

T.C.
ERZİNCAN BİNALİ YILDIRIM ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SABİT NOKTA TEORİSİNİN GEOMETRİK YAKLAŞIMI

Tuğba ARSLAN

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

TEZ JÜRİ ÜYELERİ
Doç. Dr. Serkan ATMACA
Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ
Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
ERZİNCAN, 2025

© 2025 [Tuğba ARSLAN]. Tüm hakları saklıdır.

Kabul ve Onay Sayfası

Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR danışmanlığında, Tuğba ARSLAN tarafından hazırlanan bu çalışma 30.06.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı Topoloji Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul oybirliği (.../...) ile kabul edilmiştir.

Başkan : Doç. Dr. Serkan ATMACA

İmza:

Üye : Doç. Dr. Murat ALTUNBAŞ

İmza:

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

İmza:

Yukarıdaki Yüksek Lisans Tezi Enstitü Yönetim Kurulunun / / 20.... tarih ve/..... sayılı kararı ile onaylanmıştır.

Doç. Dr. Kemal Volkan ÖZDOKUR
Enstitü Müdür V.

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaklardan yapılan bildirişlerin, şekil ve tabloların kaynak olarak kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

Bilimsel Etięe Uygunluk Sayfası

“Sabit Noktanın Geometrik Yaklaşımı” isimli “Yüksek Lisans” tezım tarafımca intihal tespit programı ile incelenmiştir. Buna göre tezimde bilimsel etik ihlali ve intihal olarak nitelendirilebilecek herhangi bir durum olmadığını taahhüt ederim.

Bu çalışmadaki tüm bilgilerin, akademik ve etik kurallara uygun bir biçimde elde edildiğini; aynı zamanda bu kural ve davranışların gerektirdiğı gibi, bu çalışmanın özünde olmayan tüm materyal ve sonuçları tam olarak aktardığımı ve referans gösterdiğimi beyan ederim. 30/06/2025

(İmza)

Tuğba ARSLAN

ÖZET

SABİT NOKTANIN GEOMETRİK YAKLAŞIMI

Tuğba ARSLAN

Yüksek Lisans Tezi, Erzincan Binali Yıldırım Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR

2025, 47 sayfa

Bu tezde Sabit Nokta Teorisi konusunda 1922 yılından bu yana (Banach, 1922) çalışılan teoremler daha genel metrik uzay yapılarında incelenmiştir. Büzülme dönüşümleri bu metrik uzaylarda sabit nokta teoremleri ve örneklerini çeşitlendirmeyi sağlamıştır. Bahsedilen örnekler sabit geometrik şekiller olarak bilinen elips, çember, hiperbol gibi şekillerin bilinen tanımlarının bu uzaylarda yeni bir bakış açısıyla yeniden verilmesiyle gerçekleşmiştir. Her bir şeklin içinde yer aldığı metrik uzayın koşullarını sağlayan örneklerin hangi büzülme dönüşümleri yardımıyla ve hangi koşullar altında sağlandığı açıklanmıştır. S -metrik uzayı ve S_b -metrik uzayı üzerinde Proinov tipi E -büzülmesi, Jleli-Samet tipi ve (θ, α, β) tipi büzülme dönüşümlerinin genelleştirilmeleri kullanılarak ilgili koşullar verilmiş ve sırasıyla çember, elips, hiperbol, Cassini eğrisi, Apollonius eğrisi örneklerinde bu büzülmelerin yapısı incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sabit Nokta Teoremi, Sabit elips, Sabit hiperbol, Sabit çember

ABSTRACT

A GEOMETRIC APPROACH TO THE FIXED POINT

Tuğba ARSLAN

Master's Thesis, Erzincan Binali Yıldırım University, Institute of Science and
Technology,
Department of Mathematics

Advisor: Asst. Prof. Dr. Nesrin MANAV TATAR

2025, 47 pages

In this thesis, theorems that have been studied in the subject of Fixed Point Theory since 1922 (Banach, 1922) have been examined in more general metric space structures. Contraction transformations have enabled diversification of fixed point theorems and examples in these metric spaces. The mentioned examples are realized by re-giving the known definitions of shapes such as ellipses, circles, hyperbolas, known as fixed geometric shapes, from a new point of view in these spaces. It is explained which contraction transformations and under what conditions the examples that satisfy the conditions of the metric space in which each shape is located are provided. The relevant conditions are given using generalizations of Proinov-type E -contraction, Jleli-Samet-type and (θ, α, β) type contraction transformations on S -metric space and S_b -metric space, and the structure of these contractions is studied in the examples of circle, ellipse, hyperbola, Cassini curve, Apollonius curve, respectively.

Keywords: Fixed Point Theorem, Fixed ellipse, Fixed hyperbola, Fixed circle

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca; tecrübe ve katkıları ile beni yönlendiren, tez konusunun oluşmasında ve hazırlanmasında hiçbir zaman yardımını eksik etmeyen değerli danışman hocam, Sayın Dr. Öğr. Üyesi Nesrin MANAV TATAR' a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Sözleri ile her daim yol gösterici moral ve motivasyon kaynağım olan kardeşlerim Kübra PEKER ve Büşra GÖLCÜK AYŞEN 'e ve hayatımın her anında tez çalışmalarımda sevgi ve yardımları ile yanımda olan desteğini hiç esirgemeyen kıymetli eşim Bekir ARSLAN 'a çok teşekkür ederim.

Tuğba ARSLAN

Haziran, 2025

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER.....	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	v
1. GİRİŞ.....	1
2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE İLE İLGİLİ ÇALIŞMALAR.....	4
2.1. Metrik Uzaylar.....	4
2.1.1. Metrik uzay.....	4
2.1.2. b - metrik uzay.....	4
2.1.3. S -metrik uzayı.....	4
2.1.4. S_b -metrik uzay.....	6
2.1.5. Sabit çember	7
2.1.6. Jleli-Samet tipi büzölme	8
3. YÖNTEM.....	4
3.1. Bazı Sabit Nokta Sonuçları.....	14
3.2. Bazı Sabit Disk Sonuçları.....	22
3.3. Bazı Sabit Elips Sonuçları	24
3.4. Bazı Sabit Hiperbol Sonuçları	26
3.5. Bazı Sabit Cassini Eğrisi Sonuçları	28
3.6. Bazı Sabit Apollonius Çemberi Sonuçları.....	30
4. BULGULAR	32
4.1. Bazı Güncel Sabit Nokta Sonuçları S_b -Metrik Uzaylar ve Uygulamaları	32
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	33
KAYNAKÇA	46

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

d	Metrik fonksiyonu gösterimi
(X, d)	Metrik Uzay
(X, S)	S –metrik uzay
(X, S_b)	S_b –metrik uzay
$C_{x_0, r}$	Metrik uzaylar çember
$C_{x_0, r}^{S_b}$	S_b –metrik uzayda çember
$D_{x_0, r}^{S_b}$	S_b –metrik uzayda disk
$E_r^{S_b}(x_1, x_2)$	S_b –metrik uzayda elips
$H_r^{S_b}(x_1, x_2)$	S_b –metrik uzayda hiperbol
$C_r^{S_b}(x_1, x_2)$	S_b –metrik uzayda Cassini eğrisi
$A_r^{S_b}(x_1, x_2)$	S_b –metrik uzayda Apollonius eğrisi
$\{x_n\}$	$\forall n \in N$ için verilen dizi gösterimi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$Fix(T)$	T operatörüne ait tüm sabit noktaların kümesi
$P(X)$	X kümesinin kuvvet kümesi

1. GİRİŞ

Sabit nokta teorisi hakkında yapılan çalışmalar hem matematikçiler, hem de diğer uygulamalı bilimler alanlarında çalışan araştırmacılar için uzun süre önemini korumuştur. Hem matematik, hem de fizik, biyoloji bilgisayar bilimleri, mühendislik gibi birçok alanda da sabit nokta teorisi uygulamalarına günümüzde kolayca rastlamak mümkündür.

X boş kümeden farklı bir küme olduğunda $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olarak verildiğinde bu dönüşümün bir sabit noktaya sahip olması bazı kurallara bağlıdır: $x \in X$ herhangi bir nokta olmak üzere $T(x) = x$ koşulunu sağlayan x noktasına bu dönüşümün sabit noktası denir.

Bugüne kadar çeşitli yapılar ve uzaylar üzerinde sabit nokta veya noktaların varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar yapılmıştır. Geometri dalı da bunlardan bir tanesi olmuştur. Örneğin sabit çember, sabit hiperbol, sabit elips, sabit Cassine eğrisi vb. Sabit Nokta teorisinden yararlanılmıştır.

İlk kez 1922 yılında Stefan Banach tarafından büzülme dönüşümü kavramı tam metrik uzaylarda tanımlanmış ve sabit nokta teoremi çalışılmıştır. Banach Büzülme Prensibi adını alan bu kural bir dönüşümün sabit noktasının varlığını ve tekliğinin nasıl bulunabileceğini gösterir. Bu teoremi kısaca ifade etmek gerekirse: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir büzülme dönüşümü olsun, o halde her $x, y \in X$ için $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sayısı bulunabiliyorsa T dönüşümü X uzayında bir tek sabit noktaya sahiptir denir.

Fakat bazı fonksiyonlarda iki tane yani birden fazla sabit nokta çıkmıştır. Örneğin: $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tanımlanmış bir dönüşüm $Tx = x^2$ fonksiyonundaki sabit noktalar $x = 0$ ve $x = 1$ olmak üzere iki tane sabit nokta vardır, böylece sabit noktanın birden fazla olarak ortaya çıkması geometrik olarak bunu konuda yorumlama yapmaya iten neden olmuştur. Bu çalışmada ise sabit nokta teorisindeki büzülme durumu genelleştirilerek b -metrik uzay ve S -metrik uzay yardımıyla bir S_b -metrik uzayı tanımlanmıştır ve bu uzayda sabit noktanın varlığı ve tekliği araştırılmıştır.

Matematikte hala gelişmekte olan bir dal olan, fonksiyonel analiz ve topoloji ile bağlantılı olan sabit nokta teorisi, hızla genişleyen doğrusal olmayan operatörler ve doğrusal olmayan analiz

alanları büyük ölçüde sabit nokta teorisine dayanır. Bu bilim dalı hala oldukça yenidir ve hızla büyümektedir. Sabit nokta teoremleri ve sabit noktaları, topoloji, diferansiyel denklemler, ekonomi, oyun teorisi, optimal kontrol, dinamik ve fonksiyonel analiz gibi çok sayıda alanda tarihsel olarak temel teorik araçlar olmuştur. Sabit nokta bulma yöntemleri, sabit noktaları hesaplamak için etkili yöntemler ve kavramların yapılan uygulamalar için büyük ölçüde önemli hale gelmiş olması doğruluğun gelişmesine paraleldir ve bunun sonucunda uygulamalı matematiğin birikiminde önemli bir araç haline gelmişlerdir.

Genel topoloji, küme teorisi, fonksiyonel analiz ve cebirsel topoloji gibi matematiğin önemli alanları, sabit nokta teoremleri için ideal bağlamlar sağlayanlardan sadece birkaç örnektir. Sabit nokta teoremleri, potansiyel teorisi, yaklaşım teorisi, matematiksel ekonomi, oyun teorisi, diferansiyel denklemler teorisi de dahil olmak üzere çeşitli disiplinlerde bu alanlardaki soruları yanıtlamak için kullanılır. Ayrıca integral, diferansiyel veya fonksiyonel denklemler sistemi konusunda, sabit nokta teoremlerini kullanarak mühendislik ve başka bilimlerden çeşitli sorunları analiz etmek mümkündür.

Nokta metodolojileri, kontrol sistemleri ve elastikiyet problemleriyle uğraşırken, bu yaklaşımdan oldukça yararlanılmıştır. Younis ve diğerleri 2022’de çok aşamalı bir işlemle ilgili dinamik bir programlama problemini temsil eden bir fonksiyonel denklemi çözdüler ve bir roketin yükselen hareketini gösteren doğrusal olmayan bir modeli açıkladılar. Elastik giriş deformasyonu modeline yönelik çözümler geliştirebilmek için grafiksel daralmalarını kullandılar ve esas olarak mühendislik problemleriyle ilişkili çeşitli modeller için çözümlerin varlığı çağdaş uygulamalara odaklanılarak yapılmıştır. Kimyasal reaksiyonlar, sabit durum sıcaklık dağılımları, salgınlar, ekonomik teoriler, nötron taşıma teorileri ve akışkan akışı gibi çeşitli alanlarda ortaya çıkan fenomenleri temsil eden çeşitli matematiksel modellerin (varyasyonel eşitsizlikler, integral, kısmi ve diferansiyel denklemler vb.) çözümlerini göstermek için sabit nokta teoremleri mevcut en önemli araçlardır. Ayrıca, bu sistemlerin çözümü için uygun merkezi seçmenin ne kadar zor olduğunu incelemek için de kullanılırlar.

Poincare’yi takiben, başlangıçta Banach tarafından kurulan metrik sabit nokta teorisi, metrik uzaylarda (MS) hem doğrusal hem de doğrusal olmayan ifadeleri kapsayacak şekilde önemli ölçüde genişlemiştir. 1968’de Kannan, Banach tarafından kullanılan tek terimli $d(x, y)$ yerine $d(x, Tx), d(y, Ty)$ terimlerini kullandı; bunun üzerine Chatterjea teoriyi genişletmek için $d(x, Tx), d(y, Ty)$ terimlerini kullandı. Ardından Reich, Banach ve Kannan tarafından

kullanılan üç terimi birleştirerek büzülmeyi tanımladı. Daha sonra 2023'te Alam ve arkadaşları teoriyi genelleştirmek için yardımcı fonksiyonları kullanarak rasyonel daralmaları tanımladı. Metrik uzayın daha da genişletilmesi olarak Sedghi ve arkadaşları, S -metrik uzay tanımı verdiler. S -metrik uzayın G -metrik uzayın bir uzantısı olduğu iddiası da onlar tarafından yapılmıştır. Birkaç araştırmacıya göre bu iddia yanlıştır. Ek olarak, S -metrik ve G -metrik sınıflarının her ikisinin de farklı olduğu iddia edilmektedir. b -metrik uzay yeni bir kavram olarak ilk kez Bakhtin tarafından geliştirilmiştir. Czerwick, Bakhtin tanımından önemli  l de yararlanmıştır.

S -metrik ve b -metrik fikirlerini birleştirerek, Souayah ve Mlaiki S -metrik uzay fikrini oluşturmuştur. S_b -metrik uzayın daha geniş bir tanımı Rohen ve diğ rleri tarafından verilmiştir. Araştırmalar S_b -metrik uzay hakkında ek bulgular da sunmaktadır. Elbette, tüm bu fikirleri kısa bir genel bakışta ele almak imk nsızdır. Bu çalışmada, metrik kavramının en ilginç genellemelerinden biri olan S_b -metrik üzerinde verilen sabit nokta teorisinin genellemeleri bazı örnekleriyle beraber ele alınmıştır.

S_b -metrik tanımından önce, sırayla daha anlaşılır olması amacıyla S -metrik ve b -metrik terimlerinin tanımı verilmiştir. Ardından sabit noktaları bulabilmek için büzülme dönüşümlerinin kuralları tanımlanmış ve bunların çeşitli yapılar üzerinde nasıl  rneklenebileceđi ele alınmıştır.

2. KAVRAMSAL ÇERÇEVE İLE İLGİLİ ÇALIŞMALAR

Bu tez çalışmasında temel kavramlar tanımlar verilecek ve bu kavramlar bazı örnekler ile desteklenecektir.

2.1. Metrik Uzaylar

2.1.1. Metrik uzay

Tanım 2.1.1

$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için,

$$M1) d(x, y) \geq 0, \quad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$M2) d(x, y) = d(y, x)$$

$$M3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad (\text{üçgen eşitsizliği})$$

Aksiomlarını sağlıyorsa d fonksiyonu X üzerinde bir metrik, (X, d) ikilisine de **metrik uzay** denir.

