

**SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN CAUCHY PROBLEMİNE VE
İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULANMASI**

Ahmet AKBULUT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**OCAK 2007
ANKARA**

Ahmet AKBULUT tarafından hazırlanan SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN
CAUCHY PROBLEMİNE VE İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULANMASI
adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU
Tez Yöneticisi

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek
lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan: : Prof. Dr. Emin ÖZÇAĞ

Üye : Prof. Dr. Cemil YILDIZ

Üye : Prof. Dr. Ahmet Ali ÖÇAL

Üye : Prof. Dr. Bahri TURAN

Üye : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

Tarih : 26/01/2007

Bu tez, Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü tez yazım kurallarına uygundur.

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada orijinal olmayan her türlü kaynağa eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ahmet AKBULUT

**SABİT NOKTA TEOREMLERİNİN CAUCHY PROBLEMİNE VE
İNTEGRAL DENKLEMLERE UYGULANMASI**

(Yüksek Lisans Tezi)

Ahmet AKBULUT

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

Ocak 2007

ÖZET

Bu tezin ilk bölümünde, sabit nokta teori hakkında bilgi verilmiştir. İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir. Üçüncü bölümde, Cauchy probleminin çözümü ile ilgili yaklaşım yöntemleri incelenmiştir. Dördüncü bölümde, Banach sabit nokta teoremi yardımıyla integral denklemlerin çözümlerinin hangi koşullar altında var ve tek olduğu incelenmiştir. Son bölümde ise, lineer olmayan Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin kompakt aralıklar üzerinde sürekli çözümlerinin varlığı incelenmiştir. Ayrıca, özel olarak lineer olmayan Volterra integral denkleminin sürekli çözümünün tekliği incelenmiştir.

Bilim Kodu : 204.1.132
Anahtar Kelimeler : Sabit nokta, Cauchy problemi, İntegral denklem
Sayfa Adedi : 99
Tez Yöneticisi : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

**APPLICATION OF FIXED POINT THEOREMS TO CAUCHY PROBLEM
AND INTEGRAL EQUATIONS**

(M.Sc. Thesis)

Ahmet AKBULUT

**GAZİ UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY**

January 2007

ABSTRACT

In the first part of this thesis, the information about fixed point theory has been given. In the second part, some fundamental concepts and theorems which are going to be used in the following parts have been given. In the third part, the approximation methods for solving the Cauchy problem have been examined. In the fourth part, with the help of Banach fixed point theorem, conditions required for the solutions of integral equations to exist and be unique have been examined. In the final part, the existence of continuous solutions over compact intervals of nonlinear Fredholm and Volterra integral equations have been examined. Furthermore, particularly the uniqueness of continuous solutions of nonlinear Volterra integral equations has been examined.

Science Code : 204.1.132

Key Words : Fixed point, Cauchy problem, Integral equation

Page Number: 99

Adviser : Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, kaynaklarla destekleyen ve fikirleriyle yol gösteren hocam Doç. Dr. A. Duran TÜRKOĞLU'na ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen İshak ALTUN'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR	viii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER.....	3
3. CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İLE İLGİLİ YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ	28
3.1. Birinci Değişkene Göre Lipschitz Koşulu.....	35
3.2. Cauchy Problemi İçin Büzülme Prensibi	44
4. İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ	56
4.1. Lineer Fredholm İntegral Denklemleri.....	56
4.2. Lineer Volterra İntegral Denklemleri.....	61
4.3. Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemleri	66
4.4. Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemleri.....	73
5. LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİN SÜREKLİ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI ÜZERİNE.....	80
5.1. Lineer Olmayan İntegral Denklemler İçin Varlık Sonuçları	81
5.2. Lineer olmayan Volterra Denklemi İçin Varlık Ve Teklik Sonuçları.....	89
6. SONUÇ	96
KAYNAKLAR.....	97
ÖZGEÇMİŞ.....	99

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$[a, b]$	Kapalı aralık
(a, b)	Açık aralık
A^n	A operatörünün n . derecesi
$B(x_0, r)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı açık yuvar
$C([a, b])$	$[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar kümesi
$C^r([a, b])$	$[a, b]$ üzerinde r . mertebeden sürekli türevlenebilen fonksiyonlar kümesi
$D(A)$	A operatörünün tanım kümesi
$L_p([a, b])$	$[a, b]$ üzerinde ölçülebilir, hemen hemen yakınsak olan ve p . kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonlar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	Pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	Tüm sıralı reel sayı n lilerinin kümesi
$\overline{\mathbb{R}}$	Genişletilmiş reel sayılar kümesi
$\overline{S}_r(x_0)$	x_0 merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar
(X, d)	Metrik uzay
$(X, \ \cdot\)$	Normlu uzay
$\ A\ $	A nın normu

1. GİRİŞ

Bu tezde, sabit nokta teorisinin uygulama alanlarından, Cauchy probleminin çözümü ile ilgili yaklaşım yöntemlerinin ve integral denklemlerin sürekli çözümleri ile ilgili varlık ve teklik teoremlerinin incelenmesi amaçlanmıştır.

Tarihsel olarak sabit nokta teori çalışmaları iki ana dalda gelişmektedir. Birincisi, normlu lineer uzayların kompakt, konveks alt kümeleri üzerinde tanımlı, sürekli operatörler için sabit nokta teoridir. Bu yöndeki çalışmalardan bazılarını [1-3] te görebiliriz. Diğeri ise, tam metrik uzaylar üzerinde büzülme ve büzülme tipi dönüşümler için sabit nokta teoridir. Bu yöndeki çalışmalardan bazılarını ise [4-7] de görebiliriz.

Sabit nokta teorisi 1911 yılında Brouwer ile başlamıştır. Brouwer, IR^n nin kapalı birim yuvarından yine aynı kapalı birim yuvar üzerine tanımlanan herhangi bir sürekli dönüşümün bir sabit noktası olduğunu ispatladı [8]. 1922 de Banach, Banach sabit nokta teoremi veya büzülme ilkesi olarak bilinen aşağıdaki teoremi verdi [9].

“ f , bir (X, d) tam metrik uzayından yine kendisi üzerine tanımlanan bir büzülme dönüşümü ise, f nin X de bir tek sabit noktası vardır ve ayrıca her $x \in X$ için $(f^n(x))$ Picard iterasyonları bu sabit noktaya yakınsar.”

Banach 'ın bu çalışması bundan sonraki yapılan çalışmaların genellenmesinde temel teşkil eder. 1930 yılında Schauder, X Banach uzayının boştan farklı bir konveks kümesinden, bu konveks alt kümenin bir kompakt alt kümesine tanımlı, sürekli herhangi bir dönüşümün sabit noktası olduğunu ispatladı [10].

Banach sabit nokta teoreminin ifadesinden de anlaşılabilceği gibi, Banach sabit nokta teoremi, dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti ettiği gibi, Brouwer ve Schauder sabit nokta teoremlerinden farklı olarak bu sabit noktanın tekliliğini ve nasıl bulunabileceğini göstermektedir.

Yukarıda bahsedilen Schauder ve Banach sabit nokta teoremleri ve daha sonraki yıllarda verilen pek çok sabit nokta teoremleri, diferansiyel denklemler ve integral denklemler gibi denklemlerin çözümlerinin varlığı ve tekliğinin araştırılmasında önemli bir araç olarak kullanılmaktadır.

Tezin ikinci bölümünde; daha sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel kavramlar ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Cauchy probleminin çözümü ile ilgili yaklaşım yöntemleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; Banach sabit nokta teoremi yardımıyla ikinci çeşit homojen olmayan lineer Fredholm ve Volterra integral denklemleri ile lineer olmayan Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin hangi koşullar altında çözümlerinin var ve tek olduğu incelenmiştir.

Beşinci bölümde; lineer olmayan Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin kompakt aralıklar üzerinde sürekli çözümlerinin varlığı incelenmiştir. Ayrıca, özel olarak lineer olmayan Volterra integral denkleminin sürekli çözümünün tekliği incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TEOREMLER

2.1. Tanım

X boş olmayan bir küme olsun. Eğer $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için

$$a) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$b) d(x, y) = d(y, x)$$

$$c) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

koşullarını sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir metrik ve (X, d) ikilisine de bir metrik uzay denir.

2.2. Tanım

(X, d) herhangi bir metrik uzay olmak üzere bir $x_0 \in X$ ve $r > 0$ reel sayısı verildiğinde;

$$B(x_0, r) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\}$$

kümesine, x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar,

$$B[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\}$$

kümesine, x_0 merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar,

$$S[x_0, r] = \{x \in X : d(x, x_0) = r\}$$

kümesine, küre (yuvar yüzeyi) denir.

2.3. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve U da X in boş olmayan bir alt kümesi olsun. Eğer $\forall x \in U$ için $B(x, r) \subset U$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı varsa U kümesine d açıktır denir.

2.4. Tanım

Bir (X, d) metrik uzayında bir A alt kümesi için $A^c = X - A$ d açık ise, A ya d kapalı küme denir.

2.5. Tanım

Bir (X, d) metrik uzayında $\{x_n\}$ bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_{(\varepsilon)}$ için $x_n \in B(x, \varepsilon)$ olacak şekilde bir $n_{(\varepsilon)}$ doğal sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisi x noktasına yakınsar denir. Kısaca $x_n \rightarrow x$ ile gösterilir.

2.6. Tanım

Bir (X, d) metrik uzayında herhangi bir dizi $\{x_n\}$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n \geq n_{(\varepsilon)}$ için $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_{(\varepsilon)}$ doğal sayısı var ise $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Eğer, (X, d) metrik uzayı içindeki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise, (X, d) ikilisine tam metrik uzay denir.

2.7. Tanım

(f_n) dizisi f fonksiyonuna (X, d) metrik uzayı üzerinde düzgün yakınsaktır

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \varepsilon \text{ na bağılı } \exists n_0 \ni \forall n \geq n_0 \text{ ve } \forall x \in X \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

2.8. Tanım

(f_n) dizisi f fonksiyonuna (X, d) metrik uzayı üzerinde noktasal yakınsaktır

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ ve her bir } x \in X \text{ için } \exists n_0 \ni \forall n \geq n_0 \text{ için } |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

2.9. Tanım

(X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar, $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists \delta > 0 \ni \forall x \in X$ için $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ oluyorsa, f dönüşümü x_0 noktasında süreklidir. Burada $\delta > 0$ sayısı ε ve x_0 a bağlıdır.

2.1. Teorem

(X, d) ve (Y, ρ) metrik uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. f nin $x_0 \in X$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeterli koşul $x_n \in X, n = 1, 2, \dots$ ve $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ koşullarını sağlayan her (x_n) dizisi için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

olmasıdır.

2.10. Tanım

Bir (X, d) metrik uzayında açık kümelerin bir ailesi $\{G_i : i \in I\}$ olsun. Eğer, $A \subset X$ için

$$A \subset \bigcup_{i \in I} G_i$$

oluyorsa, $\{G_i : i \in I\}$ ailesine A kümesinin bir açık örtüsü denir. Eğer, bir açık örtünün

$$A \subset \bigcup_{k=1}^n G_{i_k}$$

olacak biçimde bir $\{G_{i_k} : k = 1, 2, \dots, n\}$ alt ailesi var ise, bu aileye A kümesinin sonlu alt örtüsü denir.

2.11. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer, A kümesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa, A kümesine kompakt küme denir.

Eğer, X kompakt bir küme ise, (X, d) uzayına kompakt metrik uzay denir.

2.12. Tanım

X boş olmayan bir küme ve IK reel veya kompleks sayılar cismi olsun. Aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa X e IK cismi üzerinde bir Lineer uzay veya Vektör uzayı denir.

Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in IK$ için

a) $x + y \in X$ (kapalılık özelliği)

b) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (birleşme özelliği)

c) $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde $\theta \in X$ vardır. (özdeş eleman)

d) $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde $-x \in X$ vardır. (ters eleman)

e) $x + y = y + x$ (değişme özelliği)

f) $\alpha x \in X$

g) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

h) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

ı) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

i) $1.x = x$ (Burada 1, IK nın birim elemanıdır.)

2.13. Tanım

X bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \rightarrow IR$ fonksiyonunun x deki değerini $\|x\|$ ile gösterelim. Bu fonksiyon aşağıdaki şartları sağlarsa, $\|\cdot\|$ a X üzerinde bir norm denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de normlu uzay adı verilir.

a) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

b) $\alpha \in IK$ olmak üzere $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği).

$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. $d: X \times X \rightarrow IR$, $d(x, y) = \|x - y\|$ şeklinde tanımlanan d bir metriktir. Bu metriğe norm metriği denir. Dolayısıyla her normlu uzay bir metrik uzaydır.

2.14. Tanım

X normlu lineer uzay olsun. Eğer X norm metriğine göre tam ise X uzayına Banach uzayı adı verilir.

2.15. Tanım

X boştan farklı bir küme ve τ , X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir alt kümesi olsun. Eğer τ kümesi,

a) $\emptyset, X \in \tau$

b) τ ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti τ ya aittir. Yani,

$$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n \in \tau \text{ ise } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau \text{ dir.}$$

c) τ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi τ ya aittir. Yani,

$$\forall \{A_i\}_{i \in I} \in \tau \text{ ise } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau \text{ dır.}$$

koşullarını sağlıyorsa, τ ya X üzerinde topoloji, (X, τ) ikilisine de topolojik uzay denir.

2.16. Tanım

(X, τ) bir topolojik uzay olsun. Her $x, y \in X$, $x \neq y$ için $\exists N \in N_{(x)}, M \in N_{(y)} \ni N \cap M = \emptyset$ ise X topolojik uzayına Hausdorff uzay denir.

2.2. Teorem

Bir (X, τ) kompakt topolojik uzayının her kapalı alt kümesi de kompaktır.

2.17. Tanım

X bir topolojik uzay olsun. Herhangi $f: X \rightarrow X$ sürekli fonksiyonu için $f(x_0) = x_0$ olacak şekilde bir $x_0 \in X$ varsa X uzayına, sabit nokta özelliğine sahiptir denir.

2.18. Tanım

$X \neq \emptyset$ bir küme ve $f : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. $f(x) = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına f nin bir sabit noktası denir. Başka bir ifadeyle

$$f(x) = x \quad (x \in X)$$

denkleminin çözümü f nin bir sabit noktasıdır.

2.1. Örnek

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ dönüşümü için $x = 0$ ve $x = 1$ noktaları sabit noktalardır.

2.2. Örnek

$X = C^1(\mathbb{R})$ ve $f : X \rightarrow X$, $f(\varphi(x)) = \varphi'(x)$ olsun. Buna göre, e^x fonksiyonu f dönüşümünün sabit noktasıdır.

2.3. Örnek

$X = [0, \infty)$ ve $c > 0$ olmak üzere $f : X \rightarrow X$, $f(x) = x + c$ olsun. Bu durumda, bu dönüşümün hiçbir sabit noktası yoktur.

2.4. Örnek

$X = [0, \infty)$ ve $f : X \rightarrow X$, $f(x) = \frac{x}{4}$ olsun. Bu durumda, $x = 0$ noktası bu dönüşümün tek sabit noktasıdır.

2.3. Teorem (Sabit Nokta Teoremi)

f , $[a, b]$ aralığından $[a, b]$ içine tanımlı, sürekli bir fonksiyon ise, $f(x) = x$ denkleminin $[a, b]$ aralığı içinde en az bir kökü vardır.

2.19. Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $f : X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $x, y \in X$ için,

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$$

koşulunu sağlayan bir $\alpha > 0$ reel sayısı varsa, f ye Lipschitz koşulunu sağlıyor denir. Burada $\alpha < 1$ ise, f ye büzülme dönüşümü veya daralma dönüşümü; $\alpha = 1$ ise, f ye genişlemeyen dönüşüm denir. Her $x, y \in X$ için ($x \neq y$)

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

ise, f ye büzülebilir dönüşüm denir.

2.5. Örnek

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ dönüşümünü göz önüne alalım.

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

dir. Bu dönüşümün sabit noktası yoktur.

2.6. Örnek

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x$ dönüşümünü göz önüne alalım.

$$|f(x) - f(y)| = |x - y|$$

dir. Bütün $x \in \mathbb{R}$ noktaları bu dönüşümün sabit noktalarıdır.

2.7. Örnek

$f : [0,1] \rightarrow [0,1]$, $f(x) = 2x - 1$ dönüşümünü göz önüne alalım.

$$|f(x) - f(y)| \leq 2|x - y|$$

dir. Bu dönüşüm, $\alpha = 2$ için Lipschitz koşulunu sağlar. f nin $[0,1]$ aralığında bir tek sabit noktası vardır. $x = 1$ noktası, bu dönüşümün tek sabit noktasıdır.

