



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLARDA
KAPANIŞ OPERATÖRLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Kübra KAYA

**DANIŞMAN
Prof. Dr. Ayhan ERCİYES**

AKSARAY, 2025

Aksaray Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 212342436 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi Kübra KAYA tarafından hazırlanan **SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLARDA KAPANIŞ OPERATÖRLERİ** adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

Aksaray Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Prof. Dr. Halis BİLGİL

Üniversite Adı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Üye: Doç. Dr. Tunçar ŞAHAN

Üniversite Adı

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum.

.....

Tez Savunma Tarihi: 23/01/2025

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

.....

Prof. Dr. Fazliye KARABÖRK

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, akademik kurallara ve bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu, çalışmamda kullandığım verilerin orijinallliğini ve her türlü intihalden uzak olduğunu beyan ederim.

Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.

Kübra KAYA

TEŞEKKÜR

"Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylarda Kapanış Operatörleri" başlıklı tez çalışmamın seçiminde, hazırlanmasında, sonuçlandırılmasında ve sonuçların değerlendirilmesinde kıymetli zamanını ayırarak bana yol gösteren, yüksek lisans öğrenciliğim boyunca sunduğu bilimsel katkılarla, yapıcı eleştirileriyle çok yönlü bakış açısı kazanmamı sağlayan değerli hocam Prof. Dr. Ayhan ERCİYES'e yürekten teşekkür ederim.

Hayatımın her evresinde göstermiş oldukları sevgi, anlayış ve sundukları maddi manevi her türlü destek için ve kız çocuklarının okumasını her şeyden çok destekleyen canım annem Şadıman KAMALI ve canım babam Zamit KAMALI'ya,

Yüksek lisans sürecim boyunca beni yüreklendiren, yaşadığım her zorlukta yanımda olan, desteğini hissettiren eşim Uğur KAYA'ya,

Tez çalışmam için beni yüreklendiren, bana inancını her zaman diri tutan, sunduğu her türlü desteği için canım ablam Doç. Dr. Tuğba Kamalı ARSLANTAŞ'a,

Hayal güçleriyle, öğrenme hevesleriyle, bitmek bilmeyen sorularıyla ve uçsuz bucaksız meraklarıyla bana ilham olan canım yeğenim Umay'a ve tüm bunlara ek olarak kocaman yüreğiyle bu süreçte beni en çok destekleyen, benimle geçireceği zamandan feragat ederek bana desteklerin en büyüğünü veren canım kızım, umudum, geleceğim Öykü'ne yürekten teşekkür ederim.

Kübra KAYA
AKSARAY, 2025

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR	i
İÇİNDEKİLER	ii
ÖZET.....	iii
ABSTRACT	iv
SİMGELER VE KISALTMALAR	v
1. GİRİŞ	1
2. KATEGORİK KAVRAMLAR.....	4
2.1 Kategori Ve Fanktor	4
2.2 Topolojik Kategori	6
2.3 Özel Objeler	6
2.4 Eksen Dönüşümleri	7
3. SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR KATEGORİSİ	11
3.1 Süzgeçler	11
3.2 ConFCO Kategorisi.....	13
4. KAPALI ALT OBJELER	16
4.1 Topolojik Uzaylarda Kuvvetli Kapalılık	16
4.2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylarda Kuvvetli Kapalılık.....	18
4.3 Bilinen Bazı Topolojik Kategorilerdeki Kapalı Objeler	23
5. KAPANIŞ OPERATÖRLERİ	25
5.1 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kapanış Operatörleri.....	25
5.2 Kapanış Operatörleri İle Elde Edilen Dolu Alt Kategoriler	29
5.3 Bilinen Bazı Topolojik Kategorilerdeki Kapanış Operatörleri	38
6. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	40
KAYNAKLAR	42
ÖZGEÇMİŞ.....	45

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLARDA KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

Kübra KAYA

Aksaray Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ayhan ERCİYES

ÖZET

Topolojik kategoriler geometri, analiz ve cebirsel topoloji dâhil olmak üzere matematiğin çeşitli alanlarında kullanılır. Örneğin bir topolojik uzayın alt kümesi de bir topoloji ile donatılmıştır. Bundan başka iki topolojik uzayın çarpımı da bir topolojik uzaydır veya bir küme üzerinde en kaba topoloji olan indiske topoloji her zaman mevcuttur. Topolojik kategoriler, topolojik uzayların bu ve diğer birçok özelliğini sistematik olarak incelemek ve karakterize etmek için uygun bir çatı sağlar.

Bu tez çalışmasında, objeleri sabit yakınsak süzgeç uzaylar, morfizmleri bu uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlardan oluşan **ConFCO** kategorisi incelenmiştir. **ConFCO** da eksen dönüşümleri ile bir kümenin kapalılığı, kuvvetli kapalılığı araştırılmıştır. Sonrasında ise kapalı (kuvvetli kapalı) kümelerin sonlu ve keyfi kesişimler, birleşimler altında kapalı (kuvvetli kapalı) olup olmadığı gösterilmiştir. Ardından **ConFCO** da bazı kapanış operatörleri (cl, scl, Q, sQ) karakterize edilmiştir. Bu kapanış operatörlerinin idempotent, (zayıf) kalıtsal, çarpımsal ve toplamsal olma durumları incelenmiştir. Ayrıca kapanış operatörleri ile oluşturulan $i = 0, 1, 2$ için **ConFCO** _{i} alt kategorileri araştırılmış, birbirleri arasındaki ilişkiler gösterilmiştir. Dolayısıyla kapanış operatörleri kullanılarak $i = 0, 1$ için T_i sabit yakınsak süzgeç uzayların her biri karakterize edilmiştir. Sonrasında ise **ConFCO** _{i} kategorilerinin **ConFCO** nun epirefleksif alt kategorileri olduğu belirlenmiştir. Son olarak ise bilinen bazı topolojik kategorilerdeki sonuçlar ile bu tez çalışmasında elde edilen kapanış operatörleri kıyaslanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar, Kapalı Obje, Kapanış Operatörü, Topolojik Kategori

Ocak, 2025; 45 sayfa

M. Sc. THESIS

CLOSURE OPERATORS IN CONSTANT FILTER CONVERGENCE
SPACES

Kübra KAYA

Aksaray University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Ayhan ERÇİYES

ABSTRACT

Topological categories are used in various areas of mathematics, including geometry, analysis, and algebraic topology. For example, a subset of a topological space is also equipped with a topology. Moreover, the product of two topological spaces is a topological space or the most coarse topology on a set, the indiscrete topology, always exists. Topological categories provide a framework for studying and characterizing these and many other properties of topological spaces systematically.