2.1.2. b - metrik uzay

Tanım 2.1.2

X boştan farklı bir küme olsun, $b \geq 1$ belirli bir reel sayı olsun ve

$d: X \times X \rightarrow [0, \infty) \forall x, y, z \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon

$$(b_1) d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$(b_2) d(x, y) = d(y, x)$$

$$(b_3) d(x, z) \leq b[d(x, y) + d(y, z)]$$

Bu durumda d fonksiyonu X üzerinde bir b – metrik olarak adlandırılır. (X, d) çiftine ise **b - metrik uzay** denir (Bakhtin, 1989).

2.1.3. S -metrik uzayı

Tanım 2.1.3

X boş olmayan bir küme olsun,

$S: X \times X \times X \rightarrow [0, \infty) \forall q, w, t, a \in X$ için aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon

$$(S_1) S(q, w, t) = 0 \Leftrightarrow q = w = t$$

$$(S_2) S(q, w, t) \leq S(q, q, a) + S(w, w, a) + S(t, t, a)$$

Bu durumda S 'ye X üzerinde bir S -metrik denir ve (X, S) çiftine de bir **S -metrik uzayı** denir (Sedghi vd., 2012).

Lemma 2.1.1

(X, S) 'nin bir S -metrik uzay olduğunu varsayalım. O zaman

$$S(q, q, w) = S(w, w, q) \quad (2.1.3)$$

Eşitlik (2.1.3) bir S -metrik uzay üzerinde bir simetri özelliği olarak düşünülebilir (Sedghi vd., 2012).

Tanım 2.1.4

(X, S) bir S -metrik uzay olsun.

1. X 'de ki bir $\{q_n\}$ dizisi q 'ya yakınsar ancak ve ancak $n \rightarrow \infty$ iken $S(q_n, q_n, q) \rightarrow 0$ olur yani $\forall n \geq n_0, \forall \varepsilon > 0$ için $S(q_n, q_n, q) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır. Bu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = q \text{ veya } \lim_{n \rightarrow \infty} S(q_n, q_n, q) = 0$$

2. X 'deki $\{q_n\}$ dizisi, $n, d \rightarrow \infty$ iken $S(q_n, q_n, q_d) \rightarrow 0$ koşulunu sağlıyor ise Cauchy dizisi olarak adlandırılır. Yani, $\forall n, d \geq n_0$ olarak verildiğinde, $\forall \varepsilon > 0$ için $S(q_n, q_n, q) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır.

3. Her Cauchy dizisi yakınsak ise S -metrik uzay yani (X, S) tam uzay olarak adlandırılır (Sedghi vd., 2012).

Aşağıda, bir metrik ile bir S -metrik arasındaki ilişki verilmiştir.

Lemma 2.1.2

(X, ρ) bir metrik uzay olsun. O zaman aşağıdaki özellikler sağlanır (Hieu vd., 2015):

1. $S_\rho(q, w, t) = \rho(q, t) + \rho(w, t)$ koşulu her $q, w, t \in X$ için Y üzerinde bir S -metriktir.
2. (X, ρ) 'de $q_n \rightarrow q \Leftrightarrow (X, S_\rho)$ 'de $q_n \rightarrow q$ olur.
3. $\{q_n\}$ dizisi (X, ρ) uzayında bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow \{q_n\}$ dizisi (Y, S_ρ) uzayında bir Cauchy dizisidir.
4. (X, ρ) tamdır $\Leftrightarrow (X, S_\rho)$ tamdır.

S_ρ, ρ metriği tarafından üretilen S -metrik olarak adlandırılır. Literatürde, (Hieu & Dung, 2015, Özgür & Taş, 2017) herhangi bir metrik tarafından üretilmeyen bazı S -metrik örneklerini de vermek mümkündür. Son zamanlarda, yukarıdaki tanımları ve Lemma 2.1.3 kullanılarak, S -metrik uzayda farklı tekniklerle bazı sabit nokta sonuçları verilmiştir.

Lemma 2.1.3

(Y, S) bir S -metrik uzayı ve $\{q_n\}$ dizisi bu uzay içerisinde Cauchy olmayan bir dizi olsun ve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(q_n, q_n, q_{n+1}) = 0$$

verilsin. O zaman $\{q_n\}$ ve $e > 0$ için $\{q_{n_k}\}$ ve $\{q_{v_k}\}$ adlı iki alt dizisi vardır; öyle ki

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S(q_{n_{k+1}}, q_{n_{k+1}}, q_{v_{k+1}}) = \lim_{k \rightarrow \infty} S(q_{n_k}, q_{n_k}, q_{v_k}) \quad (6.2)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} S(q_{n_{k+1}}, q_{n_{k+1}}, q_{v_k}) \quad (6.3)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} S(q_{n_{k+1}}, q_{n_{k+1}}, q_{v_{k+1}}) = e$$

sağlanır. $N : Y \rightarrow Y$ bir dönüşüm ve $\theta : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$ bir diğer dönüşüm olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlamıyorsa N , üçgen θ –orbital geçişli (kısaca, θ -ü.o.g.) olarak adlandırılır (Popescu vd., 2014):

(o) Herhangi bir $q \in Y$ için $\theta(q, Nq) \geq 1 \Rightarrow \theta(Nq, N^2q) \geq 1$ olur,

(t_o) Herhangi bir $q, w \in Y$ için $\theta(q, w) \geq 1$ ve $\theta(w, Nw) \geq 1 \Rightarrow \theta(q, Nw) \geq 1$ elde edilir.

Lemma 2.1.4

$Y \neq \emptyset$ ve $\{q_v\}$, N 'nin bir θ -ü.o.g olduğu herhangi bir $v \in N$ için Y üzerinde

$$q_v = Nq_{v-1}$$

Şeklinde verilen bir dizi olsun. $\theta(q_0, Nq_0) \geq 1$ olacak şekilde Y üzerinde $q_0 \in Y$ elemanı varsa, o zaman her $n, v \in N$ için $\theta(q_n, q_v) \geq 1$ olur (Popescu vd., 2014).

2.1.4. S_b -metrik uzay

Tanım 2.1.5

X boş olmayan bir küme olsun, $b \geq 1$ herhangi bir reel sayı olarak verilsin. Bir $S_b : X \times X \times X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonunun S_b -metrik olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y, z, a \in X$ için aşağıdaki koşulların sağlanmasıdır.

$$(S_1) S_b(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x = y = z$$

$$(S_2) S_b(x, y, z) \leq b[S_b(x, x, a) + S_b(y, y, a) + S_b(z, z, a)]$$

Bu durumda (X, S_b) çiftine de **S_b -metrik uzayı** denir.

Bir S_b -metrik uzayı aynı zamanda S -metrik uzayının bir genelleştirilmesidir çünkü her S -metriği $b = 1$ olan bir S_b -metriğidir. Ancak bu ifadenin tersi aşağıdaki örnekte de görüldüğü gibi her zaman doğru değildir (Sedghi vd., 2016).

Örnek 2.1.1

$X = \mathbb{R}$ olsun ve S_b fonksiyonu $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$

$$S_b(x, y, z) = S(x, y, z)^2 = \frac{1}{16} (|x - y| + |y - z| + |x - z|)^2$$

şeklinde olsun. S_b , $b = 4$ için bir S_b -metrik olur. Fakat S -metrik değildir. Çünkü Tanım 2.1.4 de ki (S_2) şartı $b = 4$ olması durumunda sağlanmaktadır. Tanım 2.1.3 de verilen (S_2) şartını S_b fonksiyonu sağlamamaktadır (Taş ve Özgür, 2021).

Tanım 2.1.6

(X, S_b) $b \geq 1$ için bir S_b -metrik uzay olsun ve $x_0 \in X$, $r > 0$ olsun. Merkezi x_0 ve yarıçapı r olan çember şu şekilde tanımlanır (Özgür ve Taş, 2018).

$$C_{x_0, r}^{S_b} = \{x \in X : S_b(x, x, x_0) = r\}$$

2.1.5. Sabit çember

Tanım 2.1.7

(X, S_b) $b \geq 1$ için bir S_b -metrik uzayı olsun. $C_{x_0, r}^{S_b}$ X üzerinde bir çember, $T: X \rightarrow X$ kendi üzerine bir dönüşüm olsun. Her $x \in C_{x_0, r}^{S_b}$ için

$$Tx = x, C_{x_0, r}^{S_b}$$

ifadesi T için bir **sabit çember** olarak tanımlanır.

Sabit bir şekil kavramı, sabit çember ve sabit disk kavramlarının bir genelleştirmesi olarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır (Özgür ve Taş, 2018).

Tanım 2.1.8

(X, S_b) $b \geq 1$ için S_b -metrik uzayı verilsin ve $x_0, x_1, x_2 \in X$ noktaları seçilsin. $r \in [0, \infty)$

(1) x_0 merkezli ve yarıçapı r olan disk şu şekilde tanımlanır:

$$D_{x_0, r}^{S_b} = \{x \in X : S_b(x, x, x_0) \leq r\}$$

(2) Elips kısaca $E_r^{S_b}(x_1, x_2)$ ile gösterilirse;

$$E_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x \in X : S_b(x, x, x_1) + S_b(x, x, x_2) = r\}$$

şeklinde tanımlanır.

(3) Hiperbol kısaca $H_r^{S_b}(x_1, x_2)$ ile gösterilirse;

$$H_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x \in X : |S_b(x, x, x_1) - S_b(x, x, x_2)| = r\}$$

şeklinde tanımlanır.

(4) Cassini eğrisi kısaca $C_r^{S_b}(x_1, x_2)$ ile gösterilirse;

$$C_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x \in X : |S_b(x, x, x_1)S_b(x, x, x_2)| = r\}$$

şeklinde tanımlanır.

(5) Apollonius eğrisi kısaca $A_r^{S_b}(x_1, x_2)$ ile gösterilirse;

$$A_r^{S_b}(x_1, x_2) = \left\{x \in X - \{x_1\} : \frac{S_b(x, x, x_1)}{S_b(x, x, x_2)} = r\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi daha açıklayıcı olması açısından bazı örnekler verilecektir.

Tanım 2.1.9

(X, S_b) $b \geq 1$ için bir S_b -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ üzerine bir dönüşüm olduğunu varsayalım. Sabit nokta kümesi $Fix(f)$ kümesinde bulunan geometrik şekil F dönüşümüne f' 'nin sabit şekli denir.

2.1.6. Jleli-Samet tipi büzülme

Tanım 2.1.10

(X, S_b) bir S_b -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer en az bir $x_0 \in X$ var öyle ki

$$S_b(x, x, fx) > 0 \Rightarrow \varphi(S_b(x, x, fx)) \leq [\varphi(S_b(x, x, x_0))]^\alpha$$

koşulu her $x \in X$, $\alpha \in (0, 1)$ için ve $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu φ azalmıyorken sağlanıyorsa f dönüşümü Jleli-Samet tipi $D_{x_0} - S_b$ -büzülmesi olarak adlandırılır.

Teorem 2.1.1

(X, S_b) bir S_b -metrik uzayı ve $f: X \rightarrow X$ Jleli-Samet tipi $D_{x_0} - S_b$ -büzülmesi olsun.

$x_0 \in X$ için r sayısı

$$r = \inf\{S_b(x, x, fx) : x \neq fx, x \in X\} \quad (2.1.7)$$

olarak tanımlansın. O halde, f bir sabit $D_{x_0, r}^{S_b}$ diskine sahiptir.

İspat: Burada $fx_0 = x_0$ olduğu gösterilmelidir. $fx_0 \neq x$ olduğu kabul edilsin. Jleli-Samet tipi $D_{x_0} - S_b$ -büzülmesi hipotezi uygulanırsa şu elde edilir:

$$\begin{aligned} \varphi((S_b(x, x, fx))) &\leq [\varphi(S_b(x, x, x_0))]^\alpha \\ &= [\varphi(0)]^\alpha \end{aligned}$$

bu bir çelişki olmuş olur. Dolayısıyla;

$$fx_0 = x \quad (2.1.8)$$

olur. f dönüşümünün sabit diskinin $D_{x_0, r}^{S_b}$ olduğunu göstermek için sırasıyla aşağıdaki durumlara bakılacaktır.

Durum 1. $r = 0$ olsun. O zaman $D_{x_0, r}^{S_b} = \{x_0\}$ ve (2.1.8) eşitliğine göre $fx_0 = x_0$ elde edilir.

Durum 2. $r > 0$ olsun ve $x \in D_{x_0, r}^{S_b}$, $x \neq fx$ olacak şekilde herhangi bir nokta olarak seçilsin. Hipotezi kullanarak

$$\begin{aligned} \varphi((S_b(x, x, fx))) &\leq [\varphi(S_b(x, x, x_0))]^\alpha \\ &\leq [\varphi(0)]^\alpha \\ &\leq [\varphi(S_b(x, x, fx))]^\alpha \end{aligned}$$

$\alpha \in (0, 1)$ için çelişki elde edilir, dolayısıyla $fx = x$ olmalıdır.

Sonuç olarak f büzülmesi bir sabit $D_{x_0, r}^{S_b}$ diskine sahiptir.

Sonuç 2.1.1 Eğer yukarıda $b = 1$ alınırsa Tanım (2.1.8) elde edilir (Taş, 2021).

Tanım 2.1.11

(X, S_b) bir S_b -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. Eğer $x_1, x_2 \in X$ varsa

$$S_b(x, x, fx) > 0 \Rightarrow \varphi((S_b(x, x, fx)) \leq [\varphi(S_b(x, x, x_1) + S_b(x, x, x_2))]^\alpha$$

her $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ ve $\alpha \in (0, 1)$ için $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu φ azalmayan bir fonksiyon iken sağlanıyorsa f 'ye Jleli-Samet tipi $E_{x_1, x_2} - S_b$ büzülmesi denir.

Teorem 2.1.2

(X, S_b) bir S_b -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ Jleli-Samet tipi $E_{x_1, x_2} - S_b$ büzülmesi olsun. Herhangi $x_1, x_2 \in X$ verilsin ve r sayısı ise (2.1.7) 'deki gibi tanımlansın. Eğer $fx_1 = x_2$ ve $fx_1 = x_2$ ise f dönüşümü $E_r^{S_b}(x_1, x_2)$ elipsini sabitler.

İspat: Aşağıdaki durumlara sırasıyla bakılacaktır.

Durum 3. $r = 0$ olsun. O zaman $x_1 = x_2$ ve $E_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x_1\} = \{x_2\}$ olur. Hipotezden $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ elde edilir.

Durum 4. Her $r > 0$ için $x \in E, E_r^{S_b}(x_1, x_2)$ $x \neq fx$ olacak şekilde olsun. Hipotezden

$$\begin{aligned}\varphi((S_b(x, x, fx))) &\leq [\varphi(S_b(x, x, x_1) + S_b(x, x, x_2))]^\alpha \\ &\leq [\varphi(r)]^\alpha \\ &\leq [\varphi(S_b(x, x, fx))]^\alpha\end{aligned}$$

her $\alpha \in (0, 1)$ için çelişki elde edilir. $fx = x$ olmalıdır.

Sonuç olarak f dönüşümü $E_r^{S_b}(x_1, x_2)$ elipsini sabitler.

Sonuç 2.1.2 Eğer $b = 1$ alınırsa, S -metrik uzayda sabit elips sonuçları elde edilir.

Tanım 2.1.12

(X, S_b) bir metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ dönüşümü olsun. Eğer herhangi $x_1, x_2 \in X$ alındığında her $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ için ve her $\alpha \in (0, 1)$, $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ azalmayan fonksiyonu için;

$$S_b(x, x, f(x)) > 0 \Rightarrow \varphi((S_b(x, x, fx))) \leq [\varphi(S_b(x, x, x_1) - S_b(x, x, x_2))]^\alpha$$

koşulu sağlanıyorsa f' ye Jleli- Samet tipi $H_{x_1, x_2} - S_b$ -büzülmesi denir.

