $x \notin F$ ve her $y \in F$ için $\lambda([x])(y) = \infty$ dir.

(b) Her $x \in X$ için $x \notin F$, β süzgeci için $\beta \cup [F]$ öz süzgeç ise $\lambda(\beta)(x) = \infty$ dir.

(4) **ConFCO** kategorisinde $p \in X$ ve $\emptyset \neq F \subset X$ için [26] daki Teorem 3.3 den,

(i) $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak $x \neq p$ ve her $x \in B$ için $[x] \cap [p] \notin K$ dir.

(ii) F (kuvvetli) kapalıdır ancak ve ancak her $\alpha \in K$ için $\alpha \not\subset [a]$ veya $\alpha \cup M$ öz süzgeç değildir.

(5) **CP** kategorisinde [24] daki Teorem 3.8 den her $\emptyset \neq F$ kapalı ve kuvvetli kapalıdır.

(6) **FCO** kategorisinde $p \in X$ ve $\emptyset \neq F \subset X$ için [24] daki Teorem 3.1 ve 3.2 den,

(i) $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak $x \neq p$ için $[x] \notin K(p)$ veya $[p] \notin K(x)$ dir.

(ii) $a \in X$ ve $\alpha \notin F$ olmak üzere $\alpha \cup [F]$ in öz süzgeç olmadığı herhangi bir $\alpha \in K(a)$ var ise F kuvvetli kapalıdır burada her $a \in F$ için $\alpha \notin K(a)$ dir.

(7) **Lim** kategorisinde $p \in X$ ve $\emptyset \neq F \subset X$ olmak üzere [27] daki Lemma 2.2 den,

(i) $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak $x \neq p$ için $[x] \notin L(p)$ veya $[p] \notin L(x)$ dir.

(ii) F kapalıdır (kuvvetli kapalıdır) ancak ve ancak her $a \notin F$ için en az bir $\alpha \in L(a)$ vardır öyle ki $\alpha \cup [F]$ öz süzgeç (öz olmayan süzgeç) ise $a_i \in F$ olacak şekilde seçilen sonlu küme ve $\beta_i \in L(a_i)$ süzgeçleri için $\bigcap_{i=1}^n \beta_i \not\subset [a]$ dır.

(8) **RRel** kategorisinde $p \in X$ ve $\emptyset \neq F \subset X$ olmak üzere [19] daki Teorem 2.3 den

(i) $\{p\}$ kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için xRp ve pRx ise $p = x$ dir.

(ii) F kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için en az $a, b \in F$ vardır öyle ki xRa ve bRx ise $x \in F$ dir.

(iii) F kuvvetli kapalıdır ancak ve ancak her $x \in X$ için en az $a \in F$ vardır öyle ki xRa veya aRx ise $x \in F$ dir.

6. SABİT LİMİT UZAYLARDA KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

6.1 Kapanış Operatörleri

Bu kısımda **ConLim** de çeşitli kapanış operatörleri incelenecek, bunların özellikleri ve birbirleri ile olan ilişkileri araştırılacaktır. Son olarak T_0 , T_1 ve T_2 uzayları bu kapanış operatörlerine göre karakterize edilecektir.

Tanım 6.1.1 ([11,27,28]) $\mathcal{E}$ bir topolojik kategori $X \in Ob(\mathcal{E})$ olsun.

(1) X in her M alt kümesini $c_X(M)$ alt kümesine götüren c_X kapanış operatörü aşağıdaki şartları sağlar.

(i) $M \subset c_X(M)$ dır.

(ii) $M \subset N$ ise $c_X(M) \subset c_X(N)$ dir.

(iii) Her $f: X \rightarrow Y$ için $f(c_X(M)) \subset c_Y(f(M))$ dir.

(2) Her $M \subset X$ için $c_X(M) = X$ ise c_X operatörüne alışılmış kapanış operatörü denir.

(3) Her $\emptyset \neq M \subset X$ için, $\iota_X(M) = X$ ve $\iota_X(\emptyset) = \emptyset$ ise ι_X e indiske kapanış operatörü denir.

(4) Her $M \subset X$ için $\delta_X(M) = M$ ise δ_X e diskre kapanış operatörü denir.

(5) $M \subset X$ için $c_X(M) = M$ ise M kümesine c_X –kapalıdır denir.

(6) $M \subset X$ için $c_X(c_X(M)) = c_X(M)$ ise M kümesine idempotent denir.

Tanım 6.1.2 ([11,27,28]) (X, L) sabit limit uzay ve $M \subset X$ olsun.

(1) $cl_X(M) = \bigcap \{F \subset X \mid M \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı}\}$ kümesine M nin X e göre kapanışı denir. Bu tanımda kapalı yerine kuvvetli kapalı alınır ise M nin X e göre kuvvetli kapanışı olan $scl_X(M)$ elde edilir.

(2) $Q_X(M) = \bigcap \{F \subset X \mid M \subset F, F \text{ açık ve kapalı}\}$ kümesine M nin X e göre quasi-component kapanışı denir. Bu tanımda açık ve kapalı küme yerine sırası ile kuvvetli açık ve kuvvetli kapalı alınır ise M nin X e göre kuvvetli quasi-component kapanışı olan $SQ_X(M)$ elde edilir.

(3) $\theta_X(M) = \bigcap \{x \in X \mid cl_X(G) \cap M \neq \emptyset, X \text{ in } x \text{ noktasını içeren her } G \text{ açık kümesi için}\}$ kümesine M nin X e göre θ_X -kapanışı denir. Tanımda cl_X yerine scl_X ve G açığı yerine kuvvetli açıklık kullanılır ise M nin X e göre $S\theta$ –kapanışı olan $S\theta_X(M)$ elde edilir.

(4) $b_X(M) = \{x \in X \mid cl_X(\{x\}) \cap G \cap M \neq \emptyset, X \text{ in } x \text{ i içeren her } G \text{ açık kümesi için}\}$ Bu tanımda cl_X yerine scl_X ve G açığı yerine kuvvetli açıklık kullanılır ise M nin X e göre sb -kapanışı olan $sb_X(M)$ elde edilir. M nin X e göre b -kapanışı denir.

(5) $l_X(M) = \{x \in X \mid x \in cl_X(G \cap M) \text{ olacak şekilde } X \text{ in kompakt } G \text{ alt uzayı vardır}\}$ kümesine M nin X e göre l -kapanışı denir. Bu tanımda cl_X yerine scl_X ve kompakt yerine kuvvetli kompakt alınır ise M nin X e göre sl -kapanışı olan $sl_X(M)$ elde edilir.

Top da $cl_X = K$ Kuratowski kapanış, Q_X quasi-component kapanışı, θ_X -kapanış, b_X -kapanış ve l_X -kapanış operatörüdür.

Teorem 6.1.3 (X, L) sabit limit uzay, $M \subset X$ olsun.

A. (1) $cl_X(M) = Q_X(M) = \theta_X(M) = b_X(M) = X$

(2) $scl_X(M) = SQ_X(M) = S\theta_X(M) = Sb_X(M) = M$

B. cl , scl çarpımsal, idempotent, kalıtsal ve toplamsaldır.

İspat: A. Tanım 6.1.2 den açıktır.

B. [11] deki Alıştırma 2D, Teorem 2.3, 2.4 ve Önerme 2.5 den ispat açıktır.

Teorem 6.1.4 ConLim de diskre kapanış operatörü $\delta_X = scl_X$ ve indiskre kapanış operatörü $\iota_X = cl_X$ dir.

İspat: Teorem 5.1.7, Teorem 5.1.8 ve Tanım 6.1.1 den ispat açıktır.

