



**SABİT NOKTA ALGORİTMALARININ GÖRÜNTÜ
İYİLEŞTİRME PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI**

Ebru ALTIPARMAK

Doktora Tezi

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İbrahim KARAHAN

2023

Her hakkı saklıdır.



FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
DOKTORA TEZİ

SABİT NOKTA ALGORİTMALARININ GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME
PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

Ebru ALTIPARMAK

Tez Danışmanı: Doç. Dr. İbrahim KARAHAN

Anabilim Dalı: Matematik

Erzurum

2023

Her hakkı saklıdır

ETİK KURALLARA UYGUNLUK BEYANI

Erzurum Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez içindeki tüm bilgilerin doğru ve tam olduğunu, bilgilerin üretilmesi aşamasında bilimsel etiğe uygun davrandığımı, yararlandığım bütün kaynakları atıf yaparak belirttiğimi beyan ederim.

14 / 07 / 2023

Ebru ALTIPARMAK

ÖZET

DOKTORA TEZİ

SABİT NOKTA ALGORİTMALARININ GÖRÜNTÜ İYİLEŞTİRME PROBLEMLERİNE UYGULAMALARI

Ebru ALTIPARMAK

Erzurum Teknik Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Ana Bilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. İbrahim KARAHAN

Sabit nokta teorisi matematiğin çeşitli alanlarında birçok uygulamaya sahip olan önemli bir konudur. Son zamanlarda sabit nokta teorisinin öne çıkan uygulama alanlarından biri de görüntü iyileştirme problemleridir. Görüntü iyileştirme problemi iki özel fonksiyonun toplamı için klasik bir minimizasyon problemi olarak ifade edilebilmektedir. Bu tez çalışmasında reel Hilbert uzaylarda bazı sabit nokta algoritmaları tanımlanmış ve bu algoritmaların görüntü iyileştirme problemlerine uygulaması verilmiştir. Aynı zamanda tanımlanan algoritmalar literatürde var olan bazı algoritmalar ile karşılaştırılmış ve yeni tanımlanan algoritmalar ile daha kaliteli görüntüler elde edilmiştir.

2023, 124 sayfa

Anahtar Kelimeler: Görüntü iyileştirme problemi, Sabit nokta, Monoton kapsama problemi, Konveks minimizasyon problemi.

ABSTRACT

Ph.D

APPLICATIONS OF FIXED POINT ALGORITHMS TO IMAGE RESTORATION PROBLEMS

Ebru ALTIPARMAK

Erzurum Technical University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Maths

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İbrahim KARAHAN

Fixed point theory is an important topic that has many applications in various fields of mathematics. Recently, one of the prominent application areas of fixed point theory is image restoration problems. The image restoration problem can be expressed as a classical minimization problem for the sum of two special functions. In this thesis, some fixed point algorithms in real Hilbert spaces are defined and the application of these algorithms to image restoration problems is given. At the same time, the defined algorithms were compared with some existing algorithms in the literature and better quality images were obtained with new defined algorithms.

2023, 124 page

Keywords: Image restoration problem, Fixed point, Monoton inclusion problem, Convex minimization problem.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca ve tez çalışmamı oluşturmamda her türlü desteği sağlayan her zaman arkamda olan çok değerli hocam Sayın Doç. Dr. İbrahim KARAHAN'a en içten dileklerim ile teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Çalışmalarım boyunca yapıcı eleştiri ve olumlu yaklaşımları ile tez jürimde yer alan Prof. Dr. Murat ÖZDEMİR ve Prof. Dr. İsa YILDIRIM hocalarıma ve Erzurum Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi Matematik Bölümünde bulunan değerli hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Eğitim hayatım boyunca bana hep güvenen, destek veren, varlıklarıyla güç bulduğum annem Nurgül ALTIPARMAK'a, babam Faik ALTIPARMAK'a ve abim İsmail ALTIPARMAK'a tüm fedakarlıkları için minnetlerimi sunarım.

Ebru ALTIPARMAK
Temmuz 2023

İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
ÇİZELGELER DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	5
3. TEMEL KAVRAMLAR	17
3.1. Temel Tanım ve Önermeler	17
3.2. Dönüşüm Sınıfları	23
3.3. Sabit Nokta Problemleri	25
3.4. Monoton Kapsama Problemleri	26
3.5. Konveks Minimizasyon Problemi	28
3.6. Varyasyonel Eşitsizlik Problemi	30
3.7. Denge Problemleri	31
3.8. Görüntü İyileştirme	33
3.8.1. Görüntü	33
3.8.2. Görüntü türleri.....	33
3.8.3. Görüntü iyileştirme problemi	36
4. EYLEMSİZ S^*-ALGORİTMASI	38
4.1. Algoritma Tanımı ve Zayıf Yakınsaklık Teoremi	38
4.2. Konveks Minimizasyon Problemine Uygulaması.....	46
4.3. Görüntü İyileştirme Problemine Uygulaması	47
5. YENİ EYLEMSİZ VİSKOZİTE ALGORİTMASI	50
5.1. Algoritma Tanımı ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremi	50
5.2. Monoton Kapsama Problemine Uygulaması	64
5.3. Konveks Minimizasyon Problemine Uygulaması.....	67
5.4. Varyasyonel Eşitsizlik Problemine Uygulaması	68
5.5. Genelleştirilmiş Denge Problemine Uygulaması	68

5.6. Görüntü İyileştirme Problemine Uygulaması	69
6. YENİ ÖN KOŞULLANDIRMALI İLERİ GERİ AYIRMA ALGORİTMASI ..	76
6.1. Algoritma Tanımı ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremi	76
6.2. Konveks Minimizasyon Problemine Uygulaması.....	90
6.3. Görüntü İyileştirme Problemine Uygulaması	92
7. MODİFİYE EDİLMİŞ ÖN KOŞULLANDIRMALI İLERİ GERİ AYIRMA ALGORİTMASI	99
7.1. Algoritma Tanımı ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremi	99
7.2. Konveks Minimizasyon Problemine Uygulaması.....	110
7.3. Görüntü İyileştirme Problemine Uygulaması	111
8. SONUÇ ve ÖNERİLER	117
KAYNAKLAR	120

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Simgeler

Açıklama

$EP(F)$	Denge probleminin çözüm kümesi
$F(T)$	T dönüşümünün sabit noktalarının kümesi
$GEP(F)$	Genelleştirilmiş denge probleminin çözüm kümesi
ι_C	İndikatör fonksiyonu
J_λ^A	A 'nın rezolventi
P_C	Metrik izdüşüm operatörü
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\bar{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi, yani, $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
$VI(C, A)$	Varyasyonel eşitsizlik probleminin çözüm kümesi
$\Gamma(H)$	H 'dan $\bar{\mathbb{R}}$ kümesine tanımlı tüm alttan yarı sürekli konveks fonksiyonların kümesi
$\Gamma_0(H)$	H 'dan $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ kümesine tanımlı tüm proper alttan yarı sürekli fonksiyonların kümesi
Ω	Monoton kapsama probleminin çözüm kümesi
∂f	f fonksiyonunun alt diferansiyeli
∇f	f fonksiyonunun gradyen operatörü
$\omega_\omega(x_n)$	C 'deki sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisinin tüm zayıf yığılma noktalarının kümesi

Kısaltmalar

PSNR	Tepe işaret gürültü oranı
SNR	İşaret gürültü oranı

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1. (a) E harfi (b) Gösterimi (c) Sayısallaştırılması.....	33
Şekil 3.2. (a) Gaussian gürültü (b) Tuz biber gürültü (c) Düzgün gürültü.....	35
Şekil 4.1. (a) Kameraman görüntü (b) Bozulmuş görüntü (c) Algoritma (4.8) (d)NAGA_(e) FBS algoritması.	48
Şekil 4.2. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri grafiği.....	49
Şekil 5.1. Algoritma (5.21) ve ileri-geri ayırma algoritmasının hata kıyaslaması	67
Şekil 5.2. (a) Biber görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) Eylemsiz ve viskozite terimsiz Algoritma (5.22) (d) Viskozite terimsiz Algoritma (5.22) (e) Eylemsiz terimsiz Algoritma (5.22) (f) Algoritma (5.22).	70
Şekil 5.3. Biber görüntüsü için SNR değerlerinin grafiği	71
Şekil 5.4. (a) Kameraman görüntü (b) Bozulmuş görüntü (c) NAGA (d) FBMMMA (e) AVFBA (f) Algoritma (5.22).	72
Şekil 5.5. Kameraman görüntüsü için SNR değerlerinin grafiği	72
Şekil 5.6. (a) Lena görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) FBS (d) Algoritma (2.5) (e) Algoritma (5.22).	74
Şekil 5.7. Lena görüntüsü için SNR değerlerinin grafiği	74
Şekil 6.1. (a) Kameraman görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) IFBS (d) APFBNSM (e) Algoritma (6.14).	93
Şekil 6.2. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri grafiği.....	94
Şekil 6.3. Kameraman görüntüsü için PSNR değerleri grafiği	94
Şekil 6.4. (a) Dağ görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) IFBS (d) APFBNSM (e) Algoritma (6.14).	96
Şekil 6.5. Dağ görüntüsü için SNR değerleri grafiği	97
Şekil 6.6. Dağ görüntüsü için SNR değerleri grafiği	97
Şekil 7.1. (a) Kameraman görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) IFBS (d) APFBNSM (e) Algoritma (6.14) (f) Algoritma (7.17) (g) Goldhill görüntüsü (h) Bozulmuş görüntü (i) IFBS (j) APFBNSM (k) Algoritma (6.14) (l) Algoritma (7.17).	111
Şekil 7.2. (a) Kameraman görüntüsü için SNR değerleri grafiği (b) Goldhill görüntüsü için SNR değerleri grafiği.	113

Şekil 7.3. (a) Barbara görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) IFBS (d) APFBNSM (e) Algoritma (6.14) (f) Algoritma (7.17) (g) Dağ görüntüsü (h) Bozulmuş görüntü (i) IFBS (j) APFBNSM (k) Algoritma (6.14) (l) Algoritma (7.17).	114
Şekil 7.4. (a) Barbara görüntüsü için SNR değerleri grafiği (b) Dağ görüntüsü için SNR değerleri grafiği.	115



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 4.1. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri.....	48
Çizelge 5.1. Algoritma (5.21) için Örnek 5.2.2'deki sayısal sonuçlar.....	66
Çizelge 5.2. Biber görüntüsü için SNR değerleri.	71
Çizelge 5.3. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri.....	73
Çizelge 5.4. Lena görüntüsü için SNR değerleri.	75
Çizelge 6.1. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri.....	95
Çizelge 6.2. Kameraman görüntüsü için PSNR değerleri.	95
Çizelge 6.3. Dağ görüntüsü için SNR değerleri.....	98
Çizelge 6.4. Dağ görüntüsü için PSNR değerleri.	98

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi, matematiğin çeşitli alanlarında birçok uygulamaya sahip olan önemli bir konudur. Bu teori, boş kümeden farklı bir X kümesi üzerinde tanımlı T dönüşümü için $Tx = x$ denkleminin bir çözümü olan $x \in X$ noktalarının varlığını garanti eden şartlar üzerine kuruludur. Kapsama problemleri, optimizasyon problemleri, varyasyonel eşitsizlik problemleri, denge problemleri, ayrık fizibilite problemleri, integral ve diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlığının ispatı ile ilgili teoremler bir sabit nokta problemi şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla bu teorinin fonksiyonel analiz, topoloji, diferansiyel denklemler, integral denklemler gibi matematiğin çeşitli çalışma alanlarında ve mühendisliğin yapay sinir ağları gibi araştırma alanlarında birçok uygulaması vardır.

Sabit nokta teorisinin uygulama alanlarından biri de görüntü iyileştirme problemleridir. Bu problemler görüntü işlemenin önemli bir konusudur. Görüntü iyileştirme; tıbbi görüntüleme, astronomik görüntüleme, uzaktan algılama, video veya görüntü kodlama gibi çeşitli uygulamalarda kapsamlı bir şekilde incelenen klasik bir ters problemdir.

Görüntü gerçek yaşamdaki üç boyutlu nesnelerden oluşan bir sahnenin basit iki değişkenli bir fonksiyon olarak tanımlanmasıdır. Görüntü bilgisayar ortamında matris şeklinde ifade edilmektedir. Matrisin her bir hücresi bir pikseli temsil etmektedir. Dolayısıyla görüntüler piksellerden oluşmaktadır.

Görüntü elde edilirken fotoğraf makinası veya nesnenin hareketi ve net olmayan odaklanmama gibi sebepler ile görüntülerde bulanıklık meydana gelebilir. Ayrıca, görüntüyü bir kaynaktan başka bir kaynağa aktarırken gürültü adı verilen piksel bozulmaları oluşabilir. Görüntü iyileştirme; meydana gelen bu bulanıklık ve gürültüleri mümkün olduğunca ortadan kaldırarak görüntünün niteliğini istenilen seviyeye yükseltme işlemidir.

$x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ orijinal görüntü, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ gözlemlenen görüntü, v eklenen gürültü ve $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bulanıklaştırma operatörü olmak üzere görüntü iyileştirme problemi

$$b = Ax + v \quad (1.1)$$

modelinin matematiksel olarak ters çevrilmesi ile formülize edilmiştir. Görüntü iyileştirme problemindeki amaç, eklenen v gürültüsünü minimize ederek x orijinal görüntüsüne yaklaşımdır. $\lambda > 0$ düzgünleştirme parametresi, $\|Ax - b\|_2^2$, v ile Ax arasındaki mesafeyi ölçen en küçük kareler terimi olmak üzere görüntü iyileştirme problemi için ana yaklaşım

$$x^* = \operatorname{argmin}_x \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \right\}$$

şekilde verilen l_1 düzenlileştirme problemini çözmektir. $h(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$ ve $g(x) = \lambda \|x\|_1$ alınırsa bu problem genel olarak

$$x^* = \operatorname{argmin}_x \{h(x) + g(x)\} \quad (1.2)$$

şeklinde yeniden formülize edilebilir. Dolayısıyla görüntü iyileştirme probleminin iki özel fonksiyonun toplamı için klasik bir minimizasyon problemi olduğu açıktır. ∂g , g fonksiyonunun alt diferansiyeli ∇h , h fonksiyonunun gradyen operatörü olmak üzere (1.2) problemi

$$0 \in \nabla h(x^*) + \partial g(x^*)$$

şeklinde tanımlanan varyasyonel kapsama problemine ve

$$x^* = J_\lambda^{\partial g}(I - \lambda \nabla h)x^*$$

şeklinde verilen sabit nokta problemine denk olduğu bilinmektedir. Burada $J_{\lambda}^{\partial g}, J_{\lambda}^{\partial g} = (I + \lambda \partial g)^{-1}$ şeklinde tanımlanan rezolvent operatörüdür. Aynı zamanda bu problemin $g \in \Gamma_0(H)$ için $J_{\lambda}^{\partial g} = \text{prox}_{\lambda g}$ olduğundan

$$x^* = \text{prox}_{\lambda g}(I - \lambda \nabla h)x^*$$

şeklinde verilen sabit nokta problemine de denk olduğu bilinmektedir. Sabit nokta teorisi görüntü iyileştirme probleminin çözümünde önemli bir rol oynar ve bu nedenle ele alınan problemlerin çözümlerini bulmak için sabit nokta algoritmaları kullanılmıştır. Kullanılan bazı temel algoritmalar aşağıda verilmiştir.

$\lambda > 0$ ve I özdeş operatör olmak üzere Lions and Mercier (1979)

$$x_{n+1} = J_{\lambda}^{\partial g}(I - \lambda \nabla h)x_n$$

şeklinde tanımlanan ve en önemli algoritmalarından biri olan ileri-geri ayırma (*FBS*) algoritmasını tanımlamışlardır. Moudafi and Oliny (2003) iki monoton operatörün toplamının sıfırını bulmak yani monoton kapsama problemini çözmek için eylemsiz ileri-geri ayırma algoritmasını

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ x_{n+1} = J_{\lambda}^A(I - \lambda B)x_n, \end{cases} \quad \forall n \geq 1,$$

şeklinde tanımlamışlardır. Burada $\theta_n, x_n - x_{n-1}$ 'i kontrol eden eylemsizlik parametresidir. f daraltan dönüşüm, A, v –ters kuvvetli birikimli (accretive) dönüşüm ve B, m –birikimli dönüşüm olmak üzere Shehu and Cai (2016) ileri-geri ayırma algoritmasını viskozite yaklaşım yöntemi ile birleştirerek

$$x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n)J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)x_n, \quad \forall n \geq 1,$$

şeklinde tanımlamışlardır. Yazarlar algoritma tarafından üretilen dizinin Banach uzaylarda yakınsak olduğunu ispatlamışlardır.

Bu tezde görüntü iyileştirme problemlerini çözmek için bazı algoritmalar tanımlanmış ve tanımlanan algoritmaların görüntü iyileştirme performansları literatürde var olan bazı algoritmalar ile karşılaştırılmıştır. Bu tez sekiz ana başlıktan oluşmaktadır. İlk bölüm literatür bilgisinin verildiği giriş bölümünden oluşmaktadır. İkinci bölümde kaynak özetleri hakkında bilgi verilmiş, üçüncü bölümde ise çalışmamızda kullanacağımız temel tanımlar, teoremler ve lemmaların bulunduğu temel kavramlar kısmına yer verilmiş ve bazı problemlerden bahsedilmiştir. Bu tezin orijinal kısmını dördüncü, beşinci, altıncı ve yedinci bölüm oluşturmaktadır. Çalışmada elde edilen sonuçlara ise sekizinci bölümde yer verilmiştir.

2. KAYNAK ÖZETLERİ

Görüntü iyileştirme problemini çözmek için birçok araştırmalar yapılmış ve bu problemi çözen birçok algoritma tanımlanmıştır. Bu bölümde görüntü iyileştirme problemi ile ilgili literatürde bulunan bazı çalışmalardan bahsedilecektir.

Kitkuan et al. (2019a) görüntü iyileştirme problemini çözmek için Kim and Xu (2005), Xu (2006) ve Chen and Zhu (2006) çalışmalarından ilham alarak:

$$\begin{cases} y_n = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) J_{\lambda_n}^A x_n, \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{\gamma_n}^B y_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.1)$$

şeklindeki yeni kendi viskozite algoritmalarını tanımlamışlardır. Aynı zamanda reel Hilbert uzayda algoritma tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin kapsama probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu ispatlamışlardır. Çalışmanın son kısmında yazarlar sunulan algoritmayı görüntü iyileştirme problemine uygulamışlardır. Aynı zamanda sunulan algoritmayı Douglas-Rachford algoritması ve ileri-geri algoritması ile karşılaştırmışlardır (Bauschke and Combettes 2011). Sonuç olarak yazarlar, Algoritma (2.1)'in SNR değerinin diğer algoritmalarından daha yüksek olduğunu göstermişlerdir.

Kitkuan et al. (2020a) reel Hilbert uzaylarda kapsama probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olan:

$$\begin{cases} z_n = r_n x_n + (1 - r_n) J_{\lambda_n}^B (I - \lambda_n A) x_n \\ y_n = s_n x_n + (1 - s_n) J_{\lambda_n}^B (I - \lambda_n A) z_n \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) y_n \end{cases}$$

şeklindeki genelleştirilmiş Halpern tipli ileri-geri ayırma algoritmasını tanımlamışlardır. Sunulan algoritmanın genelleştirilmiş denge problemlerine, monoton varyasyonel eşitsizlik problemlerine, konveks minimizasyon problemlerine ve görüntü iyileştirme problemlerine uygulamasını vermişlerdir. Yazarlar genelleştirilmiş Halpern tipli ileri-geri ayırma algoritmasında $A = \nabla f$ ve $B = \partial g$ yazarak:

$$\begin{cases} z_n = r_n x_n + (1 - r_n) J_{\lambda_n}^{\partial g}(I - \lambda_n \nabla f) x_n \\ y_n = s_n x_n + (1 - s_n) J_{\lambda_n}^{\partial g}(I - \lambda_n \nabla f) z_n \\ x_{n+1} = \alpha_n u + (1 - \alpha_n) y_n \end{cases} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanan algoritmayı elde etmişlerdir. Aynı zamanda uygun şartlar altında algoritma tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin konveks minimizasyon probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Ayrıca yazarlar ileri-geri ayırma algoritması FBS ile Algoritma (2.2)'nin görüntü iyileştirme performansını karşılaştırmışlar ve sayısal sonuçları değerlendirmişlerdir. Sonuç olarak, Algoritma (2.2)'nin SNR değerinin FBS'den daha yüksek olduğunu göstermişlerdir. Bu da kendi tanımladıkları algoritmanın görüntü iyileştirme performansının daha iyi olduğu anlamına gelmektedir.

Kitkuan et al. (2020b) Banach uzayında:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n z_n + e_n \\ z_n = \alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^B(x_n - r_n A x_n) \end{cases} \quad \forall n \geq 1 \quad (2.3)$$

şeklinde bir algoritma tanımlamışlardır. Aynı zamanda uygun koşullar altında algoritma tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin kapsama probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Yazarlar Algoritma (2.3)'de $A = \nabla G$ ve $B = \partial M$ olarak:

$$\left\{ x_{n+1} = (1 - \beta_n) x_n + \beta_n \left(\alpha_n f(x_n) + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^{\partial M}(x_n - r_n \nabla G(x_n)) \right) \right\} + e_n \quad (2.4)$$

şeklindeki algoritmayı elde etmişlerdir. Aynı zamanda uygun koşullar altında $\{x_n\}$ dizisinin konveks minimizasyon probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Çalışmanın son kısmında görüntü iyileştirme problemini çözmek için Algoritma (2.4)'ü kullanmışlardır. Aynı zamanda Takashashi et al. (2012) tarafından tanımlanan:

$$\{x_{n+1} = \beta_n x_n + (1 - \beta_n) (\alpha_n u + (1 - \alpha_n) J_{r_n}^B(x_n - r_n A x_n))\}, \forall n \geq 1$$

şeklindeki Halpern tipli algoritma ve Lopez et al. (2012) tarafından tanımlanan:

$$\{x_{n+1} = \alpha_n u(1 - \alpha_n) J_{r_n}^B + (x_n - r_n(Ax_n + \alpha_n) + b_n)\}, \forall n \geq 1$$

şeklindeki Halpern tipli ileri-geri ayırma algoritması ile Algoritma (2.4)'ü karşılaştırmışlardır. Yazarlar, Algoritma (2.4)'ün SNR değerinin diğer algoritmalarından daha yüksek olduğunu göstermişlerdir.

Kitkuan et al. (2019b) çalışmalarında:

$$\begin{cases} w_n = z_n + \varsigma_n(z_n - z_{n-1}) \\ z_{n+1} = \alpha_n \nabla h(z_n) + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n}^B(w_n - \lambda_n A w_n) \end{cases} \quad (2.5)$$

şeklinde yeni eylemsiz viskozite ileri-geri ayırma algoritmasını tanımlamışlardır. Aynı zamanda yazarlar uygun koşullar altında $\{z_n\}$ dizisinin kapsama probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Yazarlar Algoritma (2.5)'de $A = \nabla F$ ve $B = \partial K$ olarak:

$$\begin{cases} w_n = z_n + \varsigma_n(z_n - z_{n-1}) \\ z_{n+1} = \alpha_n \nabla h(z_n) + (1 - \alpha_n) J_{\lambda_n}^{\partial K}(w_n - \lambda_n \nabla F w_n), \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanan algoritmayı elde etmişler ve uygun koşullar altında $\{z_n\}$ dizisinin monoton kapsama probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Aynı zamanda Algoritma (2.6) ile FBS algoritmasının görüntü iyileştirme problemine uygulamasını vermişlerdir. Yazarlar, Algoritma (2.6)'nin SNR değerinin diğer algoritmadan daha yüksek olduğunu göstermişlerdir.

Padcharoen et al. (2020a) çalışmalarında Tseng (2000) tarafından

$$\begin{cases} y_n = (I + \lambda_n B)^{-1}(I - \lambda_n A)(x_n) \\ x_{n+1} = P_X(y_n - \lambda_n(Ay_n - Ax_n)) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan Tseng algoritmasının modifiye edilmiş hali olan:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \alpha_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = (I + \lambda_n B)^{-1}(I - \lambda_n A)w_n \\ x_{n+1} = y_n - \lambda_n(Ay_n - Aw_n) \end{cases}$$

şeklindeki eylemsiz Tseng algoritmasını tanımlamışlardır. Yazarlar uygun şartlar altında algoritma tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin kapsama probleminin çözümüne zayıf yakınsak olduğunu ispatlamışlardır. Çalışmanın son kısmında görüntü iyileştirme problemini çözmek için eylemsiz Tseng, Moudafi and Oliny (2003) tarafından tanımlanan:

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ x_{n+1} = (I + \lambda_n B)^{-1}(y_n - \lambda_n Ax_n), \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklindeki eylemsiz ileri-geri ayırma algoritması ve Lorenz and Pock (2015) tarafından tanımlanan:

$$\begin{cases} w_n = z_n + \beta_n(z_n - z_{n-1}) \\ z_{n+1} = (I + \lambda_n B)^{-1}(w_n - \lambda_n Aw_n), \forall n \geq 1 \end{cases}$$

şeklindeki eylemsiz ileri-geri ayırma algoritmalarını (IFBS) kullanmışlardır. Sonuç olarak yazarlar eylemsiz Tseng algoritmasının görüntü iyileştirmede diğer algoritmalarından daha etkili olduğunu göstermişlerdir.

Abubakar et al. (2020) çalışmalarında:

$$\begin{cases} t_n = u_n + \varrho(u_n - u_{n-1}) \\ s_n = (I + \lambda_n B)^{-1}(I - \lambda_n A)t_n \\ u_{n+1} = (1 - \rho)t_n + \rho s_n + \rho \lambda_n (At_n - As_n) \end{cases} \quad (2.8)$$

şeklindeki esnetilmiş (relaxed) eylemsiz Tseng tipli algoritmayı tanımlamışlardır. Burada λ_n adım boyutu

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \frac{\|t_n - s_n\|}{\|At_n - As_n\|} \right\}, & At_n \neq As_n \\ \lambda_n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklindedir. Ayrıca yazarlar algoritma tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin kapsama probleminin çözümüne zayıf yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Aynı çalışmada C ve Q , H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarında boş kümeden farklı kapalı konveks alt kümeleri ve $A: H_1 \rightarrow H_2$ sınırlı lineer operatör olmak üzere yazarlar (2.8) algoritmasını:

$$\begin{cases} t_n = u_n + \varrho(u_n - u_{n-1}) \\ s_n = P_C[t_n - \lambda_n A^*(I - P_Q)At_n] \\ u_{n+1} = (1 - \rho)t_n + \rho s_n + \rho \lambda_n [A^*(I - P_Q)At_n - A^*(I - P_Q)As_n] \end{cases} \quad (2.9)$$

şeklinde modifiye etmişlerdir. Ayrıca yazarlar bu algoritma tarafından üretilen dizinin ayrık fizibilite probleminin çözümüne zayıf yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Son olarak görüntü iyileştirme problemini çözmek için Algoritma (2.8) ve Algoritma (2.9)'u kullanmışlar ve bu algoritmaları Algoritma (2.7) ve IFBS algoritmaları ile karşılaştırmışlardır. Yazarlar Algoritma (2.8) ve Algoritma (2.9) algoritmaları ile diğer algoritmalarından daha kaliteli görüntüler elde etmişlerdir.

Kaewyong and Sitthithakerngkiet (2021) çalışmalarında eylemsizlik ve viskozite tekniklerini kullanarak λ_n adım boyutu

$$\lambda_{n+1} = \begin{cases} \min \left\{ \lambda_n, \frac{\|w_n - y_n\|}{\|Aw_n - Ay_n\|} \right\}, & Aw_n \neq Ay_n \\ \lambda_n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)w_n \\ s_n = y_n - \lambda_n(Ay_n - Aw_n) \\ x_{n+1} = \alpha_n \nabla h(x_n) + (1 - \alpha_n)s_n \end{cases} \quad (2.10)$$

şeklindeki modifiye edilmiş Tseng algoritmasını tanımlamışlardır. Aynı zamanda yazarlar sunulan algoritma tarafından üretilen dizinin monoton kapsama probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Yazarlar Algoritma (2.10)'da $A = \nabla F$ ve $B = \partial G$ alarak:

$$\begin{cases} w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = J_{\lambda_n}^{\partial G}(I - \lambda_n \nabla F)w_n \\ s_n = y_n - \lambda_n(\nabla F y_n - \nabla F w_n) \\ x_{n+1} = \alpha_n \nabla h(x_n) + (1 - \alpha_n)s_n \end{cases} \quad (2.11)$$

şeklindeki algoritmayı elde etmişlerdir. Aynı zamanda yazarlar sunulan algoritma tarafından üretilen dizinin konveks minimizasyon probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Son olarak görüntü iyileştirme problemini çözmek için Algoritma (2.11)'i kullanarak gri ve renkli görüntülerdeki SNR değerlerini incelemişlerdir.

