

SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI

İshak ALTUN

**DOKTORA TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2007
ANKARA**

İshak ALTUN tarafından hazırlanan SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI adlı bu tezin Doktora tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Mustafa KORKMAZ

Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye : Prof. Dr. Bahri TURAN

Üye : Doç Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Üye : Doç. Dr. Alev KANIBİR

Tarih : 06 / 06 / 2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

İshak ALTUN

SABİT NOKTA TEOREMLERİ VE UYGULAMALARI**(Doktora Tezi)****İshak ALTUN****GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Haziran 2007****ÖZET**

Bu çalışmada bir uzay üzerinde iki metrik ile birlikte bir kapalı bağıntıyı sağlayan tek değerli bir dönüşüm için iki sabit nokta teoremi ispatlandı ve bu teoremlerden biri kullanılarak bir uygulama verildi. Ayrıca bir sıralı Banach uzayı üzerinde tanımlı iki küme değerli dönüşümün ortak sabit noktasını veren bir teorem yardımıyla iki integral içermenin ortak çözümünün varlığı hakkında bir teorem ispatlandı.

Bilim Kodu : 204.1.132**Anahtar Kelimeler : Metrik uzay, Kapalı bağıntı, Küme değerli dönüşüm, İntegral içirme****Sayfa Adedi : 66****Tez Yöneticisi : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU**

FIXED POINT THEOREMS AND APPLICATIONS**(Ph.D. Thesis)****İshak ALTUN****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****June 2007****ABSTRACT**

In this study, two fixed point theorems for single valued mappings satisfying an implicit relation on a space with two metrics have been proved and an application has been given using one of these theorems. Also, an existence theorem for common solution of two integral inclusions has been proved using a common fixed point theorem for multivalued mappings on an ordered Banach space.

Science Code : 204.1.132**Key Words : Metric space, implicit relation, multivalued map, integral inclusion****Page Number: 66****Adviser : Assoc. Prof. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU 'na teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	viii
1. GİRİŞ	1
2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER	5
3. METRİK UZAYLARDA SABİT NOKTA TEOREMLERİ.....	12
3.1. Metrik Uzayda Tek Değerli Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri	12
3.2. Uygulama	36
4. KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BİR SABİT NOKTA TEOREMİ VE UYGULAMASI	43
4.1. Küme Değerli Dönüşümler İçin Bir Sabit Nokta Teoremi	43
4.2. Uygulama	49
5. SONUÇ	62
KAYNAKLAR	63
ÖZGEÇMİŞ	66

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklamalar
(X, d)	Metrik uzay
$CB(X)$	X in boş olmayan kapalı altkümelerinin ailesi
d_H	Hausdorff metriği
$\alpha(A)$	A kümesinin kompaktsızlık ölçüsü
$Gr(F)$	F dönüşümünün grafiği

1.GİRİŞ

X boştan farklı bir küme ve $f : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $fx_0 = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası varsa bu x_0 noktasına f dönüşümünün bir sabit noktası denir. Örneğin,

$$X = [0, \infty), \quad fx = \frac{x}{2}, \quad gx = x + 1$$

şeklinde tanımlanırsa, $x_0 = 0$ noktası f dönüşümünün sabit noktasıdır ancak g dönüşümünün sabit noktası yoktur. Yine $X = (0, \infty)$ alınırsa f dönüşümünün de sabit noktası olmadığı açıktır. O halde bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, o dönüşümün tanımına bağlı olduğu gibi tanımlandığı kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teori çalışmaları, bir dönüşümün sabit noktasının hangi koşullar altında var olduğu, varsa tek olup olmadığı, tek ise nasıl bulunabileceği sorularına cevap aramaktadır.

Genel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki yönde gelişmektedir. Birincisi tam metrik uzaylar üzerinde tanımlı büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teori, diğeri ise normlu lineer uzayların kompakt konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı sürekli dönüşümler için sabit nokta teoridir.

Normlu lineer uzaylarda sabit nokta teori çalışmaları Brouwer ile başlamıştır. Brouwer, $\mathbb{R}^n$ nin kapalı birim yuvarından yine kendi üzerine tanımlanan sürekli dönüşümün sabit noktasının varlığını kanıtlamıştır [1]. Daha sonra Schauder, Brouwer'ın teoremini $\mathbb{R}^n$ yerine herhangi bir normlu lineer uzay olarak aşağıdaki şekilde genişletmiştir [2].

“ X bir normlu lineer uzay, $C \subseteq X$ kapalı ve konveks bir alt küme ve $f : C \rightarrow C$ sürekli ve kompakt bir dönüşüm olsun. O zaman f , C de bir sabit noktaya sahiptir”.

Tam metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teori çalışmaları ise Banach ile başlamıştır. Banach, büzülme dönüşüm prensibi olarak da bilinen aşağıdaki teoremi vermiştir [3].

“(X, d) bir tam metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve bir $\alpha \in [0, 1)$ için $d(fx, fy) \leq \alpha d(x, y)$ eşitsizliğini sağlıyorsa f dönüşümü bir tek $z \in X$ sabit noktasına sahiptir, üstelik her $x \in X$ için $y_n = f^n x$ şeklinde tanımlanan $\{y_n\}$ dizisi z noktasına yakınsar”.

Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de göstermektedir.

Sabit nokta teorisinin temelini teşkil eden yukarıdaki teoremler daha sonra pek çok yazar tarafından genelleştirilmiştir. Örneğin, Ćirić çalışmalarını, “Fixed Point Theory” adlı kitabında toplamış, Kirk ve Sims, çeşitli yazarlar tarafından yazılmış olan makaleleri “Handbook of Metric Fixed Point Theory” adlı bir kitapta toplamış ve sabit nokta teori çalışanlar için temel bir kitap olan “Fixed Point Theory and Applications” adlı kitap ise Agarwal, Meehan ve O’Regan tarafından yazılmıştır [4-6].

Sabit nokta teori çalışmaları sadece yukarıda bahsedilen tam metrik ve normlu uzaylarda sınırlı kalmayıp, sıralı Banach uzayları, düzgün uzaylar, fuzzy metrik uzaylar v.b. uzaylarda da yapılmıştır. Bahsedilen bu uzaylardaki birkaç çalışma şu kaynaklarda bulunabilir [7-15].

Ayrıca sabit nokta teori matematiğin çeşitli alanlarında uygulaması olması nedeniyle matematik dünyasında önemli bir yer tutmaktadır. Örneğin bu teori lineer denklemlerin, diferensiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğinde sıkça kullanılmaktadır. Bu yöndeki bazı çalışmalar şu kaynaklarda bulunabilir [16-18].

Tek değerli dönüşümler için sabit nokta teori, daha sonra küme değerli dönüşümler açısından da incelenmeye başlanmıştır. X boştan farklı bir küme, 2^X , X in boştan farklı alt kümelerinin ailesi ve $F : X \rightarrow 2^X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x_0 \in Fx_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ noktası varsa bu x_0 noktasına F küme değerli dönüşümünün bir sabit noktası denir. Örneğin,

$$X = [0,1], Fx = [x^3, x^2]$$

şeklinde tanımlanırsa $x_0 = 0$ ve $x_1 = 1$ bu dönüşümün sabit noktalarıdır.

(X, d) bir metrik uzay, $CB(X)$ de X in boştan farklı kapalı ve sınırlı alt kümelerinin ailesi olmak üzere $A, B \in CB(X)$ için

$$d(x, A) = \inf\{d(x, y) : y \in A\}$$

ve

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B), \sup_{y \in B} d(y, A)\}$$

olarak tanımlansın. Nadler, Hausdorff metriği olarak ta bilinen yukarıdaki d_H fonksiyonunu kullanarak küme değerli dönüşümler için ilk sabit nokta teoremini aşağıdaki şekilde vermiştir [19].

“(X, d) bir tam metrik uzay ve $F : X \rightarrow CB(X)$ küme değerli dönüşümü, eğer her $x, y \in X$ ve bir $\lambda \in (0,1)$ için

$$d_H(Fx, Fy) \leq \lambda d(x, y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa X içinde bir sabit noktaya sahiptir”.

Nadler'in bu teoreminden sonra gelişmeye başlayan küme değerli dönüşümler için sabit nokta teori de tek değerli dönüşümler için verilen sabit nokta teoremlerine benzer şekilde diferensiyel ve integral içermelerin çözümlerinin varlık ve tekliğinde kullanılmıştır. Küme değerli dönüşümler için verilen bazı sabit nokta teoremlerine ve bunların bazı uygulamalarına örnek olarak şu kaynaklara bakılabilir [20-30].

2. BAZI TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde ileride kullanacağımız bazı temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

$\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \leq y$ bağıntısının $y - x \in \mathbb{R}_+$ bağıntısına denk olduğu bilinmektedir. Bu düşünce ile bir Banach uzayında $\mathbb{R}_+$ nın yerine geçecek uygun bir alt küme bulunduğunda bu uzayda sıralama yapılabilir.

2.1. Tanım

$(E, \|\cdot\|_E)$ bir reel Banach uzayı ve $K \subseteq E$ boştan farklı kapalı bir küme olsun. Eğer K kümesi,

- (i) $K + K \subseteq K$,
- (ii) Her $\lambda > 0$ için $\lambda K \subseteq K$,
- (iii) $0, E$ nin birimi olmak üzere, $-K \cap K = \{0\}$

koşullarını sağlıyorsa K kümesine E içinde bir koni denir. Böylece E üzerinde

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K$$

şeklinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlanabilir. E Banach uzayı K tarafından üretilen $\leq$ kısmi sıralama bağıntısı ile donatıldığında E ye bir sıralı Banach uzayı denir [9].

2.1. Örnek

- (a) $E = \mathbb{R}^2$ uzayında $K = \{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0\}$ kümesinin koni koşullarını sağladığı kolayca gösterilebilir. Bu koni yardımıyla $\mathbb{R}^2$ üzerinde $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_2, y_2) - (x_1, y_1) \in K \Leftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ ve } y_1 \leq y_2$$

şeklinde bir kısmi sıralama bağıntısı tanımlanabilir. Dolayısıyla $\mathbb{R}^2$ kısmi sıralanmış bir uzay olur [31].

(b) $a, b \in \mathbb{R}$ için $(C([a, b]), \mathbb{R})$ ile $[a, b]$ kapalı aralığında $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların uzayını gösterirsek, bu uzay

$$\|x\|_{C([a, b])} = \max \{|x(t)| : t \in [a, b]\}$$

normu ile birlikte bir Banach uzayıdır. $(C([a, b]), \mathbb{R})$ nin negatif olmayan fonksiyonlarından oluşan altkümesi olan $(C([a, b]), \mathbb{R}_+)$ bir konidir [31].

E Banach uzayında K konisi tarafından elde edilen sıralama, kısmi sıralama olmasına rağmen $\mathbb{R}$ üzerindeki tam sıralama bağıntısının birçok özelliğine sahiptir. Örneğin, bir E Banach uzayında ki bir K konisi tarafından elde edilen $\leq$ sıralaması,

(i) her $x, y, z, w \in E$ için $x \leq y, z \leq w$ ise $x + z \leq y + w$

(ii) $x, y \in K$ ve $a, b \in \mathbb{R}_+$ için $ax + by \in K$,

(iii) $-x \in K$ ise $\inf\{\|x + y\| : y \in K\} > 0$

gibi özelliklere sahiptir [31].

2.2. Tanım

E bir reel Banach uzayı, $K \subseteq E$ bir koni, $x, y \in E$ ve $x \leq y$ olsun. $x \leq z \leq y$ koşulunu sağlayan bütün $z \in E$ elemanlarının kümesine sıra aralık denir ve $[x, y]$ ile gösterilir [9].

2.3. Tanım

E bir reel Banach uzayı, $K \subseteq E$ bir koni olsun. $0 \leq x \leq y$ koşulunu sağlayan herhangi $x, y \in E$ için $\|x\|_E \leq N\|y\|_E$ olacak şekilde $N > 0$ sayısı varsa K ya normal koni denir [9].

2.2. Örnek

(a) $(C([0,1]), \mathbb{R})$ uzayında $(C([0,1], \mathbb{R}_+))$ konisi normaldir [31].

(b) $(C^{(1)}([0,1]), \mathbb{R})$ ile $[0,1]$ kapalı aralığından $\mathbb{R}$ ye tanımlı bütün birinci mertebeden sürekli türeve sahip fonksiyonların uzayını gösterirsek bu uzay

$$\|x\|_{C^{(1)}([0,1])} = \max \left\{ \|x\|_{C([0,1])}, \|x'\|_{C([0,1])} \right\}$$

normu ile bir Banach uzayıdır. Bu uzayda $(C^{(1)}([0,1], \mathbb{R}_+))$ konisi normal değildir.

Gerçekten $y(t) = 1$ ve $x_n(t) = \sin^2 nt$ ise $0 \leq x_n(t) \leq y(t)$ olmasına rağmen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_{C^{(1)}([0,1])} = \infty \text{ dur [31].}$$

Eğer E nin her sıra aralığı norma göre sınırlı ise K konisi normaldir [9].

2.4. Tanım

E bir reel Banach uzayı, Ω_E de E nin bütün sınırlı alt kümelerinin ailesi olsun.

$A \in \Omega_E$ için $\text{Çap}(A_i) = \sup \{|x - y| : x, y \in A_i\}$ olmak üzere

$$\alpha(A) = \inf \left\{ \varepsilon > 0 : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n A_i \text{ ve } \text{Çap}(A_i) \leq \varepsilon, i \in \{1, 2, \dots, n\} \right\}$$

şeklinde tanımlanan $\alpha : \Omega_E \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonuna Kuratowskii kompaktsızlık ölçüsü denir [32].