Örnek 6.1.5 $X = \{a, b, c\}$ üzerinde aşağıdaki şekilde tanımlı L yapısı ve $M = \{a, b\}$ için $cl(M) = X$ indiskre kapanış operatörü, $scl(M) = M$ diskre kapanış operatörüdür. $L = \{\emptyset, [a], [b], [c], [a] \cap [b], [a] \cap [c], [b] \cap [c], [a] \cap [b] \cap [c]\}$.

$\mathcal{E}$ nun kapanış operatörü c olsun.

(1) $T_0(c) = \{X \in \mathcal{E} \mid a, b \in X \text{ için } a \in c_X(\{b\}) \text{ ve } b \in c_X(\{a\}) \text{ ise } a = b\}$

(2) $T_1(c) = \{X \in \mathcal{E} \mid \text{her } a \in X \text{ için } c_X(\{a\}) = \{a\}\}$

(3) $\Delta(c) = \{X \in \mathcal{E} \mid c_{X^2}(\Delta) = \Delta, \text{diyagonal}\}$

(4) $\nabla(c) = \{X \in \mathcal{E} \mid c_{X^2}(\Delta) = X^2\}$

$\mathcal{E} = \mathbf{Top}$, bilinen kapanış operatörü C ve quasi-kapanış operatörü Q olsun. Bu durumda $T_0(C)$, $T_1(C)$, $\Delta(C)$, $\nabla(Q)$ ve $T_1(Q)$ sırası ile T_0 uzaylar, T_1 uzaylar, T_2 uzaylar, bağlantılı uzaylar ve tam bağlantısız uzaylara karşılık gelir.

Teorem 6.1.6 (X, L) sabit limit uzayı olsun.

(1) $(X, L) \in T_0(cl)((T_1(cl), \Delta(cl), \nabla(scl)))$ ancak ve ancak $X = \emptyset$ veya $X = \{x\}$ dir.

(2) $(X, L) \in T_0(scl)((T_1(scl), \Delta(scl), \nabla(cl)))$ dir.

İspat: Teoremler 5.1.7 ve 5.1.8 den açıktır.

Teorem 6.1.7 $T_0(scl)$, $T_1(scl)$, $\Delta(scl)$ ve $\nabla(cl)$ kategorileri **ConLim** kategorisine izomorftur.

İspat: Teorem 6.1.6 dan açıktır.

Teorem 6.1.8 $T_0(cl)$, $T_1(cl)$, $\Delta(cl)$ ve $\nabla(scl)$ alt kategorileri **ConLim** de bölüm-yansımali (quotien-reflective) kategorilerdir. Ve bu kategoriler ikişerli olarak izomorfiktir.

İspat: Teorem 6.1.3 (B) den açıktır.

Sonuç 6.1.9 (1) **Top** kategorisinde,

$$\Delta(cl) = \Delta(scl) \subset T_1(cl) = T_1(scl) \subset T_0(cl) = T_0(scl)$$

(2) **ConLim** de Teoremler 4.2.5, 4.2.8, 6.1.4 ve 6.1.6 dan,

$$\Delta(cl) = \nabla(scl) = T_0(cl) = T_1(cl) \subset \Delta(scl) = \nabla(cl) = T_0(scl) = T_1(scl) = \mathbf{ConLim}$$

(3) **CApp** kategorisinde [25] deki Teorem 4.8, 4.9, 4.12, 4.13 ve [29] deki Teorem 9-11 den,

$$\Delta(scl) \subset T_1(scl) \subset T_0(scl) \text{ ve}$$

$$\Delta(cl) \subset T_1(cl) \subset T_0(cl) = \bar{T}_0\mathbf{CApp} \subset T_0\mathbf{CApp} \subset T_0'\mathbf{CApp}$$

(4) **ConFCO** kategorisinde [8] deki Tanım 3.2.1, [26] daki Teorem 4.3-4.5 ve [30] deki Teorem 2.1, 2.2, 2.9 ve 2.10 dan,

$$\Delta(cl) = \Delta(scl) \subset T_1(cl) = T_1(scl) = T_0ConFCO = \\ T_1ConFCO = \bar{T}_0ConFCO \subset T_0(cl) = T_0(scl) \subset T_0'ConFCO$$

(5) **CP** kategorisinde [24] deki Sonuç 3.13, [18] deki Teorem 3.8 den ve [19] den,

$$T_1(cl) = \Delta(cl) = T_1(Q) = \Delta(Q) = T_1(SQ) = \Delta(SQ) = T_1(scl) = \Delta(scl) \text{ ve} \\ T_1(Q) = \Delta(Q) = \bar{T}_0CP = T_0'CP = T_1CP = CP$$

(6) **FCO** kategorisinde [27] deki Teorem 2.9 ve 2.11 den,

$$\Delta(scl) \subset \Delta(cl) = T_1(cl) = T_1(scl) = T_1FCO \subset \\ T_0(cl) = T_0(scl) = \bar{T}_0FCO \subset T_0FCO \subset T_0'FCO$$

(7) **Lim** kategorisinde [27] deki 2.1 ve 2.10 dan,

$$\Delta(scl) \subset T_1(cl) = T_1(scl) = T_1Lim \subset T_0(cl) = \\ (scl) = \bar{T}_0Lim = T_0Lim = T_0'Lim$$

(8) **PBorn** kategorisinde [19] deki Teorem 3.6, 3.7 ve 4.2 den,

$$\Delta(cl) = T_1(cl) = \Delta(Q) = T_1(Q) \subset \Delta(scl) = \nabla(scl) = T_1(scl) = \Delta(SQ) = T_1(SQ)$$

(9) **psqMet** kategorisinde [31] deki Teorem 6 dan, [33] deki Teorem 3.3-3.5 ve 3.15 ve [32] daki Teorem 3.10 dan,

$$T_1psqMet = T_1(SQ) = T_1(scl) = \Delta(scl) \subset T_1(cl) = \Delta(cl) = T_1(Q) \\ = \bar{T}_0psqMet \subset T_0psqMet \subset T_0(scl) \subset T_0(cl) \subset T_0'psqMet$$

(10) **RRel** kategorisinde [19] daki Teorem 3.7 den,

$$T_1(cl) = T_0RRel = \bar{T}_0RRel \text{ ve}$$

$$\Delta(cl) = \Delta(scl) = T_1(SQ) = \Delta(SQ) = \Delta(Q) = T_1RRel$$

7. SABİT LİMİT UZAYLARDA BAĞLANTILILIK, TAM BAĞLANTISIZLIK VE KALITSAL BAĞLANTISIZLIK

7.1 Bağlantılılık

Bu kısımda **ConLim** kategorisinde bağlantılılık, kuvvetli bağlantılılık, D -bağlantılılık ve $cl(scl)$ -bağlantılılık kavramları incelenecek ve birbirleri ile olan ilişkileri araştırılacaktır.

Tanım 7.1.1 ([17, 34-37]) $\mathcal{E}$ bir topolojik kategori ve $X \in Ob(\mathcal{E})$ olsun.

- (1) X in hem kuvvetli açık hem de kuvvetli kapalı (hem açık hem de kapalı) olan alt kümeleri sadece X ve $\emptyset$ ise X e bağlantılıdır (kuvvetli bağlantılı) denir.
- (2) X den herhangi bir diskre objeye bir morfizm sabit ise X e D -bağlantılıdır denir.
- (3) $\delta_x = \langle 1_x, 1_x \rangle : X \rightarrow X \times X$ diyagonal morfizmi K -yoğun ise X objesine K -bağlantılıdır denir, burada K , $\mathcal{E}$ nun kapanış operatörüdür.

Teorem 7.1.2 $(X, L) \in \mathbf{ConLim}$ olsun.