Hanjing and Suantai (2020) çalışmalarında Hilbert uzaylarda genişlemeyen dönüşümlerin sayılabilir ailesinin ortak sabit noktalarını bulmak için:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H, \\ w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n T_n w_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)T_n w_n + \beta_n T_n z_n, \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)T_n z_n + \alpha_n T_n y_n, \end{cases}$$

şeklindeki MWA olarak adlandırılan modifiye edilmiş W-algoritmasını tanımlamışlardır. Aynı zamanda yazarlar uygun koşullar altında MWA algoritması tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin sabit nokta probleminin çözümüne zayıf yakınsak olduğunu göstermişlerdir. MWA'da $T_n = \text{prox}_{c_n h}(I - c_n \nabla f)$ yazarak:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H, \\ w_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \gamma_n)w_n + \gamma_n \text{prox}_{c_n h}(I - c_n \nabla f)w_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T_n w_n + \beta_n \text{prox}_{c_n h}(I - c_n \nabla f)z_n \\ x_{n+1} = (1 - \alpha_n)\text{prox}_{c_n h}(I - c_n \nabla f)z_n + \alpha_n \text{prox}_{c_n h}(I - c_n \nabla f)y_n \end{cases}$$

şeklindeki modifiye edilmiş ileri-geri W-algoritmasını (FBMWA) elde etmişlerdir. Yazarlar uygun koşullar altında FBMWA algoritması tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin konveks minimizasyon probleminin çözümüne zayıf yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Son bölümde görüntü iyileştirme problemini çözmek için FBMWA algoritmasını uygulayıp FBS, IFBS, Beck and Teboulle (2009) tarafından tanımlanan:

$$\begin{cases} y_n = \text{prox}_{\frac{1}{L}h}\left(x_n - \frac{1}{L}\nabla f(x_n)\right) \\ t_{n+1} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t_n^2}}{2}, \quad \theta_n = \frac{t_n - 1}{t_{n+1}} \\ x_{n+1} = y_n + \theta_n(y_n - y_{n-1}), \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki hızlı yinelemeli büzülme eşiği (fast iterative shrinkage-thresholding) algoritması (FISTA) ve Verma and Shukla (2017) tarafından tanımlanan:

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}), \\ x_{n+1} = T_n[(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n T_n y_n], \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklindeki yeni hızlandırılmış proximal gradyen algoritmalarının (NAGA) PSNR değerlerini karşılaştırmışlardır. Yazarlar görüntü iyileştirmede FBMWA algoritmasının diğer algoritmalarından daha etkili olduğunu göstermişlerdir.

Artsawang and Ungchittrakool (2020) çalışmalarında Hilbert uzaylarda genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktalarını bulmak için hata ve eylemsiz terimlerini kullanarak yeni bir Mann-tipli algoritma sunmuşlardır. A ve B , H Hilbert uzayında maksimal monoton operatörler ve C , δ -cocoercive operatör olmak üzere üç monoton operatörün sıfırlarının toplamının bulunması problemi:

$$0 \in (A + B + C)x \quad (2.12)$$

özelliğini sağlayan $x \in H$ noktasının bulunması şeklinde tanımlanmıştır. Artsawang and Ungchittrakool (2020), (2.12) problemini çözmek için:

$$\begin{cases} \alpha_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = J_\mu^B(\delta_n \alpha_n) \\ z_n = J_\mu^A(2y_n - \delta_n \alpha_n - \mu C y_n) \\ x_{n+1} = \delta_n \alpha_n + \alpha_n(z_n - y_n) + \varepsilon_n, \quad \forall n \geq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

şeklinde bir algoritma tanımlamışlar ve kuvvetli yakınsaklık teoremi ispatlamışlardır. Yazarlar Algoritma (2.13)'de $Cx = 0$ ve $Bx = 0$ alarak yeni sonuçlar elde etmişlerdir. Elde edilen yeni algoritmanın görüntü iyileştirme problemine uygulamasını vermişlerdir. Aynı zamanda Algoritma (2.5) ve kendi tanımladıkları algoritmaların görüntü iyileştirme performansını karşılaştırmışlar ve sonuç olarak kendi tanımladıkları algoritmaların görüntü iyileştirme performansının diğer algoritmalarından daha iyi olduğunu göstermişlerdir.

Puangpee and Suantai (2020) çalışmalarında Hilbert uzaylarda genişlemeyen dönüşümlerin sonsuz ailesinin ortak sabit noktalarını bulmak için:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H \\ y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \sigma_n)y_n + \sigma_n T_n y_n \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n T_n y_n + \gamma_n T_n z_n \end{cases}, \forall n \geq 1$$

şeklindeki NAVA algoritmasını tanımlamışlardır. Burada,

$$\theta_n = \begin{cases} \min \left\{ \theta, \frac{\eta_n \alpha_n}{\|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & x_n \neq x_{n-1} \\ \theta, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

dır. Aynı zamanda yazarlar uygun şartlar altında algoritma tarafından üretilen $\{x_n\}$ dizisinin kuvvetli yakınsak olduğunu ispatlamışlardır. Yazarlar NAVA'da $T_n = \text{prox}_{\lambda_n g}(I - \lambda_n \nabla h)$ yazarak:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H \\ y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \sigma_n)y_n + \sigma_n \text{prox}_{\lambda_n g}(I - \lambda_n \nabla h)y_n \\ x_{n+1} = \alpha_n f(x_n) + \beta_n \text{prox}_{\lambda_n g}(I - \lambda_n \nabla h)y_n + \gamma_n \text{prox}_{\lambda_n g}(I - \lambda_n \nabla h)z_n \end{cases}$$

şeklindeki hızlandırılmış ileri-geri ayırma algoritmasını (AVFBA) tanımlamışlardır. Uygun şartlar altında $\{x_n\}$ dizisinin konveks minimizasyon probleminin çözümüne kuvvetli yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Aynı zamanda yazarlar AVFBA ile FISTA'nın görüntü iyileştirme problemine uygulamasını vermişler ve sayısal sonuçlar AVFBA'nin FISTA'ya göre daha yüksek PSNR ile üstün görüntü iyileştirme sağladığını göstermiştir.

Padcharoen et al. (2020b) çalışmalarında:

$$\bar{\alpha}_n = \begin{cases} \min \left\{ \alpha, \frac{\varepsilon_n}{\|y_n - y_{n-1}\|} \right\}, & y_n \neq y_{n-1} \\ \alpha, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere:

$$\begin{cases} y_0, y_1 \in H \\ w_n = y_n + \alpha_n(y_n - y_{n-1}) \\ x_{n+1} = \beta_n w_n + 2\delta_n(J_Y^A(2(J_Y^B y_n + b_n) - w_n) + \alpha_n) \\ \quad - 2\delta_n(J_Y^B y_n + b_n) + \delta_n w_n \end{cases} \quad (2.14)$$

şekildeki genelleştirilmiş eylemsiz Douglas-Rachford ayırma algoritmasını tanımlamışlar ve yazarlar $\{y_n\}$ dizisinin $x = J_Y^B y \in (A + B)^{-1}(0)$ noktasına zayıf yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Son olarak Algoritma (2.14) ile Combettes (2004) tarafından tanımlanan:

$$y_{n+1} = y_n + 2\lambda_n \left(J_Y^A(2(J_Y^B y_n + b_n) - y_n) + \alpha_n - (J_Y^B y_n + b_n) \right)$$

şeklindeki genelleştirilmiş Douglas-Rachford ayırma algoritmasının görüntü iyileştirme problemine uygulamasını vermişlerdir. Sonuç olarak yazarlar Algoritma (2.14)'ün SNR değerinin diğer algoritmadan daha yüksek olduğunu göstermişlerdir.

Padcharoen and Kumam (2020) çalışmalarında H reel Hilbert uzayında genişlemeyen dönüşümlerin sayılabilir ailesinin ortak sabit noktasını bulmak için:

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \rho_n)y_n + \rho_n T_n y_n \\ w_n = (1 - \delta_n - \rho_n)z_n + \delta_n T_n z_n + \beta_n T_n \\ x_{n+1} = T_n w_n \end{cases}$$

şeklindeki modifiye edilmiş MM-algoritmasını (MMA) tanımlamışlardır. Aynı zamanda yazarlar algoritmanın ürettiği $\{x_n\}$ dizisinin zayıf yakınsaklığını çalışmışlardır.

Daha sonra konveks minimizasyon problemini çözmek için modifiye edilmiş MMEA algoritmasında T_n yerine $J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)$ yazarak:

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \rho_n)y_n + \rho_n J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)y_n \\ w_n = (1 - \delta_n - \rho_n)z_n + \delta_n J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)z_n + \beta_n J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)y_n \\ x_{n+1} = J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)w_n \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan modifiye edilmiş ileri-geri MM-algoritmasını (FBMMA) sunmuşlardır. Son olarak yazarlar görüntü iyileştirme problemini çözmek için FBMM algoritmasını uygulamışlar ve bu algoritmayı FISTA ve NAGA algoritmaları ile karşılaştırmışlardır. Sonuç olarak görüntü iyileştirmede FBMMA algoritmasının yukarıdaki iki algoritmadan daha iyi performansa sahip olduğunu göstermişlerdir.

Janngam and Suantai (2021) çalışmalarında H reel Hilbert uzayında genişlemeyen dönüşümlerin sayılabilir ailesinin ortak sabit noktasını bulmak için:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H \\ \omega_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \gamma_n)\omega_n + \gamma_n T_n \omega_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T_n z_n + \beta_n T_n z_n \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n)T_n z_n + \gamma_n T_n y_n, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.15)$$

şeklindeki yeni bir hızlandırılmış sabit nokta algoritmasını tanımlamışlardır. Aynı zamanda algoritma tarafından üretilen dizinin dönüşümlerin ortak sabit noktasına zayıf yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Yazarlar Algoritma (2.15)'de $T_n = \text{prox}_{c_n g}(I - c_n \nabla f)$ yazarak:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H \\ \omega_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \gamma_n)\omega_n + \gamma_n \text{prox}_{c_n g}(I - c_n \nabla f)\omega_n \\ y_n = (1 - \beta_n)\text{prox}_{c_n g}(I - c_n \nabla f)z_n + \beta_n \text{prox}_{c_n g}(I - c_n \nabla f)z_n \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n)\text{prox}_{c_n g}(I - c_n \nabla f)z_n + \gamma_n \text{prox}_{c_n g}(I - c_n \nabla f)y_n, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (2.16)$$

2. KAYNAK ÖZETLERİ

şeklindeki algoritmayı elde etmişler ve algoritma tarafından üretilen dizinin konveks minimizasyon probleminin çözümüne zayıf yakınsak olduğunu göstermişlerdir. Son olarak görüntü iyileştirme problemini çözmek için Algoritma (2.16)'yı kullanmışlar ve bu algoritmayı NAGA ve FISTA algoritmaları ile karşılaştırmışlardır. Algoritma (2.16)'nın karşılaştırılan algoritmalarından daha yüksek bir PSNR değerine sahip olduğunu göstermişlerdir.



3. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanımlar ve teoremler hakkında bilgi verilmiştir.

3.1. Temel Tanım ve Önermeler

Tanım 3.1.1: E boş kümeden farklı bir küme olsun. $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(M2) $d(x, y) = d(y, x),$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y),$

şartları sağlanıyorsa d ye E de bir metrik, (E, d) ikilisine de metrik uzay denir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.2: E, F cismi üzerinde bir vektör uzayı ve $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ olsun. Her $x, y \in E$ ve $\lambda \in F$ için,

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0,$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|,$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna E 'de bir norm ve $(E, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay denir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.3: (E, d) bir metrik uzay ve (x_n) , bu uzayda bir dizi olsun.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$$

olacak şekilde $x \in E$ varsa (x_n) dizisine E de yakınsaktır denir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.4: (E, d) bir metrik uzay ve (x_n) , E de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $m, n > n_0$ için,

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

olacak şekilde $n_0 = n_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine Cauchy dizisi denir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.5: $(E, \|\cdot\|_E)$ normlu uzayında her Cauchy dizisi yakınsak ise E 'ye Banach uzay veya tam normlu uzay denir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.6: E, F cismi üzerinde bir normlu uzay olmak üzere E üzerinde tanımlı tüm sınırlı lineer fonksiyonlardan oluşan Banach uzayına, E nin duali denir ve E' ile gösterilir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.7: $(E, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve (x_n) , E de bir dizi olsun. Eğer her $f \in E'$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olmak üzere $x_0 \in E$ varsa x_n dizisi x_0 noktasına zayıf yakınsaktır denir. (x_n) , dizisinin zayıf yakınsadığı x_0 noktasına ise zayıf yığılma noktası denir (Madox 1970).

Tanım 3.1.8: E, F cismi üzerinde bir vektör uzayı, $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow F$ fonksiyonu her $x, y \in E$ ve $\lambda \in F$ için,

(i1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ ve $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

(i2) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$

(i3) $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$

(i4) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

şartlarını sağlıyor ise $\langle ., . \rangle$ fonksiyonuna E 'de bir iç çarpım ve $(E, \langle ., . \rangle)$ ikilisine de iç çarpım uzayı denir. Tanımda (i2) özelliğinde verilen çizgi kompleks eşleniği göstermektedir. O halde, $F = \mathbb{R}$ olması durumunda (i2) de $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ şeklindedir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.9: $(E, \langle ., . \rangle)$ bir iç çarpım uzayı ve $x \in E$ olmak üzere

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

fonksiyonu bir norm fonksiyonudur. Bu norma iç çarpım normu denir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.10: $(E, \langle ., . \rangle)$ iç çarpım uzayı iç çarpım normuna göre tam ise bu uzaya Hilbert uzay denir (Bayraktar 2006).

Tanım 3.1.11: H bir Hilbert uzay, $f: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ bir dönüşüm ve $D(f) \subset H$, f 'nin tanım kümesi olmak üzere $f(x) < +\infty$ olacak şekilde en az bir $x \in D(f)$ varsa f fonksiyonuna has (proper) fonksiyon denir (Bauschke and Combettes 2011).

Tanım 3.1.12: H bir Hilbert uzay, $f: H \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ bir dönüşüm ve $x \in H$ olsun. x noktasına yakınsayan her $\{x_n\}$ dizisi için,

$$f(x) \leq \liminf f(x_n)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna x noktasında alttan yarı sürekli denir (Bauschke and Combettes 2011).

H 'dan $\overline{\mathbb{R}}$ kümesine tanımlı tüm alttan yarı sürekli konveks fonksiyonların kümesi $\Gamma(H)$ ile, H 'dan $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ kümesine tanımlı tüm has alttan yarı sürekli konveks fonksiyonların kümesi ise $\Gamma_0(H)$ ile gösterilmektedir (Bauschke and Combettes 2011).

Aşağıda proksimal operatör tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.1.13: H bir Hilbert uzay ve $f \in \Gamma_0(H)$ olsun. f nin $\lambda > 0$ parametresinin $x \in H$ noktasındaki proksimal operatörü $prox_{\lambda f}: H \rightarrow H$,

$$prox_{\lambda f}x = \operatorname{argmin}_{y \in H} \left\{ f(y) + \frac{1}{2\lambda} \|y - x\|^2 \right\}$$

şeklinde tanımlanır (Bauschke and Combettes 2011).

Yukarıdaki tanımında f yerine l_1 -normu alınırsa,

$$prox_{\lambda \|\cdot\|_1}(x) = \operatorname{sign}(x) \max\{\|x\|_1 - \lambda, 0\},$$

dır. Bu durumda proksimal operatörü soft thresholding operatör olarak adlandırılır.

Önerme 3.1.14: H bir Hilbert uzay, $f \in \Gamma_0(H)$ ve $x, p \in H$ olmak üzere her $y \in H$ için

$$p = prox_f x \Leftrightarrow \langle y - p, x - p \rangle + f(p) \leq f(y)$$

dır (Bauschke and Combettes 2011).

Metrik izdüşüm operatörünün tanımı ve bazı özellikleri aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1.15: C , H Hilbert uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks bir alt kümesi ve $x \in H$ olsun.

$$\|x - P_C x\| = \inf\{\|x - y\|: y \in C\}$$

olacak şekilde bir $y \in C$ noktası varsa y ye x in C üzerine metrik izdüşümü denir ve $P_C x$ ile gösterilir. $P_C: H \rightarrow C$ operatörüne de C üzerinde metrik izdüşüm operatörü denir (Cegielski 2012).

Öte yandan P_C metrik izdüşüm operatörü $y \in C$ için

$$\langle x - P_C x, y - P_C x \rangle \leq 0, \quad (3.1)$$

şeklinde karakterize edilebilir (Goebel and Reich 1984).

Tanım 3.1.16: H bir Hilbert uzay ve $f: H \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ has bir fonksiyon olsun. $x \in H$ noktasında f 'nin alt diferansiyeli $\partial f: H \rightarrow 2^H$,

$$\partial f(x) = \{u \in H: \langle y - x, u \rangle + f(x) \leq f(y), \forall y \in H\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $f(x) \in \{\pm\infty\}$ ise $\partial f(x) = \emptyset$ dır. Öte yandan $\partial f(x)$ 'nin elemanlarına da x noktasında f fonksiyonunun alt gradyenleri denir (Bauschke and Combettes 2011).

Örneğin $f(x) = |x|$ mutlak değer fonksiyonunun alt diferansiyeli

$$\partial f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ [-1, 1], & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

olur.

Tanım 3.1.17: H bir Hilbert uzay, $\lambda > 0$ ve $A: H \rightarrow 2^H$ bir dönüşüm olmak üzere A 'nın rezolventi $J_\lambda^A: H \rightarrow H$,

$$J_{\lambda}^A = (I + \lambda A)^{-1}$$

şeklinde tanımlanır (Bauschke and Combettes 2011).

Önerme 3.1.18: H bir Hilbert uzay, $f \in \Gamma_0(H)$ ve $I: H \rightarrow H$ birim dönüşüm olsun. Bu durumda,

$$p = \text{prox}_f x \Leftrightarrow x - p \in \partial f(p)$$

ve $\text{prox}_{\lambda f} = (I + \lambda \partial f)^{-1}$ dır (Bauschke and Combettes 2011).

Tanım 3.1.19: H bir Hilbert uzay ve C , H Hilbert uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. C 'nin ι_C indikatör fonksiyonu $\iota_C : H \rightarrow (-\infty, +\infty]$:

$$\iota_C(x) = \begin{cases} 0, & x \in C \\ +\infty, & x \notin C \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu durumda,

$$J^{\partial \iota_C} = \text{prox}_{\iota_C} = P_C$$

dır. Gerçekten,

$$y = J^{\partial \iota_C} x \Leftrightarrow x \in (y + J^{\partial \iota_C} y)$$

$$\Leftrightarrow x - y \in J^{\partial \iota_C}$$

$$\Leftrightarrow y = P_C x$$

dır (Abubakar et al. 2020).

3.2. Dönüşüm Sınıfları

Bu başlık altında ilerde kullanılacak olan dönüşüm sınıflarının tanımı ve aralarındaki bazı ilişkiler verilmiştir.

Tanım 3.2.1: H bir Hilbert uzay, $D \subset H$, $T: D \rightarrow H$ bir dönüşüm ve $\|\cdot\|$ bu uzay üzerindeki iç çarpım normu olsun. Bu durumda,

- i. Her $x, y \in D$ için,

$$\|Tx - Ty\| \leq L\|x - y\|$$

olacak şekilde bir $L \geq 0$ sabit sayısı varsa T 'ye Lipschitzian dönüşüm ve bu eşitsizliğe Lipschitz şartı,

- ii. Eğer Lipschitz şartı $0 \leq L < 1$ olması halinde sağlanıyorsa T 'ye daraltan veya büzülme dönüşümü,
iii. Eğer Lipschitz şartı $L = 1$ için sağlanıyorsa T 'ye genişlemeyen dönüşüm,

denir (Cegielski 2012).

Diğer taraftan, H bir Hilbert uzay ve C , H 'nin kapalı ve konveks bir alt kümesi olmak üzere P_C metrik izdüşümü genişlemeyen bir dönüşümdür. Yani her $x, y \in H$ için

$$\|P_C x - P_C y\| \leq \|x - y\|$$

dır (Cegielski 2012).

Tanım 3.2.2: T , H Hilbert uzayında $D(T)$ tanım ve $R(T)$ görüntü kümelerine sahip lineer olmayan bir dönüşüm olsun. Bu durumda,

- i. Her $x, y \in D(T)$ için,

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa T 'ye monoton dönüşüm,

ii. Her $x, y \in D(T)$ için,

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq \eta \|x - y\|^2$$

olacak şekilde $\eta > 0$ sabiti varsa T 'ye η -kuvvetli monoton dönüşüm,

iii. Her $x, y \in D(T)$ için,

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle \geq v \|Tx - Ty\|^2$$

olacak şekilde $v > 0$ sabiti varsa T 'ye v -ters kuvvetli monoton dönüşüm veya v -cocoercive dönüşüm,

iv. Bir T monoton dönüşümün $G(T)$ grafiği başka bir monoton dönüşümün grafiği tarafından içerilmiyorsa T 'ye maksimal monoton dönüşüm

denir (Zeidler 1986).

Tanımdan yola çıkarak, her v -cocoercive dönüşüm $\frac{1}{v}$ -Lipschitz sürekli ve monoton dönüşüm olduğu söylenebilir.

$A: H \rightarrow 2^H$ küme değerli bir operatör olsun. A 'nın tanım ve görüntü kümeleri sırasıyla, $D(A) := \{x \in H: Ax \neq \emptyset\}$ ve $R(A) := \{Ax: x \in D(A)\}$ şeklinde tanımlanır. A operatörünün grafiği $G(A) := \{(x, z): z \in Ax\}$ dir. Her $z \in Ax$ ve $w \in Ay$ için $\langle z - w, x - y \rangle \geq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa A küme değerli operatörü monoton operatör olarak adlandırılır.

Aşağıda monoton dönüşümler ile ilgili bazı önermeler verilmiştir.

Önerme 3.2.3: H bir Hilbert uzay, $A: H \rightarrow H$, β -cocoercive ($\beta > 0$) bir dönüşüm olsun. Bu durumda A maksimal monoton bir dönüşümdür (Bauschke and Combettes 2011).

Önerme 3.2.4: H bir Hilbert uzay, $A: H \rightarrow H$ monoton ve sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda A maksimal monotondur (Bauschke and Combettes 2011).

Teorem 3.2.5: H bir Hilbert uzay ve $A: H \rightarrow 2^H$ monoton bir dönüşüm olsun. A 'nın maksimal monoton olması için gerekli ve yeterli koşul $R(I + A) = H$ olmasıdır (Bauschke and Combettes 2011).

Önerme 3.2.6: H bir Hilbert uzay ve $f \in \Gamma_0(H)$ olsun. Bu durumda ∂f maksimal monotondur (Bauschke and Combettes 2011).

Tanım 3.2.7: X bir lineer uzay ve $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda her $x, y \in X$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f ye konveks dönüşüm denir (Cegielski 2012).

3.3. Sabit Nokta Problemleri

Son yılların en popüler araştırma alanlarından biri olan sabit nokta teorisi, nonlinear analiz, integral ve diferansiyel denklemler, dinamik sistem teorisi, fraktalların matematiği, matematiksel ekonomi (oyun teorisi, denge problemleri, optimizasyon problemleri vb.) ve matematiksel modelleme gibi matematiğin çeşitli teorik ve uygulamalı alanlarında önemli bir rol oynar.

Şimdi sabit nokta tanımını verelim.

Tanım 3.3.1: X boş kümeden farklı bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olmak üzere eğer $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa bu x noktasına T 'nin sabit noktası denir. T nin tüm sabit noktalarının kümesi $F(T)$ ile gösterilir. Yani,

$$F(T) = \{x \in X: Tx = x\}$$

dır (Agarwal et al. 2007).

3.4. Monoton Kapsama Problemleri

Bu bölümde öncelikle bir operatörün sıfırlarının kümesi tanımlanıp ardından monoton kapsama problemi ifade edilmiştir.

Tanım 3.4.1: H bir Hilbert uzay ve $A: H \rightarrow 2^H$ bir dönüşüm olsun. A dönüşümünün tüm sıfırlarının kümesi

$$\text{zer}A = A^{-1}0 = \{x \in H: 0 \in Ax\}$$

şeklinde tanımlanır (Bauschke and Combettes 2011).

İki monoton operatörün sıfırını bulmak monoton operatör teorisindeki en önemli problemlerden birisidir. $A: H \rightarrow H$ bir operatör ve $B: H \rightarrow 2^H$ küme değerli bir operatör olmak üzere kapsama problemi:

$$0 \in (A + B)x \tag{3.2}$$

özelliğini sağlayan $x \in H$ noktasının bulunması şeklinde tanımlanmıştır. Monoton kapsama probleminin çözüm kümesi Ω ile gösterilir. A ters kuvvetli monoton ve B maksimal monoton bir operatör olmak üzere Ω kümesi kapalı ve konvektir (Jung 2013). Bu problem konveks minimizasyon problemi, varyasyonel eşitsizlik problemi ve denge problemlerini içerir. Aynı zamanda makine öğrenmesi, görüntü işleme, sinyal işleme ve lineer ters problemler matematiksel olarak kapsama problemi şeklinde formülize edilebilir (Kitkuan et al. 2019a).

Aşağıda sıfırların kümesi ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Önerme 3.4.2: H bir Hilbert uzay ve $A: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton bir dönüşüm olsun. Bu durumda $\text{zer}A$ kapalı ve konvektir (Bauschke and Combettes 2011).

Lemma 3.4.3: H bir Hilbert uzay, $A: H \rightarrow H$ monoton ve Lipschitz sürekli bir dönüşüm ve $B: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton dönüşüm olsun. Bu durumda $A + B$ maksimal monotondur (Brezis 1973).

Önerme 3.4.4: H bir Hilbert uzay, $\lambda > 0$ ve $A: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton bir dönüşüm olsun. Bu durumda

$$F(J_\lambda^A) = \text{zer}A$$

dır (Bauschke and Combettes 2011).

İspat: $\lambda > 0$ için

$$y \in A^{-1}0 \iff 0 \in \lambda Ay$$

$$\iff y \in y + \lambda Ay \iff y \in (I + \lambda A)y$$

$$\iff y = J_\lambda^A y$$

$$\iff y \in F(J_\lambda^A)$$

olur.

Lemma 3.4.5: $A: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton bir dönüşüm ve $B: H \rightarrow H$ bir dönüşüm olsun. Ayrıca $\lambda > 0$ için $T_r = (I + \lambda B)^{-1}(I - \lambda A)$ olsun. Bu durumda

$$F(T_r) = (A + B)^{-1}(0)$$

dır (Lopez et al. 2012).

İspat: T_r 'nin tanımından,

$$\begin{aligned} x = T_r x &\Leftrightarrow x = (I + \lambda B)^{-1}(I - \lambda A)x \\ &\Leftrightarrow (x - \lambda Ax) \in (x + \lambda Bx) \\ &\Leftrightarrow x \in (A + B)^{-1}(0) \end{aligned}$$

elde edilir.

3.5. Konveks Minimizasyon Problemi

Bu bölümde konveks minimizasyon problemi ifade edilmiş ve bazı özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.5.1: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı bir alt kümesi ve $g: C \rightarrow \mathbb{R}$ bir dönüşüm olmak üzere g nin C üzerindeki yerel minimum noktalarının bulunmasına minimizasyon problemi denir. Aynı zamanda g nin mutlak minimum noktasına

$$\min_{x \in C} g(x)$$

şeklindeki problemin optimal çözümü denir ve bu noktaların kümesi $\operatorname{argmin}_{x \in C} g(x)$ ile gösterilir. Burada g konveks ise bu probleme konveks minimizasyon problemi denir (Cegielski 2012).

H bir reel Hilbert uzayı olsun. $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve konveks bir fonksiyon, $L > 0$ için ∇f L -Lipschitz sürekli, $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ has alttan yarı sürekli konveks bir fonksiyon olmak üzere bu tez boyunca konveks minimizasyon problemi olarak:

$$f(x^*) + g(x^*) = \min_{x \in H} \{f(x) + g(x)\}$$

eşitliğini sağlayan x^* noktasının bulunması problemi ele alınacaktır. Eğer (3.2) kapsama probleminde $A = \nabla f$ ve $B = \partial g$ alınırsa konveks minimizasyon problemi:

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial g(x^*)$$

şeklinde tanımlanan monoton kapsama problemine ve dolayısıyla

$$x^* = J_{\lambda}^{\partial g}(I - \lambda \nabla f)x^*$$

şeklinde verilen sabit nokta problemine denk olduğu bilinmektedir.

Önerme 3.5.2: H bir Hilbert uzay, $\lambda > 0$ ve $f \in \Gamma_0(H)$ olsun. Bu durumda,

$$F(\text{prox}_{\lambda f}) = \text{argmin} f$$

dır (Bauschke and Combettes 2011).

İspat: $x \in H$ olsun. Bu durumda

$$x = \text{prox}_{\lambda f} x \Leftrightarrow \langle y - x, x - x \rangle + \lambda f(x) \leq \lambda f(y)$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq f(y), \forall y \in H$$

$$\Leftrightarrow x \in \text{argmin} f$$

her $y \in H$ için elde edilir.

Teorem 3.5.3 (Fermat Kuralı): H bir Hilbert uzay ve $f: H \rightarrow (-\infty, +\infty]$ has fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\operatorname{argmin} f = \operatorname{zer} \partial f$$

dır (Bauschke and Combettes 2011).

İspat: $x \in H$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x \in \operatorname{argmin} f &\Leftrightarrow \langle y - x, 0 \rangle + f(x) \leq f(y), \forall y \in H \\ &\Leftrightarrow 0 \in \partial f(x) \end{aligned}$$

dır.

Daha önce $f \in \Gamma_0(H)$ olması durumunda $\operatorname{argmin} f = F(\operatorname{prox}_f)$ olduğu gösterilmişti. Bu eşitliği Fermat Kuralı ile birleştirecek, H bir reel Hilbert uzay olmak üzere $f \in \Gamma_0(H)$ için

$$\operatorname{argmin} f = \operatorname{zer} \partial f = F(\operatorname{prox}_f)$$

eşitliği elde edilir.

3.6. Varyasyonel Eşitsizlik Problemi

$A: C \rightarrow H$ lineer olmayan bir operatör olmak üzere varyasyonel eşitsizlik problemi (VIP):

$$\langle Ax^*, y - x^* \rangle \geq 0$$

her $y \in C$ için eşitsizliğini sağlayan $x^* \in C$ noktasının bulunması problemidir. Varyasyonel eşitsizlik probleminin çözüm kümesi $VI(C, A)$ ile gösterilir. Bu problem:

$$J_{\lambda}^{\partial_{ic}}(I - \lambda A)x^* = P_C(x^* - \lambda_n Ax^*) = x^*$$

sabit nokta problemine denk olduğu iyi bilinmektedir.