Yukarıdaki örneklerde görüldüğü gibi, bir dönüşümün sabit noktasının varlığı, dönüşümün niteliğine bağlı olduğu gibi, aynı zamanda tanımlı olduğu kümenin yapısına da bağlıdır. Bu nedenle sabit nokta teoremi, bir dönüşümün hangi koşullar altında sabit noktasının var ve tek olduğu sorusuna cevap aranır.

2.4. Teorem (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) bir tam metrik uzay ve $T : X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü ise, T nin X de bir tek sabit noktası vardır [11].

İspat

$y_0 \in X$ olsun. $y_1 = Ty_0$, $y_2 = Ty_1$, $y_3 = Ty_2$, ..., $y_n = Ty_{n-1}$, ... olacak şekilde bir $\{y_n\}$

dizisi oluşturalım. Bir sabit noktanın varlığını ispatlayabilmemiz için $\{y_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu göstermemiz gerekir.

$$d(y_n, y_{n+1}) = d(Ty_{n-1}, Ty_n) \leq \alpha d(y_{n-1}, y_n) \leq \dots \leq \alpha^n d(y_0, y_1) = \alpha^n d(y_0, Ty_0)$$

olduğundan her $m > n$ için,

$$\begin{aligned} d(y_n, y_m) &\leq d(y_n, y_{n+1}) + d(y_{n+1}, y_{n+2}) + \dots + d(y_{m-1}, y_m) \\ &\leq \alpha^n d(y_0, Ty_0) + \alpha^{n+1} d(y_0, Ty_0) + \dots + \alpha^{m-1} d(y_0, Ty_0) \\ &\leq (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \dots + \alpha^{m-1}) d(y_0, Ty_0) \\ &\leq \alpha^n (1 + \alpha + \dots + \alpha^{m-n-1}) d(y_0, Ty_0) \\ &\leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} d(y_0, Ty_0) \end{aligned}$$

olur. Son terim, $0 < \alpha < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için sıfıra gider. Bu ise, $\{y_n\}$ dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gsterir. X tam metrik uzay olduğu için, $\{y_n\}$ dizisi yakınsaktır. O halde,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \bar{y}, \bar{y} \in X$$

tir. T sürekli olduğundan,

$$T\bar{y} = T \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = \bar{y}$$

olur. O halde, $\bar{y} \in X$ sabit noktadır.

şimdi bu sabit noktanın tek olduğunu gösterelim. $\bar{y}$ ve $\bar{\bar{y}}$ iki sabit nokta olsun. Buna

göre, $T\bar{y} = \bar{y}$ ve $T\bar{\bar{y}} = \bar{\bar{y}}$ dir. O halde,

$$d(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) = d(T\bar{y}, T\bar{\bar{y}}) \leq \alpha d(\bar{y}, \bar{\bar{y}})$$

yazabiliriz. $0 < \alpha < 1$ olduğundan, eşitsizliğin sağlanması için,

$$d(\bar{y}, \bar{\bar{y}}) = 0$$

olmalıdır. O halde, $\bar{y} = \bar{\bar{y}}$ dir.

2.20. Tanım

X bir küme olsun. X in bir A ailesi için,

a) $X \in A$

b) Her $E \in A$ için $X - E \in A$

c) $k = 1, 2, \dots, n$ için $E_k \in A$ ise $\bigcup_{k=1}^n E_k \in A$

koşulları sağlanıyorsa, A ailesine X üzerinde bir cebirdir denir.

Eğer c) koşulu yerine

d) Her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in A$ ise $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in A$

koşulu alınırsa, A cebirine bir σ -cebiri denir.

2.21. Tanım

$\mathbb{R}^n$ deki bütün (a,b) aralıklarının doğurduğu σ -cebiri Borel cebiri denir ve $B(\mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. $n = 1$ olması halinde $B(\mathbb{R}^1)$ Borel cebiri $B(\mathbb{R})$ ile gösterilir.

$B(\mathbb{R})$ nin her bir elemanına Borel kümesi denir. Bu tanıma göre $B(\mathbb{R})$ kümesi, tüm açık aralıkları ihtiva eden bir σ -cebidir.

2.22. Tanım

X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir σ -cebiri olsun. $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir ölçülebilir uzay, $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de $\mathcal{A}$ - ölçülebilir küme (veya kısaca, ölçülebilir küme) denir.

2.23. Tanım

$(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu,

a) $\mu(\emptyset) = 0$

b) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

c) Her ayrık $\{A_n\}$ dizisi için
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

özelliklerini sağlarsa, bu fonksiyona bir ölçü fonksiyonu veya kısaca ölçü denir.

2.24. Tanım

Bir X kümesi, X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ σ -cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir μ ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne, bir ölçü uzayı adı verilir.

2.25. Tanım

X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu,

a) $\mu^*(\emptyset) = 0$

b) Her $E \in P(X)$ için $\mu^*(E) \geq 0$

c) $A \subset B \subset X$ için $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$

d) Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \in P(X)$ ise $\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$

koşullarını sağlarsa, μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir dış ölçüdür denir.

2.26. Tanım

(I_k) , $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde ,

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : (I_k) \in \tau_A \right\}$$

şeklinde tanımlanan λ^* , bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye, Lebesgue dış ölçüsü denir.

Burada $l(I_k)$, I_k aralığının uç noktalarının farkıdır.

Bir μ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $A \subset X$ kümelerinin sınıfı $M(X, \mu^*)$ ile

gösterilir. λ^* Lebesgue dış ölçüsü ile ölçülebilen, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin sınıfı kısaca M ile gösterilir. Lebesgue dış ölçüsü olan λ^* ın $M(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına da, $B(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına Lebesgue dış ölçüsü denir ve λ ile gösterilir.

2.27. Tanım

(X, A) bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli koşul her $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in A$$

olmasıdır.

2.28. Tanım

Reel sayılara $-\infty$ ve $+\infty$ uda katarak elde edilen yeni kümeye Genişletilmiş reel sayılar denir ve $\overline{\mathbb{R}}$ ile gösterilir. Yani, $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ olur.

2.29. Tanım

(X, A) bir ölçülebilir uzay ve $A \in A$ olsun. $f : A \rightarrow [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}((\alpha, +\infty]) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in A$

X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli A -ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $M(X, A)$ ile gösterilir.

2.30. Tanım

f , X den $\overline{\mathbb{R}}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

şeklinde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^+ fonksiyonuna, f nin pozitif parçası; f^- fonksiyonuna, f nin negatif parçası denir.

2.31. Tanım

Görüntü kümesi sonlu elemandan meydana gelen bir φ fonksiyonuna bir basit fonksiyon denir.

X üzerinde tanımlı, reel değerli, A -ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X, A)$, S deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi de S^+ ile gösterilir.

2.32. Tanım

(X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. a_k lar negatif olmayan reel sayılar, $A_1, A_2, \dots, A_n$ ler A ya ait ayrık kümeler olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^n a_k \chi_{A_k}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^n a_k \mu(A_k)$$

genişletilmiş reel sayıdır. Burada χ, A_k kümesinin

$$\chi_{A_k}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_k \\ 0, & x \notin A_k \end{cases}$$

şeklinde tanımlı karakteristik fonksiyonudur.

2.33. Tanım

(X, A, μ) bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X, A)$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali,

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \in S^+, \varphi \leq f \right\}$$

genişletilmiş reel sayısıdır. $E \in A$ olmak üzere, f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre E üzerindeki integrali,

$$\int_E f d\mu = \int_X f \chi_E d\mu$$

sayısıdır.

2.34. Tanım

(X, A, μ) bir ölçü uzayı ve $f \in M(X, A)$ olsun. Eğer, $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise, f fonksiyonu X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilir denir ve bu integral,

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu$$

reel sayısıdır. Eğer $E \in A$ ise, f nin μ ye göre E üzerindeki integrali,

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

şeklinde tanımlanır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $L = L(X, A, \mu)$ ile gösterilir.

Yukarıdaki integral tanımında $X = \mathbb{R}^n$, $A = B(\mathbb{R}^n)$ ve $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçüsü olarak alınırsa elde edilen integrale, Lebesgue integrali adı verilir. Bu integral,

$$\int f(x) dx \text{ veya } \int f(x) d(\lambda(x))$$

ile gösterilir.

2.5. Teorem (Lebesgue yakınsaklık teoremi)

(X, A, μ) bir ölçü uzayı, $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2, \dots$ de X üzerinde A -ölçülebilir $[-\infty, +\infty]$ değerli fonksiyonlar olsun. Eğer, hemen hemen her x için,

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\text{b) } \forall n \in \mathbb{N} \text{ için } |f_n(x)| \leq g(x)$$

ise, bu takdirde f ve f_n fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$$

dır.

2.35. Tanım

(X, A, μ) bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere,

$$L_p = \left\{ f \in M(X, A) : |f|^p \in L(X, A, \mu) \right\}$$

kümesine p-ninci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı denir.

L_p kümesi bir vektör uzayıdır. Bu uzay üzerinde, $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{1/p}$$

dir.

2.6. Teorem (Hölder eşitsizliği)

$p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. $f \in L_p$, $g \in L_q$ ise $f \cdot g \in L_1$ dir ve

$$\|f \cdot g\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

olur.

2.7. Teorem (Minkowski eşitsizliği)

Eğer $p \geq 1$, $f, g \in L_p$ ise $f + g \in L_p$ dir ve

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

olur.

2.36. Tanım

Bir X vektör uzayının bir Y alt kümesi verilsin. Eğer $y_1, y_2 \in Y$ olduğunda,

$$M = \{y \in X : y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, 0 \leq \lambda \leq 1\} \subset Y$$

oluyorsa, Y alt kümesi dışbükeydir (konveksdir) denir.

2.37. Tanım

X ve Y normlu lineer uzaylar ve $f : X \rightarrow Y$ bir operatör olsun. B , X in açık birim yuvarı olmak üzere $\overline{f(B)}$, Y nin bir kompakt alt kümesi ise, f operatörüne, X den Y ye bir kompakt operatör denir.

2.38. Tanım (Tamamen Sürekli Operatör)

X bir Banach uzayı olsun. X in sınırlı her S alt kümesi için $T(S)$ kompakt ise, $T : X \rightarrow X$ operatörüne tamamen sınırlıdır denir. Eğer T , X üzerinde tamamen sınırlı ve sürekli ise, T ye X üzerinde tamamen süreklidir denir.

2.39. Tanım

X bir topolojik uzay, S , $C(X)$ in bir alt kümesi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için x in bir V komşuluğu var öyle ki her $f \in S$ için $y \in V$ iken $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ oluyorsa, S ye x noktasında eşsüreklidir denir. Eğer S , X in her noktasında eşsüreklidir ise, S ye bir eşsüreklilik kümesi denir.

2.8. Teorem (Ascoli-Arzela Teoremi)

X bir kompakt Hausdorff uzay olsun. Eğer, F eşşürekli ve $C(X)$ in noktasal sınırlı alt kümesi ise, buna göre F tamamen sınırlıdır [14].

2.9. Teorem (Schauder Sabit Nokta Teoremi)

K , X Banach uzayının kapalı, konveks ve sınırlı bir alt kümesi olsun. Eğer $T \in C(K, K)$ ise, buna göre T nin en azından bir sabit noktası vardır [14].

2.10. Teorem (Schaefer Sabit Nokta Teoremi)

X bir Banach uzayı ve $T : X \rightarrow X$ tamamen sürekli bir operatör olsun. Buna göre, ya

a) $x = \lambda Tx$ operatör denklemi $\lambda = 1$ için bir çözüme sahiptir.

veya,

b) $\mathcal{E} = \{x \in X : x = \lambda Tx, \lambda \in (0,1)\}$ kümesi sınırlı değildir [14].

2.11. Teorem (Leray-Schauder Prensibi)

$(X, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, $T \in C(X, X)$ ve kompakt olsun. Bir $M > 0$ sabiti için, $0 \leq \lambda \leq 1$, $x = \lambda Tx$ in herhangi bir çözümünün öncelikle $|x| \leq M$ sınırlılığını sağladığını kabul edelim. Buna göre, T nin bir sabit noktası vardır [14].

2.12. Teorem

X Banach uzayı, $D \subset X$ kapalı kümesi için $A(D) \subset D$ ve bir m doğal sayısı için A^m operatörü D üzerinde daralma operatörü olsun. Bu durumda, A operatörünün bir tek $x^* \in D$ sabit noktası vardır.

2.13. Teorem (Gronwall-Bellman Eşitsizliği)

$c \geq 0$ bir sabit olsun. u ve v de $[t_0, t_0 + a]$ aralığında negatif olmayan, sürekli ve

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^t u(s)v(s) ds, \quad t \in [t_0, t_0 + a]$$

eşitsizliğini sağlayan fonksiyonlar olsun. Bu durumda ,

$$u(t) \leq ce^{\int_{t_0}^t v(s) ds}$$

dir.

2.14. Teorem (Ortalama Değer Teoremi)

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ aralığında sürekli ve $\forall x \in (a, b)$ noktasında türevi var olsun. Bu takdirde, (a, b) aralığında,

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olacak şekilde en az bir x_0 noktası vardır.

Bu $f'(x_0)$ değerine, fonksiyonun $[a, b]$ aralığındaki ortalama değeri denir. a ile b arasındaki bir sayı $0 < \theta < 1$ olmak üzere, $a + \theta(b - a)$ şeklinde yazılabildiğinden, teoremin hipotezleri altında, $0 < \theta < 1$ şartını sağlayan en az bir θ vardır ki bu θ sayısı için,

$$f'(a + \theta(b - a)) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

olur.

2.40. Tanım

$f(x, y)$ fonksiyonu Oxy düzleminin bir D bölgesinde tanımlansın ve $(x_0, y_0) \in D$ olsun.

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

denkleminin $y(x_0) = y_0$ koşulunu sağlayan $y(x)$ çözümünün bulunmasına, başlangıç değer problemi veya Cauchy problemi denir. x_0 ve y_0 değerlerine başlangıç değerleri veya Cauchy verileri adı verilir.

2.41. Tanım

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyon içeren denklemlere, integral denklemler denir. Eğer integral denklemde, bilinmeyen fonksiyon, birinci dereceden ise, bu tip integral denklemlere, lineer integral denklemler adı verilir. Şu halde en genel lineer integral denklemi,

$$\psi(x)f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

şeklinde yazabiliriz. Burada, a ve b birer sabit sayı, λ bir parametre, ψ, ϕ ve K fonksiyonları tanım bölgesi $a \leq x \leq b$ ve $a \leq y \leq b$ olmak üzere bilinen fonksiyonlar, f ise, bilinmeyen fonksiyondur. Özel olarak ϕ fonksiyonu, integral denklemin kaynak terimi, K fonksiyonu da, integral denklemin çekirdeği olarak adlandırılır. Eğer integral denklemin çekirdeği, $x - y$ farkına bağlı, yani $x - y$ farkını değişken kabul eden bir değişkenli bir fonksiyon ise, bu tip integral denklemlere, konvolüsyon çekirdekli integral denklemler denir.

2.42. Tanım

Bir integral denklemde, bilinmeyen fonksiyon integralin sadece içinde ise, bu tip integral denkleme, birinci tip; hem içinde hem de dışında ise, ikinci tip integral denklem adı verilir. Ayrıca, ikinci tip integral denklemdeki integralin dışında kalan bilinmeyen fonksiyon, bir başka fonksiyonla çarpılmış ise, buna da üçüncü tip integral denklem adı verilir.

2.43. Tanım

Bir integral denklemde, integralin dışında ve bilinmeyen fonksiyonun haricinde bir fonksiyon varsa, bu denkleme homojen olmayan, böyle bir fonksiyon yok ise homojen integral denklem denir.

2.44. Tanım

Bir integral denklemde, integralin sınırlarından biri x gibi bir değişken ise, bu denkleme Volterra integral denklemi, sınırlardan her ikisi birden sabit olabileceği gibi, biri sabitken diğeri sonsuz yada her iki sınırın sonsuz olması durumunda integral denkleme, Fredholm integral denklemi adı verilir.

Buna göre $y > x$ için $K(x, y) = 0$ koşulunu sağlayan

$$\int_a^x K(x, y)f(y)dy = \phi(x)$$

şeklindeki birinci tip lineer Volterra integral denklemleri ile

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^x K(x, y)f(y)dy$$

şeklindeki ikinci tip lineer Volterra integral denklemlerinin $K(x, y)$ çekirdeği $\{(x, y) : a \leq y < x \leq b\}$ üçgensel bölgede tanımlanmıştır.

Yukarıda verilen tanımlara göre,

$$\psi(x)f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

denklemleri, Lineer III. tip Fredholm integral denklemleri,

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y) dy$$

denklemleri, Lineer II. tip Fredholm integral denklemleri,

$$\phi(x) + \lambda \int_a^b K(x, y)f(y) dy = 0$$

denklemleri, Lineer I. tip Fredholm integral denklemdir. Benzer şekilde Volterra integral denklemlerini de yazabiliriz.