Teorem 2.1.3

(X, S_b) bir S_b metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ dönüşümü Jleli- Samet tipi $H_{x_1, x_2} - S_b$ -büzülmesi olsun. Eğer herhangi $x_1, x_2 \in X$ için $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ ve $r > 0$ (Tanım 2.1 deki gibi verildiyse) sağlanıyorsa f fonksiyonu $H_r^{S_b}(x_1, x_2)$ hiperbolünü sabitler.

İspat: $x \in H_r^{S_b}(x_1, x_2)$ noktası $x \neq fx$ olacak şekilde seçilen herhangi bir nokta olsun. Hipotezi kullanarak her $\alpha \in (0, 1)$ için;

$$\begin{aligned}\varphi((S_b(x, x, fx))) &\leq [\varphi(S_b(x, x, x_1) + S_b(x, x, x_2))]^\alpha \\ &\leq [\varphi(r)]^\alpha \\ &\leq [\varphi(S_b(x, x, fx))]^\alpha\end{aligned}$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $fx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak f fonksiyonu $H_r^{S_b}(x_1, x_2)$ hiperbolünü sabitler.

Sonuç 2.1.3 Eğer $b = 1$ alınırsa, o zaman S - metrik uzayda sabit hiperbol sonuçları elde edilir.

Tanım 2.1.13

(X, S_b) bir S_b -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ dönüşümü olsun. Eğer herhangi $x_1, x_2 \in X$ noktaları ve her $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ için her $\alpha \in (0,1)$ ve $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu azalmayan olduğunda;

$$S_b(x, x, fx) > 0 \Rightarrow \varphi(S_b(x, x, fx)) \leq [\varphi(S_b(x, x, x_1)S_b(x, x, x_2))]^\alpha$$

eşitsizliği sağlanırsa f dönüşümüne Jleli- Samet tipi $C_{x_1, x_2} - S_b$ -büzülmesi denir.

Teorem 2.1.4

(X, S_b) S_b -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ Jleli-Samet tipi $C_{x_1, x_2} - S_b$ -büzülmesi olsun. Herhangi $x_1, x_2 \in X$ ve r sayısı (Tanım 2.1.7) gibi verilsin. Eğer $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ oluyor ise f büzülmesi Cassini eğrisi $C_r^{S_b}(x_1, x_2)$ 'yi sabitler.

İspat: Aşağıdaki durumları göz önünde bulundurulacaktır.

Durum 5. $r = 0$ olsun, o halde $x_1 = x_2$ ve $C_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x_1\} = \{x_2\}$ olacak şekilde hipotez ispatlanmış olur.

Durum 6. $r > 0$ ve $x \in C_r^{S_b}(x_1, x_2), x \neq fx$ olacak şekilde herhangi bir nokta olmak üzere seçimler yapıldığında;

$$\begin{aligned} \varphi(S_b(x, x, fx)) &\leq [\varphi(S_b(x, x, x_1)S_b(x, x, x_2))]^\alpha \\ &\leq [\varphi(r)]^\alpha \\ &\leq [\varphi(S_b(x, x, fx))]^\alpha \end{aligned}$$

eşitsizliği $\alpha \in (0,1)$ ile çelişki verir. Dolayısıyla $fx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak f Cassini eğrisi $C_r^{S_b}(x_1, x_2)$ 'ni sabitler.

Sonuç 2.1.4 Eğer $b = 1$ alınırsa, o zaman S -metrik uzayda Cassini eğrisinin sonuçları elde edilir.

Tanım 2.1.12

(X, S_b) bir S_b metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ dönüşümü verilsin. herhangi $x_1, x_2 \in X$ için, her $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$ alınır, her $\alpha \in (0,1)$ ve $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ azalmayan fonksiyonu için;

$$S_b(x, x, fx) > 0 \Rightarrow \varphi(S_b(x, x, fx)) \leq [\varphi(\frac{S_b(x_1, x_2, x_3)}{S_b(x_1, x_2, x_3)})]^\alpha$$

f 'ye Jleli- Samet tipi $A_{x_1, x_2} - S_b$ -büzülmesi denir.

Teorem 2.1.5

(X, S_b) S_b -metrik uzay ve $f: X \rightarrow X$ Jleli-Samet tipi $A_{x_1, x_2} - S_b -$ ile $x_1, x_2 \in X$ ve r sayısı (Tanım 2.1) olarak tanımlanan S_b -büzülmesi eğer $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ ise f Apollonius dairesi $A_r^{S_b}(x_1, x_2)$ ni sabitler.

İspat: Aşağıdaki durumları göz önünde bulundurulursa;

Durum7. $r = 0$ olsun. O zaman $x_1 = x_2$ ve $A_r^{S_b}(x_1, x_2) = \{x_1\} = \{x_2\}$ olacak şekilde hipotezden $fx_1 = x_1$ ve $fx_2 = x_2$ elde edilir.

Durum 8. $r > 0$ ve $x \in A_r^{S_b}(x_1, x_2)$ noktası $x \neq fx$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun.

$$\begin{aligned} \varphi(S_b(x, x, fx)) &\leq [\varphi(\frac{S_b(x, x, x_1)}{S_b(x, x, x_3)})]^\alpha \\ &\leq [\varphi(r)]^\alpha \\ &\leq [\varphi(S_b(x, x, fx))]^\alpha \end{aligned}$$

$\alpha \in (0,1)$ olduğundan çelişki elde edilir. Dolayısıyla $fx = x$ olmalıdır. Sonuç olarak f Apollonius çemberi $A_r^{S_b}(x_1, x_2)$ 'ni sabitler.

Sonuç 2.1.5 Eğer $b = 1$ alınırsa o zaman sabit Apollonius çemberi sonuçlarını S -metrik uzayda elde edilir.

Son olarak aşağıdaki açıklayıcı örneği verilecektir.

Örnek 2.1.2

(Özgür N.Y. ve Taş N.2017) $X = [-1,1] \cup \{-7, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{7}{3}, 7, 8, 21\}$ tanımlanan bir küme ve $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ için S -metrik

$$S(x, y, z) = |x - z| + |x + z - 2y|$$

Bu S -metrik $b = 1$ için bir S_b -metriktir. $f: X \rightarrow X$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$fx = \begin{cases} x, & x \neq 8 \\ 7, & x = 8 \end{cases}$$

ve $\varphi: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ fonksiyonu $\forall t > 0$ için $\varphi(t) = t + 1$ ve $r = 2$ olsun.

O halde f fonksiyonu Jleli-Samet tipi $D_{x_0} - S_b$ -büzülmesi ile $\alpha = 0.5, x_0 = 0$. Sonuç olarak f fonksiyonu $D_{0,2}^{S_b} = [-1,1]$ diskini sabitler.

f fonksiyonu $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ ve $\alpha = 0.5$ ile Jleli-Samet tipi $E_{x_1, x_2} S_b$ -büzülmесidir. Sonuç olarak f elipsi $E_2^{S_b}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ 'ni sabitler.

f fonksiyonu $x_1 = -1, x_2 = 1$ ve $\alpha = 0.9$ Jleli-Samet tipi $H_{x_1, x_2} - S_b$ -büzülmesidir. Sonuç olarak f hiperbolü $H_2^{S_b}(-1, 1) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$ 'ni sabitler.

f fonksiyonu $x_1 = -1, x_2 = 1$ ve $\alpha = 0.5$ Jleli-Samet tipi $C_{x_1, x_2} - S_b$ -büzülmesidir. Sonuç olarak f Cassini eğrisi $C_2^{S_b}(-1, 1) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ 'ni sabitler.

f fonksiyonu $x_1 = -7, x_2 = 7$ ve $\alpha = 0.5$ Jleli-Samet tipi $A_{x_1, x_2} - S_b$ -büzülmesidir. Sonuç olarak f Apollonius eğrisi $A_2^{S_b}(-7, 7) = \{\frac{7}{3}, 21\}$ 'ni sabitler.



3. YÖNTEM

Bu bölümde, (Alghamdi vd. 2021)'de S -metrik uzaylar üzerinde tanımlanan Proinov tipi E -büzülmesini kullanarak bazı sabit nokta ve sabit şekil sonuçlarının üzerinde durulmuştur. Ayrıca, bazı açıklayıcı örnekler verilmiştir.

3.1. Bazı Sabit Nokta Sonuçları

Bu alt bölümde, (Y, S) 'nin tam bir S -metrik uzay, $T : Y \rightarrow Y$ 'nin dönüşümü ve $\alpha, \beta : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümleri

$$\beta(s) < \alpha(s) \quad (3.1.4)$$

koşulunu her $s > 0$ için sağlayan iki fonksiyon ve $\theta : Y \times Y \rightarrow [0, \infty)$ şeklinde verilen bir fonksiyon olsun.

Tanım 3.1.1

Aşağıdaki eşitsizliğin sağlanması durumunda N 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_s$ -büzülmesi denir:

$$\theta(q, w)\alpha[S(Nq, Nq, Nw)] \leq \beta[E_s(q, w)] \quad (3.1.5)$$

burada eşitsizliği $S(q, q, w) > 0$ ve $S(Nq, Nq, Nw) > 0$ olan her $q, w \in Y$ için geçerliyse $(\theta, \alpha, \beta) - E_s$ -büzülmesi olarak adlandırılır, ayrıca bu eşitsizlikte

$$E_s(q, w) = \max \left\{ (S(q, q, w) + |S(q, q, Nq) - S(w, w, Nw)|, \frac{S(q, q, Tw) + S(w, w, Tq)}{3} \right\}$$

olarak alınmıştır.

Teorem 3.1.1

N , bir $(\theta, \alpha, \beta) - E_s$ -büzülmesi olsun öyle ki:

(s₁) α artmayan ve alt yarı-süreklidir,

(s₂) $\forall s_0 > 0$ için $\lim_{s \rightarrow s_0} \sup \beta(s) < \alpha(s_0)$,

(s₃) N , θ -ü.o.g ve öyle bir $q_0 \in Y$ noktası vardır ki $\theta(q_0, Nq_0) \geq 1$ sağlanır,

(s₄) $\forall v \in \mathbb{N}$ için q_v gibi bir dizi verildiğinde ve $q_v \rightarrow q^*$ ve $\theta(q_v, q_{v+1}) \geq 1$ olur.

O hâlde T 'nin bir sabit noktası vardır.

İspat: $q_0 \in Y$ öyle bir nokta olsun ki

$$\theta(q_0, Nq_0) \geq 1$$

ve $\{q_d\}, Y$ üzerinde

$$q_1 = Nq_0 \text{ ve } q_d = Nq_{d-1}$$

olduğunu varsayılmıştır. Tersine, öyle bir $d_i \in \mathbb{N}$ vardır ki

$$q_{d_i} = q_{d_{i+1}}$$

burada $\{q_{d_i}\}$ dizisinin tanımını kullanarak şu yazılır:

$$S(Nq_{d_i}, Nq_{d_i}, q_{d_i}) = S(q_{d_{i+1}}, q_{d_{i+1}}, q_{d_i}) = 0$$

yani

$$q_{d_i} \in \text{Fix}(N) = \{q \in Y : q = Nq\}$$

olur, bu neden ile, $q = q_d$ ve $w = q_{d_{i+1}}$ seçilsin. Lemma 2.1.4'ü kullanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} \alpha[S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})] &= \alpha S(Nq_d, Nq_d, Nq_{d+1}) \\ &\leq \theta(q_d, q_{d+1}) \alpha S(Nq_d, Nq_d, Nq_{d+1}) \\ &\leq \beta[E_s(q_d, q_{d+1})] < \alpha[E_s(q_d, q_{d+1})]. \end{aligned}$$

Burada

$$\begin{aligned} E_s(q_d, q_{d+1}) &= \max\{S(q_d, q_d, q_{d+1}) + S(q_d, q_d, Nq_d) - S(q_{d+1}, q_{d+1}, Nq_{d+1}), \\ &\quad \frac{S(q_d, q_d, Nq_{d+1}) + S(q_{d+1}, q_{d+1}, Nq_d)}{3}\} \\ &= \max\{S(q_d, q_d, q_{d+1}) + |S(q_d, q_d, q_{d+1}) - S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})| \\ &\quad \frac{S(q_d, q_d, q_{d+2}) + S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+1})}{3}\} \\ &\leq \max\{S(q_d, q_d, q_{d+1}) + |S(q_d, q_d, q_{d+1}) - S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})| \\ &\quad \frac{2S(q_d, q_d, Nq_{d+1}) + S(q_{d+2}, q_{d+2}, q_{d+1})}{3}\} \end{aligned}$$

olarak alınmıştır. Eğer $S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2}) > S(q_d, q_d, q_{d+1})$ ise o zaman

$$E_s(q_d, q_{d+1}) \leq S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})$$

elde edilir.

$$\alpha[S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})] < \alpha[S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})]$$

yani bu bir çelişkidir. Eğer $S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2}) < S(q_d, q_d, q_{d+1})$ ise bu kez

$$E_s(q_d, q_{d+1}) \leq 2S(q_d, q_d, q_{d+1}) - S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})$$

elde edilir.

$$\alpha[S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})] < \alpha[2S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})] - S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})$$

(S_1) koşulu gereğince α artan olduğundan

$$S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2}) < 2S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2}) - S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2})$$

$$S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2}) < S(q_d, q_d, q_{d+1})$$

sonuçları bulunur. Bu sonuçla birlikte $\{S(q_d, q_d, q_{d+1})\}$ dizisinin 0 ile alttan sınırlandırılmış ve azalan bir dizi olduğunu görülür. O hâlde öyle bir $\delta \geq 0$ vardır ki

$$\lim_{d \rightarrow \infty} S(q_d, q_d, q_{d+1}) = \delta$$

buna bağlı olarak

$$\lim_{d \rightarrow \infty} E_s(q_d, q_{d+1}) = \delta$$

elde edilir. Şimdi $\delta = 0$ olduğunu iddia edilsin. Tersine, $\delta > 0$ olduğunu varsayalım.

$$\alpha[\delta] = \lim_{d \rightarrow \infty} S(q_{d+1}, q_{d+1}, q_{d+2}) \leq \lim_{d \rightarrow \infty} \beta[E_s(q_d, q_{d+1})] \leq \lim_{s \rightarrow \delta} \sup \alpha[\delta],$$

elde edilir; bu da (S_2) ile çelişir. Dolayısıyla $\delta = 0$ olmalıdır; yani

$$\lim_{d \rightarrow \infty} S(q_d, q_d, q_{d+1}) = \lim_{d \rightarrow \infty} S(q_d, q_d, Nq_{d+1})$$

olur. Şimdi $\{q_d\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterilecektir. Tersine, Cauchy olmadığını varsayalım. Lemma 2.1.3'e göre $\{q_d\}$ dizisinden türetilmiş iki alt dizi $\{q_{dj}\}$ ve $\{q_{kj}\}$ alınsın ve şöyle tanımlansın:

$$a_j = S(q_{dj}, q_{dj}, q_{kj})$$

ve

$$b_j = E_s(q_{dj}, q_{kj})$$

Bununla birlikte

$$\lim_{j \rightarrow \infty} a_j = e$$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} b_j = \lim_{j \rightarrow \infty} E_s(q_{dj}, q_{kj})$$

olduğunda,

$$= \lim_{j \rightarrow \infty} \max \left\{ S(q_{dj}, q_{dj}, q_{kj}) + |S(q_{dj}, q_{dj}, Nq_{dj}) - S(q_{kj}, q_{kj}, Nq_{kj})|, \right. \\ \left. \frac{S(q_{dj}, q_{dj}, Nq_{dj}) + S(q_{kj}, q_{kj}, Nq_{dj})}{3} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{j \rightarrow \infty} \max \left\{ S(q_{dj}, q_{dj}, q_{kj}) + |S(q_{dj}, q_{dj}, q_{dj+1}) - S(q_{kj}, q_{kj}, q_{kj+1})|, \right. \\
&\quad \left. \frac{S(q_{dj}, q_{dj}, q_{dj+1}) + S(q_{kj}, q_{kj}, q_{dj+1})}{3} \right\} \\
&= e
\end{aligned}$$

$q = q_{dj}$ ve $w = q_{kj}$ alınır ve Lemma 2.1.4 kullanılırsa:

$$\begin{aligned}
\alpha[a_{j+1}] &= \alpha S(q_{dj+1}, q_{dj+1}, q_{kj+1}) \\
&\leq \theta(q_{dj}, q_{kj}) \alpha S(Nq_{dj}, Nq_{dj}, Nq_{kj}) \\
&\leq \beta E_s(q_{dj}, q_{kj}) = \beta[b_j]
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\alpha[e] = \lim_{j \rightarrow \infty} \alpha[a_j] \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sup \beta[b_j] \leq \lim_{t \rightarrow e} \sup \beta[t]$$

yani bu durum (S_2) koşulu ile çelişmiştir. Sonuç olarak, $\{q_d\}$ dizisi, tam metrik uzay Y üzerinde Cauchy'dir.