3.7. Denge Problemleri

C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks alt kümesi, A monoton operatör ve $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ bifonksiyon olmak üzere denge problemi:

$$F(x, y) \geq 0$$

her $y \in C$ için eşitsizliğini sağlayan $x \in C$ noktasının bulunması problemidir. Denge probleminin çözüm kümesi $EP(F)$ ile gösterilir. Ayrıca genelleştirilmiş denge problemi:

$$F(x, y) + \langle Ax, y - x \rangle \geq 0$$

her $y \in C$ için eşitsizliğini sağlayan $x \in C$ noktasının bulunması problemidir. Genelleştirilmiş denge probleminin çözüm kümesi $GEP(F, A)$ ile gösterilir. Genelleştirilmiş denge problemini çözmek için F fonksiyonunun aşağıdaki özellikleri sağladığını varsayalım:

1. Her $y \in C$ için, $F(x, y) = 0$,
2. F monoton, yani, her $x, y \in C$ için $F(x, y) + F(y, x) \leq 0$,
3. Her $x, y, z \in C$ için $\lim_{t \rightarrow 0} F(tz + (1 - t)x, y) \leq F(x, y)$,
4. Her $x, y \in C$ için $y \mapsto F(x, y)$ konveks ve alttan yarı süreklidir.

Aşağıda denge problemi ve genelleştirilmiş denge problemi ile ilgili bazı lemmalar verilmiştir.

Lemma 3.7.1: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks alt kümesi ve $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, (1)-(4) şartlarını sağlayan bifonksiyon ve $A_F :$

$$A_F = \begin{cases} \{z \in H: F(x, y) \geq \langle y - x, z \rangle\}, & x \in C \\ \emptyset, & x \notin C \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan küme değerli bir dönüşüm olsun. Bu durumda $D(A_F) \subset C$ tanım kümesi olmak üzere A_F maksimal monoton operatör ve $EP(F) = A_F^{-1}0$ elde edilir (Takahashi et al. 2012).

Lemma 3.7.2: $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, (1)-(2) şartlarını sağlayan bifonksiyon ve $A: H \rightarrow H$ sürekli ve monoton dönüşüm olsun. $r > 0$ ve $x \in H$ için $W_r: H \rightarrow C$

$$W_r x = \{z \in C: F(z, y) + \frac{1}{r} \langle z - x + rAx, y - z \rangle, \forall y \in C\}$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. Bu durumda

1. W_r tek değerlidir,
2. $F(W_r) = GEP(F, A)$,
3. W_r genişlemeyen bir dönüşümdür,
4. $GEP(F, A)$ kapalı ve konvekstir (Kitkuan et al. 2020a).

Aynı zamanda Kitkuan ve arkadaşları $GEP(F, A) = (A + A_F)^{-1}(0)$ olduğunu da göstermişlerdir. Öte yandan $J_{\lambda_n}^{A_F}(I - \lambda_n A)x = x \Leftrightarrow x \in (A + A_F)^{-1}(0)$ olduğu bilinmektedir.

3.8. Görüntü İyileştirme

3.8.1. Görüntü

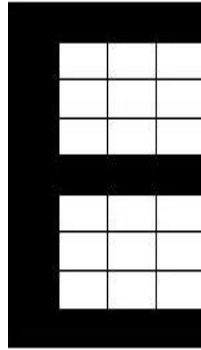
Görüntü; gerçek hayattaki üç boyutlu nesnenin iki boyutlu yüzey üzerine düşürülmüş haritası olarak tanımlanır. Bilgisayar ortamında görüntü matris şeklinde ifade edilmektedir. Matrisin her bir hücresi bir pikseli temsil etmekte ve dolayısıyla görüntüler piksellerden oluşmaktadır.

3.8.2. Görüntü türleri

Görüntüler; renkli görüntü, gri seviyeli görüntü ve ikili (siyah beyaz) görüntü olmak üzere üçe ayrılır. 0 piksel değeri siyah rengi ve 1 piksel değeri beyaz rengi temsil etmek üzere ikili görüntülerde görüntünün piksel değerleri 0 ve 1 ile gösterilmektedir. Şekil 3.1 de siyah beyaz bir görüntü ve buna karşılık gelen matris gösterimi verilmiştir.



(a)



(b)

0	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

(c)

Şekil 3.1. (a) E harfi (b) Gösterimi (c) Sayısallaştırılması

Gri seviyeli görüntüler grinin tonlarından oluşmakta ve siyah ile beyaz arasında bulunan tüm renk tonlarını içermektedir. Başka bir ifadeyle bu görüntüler piksel değeri 0 ile 255 arasında olan 256 farklı piksel değeri almaktadır. 0 piksel değeri siyah rengi 255 piksel değeri ise beyaz rengi temsil etmektedir.

Son olarak renkli görüntüler ise kırmızı, yeşil ve mavi olmak üzere üç renk bileşeninden oluşur. Gri seviyeli görüntülerde de olduğu gibi her bileşen 0 ile 255 arasında 256 farklı piksel değeri almaktadır.

Görüntü işleme, görüntü üzerinde bazı işlemleri gerçekleştirmek için geliştirilmiş, spesifik görüntü elde etmek ve ondan bazı bilgiler çıkarmak için kullanılan yöntem olarak ifade edilmektedir. Görüntü işlemede ilk aşama sayısal görüntüyü kameralar ya da benzeri elektronik cihazlar kullanarak elde etmektir. Sayısal görüntü elde edildikten sonra ön işleme aşamasına geçilir. Ön işleme aşamasını takip eden aşamalarda daha iyi sonuç elde edebilmek için görüntü üzerinde iyileştirme işlemleri gerçekleştirilir. Bu işlemler, gürültü yok etme veya kontrast genişletme gibi işlemlerdir. Görüntü işleme; yapay zeka, makine öğrenmesi, bilgisayarlı görme, makine ile görme, sinyal işleme, görüntü kodlama, görsel algılama, görüntü teknolojisi, görüntüleme ve istatistik, bilgi teorisi gibi birçok konu ile ilişkisi vardır.

Görüntü işlemenin alt alanlarından biri görüntü iyileştirmedir.

Görüntü elde edilirken fotoğraf makinası veya nesnenin hareketi ve net olmayan odaklanmama gibi sebepler ile görüntülerde bulanıklık meydana gelebilir. Ayrıca, görüntüyü bir kaynaktan başka bir kaynağa aktarırken de gürültü adı verilen piksel bozulmaları meydana gelebilir. Görüntü iyileştirme; meydana gelen bu bulanıklık ve gürültüleri mümkün olduğunca ortadan kaldırarak görüntünün niteliğini istenilen seviyeye yükseltme işlemidir.

Yukarıda bahsedilen görüntüde bulanıklık oluşturan temel fonksiyonlar; Gaussian bulanıklık, odaklanmamış (out of focus) bulanıklık, ve hareket (motion) bulanıklıktır.

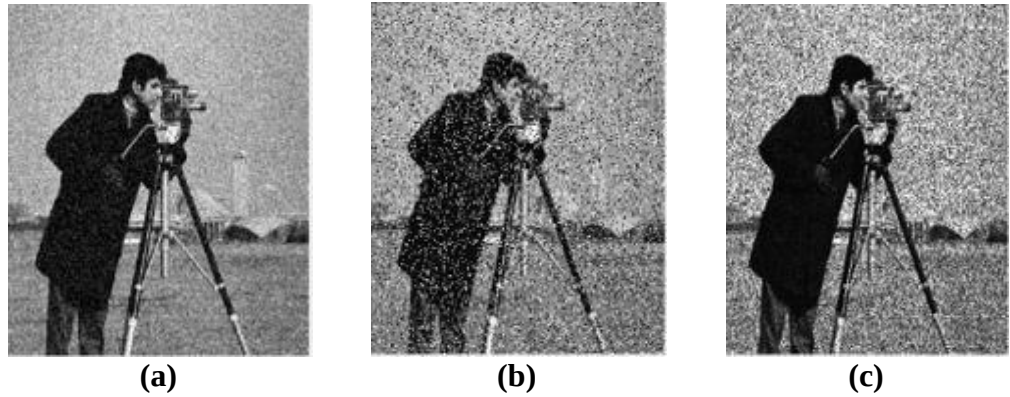
Gaussian bulanıklık; çan şeklindeki bir eğriyi izleyen, belirli sayıdaki pikseli aşamalı olarak karıştıran bir bulanıklıktır. Gaussian bulanıklığın ortaya çıkması, sıcaklık ve rüzgar hızı gibi çeşitli faktörlere bağlıdır (Maru and Parikh 2017).

3. TEMEL KAVRAMLAR

Hareket bulanıklık; görüntü elde edilirken nesne veya kameranın hareketi nedeniyle oluşan bulanıklıktır (Maru and Parikh 2017).

Odaklanmamış bulanıklık; görüntü yakalamadan dolayı nesnenin odaktan çıktığı durum, odaklanamama bulanıklığı olarak adlandırılır (Maru and Parikh 2017).

Bulanıklık gibi görüntüde bozulmalar oluşturan gürültü, görüntüyü kirleten ve görüntü kalitesini düşüren dış kaynaklarda oluşan etki olarak ifade edilmektedir. Bir görüntüde gürültü, birçok farklı kaynaklardan meydana gelebilir. Gürültünün ilk ortaya çıktığı süreç sayısal görüntü elde etme sürecidir. Süreçteki her adım ise doğal olaylar nedeni ile dalgalanmalar meydana getirir ve bu pikselin gerçek piksel değerine tesadüfi bir sayı ekler. Bu da görüntüde ani renk değişimine neden olmaktadır. Dolayısıyla gürültülü piksel ile komşu piksellerin değerleri arasında görünür bir şekilde piksel değeri farkı oluşmaktadır. Bir görüntüde gürültü olmaması için piksel değerlerinin birbiri ile etkileşim içerisinde olması gerekir. Görüntüde kamera hataları, çekim hataları gibi nedenler ile meydana gelen doğal gürültülerin yanı sıra yapay olarak oluşturulan gürültüler de mevcuttur. Bu gürültü çeşitlerinin bazıları; Gaussian gürültü, Tuz ve Biber (Salt ve Pepper) gürültü ve Düzgün (Uniform) gürültüdür. Bu gürültü tiplerine örnek görüntüler aşağıdaki şekillerde verilmiştir.



Şekil 3.2. (a) Gaussian gürültü (b) Tuz biber gürültü (c) Düzgün gürültü

Bir görüntüde hangi adımda hangi tür gürültünün var olduğu bilinebilseydi bunun iyileştirilmesi de sıfır hata ile gerçekleşebilirdi. Fakat bu durum normalde pek mümkün değildir. Bunun için temel tanımlanmış bazı gürültülere göre Medyan ve Ortalama gibi bazı filtrelemeler uygulanmaktadır.

3.8.3. Görüntü iyileştirme problemi

$x \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ orijinal görüntü, $b \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ gözlemlenen görüntü, $v \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ eklenen gürültü ve $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ bulanıklaştırma operatörü olmak üzere görüntü iyileştirme problemi:

$$b = Ax + v$$

matematiksel olarak bu modelin ters çevrilmesi ile formülize edilmiştir.

Görüntü iyileştirme probleminin optimizasyon problemi şeklinde mevcut birçok farklı probleme yaklaşık olarak eşdeğer olduğu bilinmektedir. Görüntü iyileştirme sürecinde birçok düzenlileştirme (regülerizasyon) metodu kullanılmıştır. Bunlardan bazıları:

a) En küçük kareler metodu:

$$\min_x \frac{1}{2} \|b - Ax\|_2^2$$

b) l_1 - düzenlileştirme metodu:

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_1 \right\}$$

c) Tikhonov düzenlileştirme metodu:

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_2^2 \right\}$$

d) Total varyasyon (TV) düzenlileştirme metodu:

$$\min_x \left\{ \frac{1}{2} \|b - Ax\|_2^2 + \lambda \|x\|_{TV} \right\}$$

şeklinde verilmiştir. Burada $\|x\|_{TV}$ ayrık düzenleme terimi ve λ pozitif düzenlileştirme parametresidir.

Görüntü iyileştirme problemini çözmek için genellikle l_1 -düzenileştirme metodu kullanılır. Sonuç olarak görüntü iyileştirme problemi:

$$x^* = \arg\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2 + \tau \|x\|_1 \right\}$$

şeklinde tanımlanan l_1 - düzenileştirme problemi şeklinde ifade edilebilir. l_1 -düzgünleştirme probleminde $f(x) = \frac{1}{2} \|Ax - b\|_2^2$ ve $g(x) = \tau \|x\|_1$ alınırsa bu durumda konveks minimizasyon problemine denk olur. Aynı zamanda A^T, A operatörünün transpozesi olmak üzere f 'nin gradyeni $\nabla f(x) = A^T(Ax - b)$ olduğu bilinir. ∇f 'nin Lipschitz sabiti L , $A^T A$ matrisinin özdeğerlerinin maksimum değerine eşittir.

Görüntü iyileştirme problemlerinde, restore edilmiş görüntünün kalitesini değerlendirmek için işaret gürültü oranı (SNR) ve tepe işaret gürültü oranı (PSNR) gibi değerler kullanılır. $MSE = \frac{1}{M} \|x_n - x\|_2^2$ için M görüntü piksel sayısı, x orijinal görüntü ve x_n tahmin edilen görüntü olmak üzere PSNR ve SNR değerleri:

$$PSNR = 10 \log \left(\frac{255^2}{MSE} \right)$$

ve

$$SNR = 20 \log \frac{\|x\|_2}{\|x - x_n\|_2}$$

şeklinde tanımlanır. Burada SNR ve PSNR değerlerinin yüksek olması daha kaliteli görüntüler elde edildiği anlamına gelir.

4. EYLEMSİZ S^* -ALGORİTMASI

4.1. Algoritma Tanımı ve Zayıf Yakınsaklık Teoremi

Bu bölümde reel Hilbert uzayında sayılabilir genişlemeyen dönüşümler ailesinin ortak bir sabit noktasını bulmak için eylemsiz S^* - algoritması adı verilen yeni bir hızlandırılmış sabit nokta algoritması sunulacaktır. Ardından algoritmanın bazı hafif koşullar altında zayıf yakınsaklığı kanıtlanacaktır. Elde edilen sonuçlar konveks minimizasyon problemini ve dolayısıyla görüntü iyileştirme problemini çözmek için de uygulanacaktır. Bu bölümde verilen sonuçlar 2021 yılında 8th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics sempozyumunda ‘Convergence Theorem of Inertial S^* -algorithm for Family of Nonexpansive Mappings with Applications’ başlıklı tam metin bildiride yayımlanmıştır.

Eylemsiz S^* -algoritması ile ilgili sonuçları vermeden önce bu sonucu ispatlamak için gerekli olan koşulun tanımını verelim.

$\emptyset \neq F(\Lambda) \subset \Omega := \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ olmak üzere $\{T_n\}$ ve Λ, C üzerinde genişlemeyen dönüşümlerin aileleri ve $F(\Lambda)$ 'de Λ ailesindeki dönüşümlerin ortak sabit noktalarının kümesi olsun. $\omega_\omega(x_n), C$ 'deki sınırlı bir $\{x_n\}$ dizisinin tüm zayıf yığılma noktalarının kümesi olsun. C deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi ve her $T \in \Lambda$ için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x_n - x_n\| = 0 \text{ iken } \lim_{n \rightarrow \infty} \|T x_n - x_n\| = 0$$

şartı sağlanırsa $\{T_n\}$ dizisi, Λ ile NST-(I) koşulunu sağlar denir (Nakajo et al. 2007). Nakajo et al. (2009), NST-(I) koşulundan daha genel olan bir koşul tanıtmıştır. C deki her sınırlı $\{x_n\}$ dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x_n - x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0 \text{ iken } \omega_\omega(x_n) \subset \Omega$$

şartı sağlanırsa $\{T_n\}$ dizisi NST * koşulunu sağlar denir.

Ana sonucumuzu kanıtlamak için aşağıdaki lemmalar kullanılmıştır.

Lemma 4.1.1: H bir reel Hilbert uzayı, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve konveks bir fonksiyon, ∇f , L -Lipschitz sürekli ve $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ has alttan yarı sürekli konveks bir fonksiyon olsun. $\{T_n\}$; f ve g fonksiyonlarının ileri-geri operatörü yani $T_n = \text{prox}_{\varphi_n g}(I - \varphi_n \nabla f)$ ve $\varphi_n \in (0, 2/L)$ olmak üzere $\{\varphi_n\}$, φ ye yakınsak olsun. Bu durumda $\{T_n\}$, $T = \text{prox}_{\varphi g}(I - \varphi \nabla f)$ ileri-geri operatörü ile NST-(I) koşulunu sağlar (Bussaban et al. 2020).

Aşağıdaki lemma teoremimizin ispatında kullanılan bazı eşitsizlikleri ifade etmektedir.

Lemma 4.1.2: H bir reel Hilbert uzayı olsun. Bu durumda her $x, y \in H$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

1. $\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 \pm 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$,
2. $\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\langle y, x + y \rangle$,
3. $\|\lambda x + (1 - \lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2 + (1 - \lambda)\|y\|^2 - \lambda(1 - \lambda)\|x - y\|^2$,
4. $\|\alpha x + \beta y\|^2 = \alpha(\alpha + \beta)\|x\|^2 + \beta(\alpha + \beta)\|y\|^2 - \alpha\beta\|x - y\|^2$

(Takahashi 2009).

Lemma 4.1.3: $\{a_k\}$, $\{\delta_k\}$ ve $\{b_k\}$ negatif olmayan diziler olmak üzere:

$$a_{k+1} \leq (1 + \delta_k)a_k + b_k,$$

olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} \delta_k < \infty$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} b_k < \infty$ ise $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ vardır (Tan and Xu 1993).

Lemma 4.1.4: H bir reel Hilbert uzayı olsun. $\{x_k\}$, H 'da bir dizi ve $\Omega \subset H$ boş kümeden farklı bir küme olmak üzere:

1. $x^* \in \Omega$ için $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x^*\|$ limiti mevcut,
2. $\{x_k\}$ dizisinin her zayıf yığılma noktası Ω 'da,

olsun. Bu durumda $\{x_k\}$ dizisi Ω 'daki bir noktaya zayıf yakınsaktır (Moudafi and Al-Shemas 2013).

Lemma 4.1.5: $\{\alpha_k\}$ ve $\{\theta_k\}$ negatif olmayan reel sayıların bir dizisi ve

$$\alpha_{k+1} \leq (1 + \theta_k)\alpha_k + \theta_k\alpha_{k-1}, k \in \mathbb{N}$$

olsun. Bu durumda $K = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ olmak üzere

$$\alpha_{k+1} \leq K \prod_{j=1}^k (1 + 2\theta_j),$$

sağlanır. Üstelik $\sum_{k=1}^{\infty} \theta_k < \infty$ ise $\{\alpha_k\}$ sınırlıdır (Hanjing and Suantai 2020).

Bu bölümün temelini teşkil eden yeni tanımladığımız eylemsiz S^* -algoritması aşağıdaki gibi verilmiştir.

H reel bir Hilbert uzayı, $\{T_n\}$, H üzerinde genişlemeyen dönüşümlerin aileleri olmak üzere

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H \\ \omega_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n T_n \omega_n \\ y_n = (1 - \beta_n)T_n x_n + \beta_n T_n z_n \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n)T_n x_n + \gamma_n T_n y_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan algoritmaya eylemsiz S^* -algoritması denir.

Şimdi eylemsiz S^* -algoritmasının zayıf yakınsanlık teoremini verelim.

Teorem 4.1.6: H reel bir Hilbert uzayı, $\{T_n\}$, NST * koşulunu sağlayan H üzerinde genişlemeyen dönüşümlerin bir ailesi ve $\Omega := \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) \neq \emptyset$ olsun. $\{x_n\}$ dizisi, eylemsiz S^* -algoritması tarafından üretilen dizi olsun. Ayrıca $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$ ve $\{\theta_n\}$; $0 < a \leq \alpha_n \leq a' < 1$, $0 < b \leq \beta_n \leq b' < 1$, $0 < c \leq \gamma_n \leq c' < 1$, $\theta_n \geq 0$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$ koşullarını sağlasın. Bu durumda $K = \max\{\|x_1 - x^*\|, \|x_2 - x^*\|\}$ ve $x^* \in \Omega$ olmak üzere

1. $\|x_{n+1} - x^*\| \leq K \prod_{j=1}^n (1 + 2\theta_j)$ 'dir.
2. $\{x_n\}$ dizisi Ω 'da zayıf yakınsaktır.

İspat: $x^* \in \Omega$ olsun. Bu durumda eylemsiz S^* -algoritmasından

$$\begin{aligned} \|\omega_n - x^*\| &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - x^*\| \\ &\leq \|x_n - x^*\| + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|, \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \|z_n - x^*\| &= \|(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n T_n \omega_n - x^*\| \\ &= \|(1 - \alpha_n)(\omega_n - x^*) + \alpha_n (T_n \omega_n - x^*)\| \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|\omega_n - x^*\| + \alpha_n \|T_n \omega_n - x^*\| \\ &= \|\omega_n - x^*\| \end{aligned} \quad (4.2)$$

ve

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &= \|(1 - \beta_n)T_n x_n + \beta_n T_n z_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \beta_n) \|T_n x_n - x^*\| + \beta_n \|T_n z_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \beta_n) \|x_n - x^*\| + \beta_n \|z_n - x^*\| \end{aligned} \quad (4.3)$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.1), (4.2) ve (4.3) eşitsizliklerini birleştirerek

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\| &= \|(1 - \gamma_n)T_n x_n + \gamma_n T_n y_n - x^*\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|T_n x_n - x^*\| + \gamma_n\|T_n y_n - x^*\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - x^*\| + \gamma_n\|y_n - x^*\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - x^*\| + \gamma_n(1 - \beta_n)\|x_n - x^*\| \\
 &\quad + \gamma_n\beta_n\|\omega_n - x^*\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|x_n - x^*\| + \gamma_n(1 - \beta_n)\|x_n - x^*\| \\
 &\quad + \gamma_n\beta_n\|x_n - x^*\| + \gamma_n\beta_n\theta_n\|x_n - x_{n-1}\| \\
 &= \|x_n - x^*\| + \gamma_n\beta_n\theta_n\|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\leq \|x_n - x^*\| + \theta_n\|x_n - x^*\| + \theta_n\|x_{n-1} - x^*\| \\
 &= (1 + \theta_n)\|x_n - x^*\| + \theta_n\|x_{n-1} - x^*\| \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 4.1.5'den $K = \max\{\|x_1 - x^*\|, \|x_2 - x^*\|\}$ olmak üzere $\|x_{n+1} - x^*\| \leq K \prod_{j=1}^n (1 + 2\theta_j)$ olur. $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n < \infty$ olduğundan dolayı $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n\|x_n - x^*\| < \infty$ dir. (4.4) eşitsizliği ve Lemma 4.1.3'den, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ limiti mevcuttur. Lemma 4.1.2'nin 1. eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
 \|\omega_n - x^*\|^2 &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - x^*\|^2 \\
 &\leq \|x_n - x^*\|^2 + \theta_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 \\
 &\quad + 2\theta_n\|x_n - x_{n-1}\|\|x_n - x^*\| \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

olur. Aynı zamanda Lemma 4.1.2'nin 3. eşitliğinden,

$$\begin{aligned}
 \|z_n - x^*\|^2 &= \|(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n T_n \omega_n - x^*\|^2 \\
 &= \alpha_n \|T_n \omega_n - x^*\|^2 + (1 - \alpha_n) \|\omega_n - x^*\|^2 \\
 &\quad - \alpha_n (1 - \alpha_n) \|T_n \omega_n - \omega_n\|^2 \\
 &\leq \|\omega_n - x^*\|^2 - \alpha_n (1 - \alpha_n) \|T_n \omega_n - \omega_n\|^2
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|y_n - x^*\|^2 &= \|(1 - \beta_n)T_n x_n + \beta_n T_n z_n - x^*\|^2 \\
 &= \beta_n \|T_n z_n - x^*\|^2 + (1 - \beta_n) \|T_n x_n - x^*\|^2 \\
 &\quad - \beta_n (1 - \beta_n) \|T_n z_n - T_n x_n\|^2 \\
 &\leq \beta_n \|z_n - x^*\|^2 + (1 - \beta_n) \|x_n - x^*\|^2
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

elde edilir. Yine Lemma 4.1.2'nin 3. şikkından ve (4.5), (4.6), (4.7) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|(1 - \gamma_n)T_n x_n + \gamma_n T_n y_n - x^*\|^2 \\
 &= \gamma_n \|T_n y_n - x^*\|^2 + (1 - \gamma_n) \|T_n x_n - x^*\|^2 \\
 &\quad - \gamma_n (1 - \gamma_n) \|T_n x_n - T_n y_n\|^2 \\
 &\leq \gamma_n \|y_n - x^*\|^2 + (1 - \gamma_n) \|x_n - x^*\|^2 \\
 &\leq \gamma_n (1 - \beta_n) \|x_n - x^*\|^2 + \gamma_n \beta_n \|z_n - x^*\|^2 \\
 &\quad + (1 - \gamma_n) \|x_n - x^*\|^2 \\
 &\leq (1 - \gamma_n \beta_n) \|x_n - x^*\|^2 + \gamma_n \beta_n \|\omega_n - x^*\|^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\beta_n \gamma_n \alpha_n (1 - \alpha_n) \|T_n \omega_n - \omega_n\|^2 \\
 & \leq (1 + \gamma_n \beta_n) \|x_n - x^*\|^2 + \gamma_n \beta_n \|x_n - x^*\|^2 \\
 & + \gamma_n \beta_n \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\
 & + \gamma_n \beta_n 2\theta_n \|x_n - x_{n-1}\| \|x_n - x^*\| \\
 & -\beta_n \gamma_n \alpha_n (1 - \alpha_n) \|T_n \omega_n - \omega_n\|^2 \\
 & \leq \|x_n - x^*\|^2 + \gamma_n \beta_n \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\
 & + 2\gamma_n \beta_n \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| \|x_n - x^*\| \\
 & -\beta_n \gamma_n \alpha_n (1 - \alpha_n) \|T_n \omega_n - \omega_n\|^2
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
 \beta_n \gamma_n \alpha_n (1 - \alpha_n) \|T_n \omega_n - \omega_n\|^2 & \leq \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\
 & + \gamma_n \beta_n \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\
 & + 2\gamma_n \beta_n \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| \|x_n - x^*\|
 \end{aligned}$$

olur. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\|$ mevcut ve $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| < \infty$ olduğundan dolayı

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n \omega_n - \omega_n\| = 0$$

dır. Aynı zamanda

$$\|\omega_n - x_n\| = \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|$$

ve

$$\begin{aligned}\|T_n x_n - x_n\| &\leq \|x_n - \omega_n\| + \|T_n \omega_n - \omega_n\| + \|T_n \omega_n - T_n x_n\| \\ &\leq 2\|\omega_n - x_n\| + \|T_n \omega_n - \omega_n\|\end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n \omega_n - \omega_n\| = 0$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n - x_n\| = 0$ olduğundan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n x_n - x_n\| = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\|z_n - \omega_n\| &= \|(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n T_n \omega_n - \omega_n\| \\ &= \alpha_n \|T_n \omega_n - \omega_n\|, \\ \|z_n - x_n\| &\leq \|z_n - \omega_n\| + \|\omega_n - x_n\|\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\|y_n - x_n\| &= \|(1 - \beta_n)T_n x_n + \beta_n T_n z_n - x_n\| \\ &\leq \|T_n x_n - x_n\| + \beta_n \|z_n - x_n\|\end{aligned}$$

dır. T_n genişlemeyen dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &= \|(1 - \gamma_n)T_n x_n + \gamma_n T_n y_n - x_n\| \\ &\leq \|T_n x_n - x_n\| + \gamma_n \|y_n - x_n\|\end{aligned}$$

olur. Bu durumda, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$ olur ve $\{T_n\}$, NST* koşulu sağladığından $\omega_\omega(x_n) \subset \Omega$ elde edilir. Sonuç olarak, Lemma 4.1.4'den $\{x_n\}$ dizisi $x^* \in \Omega$ noktasına zayıf yakınsaktır. Bu durumda teoremin ispatı tamamlanır.

4.2. Konveks Minimizasyon Problemine Uygulaması

Bu bölümde eylemsiz S^* -algoritmasının konveks minimizasyon problemine uygulaması verilmiştir.

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve konveks bir fonksiyon, $L > 0$ için ∇f L -Lipschitz sürekli ve $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ has alttan yarı sürekli konveks bir fonksiyon olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\theta_n\}$ dizileri Teorem 4.1.6'daki gibi seçilsin. Bu durumda eylemsiz S^* -algoritmasında $T_n = \text{prox}_{\varphi_n g}(I - \varphi_n \nabla f)$ yazılırsa

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H \\ \omega_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n \text{prox}_{\varphi_n g}(I - \varphi_n \nabla f)\omega_n \\ y_n = (1 - \beta_n)\text{prox}_{\varphi_n g}(I - \varphi_n \nabla f)x_n + \beta_n \text{prox}_{\varphi_n g}(I - \varphi_n \nabla f)z_n \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n)\text{prox}_{\varphi_n g}(I - \varphi_n \nabla f)x_n + \gamma_n \text{prox}_{\varphi_n g}(I - \varphi_n \nabla f)y_n, n \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (4.8)$$

algoritması elde edilir.

Teorem 4.1.6'daki eylemsiz S^* -algoritmasının yakınsaklık sonucu kullanılarak algoritma tarafından üretilen dizinin konveks minimizasyon probleminin bir çözümüne zayıf yakınsak olduğu aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

Teorem 4.2.1: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve konveks bir fonksiyon, $L > 0$ için ∇f L -Lipschitz sürekli, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ has alttan yarı sürekli ve konveks bir fonksiyon ve $\{x_n\}$, Algoritma (4.8) tarafından üretilen bir dizi olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\}, \{\theta_n\}$ dizileri Teorem 4.1.6'daki koşulları sağlasın ve $\varphi_n \in (0, 2/L)$ olmak üzere $\{\varphi_n\}$, φ 'ye yakınsak olsun. Bu durumda $K = \max\{\|x_1 - x^*\|, \|x_2 - x^*\|\}$ ve $x^* \in \text{argmin}(f + g)$ olmak üzere

1. $\|x_{n+1} - x^*\| \leq K \prod_{j=1}^n (1 + 2\theta_j)$ dir.
2. $\{x_n\}$ dizisi $\text{argmin}(f + g)$ 'deki bir noktaya zayıf yakınsaktır.