- (1) (X, L) bağlantılıdır ancak ve ancak $|X| \leq 1$ dir.
- (2) Her sabit limit uzayı kuvvetli bağlantılıdır.
- (3) (X, L) D -bağlantılıdır ancak ve ancak $|X| \leq 1$ dir.

İspat: (1) (X, L) uzayının bağlantılı ve $|X| > 1$ olduğunu kabul edelim. Teorem 5.1.7 den X in her alt kümesi kuvvetli açık ve kuvvetli kapalıdır bu ise bir çelişkidir. Böylece $X = \emptyset$ veya tek nokta kümesidir. Tersine $X = \emptyset$ veya $X = \{a\}$ ise Tanım 5.1.7 den X kuvvetli açıktır (kapalıdır). Böylece Tanım 7.1.1 den (X, L) uzayı bağlantılıdır.

(2) Teorem 5.1.7 ye göre X in hem açık hem de kapalı tek alt kümeleri X ve $\emptyset$ dur. Tanım 7.1.1 den (X, L) kuvvetli bağlantılıdır.

(3) (X, L) D -bağlantılı, (Y, K) diskre sabit limit uzayı ve $|Y| > 1$ olsun. $d \in X$ için $X \neq \{d\}$ ise $c, d \in X$ ve $k, l \in Y$ için $f : (X, L) \rightarrow (Y, K)$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$f(x) = \begin{cases} k, & x = c \text{ ise} \\ l, & x \neq c \text{ ise} \end{cases}$$

f nin sürekli olduğunu gösterelim. $\alpha \in L$ olsun.

Eğer $\alpha = \emptyset$ ise $f(\alpha) = \emptyset$ dur.

Eğer $\alpha \neq \emptyset$ ve $U \in f(\alpha)$ ise $U \supset f(V)$ olacak şekilde en az bir $V \in \alpha$ vardır. $V = \{c\}$ ise $f(V) = f(\{c\}) = \{k\} \in f(\alpha)$ yani $f(\alpha) = [k]$ dir. $V \neq \{c\}$ ise $f(V) = \{l\}$ veya $\{k, l\} \in f(\alpha)$ yani $f(\alpha) = [l]$ veya $[k] \cap [l]$ dir. K sabit limit yapı olduğundan $f(\alpha) \in K$ olur ki böylece f süreklidir. f sabit olmadığından ve (X, L) uzayı D -bağlantılı olduğundan çelişkidir. Böylece $|X| \leq 1$. Tersine $|X| \leq 1$ ise Tanım 7.1.1 den (X, L) uzayı D -bağlantılıdır.

Teorem 7.1.3 (1) (X, L) sabit limit uzayı scl -bağlantılıdır ancak ve ancak $|X| \leq 1$ dir.

(2) Her sabit limit uzayı cl -bağlantılıdır.

İspat: (1) (X, L) uzayının scl -bağlantılı olduğunu kabul edelim. Tanım 7.1.1 den $scl(\Delta) = X^2$ fakat Teorem 5.1.9 dan $scl(\Delta) = \Delta$ olur ki bu ise $\Delta = X^2$ olmasıdır. Böylece $|X| \leq 1$ olur. Tersine $X = \emptyset$ veya $X = \{a\}$ ise (X, L) uzayı Tanım 8.1.1 den scl -bağlantılıdır.

(2) (X, L) uzayında her zaman $cl(\Delta) = X^2$ olduğundan Tanım 7.1.1 den uzay cl -bağlantılıdır.

Teorem 7.1.4 (X, L) sabit limit uzayı olsun.

A. Aşağıdakiler denktir:

- (1)** (X, L) bağlantılıdır,
- (2)** (X, L) D -bağlantılıdır,
- (3)** $X = \emptyset$ veya $X = \{a\}$ dir,
- (4)** (X, L) scl -bağlantılıdır.

B. Aşağıdakiler denktir:

- (1)** (X, L) kuvvetli bağlantılıdır,
- (2)** (X, L) cl -bağlantılıdır.

İspat: A. Teorem 7.1.3 ve 7.1.6 dan ispat aşıkardır.

B. (X, L) uzayının cl -bağlantılı olduğunu kabul edelim. Dolayısıyla $cl(\Delta) = X^2$ dir. Tanım 6.1.1 den X in kapalı ve açık alt kümeleri X ve $\emptyset$ dur. Tanım 7.1.1 den (X, L)

kuvvetli bağlantılıdır. Tersine (X, L) nin kuvvetli bağlantılı olduğunu kabul edelim. Teorem 5.1.7 den X in hem açık hem de kapalı alt kümeleri X ve $\emptyset$ dur. Tanım 6.1.2 den $cl(\Delta) = X^2$ ve Tanım 7.1.1 den (X, L) uzayının cl -bağlantılıdır.

Sonuç 7.1.5 (1) Top da kuvvetli bağlantılılık ve D -bağlantılılık kavramları bilinen bağlantılılık kavramına denktir. Ayrıca X topolojik uzayı T_1 ise bağlantılılık ve kuvvetli bağlantılılık kavramları aynıdır [38].

Bağlantılılık $\Rightarrow$ Kuvvetli bağlantılılık $\Leftrightarrow D$ -bağlantılılık $\Leftrightarrow$ Bilinen bağlantılılık

(2) ConLim de Teorem 7.1.3 ve 7.1.4 den,

$Bağlantılılık \Leftrightarrow D - bağlantılılık \Leftrightarrow scl - bağlantılılık \Rightarrow$
 $Kuvvetli bağlantılılık \Leftrightarrow cl - bağlantılılık$

(3) ConFCO da [29] daki Teorem 4.2-4.5 den,

$Bağlantılılık \Leftrightarrow D - bağlantılılık$

$Bağlantılılık \Rightarrow cl - bağlantılılık \Leftrightarrow scl - bağlantılılık$

(4) CP de [19] ve [27] daki Teorem 3.8 den,

$cl - bağlantılılık \Leftrightarrow Kuvvetli bağlantılılık \Leftrightarrow D - bağlantılılık$

(5) FCO da [17] deki Uyarı 4.13, Teorem 4.9 ve 4.12 den,

$cl - bağlantılılık \Leftrightarrow Kuvvetli bağlantılılık$

$scl - bağlantılılık \Rightarrow Bağlantılılık \Leftrightarrow D - bağlantılılık$

$cl - bağlantılılık \Rightarrow scl - bağlantılılık$

(6) PBorn da [19] daki Teorem 4.2 den,

$cl - bağlantılılık \Leftrightarrow Q - bağlantılılık \Leftrightarrow Kuvvetli bağlantılılık$

$$\begin{aligned} \text{Bağlantılılık} &\Leftrightarrow D - \text{bağlantılılık} \Leftrightarrow SQ - \text{bağlantılılık} \\ &\Leftrightarrow scl - \text{bağlantılılık} \end{aligned}$$

(7) **psqMet** de [32] deki Teorem 4.9 dan,

$$\text{Bağlantılılık} \Leftrightarrow D - \text{bağlantılılık}$$

$$\text{Kuvvetli bağlantılılık} \Rightarrow \text{Bağlantılılık}$$

$$cl - \text{bağlantılılık} \Rightarrow scl - \text{bağlantılılık}$$

(8) **RRel** de [19] daki Uyarı 4.8 den, Teorem 4.3 ve 4.6 den,

$$\text{Kuvvetli bağlantılılık} \Rightarrow D - \text{bağlantılılık} \Leftrightarrow \text{Bağlantılılık}$$

$$cl - \text{bağlantılılık} \Rightarrow scl - \text{bağlantılılık}$$

7.2 Tam Bağlantısızlık Ve Kalıtsal Bağlantısızlık

Tanım 7.2.1 ([19]) Boş olmayan ayrık açık iki veya daha fazla kümelerin birleşimi olarak yazılabilen bir uzaya bağlantısız denir. (X, τ) uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) (X, τ) bağlantısızdır,

(2) X in boş ve kendisinden farklı hem açık hem kapalı olan bir alt kümesi vardır.