2.1. Teorem

E bir reel Banach uzayı, $A, B \subseteq E$ sınırlı alt kümeler ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

- (i) $\alpha(A) = 0 \Leftrightarrow \bar{A}$ kompakt,
- (ii) $A \subseteq B$ ise $\alpha(A) \leq \alpha(B)$,
- (iii) $\alpha(\bar{A}) = \alpha(A)$,
- (iv) $\alpha(A \cup B) = \max\{\alpha(A), \alpha(B)\}$,
- (v) $\lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$ olmak üzere $\alpha(\lambda A) = |\lambda| \alpha(A)$,
- (vi) $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ olmak üzere $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$,
- (vii) $co(A)$, A kümesinin konveks zarfı olmak üzere, $\alpha(co(A)) = \alpha(A)$,
- (viii) A kümesi sonlu ise $\alpha(A) = 0$ dır [32].

2.5. Tanım

X bir topolojik uzay, (Y, d) bir metrik uzay, $C(X, Y)$, X den Y ye tanımlı bütün sürekli fonksiyonların sınıfı ve $\Omega \subseteq C(X, Y)$ olsun. Eğer bir $x_0 \in X$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\forall x \in U \text{ ve } \forall f \in \Omega \text{ için } d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde x_0 in bir U açık komşuluğu varsa Ω kümesine x_0 noktasında eşsüreklidir denir. Eğer Ω kümesi X in her noktasında eşsüreklidir ise Ω kümesine X içinde eşsüreklidir denir [33].

Açıktır ki Ω kümesi X de eşsürekli ise, Ω nın keyfi bir f elemanı X de sürekli-dir. Bunun tersi doğru olmayabilir, yani her $f \in \Omega$ sürekli iken Ω eşsürekli olmaya-bilir.

2.3. Örnek

$X = Y = \mathbb{R}$ ve üzerindeki metrik alışılmış metrik olsun ve

$$\Omega = \{f_n : f_n(x) = nx, x \in \mathbb{R}\} \subseteq C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

ile tanımlansın. Ω nın her bir elemanının sürekli olduğu açıktır. Ancak $x_0 \in \mathbb{R}$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| = n|x - x_0| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının bulunamayacağı açıktır. Dolayısıyla Ω kümesi eşsürekli değildir .

2.6. Tanım

X, Y iki Banach uzayı, $D \subseteq X$ ve $F : D \rightarrow 2^Y$ bir dönüşüm olsun. Eğer Y nin her V açık alt kümesi için $F^+(V) = \{x \in D : Fx \subset V\}$ kümesi D içinde açık oluyorsa F dönüşümüne D içinde üstten yarı süreklidir denir. Yine eğer Y nin her V açık alt kümesi için $F^-(V) = \{x \in D : Fx \cap V \neq \emptyset\}$ kümesi D içinde açık oluyorsa F dönüşümüne D içinde alttan yarı süreklidir denir [32].

$Fx_0 \subset V$ olacak şekilde Y içindeki her V açık alt kümesi için $F(B(x_0, \delta) \cap D) \subset V$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(x_0, V) > 0$ sayısı varsa F küme değerli dönüşümüne $x_0 \in D$ noktasında üstten yarı süreklidir denir. Yine eğer her $y \in Fx_0$ ve y nin her

V komşuluğu için $x \in D \cap B(x_0, \delta)$ olmak üzere $Fx \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(x_0, y, V) > 0$ sayısı varsa F küme değerli dönüşümüne $x_0 \in D$ noktasında alttan yarı süreklidir denir [32].

2.7. Tanım

X ve Y iki Banach uzayı, $D \subseteq X$, $F : D \rightarrow 2^Y$ bir dönüşüm ve d , Y üzerindeki metrik olsun. $x_n \rightarrow x_0$ iken $d_H(Fx_n, Fx_0) \rightarrow 0$ oluyorsa F küme değerli dönüşümüne süreklidir denir [32].

2.2. Teorem

X ve Y iki Banach uzayı $D \subseteq X$ ve $F : D \rightarrow 2^Y$ bir dönüşüm olsun.

a) F, D de üstten yarı süreklidir ancak ve ancak her kapalı $A \subset Y$ kümesi için $F^-(A)$ kümesi D içinde kapalıdır. F alttan yarı süreklidir ancak ve ancak her açık $V \subset Y$ kümesi için $F^-(A)$ kümesi D içinde açıktır.

b) Her $x \in D$ için Fx kapalı ve d , Y üzerindeki metrik olsun. Bu durumda $x_n \rightarrow x_0$ iken $\sup\{d(y, Fx_n) : y \in Fx_0\} \rightarrow 0$ oluyorsa F alttan yarı süreklidir. Yine $x_n \rightarrow x_0$ iken $\sup\{d(y, Fx_0) : y \in Fx_n\} \rightarrow 0$ oluyorsa F üstten yarı süreklidir. F hem alttan hem de üstten yarı sürekli ise süreklidir.

c) Her $x \in D$ için Fx kapalı olsun. Eğer F üstten yarı sürekli ve D kapalı ise bu durumda F nin grafiği olan $Gr(F) = \{(x, y) \in X \times Y : x \in X, y \in Fx\}$ kümesi kapalıdır. Eğer $\overline{F(D)}$ kompakt ve D kapalı ise bu durumda F nin üstten yarı sürekli olması için gerek ve yeter koşul $Gr(F)$ nin kapalı olmasıdır.

d) Eğer D kompakt, F üstten yarı sürekli ve her $x \in D$ için Fx kompakt ise bu durumda $F(D)$ kompaktır [32].

2.4. Örnek

$X = Y = \mathbb{R}$ olsun. F ve G küme değerli dönüşümleri

$$Fx = \begin{cases} \{1\} & , \quad x \neq 0 \\ [0,1] & , \quad x = 0 \end{cases}$$

ve

$$Gx = \begin{cases} [0,1] & , \quad x \neq 0 \\ \{0\} & , \quad x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda F üstten yarı sürekli fakat alttan yarı sürekli değildir. Yine G alttan yarı sürekli fakat üstten yarı sürekli değildir [34].

3. METRİK UZAYDA BAZI SABİT NOKTA TEOREMLERİ

3.1. Metrik Uzayda Tek Değerli Dönüşümler İçin Bazı Sabit Nokta Teoremleri

Bu kısımda bir uzay üzerinde iki metrik ile birlikte bir kapalı (implicit) bağıntıyı kullanarak tek değerli dönüşümler için sabit nokta teoremleri verilecektir.

Bu kısımda kullanacağımız kapalı bağıntıyı tanımlayarak buna ilişkin bazı örnekleri verelim.

$\mathbb{R}_+$ negatif olmayan reel sayıların kümesi ve $\mathcal{T}$ de $\mathbb{R}_+^6$ dan $\mathbb{R}$ ye aşağıdaki koşulları sağlayan bütün sürekli T fonksiyonların kümesini gösterebiliriz:

$T_1 : T(t_1, t_2, \dots, t_6)$ fonksiyonu $t_2, \dots, t_6$ değişkenlerine göre artmayan,

$$T_2 : T(u, v, v, u, u + v, 0) \leq 0$$

veya

$$T(u, v, 0, 0, v, v) \leq 0$$

iken $\mathbb{R}_+$ dan $\mathbb{R}_+$ ya sürekli, azalmayan, $f(0) = 0$, $t > 0$ için $f(t) < t$ koşullarına uygun öyle f fonksiyonu vardır ki $u \leq f(v)$,

$$T_3 : \forall u > 0 \text{ için } T(u, 0, 0, u, u, 0) > 0 \text{ dır.}$$

Yukarıda verilen koşulları sağlayan fonksiyon için birkaç örnek verelim.

3.1. Örnek

T fonksiyonu $0 \leq \alpha < 1$, $0 \leq a < 1/2$, $0 \leq b < 1/2$ olmak üzere

$$T(t_1, \dots, t_6) = t_1 - \alpha \max\{t_2, t_3, t_4\} - (1 - \alpha)[at_5 + bt_6]$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T \in \mathcal{T}$ olur.

Gerçekten T fonksiyonunun $t_2, \dots, t_6$ değişkenlerine göre artmayan olduğu açıktır.

$u > 0$ ve

$$T(u, v, v, u, u + v, 0) = u - \alpha \max\{u, v\} - (1 - \alpha)a(u + v) \leq 0$$

olsun. Eğer $u \geq v$ ise $(1 - \alpha)u \leq au$ olup $a < 1/2$ olduğundan bu bir çelişki oluşturur.

O halde $u < v$ dir. Böylece $u - \alpha \max\{u, v\} - (1 - \alpha)a(u + v) \leq 0$ ifadesinden

$$u \leq \frac{\alpha + (1 - \alpha)a}{1 - (1 - \alpha)a}v \text{ bulunur. Benzer şekilde } u > 0 \text{ ve}$$

$$T(u, v, 0, 0, v, v) = u - \alpha v - (1 - \alpha)(a + b)v \leq 0$$

olsun. Buradan $u \leq [\alpha + (1 - \alpha)(a + b)]v$ bulunur. Eğer $u = 0$ ise bu durumda da

$u \leq [\alpha + (1 - \alpha)(a + b)]v$ olduğu açıktır. Böylece

$$f(t) = \max\left\{\frac{\alpha + (1 - \alpha)a}{1 - (1 - \alpha)a}, \alpha + (1 - \alpha)(a + b)\right\}t$$

olmak üzere T_2 koşulu sağlanır.

Yine her $u > 0$ için

$$T(u, 0, 0, u, u, 0) = (1 - \alpha)(1 - a)u > 0$$

olur. Yani T_3 koşulu da sağlanır. Sonuç olarak $T \in \mathcal{T}$ dir.

3.2. Örnek

T fonksiyonu $0 \leq k < 1$ olmak üzere

$$T(t_1, \dots, t_6) = t_1 - k \max \left\{ t_2, t_3, t_4, \frac{t_5 + t_6}{2} \right\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T \in \mathcal{T}$ olur.

Gerçekten T fonksiyonunun $t_2, \dots, t_6$ değişkenlerine göre artmayan olduğu açıktır.

$u > 0$ ve

$$T(u, v, v, u, u + v, 0) = u - k \max \{u, v\} \leq 0$$

olsun. Eğer $u \geq v$ ise $u \leq ku$ olur ki bu bir çelişkidir. O halde $u < v$ ve böylece $u \leq kv$ olur. Benzer şekilde $u > 0$ ve

$$T(u, v, 0, 0, v, v) = u - k \max \{u, v\} \leq 0$$

ise yine $u \leq kv$ olur. Eğer $u = 0$ ise de $u \leq kv$ olduğu açıktır. Böylece $f(t) = kt$ olmak üzere T_2 koşulu sağlanır.

Yine her $u > 0$ için

$$T(u, 0, 0, u, u, 0) = (1 - k)u > 0$$

olur. Yani T_3 koşulu da sağlanır. Sonuç olarak $T \in \mathcal{T}$ dir.

3.3. Örnek

T fonksiyonu, $\phi: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sürekli, azalmayan, $\phi(0) = 0$ ve $t > 0$ için $\phi(t) < t$ koşullarını sağlayan fonksiyon olmak üzere

$$T(t_1, \dots, t_6) = t_1 - \phi\left(\max\left\{t_2, t_3, t_4, \frac{t_5 + t_6}{2}\right\}\right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T \in \mathcal{T}$ olur.

Gerçekten T fonksiyonunun $t_2, \dots, t_6$ değişkenlerine göre artmayan olduğu açıktır.

$u > 0$ ve

$$T(u, v, v, u, u + v, 0) = u - \phi(\max\{u, v\}) \leq 0$$

olsun. Eğer $u \geq v$ ise $u \leq \phi(u)$ olup bu bir çelişki olur. O halde $u < v$ ve böylece $u \leq \phi(v)$ olur. Benzer şekilde $u > 0$ ve

$$T(u, v, 0, 0, v, v) = u - \phi(\max\{u, v\}) \leq 0$$

ise yine $u \leq \phi(v)$ elde edilir. Eğer $u = 0$ ise bu durumda da $u \leq \phi(v)$ olduğu açıktır. Böylece $f = \phi$ olmak üzere T_2 koşulu sağlanır.

Yine her $u > 0$ için

$$T(u, 0, 0, u, u, 0) = u - \phi(u) > 0$$

olur. Yani T_3 koşulu da sağlanır. Sonuç olarak $T \in \mathcal{T}$ dir.

3.4. Örnek

T fonksiyonu, $a > 0$, $b, c, d \geq 0$, $a + b + c < 1$ ve $a + d < 1$ olmak üzere

$$T(t_1, \dots, t_6) = t_1^2 - t_1(at_2 + bt_3 + ct_4) - dt_5t_6$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T \in \mathcal{T}$ olur.

Gerçekten T fonksiyonunun $t_2, \dots, t_6$ değişkenlerine göre artmayan olduğu açıktır.

$u > 0$ ve

$$T(u, v, v, u, u + v, 0) = u^2 - u(av + bv + cu) \leq 0$$

olsun. O halde $u \leq \frac{a+b}{1-c}v$ olur. Benzer şekilde $u > 0$ ve

$$T(u, v, 0, 0, v, v) = u^2 - auv + dv^2 \leq 0$$

ise bu durumda $u \leq \frac{a + \sqrt{4d + a^2}}{2}v$ bulunur. Eğer $u = 0$ ise bu durumda da

$u \leq \frac{a + \sqrt{4d + a^2}}{2}v$ olduğu açıktır. Böylece

$$f(t) = \max \left\{ \frac{a+b}{1-c}, \frac{a+\sqrt{4d+a^2}}{2} \right\} t$$

olmak üzere T_2 koşulu sağlanır.