İspat: $T_n = \text{prox}_{\varphi_n g}(I - \varphi_n \nabla f)$ ve $T = \text{prox}_{\varphi g}(I - \varphi \nabla f)$ olsun. Her n için T ve $\{T_n\}$ genişlemeyen dönüşümler ve $F(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n) = \text{argmin}(f + g)$ olur. Lemma 4.1.1'den $\{T_n\}$, NST* koşulunu sağlar. Bu durumda Teorem 4.1.6'dan istenilen sonuç elde edilir.

4.3. Görüntü İyileştirme Problemine Uygulaması

Bu bölümde görüntü iyileştirme problemini çözmek için Algoritma (4.8) uygulanacak ve bu algoritma NAGA ve FBS algoritmaları ile karşılaştırılacaktır. Tüm algoritmalar Intel (R) Core (TM) i5 CPU ve 8 GB RAM'e sahip bir Dell üzerinde çalışan R2020a'da yazılmıştır.

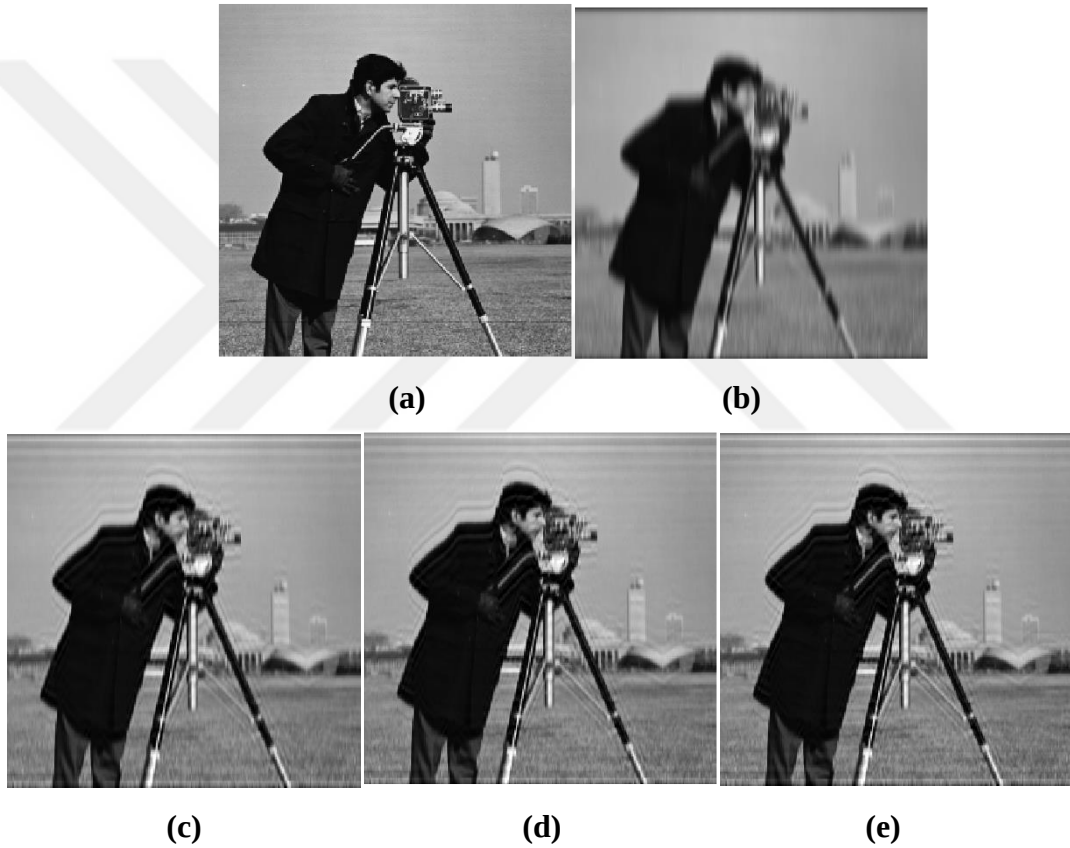
Sayısal karşılaştırmalarda Kameraman test görüntüsü, Gauss bulanıklığı ve rastgele gürültü kullanılmıştır. İlk olarak test görüntüsüne bulanıklık ve gürültü eklenerek dejenere olmuş görüntü elde edilecektir. Daha sonra Algoritma (4.8) kullanılarak orijinal görüntüye yakın bir görüntü elde edilecektir. Yeni elde edilecek görüntülerin kalitesi sinyal gürültü oranı (SNR) değeri ile ölçülecektir. Parametreler:

$$\theta_n = (0,1)^n, \varphi_n = \frac{n}{(n+1)L}, \alpha_n = \beta_n = \gamma_n = 0,99,$$

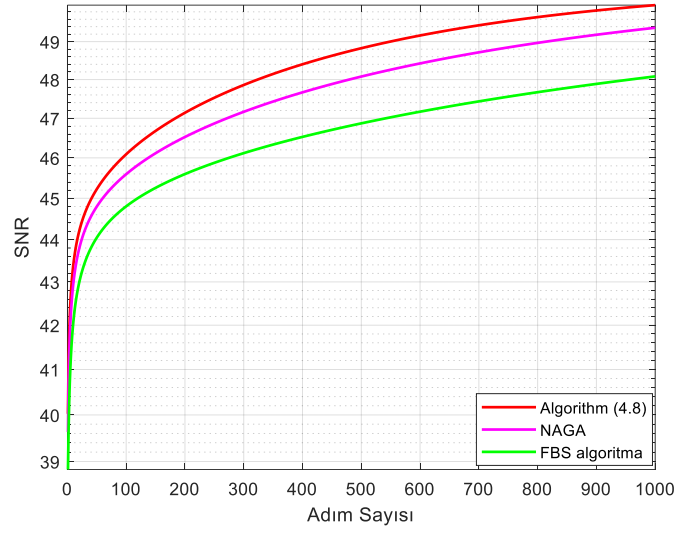
şeklinde alınmıştır ve düzgünleştirme parametresi $\tau = 0,0001$ dır. Çalışılan algoritmaların 1.000. adımındaki Kameraman görüntüsü için sonuçlar aşağıdaki Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Çizelge 4.1'de gösterilmektedir.

Çizelge 4.1. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri

Adım Sayısı	Algoritma (4.8)	NAGA	FBS algoritma
1	40,025981	39,632260	38,832059
5	42,610094	42,137754	41,028188
10	43,498017	43,063994	42,059728
25	44,553841	44,144176	43,252843
50	45,340838	44,910753	44,048204
100	46,231861	45,722967	44,804466
250	47,715666	47,039628	45,878159
500	49,023556	48,280874	46,873621
1.000	50,118079	49,557068	48,086867



Şekil 4.1. (a) Kameraman görüntü (b) Bozulmuş görüntü (c) Algoritma (4.8) (d) NAGA (e) FBS algoritması.



Şekil 4.2. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri grafiği

Şekil 4.1, Şekil 4.2 ve Çizelge 4.1'den Algoritma (4.8)'in SNR değerinin NAGA ve FBS algoritmasından daha yüksek olduğu görülmektedir.

5. YENİ EYLEMSİZ VİSKOZİTE ALGORİTMASI

5.1. Algoritma Tanımı ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremi

Bu bölümde ilk olarak reel Hilbert uzayında genişlemeyen dönüşümlerin sonsuz ailesinin ortak sabit noktasını bulmak için yeni bir eylemsiz viskozite ileri geri ayırma algoritması sunulmuştur. Ardından algoritmanın bazı hafif koşullar altında kuvvetli yakınsaklığı kanıtlanmıştır. Bu bölümde verilen sonuçlar 2023 yılında Journal of Industrial and Management Optimization dergisinde ‘A Modified Inertial Viscosity Algorithm for an Infinite Family of Nonexpansive Mappings and its Application to Image Restoration’ başlıklı makalede yayımlanmıştır.

Algoritma ile ilgili sonuçları vermeden önce bu sonucu ispatlamak için gerekli olan lemmalar aşağıda verilmiştir.

Lemma 5.1.1: H bir reel Hilbert uzayı, $T: H \rightarrow H$ genişlemeyen bir dönüşüm ve $F(T) \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda $I - T$ dönüşümü 0 'da yarı kapalı (demiclosed)'dır, yani, $x_n \rightarrow x \in H$ ve $\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$ iken $x \in F(T)$ 'dir (Goebel and Kirk 1990).

Lemma 5.1.2: $\{s_n\}$ ve $\{\varepsilon_n\}$ negatif olmayan reel sayıların dizisi ve

$$s_{n+1} \leq (1 - \delta_n)s_n + \delta_n r_n + \varepsilon_n,$$

olsun. $\{\delta_n\}$, $(0,1)$ 'de bir dizi ve $\{r_n\}$ reel bir dizi olsun. Eğer

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \infty$,
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty$,
3. $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n \leq 0$,

şartları sağlanırsa $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$ dır (Aoyam et al. 2007; Xu 2002).

Lemma 5.1.3: $\{\theta_n\}$, her $i \in \mathbb{N}$ için $\theta_{n_i} < \theta_{n_{i+1}}$ koşulunu sağlayan $\{\theta_{n_i}\}$ alt dizisi var olacak şekilde sonsuzda azalmayan bir reel sayılar dizisi olsun. $\{\tau(n)\}_{n \geq n_0}$ tamsayı dizisi $\{l \leq n: \theta_l < \theta_{l+1}\} \neq \emptyset$ olacak şekilde aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\tau(n) := \max\{l \leq n: \theta_l < \theta_{l+1}\}, n_0 \in \mathbb{N}.$$

Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

1. $\tau(n_0) \leq \tau(n_0 + 1) \leq \dots$ ve $\tau(n) \rightarrow \infty$,
2. Her $n \geq n_0$ için $\theta_{\tau(n)} \leq \theta_{\tau(n)+1}$ ve $\theta_n \leq \theta_{\tau(n)+1}$ 'dır (Maingé 2008).

Şimdi aşağıdaki varsayımlar altında yeni bir algoritma tanımlanacaktır.

H bir reel Hilbert uzayı, $\{T_n\}$, $T: H \rightarrow H$ genişlemeyen dönüşümü ile NST- (I) şartını sağlayan H üzerinde genişlemeyen dönüşümlerin sonsuz bir ailesi ve $f: H \rightarrow H$ k -daraltan dönüşüm olsun. Ayrıca $\{\eta_n\} \in (0, \infty)$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, ve $\{\gamma_n\}$, $(0,1)$ aralığında $0 < a \leq \alpha_n \leq a' < 1$, $0 < b \leq \beta_n \leq b' < 1$ eşitsizliklerini sağlayan diziler ve $\theta \geq 0$ için

$$\theta_n := \begin{cases} \min\left\{\theta, \frac{\eta_n \gamma_n}{\|x_n - x_{n-1}\|}\right\}, & x_n \neq x_{n-1} \text{ ise,} \\ \theta, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. $x_0, x_1 \in H$ olmak üzere yeni algoritmamız:

$$\begin{cases} z_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n T_n z_n \\ \omega_n = T_n((1 - \alpha_n)T_n x_n + \alpha_n T_n y_n) \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n)T_n \omega_n + \gamma_n f(\omega_n) \end{cases} \quad (5.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Ana teoremi ispatlamadan önce bazı lemmalar ispatlanacaktır.

Lemma 5.1.4: $\{T_n\}$, $T: H \rightarrow H$ genişlemeyen dönüşümü ile NST-(I) şartını sağlayan H üzerinde genişlemeyen dönüşümlerin sonsuz bir ailesi ve $\emptyset \neq F(T) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$ olsun. $f: H \rightarrow H$, k -daraltan dönüşüm ve $\{x_n\}$ dizisi Algoritma (5.1) tarafından üretilen dizi olsun. $\{\eta_n\}$ ve $\{\alpha_n\}$ dizileri aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $0 < a \leq \alpha_n < a' < 1$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$,

Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır.

İspat: $x^* = P_{F(T)}f(x^*)$ olmak üzere $x^* \in F(T)$ olsun. Algoritma (5.1)'den

$$\begin{aligned} \|z_n - x^*\| &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - x^*\| \\ &\leq \|x_n - x^*\| + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|, \end{aligned} \quad (5.2)$$

ve T_n genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\| &= \|(1 - \beta_n)z_n + \beta_n T_n z_n - x^*\| \\ &\leq (1 - \beta_n) \|z_n - x^*\| + \beta_n \|T_n z_n - x^*\| \\ &= (1 - \beta_n) \|z_n - x^*\| + \beta_n \|T_n z_n - T_n x^*\| \\ &\leq \|z_n - x^*\|, \end{aligned} \quad (5.3)$$

olur ve aynı zamanda

$$\begin{aligned} \|\omega_n - x^*\| &= \|T_n((1 - \alpha_n)T_n x_n + \alpha_n T_n y_n) - x^*\| \\ &= \|T_n((1 - \alpha_n)T_n x_n + \alpha_n T_n y_n) - T_n x^*\| \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)T_n x_n + \alpha_n T_n y_n - x^*\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|(1 - \alpha_n)(T_n x_n - x^*) + \alpha_n(T_n y_n - x^*)\| \\
 &= \|(1 - \alpha_n)(T_n x_n - T_n x^*) + \alpha_n(T_n y_n - T_n x^*)\| \\
 &\leq (1 - \alpha_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\|y_n - x^*\|
 \end{aligned} \tag{5.4}$$

elde edilir. (5.2), (5.3), (5.4) ve teoremin 1. şartından,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\| &= \|(1 - \gamma_n)T_n \omega_n + \gamma_n f(\omega_n) - x^*\| \\
 &= \|(1 - \gamma_n)(T_n \omega_n - x^*) + \gamma_n(f(\omega_n) - f(x^*)) + \gamma_n(f(x^*) - x^*)\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|T_n \omega_n - x^*\| + \gamma_n\|f(\omega_n) - f(x^*)\| + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\| \\
 &= (1 - \gamma_n)\|T_n \omega_n - T_n x^*\| + \gamma_n\|f(\omega_n) - f(x^*)\| \\
 &\quad + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n)\|\omega_n - x^*\| + \gamma_n k \|\omega_n - x^*\| + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n(1 - k))[(1 - \alpha_n)\|x_n - x^*\| \\
 &\quad + \alpha_n\|y_n - x^*\|] + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n(1 - k))[(1 - \alpha_n)\|x_n - x^*\| + \alpha_n\|x_n - x^*\| \\
 &\quad + \alpha_n \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|] + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\| \\
 &\leq (1 - \gamma_n(1 - k))\|x_n - x^*\| + a' \gamma_n \cdot \frac{\theta_n}{\gamma_n} \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\quad + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\|
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

bulunur. θ_n 'nın tanımını kullanarak ve teoremin 2. şartından $n \rightarrow \infty$ iken limit alınırsa

$$\frac{\theta_n}{\gamma_n} \|x_n - x_{n-1}\| \rightarrow 0$$

olduğu açıktır. Bu durumda, her $n \geq 1$ için

$$\frac{\theta_n}{\gamma_n} \|x_n - x_{n-1}\| \leq M_1$$

olacak şekilde $M_1 > 0$ sabit sayısı vardır. (5.5)'den

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x^*\| &\leq (1 - \gamma_n(1 - k))\|x_n - x^*\| + \gamma_n(a' M_1 + \|f(x^*) - x^*\|) \\ &= (1 - \gamma_n(1 - k))\|x_n - x^*\| + \gamma_n(1 - k) \left[\frac{a' M_1 + \|f(x^*) - x^*\|}{(1 - k)} \right] \\ &\leq \max \left\{ \|x_n - x^*\|, \frac{a' M_1 + \|f(x^*) - x^*\|}{(1 - k)} \right\} \\ &\quad \vdots \\ &\leq \max \left\{ \|x_1 - x^*\|, \frac{a' M_1 + \|f(x^*) - x^*\|}{(1 - k)} \right\}, \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır ve aynı zamanda $\{z_n\}$, $\{y_n\}$ ve $\{\omega_n\}$ dizileri de sınırlıdır.

Lemma 5.1.4'ün ışığında aşağıdaki teorem elde edilmiştir.

Teorem 5.1.5: $\{T_n\}$, T genişlemeyen dönüşümü ile NST-(I) şartını sağlayan H üzerinde genişlemeyen dönüşümlerin sonsuz ailesi, $\emptyset \neq F(T) \subset \cap_{n=1}^{\infty} F(T_n)$, $f: H \rightarrow H$, k -daraltan dönüşüm, $x_0, x_1 \in H$ keyfi noktalar ve $\{x_n\}$, Algoritma (5.1) tarafından üretilen dizi olsun. $\{\eta_n\} \in (0, \infty)$, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in (0, 1)$ aşağıdaki koşulları sağlayan diziler olsun:

1. $0 < a \leq \alpha_n < a' < 1$,
2. $0 < b \leq \beta_n < b' < 1$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_n = 0$,

$$4. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty.$$

Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $F(T)$ 'nin x^* noktasına yani, $x^* = P_{F(T)}f(x^*)$ 'ye kuvvetli yakınsaktır.

İspat: $x_n \rightarrow x^* = P_{F(T)}f(x^*)$ olduğu gösterilecektir. Gerçekten her $n \geq 1$ için,

$$\begin{aligned} \|z_n - x^*\|^2 &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - x^*\|^2 \\ &\leq \|x_n - x^*\|^2 + 2\theta_n\|x_n - x^*\|\|x_n - x_{n-1}\| \\ &\quad + \theta_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

ve

$$\begin{aligned} \|\omega_n - x^*\|^2 &= \|T_n((1 - \alpha_n)T_n x_n + \alpha_n T_n y_n) - x^*\|^2 \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)T_n x_n + \alpha_n T_n y_n - x^*\|^2 \\ &= \|(1 - \alpha_n)(T_n x_n - T_n x^*) + \alpha_n(T_n y_n - T_n x^*)\|^2 \end{aligned}$$

dır. (5.3), (5.6) ve Lemma 4.1.2'nin 3. şikkından

$$\begin{aligned} \|\omega_n - x^*\|^2 &\leq \alpha_n\|T_n y_n - T_n x^*\|^2 + (1 - \alpha_n)\|T_n x_n - T_n x^*\|^2 \\ &\quad - \alpha_n(1 - \alpha_n)\|T_n y_n - T_n x_n\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|T_n y_n - T_n x^*\|^2 + (1 - \alpha_n)\|T_n x_n - T_n x^*\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|y_n - x^*\|^2 + (1 - \alpha_n)\|x_n - x^*\|^2 \\ &\leq \alpha_n\|z_n - x^*\|^2 + (1 - \alpha_n)\|x_n - x^*\|^2 \\ &\leq \alpha_n[\|x_n - x^*\|^2 + 2\theta_n\|x_n - x^*\|\|x_n - x_{n-1}\|] \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned}
 & +\theta_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2] + (1 - \alpha_n)\|x_n - x^*\|^2 \\
 & = \|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n\theta_n\|x_n - x^*\|\|x_n - x_{n-1}\| \\
 & +\theta_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

bulunur. Yine Lemma 4.1.2'nin 2. ve 3. şıklarını kullanarak

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|^2 & = \|(1 - \gamma_n)T_n\omega_n + \gamma_nf(\omega_n) - x^*\|^2 \\
 & \leq \|(1 - \gamma_n)(T_n\omega_n - x^*) + \gamma_n(f(\omega_n) - f(x^*))\|^2 \\
 & \quad + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\|^2 \\
 & \leq \|(1 - \gamma_n)(T_n\omega_n - x^*) + \gamma_n(f(\omega_n) - f(x^*))\|^2 \\
 & \quad + 2\langle \gamma_n(f(x^*) - x^*), x_{n+1} - x^* \rangle \\
 & \leq (1 - \gamma_n)\|\omega_n - x^*\|^2 + \gamma_n\|f(\omega_n) - f(x^*)\|^2 \\
 & \quad - \gamma_n(1 - \gamma_n)\|f(\omega_n) - f(x^*) - T_n\omega_n + x^*\|^2 \\
 & \quad + 2\langle \gamma_n(f(x^*) - x^*), x_{n+1} - x^* \rangle \\
 & \leq (1 - \gamma_n)\|\omega_n - x^*\|^2 + \gamma_n k^2 \|\omega_n - x^*\|^2 \\
 & \quad + 2\gamma_n\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle
 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda (5.8)'den

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|^2 & \leq (1 - \gamma_n(1 - k^2))\|\omega_n - x^*\|^2 \\
 & \quad + 2\gamma_n\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\
 & = (1 - \gamma_n(1 - k^2))[\|x_n - x^*\|^2 \\
 & \quad + 2\alpha_n\theta_n\|x_n - x^*\|\|x_n - x_{n-1}\|
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\theta_n^2\|x_n - x_{n-1}\|^2] + 2\gamma_n\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\
 & \leq (1 - \gamma_n(1 - k^2))\|x_n - x^*\|^2 + \alpha_n\theta_n\|x_n - x_{n-1}\| \\
 & \times (2\|x_n - x^*\| + \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|) \\
 & + 2\gamma_n\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\theta_n\|x_n - x_{n-1}\| = \gamma_n \cdot \frac{\theta_n}{\gamma_n} \|x_n - x_{n-1}\| \rightarrow 0 \tag{5.10}$$

olduğundan her $n \geq 1$ için

$$\theta_n\|x_n - x_{n-1}\| \leq M_2,$$

olacak şekilde $M_2 > 0$ sabit sayısı vardır. (5.9)'dan

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|^2 & \leq (1 - \gamma_n(1 - k^2))\|x_n - x^*\|^2 + 3M_3a' \theta_n\|x_n - x_{n-1}\| \\
 & + 2\gamma_n\langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \\
 & \leq (1 - \gamma_n(1 - k^2))\|x_n - x^*\|^2 + \gamma_n(1 - k^2) \\
 & \times \left[\frac{3M_3a'}{(1-k^2)} \cdot \frac{\theta_n}{\gamma_n} \|x_n - x_{n-1}\| \frac{2}{(1-k^2)} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \right]
 \end{aligned}$$

olur. Burada $M_3 = \sup_{n \geq 1} \{\|x_n - x^*\|, M_2\}$ dir. Yukarıdaki eşitsizlikte

$$s_n = \|x_n - x^*\|^2, \delta_n = \gamma_n(1 - k^2)$$

ve

$$r_n = \frac{3M_3 a' \theta_n}{(1-k^2)\gamma_n} \|x_n - x_{n-1}\| + \frac{2}{(1-k^2)} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle$$

alınırsa bu durumda her $n \geq 1$ için,

$$s_{n+1} \leq (1 - \delta_n)s_n + \delta_n r_n, \quad (5.11)$$

olduğu görülür. Şimdi ispatı tamamlamak için aşağıdaki iki durum ele alınacaktır.

İlk olarak $\{\|x_n - x^*\|\}_{n \geq n_0}$ dizisi artmayan olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var olsun. $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan $\{\|x_n - x^*\|\}$ dizisi yakınsaktır. Teoremin 4. şartını kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \infty$ elde edilir. Şimdi,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \leq 0$$

olduğu gösterilecektir.

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\|^2 &= \|(1 - \beta_n)z_n + \beta_n T_n z_n - x^*\|^2 \\ &= \|(1 - \beta_n)(z_n - x^*) + \beta_n(T_n z_n - x^*)\|^2 \\ &\leq \beta_n \|T_n z_n - x^*\|^2 + (1 - \beta_n) \|z_n - x^*\|^2 \\ &\quad - \beta_n(1 - \beta_n) \|T_n z_n - z_n\|^2 \\ &\leq \|z_n - x^*\|^2 - \beta_n(1 - \beta_n) \|T_n z_n - z_n\|^2 \end{aligned} \quad (5.12)$$

dır. (5.6) ve (5.12) eşitsizliklerinden ve Lemma 4.1.2'nin 3. şikkından,

$$\begin{aligned} \|\omega_n - x^*\|^2 &\leq \alpha_n \|T_n y_n - T_n x^*\|^2 + (1 - \alpha_n) \|T_n x_n - T_n x^*\|^2 \\ &\quad - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|T_n y_n - T_n x_n\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \alpha_n \|z_n - x^*\|^2 - \alpha_n \beta_n (1 - \beta_n) \|T_n z_n - z_n\|^2 \\
 &+ (1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\|^2 \\
 &\leq \alpha_n \|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n \theta_n \|x_n - x^*\| \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &+ \alpha_n \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 + (1 - \alpha_n) \|x_n - x^*\|^2 \\
 &- \alpha_n \beta_n (1 - \beta_n) \|T_n z_n - z_n\|^2 \\
 &\leq \|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n \theta_n \|x_n - x^*\| \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &+ \alpha_n \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 - \alpha_n \beta_n (1 - \beta_n) \|T_n z_n - z_n\|^2 \quad (5.13)
 \end{aligned}$$

bulunur. (5.13) ve yine Lemma 4.1.2'nin 3. şikkından,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|^2 &= \|(1 - \gamma_n)(T_n \omega_n - x^*) + \gamma_n(f(\omega_n) - x^*)\|^2 \\
 &\leq \gamma_n \|f(\omega_n) - x^*\|^2 + (1 - \gamma_n) \|T_n \omega_n - T_n x^*\|^2 \\
 &\quad - \gamma_n (1 - \gamma_n) \|f(\omega_n) - T_n \omega_n\|^2 \\
 &\leq \gamma_n \|f(\omega_n) - x^*\|^2 + (1 - \gamma_n) \|\omega_n - x^*\|^2 \\
 &\leq \gamma_n \|f(\omega_n) - x^*\|^2 + (1 - \gamma_n) \\
 &\quad \times [\|x_n - x^*\|^2 + 2\alpha_n \theta_n \|x_n - x^*\| \|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\quad + \alpha_n \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|^2 \\
 &\quad - (1 - \gamma_n) \alpha_n \beta_n (1 - \beta_n) \|T_n z_n - z_n\|^2] \\
 &= \gamma_n \|f(\omega_n) - x^*\|^2 + (1 - \gamma_n) \|x_n - x^*\|^2 \\
 &\quad + (1 - \gamma_n) \alpha_n \theta_n \|x_n - x_{n-1}\| [2\|x_n - x^*\| \\
 &\quad + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|] - (1 - \gamma_n) \alpha_n \beta_n (1 - \beta_n) \|T_n z_n - z_n\|^2
 \end{aligned}$$

yazılır. Her $n > 1$ için,

$$\begin{aligned}
 (1 - \gamma_n)\alpha_n\beta_n(1 - \beta_n)\|T_n z_n - z_n\|^2 &\leq \gamma_n(\|f(\omega_n) - x^*\|^2 - \|x_n - x^*\|^2) \\
 &\quad + \|x_n - x^*\|^2 - \|x_{n+1} - x^*\|^2 \\
 &\quad + (1 - \gamma_n)\alpha_n\theta_n\|x_n - x_{n-1}\| \\
 &\quad \times [2\|x_n - x^*\| + \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|]
 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu durumda teoremin 1., 2. ve 3. şartlarından ve $\{\|x_n - x^*\|\}$ ve $\{\theta_n\|x_n - x_{n-1}\|\}$ dizilerinin yakınsaklığından $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\|T_n z_n - z_n\| \rightarrow 0 \quad (5.14)$$

elde edilir. $\{T_n\}$, T ile NST-(I) şartını sağladığından $n \rightarrow \infty$ için

$$\|T z_n - z_n\| \rightarrow 0$$

olur. Aynı zamanda

$$\|z_n - x_n\| = \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - x_n\| = \theta_n\|x_n - x_{n-1}\| \rightarrow 0 \quad (5.15)$$

dır. (5.14) ve (5.15)'den,

$$\begin{aligned}
 \|y_n - x_n\| &= \|(1 - \beta_n)z_n + \beta_n T_n z_n - x_n\| \\
 &\leq (1 - \beta_n)\|z_n - x_n\| + \beta_n\|z_n - T_n z_n\|,
 \end{aligned}$$

yazılır ve bu durumda $n \rightarrow \infty$ için

$$\|y_n - x_n\| \rightarrow 0 \quad (5.16)$$

elde edilir. Aynı zamanda (5.14), (5.15) ve (5.16)'dan

$$\begin{aligned} \|\omega_n - z_n\| &= \|\omega_n - z_n + T_n z_n - T_n z_n\| \\ &\leq \|\omega_n - T_n z_n\| + \|T_n z_n - z_n\| \\ &= \|T_n((1 - \alpha_n)T_n x_n + \alpha_n T_n y_n) - T_n z_n\| + \|T_n z_n - z_n\| \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)T_n x_n + \alpha_n T_n y_n - z_n\| + \|T_n z_n - z_n\| \\ &\leq \alpha_n \|y_n - x_n\| + \|T_n x_n - z_n\| + \|T_n z_n - z_n\| \\ &\leq \alpha_n \|y_n - x_n\| + \|x_n - z_n\| + 2\|T_n z_n - z_n\|, \end{aligned}$$

olur. Buradan $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\|\omega_n - z_n\| \rightarrow 0 \quad (5.17)$$

dır. (5.14) ve (5.17)'den

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - z_n\| &\leq \|x_{n+1} - T_n z_n\| + \|z_n - T_n z_n\| \\ &= \|(1 - \gamma_n)T_n \omega_n + \gamma_n f(\omega_n) - T_n z_n\| + \|T_n z_n - z_n\| \\ &\leq \gamma_n \|f(\omega_n) - T_n \omega_n\| + \|T_n \omega_n - T_n z_n\| + \|T_n z_n - z_n\| \\ &\leq \gamma_n \|f(\omega_n) - T_n \omega_n\| + \|\omega_n - z_n\| + \|T_n z_n - z_n\| \end{aligned}$$

olduğundan $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\|x_{n+1} - z_n\| \rightarrow 0 \quad (5.18)$$

bulunur. Bu durumda (5.15) ve (5.18)'den

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|x_{n+1} - z_n\| + \|z_n - x_n\| \rightarrow 0$$

dır. Şimdi $x_n \rightarrow x^*$ olduğu gösterilecektir.

$$v = \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n_i+1} - x^* \rangle$$

olacak şekilde $\{x_n\}$ 'nin bir $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi vardır. (5.14) ve (5.15)'den

$$\begin{aligned} \|x_n - Tx_n\| &= \|x_n - z_n + z_n + Tz_n - Tz_n - Tx_n\| \\ &\leq \|z_n - x_n\| + \|Tz_n - z_n\| + \|Tz_n - Tx_n\| \\ &\leq 2\|z_n - x_n\| + \|Tz_n - z_n\| \end{aligned}$$

olmasından dolayı $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\|x_n - Tx_n\| \rightarrow 0$$

elde edilir. $\|x_{n+1} - x_n\| \rightarrow 0$ ve $x_{n_i} \rightarrow t$ olduğundan $x_{n_i+1} \rightarrow t$ dir. Bu durumda Lemma 5.1.1'den $t \in F(T)$ sonucuna varılır. Ayrıca $x^* = P_{F(T)}f(x^*)$ ve (3.1) metrik izdüşüm operatörü özelliğinden

$$v = \lim_{i \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n_i+1} - x^* \rangle = \langle f(x^*) - x^*, t - x^* \rangle \leq 0$$

yazılır. Bu durumda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle \leq 0 \quad (5.19)$$

olduğu görülür. (5.10) ve (5.19) den $\limsup_{n \rightarrow \infty} r_n \leq 0$ elde edilir. Buradan $x_n \rightarrow x^*$ dır.