$\{q_d\}$ dizisinin limiti t olsun. (S_4) koşulu altında $t \in \text{Fix}(N)$ 'dir.

Aksi hâlde,

$$0 < S(t, t, Nt) \leq 2S(t, t, Nq_d) + S(Nt, Nt, Nq_d)$$

olur. Eğer $S(Nt, Nt, Nq_d) = 0$ sonsuz sayıda $d \in \mathbb{N}$ için sağlarsa,

$$0 < S(t, t, Nt) \leq 2S(t, t, qd + 1) \rightarrow 0,$$

ve dolayısıyla

$$S(t, t, Nt) = 0$$

elde edilir.

Eğer $S(Nt, Nt, Nqd) > 0$ durumu her $d \in \mathbb{N}$ için geçerliyse,

$$\begin{aligned}\alpha[S(q_{d+1}, q_{d+1}, Nt)] &\leq \theta(q_d, t) \alpha[S(Nq_d, Nq_d, Nt)] \\ &\leq \beta[E_s(q_d, t)] < \alpha[E_s(q_d, t)]\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}E_s(q_d, t) &= \max \left\{ \frac{S(q_d, q_d, t) - |S(q_d, q_d, Nq_d) - S(t, t, Nt)|}{3}, \right. \\ &\quad \left. \frac{S(q_d, q_d, Nt) + S(t, t, Nq_d)}{3} \right\} \\ &= \max \left\{ \frac{S(q_d, q_d, t) - |S(q_d, q_d, q_{d+1}) - S(t, t, Nt)|}{3}, \right. \\ &\quad \left. \frac{S(q_d, q_d, Nt) + S(t, t, q_{d+1})}{3} \right\} \\ &= S(t, t, Nt)\end{aligned}$$

bulunur. Buradaki d için $d \rightarrow \infty$ sınırı alınır ve α 'nın alt yarı-sürekliliği kullanılırsa;

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow S(t, t, Nt)} \inf \alpha[s] &\leq \lim_{d \rightarrow \infty} \alpha[S(Nq_d, Nq_d, Nt)] \leq \beta[S(t, t, Nt)] \\ &< \alpha[S(t, t, Nt)] < \lim_{s \rightarrow S(t, t, Nt)} \inf \alpha[s]\end{aligned}$$

olur ve bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$Nt = t$$

yani

$$t \in \text{Fix}(N)$$

bulunur.

Teorem 3.1.2

Yukarıdaki teorem şu şekilde tamamlanır:

(s_5) Her $q, w \in \text{Fix}(N)$, $\theta(q, w) \geq 1$ için sağlanıyorsa ve bu koşul Teorem 3.1.1'in varsayımlarına eklenirse, o hâlde N fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır.

Sonuç 3.1.1

N fonksiyonu, her farklı $q, w \in Y$ için ve $S(Nq, Nq, Nw) > 0$ koşuluyla aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\alpha[S(Nq, Nq, Nw)] \leq \beta[E_s(q, w)]$$

Aşağıdaki varsayımlar geçerli olsun:

(s_0) Her $s > 0$ için $\beta(s) < \alpha(s)$ olur,

(s_1) α artmayandır ve alt yarı-sürekli,dir,

(s_2) Her $s_0 > 0$ için $\lim_{s \rightarrow s_0} \sup \beta(s) < \alpha(s_0)$ olur.

O halde N fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Eğer $\theta(q, w) = 1$ olarak teorem 3.1.1 ‘de alınırsa ispat biter.

Sonuç 3.1.2

N fonksiyonu, her farklı $q, w \in Y$ için ve $S(Nq, Nq, Nw) > 0$ koşulu altında aşağıdaki eşitsizliği sağlasın;

$$\alpha[S(Nq, Nq, Nw)] \leq c \alpha[ES(q, w)]$$

burada $c \in [0,1)$ ve $\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ fonksiyonu artmayan ve soldan sürekli olsun. O hâlde, N fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Sonuç 3.1.1 ‘de $\beta(s) = c\alpha(s)$ alınırsa ispat biter.

Örnek 3.1.1

(Özgür vd., 2017) $Y = [0, \infty)$ kümesi her $q, w, t \in Y$

$$S(q, w, z) = |q - t| + |q + t - 2w|$$

şeklinde tanımlanan bir S -metrik ile birlikte tam bir S -metrik uzay olsun.

Eğer $N: Y \rightarrow Y$ dönüşümü her $q \in Y$ için,

$$Nq = \frac{q}{2}$$

şeklinde tanımlanırsa, bu N fonksiyonu Teorem 3.1.1 ve Teorem 3.1.2’nin tüm koşullarını sağlar. $\alpha(s) = \frac{s}{2}$, $\beta(s) = \frac{s}{3}$ ve $\theta(q, w) = 1$ olduğunda sonuç olarak, N fonksiyonunun tek bir sabit noktası vardır ve bu nokta $q = 0$ ‘dır.

Tanım 3.1.4

Bir N fonksiyonu, her $q, w \in Y$ için

$$\theta(q, w) \cdot \alpha(S(N^2q, N^2q, N^2w)) \leq \beta(E^2s(q, w))$$

eşitsizliğini,

$$S(q, q, w) > 0 \text{ ve } S(Nq, Nq, Nw)$$

olmak koşuluyla sağlamıyorsa, bu fonksiyon bir (θ, α, β) - E_s^2 -büzülmesi olarak adlandırılır.

$$E_s^2(q, w) = \max \begin{cases} S(w, w, Nw) + |S(q, q, w) - S(q, q, Nq)|, S(Nq, Nq, Nw) + \\ |S(Nq, Nq, N^2q) - S(Nw, Nw, N^2w)| \\ S(Nw, Nw, N^2w) + |S(Nq, Nq, N^2q) - S(w, w, Nw)|. \end{cases}$$

Teorem 3.1.3

N fonksiyonu bir (θ, α, β) - E_s^2 -büzülmesi olsun. Aşağıdaki koşullar sağlamıyor olsun:

(s_1) α artmayan ve alt yarı-süreklidir,

(s_2) Her $s_0 > 0$ için $\lim_{s \rightarrow s_0} \sup \beta(s) < \alpha(s_0)$,

(s_3) N θ -ü.o.g olsun ve öyle bir $q_0 \in Y$ noktası vardır öyle ki $\theta(q_0, Nq_0) \geq 1$,

(s_6) N^2 sürekli ve her $w \in \text{Fix}(N^2)$ için $\theta(Nw, w) \geq 1$ eşitsizliği geçerli olsun.

O hâlde, N fonksiyonunun bir sabit noktası vardır.

Teorem 3.1.4

Teorem 3.1.3'ün hipotezine her bir $q, w \in \text{Fix}(N)$ için

(s_5) $\theta(q, w) \geq 1$ koşulu eklenirse, N 'nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat: $t, w \in \text{Fix}(N)$ olsun ve $t \neq w$ olsun. (s_5) kuralı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \alpha[S(t, t, w)] &\leq \theta(t, w) \alpha[S(N^2t, N^2t, N^2w)] \\ &\leq \beta[E_s^2(t, w)] < \alpha[E_s^2(t, w)] = \alpha[S(t, t, w)] \end{aligned}$$

elde edilir; bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, T 'nin tek bir sabit noktası vardır.

Sonuç 3.1.3 N , her farklı $q, w \in Y$ için

$$\alpha[S(N^2q, N^2q, N^2w)] \leq \beta[E_s^2(q, w)]$$

$S(N^2q, N^2q, N^2w) > 0$ olacak şekilde sağlıyor olsun.

(s_0) Her $s > 0$ için $\beta(s) < \alpha(s)$,

(s_1) α 'nın azalmayan ve alt yarı-süreklidir,

(s_2) $\lim_{s \rightarrow s_0} \sup \beta(s) < \alpha(s_0)$ için her $s_0 > 0$ için sağlanır,

(s_6) N^2 süreklidir.

Bu durumda N 'nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Teorem 3.1.3'te $\theta(q, w) = 1$ alınırsa ispat biter.

Sonuç 3.1.4 N , her farklı $q, w \in Y$ için

$$\alpha[S(N^2q, N^2q, N^2w)] \leq c\alpha[E_S^2(q, w)]$$

sağlanıyor olsun, öyle ki $c \in [0, 1)$, $S(Nq, Nq, Nw) > 0$ ve $\alpha: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ azalmayan ve soldan süreklidir. O zaman N 'nin tek bir sabit noktası vardır.

İspat: Sonuç 3.1.3'te $\beta(s) = c\alpha(s)$ alınırsa, ispat biter.

Örnek 3.1.2

$Y = [0, 10]$ tam S -metrik uzayı olsun ve Örnek 3.1.1'deki gibi S -metrik uzayı tanımlanır.

$N : Y \rightarrow Y$ dönüşümü şu şekilde verilsin. Her $q \in Y$ için,

$$N_q = \begin{cases} 0, & q \in [0, 2] \\ 2, & q \in (2, 4] \\ \frac{q-4}{4}, & q \in (4, 8] \\ \frac{q}{2}, & q \in (8, 10] \end{cases}$$

olsun. $\alpha, \beta : (0, \infty) \rightarrow R$ için α azalmayan ve herhangi bir $s > 0$ için $\beta(s) < \alpha(s)$ fonksiyonları verilsin. O zaman $N, q = \frac{4}{3}, w = \frac{7}{3}$ için Teorem 3.1.1'in koşullarını sağlar. Öte yandan,

$$N^2q = \begin{cases} 0, & q \in [0, 8] \\ \frac{q-8}{8}, & q \in (8, 10] \end{cases}$$

ve N^2 süreklidir. Bu nedenle, N , Teorem 3.1.3'teki koşulları sağlar;

$$\theta(q, w) = \begin{cases} q^3 + w^3; & q, w \in [0, 8], \\ 1 & ; q, w \in (8, 10], \\ 2 & ; q \in (8, 10], w \in [0, 2], \\ 0 & ; \text{diğer durumlar}, \end{cases}$$

$$\alpha(s) = \frac{s}{4},$$

$$\beta(s) = \frac{s}{6},$$

olur. Sonuç olarak, N 'nin tek bir sabit noktası $q = 0$ vardır.

Tanım 3.1.5

F bir geometrik şekil olsun. Eğer $F \subset \text{Fix}(N)$ ise F 'ye N 'nin sabit şekli denir ve r sayısı

$$r = \inf\{S(q, q, Nq) : q \notin \text{Fix}(N)\}$$

şeklinde tanımlanır.

3.2. Bazı Sabit Disk Sonuçları

Bu bölümde, S -metrik uzaylarda bazı sabit disk (veya sabit çember) sonuçları aşağıda verilmiştir. Bunun için iki yeni büzülme tanımlanmıştır.

Tamam 3.2.1

Eğer $q_0 \in Y$ varsa ve her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için

$$\theta(q, q_0)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S(q_0, q_0)}{2} \right]$$

varsa, N' 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_D}$ -büzülme denir.

Teorem 3.2.1

$N, q_0 \in Y$ olan bir $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_D}$ -büzülmesi olsun.

Eğer $S(q_0, q_0, Nq_0) \leq r$ ise o zaman $q_0 \in \text{Fix}(N)$ ve $D_{q_0, r}^S \subset \text{Fix}(N)$ olur. Özellikle $C_{q_0, r}^S \subset \text{Fix}(N)$ olur.

İspat: İlk olarak, $q_0 \in \text{Fix}(N)$ olduğu kanıtlanır. Tersine $q_0 \notin \text{Fix}(N)$ alınır. Yukarıdaki hipotez kullanılarak,

$$\alpha[S(q_0, q_0, Nq_0)] \leq \theta(q_0, q_0) \alpha[S(q_0, q_0, Nq_0)] \leq \beta \left[\frac{E_S(q, q_0)}{2} \right]$$

olduğundan,

$$E_S(q, q_0) = S(q_0, q_0, Nq_0)$$

elde edilir. Böylece,

$$\alpha[S(q_0, q_0, Nq_0)] \leq \beta \left[\frac{S(q_0, q_0, Nq_0)}{2} \right] < \alpha \left[\frac{S(q_0, q_0, Nq_0)}{2} \right]$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla,

$$q_0 \in \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

Şimdi $D_{q_0, r}^S \subset \text{Fix}(N)$ olduğu aşağıdaki durumlarda verilmiştir.

Durum 1: $r = 0$ olsun. O zaman $D_{q_0, r}^S = \{q_0\}$ olur. Buradan,

$$D_{q_0, r}^S \subset \{q_0\}$$

elde edilir.

Durum 2: $r > 0$ ve $k \in D_{q_0,r}^S$ olsun öyle ki $q \notin \text{Fix}(N)$ olsun. Yukarıdaki hipotez kullanılarak,

$$\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \theta(q, q_0) \quad \alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S(q, q_0)}{2} \right]$$

denklemleri elde edilir.

Burada

$$E_S(q, q_0) \leq 2S(q, q, Nq)$$

yardımıyla;

$$\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S(q, q_0)}{2} \right] < \alpha \left[\frac{E_S(q, q_0)}{2} \right] \leq \alpha[S(q, q, Nq)]$$

bu bir çelişkidir. Yani $q \in \text{Fix}(N)$ olur. Sonuç olarak,

$$D_{q_0,r}^S \subset \text{Fix}(N)$$

$C_{q_0,r}^S$ çemberi $D_{q_0,r}^S$ diskinin bir sınırı olduğundan,

$$C_{q_0,r}^S \subset \text{Fix}(N)$$

bulunur.

Tanım 3.2.2

Eğer $q_0 \in Y$ ve her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için,

$$\theta(q, q_0) \alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S^2(q_0, q_0)}{2} \right]$$

oluyorsa N' 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_D}^2$ -büzülmesi denir.

Teorem 3.2.2

$N, q_0 \in Y$ için $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_D}^2$ -büzülmesi olsun.

Eğer $[S(q_0, q_0, Nq_0)] \leq r$, $Nq_0 \in \text{Fix}(N)$ ve $q \in \text{Fix}(N^2)$ ise, $q_0 \in \text{Fix}(N)$ ve

$D_{q_0,r}^S \subset \text{Fix}(N)$ dir. Ayrıca $C_{q_0,r}^S \subset \text{Fix}(N)$ olur.