2.45. Tanım

Bir integral denklemde bilinmeyen fonksiyon birinci dereceden değilse, bu integral denkleme lineer olmayan integral denklem adı verilir. Buna göre,

$$\int_a^x H(x, y, f(y)) dy = F(x, f(x))$$

integral denklemleri, lineer olmayan Volterra integral denkleminin en genel halidir. Bu denkleme, Urysohn formunda Volterra integral denklemleri denir. Bu denklemlerde,

$H(x, y, f(y)) = K(x, y)Q(y, f(y))$ oluyorsa,

$$\int_a^x K(x, y)Q(y, f(y))dy = F(x, f(x))$$

integral denklemine, Hammerstein formunda Volterra integral denklemi adı verilir.

Yine lineer olmayan,

$$\int_a^b H(x, y, f(y))dy = F(x, f(x)), \quad a \leq x \leq b$$

integral denkleminde $H(x, y, f(y)) = K(x, y)Q(y, f(y))$ oluyorsa,

$$\int_a^b K(x, y)Q(y, f(y))dy = F(x, f(x))$$

denklemine, lineer olmayan Hammerstein integral denklemi denir.

3. CAUCHY PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İLE İLGİLİ YAKLAŞIM YÖNTEMLERİ

Bu bölümde, başlangıç şartlarıyla verilen $y' = f(x, y)$ diferansiyel denkleminin çözümü ile ilgili iki yaklaşım yöntemi incelenmiştir.

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$ bir dikdörtgen olmak üzere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $N > 0$ için,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunu sağlayan sürekli bir fonksiyon olsun. Bu varsayımlar altında Picard Teoremine göre,

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Cauchy problemi, $M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$ ve $h < \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$ olmak üzere $Nh < 1$ ise,

$|x - x_0| \leq h$ aralığında, bir tek $y = y(x)$ çözümüne sahiptir.

Diğer taraftan, Picard teoremi çözüme yakın bir yöntem verir. Bu yönteme, ardışık yaklaşımlar yöntemi denir. Eş. 3.1 Cauchy problemine eşdeğer bir integral denklemi,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

dir. Bu integral denklemi yardımıyla, $|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı, sürekli ve grafiği D içinde kalan bütün $y = y(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu tam metrik uzay C olmak üzere, bir $T : C \rightarrow C$

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

operatörü tanımlarız. Buradan, $y_1 = Ty_0$, $y_2 = Ty_1$, $y_3 = Ty_2$, ..., $y_n = Ty_{n-1}$, ... olacak şekilde $\{y_n\}$ ardışık yaklaşımlar dizisini oluştururuz. Buna göre,

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_{n-1}(t)) dt, n \in \mathbb{N}^+$$

olur. Sonuç olarak, Eş. 3.1 in çözümü, ardışık yaklaşımlar dizisinin limitidir.

3.1. Teorem (Picard Teoremi)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{3.2}$$

diferansiyel denklemindeki f fonksiyonu,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

dikdörtgeninde sürekli olsun ve $N > 0$ bir sabit olmak üzere D de,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunu sağlasın. Buna göre, $M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|$ ve $h < \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$

olmak üzere $Nh < 1$ ise, Eş. 3.2 denkleminin $|x - x_0| \leq h$ aralığında $y(x_0) = y_0$ koşuluna uyan bir tek çözümü vardır [11].

İspat

$|x - x_0| \leq h$ aralığında tanımlı, sürekli ve grafiği D içinde kalan bütün $y : x \rightarrow y(x)$ fonksiyonlarının oluşturduğu tam metrik uzay C olsun. Bu uzaydaki uzaklığı,

$$d(y, z) = \max_{|x-x_0| \leq h} |y - z| \quad (3.3)$$

ile tanımlayalım. $y(x_0) = y_0$ başlangıç koşullu Eş. 3.2 diferansiyel denkleminin eşdeğer bir integral denklemi,

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \quad (3.4)$$

dir. Şimdi bu integral denklemi yardımıyla,

$$Ty(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt$$

operatörünü tanımlayalım. Bu integral denklemi,

$$y = Ty$$

şeklinde yazılabilir. Bu operatör, $|x - x_0| \leq h$ aralığında sürekli olan ve D bölgesinin dışına çıkmayan her y fonksiyonuna, aynı aralıkta tanımlı, sürekli bir Ty fonksiyonu karşılık getirir. Bu fonksiyonun grafiği,

$$|y - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq Mh \leq b$$

olduğundan, yine tümüyle D bölgesinin içinde kalır. O halde, T operatörü büzülme dönüşümünün ilk koşulunu sağlamaktadır. İkinci koşul için,

$$d(Ty, Tz) \leq \alpha d(y, z), \quad 0 < \alpha < 1 \quad (3.5)$$

olduğu elde edilmelidir. Eş. 3.3 ten,

$$\begin{aligned} d(Ty, Tz) &= \max_{|x-x_0| \leq h} \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, z(t)) dt \right| \\ &\leq \max_{|x-x_0| \leq h} \left| \int_{x_0}^x [f(t, y(t)) - f(t, z(t))] dt \right| \\ &\leq \max_{|x-x_0| \leq h} \left| \int_{x_0}^x N |y(t) - z(t)| dt \right| \\ &\leq N \max_{|x-x_0| \leq h} |y(x) - z(x)| \max_{|x-x_0| \leq h} \left| \int_{x_0}^x dt \right| \\ &\leq Nh \max_{|x-x_0| \leq h} |y(x) - z(x)| \\ &\leq Nh d(y, z) \end{aligned}$$

bulunur. Varsayım gereği, $Nh < 1$ dir. Böylece, T dönüşümünün büzülme dönüşümü olması için gerekli olan ikinci eşitsizliğinde doğruluğu gösterilmiş oldu. O halde, Banach sabit nokta teoremine göre, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Yani, Eş. 3.4 denkleminin bir tek sürekli çözümü vardır.

3.1. Örnek

$\frac{dy}{dx} = y$ denkleminin $y(0) = 1$ koşuluna uyan çözümünün,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y - 1| \leq 2\}$$

olmak üzere, varlık ve tekliğini araştırıp, ardışık yaklaşımlar yöntemiyle çözümünü bulalım [11].

Çözüm

$f(x, y) = y$ fonksiyonu D bölgesinde süreklidir. Bu bölgede,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \frac{4}{3} |y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunun $N = \frac{4}{3}$ için sağlandığı açıktır.

$M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)| = 3$ ve $h < \min\left\{1, \frac{2}{3}\right\} = \frac{2}{3}$ olmak üzere, $Nh < 1$ olduğundan,

$\frac{dy}{dx} = y$ denkleminin $|x| < \frac{2}{3}$ aralığında, $y(0) = 1$ koşuluna uyan bir tek çözümü

vardır. Şimdi çözümü bulmaya çalışalım.

Bu diferansiyel denkleme karşılık gelen integral denklemi,

$$y(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt$$

dir. O halde,

$$Ty(x) = 1 + \int_0^x y(t) dt$$

dir. Burada $y_0 = 1 \in C$ verilmiştir. $y_n = Ty_{n-1}$ yardımıyla $\{y_n\}$ ardışık yaklaşımlar dizisini oluşturalım.

$$y_1(x) = Ty_0(x) = 1 + x$$

$$y_2(x) = Ty_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!}$$

$$y_3(x) = Ty_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

.

.

.

$$y_n(x) = Ty_{n-1}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

.

.

.

olur. $n \rightarrow \infty$ için,

$$y = e^x$$

diferansiyel denklemin çözümüdür.

3.2. Örnek

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2 \text{ denkleminin,}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$$

bölgesinde, $y(0) = 0$ koşuluna uyan çözümünün, varlık ve tekliğini araştırıp, ardışık yaklaşımlar yöntemiyle ilk üç yaklaşımı bulalım [11].

Çözüm

$f(x, y) = x^2 + y^2$ fonksiyonu D bölgesinde süreklidir. Bu bölgede,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2|y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunun $N = 2$ için sağlandığı açıktır.

$M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)| = 2$ ve $h < \min\left\{1, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ olmak üzere, $Nh < 1$ olduğundan,

$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$ denkleminin $|x| < \frac{1}{2}$ aralığında, $y(0) = 0$ koşuluna uyan bir tek çözümü vardır. Şimdi ilk üç yaklaşımı bulalım.

Bu diferansiyel denkleme karşılık gelen integral denklemi,

$$y(x) = \int_0^x (t^2 + [y(t)]^2) dt$$

dir. O halde,

$$Ty(x) = \int_0^x (t^2 + [y(t)]^2) dt$$

dir. Burada, $y_0 = 0 \in C$ verilmiştir. Şimdi, $y_n = Ty_{n-1}$ yardımıyla ilk üç yaklaşımı bulalım.

$$y_1(x) = Ty_0(x) = \int_0^x t^2 dt = \frac{x^3}{3}$$

$$y_2(x) = Ty_1(x) = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9} \right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$$

$$y_3(x) = Ty_2(x) = \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63} \right)^2 \right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} \left(1 + \frac{2x^4}{33} + \frac{x^8}{945} \right)$$

Şimdi, Eş. 3.1 probleminin çözümüyle ilgili, Picard teoremine benzer bir sonucu inceleyelim [12].

3.1. Birinci Değişkene Göre Lipschitz Koşulu

$f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun $\lambda > 0$ için D de,

$$|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq \lambda |x_1 - x_2|$$

Lipschitz koşulunu sağladığını kabul edelim.

$$\min_{(x,y) \in D} |f(x, y)| = \alpha > 0$$

olsun. Bu varsayımlar altında,

$$\Delta = \{(y, x) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in D\}$$

olmak üzere, $g : \Delta \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y, x) = \frac{1}{f(x, y)}$ fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\max_{(y,x) \in \Delta} |g(y, x)| = \frac{1}{\alpha}$$

olduğu açıktır. Buna göre,

$$\begin{cases} x' = g(y, x) \\ x(y_0) = x_0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Cauchy problemine Picard teoremini uygulayabiliriz. Gerçekten,

$$\begin{aligned} |g(y, x_1) - g(y, x_2)| &= \frac{|f(x_1, y) - f(x_2, y)|}{|f(x_1, y) \cdot f(x_2, y)|} \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2} |f(x_1, y) - f(x_2, y)| \\ &\leq \frac{\lambda}{\alpha^2} |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

dir. Buna göre, Eş. 3.6 Cauchy problemi, $\delta < \min\{b, a\alpha\}$ olmak üzere, $\frac{\lambda}{\alpha^2} \cdot \delta < 1$ ise,

$|y - y_0| \leq \delta$ aralığında, bir tek $x = x(y)$ çözümüne sahiptir. $x' = g(y, x) \neq 0$ olduğundan bu çözüm monotondur. O halde, x_0 ın bir komşuluğunda tanımlı $y = y(x)$ tersine sahiptir. $y(x_0) = y_0$ dır.

Ayrıca, $x' = \frac{dx}{dy} = g(y, x)$, $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(y, x)} = f(x, y)$ yi sağlar. $y = y(x)$, Eş. 3.1

Cauchy probleminin bir çözümüdür.

3.2. Teorem

$f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olsun ve

a) $f(x_0, y_0) \neq 0$

b) $\lambda > 0$ olmak üzere, $\forall (x_1, y), (x_2, y) \in D$ için $|f(x_1, y) - f(x_2, y)| \leq \lambda |x_1 - x_2|$

koşullarını sağlasın. Buna göre, Eş. 3.1 denkleminin bir tek çözümü vardır.

Eğer, $D_1 = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a_1, |y - y_0| \leq b_1\} \subseteq D$ dikdörtgeninde $\forall (x, y) \in D_1$ için $f(x, y) \neq 0$ olmak üzere, $\delta < \min\{a_1\alpha, b_1\}$, $\varepsilon = \frac{1}{M} \min\{a_1\alpha, b_1\}$, $M = \max_{(x,y) \in D_1} |f(x, y)|$ ve $\alpha = \min_{(x,y) \in D_1} |f(x, y)|$ için $\frac{\lambda}{\alpha^2} \cdot \delta < 1$ ise, Eş. 3.1 denkleminin $|x - x_0| < \varepsilon$ aralığında $y(x_0) = y_0$ koşuluna uyan bir tek $y = y(x)$ çözümü vardır [12].

İspat

f nin sürekliliğinden ve $f(x_0, y_0) \neq 0$ olduğundan, $\forall (x, y) \in D_1$ için, $f(x, y) \neq 0$ olacak şekilde bir D_1 dikdörtgeni seçebiliriz. Buradan, Eş. 3.1 denkleminin bir tek çözüme sahip olduğu görülür. $D = D_1$ olduğunu varsayabiliriz. Aksi halde, D nin yerine D_1 alıp ispatı yaparız.

$D = D_1$ alalım. Teorem 3.2 nin hipotezleri altında Eş. 3.6 probleminin $|y - y_0| \leq \delta$ aralığında, bir tek $x = x(y)$ çözümüne sahip olduğunu gösterelim.

$|y - y_0| \leq \delta$ aralığında tanımlı, sürekli ve grafiği D içinde kalan bütün $x : y \rightarrow x(y)$ fonksiyonlarının oluşturduğu tam metrik uzay C olsun. Bu uzaydaki uzaklığı,

$$d(x, z) = \max_{|y - y_0| \leq \delta} |x - z| \quad (3.7)$$

ile tanımlayalım. Eş. 3.6 denkleminine eşdeğer bir integral denklemi,

$$x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y g(t, x(t)) dt \quad (3.8)$$

dir. Şimdi bu integral denklemi yardımıyla,

$$Tx(y) = x_0 + \int_{y_0}^y g(t, x(t)) dt$$

operatörünü tanımlayalım. Bu integral denklemi,

$$x = Tx$$

şeklinde yazılabilir. Bu operatör, $|y - y_0| \leq \delta$ aralığında sürekli olan ve D bölgesinin dışına çıkmayan her x fonksiyonuna, aynı aralıkta tanımlı, sürekli bir Tx fonksiyonu karşılık getirir. Bu fonksiyonun grafiği,

$$|x - x_0| = \left| \int_{y_0}^y g(t, x(t)) dt \right| \leq \frac{1}{\alpha} \delta \leq a$$

olduğundan, yine tümüyle D bölgesinin içinde kalır. O halde, T operatörü büzülme dönüşümünün ilk koşulunu sağlamaktadır. İkinci koşul için,

$$d(Tx, Tz) \leq k d(x, z), \quad 0 < k < 1 \quad (3.9)$$

olduğu elde dilmelidir. Eş. 3.7 den,

$$\begin{aligned} d(Tx, Tz) &= \max_{|y-y_0| \leq \delta} \left| \int_{y_0}^y g(t, x(t)) dt - \int_{y_0}^y g(t, z(t)) dt \right| \\ &\leq \max_{|y-y_0| \leq \delta} \left| \int_{y_0}^y [g(t, x(t)) - g(t, z(t))] dt \right| \\ &\leq \max_{|y-y_0| \leq \delta} \left| \int_{y_0}^y \frac{\lambda}{\alpha^2} |x(t) - z(t)| dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\lambda}{\alpha^2} \max_{|y-y_0| \leq \delta} |x(y) - z(y)| \max_{|y-y_0| \leq \delta} \left| \int_{y_0}^y dt \right| \\
&\leq \frac{\lambda}{\alpha^2} \delta \max_{|y-y_0| \leq \delta} |x(y) - z(y)| \\
&\leq \frac{\lambda}{\alpha^2} \delta d(x, z)
\end{aligned}$$

bulunur. Varsayım gereği, $\frac{\lambda}{\alpha^2} \delta < 1$ dir. Böylece, T dönüşümünün büzülme dönüşümü olması için gerekli olan ikinci eşitsizliğinde doğruluğu gösterilmiş oldu. O halde, Banach sabit nokta teoremine göre, T dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır. Yani, Eş. 3.8 denkleminin, sürekli bir tek $x = x(y)$ çözümü vardır.

Teorem 3.2 nin hipotezleri altında $x = x(y)$ çözümünün tersi vardır. Ters $y = y(x)$, Eş. 3.1 denkleminin bir çözümüdür. Karşılıklı olarak $y = y(x)$, Eş. 3.1 probleminin bir yerel çözümü ise, tersi $x = x(y)$, Eş. 3.6 probleminin bir çözümüdür.

$y_1, y_2 \in (y_0 - \delta, y_0 + \delta)$, $y_1 < y_2$ olsun. $x(y_1), x(y_2) \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ için ortalama değer teoreminden,

$$\begin{aligned}
2\varepsilon &> x(y_2) - x(y_1) = (y_2 - y_1) x'(c) \\
&= (y_2 - y_1) g(c, x(c)) \\
&= (y_2 - y_1) \frac{1}{f(x(c), c)} \\
&\geq \frac{1}{M} (y_2 - y_1)
\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$2\varepsilon > \frac{1}{M}(y_2 - y_1)$$

ve $y_2 \rightarrow y_0 + \delta$, $y_1 \rightarrow y_0 - \delta$ alıp $\delta < \min\{a\alpha, b\}$ ile,

$$2\varepsilon \geq \frac{1}{M} 2\delta \Rightarrow \varepsilon \geq \frac{1}{M} \delta$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Sonuç olarak, $f(x_0, y_0) \neq 0$ olmak üzere, sürekli olan f fonksiyonunun birinci dereceden kısmi türevleri var ve bu kısmi türevlerden en az biri D bölgesinde sınırlı ise, Eş. 3.1 Cauchy problemi yerel bir tek çözüme sahiptir.