Yine her $u > 0$ için

$$T(u, 0, 0, u, u, 0) = (1-c)u^2 > 0$$

olur. Yani T_3 koşulu da sağlanır. Sonuç olarak $T \in \mathcal{T}$ dir.

3.5. Örnek

T fonksiyonu, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$T(t_1, \dots, t_6) = t_1^3 - \alpha \frac{t_3^2 t_4^2 + t_5^2 t_6^2}{t_3 + t_4 + t_5 + t_6 + 1}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $T \in \mathcal{T}$ olur.

Gerçekten T fonksiyonunun $t_2, \dots, t_6$ değişkenlerine göre artmayan olduğu kolayca gösterilebilir.

$u > 0$ ve

$$T(u, v, v, u, u+v, 0) = u^3 - \frac{\alpha v^2 u^2}{2u + 2v + 1} \leq 0$$

olsun. O halde $u \leq \frac{\alpha v^2}{2u+2v+1}$ olup ayrıca $\frac{\alpha v^2}{2u+2v+1} \leq \alpha v$ olduğundan $u \leq \alpha v$ elde edilir. Benzer şekilde $u > 0$ ve

$$T(u, v, 0, 0, v, v) = u^3 - \frac{\alpha v^4}{2v+1} \leq 0$$

ise bu durumda $u \leq \sqrt[3]{\alpha v}$ olur. Eğer $u = 0$ ise bu durumda da $u \leq \sqrt[3]{\alpha v}$ olduğu açıktır. Böylece $f(t) = \sqrt[3]{\alpha t}$ olmak üzere T_2 koşulu sağlanır.

Yine her $u > 0$ için

$$T(u, 0, 0, u, u, 0) = u^3 > 0$$

olur. Yani T_3 koşulu da sağlanır. Sonuç olarak $T \in \mathcal{T}$ dir.

Benzer şekilde $T \in \mathcal{T}$ olacak şekilde pek çok fonksiyon bulunabilir.

Bu kısımdaki orijinal teoremlerimizi vermeden önce teoremlerde kullanacağımız bazı kısaltmaları verelim.

(X, d') bir tam metrik uzay ve d de X üzerinde bir başka metrik, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ için

$$B_d(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

olsun. Ayrıca $\overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ ile $B_d(x_0, r)$ yuvarının d' metriğine göre kapanışını gösterelim. d ve d' bir X kümesi üzerinde iki metrik olmak üzere eğer her $x, y \in X$ için

$d'(x, y) \geq d(x, y)$ oluyorsa bu durumu $d' \geq d$ ile göstereceğiz. Aksi durumu ise $d' \not\geq d$ ile göstereceğiz. Örneğin $X = [0, 1]$ ve üzerindeki iki metrik, her $x, y \in X$ için

$$d(x, y) = |x - y|$$

ve

$$d'(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $d' \geq d$ olduğu açıktır. Eğer $X = [0, 2]$ ve d ile d' yukarıdaki gibi tanımlanırsa $d' \not\geq d$ ve $d \not\geq d'$ olur. Eğer en az bir $x, y \in X$ için $d'(x, y) \neq d(x, y)$ oluyorsa bu durumu $d' \neq d$ ile göstereceğiz. Açıktır ki $d' \not\geq d$ ise $d' \neq d$ dir. Fakat $d' \neq d$ olduğunda $d' \not\geq d$ veya $d \not\geq d'$ olmayabilir. Örneğin $X = [0, 1]$ ve d ile d' yukarıdaki gibi tanımlanırsa $d' \neq d$ olup $d' \geq d$ dir.

Şimdi bu kısımdaki ilk teoremimizi ifade ve ispat edelim.

3.1. Teorem

(X, d') bir tam metrik uzay, d, X üzerinde bir başka metrik, $x_0 \in X, r > 0$ ve $F : \overline{B_d(x_0, r)}^{d'} \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. F dönüşümünün aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

a) Her $x, y \in \overline{B_d(x_0, r)}^{d'}$ için

$$T(d(Fx, Fy), d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), d(x, Fy), d(y, Fx)) \leq 0$$

olacak şekilde $T \in \mathcal{T}$ var,

b) f fonksiyonu T_2 koşulundaki fonksiyon olmak üzere

$$r - d(x_0, Fx_0) = \gamma > 0 \text{ ve } \sum_{n=1}^{\infty} f^n(d(x_0, Fx_0)) < \gamma,$$

c) $d \not\leq d'$ iken $F : (B_d(x_0, r), d) \rightarrow (X, d')$ düzgün sürekli,

d) $d \neq d'$ iken $F : \overline{(B_d(x_0, r))^{d'}}, d') \rightarrow (X, d')$ sürekli.

Bu durumda $F, \overline{(B_d(x_0, r))^{d'}}$ içinde bir sabit noktaya sahiptir. Yani, $Fx = x$ olacak şekilde bir $x \in \overline{(B_d(x_0, r))^{d'}}$ vardır.

İspat

$x_1 = Fx_0$ olsun. $d(x_0, x_1) < r$ olduğundan $x_1 \in B_d(x_0, r)$ dir. Şimdi $n \in \{2, 3, \dots\}$ için $x_n = Fx_{n-1}$ diyelim. Aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu iddia ediyoruz.

$n \in \{1, 2, \dots\}$ için $x_n \in B_d(x_0, r)$ ve $\{x_n\}$ dizisi d metriğine göre bir Cauchy dizisidir.

İlk olarak $n \in \{1, 2, \dots\}$ için $x_n \in B_d(x_0, r)$ olduğunu görelim. Bunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanacağız. $x_0, x_1 \in B_d(x_0, r)$ olduğunu biliyoruz. O halde (a) koşulunu kullanabiliriz. Böylece

$$T(d(Fx_0, Fx_1), d(x_0, x_1), d(x_0, Fx_0), d(x_1, Fx_1), d(x_0, Fx_1), d(x_1, Fx_0))) \leq 0$$

ve buradan

$$T(d(x_1, x_2), d(x_0, x_1), d(x_0, x_1), d(x_1, x_2), d(x_0, x_2), 0) \leq 0$$

olur. T_1 ve T_2 koşulları kullanılırsa $\mathbb{R}_+$ dan $\mathbb{R}_+$ ya sürekli, azalmayan,

$$f(0) = 0, \quad t > 0 \text{ için } f(t) < t$$

koşullarına uygun öyle f fonksiyonu vardır ki

$$d(x_1, x_2) \leq f(d(x_0, x_1))$$

olur. O halde (b) koşulundan

$$\begin{aligned} d(x_0, x_2) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) \\ &\leq d(x_0, x_1) + f(d(x_0, x_1)) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \gamma \\ &= r \end{aligned}$$

elde edilir ki bu da $x_2 \in B_d(x_0, r)$ olduğunu gösterir. Şimdi $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $x_m \in B_d(x_0, r)$ olacak şekilde $k \in \{2, 3, \dots\}$ var olsun. $x_{k+1} \in B_d(x_0, r)$ olduğunu gösterelim. $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $x_{m-1}, x_m \in B_d(x_0, r)$ olduğundan (a) koşulu kullanılırsa,

$$T(d(Fx_{m-1}, Fx_m), d(x_{m-1}, x_m), d(x_{m-1}, Fx_{m-1}), d(x_m, Fx_m), d(x_{m-1}, Fx_m), d(x_m, Fx_{m-1})) \leq 0$$

ve buradan da

$$T(d(x_m, Fx_{m+1}), d(x_{m-1}, x_m), d(x_{m-1}, x_m), d(x_m, x_{m+1}), d(x_{m-1}, x_{m+1}), 0) \leq 0$$

elde edilir. Yine T_2 kullanılırsa $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ için

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq f(d(x_{m-1}, x_m))$$

olur. Yani $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ için

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq f^m(d(x_0, x_1))$$

bulunur. Diğer taraftan $k \in \{1, 2, \dots\}$ için

$$d(x_0, x_{k+1}) \leq d(x_0, x_1) + \sum_{m=1}^k d(x_m, x_{m+1})$$

olduğundan (b) koşulu da kullanılırsa

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{k+1}) &\leq d(x_0, x_1) + \sum_{m=1}^k f^m(d(x_0, x_1)) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \sum_{m=1}^{\infty} f^m(d(x_0, x_1)) \\ &\leq d(x_0, x_1) + \gamma \\ &= r \end{aligned}$$

bulunur. Böylece $x_{k+1} \in B_d(x_0, r)$ olur. Sonuç olarak $n \in \{1, 2, \dots\}$ için $x_n \in B_d(x_0, r)$

olur. Aynı zamanda $n \in \{1, 2, \dots\}$ için

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq f^n(d(x_0, x_1))$$

olduğuna da dikkat edilmelidir.

Şimdi de $\{x_n\}$ dizisinin d metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

Bunun doğru olmadığını kabul edelim. O halde $k \in \{1, 2, \dots\}$ için

$$r_k = d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \delta$$

olacak şekilde tam sayıların $\{m(k)\}$, $\{n(k)\}$, $m(k) > n(k) \geq k$ dizileri ve $\delta > 0$ sayısı bulunabilir. Aynı zamanda $n(k)$ dan büyük en küçük $m(k)$ için

$$d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) < \delta$$

olduğunu kabul edebiliriz. Böylece

$$\begin{aligned} \delta \leq r_k &\leq d(x_{m(k)}, x_{m(k)-1}) + d(x_{m(k)-1}, x_{n(k)}) \\ &\leq f^{m(k)-1}(d(x_0, x_1)) + \delta \end{aligned}$$

ve böylece de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_k = \delta$$

olur. Aynı zamanda

$$\delta \leq r_k \leq d(x_{n(k)}, x_{n(k)+1}) + d(x_{m(k)}, x_{m(k)+1}) + d(x_{n(k)+1}, x_{m(k)+1})$$

olduğundan

$$\delta \leq r_k \leq f^{n(k)}(d(x_0, x_1)) + f^{m(k)}(d(x_0, x_1) + d(Fx_{n(k)}, Fx_{m(k)})) \quad (3.1)$$

bulunur. Diğer taraftan $x_{n(k)}, x_{m(k)} \in B_d(x_0, r)$ olduğundan (a) koşulunu kullanabiliriz.

O halde

$$T(d(Fx_{n(k)}, Fx_{m(k)}), d(x_{n(k)}, x_{m(k)}), d(x_{n(k)}, Fx_{n(k)}), d(x_{m(k)}, Fx_{m(k)}), \\ d(x_{n(k)}, Fx_{m(k)}), d(x_{m(k)}, Fx_{n(k)})) \leq 0$$

ve böylece

$$T(d(Fx_{n(k)}, Fx_{m(k)}), r_k, f^{n(k)}(d(x_0, x_1)), f^{m(k)}(d(x_0, x_1)), r_k + f^{m(k)}(d(x_0, x_1)), \\ r_k + f^{n(k)}(d(x_0, x_1))) \leq 0$$

bulunur. T fonksiyonunun sürekli olduğu göz önüne alınarak bu son eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa

$$T(\lim_{k \rightarrow \infty} d(Fx_{n(k)}, Fx_{m(k)}), \delta, 0, 0, \delta, \delta) \leq 0$$

elde edilir. T_2 koşulundan ise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(Fx_{n(k)}, Fx_{m(k)}) \leq f(\delta)$$

bulunur. Böylece Eş.3.1 eşitsizliğinde $k \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $\delta \leq f(\delta)$ bulunur ki bu ise $t > 0$ için $f(t) < t$ olması ile çelişir. Bundan dolayı $\{x_n\}$ dizisi d metriğine göre bir Cauchy dizisidir.

Şimdi $\{x_n\}$ dizisinin d' metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Eğer $d \geq d'$ ise bu durum açıktır. $d \not\geq d'$ olsun ve $\varepsilon > 0$ verilsin. O halde (c) koşulu

$$\forall x, y \in B_d(x_0, r) \text{ ve } d(x, y) < \delta \text{ iken } d'(Fx, Fy) < \varepsilon$$

olacak şekilde $\delta > 0$ sayısının varlığını garanti eder. $\{x_n\}$ dizisi d metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğundan en az bir $n_0 \in \{1, 2, \dots\}$ vardır ki $n, m \geq n_0$ iken

$$d(x_n, x_m) < \delta$$

olur. Böylece $n, m \geq n_0$ iken

$$d'(x_{n+1}, x_{m+1}) = d'(Fx_n, Fx_m) < \varepsilon$$

bulunur ki bu da $\{x_n\}$ dizisinin d' metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece (X, d') tam metrik uzay olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $d'(x_n, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $x \in \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ vardır.

Bulunan bu $x \in \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ noktası için $Fx = x$ olduğunu gösterelim.

İlk olarak $d \neq d'$ durumunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} d'(x, Fx) &\leq d'(x, x_n) + d'(x_n, Fx) \\ &\leq d'(x, x_n) + d'(Fx_{n-1}, Fx) \end{aligned}$$

olup (d) koşulu kullanılır ve $n \rightarrow \infty$ için limit alınırsa $d'(x, Fx) = 0$ bulunur ki bu da $Fx = x$ olduğunu gösterir.