İspat: İlk önce, $q_0 \in \text{Fix}(N)$ olduğu ispatlanır. Tersini kabul edilsin, $q_0 \notin \text{Fix}(N)$ olduğu varsayalım. Teoremin hipotezi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \alpha[S(q_0, q_0, Nq_0)] &\leq \theta(q_0, q_0) \quad \alpha[S(q_0, q_0, Nq_0)] \\ &\leq \beta \left[\frac{E_S^2(q_0, q_0)}{2} \right] = \beta[S(q_0, q_0, Nq_0)] \\ &< \alpha[S(q_0, q_0, Nq_0)] \end{aligned}$$

elde edilir; bu bir çelişkidir;

$$q_0 \in \text{Fix}(N)$$

olmalıdır.

Şimdi $D_{q_0,r}^S \subset \text{Fix}(N)$ olduğunda aşağıdaki durumlara bakılmıştır.

Durum 1: $r = 0$ olsun. O zaman $D_{q_0,r}^S = \{q_0\}$ olur.

$$D_{q_0,r}^S \subset \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in D_{q_0,r}^S$ olsun, böylece $q \notin \text{Fix}(N)$ olur. Teoremin hipotezi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \alpha[S(q, q, N_q)] &\leq \theta(q, q_0) \alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S^2(q_0, q_0)}{2} \right] \\ &< \alpha \left[\frac{E_S^2(q_0, q_0)}{2} \right] \leq \alpha[S(q, q, N_q)] \end{aligned}$$

olduğu bulunur. Bu bir çelişkidir. Bu nedenle $q \in \text{Fix}(N)$ olmalı ve

$$D_{q_0,r}^S \subset \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

$C_{q_0,r}^S$ çemberi $D_{q_0,r}^S$ diskinin bir sınırı olduğundan,

$$C_{q_0,r}^S \subset \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

Örnek 3.2.1

$Y = \mathbb{R}$ Örnek 3.1.1'deki gibi S -metrik uzayı olsun ve $N : Y \rightarrow Y$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın. Her $q \in Y$ için,

$$N_q = \begin{cases} q, & q \in Y - \{2\} \\ 3, & q = 2 \end{cases}$$

olsun, o zaman N hem $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_D}$ -büzülmesi, hem de $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_D}^2$ -büzülmesidir; burada $q_0 = 0, \theta(q, y) = 1, \alpha(s) = \frac{s}{2}, \beta(s) = \frac{s}{3}$ olur. Ayrıca,

$$r = 2$$

olur. Sonuç olarak, $N D_{0,2}^S = [-1, 1]$ diskini ve $C_{0,2}^S = \{-1, 1\}$ çemberini sabitler.

3.3. Bazı Sabit Elips Sonuçları

Bu bölümde, S -metrik uzaylarda iki sabit elips sonucunu kanıtlanacaktır.

Tanım 3.3.1

Eğer $q_1, q_2 \in Y$ ve her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için,

$$\theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S(q, q_1) + E_S(q, q_2)}{4} \right]$$

sağlanıyorsa N 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SD}$ -büzülmesi denir.

Teorem 3.3.1

$N, q_1, q_2 \in Y$ ile bir $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SD}$ -büzülmesi olsun.

Eğer $q_1, q_2 \in \text{Fix}(N)$ ve $S(Nq, Nq, q_1) + S(Nq, Nq, q_2) = r$ ise o zaman

$$E_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

olur.

İspat:

Durum 1: $r = 0$ olsun. O zaman $E_r^S = (q_1, q_2) = \{q_1\} = \{q_2\}$ olur. Hipoteze göre

$$E_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in E_r^S(q_1, q_2)$ olsun, öyle ki $q \notin \text{Fix}(N)$ olur. Hipotezi kullanarak

$$\begin{aligned} \alpha[S(q, q, Nq)] &\leq \theta(q, q_0)\alpha[S(q, q, Nq)] \\ &\leq \beta \left[\frac{E_S(q, q_1) + E_S(q, q_2)}{4} \right] \\ &\leq \alpha \left[\frac{E_S(q, q_1) + E_S(q, q_2)}{4} \right] \\ &\leq \alpha[S(q, q, Nq)] \end{aligned}$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Bu yüzden $q \in \text{Fix}(N)$ olur. Sonuç olarak,

$$E_r^S = (q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

olur.

Tanım 3.3.2

Eğer $q_1, q_2 \in Y$ ve her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için,

$$\theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S^2(q, q_1) + E_S^2(q, q_2)}{4} \right]$$

koşulu sağlanıyorsa N 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SE}^2$ -büzülmesi denir.

Teorem 3.3.2

$N, q_1, q_2 \in Y$ ile bir $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SE}^2$ -büzülmesi olsun.

Eğer $q_1, q_2, Nq_1, Nq_2 \in \text{Fix}(N)$, $q \in \text{Fix}(N^2)$ ve $S(Nq, Nq, q_1) + S(Nq, Nq, q_2) = r$ ise o zaman $E_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$ olur.

İspat:

Durum 1: $r = 0$ olsun. O zaman $E_r^S = (q_1, q_2)$ için hipotez ile

$$E_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in E_r^S(q_1, q_2)$ öyle ki $q \notin \text{Fix}(N)$ kullanılarak,

$$\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)]$$

$$\leq \beta \left[\frac{E_S(q, q_1) + E_S(q, q_2)}{4} \right]$$

$$\leq \alpha \left[\frac{E_S(q, q_1) + E_S(q, q_2)}{4} \right]$$

$$\leq \alpha[S(q, q, Nq)]$$

olur, bu bir çelişkidir. Yani $q \in \text{Fix}(N)$ olur. Sonuç olarak,

$$E_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

Örnek 3.3.1

$Y = [-1, 1] \cup \{2, 4\}$ Örnek 3.2.1'deki gibi S -metriğinin tanımlandığı bir S -metrik uzayı olsun.

Bir $N : Y \rightarrow Y$ dönüşümünü şu şekilde tanımlanır: Her $q \in Y$ için,

$$Nq = \begin{cases} q, & q \in Y - \{4\}, \\ 2, & q = 4, \end{cases}$$

olsun, o zaman N hem $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SE}$ -büzülmesi, hem de $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SE}^2$ -büzülmesidir.

$q_1 = -1, q_2 = 1, \theta(q, y) = 1, \alpha(s) = \frac{s}{2}$ ve $\beta(s) = \frac{s}{3}$ olur. Ayrıca $r = 4$ olur.

Sonuç olarak, $N, E_4^S(-1, 1) = [-1, 1]$ elipsini sabitler.

3.4. Bazı Sabit Hiperbol Sonuçları

Bu bölümde, S -metrik uzaylarda iki sabit hiperbol sonucunu gösterilecektir.

Tanım 3.4.1

Eğer $q_1, q_2 \in Y$ varsa, her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için,

$$\theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta[|E_S(q, q_1) - E_S(q, q_1)|]$$

$$S(q, q, Nq) \geq \max\{S(Nq, Nq, q_1), S(Nq, Nq, q_2)\}$$

geçerli olacak şekilde $q_1, q_2 \in Y$ varsa, N' 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SH}$ -büzülmesi denir.

Theorem 3.4.1

$N, q_1, q_2 \in Y$ için bir $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_H}$ -büzülmesi olsun. Eğer $q_1, q_2 \in \text{Fix}(N)$ ve $r > 0$ ise o zaman $H_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$ olur.

İspat: $q \in H_r^S(q_1, q_2)$ olsun, öyle ki $q \notin \text{Fix}(N)$ olur. 3.2.2 teoremini kullanarak,

$$\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta [|E_s(q, q_1) - E_s(q, q_2)|]$$

elde edilir. Burada

$$E_s(q, q_1) = S(q, q, q_1) + S(q, q, Nq)$$

ve

$$E_s(q, q_2) = S(q, q, q_2) + S(q, q, Nq)$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \alpha[S(q, q, Nq)] &\leq \beta[|S(q, q, q_1) - S(q, q, q_2)|] = \beta[r] \\ &< \alpha[r] \leq \alpha[S(q, q, Nq)], \end{aligned}$$

olur, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$H_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

bulunur.

Tanım 3.4.2

Eğer $q_1, q_2 \in Y$ varsa her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için

$$\theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta [|E_s^2(q, q_1) - E_s^2(q, q_2)|]$$

oluyorsa, N 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_H}^2$ -büzülmesi denir.

Theorem 3.4.2

$N, q_1, q_2 \in Y$ için bir $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_H}^2$ -büzülmesi olsun.

Eğer $q_1, q_2, Nq_1, Nq_2 \in \text{Fix}(N)$ ise $|S(Nq, Nq, q_1) - S(Nq, Nq, q_2)| = r, q \in \text{Fix}(N^2)$ ve $r > 0$ ise o zaman $H_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$ olur.

İspat: $q \in H_r^S(q_1, q_2)$ olsun öyle ki $q \notin \text{Fix}(N)$ 'dir. Hipotez kullanılarak,

$$\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta [|E_s^2 E_s^2(q, q_1) - E_s^2(q, q_2)|]$$

bulunur, buradan

$$E_s^2(q, q_1) = S(Nq, Nq, q_1) + S(q, q, Nq)$$

ve

$$E_s^2(q, q_2) = S(Nq, Nq, q_2) + S(q, q, Nq)$$

elde edilir.

$$\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta[|S(q, q, q_1) - S(q, q, q_2)|]$$

$$= \beta[r] < \alpha[r] \leq \alpha[S(q, q, Nq)]$$

bu bir çelişkidir, dolayısıyla

$$H_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

Örnek 3.4.1

$Y = [-1, 1] \cup \{2, 3\}$, S -metriğinin tanımlandığı bir S -metrik uzayı olsun.

Örnek 3.1.1'deki gibi dönüşüm $N : Y \rightarrow Y$ her $q \in Y$ için şu şekilde tanımlanır:

$$Nq = \begin{cases} q, & q \in Y - \{3\} \\ 2, & q = 3 \end{cases}$$

O zaman N hem $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SH}$ -büzülmesi, hem de $(\theta, \alpha, \beta) - E_{SH}^2$ -büzülmesidir, burada $q_1 = -1, q_2 = 1, \theta(q, y) = 1, \alpha(s) = \frac{s}{2}$ ve $\beta(s) = \frac{s}{3}$ 'tür. Ayrıca

$$r = 2$$

olur. Sonuç olarak, $N, H_2^S(-1, 1) = \{\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\}$ hiperbolünü sabitler.

3.5. Bazı Sabit Cassini Eğrisi Sonuçları

Bu bölümde S -metrik uzaylarda iki sabit Cassini eğri teoremi ispatlanır.

Tanım 3.5.1

Eğer $q_1, q_2 \in Y$ varsa her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için,

$$\theta(q_1, q_2) \alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\sqrt{\frac{E_S(q, q_1) E_S(q, q_1)}{4}} \right]$$

ve

$$S(q, q, Nq) \geq \max \left\{ \begin{matrix} S(q, q, q_1), S(q, q, q_2) \\ S(Nq, Nq, q_1), S(Nq, Nq, q_2) \end{matrix} \right\}$$

olsun. N' 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{Sc}^2$ -büzülmesi denir.

Tanım 3.5.2

Eğer $q_1, q_2 \in Y$ varsa,

$$\theta(q_1, q_2) \alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\sqrt{\frac{E_S^2(q, q_1) E_S^2(q, q_2)}{4}} \right]$$

ve

$$S(q, q, Nq) \geq \max\{S(Nq, Nq, q_1), S(Nq, Nq, q_2)\},$$

her $q \in Y \setminus \text{Fix}(N)$ için sağlamıyorsa, o hâlde N dönüşümüne (θ, α, β) - $E_{S_c}^2$ -büzülmesi denir.

Teorem 3.5.1

$q_1, q_2 \in Y$ için N $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_c}^2$ -büzülmesi olsun. Eğer $q_1, q_2, Nq_1, Nq_2 \in \text{Fix}(N)$ ve $q \in \text{Fix}(N^2)$ ise $C_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$ olur.

İspat:

Durum 1: $r = 0$ olsun. O halde $C_r^S(q_1, q_2) = \{q_1\} = \{q_2\}$ olduğundan aşağıdaki hipotez elde edilir:

$$C_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N).$$

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in C_r^S(q_1, q_2)$ olsun, buradan $q \notin \text{Fix}(N)$ olur. Hipotez kullanılarak,

$$\begin{aligned} \alpha[S(q, q, Nq)] &\leq \theta(q_1, q_2) \alpha[S(q, q, Nq)] \\ &\leq \beta \left[\sqrt{\frac{E_S^2(q, q_1) E_S^2(q, q_1)}{4}} \right] \\ &< \alpha \left[\sqrt{\frac{E_S(q, q_1) E_S(q, q_1)}{4}} \right] \\ &\leq \alpha[S(q, q, Nq)] \end{aligned}$$

bulunur. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$C_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

elde edilir.

Örnek 3.5.1

$Y = [-1, 1] \cup \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2, 3\}$ Örnek 3.1.1'deki gibi tanımlanan bir S -metrik uzay olsun.

Bir $N : Y \rightarrow Y$ dönüşümü her $q \in Y$ için şu şekilde tanımlansın:

$$Nq = \begin{cases} q, & q \in Y - \{3\} \\ 2, & q = 3 \end{cases}$$

O zaman N hem $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_c}$ -büzülmesi, hem de $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_c}^2$ -büzülmesidir. Burada $q_1 = -1, q_2 = 1, \theta(q, y) = 1, \alpha(s) = \frac{s}{2}$ ve $\beta(s) = \frac{s}{3}$ 'tür. Ayrıca

$$r = 2$$

olur. Sonuç olarak, $N, C_2^S(-1,1) = \{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$ Cassini eğrisini sabitler.

3.6. Bazı Sabit Apollonius Çemberi Sonuçları

Bu bölümde S -metrik uzaylarda iki sabit Apollonius çemberi teoremi ispatlanmıştır.

Tanım 3.6.1

Eğer $q_1, q_2 \in Y$ varsa, her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için,

$$\theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S(q_1, q_2)}{E_S(q, q_2)} \right]$$

ve

$$S(q, q, Nq) \geq \max \left\{ \begin{array}{l} S(q, q, q_1), S(q, q, q_2) \\ S(Nq, Nq, q_1), S(Nq, Nq, q_2) \end{array} \right\}$$

ise N' 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_A}$ -büzülmesi denir.

Teorem 3.6.1

$N (\theta, \alpha, \beta) - E_{S_A}$ -büzülmesi olsun. Her $q_1, q_2 \in Y$ için eğer $q_1, q_2, N_{q_1}, N_{q_2} \in \text{Fix}(T)$ ve $q \in \text{Fix}(N^2)$ ise $A_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$ olur.

İspat:

Durum 1: $r = 0$ ozaman hipotez gereği $A_r^S(q_1, q_2) = \{q_1\}$ ele alınır.

$$A_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N).$$

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in A_r^S(q_1, q_2)$ böylece $q \notin \text{Fix}(N)$ olur, hipotez kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \alpha[S(q, q, Nq)] &\leq \theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \\ &\leq \beta \left[\frac{E_S(q_1, q_2)}{E_S(q, q_2)} \right] \\ &\leq \alpha \left[\frac{E_S(q_1, q_2)}{E_S(q, q_2)} \right] \leq \alpha[1] \end{aligned}$$

bulunur, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla

$$A_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$$

olur.

Tanım 3.6.2

Eğer her $q_1, q_2 \in Y$ ve her $q \in Y - \text{Fix}(N)$ için,

$$\theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \leq \beta \left[\frac{E_S^2(q, q_1)}{E_S^2(q, q_2)} \right]$$

ve

$$S(q, q, Nq) \geq \max\{1, S(Nq, Nq, q_1), S(Nq, Nq, q_2)\}$$

oluyorsa N' 'ye $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_A}^2$ -büzülmesi denir.

Teorem 3.6.2

Her $q_1, q_2 \in Y, N$ $(\theta, \alpha, \beta) - E_{S_A}^2$ -büzülmesi olsun. Eğer $q_1, q_2, Nq_1, Nq_2 \in \text{Fix}(N)$ ve $q \in \text{Fix}(N^2)$ ise $A_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N)$ olur.