In this thesis, the **ConFCO** category, whose objects are constant filter convergence spaces and morphisms are continuous functions between these spaces, is examined. In **ConFCO**, the axis maps and the closure and strong closure of a set are investigated. Subsequently, it is shown whether closed (strongly closed) sets are closed (strongly closed) under finite and arbitrary intersections and unions. Afterwards, some closure operators (cl, scl, Q, sQ) in the **ConFCO** category are characterized. The idempotent, (weak) hereditary, multiplicative, and additive states of these closure operators are examined. Additionally, the **ConFCO**_{ic} subcategories for $i = 0, 1, 2$ formed by closure operators are investigated and the relationships between them are shown. Hence, by using closure operators, each of the T_i constant filter convergence spaces for $i = 0, 1$ has been characterized. Subsequently, it is determined that the **ConFCO**_{ic} categories are the epireflective subcategories of **ConFCO**. Finally, the results obtained in this thesis study are compared with the results in some known topological categories.

Keywords: Constant Filter Convergence Spaces, Close Object, Closure Operators, Topological Category

January, 2025;45 pages

SİMGELER VE KISALTMALAR

Born	Bornolojik Uzaylar Kategorisi
$cl(N)$	N nin Kapanışı
ConFCO	Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
ConLim	Sabit Limit Uzaylar Kategorisi
CP	Çiftler Uzayları Kategorisi
FCO	Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi
$F(X)$	X deki Tüm Süzgeçlerin Kümesi
Grill	Grill Uzaylar Kategorisi
Grp	Gruplar Kategorisi
Met	Metrik Uzaylar Kategorisi
Mor($\mathcal{A}$)	$\mathcal{A}$ nın Morfizmleri Kümesi
N_a	a nın Komşulukları Sınıfı
Ob($\mathcal{A}$)	$\mathcal{A}$ nın Objeleri Kümesi
psqMet	Pseudo-semi-quasi Metrik Uzaylar Kategorisi
$P(X)$	X in Kuvvet Kümesi
$Q(N)$	N nin Quasi Kapanışı
Rel	Bağıntı Uzaylar Kategorisi
RRel	Yansıma Bağıntılı Uzaylar Kategorisi
$scl(N)$	N nin Kuvvetli Kapanışı
Set	Kümeler Kategorisi
$sQ(N)$	N nin Kuvvetli Quasi Kapanışı
Top	Topolojik Uzaylar Kategorisi
TopGrp	Topolojik Grupların Kategorisi
Vect	Vektör Uzaylar Kategorisi
τ	Topoloji

1. GİRİŞ

Kategori Teorisi, 1945 yılında Eilenberg ve MacLane (1945) tarafından geliştirildi. Onların çalışmasının amacı, cebirsel topolojideki belirli problemlere bir çözüm sunmaktı. Çalışmalarının temelinde farklı topolojik ve cebirsel yapıların Homotopi Teorisinde nasıl ilişkili olduklarını anlamak yatıyordu. Kategori Teorisi, bilgisayar biliminde, özellikle teorik bilgisayar bilimlerinde ve programlama dillerinin doğru bir şekilde aktarılmasında büyük bir etki yaratmaya başladı. Örneğin, Kategori Teorisi Hindley-Milner (HM) tipi sistemleri ve monadlar üzerine yapılan çalışmalar, Haskell gibi fonksiyonel programlama dillerinde kullanılmaktadır. Kategori Teorisi, gruplar, halkalar, topolojik uzaylar ve daha birçok matematiksel yapıyı bir çatı altında incelemeye olanak tanır.

Topolojik uzaylar ve sürekli dönüşümleri ile elde edilen **Top** kategorisi topolojiktir. Topolojik kategorileri diğer kategorilerden ayıran temel nedenlerden birisi **Top** da yapılan işlemlere benzer işlemlere olanak sağlamasıdır. Örneğin **Top** da her alt küme, çarpım, bölüm vs. kümeleri üzerinde bir topoloji tanımlanması topolojik kategorilere has bir özelliktir. Bu durumların tamamını **Grp** (Tüm gruplar ve grup homeomorfizmleri), **Met** (Tüm metrik uzaylar ve sürekli fonksiyonlar) kategorilerinde görmek mümkün değildir.

Yakınsama, süreklilik ve ayırma aksiyomları gibi matematiksel kavramlar genellikle topolojik uzaylar ile ilişkilendirilirler. Ancak komşuluk yerine yakınsaklık alınırsa bu kavramların daha soyut bir şekilde tanımlanması mümkündür. Bu yaklaşım Choquet, Hausdorff, Katetov ve Kent tarafından yapılan çalışmalarda araştırılmıştır (Choquet, 1947 a, b; Hausdorff, 1935; Katetov, 1965; Kent, 1964). Süzgeçler, topolojik uzaylarda yakınsaklık ve kapanış özelliklerini tanımlayan ve analiz eden güçlü araçtır. Süzgeç yakınsak uzaylar, matematiksel analiz ve topolojide yakınsaklık kavramının genişletilmesi açısından önemli bir yapıdır. Süzgeçler ilk kez Cartan (1937) tarafından yakınsaklığı araştırmak için kullanıldı. Sonraları Choquet (1947) ve Kowalsky (1954) süzgeçler ile yakınsaklık kavramını ifade eden teoremleri ifade ve ispat ettiler. Bu durum ilerleyen zamanlarda Fischer (1959) ve Kent (1964) isimli bilim insanlarının yakınsamada süzgeçleri kullanması ile daha ileri bir seviyeye ulaştı.

Kategorik açıdan incelenirse 1937 yılında Weil, süzgeç yakınsak yapıları düzgün uzaylar (uniform spaces) ile birleştirerek düzgün yakınsak yapıların temelini atmış oldu (Weil, 1937). Daha sonra 1967 yılında Cook ve Fischer (1967) düzgün yakınsaklık yapısı kavramını yeniden tanımladılar. 1976 yılında Edgar yakınsak süzgeç uzaylar kategorisinin kartezyen kapalı olduğunu gösterdi (Edgar, 1976). 1987 yılında da Lechicki ve Zieminska düzgün yakınsaklık kavramını genelleştirdiler (Lechicki ve Zieminska, 1987). 1990 yılında Bently ve arkadaşları, yakınsak ve düzgün yakınsak yapılar arasındaki ilişkiyi belirlemek için süzgeç yapıları formüle etti (Bently vd., 1990).