Şimdi ikinci durumu düşünelim. $n_0 \in \mathbb{N}$ için, $\{\|x_n - x^*\|\}_{n \geq n_0}$ dizisi monoton azalmayan ve her $n \in \mathbb{N}$ için $\Theta_n = \|x_n - x^*\|^2$ olsun. Bu durumda her $j \in \mathbb{N}$ için $\Theta_{n_j} \leq \Theta_{n_{j+1}}$ olacak şekilde $\{\Theta_n\}$ 'nin $\{\Theta_{n_j}\}$ alt dizisi vardır. Böylece $\tau: \{n: n \geq n_0\} \rightarrow \mathbb{N}$ olmak üzere:

$$\tau(n) := \max\{l \in \mathbb{N}: l \leq n, \Theta_l \leq \Theta_{l+1}\}$$

dönüşümünü tanımlayabiliriz. τ 'nin azalan bir dizi olduğu açıktır. Bu durumda Lemma 5.1.3'den her $n \geq n_0$ için $\Theta_{\tau(n)} \leq \Theta_{\tau(n)+1}$ olur. Yani,

$$\|x_{\tau(n)} - x^*\| \leq \|x_{\tau(n)+1} - x^*\|$$

dır. İlk duruma benzer olarak

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_{\tau(n)} - x^*\|^2 \leq 0$$

elde edilir. Bu durumda $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\|x_{\tau(n)} - x^*\|^2 \rightarrow 0 \text{ ve } \|x_{\tau(n)+1} - x^*\| \rightarrow 0 \quad (5.20)$$

olur. (5.20) ve Lemma 5.1.3'den $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\|x_n - x^*\| \leq \|x_{\tau(n)+1} - x^*\| \rightarrow 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\{x_n\}$ dizisi x^* noktasına kuvvetli yakınsaktır ve bu ispatı tamamlar.

Şimdi Algoritma (5.1)'in konveks minimizasyon, varyasyonel eşitsizlik, genelleştirilmiş denge, monoton kapsama ve görüntü iyileştirme problemlerine uygulamaları verilecektir.

5.2. Monoton Kapsama Problemine Uygulaması

H bir reel Hilbert uzay ve $f: H \rightarrow H$, k -daraltan dönüşüm olsun. $A: H \rightarrow H$, η -ters kuvvetli monoton bir operatör ve $B: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton operatör olmak üzere Algoritma (5.1)'de $T_n = J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)$ yazılırsa,

$$\begin{cases} z_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)z_n \\ \omega_n = J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A) \left((1 - \alpha_n) J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)x_n + \alpha_n J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)y_n \right) \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n) J_{\lambda_n}^B(I - \lambda_n A)\omega_n + \gamma_n f(\omega_n) \end{cases} \quad (5.21)$$

şeklindeki algoritma elde edilir.

A η -ters kuvvetli monoton bir operatör, B maksimal monoton bir operatör ve $\lambda \in (0, 2\eta)$ olmak üzere $J_{\lambda}^B(I - \lambda A)$ dönüşümünün genişlemeyen dönüşüm olduğu iyi bilinmektedir. Ayrıca Lemma 4.1.1'den $J_{\lambda}^B(I - \lambda A)$ NST-(I) şartını sağlar. Bu durumda Teorem 5.1.5'in sonucu olarak aşağıdaki teorem verilmiştir.

Teorem 5.2.1: H bir reel Hilbert uzay ve $f: H \rightarrow H$ k -daraltan dönüşüm olsun. $A: H \rightarrow H$, η -ters kuvvetli monoton bir operatör, $B: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton operatör, $\Omega = (A + B)^{-1}(0) \neq \emptyset$ ve $\{\lambda_n\} \in (0, 2\eta)$ olmak üzere $\lambda_n \rightarrow \lambda$ olsun. $\{x_n\}$, Algoritma (5.21) tarafından üretilen dizi ve tüm parametreler Teorem 5.1.5'deki gibi seçilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi Ω 'nın x^* noktasına, yani, $x^* = P_{\Omega}f(x^*)$ 'ye kuvvetli yakınsaktır.

Aşağıda Algoritma (5.21) tarafından üretilen dizinin monoton kapsama probleminin çözümüne yakınsaması ile ilgili sayısal bir örnek verilmiştir.

Örnek 5.2.2: $A: l_2 \rightarrow l_2, B: l_2 \rightarrow l_2$ ve $x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \in l_2$ olmak üzere

$$Ax = 3x + (1, 2, 3, 0, \dots)$$

ve

$$Bx = 8x,$$

olsun. Bu durumda A , $1/3$ -ters kuvvetli monoton ve B maksimal monoton operatördür. Gerçekten, $x, y \in l_2$ için

$$\langle x - y, Ax - Ay \rangle = \langle x - y, 3x - 3y \rangle = 3\|x - y\|_{l_2}^2 \geq \frac{1}{3}\|Ax - Ay\|_{l_2}^2$$

ve

$$\langle x - y, Bx - By \rangle = \langle x - y, 8x - 8y \rangle = 8\|x - y\|_{l_2}^2 \geq 0,$$

dır. Teorem 3.2.5'den her $\lambda_n > 0$ için $R(I + \lambda_n B) = l_2$ elde edilir. Doğrudan bir hesaplama ile

$$\begin{aligned} J_{\lambda_n}^B(x - \lambda_n Ax) &= (I + \lambda_n A)^{-1}(x - \lambda_n Ax) \\ &= \frac{1-3\lambda_n}{1+8\lambda_n}x - \frac{\lambda_n}{1+8\lambda_n}(1, 2, 3, 0, \dots) \end{aligned}$$

bulunur. Yani kapsama probleminin çözümü

$$(A + B)^{-1}(0) = (-0,0909, -0,1818, -0,2727, 0, \dots)$$

dır. Algoritma (5.21)'de, $x_1 = (-3, -5, -1, 0, \dots)$, $\alpha_n = \frac{1}{10^8}$, $\beta_n = \frac{1}{n+1}$, $\gamma_n = \frac{1}{(n+1)^6}$, $\eta_n = \frac{10}{n}$, $f(x) = 0,1x$ ve $\theta = 0,99$ alınırsa

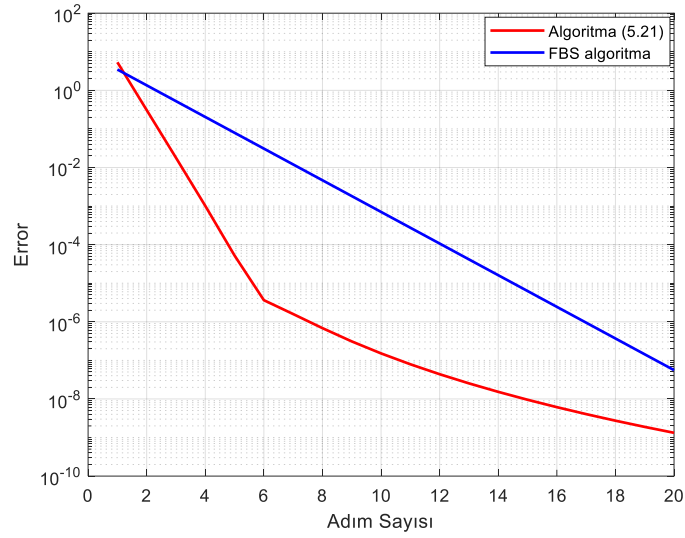
$$\theta_n := \begin{cases} \min \left\{ 0,99, \frac{10}{n(n+1)\|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & x_n \neq x_{n-1}, \\ 0,99, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere FBS ve Algoritma (5.21) kullanılarak elde edilen sayısal sonuçlar aşağıda verilmiştir.

Çizelge 5.1. Algoritma (5.21) için Örnek 5.2.2'deki sayısal sonuçlar

Adım Sayısı	x_n	$\ x_{n+1} - x_n\ $
1	$(-3,0000, -5,0000, -1,0000, 0, \dots)$	.
2	$(-0,2587, -0,4593, -0,3112, 0, \dots)$	5,348508328299641
3	$(-0,1007, -0,1979, -0,2746, 0, \dots)$	0,307697307985137
4	$(-0,0915, -0,1827, -0,2728, 0, \dots)$	0,017842101753803
5	$(-0,0909, -0,1819, -0,2727, 0, \dots)$	0,001012672623884
6	$(-0,0909, -0,1819, -0,2727, 0, \dots)$	5,20922627048853e - 05
7	$(-0,0909, -0,1819, -0,2727, 0, \dots)$	3,63409477195576e - 06
8	$(-0,0909, -0,1819, -0,2727, 0, \dots)$	1,586876496103217e - 06
9	$(-0,0909, -0,1819, -0,2727, 0, \dots)$	6,846782832692272e - 07
10	$(-0,0909, -0,1819, -0,2727, 0, \dots)$	3,101627715539751e - 07
⋮	⋮	⋮
20	$(-0,0909, -0,1819, -0,2727, 0, \dots)$	1,88268019556989e - 09

Çizelge 5.1'deki sayısal sonuçlardan görüleceği üzere dizi 20. Adımda çözüme yakınsamıştır. Aşağıda Algoritma (5.21) ile ileri-geri ayırma (FBS) algoritmalarının performansları karşılaştırılmıştır.



Şekil 5.1. Algoritma (5.21) ve FBS algoritmasının hata kıyaslaması

5.3. Konveks Minimizasyon Problemine Uygulaması

Algoritma (5.1)'de $T_n = J_{\lambda}^{\partial g}(I - \lambda \nabla h)x^*$ yazılırsa

$$\begin{cases} z_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n J_{\lambda_n}^{\partial g}(I - \lambda_n \nabla h)z_n \\ \omega_n = J_{\lambda_n}^{\partial g}(I - \lambda_n \nabla h) \left((1 - \alpha_n) J_{\lambda_n}^{\partial g}(I - \lambda_n \nabla h)x_n + \alpha_n J_{\lambda_n}^{\partial g}(I - \lambda_n \nabla h)y_n \right) \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n) J_{\lambda_n}^{\partial g}(I - \lambda_n \nabla h)\omega_n + \gamma_n f(\omega_n) \end{cases} \quad (5.22)$$

şeklindeki algoritma elde edilir.

Aşağıdaki teorem ispatsız bir şekilde verilmiştir.

Teorem 5.3.1: H bir reel Hilbert uzay ve $f: H \rightarrow H$ k -daraltan dönüşüm olsun. $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve konveks bir fonksiyon, ∇h , η -ters kuvvetli monoton, $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ has alttan yarı sürekli ve konveks bir fonksiyon, $\Pi = \operatorname{argmin}(f + g) \neq \emptyset$ ve $\{\lambda_n\} \in (0, 2\eta)$ olmak üzere $\lambda_n \rightarrow \lambda$ olsun. $\{x_n\}$, Algoritma (5.22) tarafından üretilen dizi ve tüm parametreler Teorem 5.1.5'deki gibi seçilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi konveks minimizasyon problemin çözümü olan yani, $x^* = P_{\Pi}f(x^*)$ noktasına kuvvetli yakınsaktır.

5.4. Varyasyonel Eşitsizlik Problemine Uygulaması

C , H Hilbert uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks alt kümesi $\eta > 0$ için $A: H \rightarrow H$, η –ters kuvvetli monoton operatör ve $f: H \rightarrow H$, k -daraltan dönüşüm olmak üzere Algoritma (5.1)’de $T_n = P_C(I - \lambda_n A)$ yazılırsa

$$\begin{cases} z_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n P_C(I - \lambda_n A)z_n \\ \omega_n = P_C(I - \lambda_n A)((1 - \alpha_n)P_C(I - \lambda_n A)x_n + \alpha_n P_C(I - \lambda_n A)y_n) \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n)P_C(I - \lambda_n A)\omega_n + \gamma_n f(\omega_n) \end{cases} \quad (5.23)$$

şeklindeki algoritma elde edilir.

$P_C(I - \lambda_n A)$ dönüşümünün A ’nın ters kuvvetli monoton dönüşüm olması durumunda genişlemeyen bir dönüşüm olduğu iyi bilinmektedir. Aynı zamanda $J_\lambda^{\partial i_C} = P_C$ eşitliğini kullanarak Lemma 4.1.1’den $P_C(I - \lambda_n A)$ NST-(I) şartını sağlar. Bu durumda Terom 5.1.5’den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.4.1: C , H Hilbert uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks alt kümesi, $\eta > 0$ için $A: H \rightarrow H$, η –ters kuvvetli monoton operatör, $VI(C, A) \neq \emptyset$, $f: H \rightarrow H$, k -daraltan dönüşüm ve $\{\lambda_n\} \in (0, 2\eta)$ olmak üzere $\lambda_n \rightarrow \lambda$ olsun. $\{x_n\}$, Algoritma (5.23) tarafından üretilen dizi ve tüm parametreler Teorem 5.1.5’deki gibi seçilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi varyasyonel eşitsizlik probleminin $x^* = P_{VI(C, A)} f(x^*)$ çözümüne kuvvetli yakınsaktır.

5.5. Genelleştirilmiş Denge Problemine Uygulaması

C , H Hilbert uzayının boş kümeden farklı kapalı konveks alt kümesi $\eta > 0$ için $A: H \rightarrow H$, η –ters kuvvetli monoton operatör, $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, (1)-(4) şartlarını sağlayan bifonksiyon olsun. Teorem 5.1.5’de $B = A_F$ yazarak

$$\begin{cases} z_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = (1 - \beta_n)z_n + \beta_n J_{\lambda_n}^{A_F}(I - \lambda_n A)z_n \\ \omega_n = J_{\lambda_n}^{A_F}(I - \lambda_n A) \left((1 - \alpha_n) J_{\lambda_n}^{A_F}(I - \lambda_n A)x_n + \alpha_n J_{\lambda_n}^{A_F}(I - \lambda_n A)y_n \right) \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n) J_{\lambda_n}^{A_F}(I - \lambda_n A)\omega_n + \gamma_n f(\omega_n) \end{cases} \quad (5.24)$$

şeklinde tanımlanan algoritma ve Lemma 3.7.2'den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 5.5.1: C, H Hilbert uzayının boş kümeden farklı, kapalı ve konveks alt kümesi, $\eta > 0$ için $A: H \rightarrow H$, η -ters kuvvetli monoton operatör, $F: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, (1)-(4) şartlarını sağlayan bifonksiyon ve $\Gamma = (A + A_F)^{-1}(0) \neq \emptyset$ olsun. $f: H \rightarrow H$, k -daraltan dönüşüm, $\{\lambda_n\} \in (0, 2\eta)$ olmak üzere $\lambda_n \rightarrow \lambda$, $\{x_n\}$ Algoritma (5.24) tarafından üretilen dizi olmak üzere tüm parametreler Teorem 5.1.5'deki gibi seçilsin. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $(A + A_F)^{-1}(0)$ 'nın x^* noktasına, yani, $x^* = P_\Gamma f(x^*)$ 'ye kuvvetli yakınsaktır.

5.6. Görüntü İyileştirme Problemine Uygulaması

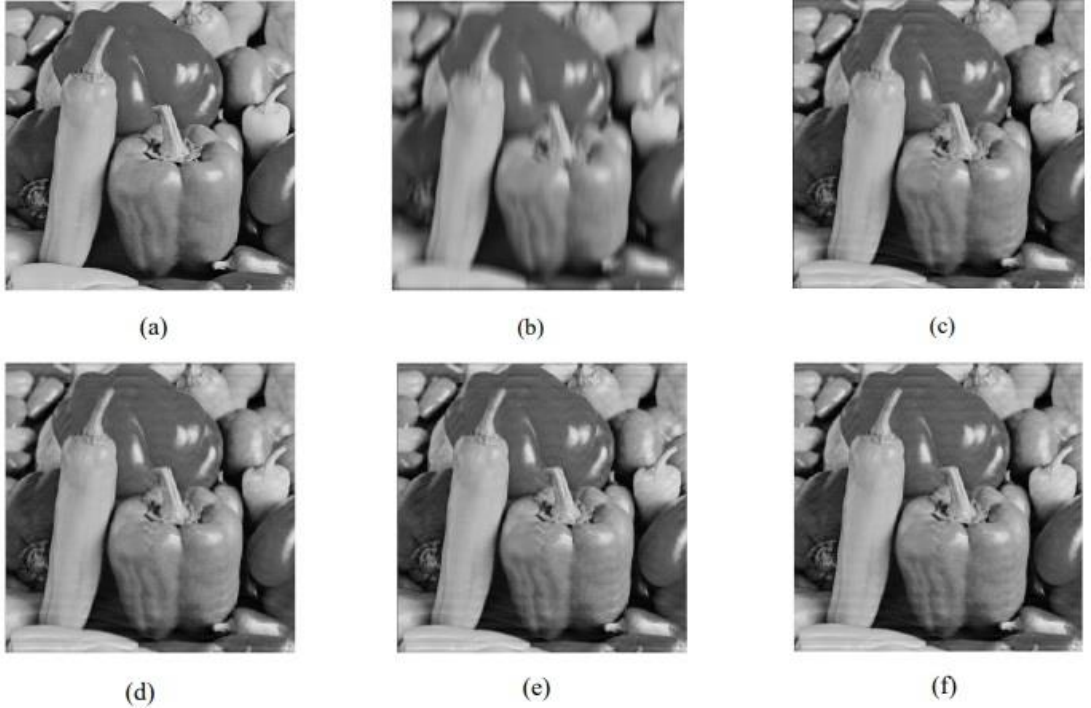
Bu bölümde görüntü iyileştirme problemini çözmek için Algoritma (5.22) kullanılacak ve aynı zamanda tanımlanan algoritmanın etkinliği, ileri-geri ayırma algoritması (FBS), Algoritma (2.5), AVFB, FBMMMA ve NAGA ile karşılaştırılacaktır.

Bu bölümde yapacağımız tüm karşılaştırmalarda Lena, Biber ve Kameraman test görüntüleri kullanılacaktır. Burada önce ele alacağımız test görüntülerine bulanıklık ve gürültü ekleyerek dejenere görüntü elde edilecektir. Görüntüye eklenecek hareket bulanıklığı için MATLAB da fspecial('motion', 15, 60) fonksiyonu kullanılacak ayrıca rastgele gürültü eklenecektir. Daha sonra Algoritma (5.22) kullanılarak orijinal görüntüye yakın bir görüntü elde edilmeye çalışılacaktır. Yeni elde edilecek görüntülerin kalitesi sinyal gürültü oranı (SNR) ile ölçülecektir.

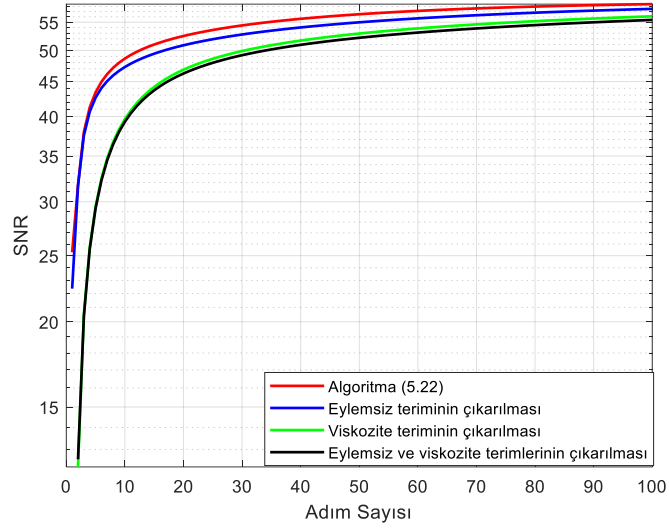
İlk olarak Algoritma (5.22)'de eylemsizlik ve viskozite terimlerinin etkinliği araştırılacaktır. Teorem 5.3.1'de, $\lambda_n = \frac{1}{L}$, $\beta_n = \gamma_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \frac{1}{2}$, $\eta_n = \frac{10^{20}}{n}$, $f(x) = 0,99x$ olsun. $\theta = 0,99$ alınırsa,

$$\theta_n := \begin{cases} \min \left\{ 0,99, \frac{10^{20}}{n^2 \|x_n - x_{n-1}\|} \right\}, & x_n \neq x_{n-1}, \\ 0,99, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

elde edilir. Bu durumda elde edilen sonuçlar Şekil 5.2, Şekil 5.3 ve Çizelge 5.2’de verilmiştir.



Şekil 5.2. (a) Biber görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) Eylemsiz ve viskozite terimsiz Algoritma (5.22) (d) Viskozite terimsiz Algoritma (5.22) (e) Eylemsiz terimsiz Algoritma (5.22) (f) Algoritma (5.22).



Şekil 5.3. Biber görüntüsü için SNR değerlerinin grafiği

Çizelge 5.2. Biber görüntüsü için SNR değerleri

Adım Sayısı	Algoritma(5.22)	Eylemsizlik terimsiz Algoritma (5.22)	Viskozite terimsiz Algoritma (5.22)	Eylemsizlik ve viskozite terimsiz Algoritma (5.22)
1	25,292058	22,368991	0,000000	0,000000
5	43,403404	42,632692	29,530821	29,345449
10	48,643235	47,275684	39,653579	39,294982
20	52,490425	50,871112	46,844475	46,247206
30	54,397355	52,757836	49,890838	49,194864
40	55,626238	54,027441	51,688664	50,950629
50	56,494179	54,971150	52,927414	52,174183
70	57,613901	56,302456	54,587938	53,845230
80	57,977812	56,788446	55,183919	54,458482
90	57,977812	57,190757	55,679869	54,976793
100	58,458689	57,526028	56,098940	55,421989

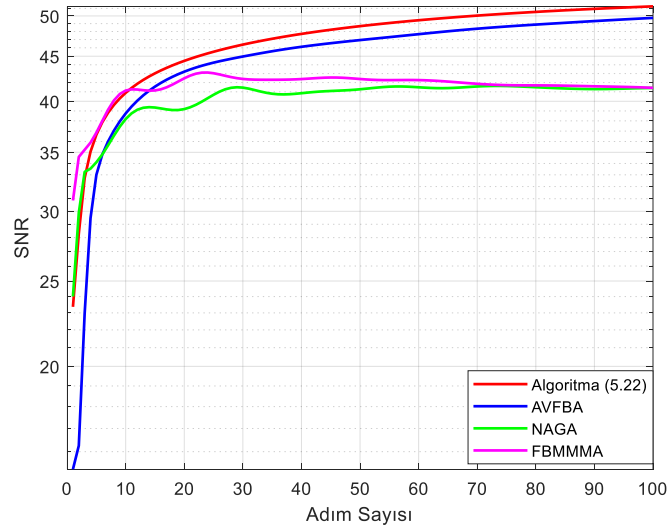
Sayısal sonuçlar viskozite ve eylemsizlik terimlerinin görüntü iyileştirmede daha kaliteli sonuçlar elde etmemizi sağladığını göstermektedir.

5. YENİ EYLEMSİZ VİSKOZİTE ALGORİTMASI

Aşağıda genişlemeyen dönüşümlerin sonsuz ailesi için Algoritma (5.22), AVFB, FBMMMA ve NAGA algoritmaları ile karşılaştırılmıştır. Parametreler $\lambda_n = \frac{n}{L(n+1)}$, $\beta_n = \gamma_n = \rho_n = \sigma_n = \frac{1}{n}$, $\alpha_n = \delta_n = \varphi_n = \frac{1}{2}$, $\varrho_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$, $\eta_n = \frac{10^{20}}{n}$, $f(x) = 0,7x$ şeklinde seçilmiştir. Bu durumda sonuçlar Şekil 5.4, Şekil 5.5 ve Çizelge 5.3’de verilmiştir.



Şekil 5.4. (a) Kameraman görüntü (b) Bozulmuş görüntü (c) NAGA (d) FBMMMA (e) AVFBA (f) Algoritma (5.22).



Şekil 5.5. Kameraman görüntüsü için SNR değerlerinin grafiği

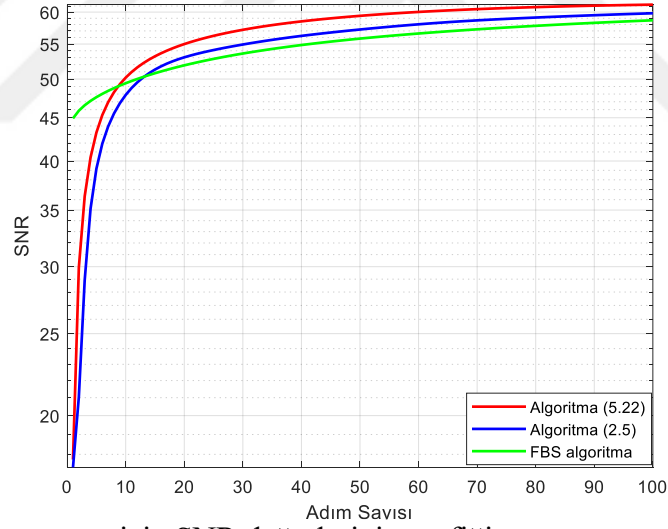
Çizelge 5.3. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri

Adım Sayısı	Algoritma(5.22)	AVFBA	FBMMMA	NAGA
1	23,367583	15,283348	30,855847	24,007789
5	36,649323	33,006604	36,84145	34,103671
10	40,897499	38,751068	41,140872	38,183572
20	44,460392	43,223013	42,465793	39,187671
30	46,393900	44,970841	42,365621	41,453228
40	47,709275	46,126490	42,353539	40,851389
50	48,684256	46,944487	42,355574	41,273638
70	50,040212	48,358723	41,786430	41,576294
80	50,525856	48,881213	41,589025	41,496965
90	50,924759	49,328276	41,462924	41,294600
100	51,256042	49,738586	41,258755	41,418902

Son olarak Algoritma (5.22), Algoritma (2.5) ve FBS algoritması farklı bir görüntü için karşılaştırılmıştır. $\lambda_n = \frac{1}{L}$, $\beta_n = \gamma_n = \delta_n = \psi_n = \phi_n = \frac{1}{n}$, $\eta_n = \frac{10^{20}}{n}$, $\theta = 0,99$, $\alpha_n = \frac{1}{2}$, ve $\nabla h(x) = f(x) = 0,6x$ alınırsa bu durumda sonuçlar Şekil 5.6, Şekil 5.7 ve Çizelge 5.4’de verilmiştir.



Şekil 5.6. (a) Lena görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) FBS (d) Algoritma (2.5) (e) Algoritma (5.22).



Şekil 5.7. Lena görüntüsü için SNR değerlerinin grafiği

Çizelge 5.4. Lena görüntüsü için SNR değerleri

Adım Sayısı	Algoritma (5.22)	Algoritma (2.5)	FBS Algoritma
1	17,748951	17,372599	44,922549
5	43,22688	39,824111	47,593908
10	50,193068	47,884830	49,431945
20	54,994313	53,046121	51,900830
30	57,174776	54,929475	53,597159
40	58,497187	56,231519	54,849974
50	59,389414	57,219987	55,820225
70	60,479787	58,659111	57,246811
80	60,814045	59,112947	57,793841
90	61,056274	59,487271	58,264392
100	61,228103	59,805114	58,673967

6. YENİ ÖN KOŞULLANDIRMALI İLERİ GERİ AYIRMA ALGORİTMASI

6.1. Algoritma Tanımı ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremi

Optimizasyon problemlerinde ön koşullandırma genellikle birinci dereceden optimizasyon algoritmalarını hızlandırmak için kullanılır. Örneğin gradyen iniş yönteminde reel değerli fonksiyonun yerel minimumunu bulmak için mevcut noktada fonksiyonun gradyeninin tersi yönünde adımlar atılır. Bu algoritma:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n \nabla f(x_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

şeklinde verilmektedir. M simetrik ve pozitif tanımlı bir matris olmak üzere Cholesky ayrışması, bir M matrisinin alt üçgen matris H ve bu alt üçgen matrisinin transpozelerinin çarpımı yani $M = HH^T$ şeklinde yazılabileceğini ifade etmektedir. H^{-T} , H' nin traspozelerinin tersi ve $\tilde{f}(x') = H^{-1}f(H^{-T}x')$ olmak üzere $x' = H^T x$ noktası gradyen iniş yönteminde yazılırsa

$$\begin{aligned} x'_{n+1} &= x'_n - \lambda_n \nabla \tilde{f}(x'_n), \forall n \in \mathbb{N} \\ &= x'_n - \lambda_n H^{-1} \nabla f(H^{-T}x'_n), \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifadenin her iki tarafı H^{-T} ile çarpılırsa

$$H^{-T}H^T x_{n+1} = H^{-T}H^T x_n - \lambda_n H^{-T}H^{-1} \nabla f(x_n),$$

olur. Buradan

$$x_{n+1} = x_n - \lambda_n M^{-1} \nabla f(x_n)$$

elde edilir. Bu iterasyona ön koşullandırılmalı en dik iniş algoritması ve M 'ye de ön koşullandırma terimi denir. Buradaki ön koşullandırmanın amacı seviye eğrilerini

çembere dönüştürerek vektör uzayının geometrisini değiştirmek olarak görülebilir (Himmelblau 1972).