İspat:

Durum 1: $r = 0$ alınsın, o zaman hipotez gereği $A_r^S(q_1, q_2) = \{q_1\}$ olur.

$$A_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N).$$

Durum 2: $r > 0$ ve $q \in A_r^S(q_1, q_2)$ alınırsa, böylece $q \notin \text{Fix}(N)$ olur ve hipotezden,

$$\begin{aligned} \alpha[S(q, q, Nq)] &\leq \theta(q_1, q_2)\alpha[S(q, q, Nq)] \\ &\leq \beta \left[\frac{E_S(q, q_1)}{E_S(q, q_2)} \right] \\ &\leq \alpha \left[\frac{E_S(q, q_1)}{E_S(q, q_2)} \right] \leq \alpha[1] \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla bu bir çelişkidir.

$$A_r^S(q_1, q_2) \subset \text{Fix}(N).$$

4. BULGULAR

4.1. Bazı Güncel Sabit Nokta Sonuçları S_b –Metrik Uzaylar ve Uygulamaları

Açıklama 1

Bir S -metrik, değişkenlere göre otomatik olarak simetriktir.

Örnek 4.1.1

(Y, S_b) $s \geq 1$ için çiftini ele alırsak, burada

$$Y = Y_1 \cup Y_2, \text{card}(Y_1) \geq 4, \text{card}(Y) \geq 5, \text{card}(Y_1 \cap Y_2) = 0$$

ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ aşağıdaki gibi verilsin:

$$S_b(u, v, w) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } u = v = w = 0 \\ 3, & \text{eğer } (u, v, w) \in Y_1^3 \\ 1, & \text{eğer } (u, v, w) \notin Y_1^3 \end{cases}$$

(Y, S_b) çifti $s \geq 1$ için bir S_b -metrik uzaydır (Souayah vd., 2016).

Aşağıdaki tanım, S_b -metrik uzaydaki dizilerin yakınsaklığı ile ilgilidir.

Tanım 4.1.1

Bir S_b -metrik uzayda (Y, S_b) bir $\{w_m\}$ dizisi

$$(a) w \in Y \text{ yakınsak} \Leftrightarrow \lim_{m \rightarrow \infty} S_b(w_m, w_m, w) = 0$$

$$(b) \text{Cauchy} \Leftrightarrow \lim_{m, p \rightarrow \infty} S_b(w_m, w_m, w_p) = 0$$

Burada (Y, S_b) bir S_b -metrik uzay ve eğer (Y, S_b) 'deki tüm Cauchy dizileri (Y, S_b) 'de yakınsaksa bu uzay tamdır (Rohen vd. 2017).

Tanım 4.1.2

(Y, S_b) $s \geq 1$ için bir S_b -metrik uzayı olsun ve $T: Y \rightarrow Y$ olmak üzere, eğer $Tw = w$ ise $w \in Y$ noktasına T 'nin sabit noktası denir.

Tanım 4.1.3

(Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T_1, T_2, \dots: Y \rightarrow Y$ olmak üzere bir S_b -metrik uzayı olsun, eğer

$T_1w = T_2w = \dots = w$ olmak üzere $w \in Y$ varsa bu noktaya tüm dönüşümlerin ortak sabit noktası denir.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Şimdi sabit nokta sonuçlarından ve bunların genelleştirilmesinin S_b -metrik uzayda nasıl olabileceğinden bahsedilecektir (Souayah vd. 2016).

Souayah vd. (Souayah vd. 2016) S_b -metrik uzayda ilk büzülme teoremlerini bilinen teoremleri genişleterek sunmuşlardır; $\psi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ yardımcı fonksiyonu artan bir fonksiyondur ve $\lim_{m \rightarrow \infty} \psi^m(r) = 0$, $\forall r > 0$ olur. Bu tür ψ dönüşümünü yardımcı fonksiyonların bir koleksiyonu olarak ele alınmıştır.

Teorem 5.1.1

(Y, S_b) 'nin $s \geq 1$ için bir tam S_b -metrik uzay ve $T : Y \rightarrow Y$ sürekli bir fonksiyon olsun, böylece $\psi \in \Psi$ için,

$$S_b(Tu, Tv, Tw) \leq \psi(S_b(u, v, w)), \forall u, v, w \in Y \quad (1)$$

olur. O zaman T 'nin Y 'de tek bir sabit noktası vardır.

Sedghi vd. (2016), Sedghi vd. (2012), dönüşümlerin uyumluluğunu kullanarak, S_b -metrik yapıdaki dönüşüm için ortak sabit nokta sonuçlarını sundular. Dönüşüm kavramı S_b -metrik uzayların sunulduğu şekilde benzer bir şekilde verilmiştir (Souayah vd. 2016).

Tanım 5.1.1

Bir (Y, S_b) S_b -metrik uzayında iki dönüşüm T_1, T_2 verilsin ve Y 'de herhangi bir $\{w_m\}$ dizisi için

$$\lim_{m \rightarrow \infty} T_1 w_m = \lim_{m \rightarrow \infty} T_2 w_m = w$$

ise $w \in Y$ için, buradan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_b(T_1 T_2 w_m, T_1 T_2 w_m, T_2, T_1, w_m) = 0$$

elde edilir (Sedghi vd. 2016).

Teorem 5.1.2

(Y, S_b) $s \geq 1$ için S_b -metrik uzay ve $T_1, T_2, T_3, T_4 : Y \rightarrow Y$ uyumlu çiftlere sahip dönüşümleri ile tam olsun.

$\{T_1, T_4\}, \{T_2, T_3\}$ ile $T_1(Y) \subseteq T_4(Y), T_2(Y) \subseteq T_3(Y)$, böylece

$$S_b(T_1 u, T_1 u, T_2 w) \leq \frac{\xi}{s^4} M(u, u, w), \forall u, w \in Y, 0 < \xi < 1, s \geq \frac{3}{2}, \quad (2)$$

bulunur, burada

$$M(u, u, w) = \sup S_b(T_3u, T_3u, T_4w), S_b(T_1u, T_1u, T_3u), S_b(T_2w, T_2u, T_4w), \\ \frac{1}{2} [S_b(T_3u, T_3u, T_2w) + S_b(T_1u, T_1u, T_4w)]$$

olarak kabul edilmiştir. O zaman T_1, T_2, T_3, T_4 dönüşümleri Y 'de tek bir ortak sabit noktaya sahiptir (Sedghi vd. 2016).

Örnek 5.1.1

$s = 4$ için S_b -metrik uzayı (Y, S_b) ele alınırsa, burada $Y = [0, 1]$ ve

$S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve $\forall u, v, w \in Y$ için,

$$S_b(u, v, w) = (|v + w - 2u| + |v - w|)2,$$

gibi alınırsa, o zaman her $w \in Y$ için dönüşümler T_1, T_2, T_3, T_4 aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$T_1w = \left(\frac{w}{4}\right)^8, T_2w = \left(\frac{w}{4}\right)^4, T_3w = \left(\frac{w}{4}\right)^4, T_4w = \left(\frac{w}{8}\right)^2$$

Teorem 5.1.2' de $\xi = \frac{25}{4^4} < 1$ için tek bir ortak sabit noktaya sahip olur (Sedghi vd. 2016).

Açıklama 2

- 1) Yukarıdaki teoremden verilen dönüşümler T_1, T_2 (sırasıyla T_3, T_4) özdeşlik dönüşümü olarak kabul edilirse, o zaman T_3, T_4 (sırasıyla T_1, T_2) tek bir ortak sabit noktaya sahiptir.
- 2) Teorem 5.1.2'deki T_3, T_4 özdeşlik dönüşümleri olarak kabul edilirse ve $T_1 = T_2 = T$ ise, o zaman T tek bir sabit noktaya sahiptir (Sedghi vd. 2016).

Açıklama 3

Açıklama 2'den, Teorem 5.1.2 'nin Teorem 5.1.1 'in açık bir genelleştirmesi olduğu görülür, çünkü Souayah vd. (2016) verdiği Teorem 5.1.1'deki dönüşümün süreklilik koşulu Sedghi vd. (2016)' de Teorem 5.1.2' de açık bırakılmıştır (Rohen vd. 2018).

S_b -metrik yapıda, Rohen vd. (2018), rasyonel terimlerin yedi sabit katının toplamını içeren rasyonel büzülmeler için birleştirilmiş özel nokta sonuçlarını tanıtmıştır.

Açıklama 4

(Rohen vd. 2017), yalnızca kalan iki koşulu (S_2) ve (S_3) içeren S_b -metrik uzayını yeniden tanımlamak için Tanım 2.1.3'ün (S_2) koşulunu yayınlamıştır. (S_2) koşulu yeni yeniden tanımlanmıştır. S_b -metrik uzayının koşullarına eklenirse, S_b -metrik uzay simetrik olur. Aşağıdaki örnek yukarıdaki açıklamayı daha anlaşılır hale getirmektedir.

Örnek 5.1.2

$s \geq 2$ için (Y, S_b) çiftini ele alalım, burada $Y = R$ ve

$S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ şu şekilde tanımlanır:

$$S_b(u, v, w) = \begin{cases} 0, & \text{eğer } u = v = w \\ 2, & \text{eğer } u = 0, w = 1 \\ 4, & \text{eğer } u = v = 1, w = 0 \\ 1, & \text{eğer diğer durumlar} \end{cases}$$

O zaman (Y, S_b) çifti $s \geq 2$ için simetrik olmayan bir S_b -metrik uzaydır (Rohen vd. 2018).

Tanım 5.1.2

(Rohen vd,2018) (Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T_1, T_2: Y \times Y \rightarrow Y$ için bir S_b -metrik uzay olsun,

$(u, w) \in Y \times Y$ noktası $T_1, T_2, T_1(u, w) = T_2(u, w)$ ve $T_1(w, u) = T_2(w, u)$ dönüşümleri verilsin. $T_1(u, w) = T_2(u, w) = u$ ve $T_1(w, u) = T_2(w, u) = w$ olması durumunda, (u, w) noktasına T_1 ve T_2 'nin ortak sabit noktası denir.

Teorem 5.1.2

(Y, S_b) , $s \geq 1$ ve $T_1, T_2: Y \times Y \rightarrow Y$ için simetrik tam bir

S_b -metrik uzay olsun, $\forall u, v, w, x \in Y$ için

$$S_b(T_1(u, v), T_1(u, v), T_2(w, x)) \leq M(u, v, w, x) \quad (3)$$

olur. Burada $\xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^7 \xi_i \xi_i < 1$ ve $s < \frac{1-\xi_2-\xi_3-\xi_6-\xi_7}{\xi_1+\xi_4+\xi_5}$ için,

$$\begin{aligned} M(u, v, w, x) = & \xi_1 \frac{S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x)}{2} + \xi_2 \frac{S_b(T_1(u, v), T_1(u, v), T_2(w, x)) S_b(u, u, w)}{1 + S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x)} \\ & + \xi_3 \frac{S_b(T_1(u, v), T_1(u, v), T_2(w, x)) S_b(v, v, x)}{1 + S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x)} \\ & + \xi_4 \frac{S_b(u, u, T_1(u, v)) S_b(u, u, w)}{1 + S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x)} + \xi_5 \frac{S_b(u, u, T_1(u, v)) S_b(u, u, w)}{1 + S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x)} \\ & + \xi_6 \frac{S_b(w, w, T_2(w, x)) S_b(u, u, w)}{1 + S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x)} + \xi_7 \frac{S_b(w, w, T_2(w, x)) S_b(v, v, x)}{1 + S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x)} \end{aligned}$$

olur. O zaman T_1, T_2, Y 'de tek bir $i = 1$ ortak sabit noktasına sahiptir (Rohen vd. 2018).

Açıklama 5

Eğer T_1, T_2 Teorem 5.1.2'deki gibi $T_1 = T_2 = T$ ise, o zaman T tek bir ortak sabit noktaya sahiptir. Aşağıda Teorem 5.1.2 'nin bir sonucu verilmiştir.

Sonuç 5.1.1 (Y, S_b) simetrik bir tam S_b -metrik uzayı olsun. $s \geq 1$ ve $T_1, T_2, : Y \times Y \rightarrow Y$ verilsin, her $u, v, w, x \in Y$ ve $\xi_i \geq 0, \sum_{i=1}^2 \xi_i < 1$ ve $s < \frac{1-\xi_2}{\xi_1}$ için,

$$\begin{aligned} & S_b(T_1(u, v), T_1(u, v), T_2(w, x)) \\ & \leq \xi_1 \frac{S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x)}{2} \\ & + \xi_2 \frac{S_b(u, u, T_1(u, v)) S_b(w, w, x)}{1 + s[S_b(u, u, w) + S_b(v, v, x) + S_b(u, u, T_2(u, v)) + S_b(w, w, T_1(w, x))]} \end{aligned}$$

olur. Burada ortak sabit nokta T_1, T_2 dönüşümü için tek bir noktadır (Rohen vd. 2018).

Açıklama 6

Eğer Sonuç 4.1.1'de $T_1 = T_2 = T$ ise, o zaman T dönüşümü tek bir ortak sabit noktaya sahiptir.

Örnek 5.1.3

$s = 2$ için S_b -metrik uzayı (Y, S_b) 'yi ele alınır, burada $Y = R$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ aşağıdaki şekilde $\forall u, v, w \in Y$ için tanımlansın:

$$S_b(u, v, w) = |u - w| + |v - w|.$$

O zaman T_1, T_2 dönüşümleri $\forall u, w \in R, \xi_1 = \frac{1}{3}, \xi_i = 0, i = 2, 3, 4, 5, 6, 7$ için şu şekilde tanımlansın: $(T_1(u, v), T_2(u, v)) = \frac{2u-w+11}{12}$. Böylece, Teorem 5.1.2'nin koşulları sağlanır ve tek bir ortak sabit noktaya sahiptir (Rohen vd. 2018).

Açıklama 7

$\xi_1 = \frac{1}{3}, \xi_2 = 0$ için Sonuç 4.1.1'i deki karşılığı görülmektedir (Sedghi vd. 2017). Artan sürekli fonksiyonlar yardımıyla bir çift dönüşüm için R -zayıf değişmeli koşulunu kullanarak $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sağlayan $\varphi(r) < r, r > 0$ için $\varphi(0) = 0$ olur, Sedghi ve ark. aşağıdaki ortak sabit nokta sonuçlarını önermiştir.

Tanım 5.1.3

Bir S_b -metrik uzayda (Y, S_b) ve $T_1, T_2, \forall w \in Y$ için,

$$S_b(T_1 T_2 w, T_1 T_2 w, T_2 T_1 w) \leq R S_b(T_1 u, T_1 u, T_2 w)$$

olsun. Eğer bazı $R \geq 0$ için bu koşul sağlanıyorsa R -zayıf değişmeli olarak adlandırılır.

$R = 1$ durumunda, basitçe T_1, T_2 dönüşümleri zayıf değişmeli dönüşümler olarak adlandırılır (Sedghi vd., 2017).

Örnek 5.1.4

$s \geq 1$ için S_b -metrik uzayı (Y, S_b) $Y = R$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ ile $\forall u, v, w \in Y$ için aşağıdaki şekilde verilsin:

$$S_b(u, v, w) = (|v + w - 2u| + |v - w|)^2.$$

$T_1 w = 2w - 1, T_2 w = w^2, \forall w \in R$ olarak tanımlanırsa T_1, T_2 dönüşümleri $R(=4)$ –zayıf değişmeli, ancak zayıf değişmeli değildir.