Gerçekten, $\frac{\partial f}{\partial y}$ veya $\frac{\partial f}{\partial x}$ sınırlıysa, f Lipschitz koşulunu sağlar. Picard teoreminden veya Teorem 3.2 den istenen bulunur.

D bölgesinde $f(x, y) \neq 0$ olmak üzere, Eş. 3.6 problemine uygulanan ardışık yaklaşımlar yöntemini $g(y, x) = \frac{1}{f(x, y)}$ ile ifade edebiliriz. Eş. 3.6 problemine eşdeğer bir integral denklemi,

$$x(y) = x_0 + \int_{y_0}^y g(t, x(t)) dt$$

dir. Bu integral denklemi yardımıyla,

$$Tx(y) = x_0 + \int_{y_0}^y g(t, x(t)) dt$$

operatörünü tanımlayalım. Bu integral denklemi,

$$x = Tx$$

şeklinde yazılabilir. $x_1 = Tx_0$, $x_2 = Tx_1$, $x_3 = Tx_2$, ..., $x_{n+1} = Tx_n$, ... olacak şekilde $\{x_n\}$ ardışık yaklaşımlar dizisini oluşturalım. Buna göre,

$$\begin{aligned} x_{n+1}(y) &= x_0 + \int_{y_0}^y g(t, x_n(t)) dt, n \in \mathbb{N} \\ &= x_0 + \int_{y_0}^y \frac{1}{f(x_n(t), t)} dt, n \in \mathbb{N} \end{aligned} \quad (3.10)$$

olur. Şimdi bu dizinin yakınsak olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= \max_{|y-y_0| \leq \delta} |x_n - x_{n+1}| \\ &= \max_{|y-y_0| \leq \delta} \left| \int_{y_0}^y [g(t, x_{n-1}(t)) - g(t, x_n(t))] dt \right| \\ &\leq \max_{|y-y_0| \leq \delta} \left| \int_{y_0}^y |g(t, x_{n-1}(t)) - g(t, x_n(t))| dt \right| \\ &\leq \max_{|y-y_0| \leq \delta} \left| \int_{y_0}^y \frac{\lambda}{\alpha^2} |x_{n-1}(t) - x_n(t)| dt \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{\alpha^2} \max_{|y-y_0| \leq \delta} |x_{n-1}(y) - x_n(y)| \max_{|y-y_0| \leq \delta} \left| \int_{y_0}^y dt \right| \\ &\leq \frac{\lambda}{\alpha^2} \delta \max_{|y-y_0| \leq \delta} |x_{n-1} - x_n| \\ &= k d(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(Tx_{n-1}, Tx_n) \leq k d(x_{n-1}, x_n) \leq \dots \leq k^n d(x_0, x_1) = k^n d(x_0, Tx_0)$$

olur. O halde her $m > n$ için,

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq k^n d(x_0, Tx_0) + k^{n+1} d(x_0, Tx_0) + \dots + k^{m-1} d(x_0, Tx_0) \\ &\leq (k^n + k^{n+1} + \dots + k^{m-1}) d(x_0, Tx_0) \\ &\leq k^n (1 + k + \dots + k^{m-n-1}) d(x_0, Tx_0) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, Tx_0) \end{aligned}$$

olur. Son terim, $0 < k < 1$ olduğundan $n \rightarrow \infty$ için sıfıra gider. Uzay tam olduğundan $\{x_n\}$ dizisi Cauchy dizisi olur. O halde, $\{x_n\}$ dizisi yakınsaktır ve $x = x(y)$ ile belirtilen bir fonksiyona yakınsar. Bu fonksiyon monoton olduğundan tersi vardır. Bu fonksiyon, Eş. 3.6 probleminin bir çözümüdür ve tersi Eş. 3.1 probleminin çözümüdür. Bu çözüm,

$$x - x(y) = 0$$

kapalı formunda yazılabilir.

3.3. Örnek

$$f(x, y) = \frac{y}{x + \ln y} \text{ olmak üzere,}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x + \ln y} \\ y(1) = 1 \end{cases} \quad (3.11)$$

Cauchy problemini göz önüne alalım [12].

$$f(1,1) = 1 \neq 0 \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{(x + \ln y)^2} \text{ dir.}$$

Buna göre, (1,1) noktasını kapsayan bir dikdörtgende $\frac{\partial f}{\partial x}$ sınırlıdır. O halde, Eş. 3.11 problemine Teorem 3.2 yi uygulayabiliriz.

$x_0 = 1$ ve $y_0 = 1$ ile Eş. 3.10 bağıntısı,

$$x_{n+1}(y) = x_0 + \int_{y_0}^y g(t, x_n(t)) dt$$

$$= 1 + \int_1^y \frac{x_n(t) + \ln(t)}{t} dt$$

$$= 1 + \ln^2 y + \int_1^y \frac{x_n(t)}{t} dt$$

olur. Buradan,

$$x_1(y) = 1 + \ln y + \frac{\ln^2 y}{2}$$

$$x_2(y) = 1 + \ln y + \ln^2 y + \frac{\ln^3 y}{6}$$

$$x_3(y) = 1 + \ln y + \ln^2 y + \frac{\ln^3 y}{3} + \frac{\ln^4 y}{24}$$

.

.

.

$$x_n(y) = 1 + \ln y + \ln^2 y + \frac{\ln^3 y}{3} + \frac{\ln^4 y}{12} + \dots + \frac{\ln^{n+1} y}{(n+1)!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$= 2 \left(1 + \frac{\ln y}{1!} + \frac{\ln^2 y}{2!} + \frac{\ln^3 y}{3!} + \dots + \frac{\ln^n y}{n!} \right) - 1 - \ln y + \frac{\ln^{n+1} y}{(n+1)!}$$

.

.

.

olur. $n \rightarrow \infty$ için kalan terim sıfıra gider. Sonuç olarak, Eş. 3.11 Cauchy probleminin çözümü,

$$x = 2y - 1 - \ln y$$

kapalı bağıntısı ile verilir.

3.2. Cauchy Problemi İçin Büzülme Prensibi

Bu kısımda, Eş. 3.1 Cauchy probleminin çözümüyle ilgili başka bir yöntem incelenmiştir [12]. Bu yöntemi uygulayabilmek için, Picard teoremindeki koşulların sağlanması gerekmektedir. Yani, f fonksiyonu sürekli olmalı ve ikinci değişkene göre Lipschitz koşulunu sağlamalıdır. Bu durumda, iki Banach uzayı arasında tanımlı $Ty = y'$ türev operatörünün tersinin olduğunu göstereceğiz. Buradan,

$$v = Ty \Leftrightarrow y = T^{-1}v$$

ifadesini kullanarak Eş. 3.1 Cauchy problemini,

$$v(x) = f(x, T^{-1}v(x))$$

sabit nokta problemi olarak yeniden yazarız. Bunun için Banach büzülme prensibini kullanacağız.

Eş. 3.1 diferansiyel denklemindeki f fonksiyonu,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}$$

dikdörtgeninde sürekli olsun ve $N > 0$ bir sabit olmak üzere D de,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|$$

Lipschitz koşulunu sağlasın.

$$M = \max_{(x,y) \in D} |f(x, y)|, \quad h < \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\} \quad \text{ve} \quad I = (x_0 - h, x_0 + h) \quad \text{olsun.}$$

Başlangıç olarak $y_0 = 0$ olarak alalım.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Cauchy problemini göz önüne alalım ve

$$W = \{y \in C(\bar{I}) : y(x_0) = 0\}$$

kümesini tanımlayalım.

3.1. Lemma

$T : W \subset C(\bar{I}) \rightarrow C(\bar{I})$, $Ty = y'$ operatörü lineer, bire bir ve örtendir. Tersi, $T^{-1} : C(\bar{I}) \rightarrow W$ lineer, sürekli ve

$$\|T^{-1}v\|_{C(\bar{I})} \leq h \|v\|_{C(\bar{I})}, \forall v \in C(\bar{I})$$

dir [12].

İspat

$\alpha \in \mathbb{R}$ ve $y_1, y_2 \in W$ olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} T(\alpha y_1 + y_2) &= (\alpha y_1 + y_2)' \\ &= \alpha y_1' + y_2' \\ &= \alpha Ty_1 + Ty_2 \end{aligned}$$

olur. O halde, T lineerdir.

$y_1, y_2 \in W$ olsun. Buna göre,

$Ty_1 = Ty_2 \Rightarrow y_1' = y_2' \Rightarrow y_1 - y_2$ sabittir. $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$ olduğundan, $y_1 = y_2$ dir. O halde, T bire bir olur.

Her $v \in C(\bar{I})$ için $y \in W$ var $\ni Ty = v$ dir. $y = T^{-1}v$ olduğundan,

$$y(x) = \int_{x_0}^x v(t) dt$$

dir. Buradan,

$$\left| T^{-1}v(x) \right| = \left| \int_{x_0}^x v(t) dt \right| \leq |x - x_0| \sup_{t \in I} |v(t)| \leq h \|v\|_{C(\bar{I})}$$

olur. $\alpha \in \mathbb{R}$, $v_1, v_2 \in C(\bar{I})$ için,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\alpha v_1 + v_2) &= \int_{x_0}^x (\alpha v_1(t) + v_2(t)) dt \\ &= \alpha \int_{x_0}^x v_1(t) dt + \int_{x_0}^x v_2(t) dt \\ &= \alpha T^{-1}v_1 + T^{-1}v_2 \end{aligned}$$

olduğundan, T^{-1} lineerdir. İntegral operatörü sürekli olduğundan, T^{-1} sürekli dir. Buna göre,

$$y \in W \text{ için } Ty(x) = f(x, y(x))$$

ifadesi Eş. 3.12 problemine denk olur. Burada,

$$Ty = v \in C(\bar{I}) \Leftrightarrow y = T^{-1}v$$

yazarsak,

$$v(x) = f(x, T^{-1}v(x)) \tag{3.13}$$

ifadesini elde ederiz.

$\bar{B}_M(0) = \{v \in C(\bar{I}) : \|v\|_{C(\bar{I})} \leq M\}$ olmak üzere, $Sv(x) = f(x, T^{-1}v(x))$ ile verilen $S : \bar{B}_M(0) \rightarrow \bar{B}_M(0)$ operatörünü göz önüne alalım. f ve T^{-1} sürekli olduğundan S iyi tanımlıdır. Eğer, $\|v\|_{C(\bar{I})} \leq M$ ise,

$$|T^{-1}v(x)| \leq h\|v\|_{C(\bar{I})} \leq \frac{b}{M}M = b$$

olur. Buna göre, $\forall x \in I$ için $(x, T^{-1}v(x)) \in D$ olur. Bu durumda, Eş. 3.13 ifadesi $v(x) = Sv(x)$ sabit nokta problemine eşit olur. Şimdi, S nin büzülme dönüşümü olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned} |Sv_1(x) - Sv_2(x)| &= |f(x, T^{-1}v_1(x)) - f(x, T^{-1}v_2(x))| \\ &\leq N|T^{-1}v_1(x) - T^{-1}v_2(x)| \\ &\leq Nh\|v_1 - v_2\|_{C(\bar{I})} \end{aligned}$$

olur. Eğer $Nh < 1$ ise, $c = Nh < 1$ den,

$$\|Sv_1 - Sv_2\|_{C(\bar{I})} \leq c\|v_1 - v_2\|_{C(\bar{I})}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Banach büzülme prensibine göre, S nin $Sv(x) = v(x)$ olacak şekilde, $v(x) \in \bar{B}_M(0) \subset C(\bar{I})$ ile tanımlı bir tek sabit noktası vardır.

$y = T^{-1}v \in W$ den $y'(x) = f(x, y(x))$ veya $v(x) = f(x, T^{-1}v(x))$ olur. Buradan, $y : (x_0 - h, x_0 + h) \rightarrow \mathbb{R}$, Eş. 3.12 Cauchy probleminin tek çözümü olur.

Şimdi, $y(x_0) = y_0$ genel durumunu göz önüne alalım.

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

denkleminde $z = y - y_0$ alırsak, buna göre z , $g(x, z) = f(x, z + y_0)$ ile,

$$\begin{cases} z' = g(x, z) \\ z(x_0) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

Cauchy problemini sağlar. g ile f aynı özelliklere sahip olduğundan, Eş. 3.14 ve Eş. 3.15 problemleri bir tek çözüme sahiptirler.

Genel olarak, Picard teoremine göre ardışık yaklaşımlar dizisi,

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, n \in \mathbb{N}$$

ile gösterilir.

Bazı durumlarda bu bağıntıdan integral hesaplamak, burada verilen yönteme göre daha zordur. Çünkü buradaki bağıntıda, yani

$$v_{n+1}(x) = f\left(x, \int_{x_0}^x v_n(t) dt\right), n \in \mathbb{N} \quad (3.16)$$

bağıntısında, f nin ikinci değişkeninde integral işareti vardır.

3.4. Örnek

Birinci dereceden lineer diferansiyel denklem olarak bilinen,

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Cauchy problemini göz önüne alalım [12]. a ve b fonksiyonları, reel kompakt aralıkta sürekli dirler.

$$f(x, y) = a(x)y + b(x)$$

fonksiyonu, ikinci de ğ işk ene göre Lipschitz koşulunu sa ğ lar. Picard teoreminden ard ıř ık yaklaş ımlar dizisi,

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^x (a(t)y_{n-1}(t) + b(t)) dt, n \in \mathbb{N}^+$$

ve Eř . 3.16 ile verilen ard ıř ık yaklaş ımlar dizisi,

$$v_{n+1}(x) = a(x) \int_{x_0}^x v_n(t) dt + b(x), n \in \mathbb{N}$$

dir. Özel olarak,

$$\begin{cases} y' = y + x^2 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

Cauchy problemini göz önüne alalım. Burada,

$$f(x, y) = x^2 + y$$

dir ve

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1 - y_2|$$

olduğundan, f ikinci değışkene göre Lipschitz koşulunu sağlar. S operatörü ise,

$$Sv(x) = x^2 + \int_0^x v(t) dt$$

ile tanımlıdır.

Yukarıda kullanılan teorik sonuçlardan, Eş. 3.17 nin bir tek $y = T^{-1}v$ çözümüne sahip olduğunu elde ederiz. v , S nin tek sabit noktasıdır. Ayrıca v ,

$$v_{n+1}(x) = x^2 + \int_0^x v_n(t) dt, n \in \mathbb{N}$$

ile belirtilen $\{v_n\}$ ardışık yaklaşımlar dizisinin limitidir. v_0 , keyfi bir seçimdir. Eğer $v_0 = 0$ alırsak,

$$v_1(x) = x^2$$

$$v_2(x) = x^2 + \int_0^x t^2 dt = x^2 + \frac{x^3}{3}$$

$$v_3(x) = x^2 + \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^3}{3} \right) dt = x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4}$$

.

.

.

$$v_n(x) = x^2 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{x^{n+1}}{3 \cdot 4 \dots (n+1)}, n \geq 2$$

$$v_n(x) = 2 \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right) - 2x - 2$$

.

.

.

olur. $n \rightarrow \infty$ için,

$$v(x) = 2e^x - 2x - 2$$

olur. Buna göre, Eş. 3.17 nin çözümü,

$$y = T^{-1}v$$

dir. O halde,

$$y(x) = \int_0^x v(t) dt = 2e^x - x^2 - 2x - 2$$

olur.

3.5. Örnek

$$\frac{dy}{dx} = x - 2xy$$

denkleminin, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, |y - 1| \leq 2\}$ bölgesinde, $y(0) = 1$ koşuluna uyan çözümünü bulalım.

$$\begin{cases} y' = x - 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

Cauchy problemindeki $f(x, y) = x - 2xy$ fonksiyonu, D bölgesinde süreklidir ve ikici değişkene göre Lipschitz koşulunu sağlar. Şimdi, $z = y - y_0$ olarak Eş. 3.18 problemini $g(x, z) = f(x, z + y_0) = -x - 2xz$ ile,

$$\begin{cases} z' = -x - 2xz \\ z(0) = 0 \end{cases} \quad (3.19)$$

problemine dönüştürelim. Buradaki g fonksiyonu, f ile aynı özelliklere sahiptir. Yani, g fonksiyonu, D bölgesinde süreklidir ve

$$|g(x, z_1) - g(x, z_2)| \leq 4|z_1 - z_2|$$

olduğundan ikinci değişkene göre Lipschitz koşulunu sağlar. Buna göre S operatörü,

$$Sv(x) = -x - 2x \int_0^x v(t) dt$$

ile tanımlıdır. Buradan, Eş. 3.19 probleminin bir tek $z = T^{-1}v$ çözümüne sahip olduğunu elde ederiz. Ayrıca v ,

$$v_{n+1}(x) = -x - 2x \int_0^x v_n(t) dt, n \in \mathbb{N}$$

ile belirtilen $\{v_n\}$ ardışık yaklaşımlar dizisinin limitidir. v_0 , keyfi bir seçim olduğundan, $v_0 = 0$ alırsak,

$$v_1(x) = -x$$

$$v_2(x) = -x + x^3$$

$$v_3(x) = -x + x^3 - \frac{x^5}{2}$$

$$v_4(x) = -x + x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{6}$$

.