Örnek 7.2.2 $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$ olsun. (X, τ) bağlantısızdır.

Tanım 7.2.3 ([19]) (X, τ) topolojik uzayının her bağlantılı bileşeni bir tek elemandan oluşuyor ise bu uzaya tam bağlantısız uzay denir.

Örnek 7.2.4 1. $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ olsun. (X, τ) tam bağlantısız değildir. Çünkü $\tau_{\{a\}} = \{\emptyset, \{a\}\}$, $\tau_{\{b\}} = \{\emptyset, \{b\}\}$, $\tau_{\{c\}} = \{\emptyset, \{c\}\}$, $\tau_{\{a,b\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, $\tau_{\{b,c\}} = \{\emptyset, \{c\}, \{b, c\}\}$ ve $\tau_{\{a,c\}} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}\}$ olup $C(a) = \{a\}$, $C(b) = \{b, c\}$ ve $C(c) = \{b, c\}$ dir. Burada her $x \in X$ için $C(x) = \{x\}$ şeklinde olmadığından (X, τ) tam bağlantısız değildir.

2. $\tau = P(X)$ için $(X, P(X))$ tam bağlantısız bir uzaydır.

Tanım 7.2.5 ([19]) $X \in \mathcal{E}$ ve c , $\mathcal{E}$ nun bir kapanış operatörü olsun.

- (1) X in bağlantılı (kuvvetli bağlantılı, c -bağlantılı veya D -bağlantılı) alt uzayları sadece $\emptyset$ ve tek nokta kümesi ise X e kalıtsal bağlantısız (kuvvetli kalıtsal bağlantısız, kalıtsal c -bağlantısız veya kalıtsal D -bağlantısız) denir.
- (2) X in her quasi-bileşeni yalnızca tek nokta kümesinden oluşuyor, yani her $x \in X$ için $Q(x) = \{x\}$ ise X e tam bağlantısızdır denir.
- (3) X in her kuvvetli quasi-bileşeni yalnızca tek nokta kümesinden oluşuyor, yani her $x \in X$ için $SQ(x) = \{x\}$ ise X e kuvvetli tam bağlantısızdır denir.

Top kategorisinde kuvvetli kalıtsal bağlantısızlık, kalıtsal D -bağlantısızlık ve kalıtsal Q -bağlantısızlık (tam bağlantısızlık) kavramları bilinen anlamda kalıtsal bağlantısızlık (kuvvetli tam bağlantısızlık [17-38]) kavramı ile denktir [17, 35, 38, 39]. Uzay T_1 ise kalıtsal bağlantısızlık (tam bağlantısızlık) ile kuvvetli kalıtsal bağlantısızlık (kuvvetli tam bağlantısızlık) kavramları aynıdır.

Sonuç 7.2.6 **Top** da bilinen bazı sonuçlar şu şekildedir.

- (1) Her tam bağlantısız olan uzay kalıtsal bağlantısızdır.
- (2) Kalıtsal bağlantısızlık ve tam bağlantısızlık kavramları kompakt Hausdorff uzaylarında aynıdır.
- (3) Tam bağlantısız bir uzay Hausdorff tur.
- (4) Tam bağlantısız bir topolojik uzay T_1 dir.
- (5) Her diskre uzay kalıtsal bağlantısızdır.
- (6) Her kalıtsal bağlantısız uzay T_1 dir.
- (7) (X, τ) uzayı T_1 dir ancak ve ancak her tek nokta kümesi kapalıdır.
- (8) Her kuvvetli tam bağlantısız uzay tam bağlantısızdır. Uzay T_1 ise bu iki kavram birbirine denktir.
- (9) Her kalıtsal bağlantısız uzay kuvvetli kalıtsal bağlantısızdır. Uzay T_1 ise bu iki kavram birbirine denktir.
- (10) c operatörü **Top** da bir kapanış operatörü olmak üzere,
 - (i) $\nabla(c) \cap \Delta(c)$ kümesi üzerindeki topoloji aşıkardır (eleman sayısı en fazla 1 olan küme üzerindeki topoloji). Burada c , **Top** da herhangi bir kapanış operatörüdür.
 - (ii) $\Delta(c) \subset T_1(c)$ ise $\nabla(c) \cap T_1(c)$ kümesi üzerindeki topoloji aşık olmayabilir.

Teorem 7.2.7 (X, L) sabit limit uzay olsun.

- (1) (X, L) kalıtsal bağlantısızdır,
- (2) (X, L) kuvvetli kalıtsal D -bağlantısızdır ancak ve ancak $|X| \leq 1$,
- (3) (X, L) kuvvetli kalıtsal bağlantısız ise kalıtsal bağlantısızdır,
- (4) (X, L) uzayı T_0 veya T_0 -sober ise kalıtsal bağlantısızlık ile kuvvetli kalıtsal bağlantısızlık kavramları denktir,
- (5) (X, L) tam bağlantısızdır ancak ve ancak $|X| \leq 1$ dir,
- (6) (X, L) kuvvetli tam bağlantısızdır.
- (7) $\nabla(cl) \cap \Delta(cl)$, $\nabla(scl) \cap \Delta(scl)$, $T_0(cl) \cap T_1(cl)$ ve $T_0(scl) \cap T_1(scl)$ kümeleri üzerindeki sabit limit yapı aşıkardır.

İspat: Tanım 7.2.5 ve Teorem 6.1.6 dan ispat açıktır.

$T_1(Q)$ ($T_1(SQ)$) tam bağlantısız (kuvvetli tam bağlantısız) objelerin sınıfı ve $HDC = \text{Kalıtsal } D\text{-bağlantısız}$, $HC = \text{Kalıtsal bağlantısız}$ veya $HSC = \text{Kuvvetli kalıtsal bağlantısız}$ olsun.

Teorem 7.2.8 (1) $HDCConLim = HCConLim = T_1(SQ) = \bar{T}_0ConLim = ConLim$ ve bu kategoriler topolojiktir.

(2) $HSCConLim = T_1(Q)$ lar aşık ar sabit limit uzayları içerir.

İspat: Teorem 6.1.7 ve 7.2.6 dan açıktır.

Sonuç 7.2.9 (1) $ConLim$ kategorisinde, Teorem 7.2.7 ve 7.2.8 den

- (i) *Kuvvetli kalıtsal bağlantısızlık* $\Leftrightarrow$ *Tam bağlantısızlık*
- (ii) *Kuvvetli tam bağlantısızdır* $\Leftrightarrow$ *Kalıtsal bağlantısızdır*
- (iii) Her kuvvetli kalıtsal bağlantısız limit uzay kalıtsal bağlantısızdır.
- (iv) *Kalıtsal bağlantısızlık* $\Leftrightarrow$ *Kalıtsal D – bağlantısızlık* $\Leftrightarrow$ *Kalıtsal scl – bağlantısızlık*
- (v) *Kuvvetli kalıtsal bağlantısızlık* $\Leftrightarrow$ *Kalıtsal cl – bağlantısızlık*
- (2) CP kategorisinde [19] dan
- (i) *Kalıtsal bağlantısızlık* $\Leftrightarrow$ *Tam bağlantısızlık*