Teorem 5.1.3

(Y, S_b) için simetrik bir tam S_b -metrik uzay olsun. $s \geq 1$ ve

$T_1, T_2: Y \rightarrow Y$ olsun. $T_1(Y) \subseteq T_2(Y)$ ile R -zayıf değişmeli ve böylece $\forall u, w \in Y$ için,

$$S_b(T_1 u, T_1 u, T_1 w) \leq \frac{1}{4s^6} \varphi(S_b(T_2 u, T_2 u, T_2 w)), \quad (5)$$

elde edilir. Burada $\varphi \in \varphi$ alınmıştır. Ayrıca, T_1, T_2 dönüşümlerinden herhangi biri sürekliyse, o zaman T_1, T_2 'nin Y 'de tek bir ortak sabit noktası vardır. Şimdi aşağıda Teorem 5.1.3'ü sağlayan bir örnek verilmiştir (Sedghi, vd. 2017).

Örnek 5.1.5

$s = 4$ için S_b -metrik uzayı (Y, S_b) verilsin, burada $Y = R$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ aşağıdaki gibi tanımlanır (Sedghi vd, 2017) $\forall u, v, w \in Y$ için:

$$S_b(u, v, w) = (|v + w - 2u| + |v - w|)^2.$$

O zaman R -zayıf değişmeli dönüşüm T_1, T_2 için aşağıdaki gibi tanımlansın:

$\forall w \in \mathbb{R} \quad T_1 w = 1, \quad T_2 w = 2w - 1$ ve $\varphi(r) = \frac{3r}{4}$ için tek bir ortak sabit noktaya sahip olarak

Teorem 5.1.3 'ü sağlar.

Açıklama 8

Teorem 5.1.3 'te dönüşümde T_2 özdeşlik olarak kabul edilirse, T_1 dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir. Mlaiki vd. (2017), ψ -büzülmesini genelleştirmek için, (Souayah vd. 2017), Mlaiki vd. (2017) 'nin $\alpha - \psi$ büzülmesi sonuçlarını α -kabul edilebilirlik koşulunu kullanarak ifade etmişlerdir.

Tanım 5.1.4

Bir S_b -metrik uzayda (Y, S_b) , $T : Y \rightarrow Y$ bir dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşul sağlanıyor ise burada $\alpha : Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ olacak biçimde aşağıdaki gibi tanımlansın, o halde T α -kabul edilebilir olarak adlandırılmıştır (Mlaiki vd. 2017):

$$\alpha(u, v, w) \geq 1 \Rightarrow S_b(Tu, Tv, Tw) \geq 1.$$

Teorem 5.1.4

(Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T : Y \rightarrow Y$ için simetrik bir tam S_b -metrik uzay olsun ve α -kabul edilebilir sürekli bir fonksiyon olsun, böylece en az bir $w_0 \in Y$ için $\alpha(w_0, w_0, Tw_0) \geq 1$ oluyorsa ve bazı $\psi \in \Psi$, her $u, v, w \in Y$ için;

$$\alpha(u, v, w)S_b(Tu, Tv, Tw) \leq \psi(S_b(u, v, w))$$

sağlanıyor ise o zaman T 'nin Y 'de bir sabit noktası vardır (Mlaiki vd. 2017).

Açıklama 9

Teorem 5.1.4'teki dönüşümün süreklilik kısıtlamasını içerdiğine dikkat edilirse T dönüşümünde bu süreklilik kısıtlamasını kaldırmak için (Mlaiki vd. 2017), α -değişmeli koşulu olarak bilinen ardışık bir koşul ekleyerek aşağıdaki sonuç tanımlanmıştır.

Sonuç 5.1.2 (Y, S_b) $s \geq 1$ için simetrik bir tam S_b -metrik uzay olsun ve

$T : Y \rightarrow Y$ bir α -kabul edilebilir fonksiyon olsun, böylece $\exists w_0 \in Y$ için $\alpha(w_0, w_0, Tw_0) \geq 1$ ve bazı $\psi \in \Psi$, her $u, v, w \in Y$ için,

$$\alpha(u, v, w)S_b(Tu, Tv, Tw) \leq \psi(S_b(u, v, w)) \quad (7)$$

sağlansın. Y 'de $\{w_m\}$ herhangi bir yakınsak dizisi $w \in Y$ 'ye yakınsak olsun.

$\alpha(w_m, w_m, w_{m+1}) \geq 1 \Rightarrow \alpha(w_m, w_m, w) \geq 1$ koşulu her $m \in \mathbb{N}$ için sağlanıyor ise, T 'nin Y 'de bir sabit noktası vardır (Mlaiki vd. 2017).

Açıklama 10

Mlaiki ve diğerlerinin verdiği Teorem 5.1.4 ve Sonuç 5.1.2'de sabit noktanın tek olmayabileceğini görülür. Sabit noktanın tekliği için Teorem 5.1.4 koşullarına aşağıdaki koşul eklenir:

En az $v \in Y$ için $\alpha(u, u, v) \geq 1, \alpha(w, w, v) \geq 1$ koşulu her iki sabit nokta için sağlanır. Aşağıdaki örnek Teorem 5.1.4 ile Açıklama 10'u göstermektedir.

Örnek 5.1.6

$s \geq 1$ için S_b -metrik uzayı $Y = [0,3] \setminus (1,2)$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ ile (Y, S_b) ele alınmıştır, burada S_b şu şekilde tanımlanmıştır (Mlaiki vd. 2017):

$$S_b(u, v, w) = \begin{cases} |u - w| + |v - w|, & \text{eğer } u, v, w \in [0,1] \text{ ise} \\ \sup\{u, v, w\}, & \text{diğer durumlar.} \end{cases}$$

O zaman dönüşüm $T : Y \rightarrow Y$ aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır;

$$Tw = \begin{cases} \frac{1+w}{2}, & \text{eğer } 0 \leq w \leq 1, \\ \frac{3}{2}, & \text{eğer } w = 2, \\ \frac{2+w}{2}, & \text{eğer } 2 < w \leq 3. \end{cases}$$

Teorem 5.1.4'ü doğrulamıştır, çünkü $\psi(r) = \frac{1}{2}r$ ve

$$\alpha(u, v, w) = \begin{cases} e^{\sup\{u,v\}-w}, & \text{eğer } \sup\{u, v\} - w \geq 0 \\ 0, & \text{eğer } \sup\{u, v\} - w \leq 0 \end{cases}$$

için tek bir sabit noktaya sahip olur.

Saleem vd. dönüşüm çiftlerinin uyumluluğu kavramını ve Tanım 5.1.5'de tanımlanan (ψ, φ, F) üçlüsünün monotonluğunu birleştirerek Saleem vd. (2017), Souayah vd. (2016), ve Sedghi vd. (2012) verdiği sonuçları aşağıdaki gibi genelleştirmiştir.

Tanım 5.1.5

(ψ, φ, F) üçlüsü;

Her $u, w \in \mathbb{R}^+$ için $u \leq w \Rightarrow F(\psi(u), \varphi(u)) \leq F(\psi(w), \varphi(w))$ oluyor ise $F: [0, \infty)^2 \rightarrow (-\infty, \infty)$ monoton olur ve $F(r_1, r_2) \leq r_1$ ve $F(r_1, r_2) = r_1 \Rightarrow$ ya $r_1 = 0$ ya da $r_2 = 0$ sağlarken; $\psi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ artan-süreklidir ve $\psi(r) = 0 \Leftrightarrow r = 0$ koşullarını sağlar; $\varphi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ süreklidir ve $\forall r > 0, \varphi(r) > 0$ ve $\varphi(0) \geq 0$ olur (Saleem vd. 2017).

Örnek 5.1.7

$\psi(r) = \sqrt{r}, 0 \leq r \leq 1, \psi(r) = r^2, r > 1; \varphi(r) = \sqrt{r}; F(r_1, r_2) = r_1 - r_2$ olsun. O zaman (ψ, φ, F) üçlüsü monotondur (Saleem vd. 2017).

Örnek 5.1.8

$\psi(r) = \sqrt{r}, 0 \leq r \leq 1, \psi(r) = r^2, r > 1; \varphi(r) = r^2; F(r_1, r_2) = r_1 - r_2$ olsun. O zaman (ψ, φ, F) üçlüsü monotondur (Saleem vd., 2017).

Theorem 5.1.4

(Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T_1, T_2, T_3, T_4 : Y \rightarrow Y$ için simetrik bir tam S_b -metrik uzay olsun: $\{T_1, T_3\}, \{T_2, T_4\}$ ile $T_1(Y) \subseteq T_3(Y), T_2(Y) \subseteq T_3(Y)$ uyumlu çiftlere sahip dönüşümler olsun, böylece her $u, w \in Y$ için,

$$\psi(s^4 S_b(T_1 u, T_1 u, T_2 w)) \leq F[\psi(M(u, w)), \varphi(M(u, w))] \quad (8)$$

olur. Burada;

$$M(u, w) = \sup \left\{ \begin{array}{l} S_b(T_3 u, T_3 u, T_4 w), S_b(T_1 u, T_1 u, T_3 u), S_b(T_2 w, T_2 w, T_4 w), \\ \frac{1}{2} [S_b(T_3 u, T_3 u, T_2 w) + S_b(T_1 u, T_1 u, T_4 w)] \end{array} \right\}$$

ve Tanım 5.1.5'de tanımlanan (ψ, φ, F) üçlüsü monotondur. Eğer $s > \frac{\sqrt{3}+1}{2}$ ve T_3, T_4 süreklirse o zaman T_1, T_2, T_3, T_4 dönüşümleri Y 'de tek bir ortak sabit noktaya sahiptir (Saleem vd. 2017).

Örnek 5.1.9.

$s = 2$ için S_b -metrik uzayı (Y, S_b) ele alınmıştır, burada $Y = [0,1]$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ şu şekilde tanımlanmıştır (Saleem vd. 2017):

$$S_b(u, v, w) = (|v + w - 2u| + |v - w|)^2, \forall u, v, w \in Y.$$

Bu durumda, T_1, T_2, T_3, T_4 dönüşümleri aşağıdaki gibi $w \in Y$ için verildiğinde: $T_1 w = \left(\frac{w}{3}\right)^4$, $T_2 w = \left(\frac{w}{9}\right)^2$, $T_3 w = \left(\frac{w}{3}\right)^2$, $T_4 w = \frac{w}{3}$ Teorem 5.1.4 için sağlanır. Burada $\psi(r) = r$, $\varphi(r) = \frac{729}{160 \times \sqrt{10}} - 1$, $F(r_1, r_2) = r_1 \cdot r_2 + 1$ alınmıştır, dolayısıyla verilen dönüşümler tek bir ortak sabit noktaya sahiptir.

Açıklama 11

- (1) T_1, T_2 (sırasıyla T_3, T_4) Teorem 5.1.4'deki özdeşlik dönüşümleri olarak kabul edilirse, o zaman T_3, T_4 (sırasıyla T_1, T_2) tek bir ortak sabit noktaya sahiptir.
- (2) T_3, T_4 Teorem 5.1.4'deki özdeşlik dönüşümleri olarak kabul edilirse ve $T_1 = T_2 = T$ ise, o zaman T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahiptir. b -metrik yapıdaki dönüşümlerin S_b -metrik yapıda kabul edilebilirliği ile ilgili olarak α -Meir-Keeler büzülmesi sonuçları da çalışılmıştır (Saleem vd. 2017, Thounaojam vd. 2021).

Tanım 5.1.6

Bir S_b -metrik uzayda (Y, S_b) $T : Y \rightarrow Y$ dönüşümü, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ için

$$\varepsilon \leq M(u, v, w) < \varepsilon + \delta \Rightarrow \alpha(u, v, w) S_b(Tu, Tv, Tw) < \frac{\varepsilon}{s}$$

oluyorsa AI tipinde α -Meir-Keeler büzülmesi olarak adlandırılmıştır (Thounaojam vd. 2021).

Burada $\alpha : Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ ve

$$M(u, v, w) = \sup\{S_b(u, v, w), S_b(u, u, Tu), S_b(v, v, Tv), S_b(w, w, Tw)\}$$

olarak alınmıştır.

- AI tipindeyse α -Meir-Keeler büzülmesi $u = v$ ise, AII tipinde α -Meir-Keeler büzülmesi denir.

- Eğer AI tipinde α -Meir-Keeler büzülmesinde,

$$M(u, v, w) = \sup\{S_b(u, v, w), S_b(u, u, Tu)S_b(v, v, Tv), S_b(w, w, Tw), \frac{1}{4} [S_b(u, u, Tv) + S_b(v, v, Tw) + S_b(w, w, Tu)]\}$$

ise, BI tipinde α -Meir-Keeler büzülmesi denir.

- Eğer BI tipinde α -Meir-Keeler dönüşümünde $u = v$ ise, dönüşüme BII tipinde α -Meir-Keeler dönüşümü denir.

Teorem 5.1.5

(Y, S_b) uzayının simetrik bir tam S_b -metrik uzay olduğunu varsayalım.

$s \geq 1$ ve $T : Y \rightarrow Y$ AI tipinde bir α -Meir-Keeler sürekli büzülmesi olsun. O zaman T 'nin Y 'de bir sabit noktası vardır (Thounaojam vd. 2021).

Açıklama 12

(1) Teorem 4.1.5'de sabit noktanın tekliği belirtilmemiştir. Teorem 4.1.5'in koşullarına ek olarak, aşağıdaki eklenirse (Thounaojam vd. 2021):

$\exists v \in Y$ için $\alpha(u, u, v) \geq 1, \alpha(w, w, v) \geq 1$ koşulu herhangi iki sabit nokta $u, w \in Y$ için vardır. O zaman T 'nin sabit noktası tek olur.

(2) Süreklilik koşulunu serbest bırakmak için Teorem 4.1.5'deki T 'ye, Sonuç 5.1.2'de tanımlanan α -değişmeli koşulunu eklenebilir.

Açıklama 13

Teorem 4.1.5 ve Açıklama 11, AII, BI ve BII tiplerinin diğer tüm α -Meir Keeler büzölmeleri için doğrudur (Thounaojam vd. 2021).

Örnek 5.1.10

$s = 2$ için S_b -metrik uzayı (Y, S_b) 'yi ele alınsın, burada $Y = [0, \infty)$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ $S_b(u, v, w) = |v + w - 2u|$ olarak tanımlanabilir. Daha sonra dönüşüm $T: Y \rightarrow Y$ aşağıdaki gibi verilirse (Thounaojam vd. 2021),

$$Tw = \begin{cases} \frac{w^2}{8}, & \text{eğer } 0 \leq w \leq 1 \\ \frac{1}{8} + \log((w)), & \text{eğer } w \in (1, \infty) \end{cases}$$

Teorem 5.1.5'yi sağlar, çünkü

$$(u, v, w) = \begin{cases} 1, & \text{eğer } u, v, w \in [0, 1] \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

tek bir sabit noktaya sahip olur. Aytimur ve diğerleri (Aytimur 2022), S_b -metrik yapıdaki sabit şekilli (çember, elips, hiperbol, Cassini eğrisi, Apollonius çemberi) problemleri analiz etmek için Jleli Samet tipi büzülmeleri ilgili geometrik yorumla vermiştir.

Tamm 5.1.7

$s \geq 1$ için bir S_b -metrik uzayında (Y, S_b) , $w_0, w_1, w_2 \in Y$ olsun, yarıçapı ρ olan ve w_0 merkezli bir daire şu şekilde verilir:

$$C_{w_0\rho}^{S_b} = \{w \in Y : S_b(w, w, w_0) = \rho\};$$

yarıçapı ρ olan ve w_0 merkezli bir disk şu şekilde verilir:

$$D_{w_0\rho}^{S_b} = \{w \in Y : S_b(w, w, w_0) \leq \rho\};$$

elips aşağıdaki şekilde verilir:

$$E_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2) = \{w \in Y : S_b(w, w, w_1) + S_b(w, w, w_2) = \rho\};$$

hiperbol aşağıdaki şekilde verilir:

$$H_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2) = \{w \in Y : |S_b(w, w, w_1) - S_b(w, w, w_2)| = \rho\};$$

Cassini eğrisi aşağıdaki şekilde verilir:

$$C_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2) = \{w \in Y : S_b(w, w, w_1)S_b(w, w, w_2) = \rho\};$$

Apollonius çemberi aşağıdaki şekilde verilir:

$$A_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2) = \{w \in Y \setminus \{w_2\} : \frac{S_b(w, w, w_1)}{S_b(w, w, w_2)} = \rho\}$$

eğer $Tw = w, \forall w \in Fig$ kosulu $T: Y \rightarrow Y$ için sağlamıyorsa bu şekle Fig sabit şekli denir (Aytimur vd. 2022).