.

.

$$v_n(x) = -x + x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{6} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

$$= -x \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!} \right)$$

.

.

.

olur. $n \rightarrow \infty$ için,

$$v(x) = -x.e^{(-x^2)}$$

dir. Eş. 3.19 probleminin çözümü,

$$z = T^{-1}v$$

olduğundan,

$$z(x) = \int_0^x v(t) dt = \int_0^x \left(-t.e^{(-t^2)} \right) dt$$

$$= \frac{1}{2} e^{(-x^2)} - \frac{1}{2}$$

olur. Sonuç olarak, Eş. 3.18 probleminin tek çözümü $y = z + y_0$ dan,

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{(-x^2)} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e^{(-x^2)} + 1)$$

olur.

4. İNTEGRAL DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

Bu bölümde, Banach sabit nokta teoremi yardımıyla ikinci çeşit homojen olmayan lineer Fredholm ve Volterra integral denklemleri ile lineer olmayan Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin çözümlerinin varlığı ve tekliği incelenmiştir [13].

4.1. Lineer Fredholm İntegral Denklemleri

Banach sabit nokta teoremi yardımıyla, ikinci çeşit homojen olmayan

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) ds, \quad t \in [a, b] \quad (4.1)$$

lineer Fredholm integral denkleminin çözümünün varlığını ve tekliğini ispat edelim. Burada çekirdek olarak adlandırılan $k(t, s)$ ve $f(t)$ fonksiyonları bilinen, $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon, λ ise herhangi sayısal parametredir.

$k(t, s)$ fonksiyonu $G = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t, s \leq b\}$ üzerinde, $f(t)$ ise $[a, b]$ üzerinde sürekli ve

$$M = \max \left\{ \int_a^b |k(t, s)| ds : a \leq t, s \leq b \right\}$$

olsun. $x \in C([a, b])$ için,

$$Ax(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t, s) x(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

şeklinde tanımlı A operatörüne bakalım. $x_1, x_2 \in C([a, b])$ fonksiyonları için,

$$\begin{aligned}
|Ax_1(t) - Ax_2(t)| &= \left| \lambda \int_a^b k(t,s)[x_1(s) - x_2(s)]ds \right| \\
&\leq |\lambda| \int_a^b |k(t,s)| |x_1(s) - x_2(s)| ds \\
&\leq |\lambda| M \|x_1 - x_2\|_\infty
\end{aligned}$$

olur. Buradan, $\alpha = |\lambda| M$ olmak üzere,

$$\|Ax_1 - Ax_2\|_\infty \leq \alpha \|x_1 - x_2\|_\infty$$

elde edilir. Dolayısıyla, $\alpha = |\lambda| M < 1$ olduğunda $A, C([a,b])$ üzerinde büzülme dönüşümü olur. Banach sabit nokta teoremine göre, $\alpha = |\lambda| M < 1$ olduğunda, Eş. 4.1 denkleminin $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli bir tek $x^*(t)$ çözümü vardır ve her başlangıç $x_0 \in C([a,b])$ fonksiyonu için terimleri,

$$x_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^b k(t,s)x_{n-1}(s)ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.2)$$

şeklinde tanımlanan (x_n) dizisi, x^* fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında düzgün yakınsaktır ve her $t \in [a,b]$ için,

$$|x_n(t) - x^*(t)| \leq \frac{(|\lambda| M)^n}{1 - |\lambda| M} \|x_1 - x_0\|_\infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

eşitsizliği doğrudur.

4.1. Örnek

$$x(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2} \int_0^1 tsx(s) ds \quad (4.3)$$

integral denkleminin ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözümünü bulalım.

Çözüm

Denklemin çekirdeği,

$$k(t, s) = ts, \quad G = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq t, s \leq 1\}$$

üzerinde sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$\begin{aligned} M &= \max \left\{ \int_0^1 |ts| ds : 0 \leq t, s \leq 1 \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{t}{2} : 0 \leq t \leq 1 \right\} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

olur. Buna göre, $\lambda = \frac{1}{2}$ olduğundan, $\alpha = |\lambda|M = \frac{1}{4} < 1$ dir ve dolayısıyla Eş. 4.3

denkleminin $[0,1]$ üzerinde sürekli bir tek x^* çözümü vardır. Bu çözümü, terimleri Eş. 4.2 formülleri yardımıyla tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulalım.

$x_0(t) = 0$ olsun. Bu durumda Eş. 4.3 e göre,

$$x_1(t) = \frac{5}{6}t + \int_0^1 tsx_0(s) ds = \frac{5}{6}t$$

$$x_2(t) = \frac{5}{6}t + \int_0^1 tsx_1(s)ds = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6}\right)$$

$$x_3(t) = \frac{5}{6}t + \int_0^1 tsx_2(s)ds = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2}\right)$$

·
·
·

$$x_n(t) = \frac{5}{6}t + \int_0^1 tsx_{n-1}(s)ds = \frac{5}{6}t \left(1 + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6^{n-1}}\right)$$

$$= t \left(1 - \frac{1}{6^n}\right)$$

·
·
·

olur. Buradan da,

$$x^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} t \left(1 - \frac{1}{6^n}\right) = t$$

dir. Eğer $x_0(t) = t$ ise,

$$x_1(t) = t, \quad x_2(t) = t, \dots, \quad x_n(t) = t, \dots$$

olur. Böylece, denklemin çözümü hemen bulunur.

Görüldüğü gibi başlangıç yaklaşımının başarılı seçimi, integral denklemin çözümünün ardışık yaklaşımların limiti olarak hesaplanması prosesini kısaltmaktadır.

4.2. Örnek

$$x(t) = t + \lambda \int_0^{\frac{1}{2}} x(s) ds \quad (4.4)$$

integral denklemini ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözelim.

Çözüm

Denklemin çekirdeği $k(t, s) = 1$ ve $a = 0$, $b = \frac{1}{2}$ dir.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} |k(t, s)| ds = \int_0^{\frac{1}{2}} ds = \frac{1}{2}$$

olduğundan, $M = \frac{1}{2}$ olur. $\alpha = |\lambda| \frac{1}{2}$ olduğundan $|\lambda| < 2$ ise, Eş. 4.4 denkleminin

$\left[0, \frac{1}{2}\right]$ üzerinde sürekli tek bir $x^*(t)$ çözümü vardır. Bu çözümü, terimleri Eş. 4.2

formülleri yardımıyla tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulalım. $x_0(t) = t$ olmak üzere,

$$x_1(t) = t + \lambda \int_0^{\frac{1}{2}} x_0(s) ds = t + \frac{\lambda}{8}$$

$$x_2(t) = t + \lambda \int_0^{\frac{1}{2}} x_1(s) ds = t + \frac{\lambda}{8} + \frac{\lambda^2}{16}$$

.

.

.

$$x_n(t) = t + \lambda \int_0^{1/2} x_{n-1}(s) ds = t + \frac{\lambda}{8} + \frac{\lambda^2}{16} + \dots + \frac{\lambda^n}{8 \cdot 2^{n-1}}$$

$$x_n(t) = t + \frac{\lambda}{8} \frac{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n}{1 - \frac{\lambda}{2}}$$

.

.

.

dir. $|\lambda| < 2$ olduğunda, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n = 0$ olduğundan,

$$x^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = t + \frac{\lambda}{4(2 - \lambda)}$$

olur. O halde, $|\lambda| < 2$ için $x^*(t)$ fonksiyonu, verilen integral denklemin çözümüdür.

4.2. Lineer Volterra İntegral Denklemleri

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s) x(s) ds \quad (4.5)$$

şeklinde ikinci çeşit Volterra integral denklemi verilmiş olsun. Burada $k(t, s)$ ve $f(t)$ fonksiyonları sırayla $G = \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : a \leq t \leq b, a \leq s \leq t\}$ ve $[a, b]$ üzerinde bilinen sürekli fonksiyonlar, $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon, λ ise herhangi sayısal parametredir.

Formalite olarak Eş. 4.5 denklemi, Eş. 4.1 Fredholm integral denkleminin özel bir şeklidir. Bunun için $s > t$ olduğunda, $k(t, s) = 0$ olmalıdır. Eş. 4.1 denkleminde λ

sayısal parametresinin çok küçük değerleriyle yetindik. Fakat, Teorem 2.12 den dolayı Eş. 4.5 denkleminin her bir $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısı için çözümünün varlığı ispat edilebilir. $x(t) \in C([a, b])$ için,

$$Ax(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t, s) x(s) ds, \quad t \in [a, b]$$

şeklinde tanımlanan $A : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ operatörüne bakalım.

$$M = \max\{|k(t, s)| : a \leq t, s \leq b\}$$

olsun. $x_1(t), x_2(t) \in C([a, b])$ için,

$$\begin{aligned} |Ax_1(t) - Ax_2(t)| &= \left| \lambda \int_a^t k(t, s) [x_1(s) - x_2(s)] ds \right| \\ &= |\lambda| M (t - a) \|x_1 - x_2\|_\infty \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned} |A^2 x_1(t) - A^2 x_2(t)| &= |A(Ax_1(t) - Ax_2(t))| \\ &= \left| \lambda \int_a^t k(t, s) [Ax_1(s) - Ax_2(s)] ds \right| \\ &\leq |\lambda| M \int_a^t |Ax_1(s) - Ax_2(s)| ds \\ &\leq |\lambda|^2 M^2 \int_a^t (s - a) \|x_1 - x_2\|_\infty ds \end{aligned}$$

$$= |\lambda|^2 M^2 \frac{(t-a)^2}{2} \|x_1 - x_2\|_\infty$$

ve genel olarak,

$$\left| A^m x_1(t) - A^m x_2(t) \right| \leq |\lambda|^m M^m \frac{(t-a)^m}{m!} \|x_1 - x_2\|_\infty$$

olur. Buradan, $\alpha_m = \frac{(|\lambda| M(b-a))^m}{m!}$ olmak üzere,

$$\|A^m x_1 - A^m x_2\|_\infty \leq \alpha_m \|x_1 - x_2\|_\infty$$

olduğu elde edilir. Her bir $\lambda \in IR$ için öyle m doğal sayısı seçilebilir ki $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = 0$ olduğundan $\alpha_m < 1$ olur. Dolayısıyla, A^m operatörü, $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ üzerinde büzülme dönüşümü olur. Teorem 2.12 den dolayı Eş. 4.5 denkleminin $\forall \lambda \in IR$ için tek bir $x^* \in C([a,b])$ çözümü vardır ve her başlangıç $x_0 \in C([a,b])$ fonksiyonu için terimleri,

$$x_n(t) = f(t) + \lambda \int_a^t k(t,s) x_{n-1}(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.6)$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi $x^*(t)$ fonksiyonuna $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır ve $\forall t \in [a,b]$ için,

$$\left| x_n(t) - x^*(t) \right| \leq \frac{\alpha_m^n}{1 - \alpha_m} \|x_1 - x_0\|_\infty$$

eşitsizliği doğrudur. Kabul edelim ki,

$$x_n(t) - x_{n-1}(t) = \lambda^n y_n(t), \quad n = 1, 2, \dots$$

olsun. $x_0(t) = y_0(t)$, $y_0(t) = f(t)$ olmak üzere,

$$x_n(t) = \sum_{j=0}^n \lambda^j y_j(t), \quad (4.7)$$

ve

$$y_n(t) = \int_a^t k(t, s) y_{n-1}(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.8)$$

olur. Ayrıca,

$$k_1(t, s) = k(t, s)$$

$$k_{n+1}(t, s) = \int_s^t k(t, z) k_n(z, s) dz, \quad n = 1, 2, \dots$$

bağıntıları yardımıyla belirlenen ve ardışık çekirdekler olarak adlandırılan $k_1(t, s)$, $k_2(t, s)$, $k_3(t, s), \dots$ fonksiyonları yardımıyla Eş. 4.8 iterasyon prosesi,

$$y_n(t) = \int_a^t k_n(t, s) f(s) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde yazılabilir.

4.3. Örnek

$$x(t) = f(t) + \lambda \int_0^t e^{t-s} x(s) ds \quad (4.9)$$

ikinci çeşit Volterra integral denkleminin ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözümünü bulalım.

Çözüm

Her $b > 0$ sayısı için $k(t, s) = e^{t-s}$ fonksiyonu

$$G = \{(t, s) : 0 \leq t \leq b, 0 \leq s \leq t\}$$

üzerinde sürekli ve

$$M = \max\{e^{t-s} : 0 \leq s, t \leq b\} = e^b$$

olduğundan, her bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için öyle m doğal sayısı vardır ki,

$$\frac{(|\lambda|be^b)^m}{m!} < 1$$

dir. Dolayısıyla, Eş. 4.9 denkleminin bir tek $x^*(t) \in C([a, b])$ çözümü vardır. Bu çözümü, terimleri Eş. 4.7, Eş. 4.8 şeklinde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulalım.

$$k_1(t, s) = e^{t-s}$$

$$k_2(t, s) = \int_s^t k(t, z) k_1(z, s) dz = e^{t-s} (t - s)$$

$$k_3(t, s) = \int_s^t e^{t-z} e^{z-s} (z - s) dz = e^{t-s} \frac{(t - s)^2}{2!}$$

$$k_4(t, s) = \frac{1}{2} \int_s^t e^{t-z} e^{z-s} (z - s)^2 dz = e^{t-s} \frac{(t - s)^3}{3!}$$

veya genel olarak,

$$k_{n+1}(t, s) = e^{t-s} \frac{(t-s)^n}{n!}, \quad n = 1, 2, \dots$$

olduğu elde edilir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} x_n(t) &= y_0(t) + \lambda y_1(t) + \dots + \lambda^n y_n(t) \\ &= f(t) + \lambda \int_0^t k_1(t, s) f(s) ds + \dots + \lambda^n \int_0^t k_n(t, s) f(s) ds \\ &= f(t) + \lambda \int_0^t e^{t-s} \left(1 + \frac{\lambda(t-s)}{1!} + \frac{\lambda^2(t-s)^2}{2!} + \dots + \frac{\lambda^n(t-s)^n}{n!} \right) f(s) ds \end{aligned}$$

olur. Buna göre, Eş. 4.9 denkleminin çözümü,

$$x^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = f(t) + \lambda \int_0^t e^{(1+\lambda)(t-s)} f(s) ds$$

olur.

4.3. Lineer Olmayan Fredholm İntegral Denklemleri

Lineer olmayan,

$$x(t) = \lambda \int_a^b g(t, s, x(s)) ds \quad (4.10)$$

integral denklemi verilmiş olsun. Burada $g(t, s, x)$,

$$G = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : a \leq t, s \leq b, -\infty < x < \infty\}$$

üzerinde tanımlı bilinen fonksiyon, $x(t)$ bilinmeyen fonksiyon, λ ise herhangi bir sayısal parametredir.