- (ii) $(\mathbb{R}, \mathbb{Z})$ çift uzayı tam bağlantısızdır ve kalıtsal bağlantısızdır fakat Hausdorff değildir. Bu ise Teorem 7.2.8 (iii) nin **CP** kategorisinde de sağlanmadığını gösterir.
- (iii) $c = cl, scl, Q, SQ$ olmak üzere $\Delta(c) \cap \nabla(c)$ ve $T_1(c) \cap \nabla(c)$ aşikar uzay içerir.
- (3) **PBorn** kategorisinde [19] daki Teorem 5.3 den,
- (i) Tam bağlantısız prebornolojik uzay kuvvetli tam bağlantısızdır.
- (ii) Her diskre prebornolojik uzay kalıtsal bağlantısızdır.
- (iii) $((\mathbb{Z}, P(\mathbb{Z})))$ prebornolojik uzayı hem kuvvetli tam bağlantısız hem de kalıtsal tam bağlantısızdır fakat kuvvetli kalıtsal bağlantısız, Hausdorff ve T_0 değildir. Dolayısıyla Teorem 7.2.9 (i), (iii), (v) ve (vii) ifadeleri **PBorn** da sağlanmaz.
- (4) **RRel** kategorisinde, [19] daki Teorem 5.2 ve Uyarı 5.4 den
- (i) Kalıtsal bağlantısızlık $\Leftrightarrow$ Kalıtsal D –bağlantısızlık
- (ii) Kalıtsal scl -bağlantısızlık $\Rightarrow$ Kalıtsal cl –bağlantısızlık
- (iii) Tam bağlantısız (kuvvetli kalıtsal bağlantısız) yansıma bağıntılı bir uzay Hausdorff ve T_1 olmayabilir.
- (iv) $c = cl, scl, Q, SQ$ olmak üzere $\Delta(c) \cap \nabla(c)$ sadece aşikar uzay içerir fakat $T_1(c) \cap \nabla(c)$ aşikar uzay içermeyebilir.
- (5) Herhangi bir topolojik kategoride, **PBorn** ve **RRel** de olduğu gibi kuvvetli tam bağlantısızlık (kuvvetli kalıtsal bağlantısızlık) ve tam bağlantısızlık (kalıtsal bağlantısızlık) kavramları arasında hiçbir ilişki yoktur. Fakat **CP** kategorisinde olduğu gibi kalıtsal bağlantısızlık ve tam bağlantısızlık kavramları denk olabilir.

8. SOBER SABİT LİMİT UZAYLARI

8.1 Soberlik

Bu kısımda indirgenemez sober ve quasi-sober sabit limit uzayları karakterize edildi ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi.

Tanım 8.1.1 ([18]) (X, τ) topolojik uzay ve $\emptyset \neq F \subset X$ kapalı olsun. F kümesi X de iki kapalı öz alt kümenin birleşimi şeklinde yazılamıyor ise yani $A, B \subset X$ kapalı alt kümeleri için $F = A \cup B$ olduğunda $F = A$ veya $F = B$ oluyor ise F ye indirgenemezdir (irreducible set) denir. Aksi takdirde F indirgenebilir bir kümedir.

Örnek 8.1.2 1. $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$ topolojik uzayının indirgenemez kümeleri $I = \{\{c\}, \{a, b\}\}$ dir.

2. $(X, \{\emptyset, X\})$ indiskre topolojik uzayının indirgenemez kümesi, $I = \{X\}$ dir.

3. $(X, P(X))$ diskre topolojik uzayının indirgenemez kümeleri, $I = \{\{a\} \mid a \in X\}$ dir. Çünkü F tek elemanlı bir küme ise kapalıdır aynı zamanda iki kapalı öz alt kümesinin birleşimi şeklinde yazılamaz. F kümesi sonlu ve tek nokta kümelerinden farklı ise $a \in F$ olmak üzere $F = F \setminus \{a\} \cup \{a\}$ olarak yazılabildiğinden F indirgenebilirdir.

4. $(\mathbb{R}, \mathcal{U})$ alışılmış topolojik uzayının indirgenemez kümeleri $I = \{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$ dir. $[a, b] = [a, \frac{a+b}{2}] \cup [\frac{a+b}{2}, b]$ olduğundan $[a, b]$ kapalı kümeleri indirgenebilirdir.

Tanım 8.1.3 (X, τ) bir topolojik uzayı ve $B \subset X$ olsun.

(1) $b \in X$ noktası B nin generic noktasıdır ancak ve ancak $B = \overline{\{b\}}$ dir.

(2) X in her indirgenemez kümesi yalnız bir tane generic noktaya sahip ise uzaya sober dir denir. (X, τ) daki her indirgenemez küme en az bir tane generic noktaya sahip ise (X, τ) ya quasi-sober uzay denir. Dolayısıyla (X, τ) sober ise quasi-sober dir.

Örnek 8.1.4 1. $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a, b\}\}$ uzayı $I = \{\{c\}, \{b, c\}, X\}$ indirgenemez kümelerin sınıfı için $\overline{\{a\}} = X$, $\overline{\{b\}} = \{b, c\}$ ve $\overline{\{c\}} = \{c\}$ olup bu indirgenemez kümeler tek bir generic noktaya sahip olduğundan (X, τ) uzayı Tanım 8.1.3 den sober ve quasi-soberdir.

2. $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{c\}, \{a, b\}\}$ uzayı $I = \{\{c\}, \{a, b\}\}$ indirgenemez kümelerin sınıfı için $\overline{\{a\}} = \{a, b\}$, $\overline{\{b\}} = \{a, b\}$ ve $\overline{\{c\}} = \{c\}$ olup bu indirgenemez kümeler tek bir generic noktaya sahip olmadığından (X, τ) uzayı Tanım 8.1.3 den sober değildir fakat quasi-soberdir.

Tanım 8.1.5 ([18]) $\mathcal{E}$ topolojik kategori ve $X \in Ob(\mathcal{E})$ olsun.

- (1) X in kapalı alt objeleri M ile N ve $X = M \cup N$ olsun. $X = M$ veya $X = N$ ise X objesi indirgenemezdir.
- (2) X in boş olmayan indirgenemez her kapalı alt kümesi, bir noktanın kapanışı ise X objesine *quasi – sober* denir.
- (3) X in $\bar{T}_0$ ve *quasi – sober* ise X objesi $\bar{T}_0$ – sober dir.
- (4) X in T_0' ve *quasi – sober* ise X objesi T_0' – sober dir.
- (5) X in T_0 ve *quasi – sober* ise X objesi T_0 – sober dir.

Teorem 8.1.6 (X, L) sabit limit uzay olsun.

A. Aşağıdakiler denktir:

- (1) (X, L) *quasi – sober* dir,
- (2) (X, L) $\bar{T}_0$ – sober dir,
- (3) (X, L) T_0' – sober dir,
- (4) (X, L) indirgenemezdir.

B. Aşağıdakiler denktir:

- (1) (X, L) T_0 dır,
- (2) (X, L) T_0 – sober dir.
- (3) $X = \emptyset$ veya X tek nokta kümesidir.

İspat: A. Tanım 8.1.5 ve Teoremler 4.2.5, 4.2.7 den (1) ve (3) denktir.

(1) $\Rightarrow$ (4) : (X, L) sabit limit uzayının quasi-sober ve $X = X_1 \cup X_2$ olduğunu kabul edelim. Burada X in kapalı alt kümeleri X_1 ile X_2 dir. Teorem 5.1.7 den $X_1 = X$ veya $X_1 = \emptyset$ ve $X_2 = X$ veya $X_2 = \emptyset$ dur. Böylece, Tanım 8.1.5 den (X, L) uzayı indirgenemezdir.