Yukarıda ifade edilen süzgeç tabanlı yapılar sadece topoloji tanımlamak için kullanılmaz aynı zamanda kartezyen kapalılık (cartesian closedness), uzantısallık (extensionality), bölüm dönüşümlerinin çarpımsallığı gibi durumları içine alan pek çok özelliğin varlığını ortaya çıkarmada da kullanılan uygun bir kategorik özelliktir (Bently vd, 1987; Nauwelaerts, 2000; Császár, 1996; Preuss, 1998). Öyle ki bu konu 2002 yılında Preuss tarafından ortaya konulan topolojinin farklı bir çalışma alanı olan Convenient Topolojiyi ortaya çıkarmıştır (Preuss, 2002).

Kapanış operatörleri 1910 yılında Moore tarafından yazılan “ Introduction to a Form of General Analysis” isimli kitabında ortaya atılmıştır. (Moore, 1987). Kategorik anlamda kapanış operatörleri ile ilgili en dikkat çekici çalışma 1987 yılında Dikranjan ve Giuli tarafından yapılan temel bir makalede ortaya konmuştur (Dikranjan ve Giuli, 1987). Kapanış operatörleri özellikle mantık, cebir, logic, ekonomi, geometri, bilgisayar bilimi, veri analizi, Galois Teorisi gibi pek çok alanlarda sıkça kullanılır. Kapanış operatörleri kullanılarak Hausdorffluk, bağlantılılık, regülerlik, normallik, kompaktlık vb.kavramlar genelleştirilebilir veya verilen bir topolojik kategorinin dolu alt kategorilerinin epimorfizmleri karakterize edilebilir. Bu konuda pek çok bilim insanının çalışmaları mevcuttur. (Baran, 1997, 1998, 2000, 2002; Baran ve Kula, 2006; Baran ve Altındış 1996; Baran vd., 2016; Castellini ve Hajek, 1994; Clementino ve Tholen, 1997; Dikranjan ve Giuli, 1987, 1992; Dikranjan ve Tholen, 1995; Erciyes vd., 2020; Erciyes ve Baran, 2020, 2021, 2025; Preuss, 1979; Salbany, 1976).

Topolojik kategorilerde, kapalılık kavramını eksen dönüşümleri ile tanımlamak mümkündür. Baran 1991 ve 1993 yıllarında yayınlamış olduğu “Separation

Properties” ve “The Notion of Closedness in Topological Categories” isimli çalışmalarında küme tabanlı topolojik kategorilerde kapalılık kavramını tanımlamıştır (Baran, 1991, 1993). Baran’ın çalışmalarında adı geçen kapanış operatörleri Dikranjan ve Giuli anlamındaki kapanış operatörleri ile uyumludur (Dikranjan ve Giuli, 1987).

Top kategorisi, doğal fonksiyon uzay yapılarına sahip olmayan bir kategoridir. Bu durum homotopi teorisi, topolojik cebir, fonksiyonel analiz vb. alanlarda **Top** kategorisinin yetersizliğidir.

Objeleri sabit süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri ise bu uzaylar arasındaki sürekli dönüşümlerden oluşan ve **ConFCO** ile gösterilen sınıf bir topolojik kategoridir. 1978 yılında Schwarz ve Hannover tarafından tanımlanmıştır (Schwarz ve Hannover, 1978). Schwarz ve Hannover, bu çalışmasında grill ve süzgeç uzayların birbirinin duali olduğunu göstermesinin yanında **ConFCO** kategorisinin **Grill** (Objeleri grill uzaylar ve morfizmleri sürekli dönüşümler) kategorisine izomorf olduğunu ispatladı. Devamında **ConFCO** nun **FCO** (Objeleri süzgeç uzaylar ve morfizmleri sürekli dönüşümler) kategorisinin bireflektif alt kategorisi olduğunu gösterdi.

Bu tez çalışmasının amaçları aşağıdaki gibi sıralanabilir:

- (1) **ConFCO** da bir kümenin kapalılığı, kuvvetli kapalılığı araştırılmıştır. Kapalı (kuvvetli kapalı) kümelerin sonlu ve keyfi kesişimlerinin, birleşimlerinin kapalı (kuvvetli kapalı) olup olmadığı gösterilmiştir.
- (2) **ConFCO** da cl, scl, Q, sQ şeklinde gösterilen kapanış operatörleri karakterize edilmiştir. Devamında, bu kapanış operatörlerinin idempotent, (zayıf) kalıtsal, çarpımsal ve toplamsal vb. gibi durumları incelenmiştir.
- (3) cl, scl, Q, sQ kapanış operatörleri ile oluşturulan $i = 0, 1, 2$ için **ConFCO**_{ic} alt kategorileri karakterize edilmiş ve birbirleri arasındaki ilişkiler gösterilmiştir.
- (4) Kapanış operatörleri kullanılarak $i = 0, 1$ için T_i sabit yakınsak süzgeç uzayların her biri karakterize edilmiştir.
- (5) $i = 0, 1, 2$ için **ConFCO**_{ic} kategorilerinin **ConFCO** nun epireflektif alt kategorileri olduğu belirlenmiştir.
- (6) Bilinen bazı topolojik kategorilerdeki sonuçlar ile tez çalışmasından elde edilen kapanış operatörleri kıyaslanmıştır.

2. KATEGORİK KAVRAMLAR

2.1 Kategori Ve Fanktor

Tanım 2.1.1 Bir $\mathcal{A}$ kategorisi aşağıdaki şartları sağlayan tüm objelerin sınıfı Ob , tüm morfizmlerin sınıfı hom , birim morfizm id ve iki morfizm arasındaki bileşke işlemi “ $\circ$ ” olmak üzere $\mathcal{A} = (Ob, hom, id, \circ)$ dörtlüsünden oluşur (Adamek vd., 1990).