4.1. Teorem

$g(t, s, x)$ fonksiyonu G üzerinde sürekli ve

$$\forall (t, s, x_1), (t, s, x_2) \in G_r, \quad G_r = \{(t, s, x) \in IR^3 : a \leq t, s \leq b, |x| \leq r\}, \quad (r > 0)$$

için,

$$|g(t, s, x_1) - g(t, s, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad (4.11)$$

olacak şekilde $L > 0$ sayısı varsa, Eş. 4.10 denkleminin $|\lambda| < \lambda_0$ olduğunda $C([a, b])$ uzayında bir tek $x^*(t)$ çözümü vardır. Burada,

$$\lambda_0 = \min \left\{ \frac{1}{L(b-a)}, \frac{r}{rL(b-a) + L_1} \right\}, \quad L_1 = \max \left\{ \int_a^b |g(t, s, 0)| ds : t, s \in [a, b] \right\}$$

dir. Herhangi başlangıç $x_0 \in \{C([a, b]), \|x\|_\infty \leq r\}$ fonksiyonu için terimleri,

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b g(t, s, x_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

şeklinde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi, $x^*(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır ve

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|_\infty, \quad \alpha = |\lambda|L(b-a) \quad (4.13)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat

$C([a, b])$ uzayının $\overline{S_r}(\theta) = \{x \in C([a, b]) : \|x\|_\infty \leq r\}$ kapalı yuvarında,

$$Ax(t) = \lambda \int_a^b g(t, s, x(s)) ds, \quad t \in [a, b] \quad (4.14)$$

şeklinde tanımlı A operatörüne bakalım. $A(\overline{S_r}(\theta)) \subset \overline{S_r}(\theta)$ olduğunu ve A nın büzülme dönüşümü olduğunu göstermeliyiz. $x \in \overline{S_r}(\theta)$ için,

$$\begin{aligned} |Ax(t)| &\leq |\lambda| \int_a^b |g(t, s, x(s))| ds \\ &\leq |\lambda| \int_a^b |g(t, s, x(s)) - g(t, s, 0)| ds + |\lambda| \int_a^b |g(t, s, 0)| ds \\ &\leq |\lambda| (L(b-a)\|x\|_\infty + L_1) \\ &\leq |\lambda| (rL(b-a) + L_1) \end{aligned} \quad (4.15)$$

olduğu elde edilir. Burada Eş. 4.15 den görüldüğü gibi, $|\lambda|(rL(b-a) + L_1) \leq r$ ise $A(\overline{S_r}(\theta)) \subset \overline{S_r}(\theta)$ olur. $x_1, x_2 \in \overline{S_r}(\theta)$ fonksiyonları için Eş. 4.11 koşuluna göre,

$$\begin{aligned} |Ax_1(t) - Ax_2(t)| &\leq |\lambda| \int_a^b |g(t, s, x_1(s)) - g(t, s, x_2(s))| ds \\ &\leq |\lambda| L \|x_1 - x_2\|_\infty (b-a) \\ &\leq \alpha \|x_1 - x_2\|_\infty, \quad \alpha = |\lambda| L(b-a) \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla, $\alpha < 1$ olduğunda Eş. 4.14 şeklinde tanımlanan A operatörü, $\overline{S_r}(\theta)$ üzerinde büzülme dönüşümü olur. Buna göre, $|\lambda| < \lambda_0$ olduğunda, Eş. 4.10 denkleminin bir tek $x^*(t) \in C([a, b])$ çözümü vardır ve terimleri Eş. 4.12 biçiminde tanımlı $(x_n(t))$ dizisi, $x^*(t)$ fonksiyonuna $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır ve Eş. 4.13 eşitsizliği doğrudur.

4.4. Örnek

$$x(t) = 1 + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{ts}{1+x^2(s)} ds \quad (4.16)$$

integral denkleminin çözümünü bulalım.

Çözüm

$$g(t, s, x) = \frac{ts}{1+x^2} \text{ fonksiyonu,}$$

$$G = \{(t, s, x) : -1 \leq t, s \leq 1, -\infty < x < \infty\}$$

üzerinde süreklidir. $g(t, s, x)$ fonksiyonunun x e göre kısmi türevi,

$$\frac{\partial g}{\partial x} = -\frac{2tsx}{(1+x^2)^2}$$

G üzerinde sınırlıdır.

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x} \right| = \left| -\frac{2tsx}{(1+x^2)^2} \right| \leq 1, \quad (t, s, x) \in G$$

Bu durumda, $g(t, s, x)$ fonksiyonu, $L=1$ katsayısı ile Eş. 4.11 Lipschitz koşulunu sağlar.

$$\lambda = \frac{1}{3}, a = -1, b = 1 \text{ ve } \alpha = |\lambda|L(b-a) = \frac{2}{3} < 1 \text{ ise,}$$

$$Ax(t) = 1 + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{ts}{1+x^2(s)} ds, \quad t \in [-1, 1] \quad (4.17)$$

operatörü herhangi bir $r > 0$ sayısı için $\overline{S_r}(\theta) = \{x \in C([-1, 1]): \|x\|_\infty \leq r\}$ üzerinde büzülme dönüşümü olur.

$$\begin{aligned} L_1 &= \max \left\{ \int_{-1}^1 |g(t, s, 0)| ds : t \in [-1, 1] \right\} \\ &= \max \left\{ \int_{-1}^1 |ts| ds : t \in [-1, 1] \right\} = 1 \end{aligned}$$

olduğundan her bir $r \geq 4$ sayısı için Eş. 4.17 formülü ile tanımlı A operatörü,

$$\overline{S_r}(\theta) = \{x \in C([-1, 1]): \|x\|_\infty \leq r\}$$

yuvarını kendisine dönüştürür. O halde, Teorem 4.1 e göre Eş. 4.16 denkleminin, $C([-1, 1])$ uzayının $\overline{S_r}(\theta)$ yuvarında bir tek $x^*(t)$ çözümü vardır. Bu çözümü, terimleri,

$$x_n(t) = 1 + \frac{1}{3} \int_{-1}^1 \frac{ts}{1+x_{n-1}^2(s)} ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisinin limiti olarak bulalım. $x_0(t) = 1$ ise,

$$x_1(t) = 1, x_2(t) = 1, x_3(t) = 1, \dots, x_n(t) = 1, \dots$$

olduğu açıktır. Buradan, Eş. 4.16 denkleminin çözümü,

$$x^*(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = 1$$

olur.

Eş. 4.10 denkleminde $g(t, s, x) = m(t, s)f(s, x)$ olsun. Burada, $m(t, s)$ ve $f(s, x)$ fonksiyonları sırasıyla,

$$D = \{(t, s) : a \leq t, s \leq b\} \text{ ve}$$

$$D_1 = \{(s, x) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s \leq b, -\infty < x < \infty\}$$

üzerinde sürekli fonksiyonlardır.

Bu durumda, Teorem 4.1 şu şekilde yeniden ifade edilebilir.

4.2. Teorem

$m(t, s)$ ve $f(s, x)$ fonksiyonları sırasıyla D ve D_1 üzerinde sürekli iseler ve her

$$(s, x_1), (s, x_2) \in D_{1, r_0} = \{(s, x) \in \mathbb{R}^2 : a \leq s \leq b, -r_0 \leq x \leq r_0\}, (r_0 > 0) \text{ için}$$

$$|f(s, x_1) - f(s, x_2)| \leq l |x_1 - x_2| \quad (4.18)$$

olacak şekilde $l > 0$ sayısı varsa, lineer olmayan

$$x(t) = \lambda \int_a^b m(t, s) f(s, x(s)) ds$$

Hammerstein denkleminin, $|\lambda| < \lambda_0$ olduğunda, $C([a, b])$ üzerinde tek bir $x^*(t)$ çözümü vardır. Burada,

$$\lambda_0 = \min \left\{ \frac{1}{Ml(b-a)}, \frac{r_0}{r_0 Ml(b-a) + l_1} \right\},$$

$$M = \max \{ |m(t, s)| : a \leq t, s \leq b \},$$

$$l_1 = \max \left\{ \int_a^b |m(t, s) f(s, 0)| ds : t, s \in [a, b] \right\}$$

dır. Herhangi başlangıç $x_0 \in C([a, b])$, $\|x_0\|_\infty \leq r_0$ fonksiyonu için terimleri,

$$x_n(t) = \lambda \int_a^b m(t, s) f(s, x_{n-1}(s)) ds, n = 1, 2, \dots$$

şeklinde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi, $x^*(t)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır ve

$$\alpha_0 = |\lambda| Ml(b-a) < 1$$

olmak üzere,

$$\|x_n - x^*\|_\infty \leq \frac{\alpha_0^n}{1 - \alpha_0} \|x_1 - x_0\|_\infty$$

eşitsizliği doğrudur.

4.4. Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemleri

Lineer olmayan,

$$x(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x(s)) ds, 0 \leq t \leq T \quad (4.19)$$

Volterra integral denklemi verilmiş olsun. Burada, $x(t)$ bilinmeyen, $g(t, s, x)$ fonksiyonu,

$$G = \{(t, s, x) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq t, s \leq T, -\infty < x < \infty\}$$

üzerinde, $f(t)$ fonksiyonu ise, $[0, T]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar ve ek olarak $\forall (t, s) \in [0, T]^2$ ve $\forall x, y \in (-\infty, \infty)$ için,

$$|g(t, s, x) - g(t, s, y)| \leq a(t, s)|x - y| \quad (4.20)$$

olacak şekilde $[0, T]^2$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $a(t, s)$ fonksiyonu vardır. $x(t) \in C([0, T])$ için,

$$Ax(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x(s)) ds, t \in [0, T]$$

şeklinde tanımlanan $A : C([0, T]) \rightarrow C([0, T])$ operatörüne bakalım ve $x \in C([0, T])$ fonksiyonunun normunu,

$$\|x\|_* = \max\{e^{-L_1 t} |x(t)| : t \in [0, T]\} \quad (4.21)$$

şeklinde tanımlayalım. Burada, L_1 herhangi bir pozitif sayıdır.

Her bir $x \in C([0, T])$ için,

$$e^{-L_1 T} \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_* \leq \|x\|_{\infty}$$

eşitsizliği doğru olduğundan, $C([0, T])$ üzerindeki $\|\cdot\|_*$ ve $\|\cdot\|_{\infty}$ normları denktirler.

$x, y \in C([0, T])$ fonksiyonları için Eş. 4.20 koşuluna göre,

$$\begin{aligned} |Ax(t) - Ay(t)| &\leq \int_0^t |g(t, s, x(s)) - g(t, s, y(s))| ds \\ &\leq \int_0^t a(t, s) |x(s) - y(s)| ds \\ &\leq \|x - y\|_* \int_0^t a(t, s) e^{L_1 s} ds \end{aligned}$$

olduğundan,

$$e^{-L_1 t} |Ax(t) - Ay(t)| \leq \|x - y\|_* e^{-L_1 t} \int_0^t a(t, s) e^{L_1 s} ds$$

ve dolayısıyla,

$$\begin{aligned} \|Ax - Ay\|_* &\leq \alpha \|x - y\|_* \\ \alpha &= \max \left\{ e^{-L_1 t} \int_0^t a(t, s) e^{L_1 s} ds : t \in [0, T] \right\} \end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Eğer $a(t, s) = L > 0$ ise,

$$\alpha = \max \left\{ \frac{L(1 - e^{-L_1 t})}{L_1} : t \in [0, T] \right\} = \frac{L(1 - e^{-L_1 T})}{L_1}$$

dir. Eğer $\alpha < 1$ ise, $(a(t, s) = L > 0$ olduğunda $L \leq L_1$ ise) A operatörü $(C([a, b]), \|\cdot\|_*)$ uzayında büzülme dönüşümü olur. Buna göre, Banach sabit nokta teoremine göre, Eş. 4.19 denkleminin bir tek $x^*(t) \in C([0, T])$ çözümü vardır ve her başlangıç $x_0(t) \in C([0, T])$ fonksiyonu için terimleri,

$$x_n(t) = f(t) + \int_0^t g(t, s, x_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4.22)$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi x^* fonksiyonuna Eş. 4.21 normuna göre $[0, T]$ aralığında düzgün yakınsaktır ve

$$\|x_n - x^*\|_* \leq \frac{\alpha^n}{1 - \alpha} \|x_1 - x_0\|_* \quad (4.23)$$

eşitsizliği doğrudur.

Eş. 4.19 denkleminde $g(t, s, x) = n(t, s) h(s, x)$ olsun. Burada, $n(t, s)$ ve $h(s, x)$ fonksiyonları sırasıyla $[0, T]^2$, $G = \{(s, x) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq T, -\infty < x < \infty\}$ üzerinde sürekli fonksiyonlardır ve $\forall s \in [0, T]$ ve $\forall x, y \in (-\infty, \infty)$ için,

$$|h(s, x) - h(s, y)| \leq a(s) |x - y|$$

olacak şekilde $[0, T]$ üzerinde negatif olmayan ve sürekli $a(s)$ fonksiyonu vardır.

Buna göre, $a(t, s) = |n(t, s)| a(s)$ olduğundan,

$$\alpha = \max \left\{ e^{-L_1 t} \int_0^t |n(t, s)| a(s) e^{L_1 s} ds : t \in [0, T] \right\}$$

olur. $\forall (t, s) \in [0, T]^2$ için $|n(t, s)| \leq L$ ve $\forall s \in [0, T]$ için $a(s) \leq l$ ise,

$$\alpha = Ll \frac{1 - e^{-L_1 T}}{L_1}$$

olur. Ayrıca,

$$Ax(t) = f(t) + \int_0^t n(t, s) h(s, x(s)) ds, \quad x \in C([0, T])$$

operatörü için,

$$\|Ax - Ay\|_* \leq \alpha \|x - y\|_*$$

olduğu elde edilir. Eğer $\alpha < 1$ ise, $(\forall (t, s) \in [0, T]^2$ için $|n(t, s)| \leq L$ ve $a(s) \leq l$ olduğunda $Ll \leq L_1$ ise) A operatörü büzülme dönüşümü olur. Buna göre, Banach sabit nokta teoremine göre,

$$x(t) = f(t) + \int_0^t n(t, s) h(s, x(s)) ds \quad (4.24)$$

denkleminin bir tek $x^* \in C([0, T])$ çözümü vardır ve her bir başlangıç $x_0 \in C([0, T])$ fonksiyonu için terimleri,

$$x_n(t) = f(t) + \int_0^t n(t, s) h(s, x_{n-1}(s)) ds, \quad n = 1, 2, \dots$$

biçiminde tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi, x^* fonksiyonuna Eş. 4.21 normuna göre yakınsaktır ve Eş. 4.23 eşitsizliği doğrudur.

Not

Eş. 4.19 ve Eş. 4.24 denklemlerinin $C([0, T])$ uzayında incelendiği zaman bu uzayın $\|\cdot\|_\infty$ normuna denk olan $\|\cdot\|_*$ normuna bakılmasındaki esas amaç daha geniş bir $[0, T]$ aralığını kapsamaktır.

Not

Banach sabit nokta teoremi yardımıyla Eş. 4.19 denkleminin $L_2([0, T])$ uzayında çözümünün varlığı ve tekliği problemleri incelenebilir. $x \in L_2([0, T])$ için,

$$\|x\|_2 = \left(\int_0^T x^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \text{ dir.}$$

$\forall (t, s) \in [0, T]^2$ ve $\forall x, y \in (-\infty, \infty)$ için Eş. 4.20 eşitsizliğini sağlayan $a(t, s)$ fonksiyonu ve $\forall t \in [0, T]$ ve $\forall x \in L_2([0, T])$ fonksiyonu için,

$$\left| \int_0^t g(t, s, x(s)) ds \right| \leq n(t)$$

olacak şekilde $n(t)$ fonksiyonu ve ek olarak $\forall t \in [0, T]$ için,

$$\int_0^t n^2(s) ds \leq p^2, \int_0^T \left(\int_0^t a^2(t, s) ds \right) dt \leq q^2$$

olacak şekilde p^2 ve q^2 pozitif sayıları göz önüne alınsın.

$f \in L_2([0, T])$ olduğunda, $\forall x \in L_2([0, T])$ fonksiyonu için,

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T [Ax(s)]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_0^T \left[f(s) + \int_0^s g(s, \xi, x(\xi)) d\xi \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^T \left[\int_0^s g(s, \xi, x(\xi)) d\xi \right]^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^T f^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^T n^2(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} + \|f\|_2 \\
&\leq p + \|f\|_2
\end{aligned}$$

olduğu elde edilir. Buradan $A : L_2([0, T]) \rightarrow L_2([0, T])$ olduğu açıktır.

Her $x, y \in L_2([0, T])$ için Eş. 4.20 eşitsizliğine göre Hölder eşitsizliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned}
\int_0^T [Ax(s) - Ay(s)]^2 ds &= \int_0^T \left[\int_0^s (g(s, \xi, x(\xi)) - g(s, \xi, y(\xi))) d\xi \right]^2 ds \\
&\leq \int_0^T \left[\int_0^s a(s, \xi) |x(\xi) - y(\xi)| d\xi \right]^2 ds \\
&\leq \int_0^T \left[\int_0^s a^2(s, \xi) d\xi \int_0^s |x(\xi) - y(\xi)|^2 d\xi \right] ds \\
&\leq \|x - y\|_2^2 \int_0^T \left[\int_0^s a^2(s, \xi) d\xi \right] ds \\
&\leq q^2 \|x - y\|_2^2
\end{aligned}$$

dolayısıyla,

$$\|Ax - Ay\|_2 \leq q \|x - y\|_2$$

olduğu elde edilir. Eğer $q < 1$ ise, A operatörü büzülme dönüşümü olur. Bu durumda, Banach sabit nokta teoremine göre, Eş. 4.19 denkleminin bir tek $x^* \in L_2([0, T])$ çözümü vardır ve her başlangıç $x_0(t) \in L_2([0, T])$ fonksiyonu için terimleri Eş. 4.22 formülleri yardımıyla tanımlanan $(x_n(t))$ dizisi, x^* fonksiyonuna yakınsar ve

$$\|x_n - x^*\|_2 \leq \frac{q^n}{1 - q} \|x_1 - x_0\|_2$$

eşitsizliği doğrudur.