(4) $\Rightarrow$ (1) : (X, L) uzayının indirgenemez ve $\emptyset \neq X_1 \subset X$ indirgenemez kapalı olduğunu kabul edelim. X_1 kapalı olduğundan, Teorem 5.1.7 den $X_1 = X$ ve Tanım 6.1.1 den $b \in X$ için $X = X_1 = \mathbf{cl}(\{b\})$ dir. Böylece, Tanım 8.1.5 den (X, L) uzayı quasi-soberdir, sonuç olarak da (1) ve (4) denktir.

B. (1) $\Rightarrow$ (2) : (X, L) sabit limit uzayı T_0 -sober ve $\emptyset \neq X_1 \subset X$ indirgenemez kapalı bir alt kümesi olsun. X_1 kapalı olduğundan, Teorem 5.1.7 den $X_1 = X$ ve böylece, Teorem 5.1.7 den $b \in X$ için $X = X_1 = \mathbf{cl}(\{b\})$ dir. Dolayısıyla (X, L) uzayı quasi-sober ve Tanım 8.1.5 den (X, L) uzayı T_0 -soberdir.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Kabul edelim ki (X, L) uzayı T_0 -sober, $X \neq \emptyset$ ve X tek nokta kümesi olmasın. Bu takdirde $c, d \notin X$ vardır öyle ki $c \neq d$ ve (X, L) uzayının indiskre alt uzayı $(\{c, d\}, F(\{c, d\}))$ dir ki bu (X, L) uzayının T_0 -sober olmasıyla çelişir. Böylece $X = \emptyset$ veya X tek nokta kümesidir.

(3) $\Rightarrow$ (1) : $X = \emptyset$ veya $X = \{x\}$ ise Teorem 4.2.3 den (X, L) uzayı T_0 dır.

Bir $\mathcal{E}$ kategorisinin T_0' - sober (T_0 - sober, $\bar{T}_0$ - sober) objelerinden oluşan alt kategorisi $T_0' - \mathbf{sob}\mathcal{E}$ ($T_0 - \mathbf{sob}\mathcal{E}, \bar{T}_0 - \mathbf{sob}\mathcal{E}$) olsun. Bu durumda,

Sonuç 8.1.7 (1) ConLim de Teorem 8.1.6 dan

(i) $T_0\mathbf{ConLim}$ ve $T_0\mathbf{SobConLim}$ kategorileri izomorftir.

(ii) $T_0'\mathbf{SobConLim}$, $\bar{T}_0\mathbf{SobConLim}$ ve $Q\mathbf{SobConLim}$ kategorileri ikişerli izomorftir. Burada $Q\mathbf{SobConLim}$, $\mathbf{ConLim}$ kategorisinin quasi-sober sabit limit uzaylardan oluşan dolu alt kategorisidir.

(iii) $T_0'\mathbf{SobConLim}$, $\bar{T}_0\mathbf{SobConLim}$ ve $Q\mathbf{SobConLim}$ kategorileri limit ve co-limitlere sahiptir.

$(\mathbb{R}, F(\mathbb{R}))$ sabit limit uzay quasi-sober, T_0' - sober, $\bar{T}_0$ - sober ve indirgenemezdir fakat T_0 - sober değildir.

(2) $\mathbf{psqMet}$ kategorisinde [18] deki Teorem 3.13 den,

(i) (X, d) genişletilmiş pseudo-quasi-semi metrik uzayı $\bar{T}_0$ –soberdir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ kapalıdır. Ayrıca X in boştan farklı indirgenemez kapalı öz alt kümeleri tek nokta kümeleridir.

(ii) (X, d) T_0 –soberdir ancak ve ancak (X, d) quasi-sober ve genişletilmiş quasi-semi metrik uzaydır.

(3) ***RRel*** kategorisinde [18] deki Teoremler 3.8 ve 3.9 dan,

(i) $T_0' \text{SobRRel}$ ve $QSobRRel$ kategorileri izomorfiktir. Burada $QSobRRel, RRel$ in quasi-sober yansılmalı uzaylardan oluşan alt kategorisidir.

(ii) $T_0 \text{SobRRel}$ ve $\bar{T}_0 \text{SobRRel}$ izomorfiktir.

(iii) (X, R) yansılmalı uzayı $\bar{T}_0$ -soberdir ancak ve ancak (X, R) T_0 -soberdir ancak ve ancak her $x \in X$ için $\{x\}$ kapalı ve X in boştan farklı indirgenemez kapalı öz alt kümeleri tek nokta kümeleridir.

(iv) Teorem 8.1.7 den T_0 -sober sabit limit uzay, quasi-sober, T_0' -sober, $\bar{T}_0$ -sober ve indirgenemezdir.

(4) ***CP*** kategorisinde [18] deki Teoremler 3.7 ve 3.10 dan,

(i) (A, B) uzayı T_0' –sober dir ancak ve ancak (A, B) uzayı $\bar{T}_0$ –soberdir ancak ve ancak (A, B) uzayı quasi-soberdir ancak ve ancak A nın indirgenemez kapalı her öz alt kümeleri tek nokta kümeleridir.

(ii) (A, B) uzayı T_0 –sober dir ancak ve ancak (A, B) uzayı T_0 dır ancak ve ancak (A, B) uzayı indirgenemezdir ancak ve ancak $A = \emptyset$ veya A tek nokta kümesidir.

(iii) $T_0' \text{SobCP}, \bar{T}_0 \text{SobCP}$ ve $QSobCP$ kategorileri ikişerli izomorfiktir.

(iv) $T_0 \text{SobCP}$ ve $T_0 \text{CP}$ kategorileri izomorfiktir.

9. KOMPAKT SABİT LİMİT UZAYLARI

9.1 Kompaktlık

Analizdeki birçok teorem kapalı ve sınırlı aralıklar için ifade ve ispat edilmiştir. Örneğin, “Ara Değer Teoremi” nin ispatının temelinde Heine-Borel Teoremi olarak bilinen ve “Kapalı sınırlı bir aralığın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü vardır.” şeklinde ifade edilen teorem bulunmaktadır. Bu önemli özellik topolojide kompaktlık tanımı olarak bilinir. Her topolojik uzay kompakt olmadığından bir uzay kompakt bir uzayın yoğun alt uzayına homeomorf yapılabilir ki bu durum ise kompaktlaştırma olarak bilinir. Elde edilen uzay topolojik uzayın bir genişlemesidir.

Bu kısımda **ConLim** kategorisindeki kompaktlık kavramı karakterize edildi ve bu kavramlar arasındaki ilişkiler incelendi. fgf

Tanım 9.1.1 ([22]) (1) (X, τ) bir topolojik uzay, X in alt kümelerinin bir sınıfı $\mathcal{G}$ olsun. $\mathcal{G}$ nin elemanlarının birleşimi X e eşit ise $\mathcal{G}$ ye X in bir örtüsü denir. $\mathcal{G}$ nin elemanları X in açık alt kümeleri ise $\mathcal{G}$ ye X in açık örtüsü denir.

(2) (X, τ) bir topolojik uzay olmak üzere X uzayının her $\mathcal{G}$ açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü var ise X e kompakt uzay denir.

(3) Bir Hausdorff uzayın her kompakt alt kümesi kapalıdır.

(4) Her kompakt Hausdorff uzay T_3 ve T_4 tür.

(5) Kompakt bir uzaydan Hausdorff bir uzaya her sürekli f fonksiyonu kapalıdır.

Teorem 9.1.2 (X, τ) topolojik uzayı kompakttır ancak ve ancak her (Y, σ) topolojik uzayı için $\pi_2: X \times Y \rightarrow Y$ izdüşüm fonksiyonu kapalıdır.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ) kompakt, (Y, σ) da herhangi bir topolojik uzay olsun. $Y = \emptyset$ ise $X \times Y = \emptyset$ olacağından ispatlanacak hiçbir şey yoktur.