$M: H \rightarrow H$ sınırlı lineer operatör olsun. M^*, M operatörünün adjointi olmak üzere $M^* = M$ ise M 'ye self-adjoint operatör denir. Her $0 \neq x \in H$ için, $\langle M(x), x \rangle > 0$ eşitsizliği sağlanırsa M self-adjoint operatörü pozitif tanımlıdır denir (Limaye 1996). Her $x, y \in H$ için M -iç çarpımı

$$\langle x, y \rangle_M = \langle x, M(y) \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Aynı zamanda her $x \in H$ için M ile ilişkili norm

$$\|x\|_M^2 = \langle x, M(x) \rangle$$

şeklindedir (Limaye 1996).

Tanım 6.1.1: C, H 'nin boş kümeden farklı bir alt kümesi, $T: C \rightarrow H$ bir dönüşüm ve $M: H \rightarrow H$ pozitif tanımlı bir dönüşüm olsun.

1. Her $x, y \in H$ için

$$\|Tx - Ty\|_M \leq \|x - y\|_M$$

ise T 'ye M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşüm,

2. Her $x, y \in H$ için

$$\|Tx - Ty\|_{M^{-1}}^2 \leq \langle x - y, Tx - Ty \rangle$$

ise T 'ye M -cocoercive operatör

denir (Dixit et al. 2021).

Ayrıca her $x, y \in H$ için,

$$\|Tx - Ty\|_M \leq k\|x - y\|_M$$

olacak şekilde $k \in (0, 1]$ varsa T 'ye M -normuna göre k -daraltan dönüşüm denir (Altıparmak and Karahan 2022).

Şimdi ana sonucumuzun ispatında gerekli olan bazı önermeler verilecektir.

Önerme 6.1.2: $B: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton operatör, $A: H \rightarrow H$ M -cocoercive operatör, $M: H \rightarrow H$ sınırlı, lineer, self-adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör ve $\lambda \in (0, 1]$ olsun. Bu durumda

1. $I - \lambda M^{-1}A$, M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşüm,
2. $(I + \lambda M^{-1}B)^{-1}$, M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşüm,
3. $J_{\lambda, M}^{A, B} = (I + \lambda M^{-1}B)^{-1}(I - \lambda M^{-1}A)$, M -normuna göre genişlemeyen bir

dönüşümdür (Dixit et al. 2021).

İspat: 1) $S = I - \lambda M^{-1}A$ olsun. S 'nin M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşüm olduğu gösterilecektir. A , M -cocoercive operatör olduğundan, $x, y \in H$ için

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\|_{M^{-1}}^2 &\leq \langle x - y, Ax - Ay \rangle \\ &\leq 2\langle x - y, Ax - Ay \rangle \end{aligned}$$

olur. Bu durumda

$$\begin{aligned} \|M^{-1}(Ax - Ay)\|_M^2 &= \|Ax - Ay\|_{M^{-1}}^2 \\ &\leq 2\langle x - y, Ax - Ay \rangle \end{aligned}$$

ve

$$\lambda^2 \|M^{-1}(Ax - Ay)\|_M^2 \leq 2\langle x - y, \lambda M^{-1}(Ax - Ay) \rangle_M$$

elde edilir. Buradan

$$\|x - y\|_M^2 + \|\lambda M^{-1}(Ax - Ay)\|_M^2 - 2\langle x - y, \lambda M^{-1}(Ax - Ay) \rangle_M \leq \|x - y\|_M^2,$$

yani,

$$\|(I - \lambda M^{-1}A)x - (I - \lambda M^{-1}A)y\|_M^2 \leq \|x - y\|_M^2,$$

olur. Bu durumda S, M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşümdür.

2) $T = (I + \lambda M^{-1}B)^{-1}$ olsun.

$$\begin{aligned} T = (I + \lambda M^{-1}B)^{-1} &\Leftrightarrow T^{-1} - I = \lambda M^{-1}B \\ &\Leftrightarrow \lambda B = M(T^{-1} - I) \end{aligned}$$

dır. $x, y \in H$ olsun. Bu durumda $M(x - T(x)) \in \lambda B(T(x))$ ve $M(y - T(y)) \in \lambda B(T(y))$ olur. B monoton olduğundan,

$$\langle Tx - Ty, M(x - Tx) - M(y - T(y)) \rangle \geq 0,$$

yani,

$$\langle Tx - Ty, M(x - y) \rangle \geq \langle Tx - Ty, M(Tx - Ty) \rangle$$

elde edilir. Bu durumda

$$\langle Tx - Ty, M(x - y) \rangle_M \geq \|Tx - Ty\|_M^2$$

ve dolayısıyla T , M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşüm olur.

3) 1) ve 2) den $T \circ S = J_{\lambda, M}^{A, B}$, M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşüm olur.

Önerme 6.1.3: $A: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton operatör, $B: H \rightarrow H$ M -cocoercive operatör, $M: H \rightarrow H$ sınırlı, lineer, self-adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör ve $\lambda \in (0, \infty)$ olsun. Bu durumda $x \in H$ 'nin monoton kapsama probleminin bir çözümü olması için gerekli ve yeterli koşul $(I + \lambda M^{-1}B)^{-1}(I - \lambda M^{-1}A)(x) = x$ olmasıdır (Dixit et al. 2021).

İspat: $0 \in (A + B)x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} 0 \in \lambda Ax + \lambda Bx &\Leftrightarrow 0 \in \lambda M^{-1}Ax + \lambda M^{-1}Bx \\ &\Leftrightarrow -\lambda M^{-1}Bx \in \lambda M^{-1}Ax \\ &\Leftrightarrow x - \lambda M^{-1}Bx \in x + \lambda M^{-1}Ax \\ &\Leftrightarrow (I + \lambda M^{-1}B)^{-1}(I - \lambda M^{-1}A)(x) = x \end{aligned}$$

dır.

Bu bölümde reel Hilbert uzaylarda yeni bir ön koşullandırılmalı ileri-geri ayırma algoritması sunulacak ve algoritmanın kuvvetli yakınsaklığı kanıtlanacaktır. Bu bölümde verilen sonuçlar 2022 yılında International Journal of Computer Mathematics dergisinde ‘A new preconditioning algorithm for finding a zero of the sum of two monotone operators and its application to image restoration problems’ başlıklı makalede yayımlanmıştır.

$M: H \rightarrow H$ sınırlı, lineer, self-adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör, $A: H \rightarrow 2^H$

maksimal monoton operatör, $B: H \rightarrow H$ M -cocoercive operatör, $f: H \rightarrow H$, M -normuna göre k -daraltan dönüşüm ve $\lambda \in (0, 1]$ olsun. Ayrıca $\theta \in [0, 1)$ olmak üzere $\{\theta_n\} \subset [0, \theta]$, $\{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri $(0, 1)$ aralığında tanımlı ve bazı a , b , c ve d pozitif reel sayıları için $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$ ve $0 < c \leq \beta_n \leq d < 1$, eşitsizliklerini sağlayan diziler olmak üzere yeni algoritmamız:

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H \\ y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B) \left(\begin{matrix} (1 - \alpha_n)y_n \\ + \alpha_n(I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B)(y_n) \end{matrix} \right) \\ x_{n+1} = \beta_n f(z_n) + (1 - \beta_n)(I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B)(z_n) \end{cases} \quad (6.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Teorem 6.1.4: H bir reel Hilbert uzayı, $M: H \rightarrow H$ sınırlı, lineer, self-adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör, $A: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton operatör, $B: H \rightarrow H$ M -cocoercive operatör ve $\Omega = (A + B)^{-1}(0)$ boş kümeden farklı olsun. $f: H \rightarrow H$, M -normuna göre k -daraltan dönüşüm ve $\lambda \in (0, 1]$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi Algoritma (6.1) tarafından üretilen dizi olsun. $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\} \in (0, 1)$, $\theta \in [0, 1)$ ve $\{\theta_n\} \subset [0, \theta]$ olsun. Ayrıca bazı a , b , c ve d pozitif reel sayıları için,

1. $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$,
2. $0 < c \leq \beta_n \leq d < 1$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M < \infty$,
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n = \infty$,

koşulları sağlansın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $p = P_{\Omega}f(p)$ noktasına kuvvetli yakınsaktır.

İspat: Kanıt aşağıdaki adımlara bölünerek yapılacaktır.

Adım 1: İlk adımda, $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu gösterilecektir. $p \in \Omega$ olmak üzere $p = P_{\Omega}f(p)$ olsun. $J_{\lambda, M}^{A, B}$, M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan Algoritma (6.1)'den

$$\begin{aligned}
 \|y_n - p\|_M &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - p\|_M \\
 &\leq \|x_n - p\|_M + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|z_n - p\|_M &= \|J_{\lambda,M}^{A,B}((1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n)) - p\|_M \\
 &\leq \|(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - p\|_M \\
 &= \|(1 - \alpha_n)(y_n - p) + \alpha_n(J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - p)\|_M \\
 &\leq (1 - \alpha_n)\|y_n - p\|_M + \alpha_n \|J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - p\|_M \\
 &\leq \|y_n - p\|_M
 \end{aligned} \tag{6.3}$$

elde edilir. Aynı zamanda f , M -normuna göre k -daraltan dönüşüm olduğundan (6.2) ve (6.3) eşitsizliklerini de birleştirerek

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|_M &= \|\beta_n f(z_n) + (1 - \beta_n)J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - p\|_M \\
 &\leq \|\beta_n(f(z_n) - p - f(p) + f(p)) + (1 - \beta_n)(J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - p)\|_M \\
 &\leq \beta_n \|f(z_n) - f(p)\|_M + \beta_n \|f(p) - p\|_M \\
 &\quad + (1 - \beta_n) \|J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - p\|_M \\
 &\leq \beta_n k \|z_n - p\|_M + \beta_n \|f(p) - p\|_M + (1 - \beta_n) \|z_n - p\|_M \\
 &= (1 - \beta_n(1 - k)) \|z_n - p\|_M + \beta_n \|f(p) - p\|_M \\
 &\leq (1 - \beta_n(1 - k)) \|x_n - p\|_M + \beta_n \cdot \frac{\theta_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\|_M
 \end{aligned} \tag{6.4}$$

$$+\beta_n\|f(p) - p\|_M$$

bulunur. Teoremin 2. ve 3. şartlarından $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\|_M = 0$ olduğu sonucuna varılır. Bu durumda, her $n \geq 1$ için $\frac{\theta_n}{\beta_n} \|x_n - x_{n-1}\|_M \leq K_1$ olacak şekilde $K_1 > 0$ sabit sayısı vardır. (6.4)'den,

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\|_M &\leq (1 - \beta_n(1 - k))\|x_n - p\|_M + \beta_n(K_1 + \|f(p) - p\|_M) \\ &= (1 - \beta_n(1 - k))\|x_n - p\|_M + \beta_n(1 - k) \left(\frac{K_1 + \|f(p) - p\|_M}{(1 - k)} \right) \\ &\leq \max \left\{ \|x_n - p\|_M, \frac{K_1 + \|f(p) - p\|_M}{(1 - k)} \right\} \\ &\vdots \\ &\leq \max \left\{ \|x_1 - p\|_M, \frac{K_1 + \|f(p) - p\|_M}{(1 - k)} \right\}, \forall n \geq 1 \end{aligned}$$

olur. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi ve dolayısıyla da $\{z_n\}$ ve $\{y_n\}$ dizileri de sınırlıdır.

Adım 2: İkinci olarak, $x_n \rightarrow p = P_\Omega f(p)$ olduğu gösterilecektir. Gerçekten Lemma 4.1.2'den her $n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \|y_n - p\|_M^2 &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - p\|_M^2 \\ &\leq \|x_n - p\|_M^2 + 2\theta_n\|x_n - p\|_M\|x_n - x_{n-1}\|_M \\ &\quad + \theta_n^2\|x_n - x_{n-1}\|_M^2 \end{aligned} \tag{6.5}$$

ve

$$\|z_n - p\|_M^2 = \|J_{\lambda, M}^{A, B}((1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n)) - p\|_M^2$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \|(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - p\|_M^2 \\
 &= \alpha_n \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - p\|_M^2 + (1 - \alpha_n) \|y_n - p\|_M^2 \\
 &\quad - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M^2 \\
 &\leq \|y_n - p\|_M^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M^2 \\
 &\leq \|y_n - p\|_M^2
 \end{aligned} \tag{6.6}$$

bulunur. (6.5), (6.6) ve Lemma 4.1.2'den

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|_M^2 &= \|\beta_n f(z_n) + (1 - \beta_n) J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - p\|_M^2 \\
 &\leq \|\beta_n(f(z_n) - f(p)) + (1 - \beta_n)(J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - p)\|_M^2 \\
 &\quad + \beta_n \|f(p) - p\|_M^2 \\
 &\leq \|\beta_n(f(z_n) - f(p)) + (1 - \beta_n)(J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - p)\|_M^2 \\
 &\quad + 2\beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \\
 &\leq \beta_n \|f(z_n) - f(p)\|_M^2 + (1 - \beta_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - p\|_M^2 \\
 &\quad + 2\beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \\
 &\leq \beta_n k^2 \|z_n - p\|_M^2 + (1 - \beta_n) \|z_n - p\|_M^2 \\
 &\quad + 2\beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \\
 &\leq (1 - \beta_n(1 - k^2)) \|z_n - p\|_M^2 + 2\beta_n \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \\
 &\leq (1 - \beta_n(1 - k^2)) \|x_n - p\|_M^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +2\theta_n\|x_n - p\|_M\|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 & +\theta_n^2\|x_n - x_{n-1}\|_M^2] + 2\beta_n\langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \\
 & \leq (1 - \beta_n(1 - k^2))\|x_n - p\|_M^2 + \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 & \times [2\|x_n - p\|_M + \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M] \\
 & + 2\beta_n\langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M
 \end{aligned} \tag{6.7}$$

dır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M = 0$ olduğundan her $n \geq 1$ için $\theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M \leq K_2$ olacak şekilde $K_2 > 0$ sabit sayısı vardır. Her $n \geq 1$ için (6.7) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|_M^2 & \leq (1 - \beta_n(1 - k^2))\|x_n - p\|_M^2 + 3K_3\theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 & + 2\beta_n\langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \\
 & = (1 - \beta_n(1 - k^2))\|x_n - p\|_M^2 + 3K_3\theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 & + \beta_n(1 - k^2)\frac{2}{(1 - k^2)}\langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M,
 \end{aligned}$$

olur. Burada $K_3 = \sup_{n \geq 1} \{\|x_n - p\|_M, K_2\}$ dır. Yukarıdaki eşitsizlikte, $\delta_n = \beta_n(1 - k^2)$, $s_n = \|x_n - p\|_M^2$, $t_n = \frac{2}{(1 - k^2)}\langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M$ ve $\varepsilon_n = 3K_3\theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M$ alınırsa bu durumda her $n \geq 1$ için $s_{n+1} \leq (1 - \delta_n)s_n + \delta_n t_n + \varepsilon_n$ elde edilir.

Şimdi $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \leq 0$ olduğu gösterilecektir. Burada ispatı tamamlamak için iki durum dikkate alınacaktır.

İlk olarak $\{\|x_n - p\|_M\}_{n \geq n_0}$ dizisi artmayan olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var olsun. $\{\|x_n - p\|_M\}$ dizisi 0 ile alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır. Teoremin 4. şartını kullanarak, $\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n = \infty$ olduğu elde edilir. $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \leq 0$ olduğu gösterilecektir. (6.5) ve (6.6) eşitsizlikleri ile Lemma 4.1.2'yi birleştirerek,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\|_M^2 &= \|\beta_n f(z_n) + (1 - \beta_n) J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - p\|_M^2 \\
 &= \beta_n \|f(z_n) - p\|_M^2 + (1 - \beta_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - p\|_M^2 \\
 &\quad - \beta_n(1 - \beta_n) \|f(z_n) - J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n)\|_M^2 \\
 &\leq \beta_n \|f(z_n) - p\|_M^2 + (1 - \beta_n) \|z_n - p\|_M^2 \\
 &\leq \beta_n \|f(z_n) - p\|_M^2 + (1 - \beta_n) \\
 &\quad \times [\|y_n - p\|_M^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M^2] \\
 &\leq \beta_n \|f(z_n) - p\|_M^2 + (1 - \beta_n) \\
 &\quad \times [\|x_n - p\|_M^2 + 2\theta_n \|x_n - p\|_M \|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 &\quad + \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|_M^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M^2] \\
 &= \beta_n \|f(z_n) - p\|_M^2 + (1 - \beta_n) \|x_n - p\|_M^2 \\
 &\quad + 2(1 - \beta_n)\theta_n \|x_n - p\|_M \|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 &\quad + (1 - \beta_n)\theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|_M^2 \\
 &\quad - \alpha_n(1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M^2
 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise

$$\begin{aligned}
 \alpha_n(1 - \alpha_n)(1 - \beta_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M^2 &\leq \beta_n (\|f(z_n) - p\|_M^2 - \|x_n - p\|_M^2) \\
 &\quad - \|x_{n+1} - p\|_M^2 + \|x_n - p\|_M^2 \\
 &\quad + (1 - \beta_n)\theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 &\quad \times (2\|x_n - p\|_M^2 + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M)
 \end{aligned}$$

olduğu anlamına gelir. Teoremin 3., 4. şartlarından ve $\{\|x_n - p\|_M\}$ dizisinin yakınsaklığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M = 0 \quad (6.8)$$

bulunur. Öte yandan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - x_n\|_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M = 0 \quad (6.9)$$

ve

$$\begin{aligned} \|z_n - y_n\|_M &= \|z_n - J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) + J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M \\ &\leq \|z_n - J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n)\|_M + \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M \\ &\leq \|(1 - \alpha_n)y_n + \alpha_n J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M + \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M \\ &= \|\alpha_n (J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n)\|_M + \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M \\ &= (1 + \alpha_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M, \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - y_n\|_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M = 0 \quad (6.10)$$

elde edilir. (6.8), (6.9), (6.10) ve teoremin 4. şartını kullanarak

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - y_n\|_M &= \|x_{n+1} - J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) + J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M \\ &\leq \|x_{n+1} - J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n)\|_M + \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \|\beta_n f(z_n) + (1 - \beta_n)J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n)\|_M \\
 &+ \|J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - y_n\|_M \\
 &\leq \beta_n \|f(z_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n)\|_M + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n)\|_M \\
 &+ \|J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - y_n\|_M \\
 &\leq \beta_n \|f(z_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n)\|_M + \|z_n - y_n\|_M \\
 &+ \|J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - y_n\|_M
 \end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - y_n\|_M = 0 \quad (6.11)$$

elde edilir. Bu nedenle (6.9) ve (6.11) eşitsizliklerinden,

$$\|x_{n+1} - x_n\|_M \leq \|x_{n+1} - y_n\|_M + \|y_n - x_n\|_M$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\|_M = 0$$

elde edilir.

Şimdi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M = t$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan, $x_{n_i} \rightarrow v$ olacak şekilde $\{x_n\}$ 'nin $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi vardır ve $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, x_{n_{i+1}} - p \rangle_M = t$ dir. (6.8) ve (6.9) eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda,M}^{A,B}(x_n) - x_n\|_M &= \|J_{\lambda,M}^{A,B}(x_n) - x_n + y_n - y_n + J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n)\|_M \\ &\leq 2\|y_n - x_n\|_M + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - y_n\|_M \end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_{\lambda,M}^{A,B}(x_n) - x_n\|_M = 0$$

olduğu elde edilir. Bu durumda Lemma 5.1.2'den $v \in F(J_{\lambda,M}^{A,B})$ olduğu açıktır. Öte yandan, $\|x_{n+1} - x_n\|_M \rightarrow 0$ ve $x_{n_i} \rightarrow v$ olduğundan $x_{n_{i+1}} \rightarrow v$ olur. Ayrıca, $p = P_\Omega f(p)$ ve metrik izdüşüm operatörünün özelliği birleştirilerek

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, x_{n_{i+1}} - p \rangle_M = \langle f(p) - p, v - p \rangle_M \leq 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(p) - p, x_{n+1} - p \rangle_M \leq 0 \quad (6.12)$$

sağlanır. (6.12)'den $\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n \leq 0$ olur. Sonuç olarak $x_n \rightarrow p$ elde edilir.

İkinci olarak $\{\|x_n - p\|_M\}_{n \geq n_0}$ dizisi monoton azalan olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var olsun. Her $n \geq 1$ için $\Phi_n = \|x_n - p\|_M^2$ olsun. Bu nedenle, her $n \geq n_0$ için $\Phi_{n_j} < \Phi_{n_{j+1}}$ olacak şekilde $\{\Phi_n\}$ 'nin $\{\Phi_j\}$ alt dizisi var olsun. $\tau: \{n: n \geq n_0\} \rightarrow \mathbb{N}$ olmak üzere:

$$\tau(n) = \max\{l \in \mathbb{N} : l \leq n, \Phi_l \leq \Phi_{l+1}\}$$

şeklinde tanımlansın. τ dizisinin artmayan bir dizi olduğu açıktır. Her $n \geq n_0$ için Lemma 5.6'dan $\Phi_{\tau(n)} \leq \Phi_{\tau(n)+1}$ olduğu söylenir. Bu durumda,

$$\|\Phi_{\tau(n)} - p\|_M \leq \|\Phi_{\tau(n)+1} - p\|_M$$

dır. İlk durumda, n yerine $\tau(n)$ alarak benzer sonuçlar elde edilir. Yani,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\Phi_{\tau(n)} - p\|_M^2 \leq 0$$

olur. Aynı zamanda $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\|\Phi_{\tau(n)} - p\|_M^2 \rightarrow 0 \text{ ve } \|\Phi_{\tau(n)+1} - p\|_M \rightarrow 0 \quad (6.13)$$

elde edilir. Bu durumda, (6.13)'ü ve Lemma 5.1.3'yı kullanarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$\|\Phi_n - p\|_M \leq \|\Phi_{\tau(n)+1} - p\|_M \rightarrow 0$$

sonucuna varılır. Bu durumda, $x_n \rightarrow p$ olduğu elde edilir ve ispat tamamlanır.

6.2. Konveks Minimizasyon Problemine Uygulaması

H bir reel Hilbert uzayı, $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir ve konveks bir fonksiyon, $L_h > 0$ olmak üzere ∇h , L_h -Lipschitz sürekli bir dönüşüm ve $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ has alttan yarı sürekli ve konveks bir fonksiyon olmak üzere:

$$h(x^*) + g(x^*) = \min_{x \in H} \{h(x) + g(x)\}$$

şeklindeki konveks minimizasyon problemini ele alalım. ∇h , L_h -Lipschitz sürekli olduğundan Baillon-Haddad Teoremi gereği ∇h gradyen operatörü L_h^{-1} -cocoercive dir. Ayrıca, $g \in \Gamma_0(H)$ olmak üzere ∂g maksimal monotondur (Bauschke and Combettes 2011). Bu seçimlere karşılık olarak konveks minimizasyon problemini:

$$0 \in \nabla h(x^*) + \partial g(x^*)$$

özelliğini sağlayan $x^* \in H$ noktasını bulma problemine denk olduğu ve aynı zamanda $(I + \lambda L_h^{-1} \partial g)^{-1}(I - \lambda L_h^{-1} \nabla h)$ dönüşümünün sabit noktasının bulunması problemine denk olduğu daha önce verilmişti.

Diğer taraftan Algoritma (6.1)'de A yerine ∂g , B yerine ∇h , M yerine de L_h alınırsa,

$$\begin{cases} x_0, x_1 \in H \\ y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ z_n = (I + \lambda L_h^{-1} \partial g)^{-1}(I - \lambda L_h^{-1} \nabla h) \left(\begin{matrix} (1 - \alpha_n)y_n \\ + \alpha_n(I + \lambda L_h^{-1} \partial g)^{-1}(I - \lambda L_h^{-1} \nabla h)y_n \end{matrix} \right) \\ x_{n+1} = \beta_n f(z_n) + (1 - \beta_n)(I + \lambda L_h^{-1} \partial g)^{-1}(I - \lambda L_h^{-1} \nabla h)z_n \end{cases} \quad (6.14)$$

şeklindeki algoritma elde edilir. Bu durumda Teorem 6.1.4 kullanılarak aşağıdaki teorem ispatsız olarak verilebilir.

Teorem 6.2.1: $h: H \rightarrow \mathbb{R}$ diferansiyallenebilir konveks bir fonksiyon, $L_h > 0$ için ∇h L_h -Lipschitz sürekli, $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ has alttan yarı sürekli konveks bir fonksiyon ve konveks minimizasyon probleminin çözümü boş kümeden farklı olsun. $\{x_n\}$ Algoritma (6.14) tarafından üretilen bir dizi ve $\{\theta_n\}, \{\alpha_n\}$ ve $\{\beta_n\}$ dizileri Teorem 6.1.4'deki koşulları sağlasın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi konveks minimizasyon problemin çözümü olan x^* noktasına kuvvetli yakınsaktır.

6.3. Görüntü İyileştirme Problemine Uygulaması

Bu bölümde yeni tanımlanan ön koşullandırılmalı ileri-geri ayırma algoritması (6.14)'ün görüntü iyileştirme problemine uygulaması verilecektir. Ayrıca Algoritma (6.14)'ün Lorenz and Pock (2015) tarafından tanımlanan

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ x_{n+1} = (I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B)y_n, \quad \forall n \geq 1, \end{cases}$$

şeklindeki eylemsiz ileri-geri ayırma algoritması (IFBS) ve Dixit et al. (2021) tarafından tanımlanan:

$$\begin{cases} y_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ x_{n+1} = (I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B) \left(\begin{matrix} (1 - \alpha_n)y_n \\ + \alpha_n(I + \lambda M^{-1}A)^{-1}(I - \lambda M^{-1}B)y_n \end{matrix} \right) \end{cases}$$

şeklindeki hızlandırılmış ön koşullandırılmalı ileri-geri normal S-iterasyonu (APFBNSM) ile kıyaslaması yapılacaktır.

Bu bölümde yapacağımız tüm karşılaştırmalarda Kameraman ve Dağ test görüntüleri kullanılacaktır. Burada önce ele alacağımız test görüntülerine bulanıklık ve gürültü ekleyerek dejenere görüntü elde edilecektir. Görüntüye eklenecek hareket ve gaussian bulanıklıkları için MATLAB'da fspecial ('motion',15,60) ve fspecial ('gaussian', 9,4) fonksiyonları kullanılacak ve ayrıca rastgele gürültü eklenecektir. Daha sonra Algoritma (6.14)'ü kullanarak orijinal görüntüye yakın bir görüntü elde edilmeye çalışılacaktır. Yeni elde edilecek görüntülerin kalitesi sinyal gürültü oranı (SNR) ve tepe sinyal gürültü oranı (PSNR) ile ölçülecektir. Tüm hesaplamalarda düzgünleştirme parametresi olarak $\rho = 0,0001$ alınacaktır.

İlk olarak kameraman görüntüsü ve hareket bulanıklığı fonksiyonunu kullanarak Algoritma (6.14), IFBS ve APFBNSM algoritmaları ile karşılaştırılacaktır. $\alpha_n = \frac{1}{2}, \theta_n =$

$\frac{1}{10}$, $\beta_n = \frac{1}{10n}$, $\lambda = 0,99$ ve $f(x) = 0,99x$ olsun. Bu durumda sayısal ve görsel sonuçlar aşağıda Şekil 6.1, Şekil 6.2, Şekil 6.3, Çizelge 6.1 ve Çizelge 6.2’de verilmiştir.



(a)



(b)



(c)

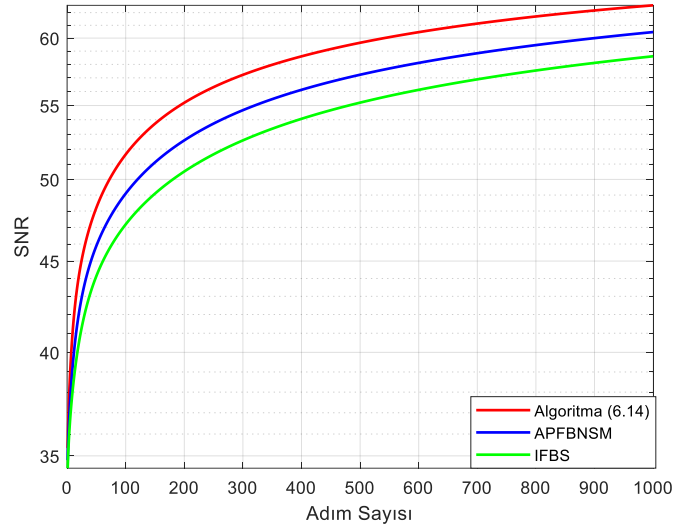


(d)

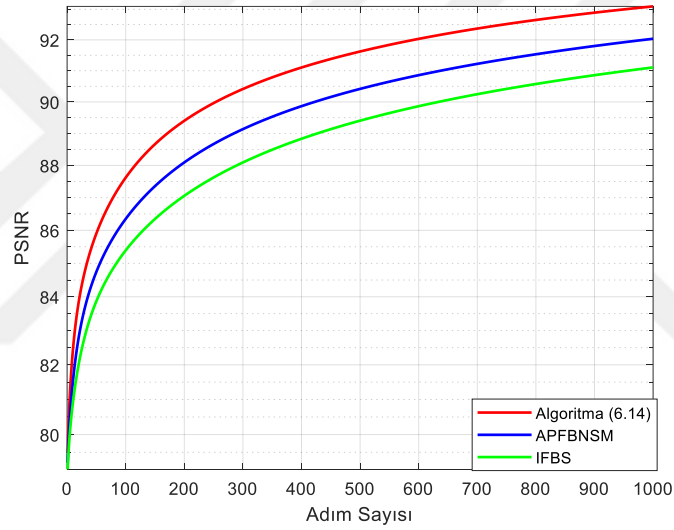


(e)

Şekil 6.1. (a) Kameraman görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) IFBS (d) APFBNSM (e) Algoritma (6.14).