İkinci olarak $d = d'$ olsun. $x_{n-1}, x \in \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ olduğundan (a) koşulunu kullanabiliriz. Böylece

$$T(d(Fx_{n-1}, Fx), d(x_{n-1}, x), d(x_{n-1}, Fx_{n-1}), d(x, Fx), d(x_{n-1}, Fx), d(x, Fx_{n-1})) \leq 0$$

olup $n \rightarrow \infty$ için limit alınır

$$T(d(x, Fx), 0, 0, d(x, Fx), d(x, Fx), 0) \leq 0$$

elde edilir ki burada da T_3 koşulu kullanılırsa $d(x, Fx) = 0$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar.

Bu kısımdaki ikinci orijinal teoremimizi vermeden önce bu teoremden kullanacağımız kapalı bağıntıyı kısaca verelim.

$\mathcal{T}'$ kümesi $\mathbb{R}_+^6$ dan $\mathbb{R}$ ye tanımlı, T_1 ve T_3 koşulları ile birlikte aşağıdaki koşulu sağlayan bütün sürekli fonksiyonların kümesini gösterebiliriz:

$$T_2' : T(u, v, v, u, u + v, 0) \leq 0$$

veya

$$T(u, v, v, v, v, v) \leq 0$$

iken $\mathbb{R}_+$ dan $\mathbb{R}_+$ ya tanımlı, sürekli, azalmayan, $f(0) = 0$, $t > 0$ için $f(t) < t$ koşullarına uygun öyle f fonksiyonu vardır ki $u \leq f(v)$ dir.

Bu durumda $\mathcal{T}' \subseteq \mathcal{T}$ olduğu açıktır. Örnek 3.1, Örnek 3.2, Örnek 3.3 ve Örnek 3.5 içinde tanımlanan T fonksiyonlarının $\mathcal{T}'$ kümesine ait oldukları kolayca gösterilebilir. Ancak Örnek 3.4 de tanımlanan fonksiyon $a > 0$, $b, c, d \geq 0$ ve $a + b + c + d < 1$ koşulu altında $\mathcal{T}'$ kümesine aittir.

3.2. Teorem

(X, d') bir tam metrik uzay, d, X üzerinde bir başka metrik, $x_0 \in X, r > 0$ ve $F: \overline{B_d(x_0, r)^{d'}} \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. F dönüşümünün $F \in \mathcal{T}'$ olmak üzere (a), (c) ve (d) koşullarının yanı sıra

$$b') \quad d(x_0, Fx_0) < r - f(r)$$

koşulunu da sağladığını kabul edelim.

Bu durumda $F, \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ içinde bir sabit noktaya sahiptir. Yani, $Fx = x$ olacak şekilde bir $x \in \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ vardır.

İspat

$x_1 = Fx_0$ olsun. $d(x_0, x_1) < r$ olduğundan $x_1 \in B_d(x_0, r)$ olur. Şimdi $n \in \{2, 3, \dots\}$ için $x_n = Fx_{n-1}$ diyelim. Aşağıdaki ifadenin doğru olduğunu iddia ediyoruz.

$n \in \{1, 2, \dots\}$ için $x_n \in B_d(x_0, r)$ ve $\{x_n\}$ dizisi d metriğine göre bir Cauchy dizisidir.

İlk olarak $n \in \{1, 2, \dots\}$ için $x_n \in B_d(x_0, r)$ olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için tümevarım yöntemini kullanacağız. $x_0, x_1 \in B_d(x_0, r)$ olduğunu biliyoruz. O halde (a) koşulunu kullanabiliriz. Böylece

$$T(d(Fx_0, Fx_1), d(x_0, x_1), d(x_0, Fx_0), d(x_1, Fx_1), d(x_0, Fx_1), d(x_1, Fx_0))) \leq 0$$

ve buradan da

$$T(d(x_1, x_2), d(x_0, x_1), d(x_0, x_1), d(x_1, x_2), d(x_0, x_2), 0) \leq 0$$

elde edilir. T_1 ve T_2' koşulları kullanılırsa $\mathbb{R}_+$ dan $\mathbb{R}_+$ ya tanımlı, sürekli, azalmayan,

$$f(0) = 0, \quad t > 0 \text{ için } f(t) < t$$

koşullarına uygun öyle f fonksiyonu vardır ki

$$d(x_1, x_2) \leq f(d(x_0, x_1))$$

olur. O halde (b') koşulundan

$$\begin{aligned} d(x_0, x_2) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_2) \\ &\leq d(x_0, x_1) + f(d(x_0, x_1)) \\ &< [r - f(r)] + f(r) \\ &= r \end{aligned}$$

olur ki bu da $x_2 \in B_d(x_0, r)$ olduğunu gösterir. Şimdi $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $x_m \in B_d(x_0, r)$ olacak şekilde $k \in \{2, 3, \dots\}$ var olsun. $x_{k+1} \in B_d(x_0, r)$ olduğunu göstermeliyiz. $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ için $x_{m-1}, x_m \in B_d(x_0, r)$ olduğundan (a) koşulunu kullanabiliriz. O halde

$$T(d(Fx_{m-1}, Fx_m), d(x_{m-1}, x_m), d(x_{m-1}, Fx_{m-1}), d(x_m, Fx_m), d(x_{m-1}, Fx_m), d(x_m, Fx_{m-1})) \leq 0$$

ve buradan da

$$T(d(x_m, Fx_{m+1}), d(x_{m-1}, x_m), d(x_{m-1}, x_m), d(x_m, x_{m+1}), d(x_{m-1}, x_{m+1}), 0) \leq 0$$

elde edilir. Yine T_2' kullanılırsa $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ için

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq f(d(x_{m-1}, x_m))$$

olur. Yani $m \in \{1, 2, \dots, k\}$ için

$$d(x_m, x_{m+1}) \leq f^m(d(x_0, x_1))$$

bulunur. Şimdi

$$d(x_1, x_k) \leq f(r)$$

olduğunu gösterelim.

Eğer $k = 2$ ise, $d(x_1, x_2) \leq f(d(x_0, x_1)) \leq f(r)$ olur.

Eğer $k = 3$ ise, $d(x_1, x_3) = d(Fx_0, Fx_2)$ olup $x_0, x_2 \in B_d(x_0, r)$ olduğundan (a) koşulu kullanılırsa

$$T(d(Fx_0, Fx_2), d(x_0, x_2), d(x_0, Fx_0), d(x_2, Fx_2), d(x_0, Fx_2), d(x_2, Fx_0)) \leq 0$$

elde edilir ki buradan

$$T(d(x_1, x_3), d(x_0, x_2), d(x_0, x_1), d(x_2, x_3), d(x_0, x_3), d(x_2, x_1)) \leq 0$$

bulunur. Bu son ifadeden de

$$T(d(x_1, x_3), d(x_0, x_2), d(x_0, x_1), f^2(d(x_0, x_1)), d(x_0, x_3), d(x_2, x_1)) \leq 0$$

ve böylece

$$T(d(x_1, x_3), r, r, f^2(r), r, f(r)) \leq 0$$

bulunur. Diğer yandan $f(r) < r$ olduğundan T_1 koşulu kullanılırsa

$$T(d(x_1, x_3), r, r, r, r, r) \leq 0$$

bulunur. Böylece T_2' koşulundan

$$d(x_1, x_3) \leq f(r)$$

elde edilir.

Eğer $k = 4$ ise, $d(x_1, x_4) = d(Fx_0, Fx_3)$ olup $x_0, x_3 \in B_d(x_0, r)$ olduğundan (a) koşulu kullanılırsa

$$T(d(Fx_0, Fx_3), d(x_0, x_3), d(x_0, Fx_0), d(x_3, Fx_3), d(x_0, Fx_3), d(x_3, Fx_0)) \leq 0$$

elde edilir ki buradan

$$T(d(x_1, x_4), d(x_0, x_3), d(x_0, x_1), d(x_3, x_4), d(x_0, x_4), d(x_3, x_1)) \leq 0$$

bulunur. Bu son eşitsizlikten de

$$T(d(x_1, x_4), d(x_0, x_3), d(x_0, x_1), f^3(d(x_0, x_1)), d(x_0, x_4), d(x_3, x_1)) \leq 0$$

ve böylece

$$T(d(x_1, x_4), r, r, f^3(r), r, f(r)) \leq 0$$

olur. Diğer taraftan $f(r) < r$ olduğundan T_1 kullanılırsa

$$T(d(x_1, x_4), r, r, r, r, r) \leq 0$$

bulunur. Böylece T_2' koşulundan

$$d(x_1, x_4) \leq f(r)$$

bulunur. Yani $k = 4$ için de iddia doğrudur.

Bu şekilde devam edilerek $k \in \{5, 6, \dots\}$ içinde

$$d(x_1, x_k) \leq f(r)$$

olduğu gösterilebilir. Şimdi $x_{k+1} \in B_d(x_0, r)$ olduğunu görelim. $x_0, x_k \in B_d(x_0, r)$ olduğundan (a) kullanılırsa

$$T(d(Fx_0, Fx_k), d(x_0, x_k), d(x_0, Fx_0), d(x_k, Fx_k), d(x_0, Fx_k), d(x_k, Fx_0)) \leq 0$$

olur ki buradan

$$T(d(x_1, x_{k+1}), d(x_0, x_k), d(x_0, x_1), d(x_k, x_{k+1}), d(x_0, x_{k+1}), d(x_k, x_1)) \leq 0$$

bulunur. Bu son ifadeden

$$T(d(x_1, x_{k+1}), d(x_0, x_k), d(x_0, x_1), f^k(d(x_0, x_1)), d(x_0, x_{k+1}), d(x_k, x_1)) \leq 0$$

ve böylece de

$$T(d(x_1, x_{k+1}), r, r, f^k(r), r, f(r)) \leq 0$$

olur. Ayrıca $f(r) < r$ olduğundan T_1 kullanılırsa

$$T(d(x_1, x_{k+1}), r, r, r, r, r) \leq 0$$

bulunur. Böylece T_2' koşulundan

$$d(x_1, x_{k+1}) \leq f(r)$$

elde edilir. Son olarak

$$\begin{aligned} d(x_0, x_{k+1}) &\leq d(x_0, x_1) + d(x_1, x_{k+1}) \\ &\leq [r - f(r)] + f(r) \\ &= r \end{aligned}$$

bulunur ki bu da $x_{k+1} \in B_d(x_0, r)$ olduğunu gösterir. Yani $n \in \{1, 2, \dots\}$ için $x_n \in B_d(x_0, r)$ olur.

İspatın bundan sonraki kısmı Teorem 3.1 in ispatında olduğu gibi devam edilerek tamamlanır.

Yuvar üzerinde verilen yukarıdaki teoremden hareketle daha genel olan aşağıdaki teoremi ifade ve ispat edebiliriz.

3.3. Teorem

(X, d') bir tam metrik uzay, d, X üzerinde bir başka metrik, $F : X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. F dönüşümünün aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

a) Her $x, y \in X$ için

$$T(d(Fx, Fy), d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), d(x, Fy), d(y, Fx)) \leq 0$$

olacak şekilde $T \in \mathcal{T}'$ var,

b) $d \not\leq d'$ iken $F : (X, d) \rightarrow (X, d')$ düzgün sürekli,

c) $d \neq d'$ iken $F : (X, d') \rightarrow (X, d')$ sürekli.

Bu durumda F, X içinde bir sabit noktaya sahiptir.

İspat

Teorem 3.2 de $B_d(x_0, r)$ yerine uzayın kendisi olan X alınırsa ispat tamamlanır.

Yukarıdaki orijinal teoremlerden aşağıdaki sonuçları elde edebiliriz.

3.1. Sonuç

(X, d') bir tam metrik uzay, d, X üzerinde bir başka metrik, $x_0 \in X, r > 0$ ve $F : \overline{B_d(x_0, r)}^{d'} \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. F dönüşümünün aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

a) Her $x, y \in \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ için

$$d(Fx, Fy) \leq q \max \left\{ d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), \frac{1}{2}[d(x, Fy) + d(y, Fx)] \right\}$$

olacak şekilde $q \in (0, 1)$ var,

b) $d(x_0, Fx_0) < (1 - q)r$,

c) $d \not\leq d'$ iken $F : (B_d(x_0, r), d) \rightarrow (X, d')$ düzgün sürekli,

d) $d \neq d'$ iken $F : (\overline{B_d(x_0, r)^{d'}}, d') \rightarrow (X, d')$ sürekli.

Bu durumda $F, \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ içinde bir sabit noktaya sahiptir. Yani, $Fx = x$ olacak şekilde bir $x \in \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ vardır [35].

İspat

Teorem 3.2 de T fonksiyonu Örnek 3.2 deki gibi alınırsa, yani

$$T(t_1, \dots, t_6) = t_1 - q \max \left\{ t_2, t_3, t_4, \frac{t_5 + t_6}{2} \right\}$$

olarak tanımlanırsa ispat tamamlanır. Çünkü Her $x, y \in \overline{B_d(x_0, r)^{d'}}$ için

$$d(Fx, Fy) \leq q \max \left\{ d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), \frac{1}{2}[d(x, Fy) + d(y, Fx)] \right\}$$

ise bu durumda

$$d(Fx, Fy) - q \max \left\{ d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), \frac{1}{2}[d(x, Fy) + d(y, Fx)] \right\} \leq 0$$

olur ki Teorem 3.2 deki (a) koşulu sağlanır. Ayrıca $f(t) = qt$ olduğundan

$$d(x_0, Fx_0) < (1 - q)r \text{ ise } d(x_0, Fx_0) < r - qr = r - f(r)$$

olup Teorem 3.2 deki (b') koşulu da sağlanır. Teorem 3.2 deki (c) ve (d) koşullarının sağlandığı açıktır.