Örnek 5.1.11

Bir $s = 1$ (Y, S_b) S_b -metrik uzayında, $Y = \mathbb{R}$ ve $S_b: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ her $u, v, w \in Y$ için aşağıdaki şekilde verilsin (Aytimur vd. 2022):

$$S_b(u, v, w) = (|u - v| + |v - w| + |w - u|)^3,$$

$w_0 = (1, 1, 1) = w_1, w_2 = (-1, -1, -1), \rho = 40$ olsun. O zaman;

$$C_{w_0, \rho}^{S_b} = \{(u, v, w) \in Y: |u - 1|^3 + |v - 1|^3 + |w - 1|^3 = 5\}$$

$$D_{w_0, \rho}^{S_b} = \{(u, v, w) \in Y: |u - 1|^3 + |v - 1|^3 + |w - 1|^3 \leq 5\}$$

$$E_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2) = \{(u, v, w) \in Y: (|u - 1| + |u + 1|)^2 + (|v - 1| + |v + 1|)^2 + (|w - 1| + |w + 1|)^2 \leq 50\}$$

$$H_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2) = \{(u, v, w) \in Y: ||u - 1| - |u + 1||^3 + ||v - 1| - |v + 1||^3 + ||w - 1| - |w + 1||^3 \leq 5\}$$

$$C_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2) = \{(u, v, w) \in Y: (|u - 1||u + 1|)^3 + (|v - 1||v + 1|)^3 + (|w - 1||w + 1|)^3 \leq 5\}$$

$$A_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2) = \{(u, v, w) \in Y: \left(\frac{|u - 1|}{|u + 1|}\right)^3 + \left(\frac{|v - 1|}{|v + 1|}\right)^3 + \left(\frac{|w - 1|}{|w + 1|}\right)^3 \leq 5\}$$

Teorem 5.1.6

(Y, S_b) $s \geq 1$ ve $T: Y \rightarrow Y$ bir fonksiyon olmak üzere simetrik bir tam S_b -metrik uzay olsun, böylece $w_0, w_1, w_2 \in Y$ için (Aytimur vd. 2022);

$$S_b(w, w, w_0) > 0 \Rightarrow \varphi(S_b(w, w, Tw)) \leq [\varphi(M(w, w_0, w_1, w_2))]^{\xi} \quad (9)$$

olsun, burada $0 < \xi < 1, \rho = \min\{S_b(w, w, Tw): w \neq Tw, w \in Y\}, \varphi: (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$ artmaktadır ve

- $M(w, w_0, w_1, w_2) = S_b(w, w, w_0), \forall w \in Y$ için olduğunda (9) eşitsizliğine Jleli Samet tipi denir. $D_{w_0} - S_b$ -büzülmesi $T, D_{w_0, \rho}^{S_b}$ diskini sabitler.
- $M(w, w_0, w_1, w_2) = S_b(w, w, w_1) + S_b(w, w, w_2), \forall w \in Y \setminus \{w_1, w_2\}$ ve $Tw_1 = w_1, Tw_2 = w_2$ olduğunda, (9) eşitsizliğine Jleli-Samet tipi denir. $E_{w_1, w_2} - S_b$ büzülmesi $T, E_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2)$ elipsi sabitler.
- $M(w, w_0, w_1, w_2) = |S_b(w, w, w_1) - S_b(w, w, w_2)|, \forall w \in Y \setminus \{w_1, w_2\} \rho > 0$ ve $Tw_1 = w_1, Tw_2 = w_2$ için olduğunda, (9) eşitsizliğine Jleli-Samet tipi denir. $H_{w_1, w_2} - S_b$ -büzülmesi $T, H_{\rho}^{S_b}(w_1, w_2)$ hiperbolü sabitler.

• $M(w, w_0, w_1, w_2) = S_b(w, w, w_1) S_b(w, w, w_2), \forall w \in Y \setminus \{w_1, w_2\}$ ve $Tw_1 = w_1, Tw_2 = w_2$ olduğunda, (9) eşitsizliğine Jleli-Samet tipi denir. $H_{w_1, w_2} - S_b$ -büzülmesi $T, C_\rho^{S_b}(w_1, w_2)$ Cassini eğrisini sabitler.

• $M(w, w_0, w_1, w_2) = \frac{S_b(w, w, w_1)}{S_b(w, w, w_2)}$ olduğunda, $\forall w \in Y \setminus \{w_1, w_2\}$ ve $Tw_1 = w_1, Tw_2 = w_2$ (9) eşitsizliğine Jleli-Samet tipi $A_{w_1, w_2} - S_b$ -büzülmesi denir. T Apollonius çemberi $A_\rho^{S_b}(w_1, w_2)$ 'yi sabitler.

Aşağıdaki örnek sabit rakamlara sahip olduğu için Teorem 5.1.6'yı sağlar. İki S_b -metrik uzay bağlamında (Thounaojam vd. 2022) teoriyi genişletmek için bağlı tesadüf noktası ve bağlı sabit nokta sonuçlarını araştırmıştır.

Tanım 5.1.7

Bir S_b -metrik uzayda (Y, S_b) , iki dönüşüm $T_1 : Y \times Y \rightarrow Y, T_2 : Y \rightarrow Y$ aşağıdaki gibi $\forall u, w \in Y$ verildiyse w -uyumlu olarak adlandırılır (Indubala vd. 2022):

$$T_1(u, w) = T_2u, T_1(w, u) = T_2w \Rightarrow T_2T_1(u, w) = T_1(T_2u, T_2w).$$

Teorem 5.1.8

$(Y_1, S_{b_1}), (Y_2, S_{b_2})$ $s \geq 1$ için iki simetrik S_b -metrik uzay ve evrensel bir küme Y olsun; burada her $u, w \in Y$ için $S_{b_2}(u, u, w) \leq S_{b_1}(u, u, w)$ ve $T_1 : Y \times Y \rightarrow Y, T_2 : Y \rightarrow Y, T_1(Y \times Y) \subseteq T_2(Y)$ ile w uyumluluğuna sahip iki dönüşüm ise, $\forall u, v, w, x \in Y$ (Indubala vd. 2022):

$$S_{b_1}(T_1(u, w), T_1(u, w), T_1(v, x)) + S_{b_2}(T_1(u, w), T_1(u, w), T_1(v, x)) \leq M(u, v, w, x), \quad (10)$$

Burada

$$\begin{aligned} M(u, v, w, x) = & \xi_1[S_{b_2}(T_2u, T_2u, T_2v) + S_{b_2}(T_2w, T_2w, T_2x)] \\ & + \xi_2[S_{b_2}(T_2u, T_2u, T_1(u, w)) + S_{b_2}(T_2w, T_2w, T_1(w, u))] \\ & + \xi_3[S_{b_2}(T_2u, T_2u, T_1(v, x)) + S_{b_2}(T_2u, T_2u, T_1(x, v))] \end{aligned}$$

ve $\xi \in [0, 1], 0 \leq \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \leq \frac{1}{s^2}$ 'dir. Eğer $T_2(Y)$ ise S_{b_1} -tek ise, o zaman dönüşümler T_1, T_2 Y 'de tek bir ortak bağlı sabit noktaya sahiptir.

Açıklama 14

(1) Teorem 5.1.8'den w -uyumluluk koşulunu kaldırılırsa, o zaman tek bir ortak bağlı sabit nokta yerine, T_1, T_2 Y 'de bağlı bir çakışma noktasına sahip olur.

(2) İki simetrik S_b -metrik uzay almak yerine, tek bir simetrik tam S_b -metrik uzay alınır, o zaman sonuçlar farklı çıkarılabilir.

(3) T_2 dönüşümü özdeşlik olarak kabul edilirse, o zaman karşılık gelen bağlı sabit nokta sonuçları elde edilir.

Teorem 5.1.8 kullanılarak çıkarılan bir örnek verilmiştir.

Örnek 5.1.12

(Indubala vd. 2022) $s = 1$ için iki S_b -metrik uzayı $(Y_1, S_{b_1}), (Y_2, S_2)$ ve burada $Y = Y_1 = Y_2 = R$ verilsin, $S_{b_1} S_{b_2}: Y \times Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}^+$ şu şekilde tanımlansın:

$$S_{b_1}(u, v, w) = (u + v - 2w)^2 \forall u, v, w \in Y_1.$$

$$S_{b_2}(u, v, w) = \left(\frac{u + v - 2w}{2} \right)^2, \forall u, v, w \in Y_2.$$

T_1, T_2 her $u, w \in Y$ için $T_1(u, w) = \frac{u-w}{3}, T_2 w = 2w$, Teorem 5.1.8'i $\xi_1 = \frac{1}{9}, \xi_i = 0, i = 2, 3$ karşılar ve tek bir bağlı sabit noktaya sahiptir.

Ortak bağlı sabit nokta sonuçlarını temsil eden karşılık gelen integral denklemi kullanılarak başlangıç değer problemini çözen Rao ve arkadaşları tarafından yapılan başka bir genelleme daha vardır. Son zamanlarda, Taş ve arkadaşları, S_b -metrik uzayı bağlamında ortak sabit nokta sonuçlarını kanıtlayarak bazı geometrik özellikleri araştırmıştır. Teoriyi genelleştirmenin yanı sıra, parametrik düzeltilmiş doğrusal birim aktivasyon fonksiyonlarının da bazı şekillerde kullanıldığını öne sürdüler. Sonuç olarak, araştırmacılar S_b -metrik uzayı farklı şekillerde araştırdılar ve teoriyi birçok yönde genelleştirdiler.

Sadece bir dönüşüm içeren büzölmeler için sabit nokta sonucuyla başlayarak, örnekler ve dikkat çekici yorumlarla, w -uyumlu koşulları sağlayan dört dönüşüme kadar içeren büzölmeler için tesadüfi sabit nokta sonuçlarını, S_b -metrik yapı bağlamında ortak sabit nokta sonuçları tartışılmaktadır.

Ayrıca S_b -metrik uzaylarda daire, elips, hiperbol, Cassini eğrisi, Apollonius çemberi vb. gibi şekillerin geometrik özelliklerini yorumlayan bazı sabit şekil sonuçları da toplanmıştır. Bu sonuçları göstermekle, araştırmacılar, uygulamalar için engin potansiyeli olan bu ilgi çekici alanı keşfetmeye ve bunun için hala bir fırsat olduğuna teşvik edilmektedir.

KAYNAKÇA

- Aytimur, H., & Tas, N. (2022). A geometric interpretation to fixed-point theory on Sb-metric spaces. *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 10(2), 95-104.
- Bakhtin, I. (1989). The contraction mapping principle in quasimetric spaces. *Functional analysis*, 30, 26-37.
- Banach, S. (1922). Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales. *Fundamenta mathematicae*, 3(1), 133-181.
- Hieu, N. T., Thanh Ly, N. T., & Dung, N. V. (2014). A generalization of Ciric quasi-contractions for maps on S-metric spaces. *Thai Journal of Mathematics*, 13(2), 369-380.
- Indubala, T., Yumnam, R., Khan, M.S., Fabiano, N.(2022): Common coupled fixed point theorems for apairof Sb-metric spaces. *Journal of Siberian Federal University- Mathematics and Physics* 15(6), 1–14
- Jleli, M., & Samet, B. (2014). A new generalization of the Banach contraction principle. *Journal of inequalities and applications*, 2014(1), 38. <https://doi.org/10.1186/1029-242X-2014-38>
- Mlaiki, N., Mukheimer, A., Rohen, Y., Souayah, N., Abdeljawad, T.(2017): Fixed point theorems for α - ψ -contractive mapping in Sb-metric spaces. *Journal of Mathematical Analysis* 8(5)
- Özgür N.Y, & Taş, N. (2016). S-metrik uzaylarda sabit nokta teoremlerinin bazı genelleştirmeleri. içinde *Vladimir Arnold'a Armağan Matematik ve Uygulamaları Üzerine Denemeler* (ss. 317-342). New York: Springer,
- Özgür, N. (2019). Fixed-disc results via simulation functions. *Turkish Journal of Mathematics*, 43(6), 2794-2805.
- Özgür, N. Y., & Taş, N. (2017). Some new contractive mappings on S-metric spaces and their relationships with the mapping (S25). *Mathematical Sciences*, 11(1), 7-16.
- Özgür, N. Y., & Taş, N. (2018). Generalizations of metric spaces: from the fixed-point theory to the fixed-circle theory. In *Applications of Nonlinear Analysis* (pp. 847-895). Cham: Springer International Publishing.
- Özgür, N. Y., & Taş, N. (2018, January). Some fixed-circle theorems and discontinuity at fixed circle. In *AIP conference proceedings* (Vol. 1926, No. 1, p. 020048). AIP Publishing LLC.
- Özgür, N. Y., & Taş, N. (2019). Some fixed-circle theorems on metric spaces. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, 42(4), 1433-1449.

- Özgür, N., & Taş, N. (2023). Geometric properties of fixed points and simulation functions. *Advanced Studies: Euro-Tbilisi Mathematical Journal*, 16(4), 91-108.
- Özgür, N.Y., & Taş, N. (2017). Some fixed point theorems on SSS-metric spaces. *Matematički Vesnik*, 69, 39-52.
- Rohen, Y., Došenović, T., Radenović, S. (2017): A note on the paper “a fixed point theorems in S_b -metric spaces”. *Filomat* 31(11), 3335–3346.
- Saleem, N., Ansari, A., Pavlović, M., Radenović, S. (2017): Some new results in the framework of S_b -metric spaces. Scientific Publications of the State University of Novi Pazar Series A: *Applied Mathematics, Informatics and Mechanics* 9(2), 151–165.
- Sedghi, S., & Van Dung, N. (2014). Fixed point theorems on S-metric spaces. *Matematički vesnik*, (255), 113-124.
- Sedghi, S., Gholidahneh, A., Došenović, T., Esfahani, J., & Radenović, S. (2016). Common fixed point of four maps in S_b -metric spaces. *J. Linear Topol. Algebra*, 5(2), 93-104.
- Sedghi, S., Shobe, N., & Aliouche, A. (2012). A generalization of fixed point theorems in S-metric spaces. *Matematički vesnik*, 64(249), 258-266.
- Sedghi, S., Gholidahneh, A., Rao, K. (2017): Common fixed point of two R-weakly commuting mappings in S_b -metric spaces. *Math. Sci. Lett* 6(3), 249–253
- Souayah, N., Mlaiki, N. (2016): A fixed point theorem in S_b -metric spaces. *J. Math. Computer Sci* 16(315), 131–139.
- Taş, N. (2021, May). A contribution to the fixed-disc results on S-metric spaces. In *7th Ifs And Contemporary Mathematics Conference* (pp. 172-176).
- Taş, N. (2020). Bilateral-type solutions to the fixed-circle problem with rectified linear units application. *Turkish Journal of Mathematics*, 44(4), 1330-1344.
- Taş, N. (2022). New fixed-disc results via bilateral type contractions on S-metric spaces. *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 24(1), 408-416.
- Taş, N., & Özgür, N. (2021). New generalized fixed point results on S_b -metric spaces. *Konuralp Journal of Mathematics*, 9(1), 24-32.
- Thounaojam, S., Rohen, Y., Saleem, N., Devi, M.B., Singh, K.A. (2021) Fixed points of generalized α -Meir-Keeler contraction mappings in S_b -metric spaces. *Journal of Function Spaces*