5. LİNEER OLMAYAN İNTEGRAL DENKLEMLERİN SÜREKLİ ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI ÜZERİNE

Bu bölümde, bazı lineer olmayan integral denklemlerin kompakt aralıklar üzerinde sürekli çözümlerinin varlığı incelenmiştir. Ayrıca, özel olarak lineer olmayan Volterra integral denkleminin sürekli çözümünün varlığı ve tekliği incelenmiştir.

Bu bölümün ilk kısmında, aşağıdaki lineer olmayan Fredholm integral denkleminin sürekli çözümünün varlığı incelenmiştir.

$$x(t) = f(t) + \int_a^b g(t, s, x(s)) ds, -\infty < a \leq t \leq b < +\infty \quad (5.1)$$

Burada $f(.) \in C([a, b])$ dir. Bu kısımda, Eş. 5.1 denkleminin iki durumu incelendi. İlk durumda, $g(t, s, x)$ fonksiyonu üzerindeki bazı koşullar kullanılır. Burada gerekli olan $g(t, s, x)$ in x e bağlı olarak sınırlı olmasıdır. Buna göre, Schaefer sabit nokta teoremi kullanılır ve $C([a, b])$ ye ait bir çözümün varlığı ispat edilir. İkinci durumda, $g(t, s, x)$ in x e bağlı olarak sınırlı olması kuvvetli koşulu, zayıf bir koşul ile değiştirilir. Bu durumda, Eş. 5.1 in sürekli bir çözümünün varlığını ispatlamak için $C([a, b])$ uzayı üzerinde yeni bir norm tanımlanır ve Schauder sabit nokta teoremi kullanılır.

Bu bölümün ikinci kısmında, aşağıdaki lineer olmayan Volterra integral denkleminin sürekli çözümünün varlığı ve tekliği incelendi.

$$x(t) = f(t) + \int_a^t g(t, s, x(s)) ds, -\infty < a \leq t \leq b < +\infty \quad (5.2)$$

Burada, $f(.) \in C([a, b])$ dir. Eş. 5.2 nin çözümünün varlığının ispatında ana kısım, Gronwall eşitsizliği ile Leray-Schauder prensibinin birleşimidir. Ayrıca, Eş. 5.2 nin

çözümlerini içeren $C([a, b])$ nin kapalı bir yuvarı üzerinde T^n büzülme olacak şekilde bir $n \in \mathbb{N}$ varolduğunun gösterilmesiyle Eş. 5.2 nin çözümünün tekliği ispat edilir.

5.1. Lineer Olmayan İntegral Denklemler İçin Varlık Sonuçları

Lineer olmayan Fredholm integral denkleminin sürekli çözümünün varlığı için ilk sonuç aşağıdaki teoremle verildi.

5.1. Teorem

Lineer olmayan,

$$x(t) = f(t) + \int_a^b g(t, s, x(s)) ds, -\infty < a \leq t \leq b < +\infty \quad (5.3)$$

Fredholm integral denklemini göz önüne alalım. Burada, $f(.) \in C([a, b])$ dir. $g(t, s, x)$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

$$\sup \left(\left| g(t, s, x) \right|, \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t, s, x) \right| \right) \leq V_1(t) V_2(s) \phi(|x|), \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, s, x) \right| \leq V_1(t) V_2(s) \psi(|x|), \quad (5.4)$$

Burada, $V_1(.) \in C([a, b])$ ve $V_2(.) \in L_1([a, b])$ dir. $\phi(.)$, $[0, +\infty)$ üzerinde sınırlı ve pozitif bir fonksiyon ve $\psi(.)$, $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve pozitif bir fonksiyondur. Yukarıdaki koşullar altında, Eş. 5.3 denklemini $C([a, b])$ de bir çözüme sahiptir [14].

İspat

İlk olarak,

$$Tx(t) = f(t) + \int_a^b g(t, s, x(s)) ds$$

ile $C([a, b])$ üzerinde bir T operatörü tanımlarız. Teoremin ispatını iki adımda yapalım.

Birinci Adım: Bu adımda, $T : C([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ operatörünün sürekli olduğunu ispat edeceğiz. İlk olarak, $x(\cdot) \in C([a, b])$ için $Tx(\cdot) \in C([a, b])$ olduğunu göstereceğiz. (t_n) , $[a, b]$ aralığında t ye yakınsayan bir dizi olsun.

$$|Tx(t_n) - Tx(t)| \leq |f(t_n) - f(t)| + \int_a^b |g(t_n, s, x(s)) - g(t, s, x(s))| ds \quad (5.5)$$

ve

$$\begin{aligned} |g(t_n, s, x(s)) - g(t, s, x(s))| &\leq |g(t_n, s, x(s))| + |g(t, s, x(s))| \\ &\leq [V_1(t_n) + V_1(t)] V_2(s) \phi(|x(s)|) \\ &= 2 \|V_1\|_\infty V_2(s) M_\phi \in L_1([a, b]) \end{aligned}$$

dir. Buna göre, $g(t, s, x)$ in t ye bağlı olarak sürekliliğini kullanarak Eş. 5.5 e Lebesgue yakınsaklık teoremini uygularsak,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |Tx(t_n) - Tx(t)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} |f(t_n) - f(t)| + \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} |g(t_n, s, x(s)) - g(t, s, x(s))| ds$$

sonucu çıkar. Buradan, $Tx(\cdot) \in C([a, b])$ dir. Şimdi, T operatörünün $C([a, b])$ üzerinde sürekli olduğunu göstereceğiz. $x_n(\cdot) \in C([a, b])$, $x(\cdot)$ ya düzgün

yakınsayan bir dizi olsun. $C([a, b])$ tam olduğundan, $x(\cdot) \in C([a, b])$ dir. Buradan, $\forall t \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned} |Tx_n(t) - Tx(t)| &\leq \int_a^b |g(t, s, x_n(s)) - g(t, s, x(s))| ds \\ &\leq \int_a^b |x_n(s) - x(s)| \left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, s, \theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)) \right| ds, \quad 0 < \theta_s < 1 \\ &\leq \|x_n - x\|_\infty \|V_1\|_\infty \int_a^b V_2(s) \psi(|\theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)|) ds \end{aligned}$$

sonucu çıkar. $x_n(\cdot), x(\cdot) \in C([a, b])$ ye düzgün yakınsadığından $\forall s \in [a, b]$ için $|\theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)|$, $[0, +\infty)$ un kompakt bir K kümesinin içinde kalır. Ayrıca, $\psi(\cdot)$, $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli olduğundan, bir M_ψ sabiti vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall \theta_s \in (0, 1)$ için $\psi(|\theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)|) \leq M_\psi$ sonucu çıkar. Önceki iki eşitsizliği birleştirirsek aşağıdaki sonucu elde ederiz.

$$\|Tx_n - Tx\|_\infty \leq \|x_n - x\|_\infty \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 M_\psi$$

veya eşdeğer olarak, T operatörü $C([a, b])$ üzerinde süreklidir.

İkinci Adım: Bu adımda, Schaefer sabit nokta teoremini kullanarak T nin $C([a, b])$ de bir sabit noktaya sahip olduğunu göstereceğiz. İlk olarak, Arzela-Ascoli teoreminden T nin tamamen sınırlı olduğunu ispatlarız. Bunun için sadece, $F = \{Tx_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesinin eşsürekliliğini ve $C([a, b])$ nin düzgün sınırlı her (x_n) dizisi için sınırlı olduğunu göstermeliyiz.

$$|Tx_n(t) - Tx_n(\tau)| = \left| f(t) - f(\tau) + \int_a^b [g(t, s, x_n(s)) - g(\tau, s, x_n(s))] ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq |f(t) - f(\tau)| + \int_a^b |t - \tau| \left| \frac{\partial g}{\partial t}(t + \theta_t(\tau - t), s, x_n(s)) \right| ds, 0 < \theta_t < 1 \\
&\leq |f(t) - f(\tau)| + |t - \tau| \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 M_\phi
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$\lim_{t \rightarrow \tau} |Tx_n(t) - Tx_n(\tau)| = 0$$

dır. O halde, F eşsüreklidir. Ayrıca açıktır ki, (x_n) sınırlıysa F sınırlıdır. O halde F , eşsürekli ve sınırlı olduğuna göre tamamen sınırlıdır. Buna göre T , $C([a, b])$ üzerinde tamamen sınırlıdır. Sonuç olarak, T tamamen sınırlı ve sürekli olduğundan $C([a, b])$ üzerinde tamamen süreklidir. $\mathcal{E} = \{x \in C([a, b]), \exists \lambda \in (0, 1) : x = \lambda Tx\}$ ile $\mathcal{E}$ kümesini tanımlayalım. $\mathcal{E}$ nun sınırlı olduğunu gösterelim.

$u(\cdot) \in \mathcal{E}$ olsun. Buradan, $\forall t \in [a, b]$ için,

$$\begin{aligned}
|u(t)| &= |\lambda Tu(t)| \leq \|f\|_\infty + \int_a^b |g(t, s, u(s))| ds \\
&\leq \|f\|_\infty + \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 \sup_{y \geq 0} |\phi(y)| \\
&\leq \|f\|_\infty + \|V_1\|_\infty \|V_2\|_1 M_\phi
\end{aligned}$$

dir. Buna göre, $\mathcal{E}$ kümesi sınırlıdır. Buna göre, Schaefer sabit nokta teoreminin uygulanmasıyla, T nin $C([a, b])$ de bir sabit noktaya sahip olduğu veya eşdeğer olarak Eş. 5.3 ün $[a, b]$ üzerinde sürekli bir çözümü vardır sonucu çıkar.

$\phi(\cdot)$ sınırlılığıyla Eş. 5.4 koşulu, Teorem 2.8 in bir sınırlamasıdır. Bununla birlikte, uygun yeni bir $\|\cdot\|_\mu$ normu ve Schauder sabit nokta teoremi kullanılarak, zayıf

koşullar altında önceki teoremlerin sonuçları daha genel lineer olmayan integral denklemleri için verilebilir.

5.2. Teorem

Lineer olmayan,

$$x(t) = f(t) + \int_a^b g(t, s, x(s)) ds, -\infty < a \leq t \leq b < +\infty \quad (5.6)$$

integral denklemini göz önüne alalım. $f(\cdot) \in C([a, b])$ nin sınırlı olduğunu, $g(t, s, x)$ in t ye bağlı olarak sürekli olduğunu ve aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

$$|g(t, s, x)| \leq V_1(t) V_2(s) \phi(|x|), \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, s, x) \right| \leq V_1(t) V_2(s) \psi(|x|), \quad (5.7)$$

Burada, $V_1(\cdot)$ pozitif, sınırlı, ölçülebilir bir fonksiyon ve $V_2(\cdot) \in L_1([a, b])$ dir. $\phi(\cdot)$, pozitif ve ölçülebilir fonksiyonu,

$$\sup_{x \geq 0} \frac{\phi(x)}{x} = L < +\infty \quad (5.8)$$

koşulunu sağlar ve $\psi(\cdot)$, $[0, +\infty)$ üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyondur. Ayrıca kabul edelim ki, aşağıdaki koşulu sağlayan sıfırdan farklı, sürekli, pozitif ve sınırlı bir $\mu(\cdot)$ fonksiyonu var.

$$\|V_1 \cdot \mu\|_\infty \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\|_1 < \frac{1}{L} \quad (5.9)$$

Bu koşullar altında, lineer olmayan Eş. 5.6 integral denklemi, $C([a, b])$ de bir çözüme sahiptir [15].

İspat

İlk olarak, $X = C([a, b])$ de $\|\cdot\|_\mu$ normunu $\|x\|_\mu = \sup_{t \in [a, b]} |\mu(t)x(t)|$ ile tanımlayalım.

$X = (C([a, b]), \|\cdot\|_\mu)$ Banach uzayıdır. $r \geq 0$ daha sonra sabit olarak alacağımız pozitif bir reel sayı olsun ve $B_r = \{x \in C([a, b]) : \|x\|_\mu \leq r\}$ ile X in bir B_r alt kümesini tanımlayalım. Açıktır ki B_r , X in kapalı ve konveks bir alt kümesidir. T operatörü B_r üzerinde,

$$Tx(t) = f(t) + \int_a^b g(t, s, x(s)) ds$$

ile tanımlansın. Kolayca görülebilir ki T , B_r nin sınırlı kümelerinden rölatif kompakt kümelerine bir dönüşümdür. Schauder sabit nokta teoremine göre, Eş. 5.6 denkleminin bir çözümünün varlığını ispat etmek için $T \in C(B_r, B_r)$ olduğunu göstermek yeterlidir. İlk olarak, $x(\cdot) \in C([a, b])$ için $Tx(\cdot) \in C([a, b])$ olduğunu ispat edelim. (t_n) , $[a, b]$ de t ye yakınsayan bir dizi olsun. $M_{\phi, |x|}$, sadece $\phi(\cdot)$ ve $|x(\cdot)|$ üzerinde tanımlı bir sabit olmak üzere $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$|g(t_n, s, x(s))| \leq V_1(t_n) V_2(s) M_{\phi, |x|} \leq \|V_1\|_\infty M_{\phi, |x|} V_2(s) \in L_1([a, b]), \quad (5.10)$$

ve $f(\cdot) \in C([a, b])$ olduğundan Lebesgue yakınsaklık teoremine göre,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Tx(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) + \int_a^b \lim_{n \rightarrow +\infty} g(t_n, s, x(s)) ds = f(t) + \int_a^b g(t, s, x(s)) ds \quad (5.11)$$

sonucu çıkar. Sonuç olarak, $Tx(\cdot) \in C([a, b])$ dir. Şimdi, T nin $\|\cdot\|_\mu$ normuna göre

B_r üzerinde sürekli olduğunu gösterelim. (x_n) , $\|\cdot\|_\mu$ normunda x e yakınsayan B_r

nin bir dizisi olsun. $(B_r, \|\cdot\|_\mu)$ tam olduğundan $x \in B_r$ dir. Bununla birlikte,

$$\begin{aligned}
\|Tx_n - Tx\|_\mu &= \sup_{t \in [a,b]} \left| \mu(t) \int_a^b [g(t, s, x_n(s)) - g(t, s, x(s))] ds \right| \\
&\leq \sup_{t \in [a,b]} \left| \mu(t) \int_a^b |x_n(s) - x(s)| \left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, s, \theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)) \right| ds, \theta_s \in (0,1) \right| \\
&\leq \sup_{t \in [a,b]} \left| \mu(t) \int_a^b V_1(t) \mu(s) |x_n(s) - x(s)| \frac{V_2(s)}{\mu(s)} \psi(|\theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)|) ds \right| \\
&\leq \|V_1\|_\mu \sup_{s \in [a,b]} \psi(|\theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)|) \|x_n - x\|_\mu \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\|_1 \quad (5.12)
\end{aligned}$$

olur. $\mu(\cdot)$, sıfırdan farklı, sınırlı ve sürekli olduğundan açıktır ki (x_n) , $\|\cdot\|_\mu$ normuna göre x e yakınsadığından $[a, b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır. Buna göre, $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall s \in [a, b]$ için $|\theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)|$, $[0, +\infty)$ un kompakt bir kümesinin içinde kalır. Bununla birlikte $\psi(\cdot)$, $[0, +\infty)$ üzerinde sürekli olduğundan pozitif bir M_ψ sabiti vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ ve $\forall \theta_s \in (0,1)$ için, $\psi(|\theta_s x_n(s) + (1 - \theta_s)x(s)|) \leq M_\psi$ sonucu çıkar. Buradan, önceki eşitsizlik,

$$\|Tx_n - Tx\|_\mu \leq \|V_1\|_\mu M_\psi \|x_n - x\|_\mu \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\|_1$$

olur. Sonuç olarak T , B_r üzerinde süreklidir. Geriye $T(B_r) \subset B_r$ ifadesinde r pozitif reel sayısının seçimi kalır. $x \in B_r$ olsun. Buna göre,

$$\|Tx\|_\mu \leq \sup_{t \in [a,b]} |\mu(t) f(t)| + \sup_{t \in [a,b]} \left| \mu(t) V_1(t) \int_a^b V_2(s) \phi(|x(s)|) ds \right|$$

$$\leq \|f\|_{\mu} + \|V_1\|_{\mu} \left| \int_a^b \frac{V_2(s)}{\mu(s)} \mu(s) |x(s)| \frac{\phi(|x(s)|)}{|x(s)|} ds \right| \quad (5.13)$$

$$\leq \|f\|_{\mu} + \|V_1\|_{\mu} r L \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\|_1$$

$$\leq \|f\|_{\mu} + r \left(L \|V_1\|_{\mu} \left\| \frac{V_2}{\mu} \right\|_1 \right)$$

Buradan, $T(B_r) \subset B_r$ koşulu,

$$r \geq \frac{\|f\|_{\mu}}{1 - L \|V_1\|_{\mu} \|V_2/\mu\|_1} = r_0 \quad (5.14)$$

ifadesini sağlayan herhangi bir pozitif reel r sayısı için sağlanır. Schauder sabit nokta teoremine göre her $r \geq r_0$ için B_r de T nin bir sabit noktaya sahip olduğu sonucu çıkar.