Sonuç 3.1 in ispatı Teorem 3.1 yardımı ile de yapılabilir.

3.2. Sonuç

(X, d) bir tam metrik uzay, $x_0 \in X$, $r > 0$ ve $F : \overline{B_d(x_0, r)} \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. F dönüşümünün aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

a) Her $x, y \in \overline{B_d(x_0, r)}$ için

$$d(Fx, Fy) \leq \phi \left(\max \left\{ d(x, y), d(x, Fx), d(y, Fy), \frac{1}{2}[d(x, Fy) + d(y, Fx)] \right\} \right)$$

olacak şekilde, sürekli, azalmayan, $\phi(0) = 0$ ve $t > 0$ için $\phi(t) < t$ koşullarını sağlayan bir $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu var,

b) $d(x_0, Fx_0) < r - \phi(r)$.

Bu durumda $F, \overline{B_d(x_0, r)}$ içinde bir sabit noktaya sahiptir. Yani, $Fx = x$ olacak şekilde bir $x \in \overline{B_d(x_0, r)}$ vardır [36].

İspat

Teorem 3.2 de $d = d'$ alınır ve T fonksiyonu Örnek 3.3 deki gibi tanımlanırsa ispat tamamlanır.

3.2. Uygulama

Bu kesimde bir önceki kesimde verilen Teorem 3.2 yardımıyla, iki homotopik dönüşümden birinin sabit noktasının var olması ve aralarındaki homotopinin de ileride verilecek olan koşulları sağlaması durumunda diğerinin de sabit noktaya sahip olduğunu gösteren orijinal bir teorem verilecektir.

3.4. Teorem

(X, d') bir tam metrik uzay ve d, X üzerinde bir başka metrik olsun. $Q \subseteq X$ kümesi d' metriğine göre kapalı, $U \subseteq X$ kümesi d metriğine göre açık ve $U \subseteq Q$ olsun. $H : Q \times [0, 1] \rightarrow X$ dönüşümünün aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:

a) $x \in Q \setminus U$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için $x \neq H(x, \lambda)$,

b) her $x, y \in Q$ ve $\lambda \in [0, 1]$ için

$$T(d(H(x, \lambda), H(y, \lambda)), d(x, y), d(x, H(x, \lambda)), d(y, H(y, \lambda)),$$

$$d(x, H(y, \lambda)), d(y, H(x, \lambda))) \leq 0$$

olacak şekilde $T \in \mathcal{T}'$ var,

c) $H(x, \lambda)$, Q üzerindeki metrik d olmak üzere, λ ya göre sürekli, x e göre düzgün sürekli,

d) $d \neq d'$ iken, U üzerindeki metrik d olmak üzere $H : U \times [0,1] \rightarrow (X, d')$ düzgün sürekli,

e) $d \neq d'$ iken, Q üzerindeki metrik d' olmak üzere $H : Q \times [0,1] \rightarrow (X, d')$ sürekli.

Ek olarak, $H(\cdot, \lambda) = H_\lambda(\cdot)$ ile gösterilirse, H_0 dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\lambda \in [0,1]$ için H_λ da $x_\lambda \in U$ sabit noktasına sahiptir.

İspat

$$A = \{\lambda \in [0,1] : x \in U \text{ için } H(x, \lambda) = x\}$$

olsun. H_0 bir sabit noktaya sahip olduğundan $H(x, 0) = x$ olacak şekilde $x \in Q$ vardır. Diğer taraftan (a) koşulundan ise $x \in Q \setminus U$ için $x \neq H(x, 0)$ olduğunu biliyoruz. O halde H_0 dönüşümünün sabit noktası U kümesine aittir. Böylece A kümesinin tanımından $0 \in A$ olduğu anlaşılır. Yani A kümesi boştan farklıdır. İspatı tamamlamak için A kümesinin $[0,1]$ içinde hem açık hem kapalı olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü bir bağlantılı uzayda hem açık hem kapalı küme ya boş yada uzayın kendisi olduğundan ve $[0,1]$ alışılmış topoloji ile birlikte bağlantılı olduğundan $A = [0,1]$ olmak zorunda kalacaktır. Bu ise A kümesinin tanımı göz önüne alındığında her $\lambda \in [0,1]$ için H_λ dönüşümünün $x_\lambda \in U$ sabit noktasına sahip olduğunu gösterir.

İlk olarak A kümesinin $[0,1]$ içinde kapalı olduğunu gösterelim. $\{\lambda_k\}$, A içinde $k \rightarrow \infty$ için $\lambda_k \rightarrow \lambda \in [0,1]$ olacak şekilde bir dizi olsun. O halde her k için $x_k = H(x_k, \lambda_k)$ olacak şekilde $x_k \in U$ vardır. Şimdi $\{x_k\}$ dizisinin d metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu iddia ediyoruz. Bunun doğru olmadığını kabul edelim. Bu durumda $k \in \{1, 2, \dots\}$ için

$$r_k = d(x_{n(k)}, x_{m(k)}) \geq \delta$$

olacak şekilde tam sayıların $\{m(k)\}$, $\{n(k)\}$, $m(k) > n(k) \geq k$ dizileri ve $\delta > 0$ sayısı vardır. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \delta \leq r_k \leq & d(H(x_{m(k)}, \lambda_{m(k)}), H(x_{m(k)}, \lambda)) + d(H(x_{m(k)}, \lambda), H(x_{n(k)}, \lambda)) \\ & + d(H(x_{n(k)}, \lambda), H(x_{n(k)}, \lambda_{n(k)})) \end{aligned}$$

olup $k \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (c) koşulu kullanılırsa

$$\delta \leq \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d(H(x_{m(k)}, \lambda), H(x_{n(k)}, \lambda)) \quad (3.2)$$

bulunur. Diğer taraftan (b) koşulu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} T(d(H(x_{m(k)}, \lambda), H(x_{n(k)}, \lambda)), d(x_{m(k)}, x_{n(k)}), d(x_{m(k)}, H(x_{m(k)}, \lambda)), \\ d(x_{n(k)}, H(x_{n(k)}, \lambda)), d(x_{m(k)}, H(x_{n(k)}, \lambda)), d(x_{n(k)}, H(x_{m(k)}, \lambda))) \leq 0 \end{aligned}$$

ve böylece

$$\begin{aligned} T(d(H(x_{m(k)}, \lambda), H(x_{n(k)}, \lambda)), r_k, d(H(x_{m(k)}, \lambda_{m(k)}), H(x_{m(k)}, \lambda)), \\ d(H(x_{n(k)}, \lambda_{n(k)}), H(x_{n(k)}, \lambda)), r_k + d(H(x_{n(k)}, \lambda_{n(k)}), H(x_{n(k)}, \lambda)), \\ r_k + d(H(x_{m(k)}, \lambda_{m(k)}), H(x_{m(k)}, \lambda))) \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $k \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (c) koşulu kullanılırsa

$$T(\lim_{k \rightarrow \infty} d(H(x_{m(k)}, \lambda), H(x_{n(k)}, \lambda)), \lim_{k \rightarrow \infty} r_k, 0, 0, \lim_{k \rightarrow \infty} r_k, \lim_{k \rightarrow \infty} r_k) \leq 0$$

bulunur. T_1 ve T_2' koşullarından ise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(H(x_{m(k)}, \lambda), H(x_{n(k)}, \lambda)) \leq f(\lim_{k \rightarrow \infty} r_k)$$

elde edilir. Bu son ifade ile Eş. 3.2 birlikte düşünülürse

$$\delta \leq \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \leq \lim_{k \rightarrow \infty} d(H(x_{m(k)}, \lambda), H(x_{n(k)}, \lambda)) \leq f(\lim_{k \rightarrow \infty} r_k)$$

bulunur. Bu ise f fonksiyonunun seçimi ile çelişir. O halde $\{x_k\}$ dizisi d metriğine göre bir Cauchy dizisidir.

Şimdi de $\{x_k\}$ dizisinin d' metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim.

Eğer $d \geq d'$ ise bu açıktır. $d \not\geq d'$ olsun. O halde

$$d'(x_n, x_m) = d'(H(x_n, \lambda_n), H(x_m, \lambda_m))$$

olup (d) koşulu kullanılırsa $\{x_k\}$ dizisinin $d \not\geq d'$ iken de d' metriğine göre bir Cauchy dizisi olduğu bulunur. Böylece (X, d') tam olduğundan $n \rightarrow \infty$ için $d'(x_n, x) \rightarrow 0$ olacak şekilde $x \in Q$ vardır. Şimdi de $x = H(x, \lambda)$ olduğunu görelim. İlk olarak $d \neq d'$ durumunu göz önüne alalım. O halde

$$\begin{aligned} d'(x, H(x, \lambda)) &\leq d'(x, x_n) + d'(x_n, H(x, \lambda)) \\ &\leq d'(x, x_n) + d'(H(x_n, \lambda_n), H(x, \lambda)) \end{aligned}$$

olup (e) koşulu göz önüne alınırsa $d'(x, H(x, \lambda)) = 0$ bulunur ki bu da $x = H(x, \lambda)$ olduğunu gösterir. İkinci olarak $d = d'$ olsun. Bu durumda (b) koşulunu kullanırsak

$$T(d(H(x_n, \lambda_n), H(x, \lambda_n)), d(x_n, x), d(x_n, H(x_n, \lambda_n)), d(x, H(x, \lambda_n)), \\ d(x_n, H(x, \lambda_n)), d(x, H(x_n, \lambda_n))) \leq 0$$

ve böylece de

$$T(d(H(x_n, \lambda_n), H(x, \lambda_n)), d(x_n, x), 0, d(x, H(x, \lambda)) + d(H(x, \lambda), H(x, \lambda_n)), \\ d(x_n, x) + d(x, H(x, \lambda)) + d(H(x, \lambda), H(x, \lambda_n)), d(x, x_n)) \leq 0$$

bulunur ki bu son eşitsizlikte $n \rightarrow \infty$ için limit alınır ve (c) koşulu da kullanılırsa

$$T(d(x, H(x, \lambda)), 0, 0, d(x, H(x, \lambda)), d(x, H(x, \lambda)), 0) \leq 0$$

elde edilir. T_3 koşulundan ise $d(x, H(x, \lambda)) = 0$ olur ki bu da $x = H(x, \lambda)$ ifadesinin $d = d'$ iken de doğru olduğunu gösterir. Son olarak (a) koşulu göz önüne alınırsa $x = H(x, \lambda)$ olacak şekildeki bu $x \in Q$ noktası için $x \notin Q \setminus U$ olduğu görülür. Böylece $x \in U$ olup A kümesinin tanımından $\lambda \in A$ olur ki bu da A kümesinin $[0, 1]$ içinde kapalı olduğunu gösterir.

Şimdi de A kümesinin $[0, 1]$ içinde açık küme olduğunu görelim. $\lambda_0 \in A$ olsun. O halde $x_0 = H(x_0, \lambda_0)$ olacak şekilde $x_0 \in U$ vardır. U kümesi d metriğine göre açık olduğundan $B_d(x_0, \delta) \subseteq U$ olacak şekilde $B_d(x_0, \delta) = \{x \in X : d(x, x_0) < \delta\}$ yuvarı vardır. (c) koşulundan $\lambda \in [0, 1]$ ve $|\lambda - \lambda_0| \leq \eta$ için

$$d(x_0, H(x_0, \lambda)) = d(H(x_0, \lambda_0), H(x_0, \lambda)) < \delta - f(\delta)$$

olacak şekilde $\eta = \eta(\delta) > 0$ sayısı vardır. Buradaki f fonksiyonu T_2 koşulundaki fonksiyondur. Böylece (b), (d) ve (e) ile birlikte $r = \delta$ ve $F = H_\lambda$ olmak üzere Teorem 3.2, $\lambda \in [0,1]$ ve $|\lambda - \lambda_0| \leq \eta$ için $x_\lambda = H_\lambda(x_\lambda) = H(x_\lambda, \lambda)$ olacak şekilde $x_\lambda \in \overline{B_d(x_0, \delta)^{d'}} \subseteq Q$ noktasının varlığını garanti eder. O halde (a) koşulu göz önüne alınırsa $\lambda \in [0,1]$ ve $|\lambda - \lambda_0| \leq \eta$ için $x_\lambda = H(x_\lambda, \lambda)$ olacak şekildeki x_λ noktaları U kümesine ait olur. Böylece A kümesinin tanımından $\lambda \in [0,1]$ ve $|\lambda - \lambda_0| \leq \eta$ için $\lambda \in A$ olur. Sonuç olarak $\lambda_0 \in [\lambda_0 - \eta, \lambda_0 + \eta] \subseteq A$ olduğundan A kümesi açıktır.

3.3. Sonuç

(X, d') bir tam metrik uzay ve d de X üzerinde bir başka metrik olsun. $Q \subseteq X$ kümesi d' metriğine göre kapalı, $U \subseteq X$ kümesi d metriğine göre açık ve $U \subseteq Q$ olsun. $H : Q \times [0,1] \rightarrow X$ dönüşümünün aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim:

a) $x \in Q \setminus U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $x \neq H(x, \lambda)$,

b) her $x, y \in Q$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$d(H(x, \lambda), H(y, \lambda)) \leq q \max \{d(x, y), d(x, H(x, \lambda)), d(y, H(y, \lambda)), d(x, H(y, \lambda)), d(y, H(x, \lambda))\}$$

olacak şekilde $q \in (0,1)$ var,

c) $H(x, \lambda)$, Q üzerindeki metrik d olmak üzere, λ ya göre sürekli, x e göre düzgün sürekli,

d) $d \neq d'$ iken, U üzerindeki metrik d olmak üzere $H : U \times [0,1] \rightarrow (X, d')$ düzgün sürekli,

e) $d \neq d'$ iken, Q üzerindeki metrik d' olmak üzere $H : Q \times [0,1] \rightarrow (X, d')$ sürekli.