$Y \neq \emptyset$ ve $F \subset X \times Y$ kapalı olsun. $(\pi_2(F))^c$ nin açık olduğunu göstereceğiz. $y \in (\pi_2(F))^c$ olsun. Bu durumda $X \times \{y\} \subset F^c$ olur. F^c açık olduğundan her $x \in X$ için $(x, y) \in V_x \times U_y \subset F^c$ olacak şekilde $V_x \in \tau, U_y \in \sigma$ kümeleri vardır. Bu durumda

$\{V_x\}_{x \in X}$ koleksiyonu X in bir açık örtüsü olmak üzere X kompakt olduğundan $\{V_{x_1}, V_{x_2}, \dots, V_{x_n}\}$ gibi sonlu bir alt örtüsü vardır. $U_y = U_{x_1} \cap U_{x_2} \cap \dots \cap U_{x_n}$ ve $V_x = V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \dots \cap V_{x_n}$ olsun. Bu durumda $y \in U_y$ ve $x \in V_x$ olur.

$X \times U_y \subset \bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \times U_y \subset \bigcup_{i=1}^n (V_{x_i} \times U_y) \subset \bigcup_{i=1}^n (V_{x_i} \times U_{x_i}) \subset F^c$ olur ki $U_y \subset (\pi_2(F))^c$ olur, böylece $(\pi_2(F))^c$ açıktır. Tersine $\{U_i\}_{i \in I}$ sınıfı X in bir açık örtüsü olsun. $y_0 \notin X$ için $X' = X \cup \{y_0\}$ olsun. X' deki τ' topolojisini tanımlayalım:

$F \subset X'$ kapalıdır ancak ve ancak $\{y_0\} \subset F$ veya $F \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ dir. Şimdi τ' nün X' üzerinde topoloji olduğunu ispatlayalım.

- (1) $y_0 \in X'$ olduğundan $X' \in \tau'$ dir. Her $i \in I$ için $\emptyset \subset U_i$ olduğundan $\emptyset \in \tau'$ dir.
- (2) $\{F_j\}_{j \in J}$, kapalı kümelerin koleksiyonu olsun. En az bir $j \in J$ için $F_j \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ den $\bigcap_{j \in J} F_j \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ olur. Aksi halde her $j \in J$ için $y_0 \in F_j$ ise $y_0 \in \bigcap_{j \in J} F_j$ olur.
- (3) F_1 ve F_2 kapalı kümeler olsun. $y_0 \in F_1$ veya $y_0 \in F_2$ ise bu durumda $y_0 \in F_1 \cup F_2$ olur. Aksi halde $F_1 \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$, $F_2 \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$ olur. Böylece $F_1 \cup F_2 \subset \bigcup_{i=1}^k U_i$ yazılır ki $k = \max\{n, m\}$ dir.

$A = \{(x, x) \in X \times X' \mid x \in X\}$ kümesini tanımlayalım. Kabul edelim ki $x \in X$ için $(x, y_0) \in \bar{A}$ olsun. $\{U_i\}_{i \in I}$ açık örtü olduğundan $i \in I$ için $x \in U_i$ olur. U_i kümesi X' de kapalı olduğundan U_i^c, X' de açıktır.

Çarpım topolojinin tanımından $U_i \times U_i^c$ kümesi $X \times X'$ de açıktır. Fakat $(U_i \times U_i^c) \cap A = \emptyset$ olduğundan bu bir çelişkidir. Böylece $(x, y_0) \notin \bar{A}$ olur. Bu ise $\pi_2(\bar{A}) = X$ olduğunu gösterir. Kabulden dolayı π_2 kapalı olduğundan $X \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ yazılır. Sonuç olarak X kompakttır.

Tanım 9.1.3 ([16]) $\mathcal{E}$ topolojik kategori, $X, Y \in Ob(\mathcal{E})$ ve $\mathcal{E}$ da bir morfizm $f : X \rightarrow Y$ olsun.

- (1) X in (kuvvetli) kapalı her alt objesinin görüntüsü Y nin (kuvvetli) kapalı alt objesi ise f (kuvvetli) kapalıdır.
- (2) $\mathcal{E}$ daki her Y objesi için $\pi_2 : X \times Y \rightarrow Y$ (kuvvetli) kapalı ise X objesi (kuvvetli) kompakttır.

Teorem 9.1.4 Sabit limit uzayı kompakttır ancak ve ancak kuvvetli kompakttır.

İspat: Kabul edelim ki her (X, K) kompakt sabit limit uzayı olsun. Her (Y, L) sabit limit uzayı için $\pi_2 : (X, K) \times (Y, L) \rightarrow (Y, L)$ izdüşüm morfizminin kuvvetli kapalı olduğunu göstereceğiz. $M \subset X \times Y$ kuvvetli kapalı olsun.

Eğer $M = \emptyset$ ise $\pi_2 M = \emptyset$ kuvvetli kapalıdır.

Eğer $M \neq \emptyset$ ise Teorem 5.1.8 den $\pi_2 M$ kümesi Y nin kuvvetli kapalı alt kümesidir ve böylece Tanım 9.1.1 den $\pi_2 : (X, K) \times (Y, L) \rightarrow (Y, L)$ kuvvetli kapalıdır. Sonuç olarak (X, K) sabit limit uzayı kuvvetli kompakttır. Tersine kabul edelim ki (X, K) kuvvetli kompakt sabit limit uzayı olsun. Her (Y, L) sabit limit uzayı için $\pi_2 : (X, K) \times (Y, L) \rightarrow (Y, L)$ izdüşüm morfizminin kapalı olduğunu göstereceğiz. $M \subset X \times Y$ kapalı olsun.

Teorem 5.1.7 den $M = \emptyset$ veya $M = X \times Y$ dir.

Eğer $M = \emptyset$ ise $\pi_2 M = \emptyset$ kümesi Y de kapalıdır.

Eğer $M = X \times Y$ ise $\pi_2 M = Y$ kapalıdır. Tanım 9.1.1 den $\pi_2 : (X, K) \times (Y, L) \rightarrow (Y, L)$ kapalıdır ve böylece (X, K) sabit limit uzayı kompakttır.

Teorem 9.1.5 ConLim de $f : (X, K) \rightarrow (Y, L)$ morfizm olsun.

- (1) Her (X, K) uzayı hem kompakt hem de kuvvetli kompakttır.
- (2) (X, K) sabit limit uzayı (kuvvetli) kompakt ise $f(X)$ alt uzayı (kuvvetli) kompakttır.
- (3) (X, K) uzayı bağlantılı (kuvvetli bağlantılı, D -bağlantılı, scl -bağlantılı, cl -bağlantılı) ise $f(X)$ alt uzayı bağlantılı (kuvvetli bağlantılı, D -bağlantılı, scl -bağlantılı, cl -bağlantılı) dır.
- (4) (X, K) sabit limit uzayı $\bar{T}_0$ (T_0' ve T_1) ise $f(X)$ alt uzayı $\bar{T}_0$ (T_0' ve T_1) dır.

İspat: Teorem 4.2.5, 4.2.8, 5.1.7, 5.1.8, 7.1.4 in birleştirilmesidir.

Sonuç 9.1.6 (1) *Top* kategorisinde, kompaktlık kavramı bilinen kompaktlığın kendisidir. Eğer uzay T_1 ise kuvvetli kompaktlık ve kompaktlık çakışır.

(2) *ConLim* kategorisinde, (X, K) sabit limit uzayı kompakttır ancak ve ancak kuvvetli kompakttır.