5.1. Örnek

Lineer olmayan,

$$x(t) = f(t) + \int_0^1 (t + \alpha)(s + \beta) \ln(1 + x^2(s)) ds, 0 \leq t \leq 1 \quad (5.15)$$

integral denklemini göz önüne alalım [14]. Burada $f \in C([0,1])$, $\alpha, \beta, 0 \leq \alpha \leq 1$ ve $\beta \geq 0$ olacak şekilde iki parametredir. Teorem 5.2 deki ifadeleri kullanırsak,

$$g(t, s, x(s)) = (t + \alpha)(s + \beta) \ln(1 + x^2(s)), V_1(t) = t + \alpha, V_2(s) = s + \beta$$

$$\phi(x) = \ln(1 + x^2), \psi(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$$

olur. $\phi(\cdot)$, $L=1$ ile Eş. 5.8 koşulunu sağlar ve $\psi(\cdot)$, $[0,+\infty)$ üzerinde pozitif ve sürekli bir fonksiyondur. Buna göre, $\mu(t) = e^{-t}$, $t \in [0,1]$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|V_1\|_{\mu} \|V_2/\mu\|_1 &= \sup_{t \in [0,1]} \left| e^{-t} (t + \alpha) \right| \int_0^1 \frac{s + \beta}{e^{-s}} ds \\ &= e^{\alpha-1} \int_0^1 (se^s + \beta e^s) ds \\ &= e^{\alpha-1} [\beta(e-1) + 1] \end{aligned}$$

olduğu görülür.

Önceki teoreme göre, $e^{\alpha-1} [\beta(e-1) + 1] < \frac{1}{L} = 1$ koşulunu sağlayan α ve β parametrelerine göre, Eş. 5.15 denkleminin sürekli bir çözüme sahip olduğu sonucu çıkar.

5.2. Lineer Olmayan Volterra Denklemi İçin Varlık Ve Teklik Sonuçları

$g(t, s, x)$ fonksiyonu üzerinde bazı koşullar altında aşağıda verilen teorem lineer olmayan Volterra integral denkleminin bir çözümünün varlığını temin eder.

5.3. Teorem

Lineer olmayan,

$$x(t) = f(t) + \int_a^t g(t, s, x(s)) ds, -\infty < a \leq t \leq b < +\infty \quad (5.16)$$

Volterra integral denklemini göz önüne alalım. Burada f , $[a, b]$ üzerinde süreklidir.

$g(t, s, x)$ in aşağıdaki koşulları sağladığını kabul edelim.

$$|g(t, s, x)| \leq V_1(t)V_2(s)\phi(|x|), \quad \left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, s, x) \right| \leq V_1(t)V_2(s)\psi(|x|) \quad (5.17)$$

Burada, $V_1(\cdot) \in C([a, b])$ ve pozitif, $V_2(\cdot) \in L_1([a, b])$ ve pozitif, $\psi(\cdot), [0, +\infty)$ üzerinde sürekli ve pozitif bir fonksiyondur. Son olarak, $\phi(\cdot)$ fonksiyonunun pozitif, sürekli ve

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\phi(y)}{y} = L < +\infty$$

koşulunu sağladığını kabul edelim. Bu koşullar altında Eş. 5.16 denklemi, $[a, b]$ üzerinde sürekli bir çözüme sahiptir [15].

İspat

$X = (C([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$, $[a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonların Banach uzayını belirtsin ve X üzerinde T operatörü,

$$Tx(t) = f(t) + \int_a^t g(t, s, x(s))ds$$

ile tanımlansın. Teoremin koşulları kullanılarak, T nin kompakt olduğu ve $TX \subset X$ olduğu kolayca görülebilir. Leray-Schauder prensibine göre, teoremin sonucunu ispat etmek için, T nin X üzerinde sürekli olduğunu ve $x = \lambda Tx$, $0 \leq \lambda \leq 1$ in her bir çözümünün aynı $M > 0$ sabiti ile sınırlı olduğunu ispat etmek yeterlidir. $C([a, b])$ üzerinde T nin sürekliliğini ispat etmek için, önceki teoremdaki T operatörünün sürekliliğinin ispatındaki $\mu(t)$ yi 1 almak yeterlidir ve bu ispatın diğer adımlarında $\mu(t)$ yine 1 olarak alınır. $\phi(\cdot)$ fonksiyonu,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\phi(y)}{y} = L < +\infty$$

koşulunu sağladığı için, bir $A > 0$ pozitif sayısı vardır öyle ki $\forall u \geq A$ için,

$$\frac{|\phi(u)|}{|u|} \leq \frac{3}{2} L = L'$$

olur. $x \in C([a, b])$, $0 \leq \lambda \leq 1$ için $x = \lambda T x$ denkleminin bir çözümü olsun. Buna göre,

$$\begin{aligned} |x(t)| &\leq |\lambda| |f(t)| + |\lambda| \left| \int_a^t g(t, s, x(s)) ds \right| \\ &\leq \|f\|_\infty + \int_a^t V_1(t) V_2(s) \phi(|x(s)|) ds \\ &\leq \|f\|_\infty + \|V_1\|_\infty \int_a^b V_2(s) \sup_{u \in [0, A]} \phi(u) ds + \|V_1\|_\infty \int_a^b V_2(s) L' |x(s)| ds \\ &\leq \left[\|f\|_\infty + \|V_1\|_\infty \sup_{u \in [0, A]} \phi(u) \|V_2\|_1 \right] + \int_a^b (L' \|V_1\|_\infty V_2(s)) |x(s)| ds \\ &\leq M_1 + \int_a^b M_2 V_2(s) |x(s)| ds \end{aligned}$$

olur. Gronwall eşitsizliğini kullanarak önceki eşitsizlikle birlikte,

$$|x(t)| \leq M_1 e^{M_2 \|V_2\|_1} = M$$

sonucu çıkar. M_1 ve M_2 , x çözümünden bağımsız olduğu için, $x = \lambda T x$, $0 \leq \lambda \leq 1$ in çözümlerinin aynı M sabitiyle düzgün sınırlı olduğu sonucu çıkar. Son olarak, Leray-Schauder prensibi kullanılarak, $X = C([a, b])$ de T nin bir sabit noktaya

sahip olduğu sonucu çıkar. Sonuç olarak, Eş. 5.16 lineer olmayan Volterra denklemi $[a, b]$ üzerinde sürekli bir çözüme sahiptir.

5.1. Önerme

Eş. 5.16 lineer olmayan Volterra denklemini göz önüne alalım ve $g(t, s, x)$ in, $p > 1$ için $V_2 \in (L_1 \cap L_p)([a, b])$ ile Teorem 5.3 ün koşullarını sağladığını kabul edelim. Buna göre, Eş. 5.16 bir tek çözüme sahiptir [15].

İspat

Teorem 5.3 ten bir çözümün varlığı temin edilir. Sonra, Teorem 5.3 ün ispatında gösterdik ki, $x = Tx$ in sürekli çözümleri aynı M sabiti ile düzgün sınırlıdır ve sonuç olarak,

$$B_M = \{x \in C([a, b]) : \|x\|_\infty \leq M\} \quad (5.18)$$

ile verilen B_M kapalı yuvarı bu çözümleri içerir. Buradan, Eş. 5.16 nın çözümünün tekliğinin ispatı için, $n_0 \in \mathbb{N}$ için T^{n_0} in B_M de bir büzülme dönüşümü olduğu gösterilmelidir. Teorem 5.3 ün ispatındaki ifadeler kullanılarak, her $x, y \in C([a, b])$ için,

$$\begin{aligned} |Ty(t) - Tx(t)| &= \left| \int_a^t [g(t, s, y(s)) - g(t, s, x(s))] ds \right| \\ &\leq \int_a^t |g(t, s, y(s)) - g(t, s, x(s))| ds \\ &\leq \int_a^t |y(s) - x(s)| \left| \frac{\partial g}{\partial x}(t, s, \theta_s y(s) + (1 - \theta_s)x(s)) \right| ds, \quad 0 < \theta_s < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \leq \int_a^t |y(s) - x(s)| V_1(t) V_2(s) \psi(|\theta_s y(s) + (1 - \theta_s)x(s)|) ds \\
& \leq \|y - x\|_\infty \|V_1\|_\infty \sup_{u \in B_M} \psi(|u|) \int_a^t V_2(s) ds \\
& \leq \|y - x\|_\infty \|V_1\|_\infty \sup_{u \in B_M} \psi(|u|) \|V_2 \cdot 1\|_1 \quad (\text{Hölder Eşitsizliğinden}) \\
& \leq \|y - x\|_\infty \|V_1\|_\infty \sup_{u \in B_M} \psi(|u|) \|V_2\|_p \|1\|_q \\
& \leq \|y - x\|_\infty \|V_1\|_\infty \sup_{u \in B_M} \psi(|u|) \|V_2\|_p \left(\int_a^t (1)^q ds \right)^{1/q} \\
& \leq \|y - x\|_\infty \|V_1\|_\infty \|V_2\|_p \sup_{u \in B_M} \psi(|u|) (t - a)^{1/q} \\
& \leq C \|y - x\|_\infty (t - a)^{1/q}
\end{aligned} \tag{5.19}$$

olduğu kolayca görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
& \left| T^2 y(t) - T^2 x(t) \right| = \left| \int_a^t [g(t, s, Ty(s)) - g(t, s, Tx(s))] ds \right| \\
& \leq \int_a^t |g(t, s, Ty(s)) - g(t, s, Tx(s))| ds \\
& \leq \int_a^t V_1(t) V_2(s) |Ty(s) - Tx(s)| \sup_{u \in B_M} \psi(|u|) ds \\
& \leq \|V_1\|_\infty \sup_{u \in B_M} \psi(|u|) \int_a^t V_2(s) |Ty(s) - Tx(s)| ds \\
& \leq \|V_1\|_\infty \sup_{u \in B_M} \psi(|u|) \int_a^t V_2(s) C \|y - x\|_\infty (s - a)^{1/q} ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|V_1\|_\infty \sup_{u \in B_M} (|u|) C \|y - x\|_\infty \|V_2\|_p \left(\int_a^t \left[(s-a)^{1/q} \right]^q ds \right)^{1/q} \\
&\leq C^2 \|y - x\|_\infty \left(\frac{1}{2} \right)^{1/q} (t-a)^{2/q}
\end{aligned} \tag{5.20}$$

olduğu görülür. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
|T^3 y(t) - T^3 x(t)| &\leq C^3 \|y - x\|_\infty \left(\frac{1}{2} \right)^{1/q} \left(\int_a^t \left[(s-a)^{2/q} \right]^q ds \right)^{1/q} \\
&\leq C^3 \|y - x\|_\infty \left(\frac{1}{2} \frac{1}{3} \right)^{1/q} (t-a)^{3/q}
\end{aligned} \tag{5.21}$$

olduğu görülür. Bu şekilde devam edilerek,

$$\begin{aligned}
|T^n y(t) - T^n x(t)| &\leq C^n \|y - x\|_\infty \left(\frac{(t-a)^n}{n!} \right)^{1/q} \\
&\leq \|y - x\|_\infty \left(\frac{[C^q (b-a)]^n}{n!} \right)^{1/q}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

olduğu kolayca görülür. Buradan,

$$\|T^n y - T^n x\|_\infty \leq \left(\frac{[C^q (b-a)]^n}{n!} \right)^{1/q} \|y - x\|_\infty \tag{5.23}$$

olur. Buna göre,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{[C^q (b-a)]^n}{n!} = 0$$

olduğundan, bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki T^{n_0} , B_M üzerinde bir büzülme dönüşümüdür.

Sonuç olarak, T^{n_0} in sabit noktası tekdir. T^{n_0} in sabit noktası, aynı zamanda T nin sabit noktası olduğundan, T nin sabit noktasının tek olduğu sonucu çıkar. Sonuç olarak, Eş. 5.16 nın çözümü tekdir.

6. SONUÇ

Cauchy probleminin çözümü ile ilgili ilk yaklaşım yönteminde, Eş. 3.1 denklemindeki f fonksiyonunun birinci değişkene göre Lipschitz koşulunu sağlaması ve $f(x_0, y_0) \neq 0$ olması durumunda, Eş. 3.1 Cauchy probleminin bir tek çözüme sahip olduğu görülmüştür. Buradan, Eş. 3.1 Cauchy probleminde sürekli olan f fonksiyonu için $f(x_0, y_0) \neq 0$ olmak üzere, fonksiyonun birinci dereceden kısmi türevlerinden en az birinin D bölgesinde sınırlı olması durumunda Eş. 3.1 Cauchy probleminin bir tek çözüme sahip olduğu sonucu görülmüştür. İkinci yaklaşım yönteminde ise, Eş. 3.1 Cauchy probleminin Picard teoremindeki koşulları sağlaması durumunda, Banach sabit nokta teoremi kullanılarak, türev operatörü yardımıyla Eş. 3.1 Cauchy probleminin çözümünün bulunabileceği görülmüştür. Sonraki bölümde, ikinci çeşit homojen olmayan lineer Fredholm ve Volterra integral denklemleri ile lineer olmayan Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin, λ parametresi, $k(t, s)$ ve $g(t, s, x)$ fonksiyonları üzerindeki bazı koşulların sağlanması durumunda Banach sabit nokta teoremi yardımıyla bir tek çözüme sahip oldukları görülmüştür. Son bölümde ise, lineer olmayan Fredholm ve Volterra integral denklemlerinin $g(t, s, x)$ fonksiyonu üzerindeki bazı koşullar altında reel kompakt aralıklar üzerinde sürekli çözümlerinin varolduğu ve özel olarak Volterra integral denkleminin sürekli çözümünün tek olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

1. Burton, T.A., and Kirk C., “A Fixed Point Theorem Of Krasnoselskii-Schaefer Type”, *Math. Nachr.*, 189: 23-31 (1998).
2. Burton, T.A., and Makay, G., “Continuity, Compactness, Fixed Points And Integral Equations”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 14: 1-13 (2002).
3. Dhage, B.C., “On A Fixed Point Theorem Of Krasnoselskii-Schaefer Type”, *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 6: 1-9 (2002).
4. Türkoğlu, D., Özer, O., and Fisher, B., “Fixed Point Theorems For T-Orbitally Complete Spaces”, *Univ. Din. Bacau. Şi. Cer. Ştii. Math.*, 9: 211-218 (1999).
5. Türkoğlu D., and Fisher, B., “A Generalization Of A Fixed Point Theorem Of Ćirić”, *Novi Sad J. Math.*, 29: 117-121 (1999).
6. Altun, İ., Hançer, H.A., and Türkoğlu, D., “A Fixed Point Theorem For Multi-maps Satisfying An Implicit Relation On Metrically Convex Metric Spaces”, *Math. Commun.*, 11: 17-23 (2006).
7. Türkoglu, D., Altun, İ., and Fisher, B., “Common Fixed Point Theorems For Four Mappings With Some Weak Conditions Of Commutativity”, *Novi Sad J. Math.*, 36, 1: 75-86 (2006).
8. Brouwer, L.E.J., “Über Abbildung Von Mannigfaltigkeiten”, *Math. Ann.*, 71 (1): 97-115 (1911).
9. Banach, S., “Sur Les Operations Dans Les Ensembles Absraits Et Leur Application Aux Equations Untegrales”, *Fund. Math.*, 3: 133-181 (1922).
10. Schauder, J., “Der Fixpunktsatz In Funktionalramen”, *Studia Math.*, 2: 171-180 (1930).
11. Çelebi, A.O., Çelebi, Ü., “Diferansiyel Denklemler”, *Milli Eğitim Basınevi*, İstanbul, 52-59 (1980).
12. Mortici, C., “Approximation Methods For Solving The Cauchy Problem”, *Czechoslovak Math. J.*, 55 (130): 709-718 (2005).
13. Musayev, B., Alp, M., “Fonksiyonel Analiz”, *Balcı Yayınları*, Kütahya, 324-343 (2000).
14. Karoui, A., “On The Existence Of Continuous Solutions Of Nonlinear Integral Equations”, *Appl. Math. Lett.*, 18: 299-305 (2005).

15. Karoui, A., “Existence And Approximate Solutions Of Nonlinear Integral Equations”, *J. Inequal. Appl.*, 5: 569-581 (2005).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : AKBULUT, Ahmet
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 10.07.1976 Ankara
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (312) 472 95 19
e-mail : akbulutahmt@yahoo.com.

Eğitim Derece

Eğitim Birimi

Mezuniyet tarihi

Lisans	A.İ.B.Ü./ Matematik Bölümü	1998
Lise	Balgat E.M.L	1993

İş Deneyimi Yıl

Yer

Görev

2000-2007	M.E.B.	Öğretmen
-----------	--------	----------

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Futbol, Masa tenisi, Bilgisayar teknolojileri