Ek olarak, $H(\cdot, \lambda) = H_\lambda(\cdot)$ ile gösterilirse, H_0 dönüşümünün bir sabit noktasının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $\lambda \in [0, 1]$ için H_λ da $x_\lambda \in U$ sabit noktasına sahiptir [35].

İspat

Teorem 3.4 de T fonksiyonu Örnek 3.2 deki gibi tanımlanırsa ispat tamamlanır.

4. KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER İÇİN BİR SABİT NOKTA TEOREMİ VE UYGULAMASI

4.1. Küme Değerli Dönüşümler İçin Bir Sabit Nokta Teoremi

Bu bölümde kullanacağımız sabit nokta teoremini vermeden önce teoremden geçen bazı kavramlar hatırlatılacaktır.

E bir sıralı Banach uzayı, 2^E , E nin boştan farklı alt kümelerinin ailesi ve $A, B \in 2^E$ olsun. Eğer her $a \in A$ ve her $b \in B$ için $a \leq b$ oluyorsa bu durumda A ve B kümeleri için $A \leq B$ gösterimi kullanılacaktır.

4.1. Tanım

$T: E \rightarrow 2^E$ bir dönüşüm olsun. Eğer $x < y$ olacak şekilde her $x, y \in E$ için $Tx \leq Ty$ oluyorsa T dönüşümüne izoton artan denir [29].

4.2. Tanım

$B \subseteq E$ ve $T, S: B \rightarrow 2^B$ iki dönüşüm olsun. Eğer her $x \in B$ ve her $y \in Sx$ için $Sx \leq Ty$ ve her $y \in Tx$ için $Tx \leq Sy$ oluyorsa S ve T dönüşümlerine B de zayıf izoton artan denir. Benzer şekilde eğer her $x \in B$ ve her $y \in Sx$ için $Sx \geq Ty$ ve her $y \in Tx$ için $Tx \geq Sy$ oluyorsa S ve T dönüşümlerine B de zayıf izoton azalan denir. Eğer S ve T dönüşümleri B de zayıf izoton artan veya zayıf izoton azalan ise bu dönüşümlere B de zayıf izoton dönüşümler denir [9].

4.1. Örnek

$E = \mathbb{R}$, $B = [0,1]$ ve üzerindeki sıralama bilinen $\leq$ (küçük eşit) sıralama olsun. S ve T dönüşümleri $S, T : [0,1] \rightarrow [0,1]$, her $x \in [0,1]$ için $Sx = \frac{x}{2}$ ve $Tx = \frac{x^2}{3}$ şeklinde tek değerli olarak tanımlansın. Bu durumda her $x \in [0,1]$ için

$$Sx = \frac{x}{2} \geq \frac{x^2}{12} = T \frac{x}{2} = TSx$$

ve

$$Tx = \frac{x^2}{3} \geq \frac{x^2}{6} = S \frac{x^3}{3} = STx$$

olduğundan S ve T dönüşümleri zayıf izoton azalandır [8].

4.2. Örnek

$E = \mathbb{R}$, $B = [0,1]$ ve üzerindeki sıralama bilinen $\leq$ sıralama olsun. S ve T dönüşümleri $S, T : [0,1] \rightarrow 2^{[0,1]}$,

$$Sx = \begin{cases} [0, 1/2] & , \quad x \in (1/2, 1) \\ \{1\} & , \quad x \in [0, 1/2] \cup \{1\} \end{cases}$$

ve

$$Tx = \begin{cases} \{1/2\} & , \quad x = 0 \\ \{1\} & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $x \in E$ ve her $y \in Sx$ için $Sx \leq Ty$ dir. Gerçekten,

eğer $x \in (1/2, 1)$ ise $Sx = [0, 1/2]$ olup $y \in Sx$ için eğer $y = 0$ ise $Ty = \{1/2\}$ ve eğer $y \neq 0$ ise $Ty = \{1\}$ olup her iki durumda da

$$Sx = [0, 1/2] \leq Ty = \begin{cases} \{1/2\} & , y = 0 \\ \{1\} & , y \neq 0 \end{cases}$$

olur.

Eğer $x \in [0, 1/2] \cup \{1\}$ ise $Sx = \{1\}$ olup $y \in Sx$ için $y = 1$ olur ki böylece $Ty = \{1\}$ dir. Yani bu durumda da $Sx \leq Ty$ olur.

Yine her $x \in E$ ve her $y \in Tx$ için $Tx \leq Sy$ dir. Gerçekten,

eğer $x = 0$ ise $Tx = \{1/2\}$ olup $y \in Tx$ için $y = 1/2$ olur ki böylece $Sy = \{1\}$ dir. Yani $Tx \leq Sy$ olur.

Eğer $x \neq 0$ ise $Tx = \{1\}$ olup $y \in Tx$ için $y = 1$ olur ki böylece $Sy = \{1\}$ dir. Yani bu durumda da $Tx \leq Sy$ olur.

Sonuç olarak S ve T dönüşümleri zayıf izoton artandır.

4.3. Örnek

$E = \mathbb{R}$, $B = [0, 1]$ ve üzerindeki sıralama bilinen $\leq$ sıralama olsun. S ve T dönüşümleri $S, T : [0, 1] \rightarrow 2^{[0, 1]}$,

$$Sx = \begin{cases} (0,1] & , \quad x = 0 \\ \{1\} & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

ve

$$Tx = \begin{cases} \{1/3, 1/2\} & , \quad x = 0 \\ \{2/3\} & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $S1/2 = \{1\} \not\subseteq \{2/3\} = Ty$ ($y=1$) olduğundan S ve T dönüşümleri zayıf izoton artan değildir. Yine $T1/2 = \{2/3\} \not\subseteq \{1\} = Sy$ ($y=2/3$) olduğundan S ve T dönüşümleri zayıf izoton azalan da değildir [7].

4.3. Tanım

$Q \subseteq E$ ve $S, T: Q \rightarrow 2^Q$ iki dönüşüm olsun. Eğer Q kümesinin her sayılabilir A alt kümesi ve her sabit $a \in Q$ noktası için $A \subseteq \{a\} \cup S(A) \cup T(A)$ olması $\overline{A}$ ın kompakt olmasını gerektiriyorsa S ve T dönüşümlerine D_Q koşulunu sağlıyor denir. Burada $S(A) = \bigcup_{x \in A} Sx$ dir [9].

4.1. Teorem

E bir sıralı Banach uzayı, $B \subseteq E$ kapalı bir alt küme, $C(B)$, B nin boştan farklı kapalı alt kümelerinin ailesi ve $S, T: B \rightarrow C(B)$ iki kapalı (kapalı grafiğe sahip), zayıf izoton ve D_B koşulunu sağlayan dönüşümler olsun. Bu durumda S ve T dönüşümleri B içinde bir ortak sabit noktaya sahiptirler [9].

İspat

$x \in B$ keyfi bir nokta olsun. İlk olarak S ve T dönüşümlerinin zayıf izoton artan olduklarını kabul edelim. B içinde

$$x_0 = x, n \geq 0 \text{ için } x_{2n+1} \in Sx_{2n}, x_{2n+2} \in Tx_{2n+1}.$$

şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi tanımlayalım. $\{x_n\}$ dizisinin tanımlanışına dikkat edilirse, $x_1 \in Sx_0$ ve S ve T zayıf izoton artan olduğundan her $y \in Sx_0$ için $Sx_0 \leq Ty$ olur. Özel olarak $Sx_0 \leq Tx_1$ olur ki $x_2 \in Tx_1$ olduğundan $x_1 \leq x_2$ olur. Benzer şekilde $x_2 \leq x_3$ olduğu da elde edilebilir. Bu şekilde devam edilerek $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq \dots$ bulunur.

Şimdi $A = \{x_0, x_1, \dots\}$ diyelim. A kümesinin sayılabilir olduğu açıktır ve ayrıca

$$A = \{x_0\} \cup \{x_1, x_3, \dots\} \cup \{x_2, x_4, \dots\} \subseteq \{x_0\} \cup S(A) \cup T(A)$$

olur. Diğer taraftan S ve T dönüşümleri D_B koşulunu sağladığından $\overline{A}$ kompakttır. Yine $\{x_n\} \subseteq \overline{A}$ olduğundan $\{x_n\}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisi vardır. Bu yakınsak altdizinin yakınsadığı noktayı z ile gösterirsek $z \in B$ dir. Ayrıca $\{x_n\}$ dizisi azalmayan olduğundan orijinal $\{x_n\}$ dizisi de z noktasına yakınsaktır. O halde

$$x_{2n} \rightarrow z, x_{2n+1} \rightarrow z, x_{2n+1} \in Sx_{2n}$$

ve S kapalı yani kapalı grafiğe sahip olduğundan $z \in Sz$ dir. Benzer şekilde $z \in Tz$ olduğu da gösterilebilir. Yani z noktası S ve T dönüşümlerinin ortak sabit noktasıdır. S ve T dönüşümlerinin zayıf izoton azalan oldukları durumda da benzer ispat yapılabilir.

4.4. Tanım

$Q \subseteq E$ ve $T: Q \rightarrow 2^Q$ bir dönüşüm olsun. Eğer $T(Q)$ sınırlı ve Q kümesinin $\alpha(A) > 0$ olacak şekildeki her sayılabilir A alt kümesi için $\alpha(T(A)) < \alpha(A)$ oluyorsa T dönüşümüne sayılabilir yoğunlaştırıcı dönüşüm denir [9].

4.1. Sonuç

E bir sıralı Banach uzayı, $B \subseteq E$ kapalı bir alt küme, $C(B)$, B nin boştan farklı kapalı alt kümelerinin ailesi ve $S, T: B \rightarrow C(B)$ iki kapalı (kapalı grafiğe sahip), zayıf izoton ve sayılabilir yoğunlaştırıcı dönüşümler olsun. Bu durumda S ve T dönüşümleri B içinde bir ortak sabit noktaya sahiptirler [9].

İspat

S ve T dönüşümlerinin Teorem 4.1 in koşullarını sağladığını gösterelim. Bunun için S ve T dönüşümlerinin D_B koşulunu sağladığını göstermek yeterlidir. Bunu görmek için A kümesi B nin sayılabilir bir alt kümesi, $a \in B$ sabit ve

$$A \subseteq \{a\} \cup S(A) \cup T(A)$$

olsun. S ve T dönüşümleri sayılabilir yoğunlaştırıcı olduğundan $S(B)$ ve $T(B)$ sınırlı olup A da sınırlıdır. Yani $\alpha(A)$ anlamlıdır. Şimdi eğer $\alpha(A) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} \alpha(A) &\leq \alpha(\{a\} \cup S(A) \cup T(A)) \\ &= \max \{\alpha(\{a\}), \alpha(S(A)), \alpha(T(A))\} \\ &= \max \{\alpha(S(A)), \alpha(T(A))\} \\ &< \alpha(A) \end{aligned}$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece $\alpha(A) = 0$, yani $\overline{A}$ kompakttır.

Özel olarak Sonuç 4.1 de B kümesi yerine bir sıra aralık alınabilir. Bu durumda aşağıdaki şekilde bir sonuç elde edilir.

4.2. Sonuç

E bir Banach uzayı, $K \subseteq E$ bir koni ve $a, b \in E$, $a \leq b$ olsun. Bu durumda $S, T : [a, b] \rightarrow C([a, b])$ iki kapalı (kapalı grafiğe sahip), zayıf izoton ve sayılabilir yoğunlaştırıcı dönüşümler olsun. Bu durumda S ve T dönüşümleri $[a, b]$ içinde bir ortak sabit noktaya sahiptirler [9].

Sonuç 4.2 de K konisinin normal olduğu kabul edilirse $[a, b]$ sıra aralığı norma göre sınırlı olacağından S ve T dönüşümlerinin sayılabilir yoğunlaştırıcılık tanımındaki $S([a, b])$ ve $T([a, b])$ kümelerinin sınırlı olma koşulu otomatik olarak sağlanır [9].

4.2. Uygulama

$(E, \|\cdot\|_E)$ bir Banach uzayı, $C(E)$ de E nin boştan farklı ve kapalı alt kümelerinin ailesini gösterebilir. $t \in J = [0, 1]$ için $\sigma : J \rightarrow J$, $q : J \rightarrow E$, $k : J \times J \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonlar ve $F, G : J \times E \rightarrow C(E)$ küme değerli dönüşümler olmak üzere

$$x(t) \in q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) F(s, x(s)) ds \quad (4.1)$$

ve

$$x(t) \in q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) G(s, x(s)) ds \quad (4.2)$$

integral içermelerini göz önüne alalım. Bu kısımda küme değerli dönüşümler için yukarıda verilen sabit nokta teoremi kullanılarak Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 integral içermelerinin ortak çözümü için bir varlık teoremi verilecektir.