Şekil 6.2. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri grafiği



Şekil 6.3. Kameraman görüntüsü için PSNR değerleri grafiği

Çizelge 6.1. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri

Adım Sayısı	Algoritma (6.14)	APFBNSM	IFBS
1	35,358278	34,805570	34,447978
5	39,041491	37,647298	36,739191
10	41,596885	39,737838	38,459428
25	45,483306	43,327179	41,672360
50	48,676063	46,328902	44,557987
100	52,156726	49,590691	47,648439
250	56,836376	54,268904	52,177390
500	60,117373	57,738798	55,736154
1.000	63,000553	60,935109	59,103851

Çizelge 6.2. Kameraman görüntüsü için PSNR değerleri

Adım Sayısı	Algoritma (6.14)	APFBNSM	IFBS
1	79,479563	79,203224	79,024436
5	81,227461	80,550059	80,109624
10	82,446397	81,538934	80,921214
25	84,343144	83,273703	82,457524
50	85,906469	84,748400	83,871979
100	87,620117	86,348858	85,391488
250	89,962710	88,668544	87,623570
500	91,621486	90,416429	89,404532
1.000	93,096925	92,035617	91,106244

Şimdi, dağ görüntüsü ve gaussian bulanıklığı fonksiyonunu kullanarak Algoritma (6.14), APFBNSM ve IFBS algoritmaları ile karşılaştırılacaktır. $\alpha_n = \frac{1}{2}$, $\theta_n = \frac{1}{2}$, $\beta_n = \frac{1}{2n}$, $\lambda = 0,99$, ve $f(x) = 0,9999x$ alalım. Bu seçimlere karşılık gelen sayısal ve görsel sonuçlar aşağıda Şekil 6.4, Şekil 6.5, Şekil 6.6, Çizelge 6.3, Çizelge 6.4’de verilmiştir.



(a)



(b)



(c)

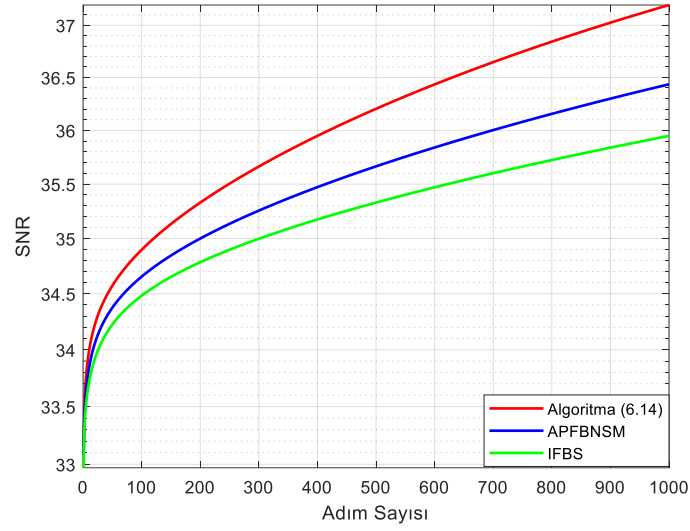


(d)

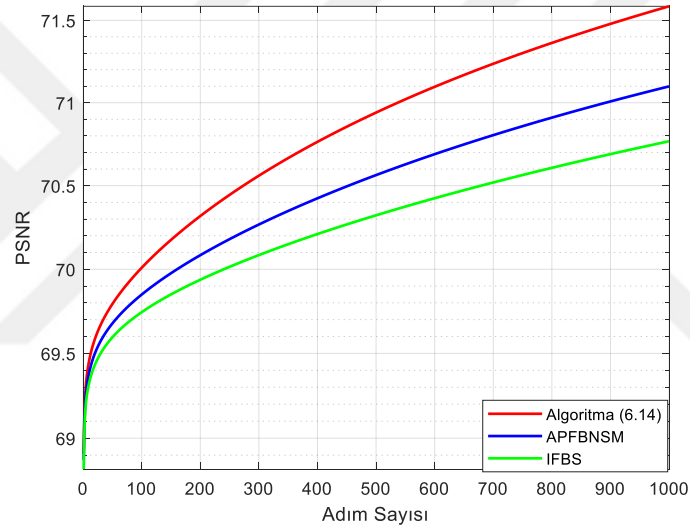


(e)

Şekil 6.4. (a) Dağ görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) IFBS (d) APFBNSM (e) Algoritma (6.14).



Şekil 6.5. Dağ görüntüsü için SNR değerleri grafiği



Şekil 6.6. Dağ görüntüsü için PSNR değerleri grafiği

Çizelge 6.3. Dağ görüntüsü için SNR değerleri

Adım Sayısı	Algoritma (6.14)	APFBNSM	IFBS
1	33,150494	33,079983	32,970274
5	33,975156	33,862282	33,758195
10	34,235762	34,094985	33,975192
25	34,593426	34,411929	34,271498
50	34,919419	34,688625	34,524013
100	35,350730	35,031797	34,822088
250	36,222684	35,692589	35,362060
500	37,213319	36,460288	35,977868
1.000	38,502561	37,530003	36,867338

Çizelge 6.4. Dağ görüntüsü için PSNR değerleri

Adım Sayısı	Algoritma (6.14)	APFBNSM	IFBS
1	68,908473	68,873217	68,818362
5	69,320821	69,264381	69,212336
10	69,451135	69,380740	69,320840
25	69,629990	69,539228	69,469005
50	69,793020	69,677597	69,595278
100	70,008724	69,849221	69,744343
250	70,444861	70,181534	70,014391
500	70,940457	70,563717	70,322399
1.000	71,585632	71,098913	70,767362

7. MODİFİYE EDİLMİŞ ÖN KOŞULLANDIRMALI İLERİ GERİ AYIRMA ALGORİTMASI

7.1. Algoritma Tanımı ve Kuvvetli Yakınsaklık Teoremi

Bu bölümde modifiye edilmiş ön koşullandırılmalı eylemsiz viskozite ileri-geri ayırma algoritması tanıtılacak ve ardından reel Hilbert uzayında bazı uygun varsayımlar altında kuvvetli yakınsaması kanıtlanacaktır. Ayrıca elde edilen sonuçlar konveks minimizasyon problemi ve dolayısıyla görüntü iyileştirme problemine uygulanacaktır. Bu bölümde verilen sonuçlar 2022 yılında University Politehnica of Bucharest Series A dergisinde ‘A Modified Preconditioning Algorithm for Solving Monotone Inclusion Problem and Application to Image Restoration Problem’ başlıklı makalede yayımlanmıştır.

$M: H \rightarrow H$ sınırlı, lineer, self-adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör, $B: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton operatör, $A: H \rightarrow H$ M -cocoercive operatör, $h: H \rightarrow H$, M -normuna göre k -daraltan dönüşüm ve $\lambda \in (0, 1]$ olsun. Ayrıca $\theta \in [0, 1)$ olmak üzere $\{\theta_n\} \subset [0, \theta]$, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$ ve $\{\gamma_n\}$ dizileri $(0, 1)$ aralığında ve bazı a , b , c ve d pozitif reel sayıları için $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$, $0 < c \leq \beta_n \leq d < 1$ eşitsizliklerini sağlayan diziler olmak üzere yeni algoritmamız $x_0, x_1 \in H$ için:

$$\begin{cases} \omega_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = (1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n(I + \lambda M^{-1}B)^{-1}(I - \lambda M^{-1}A)(\omega_n) \\ z_n = (I + \lambda M^{-1}B)^{-1}(I - \lambda M^{-1}A) \left(\begin{array}{c} (1 - \beta_n)y_n \\ + \beta_n(I + \lambda M^{-1}B)^{-1}(I - \lambda M^{-1}A)(y_n) \end{array} \right) \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n)(I + \lambda M^{-1}B)^{-1}(I - \lambda M^{-1}A)(z_n) + \gamma_n h(z_n) \end{cases} \quad (7.1)$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Algoritma (7.1) tarafından üretilen dizinin kuvvetli yakınsaklığı ile ilgili teorem aşağıdaki şekilde verilmiştir.

Teorem 7.1.1 : $M: H \rightarrow H$ sınırlı, lineer, self-adjoint ve pozitif tanımlı bir operatör, $B: H \rightarrow 2^H$ maksimal monoton operatör, $A: H \rightarrow H$, M -cocoercive operatör ve $\Omega = (A + B)^{-1}(0)$ boş kümeden farklı olsun. $h: H \rightarrow H$, M -normuna göre k -daraltan dönüşüm ve $\lambda \in (0, 1]$ olmak üzere $\{x_n\}$ dizisi Algoritma (7.1) tarafından üretilen dizi olsun. Bazı a , b , c ve d pozitif reel sayıları için, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in (0, 1)$, $\theta \in [0, 1]$ ve $\{\theta_n\} \subset [0, \theta]$ dizileri,

1. $0 < a \leq \alpha_n \leq b < 1$,
2. $0 < c \leq \beta_n \leq d < 1$,
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M < \infty$,
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 0, \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n = \infty$

koşullarını sağlasın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi $x^* = P_{\Omega}f(x^*)$ noktasına kuvvetli yakınsaktır.

İspat İspat iki kısımda incelenecektir.

Kısım 1: İlk adımda, $\{x_n\}$ dizisinin sınırlı olduğu gösterilecektir. $x^* \in \Omega$ olmak üzere $x^* = P_{\Omega}f(x^*)$ olsun. $J_{\lambda, M}^{A, B} = (I + \lambda M^{-1}B)^{-1}(I - \lambda M^{-1}A)$ M -normuna göre genişlemeyen bir dönüşüm olduğundan,

$$\begin{aligned} \|\omega_n - x^*\|_M &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - x^*\|_M \\ &\leq \|x_n - x^*\|_M + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M, \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$\begin{aligned} \|y_n - x^*\|_M &= \|(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n J_{\lambda, M}^{A, B}(\omega_n) - x^*\|_M \\ &= \|(1 - \alpha_n)(\omega_n - x^*) + \alpha_n (J_{\lambda, M}^{A, B}(\omega_n) - x^*)\|_M \\ &\leq (1 - \alpha_n) \|\omega_n - x^*\|_M + \alpha_n \|J_{\lambda, M}^{A, B}(\omega_n) - x^*\|_M \\ &= \|\omega_n - x^*\|_M \end{aligned} \quad (7.3)$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|z_n - x^*\|_M &= \|J_{\lambda,M}^{A,B}((1 - \beta_n)y_n + \beta_n J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n)) - x^*\|_M \\
 &\leq \|(1 - \beta_n)y_n + \beta_n J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - x^*\|_M \\
 &= \|(1 - \beta_n)(y_n - x^*) + \beta_n(J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - x^*)\|_M \\
 &\leq (1 - \beta_n)\|y_n - x^*\|_M + \beta_n\|J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - x^*\|_M \\
 &\leq \|y_n - x^*\|_M
 \end{aligned} \tag{7.4}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Aynı zamanda h , M -normuna göre k -daraltan dönüşüm olduğundan, (7.2), (7.3) ve (7.4) eşitsizliklerini de birleştirerek,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|_M &= \|(1 - \gamma_n)J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) + \gamma_n f(y_n) - x^*\|_M \\
 &\leq \|\gamma_n(f(y_n) - x^* - f(x^*) + f(x^*))\|_M \\
 &\quad + \|(1 - \gamma_n)(J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - x^*)\|_M \\
 &\leq \gamma_n\|f(y_n) - f(x^*)\|_M + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\|_M \\
 &\quad + (1 - \gamma_n)\|J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - x^*\|_M \\
 &\leq \gamma_n k\|y_n - x^*\|_M + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\|_M \\
 &\quad + (1 - \gamma_n)\|z_n - x^*\|_M \\
 &\leq \gamma_n k\|y_n - x^*\|_M + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\|_M \\
 &\quad + (1 - \gamma_n)\|y_n - x^*\|_M \\
 &= (1 - \gamma_n(1 - k))\|y_n - x^*\|_M + \gamma_n\|f(x^*) - x^*\|_M
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq (1 - \gamma_n(1 - k))\|x_n - x^*\|_M + \theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 &+ \gamma_n\|f(x^*) - x^*\|_M \\
 &\leq (1 - \gamma_n(1 - k))\|x_n - x^*\|_M + \gamma_n \cdot \frac{\theta_n}{\gamma_n}\|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 &+ \gamma_n\|f(x^*) - x^*\|_M
 \end{aligned} \tag{7.5}$$

eşitsizliği elde edilir. Teoremin 2. ve 3. şartlarından $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\theta_n}{\gamma_n}\|x_n - x_{n-1}\|_M = 0$ dır.

Bu durumda, $\frac{\theta_n}{\gamma_n}\|x_n - x_{n-1}\|_M \leq N_1$ olacak şekilde $N_1 > 0$ sabit sayısı vardır. (7.5)

eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|_M &\leq (1 - \gamma_n(1 - k))\|x_n - x^*\|_M + \gamma_n(N_1 + \|f(x^*) - x^*\|_M) \\
 &= (1 - \gamma_n(1 - k))\|x_n - x^*\|_M + \gamma_n(1 - k) \left(\frac{N_1 + \|f(x^*) - x^*\|_M}{(1 - k)} \right) \\
 &\leq \max \left\{ \|x_n - x^*\|_M, \frac{N_1 + \|f(x^*) - x^*\|_M}{(1 - k)} \right\} \\
 &\vdots \\
 &\leq \max \left\{ \|x_1 - x^*\|_M, \frac{N_1 + \|f(x^*) - x^*\|_M}{(1 - k)} \right\}
 \end{aligned}$$

olur. Buradan $\{x_n\}$ dizisi sınırlıdır ve dolayısıyla $\{z_n\}$, $\{y_n\}$ ve $\{\omega_n\}$ dizileri de sınırlıdır.

Kısım 2 : Şimdi $x_n \rightarrow x^* = P_\Omega f(x^*)$ olduğu gösterilecektir. Lemma 4.1.2'den,

$$\begin{aligned}
 \|\omega_n - x^*\|_M^2 &= \|x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) - x^*\|_M^2 \\
 &\leq \|x_n - x^*\|_M^2 + 2\theta_n\|x_n - x^*\|_M\|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 &+ \theta_n^2\|x_n - x_{n-1}\|_M^2,
 \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}
 \|y_n - x^*\|_M^2 &= \|(1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n J_{\lambda, M}^{A, B}(\omega_n) - x^*\|_M^2 \\
 &= \alpha_n \|J_{\lambda, M}^{A, B}(\omega_n) - x^*\|_M^2 + (1 - \alpha_n) \|\omega_n - x^*\|_M^2 \\
 &\quad - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(\omega_n) - \omega_n\|_M^2 \\
 &\leq \|\omega_n - x^*\|_M^2
 \end{aligned} \tag{7.7}$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|z_n - x^*\|_M^2 &= \|J_{\lambda, M}^{A, B}((1 - \beta_n)y_n + \beta_n J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n)) - x^*\|_M^2 \\
 &\leq \|(1 - \beta_n)y_n + \beta_n J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - x^*\|_M^2 \\
 &= \beta_n \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - x^*\|_M^2 + (1 - \beta_n) \|y_n - x^*\|_M^2 \\
 &\quad - \beta_n(1 - \beta_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(y_n) - y_n\|_M^2 \\
 &\leq \|y_n - x^*\|_M^2,
 \end{aligned} \tag{7.8}$$

elde edilir. (7.6), (7.7), (7.8) ve Lemma 4.1.2'den,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|_M^2 &= \|(1 - \gamma_n)J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) + \gamma_n h(y_n) - x^*\|_M^2 \\
 &= \|(1 - \gamma_n)(J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - x^*) + \gamma_n(h(y_n) - h(x^*)) \\
 &\quad + \gamma_n(h(x^*) - x^*)\|_M^2 \\
 &\leq \|(1 - \gamma_n)(J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - x^*) + \gamma_n(h(y_n) - h(x^*))\|_M^2 \\
 &\quad + 2\gamma_n \langle h(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (1 - \gamma_n) \|J_{\lambda, M}^{A, B}(z_n) - x^*\|_M^2 + \gamma_n \|f(y_n) - f(x^*)\|_M^2 \\
&\quad + 2\gamma_n \langle h(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M \\
&\leq \gamma_n k^2 \|y_n - x^*\|_M^2 + (1 - \gamma_n) \|z_n - x^*\|_M^2 \\
&\quad + 2\gamma_n \langle h(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M \\
&\leq (1 - \gamma_n(1 - k^2)) \|y_n - x^*\|_M^2 \\
&\quad + 2\gamma_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M \\
&\leq (1 - \gamma_n(1 - k^2)) [\|x_n - x^*\|_M^2 \\
&\quad + 2\theta_n \|x_n - x^*\|_M \|x_n - x_{n-1}\|_M \\
&\quad + \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|_M^2] + 2\gamma_n \langle h(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M \\
&\leq (1 - \gamma_n(1 - k^2)) \|x_n - x^*\|_M^2 \\
&\quad + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M [2\|x_n - x^*\|_M \\
&\quad + \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M] + 2\gamma_n \langle h(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M,
\end{aligned} \tag{7.9}$$

dır. $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M = 0$ olduğundan her $n \geq 1$ için $\theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M \leq N_2$ olacak şekilde $N_2 > 0$ sabit sayısı vardır. (7.9) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
\|x_{n+1} - x^*\|_M^2 &\leq (1 - \gamma_n(1 - k^2)) \|x_n - x^*\|_M^2 + 3N_3 \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M \\
&\quad + 2\gamma_n \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M \\
&= (1 - \gamma_n(1 - k^2)) \|x_n - x^*\|_M^2 + 3N_3 \theta_n \|x_n - x_{n-1}\|_M \\
&\quad + \gamma_n(1 - k^2) \frac{2}{(1 - k^2)} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M
\end{aligned} \tag{7.10}$$

bulunur. Burada $N_3 = \sup_{n \geq 1} \{\|x_n - x^*\|_M, N_2\}$ dır. (7.10) eşitsizliğinde, $\sigma_n = \gamma_n(1 - k^2)$, $\varsigma_n = \|x_n - x^*\|_M^2$, $\delta_n = \frac{2}{(1-k^2)} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M$ ve $\varepsilon_n = 3N_3\theta_n\|x_n - x_{n-1}\|_M$ alınırsa bu durumda $\varsigma_{n+1} \leq (1 - \sigma_n)\varsigma_n + \sigma_n\delta_n + \varepsilon_n$ elde edilir.

Şimdi $\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M \leq 0$ olduğu gösterilecektir. Bu durumda, ispatı tamamlamak için iki durum dikkate alınacaktır.

İlk durumda, $\{\|x_n - x^*\|_M\}_{n \geq n_0}$ dizisi artmayan olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var olsun. $\{\|x_n - x^*\|_M\}$ dizisi 0 ile alttan sınırlı olduğundan yakınsaktır. Teoremin 4. şartını kullanarak $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n = \infty$ elde edilir. (7.6) ve (7.7) eşitsizlikleri ile Lemma 4.1.2'yi kullanarak,

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - x^*\|_M^2 &= \|(1 - \gamma_n)J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) + \gamma_n f(y_n) - x^*\|_M^2 \\
 &= \gamma_n \|h(y_n) - x^*\|_M^2 + (1 - \gamma_n) \|J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - x^*\|_M^2 \\
 &\quad - \gamma_n(1 - \gamma_n) \|h(y_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n)\|_M^2 \\
 &\leq \gamma_n \|h(y_n) - x^*\|_M^2 + (1 - \gamma_n) \|z_n - x^*\|_M^2 \\
 &\leq \gamma_n \|h(y_n) - x^*\|_M^2 + (1 - \gamma_n) \|y_n - x^*\|_M^2 \\
 &\leq \gamma_n \|h(y_n) - x^*\|_M^2 + (1 - \gamma_n) \\
 &\quad \times \left[\|\omega_n - x^*\|_M^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M^2 \right] \\
 &\leq \gamma_n \|h(y_n) - x^*\|_M^2 + (1 - \gamma_n) \\
 &\quad \times [\|x_n - x^*\|_M^2 + 2\theta_n \|x_n - x^*\|_M \|x_n - x_{n-1}\|_M \\
 &\quad + \theta_n^2 \|x_n - x_{n-1}\|_M^2 - \alpha_n(1 - \alpha_n) \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M^2] \\
 &= \gamma_n \|h(y_n) - x^*\|_M^2 + (1 - \gamma_n) \|x_n - x^*\|_M^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+2(1-\gamma_n)\theta_n\|x_n-x^*\|_M\|x_n-x_{n-1}\|_M \\
 &+(1-\gamma_n)\theta_n^2\|x_n-x_{n-1}\|_M^2 \\
 &-\alpha_n(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)-\omega_n\|_M^2,
 \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$\begin{aligned}
 \alpha_n(1-\alpha_n)(1-\gamma_n)\|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)-\omega_n\|_M^2 &\leq \gamma_n(\|h(y_n)-x^*\|_M^2-\|x_n-x^*\|_M^2) \\
 &\quad -\|x_{n+1}-x^*\|_M^2+\|x_n-x^*\|_M^2 \\
 &\quad +(1-\gamma_n)\theta_n\|x_n-x_{n-1}\|_M \\
 &\quad \times (2\|x_n-x^*\|_M^2+\theta_n\|x_n-x_{n-1}\|_M)
 \end{aligned}$$

olmasını gerektirir. Teoremin 3., 4. şartlarından ve $\{\|x_n-x^*\|_M\}$ dizisinin yakınsaklığından

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)-\omega_n\|_M^2 = 0 \quad (7.11)$$

sonucuna varılır. Diğer taraftan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\omega_n-x_n\|_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n\|x_n-x_{n-1}\|_M = 0 \quad (7.12)$$

ve

$$\begin{aligned}
 \|y_n-\omega_n\|_M &= \|(1-\alpha_n)\omega_n+\alpha_n J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)-\omega_n\|_M \\
 &= \alpha_n\|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)-\omega_n\|_M
 \end{aligned}$$

dır. Bu durumda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - \omega_n\|_M = \lim_{n \rightarrow \infty} \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M = 0 \quad (7.13)$$

olur. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \|z_n - \omega_n\|_M &\leq \|z_n - J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)\|_M + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M \\ &\leq \|(1 - \beta_n)y_n + \beta_n J_{\lambda,M}^{A,B}(y_n) - \omega_n\|_M + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M \\ &\leq \|y_n - \omega_n\|_M + \beta_n \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M \end{aligned}$$

dır. (7.11) ve (7.13) eşitsizliklerinden

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - \omega_n\|_M = 0$$

olur. (7.11), (7.12), (7.13) ve teoremin 4. şartını kullanarak

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - \omega_n\|_M &= \|x_{n+1} - J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) + J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M \\ &\leq \|x_{n+1} - J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)\|_M + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M \\ &= \|(1 - \gamma_n)J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) + \gamma_n h(z_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)\|_M \\ &\quad + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M \\ &\leq \gamma_n \|h(z_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n)\|_M + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)\|_M \\ &\quad + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M \\ &\leq \gamma_n \|h(z_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(z_n)\|_M + \|z_n - \omega_n\|_M \end{aligned}$$

$$+ \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - \omega_n\|_M = 0 \quad (7.14)$$

elde edilir. Bu durumda, (7.12) ve (7.14) eşitsizliklerinden

$$\|x_{n+1} - x_n\|_M \leq \|x_{n+1} - \omega_n\|_M + \|\omega_n - x_n\|_M$$

ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\|_M = 0$$

olur. Şimdi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M = u$$

olsun. $\{x_n\}$ dizisi sınırlı olduğundan, $x_{n_i} \rightarrow v$ olacak şekilde $\{x_n\}$ 'nin $\{x_{n_i}\}$ alt dizisi vardır ve $\lim_{i \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n_i+1} - x^* \rangle_M = u$ dir. (7.11) ve (7.12) eşitsizliklerini kullanarak

$$\begin{aligned} \|J_{\lambda,M}^{A,B}(x_n) - x_n\|_M &= \|J_{\lambda,M}^{A,B}(x_n) - x_n + \omega_n - \omega_n + J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n)\|_M \\ &\leq 2\|\omega_n - x_n\|_M + \|J_{\lambda,M}^{A,B}(\omega_n) - \omega_n\|_M \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|J_{\lambda, M}^{A, B}(x_n) - x_n\|_M = 0$$

dır. Bu durumda Lemma 5.1.1'den $t \in F(J_{\lambda, M}^{A, B})$ olduğu açıktır. Öte yandan, $\|x_{n+1} - x_n\|_M \rightarrow 0$ ve $x_{n_i} \rightarrow t$ olduğundan $x_{n_{i+1}} \rightarrow t$ dır. Ayrıca, $x^* = P_{\Omega}f(x^*)$ ve metrik izdüşüm operatörünün özelliklerini düşünürsek

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n_{i+1}} - x^* \rangle_M = \langle f(x^*) - x^*, t - x^* \rangle_M \leq 0$$

elde edilir. Bu durumda

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \langle f(x^*) - x^*, x_{n+1} - x^* \rangle_M \leq 0 \quad (7.15)$$

sağlanır. (7.15) den $\limsup_{n \rightarrow \infty} \delta_n \leq 0$ olur. Sonuç olarak $x_n \rightarrow x^*$ olduğu görülür.

İkinci durumda, $\{\|x_n - x^*\|_M\}_{n \geq n_0}$ dizisi monoton azalan olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı var olsun. $\Theta_n = \|x_n - x^*\|_M^2$ olsun. Bu nedenle, her $n \geq n_0$ için $\Theta_{n_j} < \Theta_{n_{j+1}}$ olacak şekilde $\{\Theta_n\}$ nin $\{\Theta_j\}$ alt dizisi var olsun. $\tau: \{n: n \geq n_0\} \rightarrow \mathbb{N}$ olmak üzere $\tau(n) = \max\{l \in \mathbb{N}: l \leq n, \Theta_l \leq \Theta_{l+1}\}$ şeklinde tanımlansın. τ dizisinin artmayan bir dizi olduğu açıktır. Her $n \geq n_0$ için Lemma 5.1.3'den $\Theta_{\tau(n)} \leq \Theta_{\tau(n)+1}$ olduğu söylenir. Bu durumda $\|\Theta_{\tau(n)} - x^*\|_M \leq \|\Theta_{\tau(n)+1} - x^*\|_M$ dır.

İlk durumda n yerine $\tau(n)$ olarak benzer sonuçlar elde edilir. Yani,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\Theta_{\tau(n)} - x^*\|_M^2 \leq 0$$

olur. Aynı zamanda $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\|\Theta_{\tau(n)} - x^*\|_M^2 \rightarrow 0 \text{ ve } \|\Theta_{\tau(n)+1} - x^*\|_M \rightarrow 0 \quad (7.16)$$

dır. Bu durumda (7.16) ve Lemma 5.1.3'ü kullanarak $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$\|\Theta_n - x^*\|_M \leq \|\Theta_{\tau(n)+1} - x^*\|_M \rightarrow 0$$

elde edilir. Sonuç olarak $x_n \rightarrow x^*$ olur ve böylece ispat tamamlanır.

7.2. Konveks Minimizasyon Problemine Uygulaması

$f: H \rightarrow \mathbb{R}$ konveks diferansiyellenebilir bir fonksiyon, $L_f > 0$ için ∇f L_f -Lipschitz sürekli ve $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ has alttan yarı sürekli konveks bir fonksiyon olmak üzere Teorem 7.1.1'de $A = \nabla f$, $B = \partial g$ ve $M = L_f$ yazılırsa

$$\begin{cases} \omega_n = x_n + \theta_n(x_n - x_{n-1}) \\ y_n = (1 - \alpha_n)\omega_n + \alpha_n(I + \lambda L_f^{-1}\partial g)^{-1}(I - \lambda L_f^{-1}\nabla f)(\omega_n) \\ z_n = (I + \lambda L_f^{-1}\partial g)^{-1}(I - \lambda L_f^{-1}\nabla f) \left(\begin{matrix} (1 - \beta_n)y_n \\ + \beta_n(I + \lambda L_f^{-1}\partial g)^{-1}(I - \lambda L_f^{-1}\nabla f)(y_n) \end{matrix} \right) \\ x_{n+1} = (1 - \gamma_n)(I + \lambda L_f^{-1}\partial g)^{-1}(I - \lambda L_f^{-1}\nabla f)(z_n) + \gamma_n h(z_n) \end{cases} \quad (7.17)$$

şeklinde tanımlanan algoritma ve aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 7.2.1: $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ konveks diferansiyellenebilir bir fonksiyon $L_f > 0$ için ∇f L_f -Lipschitz sürekli, $g: H \rightarrow \mathbb{R}$ has alttan yarı sürekli ve konveks bir fonksiyon ve konveks minimizasyon probleminin çözümü boş kümeden farklı olsun. $\{x_n\}$ Algoritma (7.17) tarafından üretilen dizi olsun. $\theta \in [0, 1)$ olmak üzere $\{\theta_n\} \subset [0, \theta]$ ve $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}, \{\gamma_n\} \in (0, 1)$ dizileri Teorem 7.1.1'deki koşulları sağlasın. Bu durumda $\{x_n\}$ dizisi konveks minimizasyon problemin çözümü olan x^* noktasına kuvvetli yakınsaktır.

7.3. Görüntü İyileştirme Problemine Uygulaması

Bu bölümde Algoritma (7.17)'yi kullanılarak görüntü iyileştirme problemi çözülecektir. Ayrıca görüntü iyileştirmede Algoritma (7.17)'nin IFBS, APFBNSM ve Algoritma (6.14) ile kıyaslaması yapılacaktır.