(i) $\mathcal{A}$ daki her X objesi için $1_A: A \rightarrow A$ birim morfizmi vardır öyle ki her $f: A \rightarrow B$ morfizmi için $f \circ 1_A = f$ ve her $g: B \rightarrow A$ morfizmi için $1_A \circ g = g$ dır.

(ii) $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ ve $h: C \rightarrow D$ morfizmleri için $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ dir.

Örnek 2.1.2 Bilinen bazı kategoriler şu şekildedir:

- (1) Objeleri kümeler, morfizmleri fonksiyonlar olan sınıfa tüm kümelerin kategorisi denir ve **Set** ile gösterilir.
- (2) Objeleri topolojik uzaylar, morfizmleri sürekli fonksiyonlar olan sınıfa tüm topolojik uzayların kategorisi denir ve **Top** ile gösterilir.
- (3) Objeleri metrik uzaylar, morfizmleri büzölme fonksiyonları olan sınıfa tüm metrik uzayların kategorisi denir ve **Met** ile gösterilir.
- (4) Objeleri gruplar, morfizmleri grup homomorfizmi olan sınıfa grupların kategorisi denir ve **Grp** ile gösterilir.
- (5) Objeleri vektör uzayları, morfizmleri lineer dönüşümler olan sınıfa vektör uzaylar kategorisi denir ve **Vect** ile gösterilir.
- (6) Objeleri süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler olan sınıfa süzgeç yakınsak uzayların kategorisi denir ve **FCO** ile gösterilir.
- (7) Objeleri bornolojik uzaylar, morfizmleri sürekli dönüşümler olan sınıfa bornolojik uzayların kategorisi denir ve **Born** ile gösterilir.
- (8) Objeleri yansıma bağıntılı uzaylar, morfizmleri bağıntı koruyan fonksiyonlar olan sınıfa tüm yansıma bağıntılı uzayların kategorisi denir ve **RRel** ile gösterilir.
- (9) Objeleri topolojik gruplar, morfizmleri sürekli grup homomorfizmleri olan sınıfa tüm topolojik grupların kategorisi denir ve **TopGrp** ile gösterilir.

Tanım 2.1.3 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ iki kategori olsun. $\mathcal{A}$ daki her bir A objesini $\mathcal{B}$ nin $F(A)$ objesine, $\mathcal{A}$ daki her $f: A \rightarrow B$ morfizmini $\mathcal{B}$ deki $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$

morfizmine dönüştüren $F: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ye dönüşümü aşağıdaki şartları sağlarsa F ye $\mathcal{A}$ den $\mathcal{B}$ ye bir fanktor denir (Adamek vd., 1990).

(i) Her $A \in Ob(\mathcal{A})$ için $1_{F(A)} = F(1_A)$ dır.

(ii) $\mathcal{A}$ daki f ve g morfizmleri için

$$F(g) \circ F(f) = F(g \circ f)$$

dir. Bir fanktoru iki kategori arasında objeyi objeye ve morfizmi ise morfizme götüren bir dönüşüm olarak düşünebiliriz.

Örnek 2.1.4 Bazı bilinen bazı fanktorlar şu şekildedir:

- (1) $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}, U((X, \sigma)) = X$ tanımlı dönüşüm fanktordur.
- (2) $V: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}, V((G, *)) = G$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir fanktordur.
- (3) $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}, D(X) = (X, P(X))$ tanımlı dönüşüm bir fanktordur. Bu fanktora diskre fanktor denir.
- (4) $I: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}, I(X) = (X, \{X, \emptyset\})$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir fanktordur. Bu fanktora indiskre fanktor denir.
- (5) $S: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}, S((X, m, \tau)) = (X, m)$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir fanktordur.
- (6) $T: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Top}, T((X, n, \tau)) = (X, \tau)$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir fanktordur.
- (7) Bir $\mathcal{A}$ kategorisinde her $T, S \in Ob(\mathcal{A})$, her $f: T \rightarrow S$ için $1_{\mathcal{A}}(T) = T$ ve $1_{\mathcal{A}}(f) = f$ tanımlı $1_{\mathcal{A}}: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ dönüşümü bir fanktordur.
- (8) $W: \mathbf{Met} \rightarrow \mathbf{Set}, W((X, d)) = X$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir fanktordur.
- (9) $U: \mathbf{RRel} \rightarrow \mathbf{Set}, U((X, R)) = X$ şeklinde tanımlı dönüşüm bir fanktordur.

2.2 Topolojik Kategori

Tanım 2.2.1 $\mathcal{A}$ ve $\mathcal{B}$ kategoriler ve $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ fanktor olsun. U aşağıdaki şartları sağlarsa $\mathcal{A}$ ya $\mathcal{B}$ de bir topolojik kategori denir (Adamek vd., 1990, s. 278).

(i) Hem amnestik hem de düzenlidir, yani U belirlidir. $\forall B, A \in Ob(\mathcal{A})$ ve $f: A \rightarrow B, g: A \rightarrow B$ için $U(g) = U(f)$ dan $g = f$ olmalıdır ki bu U nun düzenli olması demektir ve $\mathcal{A}$ daki $\forall A$ objesi ve $\forall f: A \rightarrow A$ için $U(f) = 1_{F(A)}$ ve f morfizm olduğunda $1_A = f$ olmalıdır ki bu ise U nun amnestik olması demektir.

(ii) $\forall B \in Ob(\mathcal{B})$ için $U^{-1}(B) = \{X \in Ob(\mathcal{A}) \mid U(X) = B\}$ bir küme olmalıdır. Yani U küçük demetlere sahiptir.

(iii) Her U -kaynağı (U -source) bir başlangıç kaldırmasına sahiptir veya U -kavşağı (U -sink) bitiş kaldırmasına sahiptir. Yani $\mathcal{B}$ deki her $i \in I, f_i: U(X) = A \rightarrow U(X_i)$ için $(\bar{f}_i) = f_i$ olacak şekilde A de bir $f_i: X \rightarrow X_i$, $i \in I$ ailesi vardır ve $U(\bar{h}_i: Y \rightarrow X_i) = f_i \circ k: U(Y) \rightarrow U(X) = A \rightarrow U(X_i)$ dan $k: U(Y) \rightarrow U(X)$ ne karşılık $U(\bar{k}) = k$ olacak şekilde $\exists \bar{k}: Y \rightarrow X$ vardır öyle ki $\bar{f}_i \circ \bar{k} = \bar{g}_i$ dir.