$B(J, E)$, J üzerinde E değerli Bochner integrallenebilen fonksiyonların sınıfı olmak üzere her $t \in J$ için $v_1(t) \in F(t, x(t))$ ve $v_2(t) \in G(t, x(t))$ koşullarını sağlayan $v_1, v_2 \in B(J, E)$ için

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) v_1(s) ds$$

ve

$$x(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) v_2(s) ds$$

eşitliklerini sağlayan $x: J \rightarrow E$ sürekli fonksiyonuna yukarıda verilen integral içermelerin ortak çözümü denir.

$C(J, E)$, J üzerinde tanımlı E değerli bütün sürekli fonksiyonların uzayı olsun. $C(J, E)$ üzerinde $\|\cdot\|$ normunu

$$\|x\| = \sup_{t \in J} \{\|x(t)\|_E\}$$

şeklinde tanımlayalım. Yine K kümesi E içinde normal koni olmak üzere $C(J, E)$ içinde

$$K_C = \{x \in C(J, E) : \text{her } t \in J \text{ için } x(t) \in K\}$$

konisini ve böylece $C(J, E)$ içinde bu koni yardımıyla $\leq$ sıralama bağıntısını tanımlayalım. O halde $C(J, E)$ uzayı $\|\cdot\|$ normu ve $\leq$ sıralaması ile bir sıralı Banach uzayı olur [29].

$B \subseteq C(J, E)$ bir küme olmak üzere

$$B(t) = \{f(t) : f \in B\} \subseteq E \text{ ve } B(J) = \bigcup_{t \in J} B(t)$$

gösterimleri kullanılacaktır.

4.1. Lemma

B kümesi $C(J, E)$ nin sınırlı ve eşsürekli bir alt kümesi ise bu durumda $t_0, t \in J$ olmak üzere

$$(i) \quad \alpha\left(\int_{t_0}^t B(s)ds\right) \leq \int_{t_0}^t \alpha(B(s))ds,$$

$$(ii) \quad \alpha(B) = \max_{t \in J} \{\alpha(B(t))\}$$

ifadeleri doğrudur [37].

4.2. Lemma

T bir pozitif reel sayı ve E bir Banach uzayı olsun. Bu durumda,

(i) Eğer $A \subseteq C([0, T], E)$ sınırlı ise

$$\sup_{t \in [0, T]} \{\alpha(A(t))\} \leq \alpha(A([0, T])) \leq \alpha(A),$$

(ii) Eğer $A \subseteq C([0, T], E)$ sınırlı ve eşsürekli ise

$$\sup_{t \in [0, T]} \{\alpha(A(t))\} = \alpha(A([0, T])) = \alpha(A)$$

ifadeleri doğrudur [37].

4.5. Tanım

$F : J \rightarrow 2^E$ bir küme değerli dönüşüm olsun. Eğer her $y \in E$ için

$$t \rightarrow d(y, F(t)) = \inf \{\|y - x\|_E : x \in F(t)\}$$

fonksiyonu ölçülebilir ise F küme değerli dönüşümüne de ölçülebilir denir [29].

Bir $F : J \times E \rightarrow 2^E$ küme değerli dönüşümü için

$$\|F(t, x)\| = \{\|u\|_E : u \in F(t, x)\}$$

ve

$$\| \|F(t, x)\| \| = \sup \{\|u\|_E : u \in F(t, x)\}$$

gösterimleri kullanılacaktır.

4.6. Tanım

$F : J \times E \rightarrow 2^E$ küme değerli dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa F ye bir Carathéodory dönüşüm denir.

- (i) Her $x \in E$ için $t \rightarrow F(t, x)$ fonksiyonu ölçülebilir,
- (ii) Hemen hemen her $t \in J$ için $x \rightarrow F(t, x)$ fonksiyonu üstten yarı sürekli [29].

4.7. Tanım

$F : J \times E \rightarrow 2^E$ küme değerli Carathéodory dönüşüm olsun. Eğer her $r > 0$ reel sayısı ve $\|x\|_E \leq r$ olacak şekilde her $x \in E$ ve hemen hemen her $t \in J$ için

$$\|F(t, x)\| \leq h_r(t)$$

olacak şekilde bir $h_r \in L^1(J, \mathbb{R})$ fonksiyonu varsa F dönüşümüne L^1 - Carathéodory dönüşüm denir [29].

Şimdi $S_F^1(x) = \{v \in B(J, E) : \text{hemen hemen her } t \in J \text{ için } v(t) \in F(t, x(t))\}$ diyelim.

4.3. Lemma

Eğer $\text{Çap}(E) < \infty$ ve $F : J \times E \rightarrow 2^E$ bir L^1 - Carathéodory dönüşüm ise bu durumda her $x \in C(J, E)$ için $S_F^1(x) \neq \emptyset$ dur [38].

4.4. Lemma

E bir Banach uzayı, $F : J \times E \rightarrow 2^E$ dönüşümü $S_F^1(x) \neq \emptyset$ olacak şekilde bir Carathéodory dönüşüm ve $\Gamma : L^1(J, E) \rightarrow C(J, E)$ bir sürekli lineer dönüşüm olsun. Bu durumda $\Gamma \circ S_F^1 : C(J, E) \rightarrow 2^{C(J, E)}$ operatörü $C(J, E) \times C(J, E)$ üzerinde bir kapalı grafik operatörüdür [38].

4.8. Tanım

$a, b \in C(J, E)$ olsun. Eğer hemen hemen her $t \in J$ için $v(t) \in F(t, a(t))$ olacak şekilde her $v \in B(J, E)$ için

$$a(t) \leq q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)v(s)ds$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $a \in C(J, E)$ ye Eş. 4.1 integral içermesinin bir alt çözümüdür denir. Benzer şekilde hemen hemen her $t \in J$ için $v(t) \in F(t, b(t))$ olacak şekilde her $v \in B(J, E)$ için

$$b(t) \geq q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)v(s)ds$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $b \in C(J, E)$ ye Eş. 4.1 integral içermesinin bir üst çözümüdür denir [28].

4.9. Tanım

$x < y$ olacak şekilde her $x, y \in E$ ve hemen hemen her $t \in J$ için $F(t, x) \leq F(t, y)$ oluyorsa $F(t, x)$ küme değerli dönüşümüne hemen hemen her $t \in J$ için x e göre azalmayandır denir [28].

4.10. Tanım

$a, b \in C(J, E)$ olsun. Eğer hemen hemen her $t \in J$ için $v(t) \in F(t, x(t))$ ve $v(t) \in G(t, x(t))$ olacak şekilde her $v \in B(J, E)$ için

$$a(t) \leq q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s)v(s)ds \leq b(t)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 integral içermeleri $[a, b]$ -koşulunu sağlıyor denir.

Dikkat edilmelidir ki eğer Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 integral içermeleri $[a, b]$ -koşulunu sağlıyor ise bu integral içermeler ortak üst ve ortak alt çözüme sahiptirler.

Şimdiye kadar yapılan bu hazırlıklardan sonra bu kısımda verilecek olan orijinal teorem için aşağıdaki koşulları göz önüne alalım.

(H₀) $k(t, s)$ fonksiyonu sürekli, $J \times J$ üzerinde negatif olmayan ve $M = \sup_{t, s \in J} \{k(t, s)\}$ olsun.

(H₁) $F(t, x)$ ve $G(t, x)$ küme değerli dönüşümleri Carathéodory dönüşümler olsun.

(H₂) E nin sayılabilir ve sınırlı A alt kümesi ve $\exists \lambda > 0$ için, $\alpha(F(J \times A)) \leq \lambda \alpha(A)$ ve $\alpha(G(J \times A)) \leq \lambda \alpha(A)$ sağlansın.

(H₃) $F(t, x)$ ve $G(t, x)$ küme değerli dönüşümleri hemen hemen her $t \in J$ için x e göre azalmayan olsunlar.

(H₄) Her $x \in C(J, E)$ için $S_F^1(x) \neq \emptyset$ ve $S_G^1(x) \neq \emptyset$ olsun.

(H₅) Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 integral içermeleri $[a, b]$ -koşulunu sağlasın.

(H₆) $t \rightarrow \|F(t, a(t))\| + \|F(t, b(t))\|$ ve $t \rightarrow \|G(t, a(t))\| + \|G(t, b(t))\|$ fonksiyonları J üzerinde Lebesgue integrallenebilir olsunlar.

(H₇) Her $v \in S_G^1(x)$ için $y(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds$ olmak üzere $G(t,x) \leq F(t,y)$ ve her $v \in S_F^1(x)$ için $F(t,x) \leq G(t,y)$ sağlansın.

Dikkat edelim ki eğer (H₃) ve (H₄) hipotezleri sağlanırsa S_F^1 ve S_G^1 izoton artandır [29].

Yine (H₁), (H₃) ve (H₄) hipotezlerinin sağlandığını kabul ederek her $t \in J$ için

$$g(t) = \|F(t, a(t))\| + \|F(t, b(t))\| \text{ ve } h(t) = \|G(t, a(t))\| + \|G(t, b(t))\|$$

şeklinde $g, h: J \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda g ve h fonksiyonları J üzerinde Lebesgue integrallenebilirdir ve her $t \in J$ ve $x \in [a, b]$ için

$$\|F(t, x(t))\| \leq g(t) \text{ ve } \|G(t, x(t))\| \leq h(t)$$

olur [29].

4.2. Teorem

(H₀)-(H₇) koşullarının sağlandığını kabul edelim. Eğer $\lambda M < 1$ ise Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 integral içermeleri $[a, b]$ içinde bir ortak çözüme sahiptir.

İspat

$X = C(J, E)$ olsun ve (H₅) den dolayı iyi tanımlı olan X içindeki $[a, b]$ sıra aralığını göz önüne alalım. $S, T: [a, b] \rightarrow 2^X$ dönüşümlerini aşağıdaki şekilde tanımlayalım.

$$Sx = \left\{ u : u(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds, v \in S_F^1(x) \right\},$$

$$Tx = \left\{ u : u(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds, v \in S_G^1(x) \right\}.$$

Şimdi S ve T nin $[a,b]$ üzerinde Sonuç 4.2 nin tüm koşullarını sağladığını göstereceğiz. İlk olarak S ve T nin $[a,b]$ üzerinde zayıf izoton olduklarını gösterelim. $x \in [a,b]$ olsun. (H_3) ve (H_7) den

$$\begin{aligned} Tx &= \left\{ u_1 : u_1(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v_1(s)ds, v_1 \in S_G^1(x) \right\} \\ &= \left\{ u_1 : u_1(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v_1(s)ds, v_1 \in \{v \in B(J,E) : v(t) \in G(t,x(t))\} \right\} \\ &\leq \left\{ u_1 : u_1(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v_1(s)ds, v_1 \in \{v \in B(J,E) : v(t) \in F(t,y(t))\} \right\} \\ &\quad \left\{ \text{her } y(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds \text{ ve } v \in S_G^1(x) \right\} \\ &= \left\{ u_2 : u_2(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v_2(s)ds, v_2 \in S_F^1(y) \right\} \\ &\quad \left\{ \text{her } y(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds \text{ ve } v \in S_G^1(x) \right\} \\ &= Sy \text{ her } y(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds \text{ ve } v \in S_G^1(x) \\ &= Sy \text{ her } y \in Tx = \left\{ u : u(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds, v \in S_G^1(x) \right\} \end{aligned}$$

elde edilir ki buda her $y \in Tx$ için $Tx \leq Sy$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde her $y \in Sx$ için $Sx \leq Ty$ ifadesi de bulunur. Yani S ve T dönüşümleri zayıf izoton artandır. $x \in [a,b]$ keyfi olsun. (H_5) koşulundan dolayı $a \leq Sx \leq b$ ve $a \leq Tx \leq b$ olur ki buda $S, T : [a,b] \rightarrow 2^{[a,b]}$ olduğunu gösterir. Şimdi X içinde K_C konisinin normal olduğunu görelim. $x, y \in K_C$ ve $0 \leq x \leq y$ olsun. Böylece $t \in J$ için $0 \leq x(t) \leq y(t)$ olur. E içinde K konisi normal olduğundan $t \in J$ için $\|x(t)\|_E \leq N\|y(t)\|_E$ olacak şekilde $N > 0$ sayısı vardır. O halde $\|x\| \leq N\|y\|$ olmasını gerektirir ve bu ise X

içinde K_C konisinin normal olduğunu gösterir. Sonuç olarak $[a, b]$ sıra aralığı X içinde norm sınırlı olur. Şimdi S ve T dönüşümlerinin $[a, b]$ üzerinde sayılabilir yoğunlaştırıcı dönüşümler olduklarını gösterelim. $A \subseteq [a, b]$ sayılabilir bir küme olsun. O halde her $t \in J$ için

$$\begin{aligned}
\alpha(S(A(t))) &\leq \alpha\left(\bigcup_{x \in A} \left\{ q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) F(s, x(s)) ds \right\}\right) \\
&\leq \alpha(\{q(t)\}) + \alpha\left(\bigcup_{x \in A} \left\{ \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) F(s, x(s)) ds \right\}\right) \\
&\leq \alpha\left(\int_0^{\sigma(t)} k(t, s) F(s, A(s)) ds\right) \\
&\leq \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) \alpha(F(s, A(s))) ds \\
&\leq M \int_0^{\sigma(t)} \alpha(F(J \times A(J))) ds \\
&\leq M \int_0^{\sigma(t)} \lambda \alpha(A(J)) ds \\
&\leq \lambda M \alpha(A(J))
\end{aligned}$$