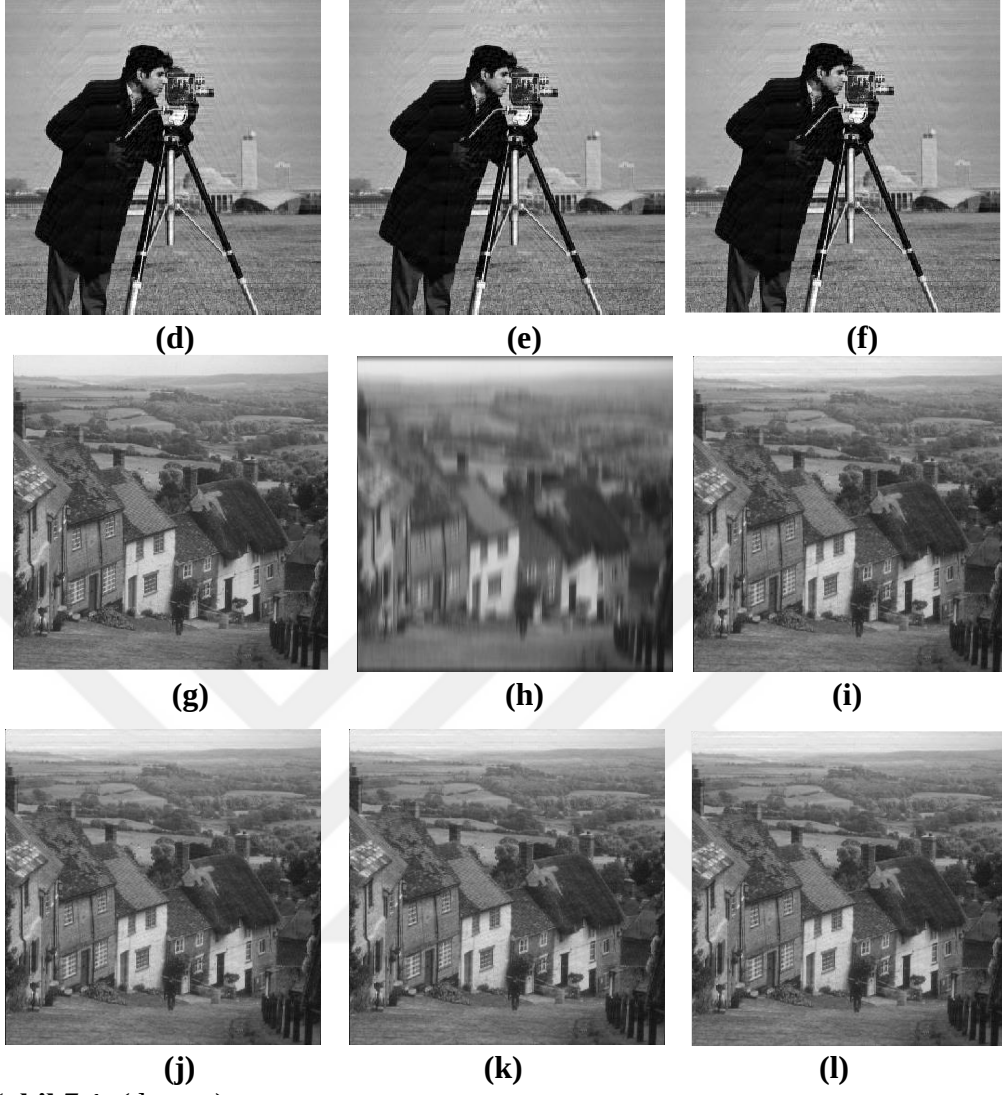
Sayısal karşılaştırmalarda MATLAB'da Gaussian ve Hareket bulanıklaştırma fonksiyonları kullanılmış ve rastgele gürültü eklenmiştir. Test görüntüleri olarak Kameraman, Goldhill, Dağ ve Barbara kullanılmıştır. Yeni elde edilecek görüntülerin kalitesi sinyal gürültü oranı (SNR) değeri ile ölçülmüştür.

Tüm sayısal karşılaştırmalarda parametreler $\alpha_n = \frac{1}{2}$, $\theta_n = \frac{1}{10}$, $\beta_n = \frac{1}{2n}$, $\gamma_n = \frac{1}{10n}$, $\lambda = 0,99$, $f(x) = 0,99x$ ve $\tau = 0,0001$ olarak seçilmiştir.

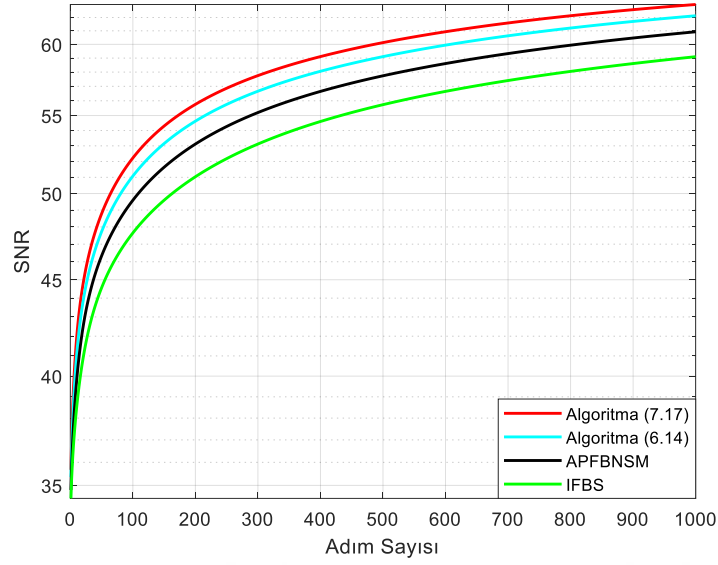
İlk olarak Algoritma (7.17)'yi IFBS, APFBNSM ve Algoritma (6.14) ile karşılaştırılacak ve Kameraman ve Goldhill görüntüleri ile hareket bulanıklığı fonksiyonu kullanılacaktır. Yukarıdaki seçimlere karşılık gelen sayısal sonuçlar Şekil 7.1 ve Şekil 7.2'de verilmiştir.



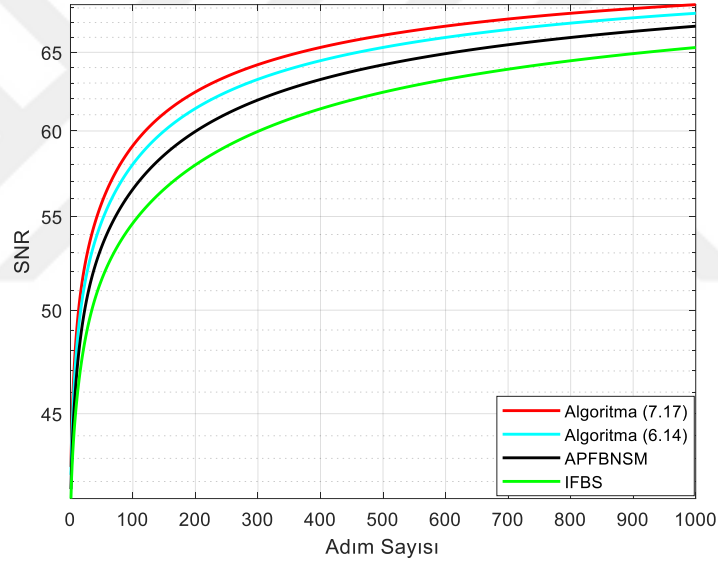
Şekil 7.1. (a) Kameraman görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) IFBS (d) APFBNSM (e) Algoritma (6.14) (f) Algoritma (7.17) (g) Goldhill görüntüsü (h) Bozulmuş görüntü (i) IFBS (j) APFBNSM (k) Algoritma (6.14) (l) Algoritma (7.17).



Şekil 7.1. (devam)



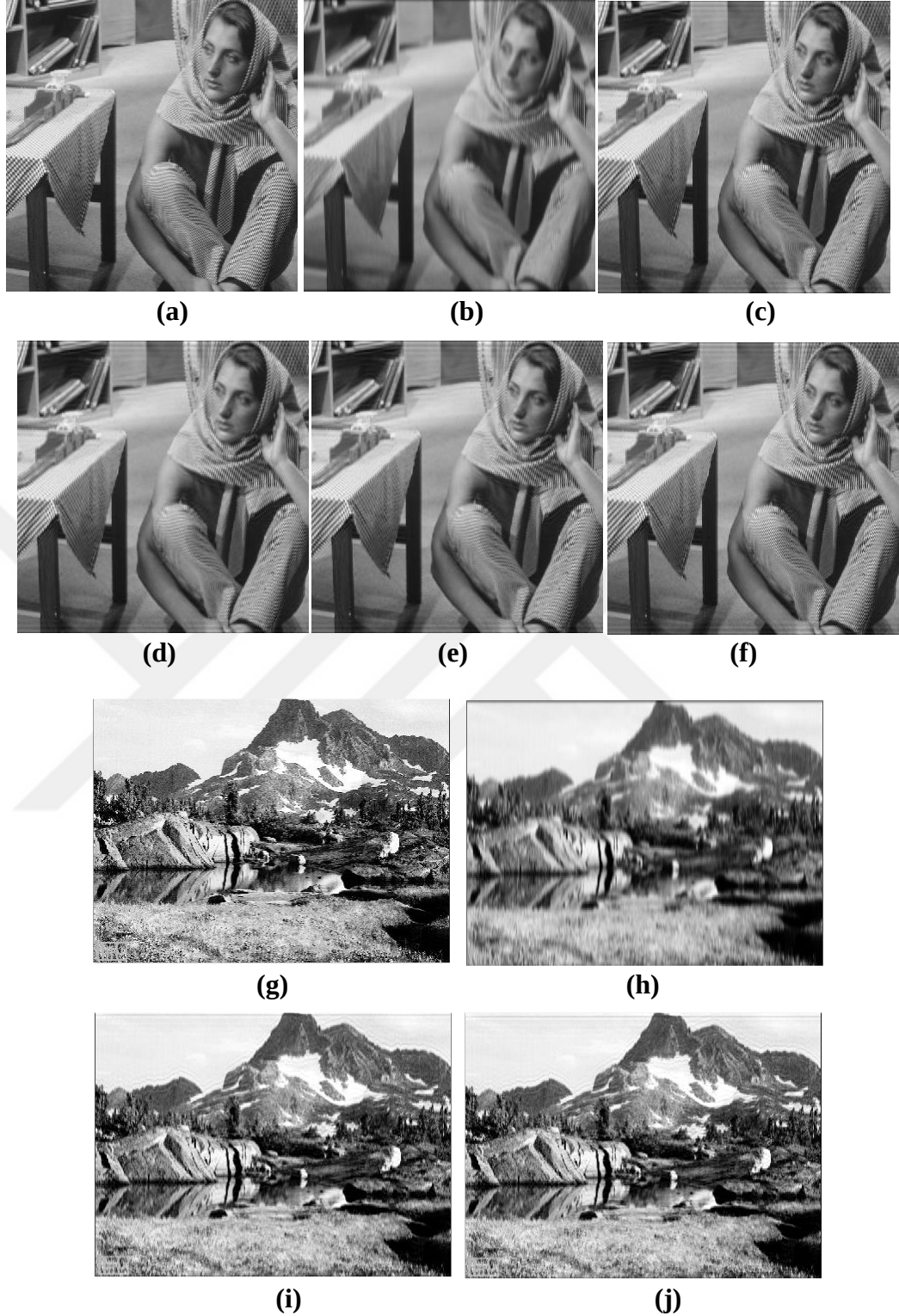
(a)



(b)

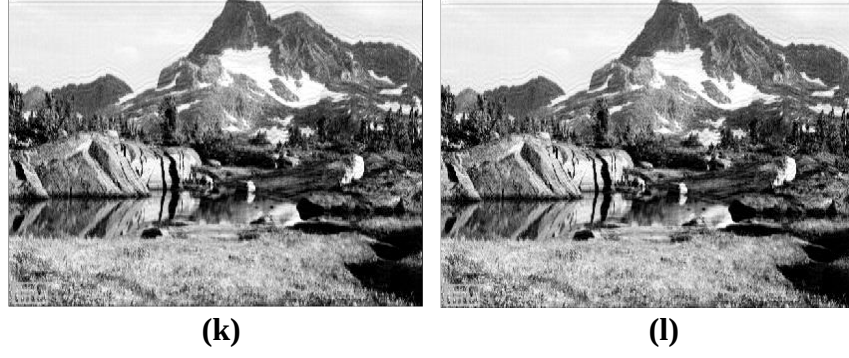
Şekil 7.2. (a) Kamereman görüntüsü için SNR değerleri grafiği **(b)** Goldhill görüntüsü için SNR değerleri grafiği.

İkinci olarak, Dağ ve Barbara görüntüleri ve Gauss bulanıklık fonksiyonu kullanılarak Algoritma (7.17) aynı algoritmalarla karşılaştırılacaktır. Şekil 7.3 ve Şekil 7.4 bu seçimlere karşılık gelen sayısal sonuçları göstermektedir.

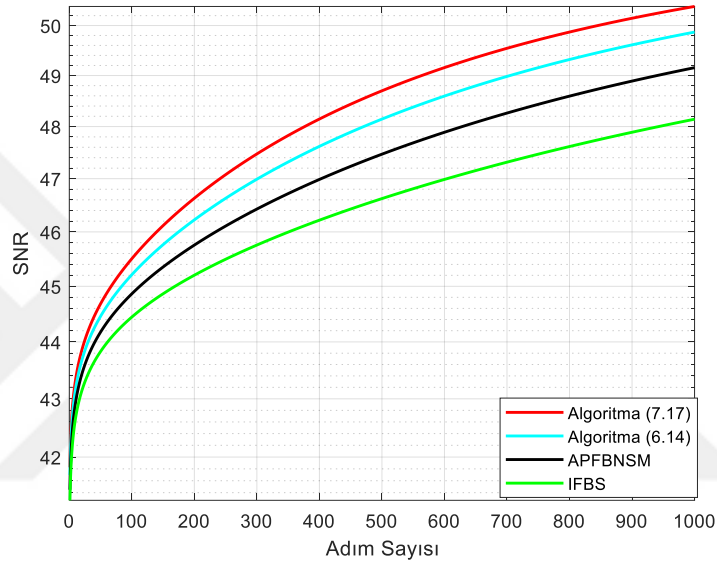


Şekil 7.3. (a) Barbara görüntüsü (b) Bozulmuş görüntü (c) IFBS (d) APFBNSM (e) Algoritma (6.14) (f) Algoritma (7.17) (g) Dağ görüntüsü (h) Bozulmuş görüntü (i) IFBS (j) APFBNSM (k) Algoritma (6.14) (l) Algoritma (7.17).

(ii)

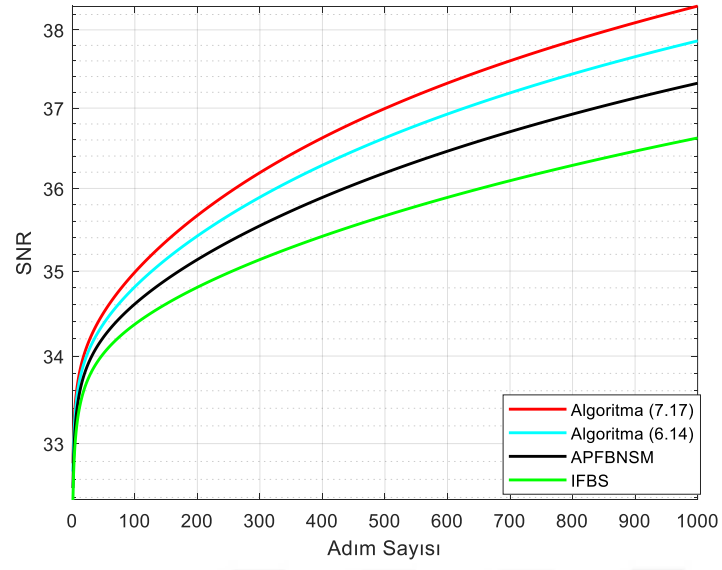


Şekil 7.3. (devam)



(a)

Şekil 7.4. (a) Barbara görüntüsü için SNR değerleri grafiği (b) Dağ görüntüsü için SNR değerleri grafiği.



(b)

Şekil 7.4. (devam)

8. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmalarımızdan elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde, sayılabilir genişlemeyen dönüşüm ailesinin ortak sabit noktasını bulmak ve reel Hilbert uzayında yakınsama sonucunu ispatlamak için eylemsiz S^* -algoritması sunulmuştur. Bu algoritmanın konveks minimizasyon problemine uygulaması verilmiştir. Daha sonra görüntü iyileştirme problemini çözmek için Algoritma (4.8), NAGA ve FBS algoritmaları kullanılmıştır. Kameraman görüntüsü için SNR değerleri Çizelge 4.1’de verilmiştir. Bu çizelge incelendiği zaman, Algoritma (4.8)’in SNR değerinin NAGA ve FBS algoritmasından daha yüksek olduğu görülmektedir. Bu, Algoritma (4.8)’in görüntü iyileştirme performansının karşılaştırılan algoritmalarından daha iyi olduğu anlamına gelmektedir.

Sonuç 8.1: Eylemsiz S^* -algoritmasında $\theta_n = 0$ yazılırsa, bu durumda Karahan and Özdemir (2013) tarafından tanımlanan S^* -algoritması elde edilir.

Beşinci bölümde, reel Hilbert uzayında sonsuz genişlemeyen dönüşümler ailesinin ortak sabit noktasını bulmak için yeni bir algoritma sunulmuştur ve bazı zayıf varsayımlar altında kuvvetli yakınsama kanıtlanmıştır. Ana sonuç monoton kapsama problemi, genelleştirilmiş denge problemi, varyasyonel eşitsizlik problemi, konveks minimizasyon problemi ve dolayısıyla görüntü iyileştirme problemlerine uygulanmıştır. Biber, Kameraman ve Lena görüntüsü için SNR değerleri Çizelge 5.2, Çizelge 5.3, ve Çizelge 5.4’de verilmiştir. İlk olarak Biber görüntüsü için Çizelge 5.2 incelendiğinde Algoritma (5.22)’de eylemsiz ve viskozite terimlerinin etkinliği karşılaştırılmış ve bu terimlerin, algoritmanın performansını arttırdığı sonucuna varılmıştır. İkinci olarak Kameraman görüntüsü için Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4 incelendiğinde Algoritma (5.22)’nin daha yüksek SNR ile görüntü iyileştirme sağladığı görülmektedir. Bu nedenle Kameraman görüntüsü için Algoritma (5.22)’nin görüntü iyileştirme performansının FBMMMA, AVFB ve NAGA’dan daha iyi olduğu gösterilmiştir. Diğer taraftan Lena görüntüsü için Algoritma (5.22)’nin Algoritma (2.5) ve FBS algoritmaları ile karşılaştırılmış ve yeni tanımlanan algoritmanın daha yüksek SNR değeri ile daha kaliteli görüntüler elde edilmiştir.

Sonuç 8.2: Algoritma (5.1)'de $\theta_n = \gamma_n = 0$ yazılırsa, bu durumda Hussain et al. (2018) tarafından tanımlanan K -algoritması elde edilir.

Altıncı bölümde, görüntü iyileştirme problemini etkin bir şekilde ele almak için var olan bazı algoritmaları genelleştiren bir ön koşullandırma ileri-geri algoritması önerilmiştir. Ayrıca genelleştirdiğimiz diğer algoritmalar için zayıf yakınsama teoremleri ispatlanmışken, algoritmamız için kuvvetli yakınsama teoremleri verilmiştir. Algoritma (6.14) IFBS ve APFBNSM ile karşılaştırılmıştır. Kameraman ve Dağ görüntüleri için SNR ve PSNR değerleri Çizelge 6.1, Çizelge 6.2, Çizelge 6.3 ve Çizelge 6.4'de verilmiştir. Bu çizelgeler incelendiğinde, Algoritma (6.14)'ün IFBS ve APFBNSM'dan daha yüksek bir SNR ve PSNR'ye sahip olduğu görülmektedir. Dolayısıyla Algoritma (6.14)'ün görüntü iyileştirme performansının karşılaştırılan algoritmalarından daha üstün olduğu anlaşılmaktadır.

Yedinci bölümde yine görüntü iyileştirme problemini çözmek için modifiye edilmiş bir ön koşullandırma eylemsiz viskozite ileri-geri ayırma algoritması sunulmuştur. Ayrıca Algoritma (7.1)'in belirli koşullar altında kuvvetli yakınsamaya sahip olduğu da gösterilmiş ve bu algoritmanın konveks minimizasyon problemine uygulaması verilmiştir. Daha sonra görüntü iyileştirme problemini çözmek için Algoritma (7.17), IFBS, APFBNSM ve Algoritma (6.14) algoritmaları ile karşılaştırılmıştır. Kameraman, Goldhill, Dağ ve Barbara görüntüleri için SNR değerleri grafikleri Şekil 7.1 ve Şekil 7.4'de verilmiştir. Şekiller incelendiği zaman, Algoritma (7.17)'nin karşılaştırılan algoritmalarından daha yüksek SNR ile daha iyi görüntü iyileştirme sağladığı açıkça görülmektedir.

Algoritma (7.1)'den aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Sonuç 8.3: Algoritma (7.1)'de,

1. $\alpha_n = 0$ alınırsa Algoritma (6.6),
2. $\alpha_n = 0, \gamma_n = 1$ ve $h = I$ alınırsa APFBNSM algoritması,
3. $\alpha_n = \beta_n = 0, \gamma_n = 1$ ve $h = I$ alınırsa IFBS algoritması,

4. $\alpha_n = \beta_n = \theta_n = 0, \gamma_n = 1$ ve $h = M = I$, alınırsa, bu durumda FBS algoritması elde edilir.



KAYNAKLAR

- Abubakar, J., Kumam, P., Hassan Ibrahim, A. and Padcharoen, A. 2020. Relaxed inertial Tseng's type method for solving the inclusion problem with application to image restoration. *Mathematics*, 8(5), 818, 1-19.
- Agarwal, R. P., O'Regan, D. and Sahu, D. R. 2007. Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, 8(1), 61-79.
- Altıparmak, A. and Karahan, I. 2022. A new preconditioning algorithm for finding a zero of the sum of two monotone operators and its application to image restoration problems. *International Journal of Computer Mathematics*, 99(12), 2482-2498.
- Altıparmak, E. and Karahan, I. 2022. A Modified preconditioning algorithm for solving monotone inclusion problem and application to image restoration problem. *University Politehnica of Bucharest Series A*, 84(2), 81-92.
- Altıparmak, E. and Karahan, I. 2023. A modified inertial viscosity algorithm for an infinite family of nonexpansive mappings and its application to image restoration. *Journal of Industrial and Management Optimization*, doi: [10.3934/jimo.2023086](https://doi.org/10.3934/jimo.2023086).
- Altıparmak, E. and Karahan, I. 2021. Convergence Theorem of Inertial S*-algorithm for Family of Nonexpansive Mappings with Applications, 8th International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2021), September 24-27, Full Text Paper, 36-45, Bodrum/Muğla.
- Aoyama, K., Yasunori, Y., Takahashi, W. and Toyoda, M. 2007. On a strongly nonexpansive sequence in a Hilbert space. *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, 8(3), 471-489.
- Artsawang, N. and Unngchitrakool, K. 2020. Inertial mann-type algorithm for nonexpansive mapping to solve monotone inclusion and image restoration problems. *Symmetry*, 12(750), 1-17.
- Bayraktar, M. 2006. *Fonksiyonel Analiz*. Atatürk Üniversitesi Yayınları, 314, Erzurum.
- Bauschke, H. H. and Combettes, P. L. 2011. *Convex analysis and monotone operator theory in Hilbert Spaces*. Books in Mathematics, Springer, 486, New York.
- Beck, A. and Tebboulle, M. 2009. A fast iterative shrinkage-thresholding algorithm for linear inverse problems. *SIAM Journal on Imaging Sciences*, 2(1), 183-202.
- Bussaban, L., Suantai, S. and Kaewkhao, A. 2020. A parallel inertial S-iteration forward-backward algorithm for regression and classification problems. *Carpathian Journal of Mathematics*, 36(1), 35-44.

- Brezis, H. 1973. Ope rateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans le espaces de Hilbert. Elsevier, 182, North Holland, The Netherlands.
- Byrne, C. 2002. Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility Problem. *Inverse Problems*, 18(2), 441.
- Cegielski, A. 2012. Iterative methods for fixed point problems in Hilbert spaces, Lecture notes in mathematics. Springer, 298, London.
- Chen, R. and Zhu, Z. 2006. Viscosity approximation fixed points for nonexpansive and m-accretive operators. *Fixed Point Theory and Applications*, 2006, 1-10.
- Combettes, P. L. 2004. Solving monotone inclusions via compositions of nonexpansive averaged operators. *Optimization*, 53(5-6), 475–504.
- Dixit, A., Sahu, D. R., Gauntam, P., Som, T. and Yao, J. C. 2021. An accelerated forward-backward splitting algorithm for solving inclusion problems with applications to regression and link prediction problems. *Journal of Nonlinear Variational Analysis*, 5(1), 79-101.
- Goebel, K. and Reich, S. 1984. Uniform convexity, hyperbolic geometry, and nonexpansive mappings. Markel Dekker, 192, New York, USA.
- Goebel, K. and Kirk, W. A. 1990. Topics in metric fixed point theory. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 252, Cambridge, UK.
- Hanjing, A. and Suantai, S. 2020. A Fast image restoration algorithm based on a fixed point and optimization method. *Mathematics*, 8(3), 378, 1-13.
- Himmelblau, David M. 1972. Applied Nonlinear Programming. McGraw- Hill, 78–83, New York.
- Hussain, N., Ullah, K. and Arshad, M. 2018. Fixed point approximation of Suzuki generalized nonexpansive mappings via new faster iteration process. arXiv preprint arXiv:1802.09888.
- Janngam, K. and Suantai, S. 2021. An accelerated forward-backward algorithm with Applications to image restoration problems. *Thai Journal of Mathematics*, 19(2), 325-339.
- Jung, J. S. 2013. Iterative algorithms for monotone inclusion problems, fixed point and minimization problems. *Fixed Point Theory and Applications*, 2013(1), 1-23.
- Kaewyong, N. and Sitthithakerngkiet, K. 2021. Modified Tseng's method with inertial viscosity type for solving inclusion problems and its application to image restoration problems. *Mathematics*, 9(10), 1104.
- Karahan, I. and Ozdemir, M. 2013. A general iterative method for approximation of fixed points and their applications. *Advances in Fixed Point Theory*, 3(3), 510-526.

- Kim, T. H. and Xu, H. K. 2005. Strong convergence of modified Mann iterations, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 61(1-2), 51-60.
- Kitkuan, D., Kuman, P., Padcharoen, A., Kuman, W. and Thounthong, P. 2019a. algorithms for solving convex minimization problems and its application to image restoration problems. *Journal of Computational Applied Mathematics*, 354, 471-495.
- Kitkuan, D., Kumam, P., Martinez-Moreno, J. and Sitthithakerngkiet, K. 2019b. Inertial viscosity forward-backward splitting algorithm for monotone inclusion and its applications to image restoration problems. *International Journal of Computer Mathematics*, 97(1-2), 482-497.
- Kitkuan, D. Kuman, P. and Martinez-Moreno, J. 2020a. Generalized Halpern-type forward backward splitting methods for convex minimization problems with application to image restoration problems. *Optimization*, 69(7-8), 1557-1581.
- Kitkuan, D., Muangchoo, K., Padcharoen, A., Pakkaranang, N. and Kumam, P. 2020b. A viscosity forward-backward splitting approximation method in Banach spaces and its application to convex optimization and image restoration problems. *Computational and Mathematical Methods*, 2(4), e1098, 1-22.
- Limaye, B. V. 1996. *Functional analysis*. New Age, 601, New Delhi.
- Lions, P. L. and Mercier, B. 1979. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear Operators. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 16(6), 964-979.
- Lorenz, D. A. and Pock, T. 2015. An inertial forward-backward algorithm for monotone operators. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 155, 447-454.
- Lopez, G., Martin-Marquez, V., Wang, F. and Xu, H. K. 2012. Forward-backward splitting methods for accerative operators in Banach spaces. *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 1-25.
- Madox, I. J. 1970. *Elements of functional analysis*. Cambridge University Press, 208, Cambridge.
- Maru, M. and Parikh, M.C. 2017. Image restoration techniques: a survey. *International Journal of Computer Applications*, 160(6), 15-19.
- Mainge, P. E. 2008. Strong convergence of projected subgradient methods for nonsmooth and nonstrictly convex minimization. *Set-Valued Analysis*, 16(7-8), 899-912.
- Moudafi, A. and Oliny, M. 2003. Convergence of a splitting inertial proximal method for monotone operators. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 155(2), 447-454.

- Moudafi, A. and Al-Shemas, E. 2013. Simultaneous iterative methods for split equality problem. *Trans. Math. Program. Appl.*, 1(2), 1-11.
- Nakajo, K., Shimoji, K. and Takahashi, W. 2009. On strong convergence by the hybrid method for families of mappings in Hilbert spaces. *Nonlinear Analysis Theory Method and Applications*, 71(3-4), 112-119.
- Padcharoen, A. and Kumam, P. 2020. Fixed point optimization method for image restoration. *Thai Journal of Mathematics*, 18(3), 1581-1596.
- Padcharoen, A., Kuman, P., Chaipunya, P. and Shehu, Y. 2020b. Convergence of inertial modified krasnoselskii-mann iteration with application to image recovery. *Thai Journal of Mathematics*, 18(1), 126-142.
- Padcharoen, A., Kitkuan, D., Kuman, W. and Kuman, P. 2020a. Tseng methods with inertial for solving inclusion problems and application to image deblurring and image recovery problems. *Computational and Mathematical Methods*, 3(3), 1-14.
- Puangpee, J. and Suantai, S. 2020. A new accelerated viscosity iterative method for an infinite family of nonexpansive mappings with applications to image restoration Problems. *Mathematics*, 8(4), 615, 1-19.
- Shehu, Y. and Cai, G. 2018. Strong convergence result of forward-backward splitting methods for accretive operators in Banach spaces with applications. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales Series A Matemáticas*, 112, 71-87.
- Takahashi, W., Wong, N. C. and Yao, J. C. 2012. Two generalized strong convergence theorems of Halpern's type in Hilbert spaces and applications. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 16(3), 1151-1172.
- Takahashi, W. 2009. *Introduction to nonlinear and convex analysis*. Publishers Yokohama, 234, Yokohama.
- Tan, K. and Xu, H. K. 1993. Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 178(2), 301-308.
- Tseng, P. 2000. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 38(2), 431-446.
- Verma, M. and Shukla, K. K. 2017. A new accelerated proximal gradient technique for regularized multitask learning framework. *Pattern Recognition Letters*, 95, 98-103.
- Zeidler, E. 1986. *Nonlinear functional analysis and its applications. III: Variational Methods and Applications*, Springer, 651, New York.

- Xu, H. K. 2002. Another control condition in an iterative method for nonexpansive mappings. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 65(1), 109-113.
- Xu, H. K. 2006. Strong convergence of an iterative method for nonexpansive and accretive operators. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 314(2), 631-643.