2.3 Özel Objeler

Tanım 2.3.1 (Adamek vd., 1990) $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ üzerinde bir topolojik kategori ve $A \in Ob(\mathcal{A})$ olsun.

(1) $\forall X \in Ob(\mathcal{A})$ için $\mathcal{B}$ deki $\forall U(A) \rightarrow U(X)$ morfizmi, $\mathcal{A}$ da $A \rightarrow X$ e kaldırılıyorsa A ya diskre obje denir.

(2) $\forall Y \in Ob(\mathcal{A})$ için $\mathcal{B}$ deki $\forall U(Y) \rightarrow U(A)$ morfizmi, $\mathcal{A}$ da $Y \rightarrow A$ ya kaldırılıyorsa A ya indiskre obje denir.

(3) $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ topolojik fanktorunda $\mathcal{B}$ nin her X sabit objesi için $U^{-1}(X)$ yalnız bir yapıya sahipse U ya normalleştirilmiş topolojik kategori (normalized topological category) denir (X objesinin sabit olması için gerek ve yeter şart son objesinin bir alt objesi olmasıdır.).

Örnek 2.3.2 Aşağıda bilinen bazı topolojik fanktor örnekleri verilmiştir.

(1) $U: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}, U((X, \tau)) = X$ biçimindeki fanktor topolojiktir. Dolayısıyla **Top** topolojik kategoridir.

(2) $V: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}, V((G, *)) = G$ topolojik fanktor değildir. Çünkü **Grp** da herhangi bir grubun alt kümesi alt grup değildir.

(3) $W: \mathbf{Met} \rightarrow \mathbf{Set}, W((X, d)) = X$ de **Met** de metrik uzayların keyfi çarpımlarının metrik uzay olmaması fanktorun topolojik olmadığı anlamına gelmektedir.

(4) $S: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Grp}, S((X, m, \tau)) = (X, m)$ şeklinde tanımlanan fanktor topolojik olmasına rağmen $T: \mathbf{TopGrp} \rightarrow \mathbf{Top}, T((X, m, \tau)) = (X, \tau)$ şeklinde tanımlanan fanktor topolojik değildir.

2.4 Eksen Dönüşümleri

Bu başlık altında, bir topolojik kategoride tanımlanacak ayırma aksiyomları ve kapalılık kavramlarının tanımlanması için gerekli olan dönüşümler verilecektir.

Tanım 2.4.1 (A) Noktada Eksen Dönüşümleri

$X \in Ob(\mathcal{A})$ ve $t \in X$ olsun. $XV_t X, X$ in t noktasındaki wedge çarpımı olmak üzere $XV_t X$ den alınan x birinci bileşende ise x_1 ve ikinci bileşende ise x_2 olarak gösterilecektir. $X = \{k, t\}$ ise $XV_t X = \{t, k_1, k_2\}$ şeklindedir. Buna göre lokal anlamda eksen dönüşümleri şu şekildedir (Baran, 1991, 1993, 2025):

(1) $A_t: XV_t X \rightarrow X^2, A_t(x_1) = (x, t)$ ve $A_t(x_2) = (t, x)$ tanımlanan dönüşüme t deki temel eksen dönüşümü denir.

(2) $S_t: XV_t X \rightarrow X^2, S_t(x_1) = (x, x)$ ve $S_t(x_2) = (t, x)$ tanımlanan dönüşüme t deki eğik eksen dönüşümü denir.

(3) $\nabla_t: XV_t X \rightarrow X, \nabla_t(x_1) = x = \nabla_t(x_2)$ tanımlanan dönüşüme t deki katlama dönüşümü denir.

(B) Genelde Eksen Dönüşümleri

$X \in Ob(\mathcal{A})$ olsun. $X^2 V_\Delta X^2$, X^2 nin Δ daki wedge çarpımı olmak üzere $X^2 V_\Delta X^2$ den alınan (x, y) birinci bileşende ise $(x, y)_1$, ikinci bileşende ise $(x, y)_2$ olarak gösterilecektir. $X = \{k, t\}$ ise $X^2 V_\Delta X^2 = \{(k, k), (t, t), (k, t)_1, (k, t)_2, (t, k)_1, (t, k)_2\}$ şeklindedir. Buna göre genel manada eksen dönüşümleri şu şekildedir (Baran, 1991, 1993):

(1) $A: X^2 V_\Delta X^2 \rightarrow X^3$, $A((x, y)_1) = (x, y, x)$ ve $A((x, y)_2) = (x, x, y)$ e temel eksen dönüşümü denir.

(2) $S: X^2 V_\Delta X^2 \rightarrow X^3$, $S((x, y)_1) = (x, y, y)$ ve $S((x, y)_2) = (x, x, y)$ e eğik eksen dönüşümü denir.

(3) $\nabla: X^2 V_\Delta X^2 \rightarrow X^2$, $\nabla((x, y)_1) = (x, y) = \nabla((x, y)_2)$ e katlama dönüşümü denir.

(C) Sonsuzda Eksen Dönüşümleri

X küme, $t \in X$ ve $X^\infty = X \times X \times X \times \dots$ da X in sayılabilir bir kartezyen çarpımı ve X in t de çakışan sonsuz ayrık kopyası $V_t^\infty X$ olsun. Bu durumda sonsuzda eksen dönüşümleri aşağıdaki gibidir (Baran, 1991, 1993):

(1) $A_t^\infty: V_t^\infty X \rightarrow X^\infty$ ve $A_t^\infty(x_i) = (t, t, \dots, t, x, t, \dots)$ ne t deki temel eksen dönüşümü denir.

(2) $\nabla_t^\infty: V_t^\infty X \rightarrow X$ ve $\nabla_t^\infty(x_i) = x$ ne t deki katlama dönüşümü denir. $x_i \in V_t^\infty X$ demek x_i nin i . bileşende olması demektir.

Tanım 2.4.2 (Baran, 1991,1993; Baran ve Altındış, 1996) $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $B \in Ob(\mathcal{A})$, $t \in X = U(B)$ ve D ise diskre fanktor olsun.