bulunur. Burada $A(J) = \bigcup_{s \in J} \{\phi(s) : \phi \in A\}$ dır. Böylece Lemma 4.2 kullanılırsa her $t \in J$ için

$$\alpha(S(A(t))) \leq \lambda M \alpha(A) \quad (4.3)$$

elde edilir. Şimdi de $S(A)$ nın $[a, b]$ içinde düzgün sınırlı ve eşsürekli olduğunu görelim. $u \in Sx$ keyfi olsun. Bu durumda

$$u(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) v(s) ds$$

olacak şekilde $v \in S_F^1(x)$ vardır. O halde her $x \in A$ için

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_E &\leq \|q(t)\|_E + \int_0^{\sigma(t)} \|k(t,s)v(s)\|_E ds \\
&\leq \|q(t)\|_E + K \int_0^{\sigma(t)} \|F(t,x(s))\|_E ds \\
&\leq \|q(t)\|_E + K \int_0^{\sigma(t)} g(s) ds \\
&\leq \|q(t)\|_E + K \|g\|_{L^1}
\end{aligned}$$

olur ki buda $S(A)$ nın $[a, b]$ içinde düzgün sınırlı olduğunu gösterir. Yine $t, \tau \in J$ olsun. Her $y \in S(A)$ ve en az bir $v \in S_F^1(x)$ için

$$\begin{aligned}
\|y(t) - y(\tau)\|_E &\leq \|q(t) - q(\tau)\|_E + \left\| \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds - \int_0^{\sigma(\tau)} k(\tau,s)v(s)ds \right\|_E \\
&\leq \|q(t) - q(\tau)\|_E + \left\| \int_0^{\sigma(t)} k(t,s)v(s)ds - \int_0^{\sigma(t)} k(\tau,s)v(s)ds \right\|_E \\
&\quad + \left\| \int_0^{\sigma(t)} k(\tau,s)v(s)ds - \int_0^{\sigma(\tau)} k(\tau,s)v(s)ds \right\|_E \\
&\leq \|q(t) - q(\tau)\|_E + \left\| \int_0^{\sigma(t)} [k(t,s) - k(\tau,s)]v(s)ds \right\|_E + \left\| \int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} k(\tau,s)v(s)ds \right\|_E \\
&\leq \|q(t) - q(\tau)\|_E + \left| \int_0^{\sigma(t)} |k(t,s) - k(\tau,s)| \|v(s)\|_E ds \right| + \left| \int_{\sigma(\tau)}^{\sigma(t)} |k(\tau,s)| \|v(s)\|_E ds \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}
\|y(t) - y(\tau)\|_E &\leq \|q(t) - q(\tau)\|_E + \int_0^{\sigma(t)} |k(t,s) - k(\tau,s)| h(s) ds + |p(t) - p(\tau)| \\
&\leq \|q(t) - q(\tau)\|_E + \max_{0 \leq s \leq \sigma(t)} \{|k(t,s) - k(\tau,s)|\} \int_0^{\sigma(t)} g(s) ds + |p(t) - p(\tau)|
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $p(t) = M \int_0^{\sigma(t)} g(s) ds$ dir.

g ve σ fonksiyonları J üzerinde sürekli olduğundan p fonksiyonu J üzerinde düzgün süreklidir. Sonuç olarak $t \rightarrow \tau$ için $\|y(t) - y(\tau)\|_E \rightarrow 0$ elde edilir. Bu ise $S(A)$ nın X içinde eşsürekli olduğunu gösterir. Böylece Eş.4.3 ifadesi ve Lemma 4.2 göz önüne alınırsa

$$\alpha(S(A)) \leq \lambda M \alpha(A)$$

bulunur. $\lambda M < 1$ olduğundan S dönüşümü $[a, b]$ üzerinde sayılabilir yoğunlaştırıcı dönüşüm olur. Benzer şekilde T dönüşümünün de $[a, b]$ üzerinde sayılabilir yoğunlaştırıcı dönüşüm olduğu gösterilebilir.

Şimdi de S dönüşümünün kapalı grafiğe sahip olduğunu görelim. $\{x_n\}$ dizisi $[a, b]$ içinde $x_n \rightarrow x_0$ olacak şekilde bir dizi ve $\{y_n\}$ dizisi de $y_n \in Sx_n$ ve $y_n \rightarrow y_0$ olacak şekilde bir dizi olsun. $y_0 \in Sx_0$ olduğunu göstereceğiz. $y_n \in Sx_n$ olduğundan

$$y_n(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) v_n(s) ds$$

olacak şekilde bir $v_n \in S_F^1(x_n)$ vardır. $y_0 \in Sx_0$ olduğunu göstermek için

$$y_0(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) v_0(s) ds$$

olacak şekilde $v_0 \in S_F^1(x_0)$ ın varlığını göstermek yeterlidir.

Şimdi $\Gamma : L^1(J, E) \rightarrow C(J, E)$,

$$\Gamma v(t) = \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) v(s) ds$$

şekilde tanımlanan sürekli lineer operatörünü göz önüne alalım. Böylece $n \rightarrow \infty$ için

$$\|y_n - q(t) - (y_0 - q(t))\|_E \rightarrow 0$$

olur. Lemma 4.4 den $\Gamma \circ S_F^1$ operatörü $C(J, E) \times C(J, E)$ üzerinde kapalı grafik operatörüdür. Üstelik

$$y_n(t) - q(t) \in \Gamma \circ S_F^1(x_n)$$

olur. $y_n \rightarrow y_0$ olduğundan

$$y_0(t) = q(t) + \int_0^{\sigma(t)} k(t, s) v_0(s) ds$$

olacak şekilde bir $v_0 \in S_F^1(x_0)$ vardır. Sonuç olarak S kapalı dönüşümdür. Benzer şekilde T dönüşümünün de kapalı olduğu gösterilebilir.

Sonuç olarak S ve T dönüşümleri Sonuç 4.2 nin tüm koşullarını sağlar. O halde bu dönüşümler $[a, b]$ içinde bir ortak sabit noktaya sahiptirler. Bu ise Eş. 4.1 ve Eş. 4.2 integral içermelerinin J üzerinde bir ortak çözümünün var olduğunu gösterir.

5. SONUÇ

İlk bölümde sabit nokta kavramı ile, tek değerli ve küme değerli dönüşümler için verilen ilk sabit nokta teoremleri hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümünde ise gelecek bölümlerde verilecek olan teoremlerin ispatlarında kullanılacak bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümün ilk kısmında bir küme üzerinde iki metrik ile birlikte bir kapalı bağıntıyı sağlayan bir tek değerli dönüşüm için iki sabit nokta teoremi ispatlanmıştır. İkinci kısımda ise ilk kısımda verilen bir teoremin homotopi uygulaması verilmiştir.

Dördüncü bölümün ilk kısmında da daha önce ispatlanmış bir sıralı Banach uzayı üzerinde iki küme değerli dönüşümün ortak sabit noktasını veren bir teorem verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmında ise ilk kısımda verilen teoremin bir sunucunu kullanarak iki integral içermenin ortak çözümünün varlığı hakkında bir teorem ispatlanmıştır.

KAYNAKLAR

1. Brouwer, L. E. J., "Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten", *Math. Ann.*, 71: 97-115 (1910).
2. Schauder, J., "Der fixpunktsatz in funktionalramen", *Studia Math.*, 2: 171-180, (1930).
3. Banach, S., "Sur les oprations dans les ensembles abstraits et leur applications aux equations integrales", *Fund. Math.*, 3: 133-181 (1922).
4. Ćirić, Lj. B., "Fixed Point Theory", *Beograd*, 21-55 (2003).
5. Kirk, W. A., Sims, B., "Handbook of Metric Fixed Point Theory", *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 1-34 (2001).
6. Agarwal, R. P., Meehan, M., O'Regan, D., "Fixed Point Theory and Applications", *Cambridge University Pres*, Cambridge, 1-64 (2001).
7. Türkoğlu, D., Agarwal, R. P., O'Regan, D., Altun, I., "Some fixed point theorems for single valued and multivalued countably condensing weakly uniform isotone mappings", *Pan American Math. Journal*, 15(1): 57-68 (2005).
8. Dhage, B. C., "Condensing mappings and applications to existence theorems for common solution of diffefential equations", *Bull. Korean Math. Soc.*, 36(3): 565-578 (1999).
9. Dhage, B. C., O'Regan, D., Agarwal, R. P., "Common fixed point theorems for a pair of cauntably condensing mappings in ordered Banach spaces", *J. Appl. Math. Stoc. Anal.*, 16(3): 243-248 (2003).
10. Türkoğlu, D., "Fixed point theorems on uniform spaces", *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 34(3): 453-459 (2003).
11. Türkoğlu, D., Fisher, B., "Related fixed points for set valued mappings on two uniform spaces", *Int. J. Math.Math. Sci.*, 69: 3783-3791 (2004).
12. Türkoğlu, D., Fisher, B., "Fixed point of multivalued mapping in uniform spaces", *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 113: 1-6 (2003).
13. Cho, Y. J., "Fixed points in fuzzy metric spaces", *J. Fuzzy Math.*, 5: 949-962 (1997).
14. Fang, J. X., "On fixed point theorems in fuzzy metric spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, 46: 107-113 (1992).

15. Singh, B., Chauhan, M. S., "Common fixed points of compatible maps in fuzzy metric spaces", *Fuzzy Sets and Systems*, 115: 471-475 (2000).
16. Dhage, B. C., "Common fixed point mappings on ordered Banach spaces with applications", *Math. Sci. Res. J.*, 6(4): 210-220 (2002).
17. O'Regan, D., "Existence Theory for Nonlinear Ordinary Differential Equations", *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 4-45 (1997).
18. O'Regan, D., Precup, R., "Theorems of Leray-Schauder Type and Applications", *Gordon and Breach Science Publishers*, 9-42 (2001).
19. Nadler, S. B., "Multivalued contraction mappings", *Pacific J. Math.*, 30: 475-488 (1969).
20. Fisher, B., "Fixed points for set valued mappings on metric spaces", *Bull. Malaysian Math. Soc.*, 4(2): 95-99 (1981).
21. Assad, N. A., Kirk, W. A., "Fixed point theorems for set-valued mappings of contractive type", *Pacific J. Math.*, 43: 553-562 (1972).
22. Ćirić, Lj. B., "Fixed points for generalized multi-valued mappings", *Mat. Vesnik*, 9(24): 265-272 (1972).
23. Dube, L., Singh, S., "On multi-valued contraction mappings", *Bull. Math. Soc. Sci. RSR*, 14: 307-310 (1970).
24. Türkoğlu, D., Özer, O., Fisher, B., "Some fixed point theorems for set valued mappings in uniform spaces", *Demonst. Math.*, 32(2): 395-400 (1999).
25. Smithson, R. E., "Fixed points for contractive multi-functions", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 27: 192-194 (1971).
26. Fisher, B., "Common fixed points of mappings and multivalued mappings", *Rostock Math. Kolloq.*, 18: 69-77 (1981).
27. Türkoğlu, D., Altun, I., Fisher, B., "Fixed point theorem for sequences of maps", *Demonstratio Math.*, 38(2): 461-468 (2005).
28. Agarwal, R. P., Dhage, B. C., O'Regan, D., "The upper and lower solution method for differential inclusions via a lattice fixed point theorem", *Dynam. Systems Appl.*, 12: 1-7 (2003).
29. Dhage, B. C., "A functional integral inclusion involving Carathéodories", *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 14: 1-18 (2003).

30. O'Regan, D., "Integral inclusions of upper semi-continuous or lower semi-continuous type", *Proc. Amer. Math. Soc.*, 124: 2391-2399 (1996).
31. Binali, M., Alp, M., "Fonksiyonel Analiz", *Balcı Yayınları*, Ankara, 441-450 (2000).
32. Deimling, K., "Nonlinear Functional Analysis", *Springer-Verlag*, Berlin, 40-41 (1985).
33. Aliprantis, C. D., Burkinshaw, O., "Principles of Real Analysis", *Academic Pres*, San Diego, 75-76 (1998).
34. Hu, S., Papageorgiou, N. S., "Handbook of Multivalued Analysis I", *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 35-59 (1997).
35. Agarwal, R. P., O'Regan, D., "Fixed point theory for generalized contraction on space with two metric", *J. Math. Anal. Appl.*, 248: 402-414 (2000).
36. Agarwal, R. P., O'Regan, D., Sambandham, M., "Random and deterministic fixed point theory for generalized contractive maps", *Appl. Anal.*, 7(83): 711-725 (2004).
37. Gou, D., Lakshmikantham, V., Liu, X., "Nonlinear Integral Equations in Abstract Spaces", *Kluwer Academic Publishers*, Dordrecht, 9-15 (1996).
38. Lasota, A., Opial, Z., "An application of the Kukutani-Ky Fan theorem in the theory of ordinary differential equations", *Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phy.*, 13: 781-786 (1965).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : ALTUN, İshak
 Uyruğu : T.C.
 Doğum tarihi ve yeri : 01.09.1977 Düzce
 Medeni hali : Evli
 Telefon : 0 (312) 2021078
 e-mail : ialtun@gazi.edu.tr

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Yüksek lisans	Kırıkkale Üniversitesi Matematik Bölümü	2002
Lisans	Erciyes Üniversitesi Matematik Bölümü	1999
Lise	Düzce Lisesi	1994

İş Deneyimi Yıl

Yer

Görev

1999-2004	Kırıkkale Üniversitesi	Araş. Gör.
2004-	Gazi Üniversitesi	Araş. Gör.

Yabancı Dil

İngilizce