(3) *FCO* kategorisinde, [16] daki Teorem 6.3 den her (X, K) süzgeç yakınsak uzayı kompakttır. (X, K) süzgeç yakınsak uzayı kuvvetli kompakttır ancak ve ancak X deki her ultra süzgeç yakınsaktır.

(4) *ConFCO* kategorisinde, [16] daki Teorem 4.2 ve 4.4 den, (A, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı kuvvetli kompakttır ancak ve ancak A daki her ultra süzgeç yakınsaktır.

(5) *Lim* kategorisinde, [40] daki Uyarı 4.2 den her (X, K) kuvvetli kompakt limit uzayı kompakttır. (X, K) limit uzayı kompakttır ancak ve ancak X deki her ultra süzgeç yakınsaktır.

10. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında objeleri sabit limit uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler olan **ConLim** topolojik kategorisinde öncelikle T_0 , T_1 ayırma aksiyomları (hem lokal hem de genel olarak), kapalılık, kapanış operatörleri, bağlantılılık, bağlantısızlık, tam bağlantısızlık, kalıtsal bağlantısızlık, sober uzay olma, kompaktlık gibi pek çok kavram her yönüyle incelenmiştir. Ayrıca bu kavramlar ile elde edilen **ConLim** in dolu alt kategorileri ve izomorf olduğu kategoriler belirlenmiştir. Son olarak ise her bölüm sonunda daha önce yapılan çalışmalar ile bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Diğer taraftan **ConLim** kategorisinde bu çalışmada ele alınmayan T_2 , T_3 ve T_4 ayırma aksiyomları, Stone obje [41], eğer varsa **ConLim** in izomorfik, bireflektif veya co-reflektif alt kategorileri incelenebilir.

KAYNAKLAR

1. Eilenberg, S. ve MacLane, S., 1945. General theory of natural equivalences, Transactions of the American Mathematical Society.
2. Wyler, O., 1971. Topological Categories And Categorical Topology, General Topology and its Applications, 11, 17-28.
3. Herrlich, H., 1974. Topological Functors, General Topology and its Applications, 4, 125-142.
4. Brümmer, G. C. L., 1971. A Categorical Study of Initiality in Uniform Topology, Doktora Tezi, University of Cape Town.
5. Harvey, J. M., 1977. -Seperation in Topological Categories, Quaestiones Mathematicae, 2, 177-190.
6. Hoffman, R.-E., 1974. (E, M)-Universal Topological Functors, Habilitationsschrift, Universität Dusseldorf.
7. Marny, T. H., 1973. Rechts-Bikategoriestrukturen in Topologischen Kategorien, Dissertation, Freie Universität, Berlin.
8. Baran, M., 1992. Separation properties, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 23, 333-341.
9. Dikranjan, D. ve Giuli, E., 1990. Compactness, minimality and closedness with respect to a closure operator, in J. Adamek and S. MacLane (eds), Proc. CATTOP Prague 1989, World Scientific, Singapore, pp. 184-195.
10. Clementino, M., Giuli, E. ve Tholen, W., 1996. Topology in a category, Compactness, Portugaliae Mathematica, 59, 397-433.
11. Dikranjan, D. ve Giuli, E., 1987. Closure operators I, Topology and its Applications, 27, 129-143.
12. Cartan, H., 1937. Filtres et ultrafiltres, C.R. Academie des Sciences Paris, 205, 777-779.
13. Kowalsky, H.J., 1954. Beitr ge zur topologischen algebra, Mathematics Nachrichten 11, 143-185.
14. Fréchet, M., 1959. Limesraume, Mathematische Annalen, 137, 269-303.
15. Baran, M., 1990. Separation Properties in Topological Categories, University of Miami, Ph. D., Dissertation.
16. Baran, M., 1997. A notion of compactness in topological categories, Publications

Mathematicae Debrecen, 50, 3-4, 221-234.

17. Baran, M. ve Kula, M., 2006. A note on connectedness, *Publications Mathematicae Debrecen*, 68 (3-4), 489-501.
18. Baran, M., 2022. Sober spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 46, 299-310.
19. Baran, M., 2023. Separation, connectedness, and disconnectedness, *Turkish Journal of Mathematics*, 47, 279-295.
20. Adamek, J., Herrlich, H., ve Strecker, G. E., 1990. Abstract and concrete categories, A Willey-Interscience Publication, New York, USA.
21. Herrlich, H. ve Strecker G. E., 1973. Category theory, Allyn and Bacon inc. Boston, 101, 236-242.
22. Mucuk, O., 2010. Topoloji ve Kategori, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara.
23. Kent, D. C., 1964. Convergence functions and their related topologies. *Fund. Math.*, 54, 125-133.
24. Baran, M., 1993. The notion of closedness in topological categories, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 34, 2, 383-395.
25. Qasim, M., Baran, M. ve Abughalwa, H., 2021. Closure operators in convergence approach spaces, *Turkish Journal of Mathematics* 45, 139-152.
26. Erciyes A, Baran T. M., ve Qasim M., 2020. Closure operators in constant filter convergence spaces. *Konuralp Journal of 35 Mathematics* 2020, 8(1), 185-191.
27. Baran, M., 2000. Closure operators in convergence spaces, *Acta Mathematica Hungarica*, 87, 33-45.
28. Dikranjan, D. ve Tholen, W., 1995. Categorical Structure of Closure Operators, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
29. Qasim, M. ve Baran, M., 2019. T_1 approach spaces, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 68 (1), 784-800.
30. Baran, M., Separation properties in categories of constant convergence spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 18 (1994), 238-248.
31. Baran, T. M., 2019. Local T_2 extended pseudo-quasi-semi metrics, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1: Mathematics and Statistics*, 68, 2, 2117-2127.

32. Baran, T. M., 2020. Closedness, separation and connectedness in pseudo-quasi-semi metric spaces, *Filomat*, 34, 14, 4757–4766.
33. Baran, T. M. ve Kula, M., 2022. Separation axioms, Urysohn's lemma and Tietze extension theorem for extended pseudo-quasi-semi metric spaces, *Filomat*, 36, 2, 703–713.
34. Castellini G., ve Hajek D. 1994. Closure operators and connectedness. *Topology and its Applications* 1994, 55, 29-45.
35. Clementino, M. M., 1997. Tholen, W., Separation versus connectedness, *Topology and its Applications*, 77, 143–181.
36. Preuss G., 1979. Connection properties in topological categories and related topics. *Springer Lecture Notes in Mathematics* 1979, 719, 326-344.
37. Preuss G., 1988. *Theory of topological structures, An approach to topological categories*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht.
38. Engelking R., 1989. *General topology*. Heldermann Verlag, Berlin.
39. Arkhangel'skii A. V., 1984. Ponomarev VI. *Fundamentals of general topology: problems and exercises*, Reidel (Translated from Russian).
40. Baran, M., 2002. Compactness, perfectness, separation, minimality and closedness with respect to closure operators, *Filomat*, 36, 2, 703–713.
41. Baran, M., 2023. Stone object, *Filomat*, (Gönderildi)

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Kübra ÇEVİK

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Erciyes Üniversitesi, Matematik Bölümü, 2011-2017.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, 2021-2023.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. Kayseri Kavram VIP Dershanesi, 2012-2013.
2. Kayseri Anadolu Lisesi, 2015-2016.
3. Kayseri Çözüm Kişisel Gelişim Kurs Merkezi, 2016-2019.

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Cevik, K. ve Erciyes, A., 2023. Connected, compact, and sober objects in *ConLim*, 9th International IFS and Contemporary Mathematics Conference, Bildiriler Kitabı, 74-75.