(1) B objesi t da $\bar{T}_0$ dır ancak ve ancak

$$\{ \nabla_t: X \bigvee_t X \rightarrow UD(X) = X \text{ ve } A_t: X \bigvee_t X \rightarrow U(B^2) = X^2 \}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

(2) B objesi t da T_1 dir ancak ve ancak

$$\{ \nabla_t : X \bigvee_t X \rightarrow X = U(D(X)) \text{ ve } S_t : X \bigvee_t X \rightarrow U(B^2) = X^2 \}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

(3) B objesi t da T_0' dir ancak ve ancak

$$\{ \nabla_t : X \bigvee_t X \rightarrow X = U(D(X)) \text{ ve } id : X \bigvee_t X \rightarrow U(X \bigvee_t X)' = X \bigvee_t X \}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırmasının diskredir.

$(X \bigvee_t X)'$ deki yapı $\{i_1, i_2 : X \rightarrow X \bigvee_t X\}$ U -kaynağının final kaldırmasıdır.

Örnek 2.4.3 $U : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktoru için X t de T_0 dir. $\Leftrightarrow X \bigvee_t X$ üzerinde $A_t : X \bigvee_t X \rightarrow (X^2, \tau_*)$ ve $\nabla_t : X \bigvee_t X \rightarrow (X, P(X))$ lar tarafından üretilen topoloji diskredir. Burada τ_* , X^2 deki çarpım topolojisidir. İlaveten A_t yerine S_t alınırsa bilinen anlamda t de T_1 aksiyomu elde edilir.

Tanım 2.4.4 (Baran, 1991, 1993; Baran ve Altındış, 1996) $U : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktor, $X \in Ob(\mathcal{A})$ ve $U(X) = B$ olsun.

(1) X objesi $\bar{T}_0$ dir. $\Leftrightarrow$

$$\{A : B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(\mathcal{D}(B^2)) = B^2\}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

(2) X objesi T_1 dir. $\Leftrightarrow$

$$\{S : B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(X^3) = B^3 \text{ ve } \nabla : B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(D(B^2)) = B^2\}$$

U -kaynağının bitiş kaldırması diskredir.

(3) $(B^2 \bigvee_{\Delta} B^2)'$, $\{i_1, i_2 : U(X^2) = B^2 \rightarrow B^2 \bigvee_{\Delta} B^2\}$ U -kavşağının bitiş kaldırması olsun. X objesi T_0' dir. $\Leftrightarrow$

$$\{id : B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(B^2 \bigvee_{\Delta} B^2)' = B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \text{ ve } \nabla_t : B^2 \bigvee_{\Delta} B^2 \rightarrow U(D(B^2)) = B^2\}$$

U -kaynağının başlangıç kaldırması diskredir.

(4) X, T_0 dır ancak ve ancak X in en az iki elemanlı hiçbir alt uzayı indiskre değildir.

Örnek 2.4.5 (X, τ) topolojik uzayı T_0 dır. $\Leftrightarrow$

$$A : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^3, \tau_*) \text{ ve } \nabla : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$$

tarafından üretilen başlangıç topolojisi diskredir. Tanım 2.4.4 de belirtilen $T_0', \bar{T}_0$ ve T_0 bilinen anlamda T_0 uzayına denktir (Baran, 1991).

(1) $i_1, i_2 : X^2 \rightarrow X^2 \vee_{\Delta} X^2$ dönüşümleri ile üretilen final topolojisi τ^* olsun. Bu durumda

$$id : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2 \vee_{\Delta} X^2, \tau^*)$$

birim dönüşümü ve

$$\Delta : X^2 \vee_{\Delta} X^2 \rightarrow (X^2, P(X^2))$$

dönüşümü ile elde edilen başlangıç topolojisi diskredir.

(2) (X, τ) uzayının en az iki elemanlı alt uzayları indiskre değildir.

3. SABİT SÜZGEÇ YAKINSAK UZAYLAR

3.1 Süzgeçler

Tanım 3.1.1 $X \neq \emptyset$ küme ve $P(X) \supset \alpha$ olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan α sınıfına X de bir öz süzgeç denir (Baran, 1992, 2025).

(i) $\emptyset \notin \alpha$,

(ii) $\forall V, U \in \alpha$ için $V \cap U \in \alpha$,

(iii) $\forall U \in \alpha$ için $V \supseteq U$ ise $V \in \alpha$.

$\emptyset \in \alpha$ ise α ye öz olmayan süzgeç denir. $F(X)$, X kümesindeki süzgeçlerin kümesini göstermektedir. Ayrıca yukarıdaki şartlardan (i) ve (ii) yi sağlayan α sınıfına süzgeç bazı denir.

Örnek 3.1.2 (1) $X = \{a, b, c\}$ üzerindeki tüm süzgeçler aşağıdaki gibidir:

$$\alpha_1 = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}, X\} = [a],$$

$$\alpha_2 = \{\{b\}, \{c, b\}, \{a, b\}, X\} = [b],$$

$$\alpha_3 = \{\{a, c\}, \{c\}, \{b, c\}, X\} = [c],$$

$$\alpha_4 = \{\{b, a\}, X\} = [\{a, b\}],$$

$$\alpha_5 = \{\{c, a\}, X\} = [\{c, a\}],$$

$$\alpha_6 = \{\{c, b\}, X\} = [\{b, c\}],$$

$$\alpha_7 = \{X\} = [X],$$

$\alpha_8 = P(X)$ öz olmayan süzgeçtir.

(2) $X \neq \emptyset$ küme $W \subseteq X$ ve $t \in X$ olsun.

$$[\{t\}] = [t] = \{G \subseteq X \mid t \in G\} \text{ ve } [W] = \{H \subseteq X \mid W \subseteq H\}$$

sınıfları X de birer süzgeçtir.

(3) (X, τ) topolojik uzayındaki (x_n) dizisi için,

$$\alpha = \{W \subseteq X \mid \text{her } n \geq n_0 \text{ için } x_n \in W \text{ şekilde } \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ vardır.}\}$$

sınıfı (x_n) dizisinden elde edilen bir süzgeçtir.

Tanım 3.1.3 $X \neq \emptyset$ ve α ise X da süzgeç olsun. Her $G \subset X$ için $G \in \alpha$ veya $G^c \in \alpha$ ise α ya ultra süzgeç denir (Baran, 1992, 2025).

Tanım 3.1.4 (X, σ) topolojik uzay ve $t \in X$ olsun.

$$N_t = \{G \subset X \mid \exists H \in \sigma \text{ ve } t \in H \subset G\} \subset P(X)$$

sınıfına t nin komşuluklarının süzgeci denir (Baran, 2025).

Tanım 3.1.5 (X, τ) topolojik uzay, N_x komşuluklar süzgeci, α herhangi bir süzgeç ve $x \in X$ olsun. α, x e yakınsaktır $\Leftrightarrow \alpha \supset N_x$ dir (Baran, 2025).

Tanım 3.1.6 (Baran, 1992) $\alpha, \beta \in F(X)$, $\gamma \in F(Y)$ ve $f : X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

- (1) $\alpha \cap \beta = \{G \subset X \mid G \in \alpha \text{ ve } G \in \beta\}$,
- (2) $\alpha \cup \beta = \{G \subset X \mid \exists V \in \alpha \text{ ve } \exists W \in \beta \text{ vardır öyle ki } G \supset V \cap W\}$,
- (3) $f(\alpha) = \{G \subset Y \mid \exists H \in \alpha \text{ vardır öyle ki } G \supset f(H)\}$,
- (4) $f^{-1}(\gamma) = \{V \subset X \mid \exists W \in \gamma \text{ vardır öyle ki } V \supset f^{-1}(W)\}$.

Önerme 3.1.7 (Baran, 1992; Erciyes vd., 2020) $f : X \rightarrow Y$ fonksiyon ve $\alpha, \beta \in \mathcal{F}(X)$ olsun. Bu durumda

- (1) $f(\beta \cap \alpha) = f(\beta) \cap f(\alpha)$,
- (2) $f(\beta \cup \alpha) \supset f(\beta) \cup f(\alpha)$,
- (3) $f^{-1}(f(\alpha)) \subset \alpha$,
- (4) $\gamma \subset f(f^{-1}(\gamma))$.

3.2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylar Kategorisi

Tanım 3.2.1 $F(A)$, A daki tüm süzgeçlerin sınıfı olsun. $K: A \rightarrow P(F(A)) - \emptyset$ da a ya yakınsayan A daki boştan farklı süzgeçlerin kümesi $K(a)$ olacak şekilde verilen bir fonksiyon olsun. K , aşağıdaki şartları sağlarsa K ya yakınsak süzgeç yapısı ve (A, K) ya ise yakınsak süzgeç uzay denir (Kent, 1964).

(i) Her $a \in A$ için $[a] \in K(a)$ dır.

(ii) α, A da süzgeç ve $\alpha \subset \beta$ olmak üzere $\alpha \in K(a)$ ise $\beta \in K(a)$ dir.

Tanım 3.2.2 (A, K) yakınsak süzgeç uzay olsun. K sabit ise bu durumda K ya sabit yakınsak süzgeç yapısı ve (A, K) ya ise sabit süzgeç yakınsak uzay adı verilir (Schwarz ve Hannover, 1978).

Örnek 3.2.3 $A = \{a, b, c\}$ deki sabit süzgeç yakınsaklık yapıları,

$K_1 = \{[a], [b], [c], [\emptyset]\}$ diskre yapı,

$K_2 = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [b] \cap [a]\},$

$K_3 = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [c] \cap [b]\},$

$K_4 = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [c] \cap [a]\},$

$K_5 = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [b] \cap [a], [c] \cap [a]\},$

$K_6 = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [c] \cap [a], [c] \cap [b]\},$

$K_7 = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [b] \cap [a], [c] \cap [b]\},$

$K_8 = F(A)$ indiskre yapıdır.

Tanım 3.2.4 (Baran, 1994; Erciyes vd., 2020)

(1) $\{(A_j, K_j) \mid j \in I\}$ sabit yakınsak süzgeç uzaylar ve $A = \prod_{j \in I} A_j$ olsun.

$\pi_j : (\prod_{j \in I} A_j, K) \rightarrow (A_j, K_j)$ yi sürekli yapan A daki sabit yakınsak uzayların yapısı

$$K_* = \{\alpha \in F(A) \mid \forall j \in I \text{ için } \pi_j(\alpha) \in K_j\}$$

şeklindedir.

(2) (A, K) sabit yakınsak süzgeç uzayı, $W \subset A$ olsun. $i : W \hookrightarrow A$ nı sürekli yapan M daki sabit yakınsak süzgeç uzay yapısı

$$K_W = \{\alpha \in F(W) \mid i(\alpha) \in K\}$$

şeklindedir.

Tanım 3.2.5 $(A, K), (B, L)$ sabit süzgeç yakınsak uzaylar ve $f: A \rightarrow B$ olsun. Her $\alpha \in K$ için $f(\alpha) \in L$ dir $\Leftrightarrow f$ süreklidir.

Objeleri sabit süzgeç yakınsak uzaylar, morfizmleri ise sürekli dönüşümler olan sınıf bir kategoridir, **ConFCO** ile gösterilir (Schwarz ve Hannover, 1978).

Teorem 3.2.6 $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}, U((A, K)) = A$ normalleştirilmiş topolojik fanktordur.

İspat: U nun bir fanktor olduğu açıktır.

(i) U nun belirli olması, $(B, L), (A, K) \in \mathbf{ConFCO}$ ve $g, f: (A, K) \rightarrow (B, L)$ dönüşümleri için $U(g) = U(f)$ ise $U(g) = g$ ve $U(g) = g$ olup $f = g$ dir. Dolayısıyla U düzenlidir.

$f: (A, K) \rightarrow (A, L)$ için $U(f) = f = 1_A, A \rightarrow A$ ve f izomorfizm olsun. $\forall \alpha \in A$ için $\alpha \in K$ olsun. f nin sürekliliğinden $f(\alpha) \in L$ dir. $1_A(\alpha) \in L$ ise $\alpha \in L$ dir, böylece $K \subset L$ dir. f izomorfizm olmasından $f^{-1}: (A, L) \rightarrow (A, K)$ olur. f^{-1} sürekliliğinden $\alpha \in L$ için $f^{-1}(\alpha) \in K$ dir. Böylece $f^{-1} = 1_A$ için $1_A(\alpha) \in K$ dan $\alpha \in K$ dir. Sonuçta $L \subset K$ ve $K = L$ olur ki bu da $f = 1_{(A, K)}$ olması demektir, yani U amnestiktir.

U amnestik ve düzenli olduğundan belirlidir.

(ii) Her A kümesi için

$$U^{-1}(A) = \{(A, K): U(A, K) = A\} \text{ ve } \varphi = \{K: K \subset A \times P(F(A))\}$$

olsun. O halde $\theta: U^{-1}(A) \rightarrow \varphi$ dönüşümü $\theta((A, K)) = K$ olsun. θ bire bir ve örten olduğundan $U^{-1}(A)$ ile φ denktir ve φ küme olduğundan her A kümesi için $U^{-1}(A)$ da bir kümedir. Dolayısıyla U küçük demetlere sahiptir.

(iii) Her $i \in I$ için (A_i, K_i) ler sabit süzgeç yakınsak uzaylar ve

$$\{f_i: (A, K) \rightarrow U(A_i, K_i) = A_i (i \in I)\}$$

sınıfı da **Set** de U -kaynağı olsun. $K = \{\alpha: f_i(\alpha) \in K_i, \text{ her } i \in I\}$ olsun.

$f_i: (A, K) \rightarrow (A_i, K_i)$ kaynağının $f_i: A \rightarrow A_i$ nin başlangıç kaldırması olduğunu gösterelim. Her $(B, L) \in \mathbf{ConFCO}, (A_i, K_i) \in \mathbf{ConFCO}$ ve **ConFCO** de bir $h_i: (B, L) \rightarrow (A_i, K_i)$ dönüşüm ailesi için $\exists k: B \rightarrow A$ vardır ve $U(f_i) \circ k = h_i$ dir. $\exists \bar{k}: (C, L) \rightarrow (A, K)$ dönüşümü süreklidir öyle ki $U(\bar{k}) = k$ olduğunu gösterelim. Her $\alpha \in L$ için $k(\alpha) \in K$ mı? $\alpha \in L$ olsun. h_i lerin sürekliliğinden $h_i \alpha \in K_i (h_i(y))$

dir. $U(f_i) \circ k = h_i$ den $f_i(K(\alpha)) = h_i\alpha \in K_i$ olur. Böylece $f_i(k(\alpha)) \in K_i$ ve K dan $k(\alpha) \in K$ olur. Sonuç olarak $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$ bir topolojik fanktordur.

$\{x\}$ kümeler kategorisinin son objesi olduğundan $\emptyset \subset \{x\}$ ve $\{x\} \subset \{x\}$ den $U^{-1}(\{x\})$ ve $U^{-1}(\emptyset)$ nın tek bir yapı oluşturup oluşturmadığını inceleyelim. $(\emptyset) = U^{-1}(\emptyset, \emptyset) = (\emptyset, K)$ yani $K = \emptyset$ dir. $U^{-1}(\{x\}) = (\{x\}, \{[x], [\emptyset]\})$ dir. $U: \mathbf{ConFCO} \rightarrow \mathbf{Set}$ normalleştirilmiş topolojiktir.

Önerme 3.2.7 ConFCO kategorisinde,

- (1) $\{f_i: (A, K) \rightarrow (A_i, K_i): i \in I\}$ kaynağı $f_i: A \rightarrow A_i$ nin bir başlangıç kaldırmasıdır. $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in K$ için $f_i(\alpha) \in K_i$ dir.
- (2) $f: (A_i, K_i) \rightarrow (A, K)$ kavşağı bitiş kaldırmasıdır. $\Leftrightarrow$ Her $\alpha \in K$ için $\exists \beta_i \in K_i$ vardır öyle ki $f_i(\beta_i) \subset \alpha$ dir.
- (3) (A, K) objesi diskredir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A$ için $K = \{[a], [\emptyset]\}$ dir.
- (4) (A, K) objesi indiskredir. $\Leftrightarrow K = F(A)$ dir.

Teorem 3.2.8 (Baran, 1993, 1994; Erciyes ve Baran, 2021) (A, K) sabit süzgeç yakınsak uzay olsun. Bu durumda,

- (1) (A, K) uzayı T_0' dir.
- (2) (A, K) uzayı $\bar{T}_0$ dir. $\Leftrightarrow$ Farklı her $y, x \in B$ için $[y] \cap [x] \notin K$.
- (3) (A, K) uzayı T_1 dir. $\Leftrightarrow$ Farklı her $y, x \in B$ için $[y] \cap [x] \notin K$.
- (4) (A, K) uzayı $pre\bar{T}_2$ dir. $\Leftrightarrow$ Her $\alpha, \beta \in K$ öz süzgeçleri için $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç ise $\alpha \cap \beta \in K$ dir.
- (5) (A, K) uzayı $preT_2'$ dir.

4. KAPALI ALT OBJELER

4.1 Topolojik Uzaylarda Kuvvetli Kapalılık

Tanım 4.1.1 (X, τ) topolojik uzayında $N \subset X$ kapalı ve her $x \notin N$ için N nin x i içermeyen bir açık komşuluğu var ise N ye kuvvetli kapalı denir.

Örnek 4.1.2 $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ olsun. $N = \{b, c\}$ hem kapalı hem de kuvvetli kapalıdır. Ancak $M = \{a, c\}$ kuvvetli kapalı olmamasına rağmen kapalıdır.

Tanım 4.1.3 (Baran, 1991, 1993) $U: \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{Set}$ topolojik fanktorunda $B \in Ob(\mathcal{A})$, $U(B) = X$ olsun.

(1) $A_t^\infty: V_t^\infty X \rightarrow U(B^\infty) = X^\infty$ ve $\nabla_t^\infty: V_t^\infty X \rightarrow U(D(X)) = X$ biçiminde verilen U -kaynağının başlangıç kaldırması diskre ise $\{t\}$ ye kapalıdır denir.

(2) $\emptyset \neq N \subset B$ olmak üzere $q: U(B) = X \rightarrow X/N = (X \setminus N) \cup \{*\}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$q(x) = \begin{cases} x, & x \notin N \text{ ise} \\ *, & x \in N \text{ ise} \end{cases}$$

(3) $\{*\}$ kümesi X/N de kapalı ise $N \subseteq X$ e kapalıdır denir. Burada X/N üzerindeki yapı bitiş kaldırma ile elde edilen yapıdır.

(4) $X/N, *$ da T_1 ise N ye kuvvetli kapalıdır denir.

(5) N^c kümesi X de kapalı (kuvvetli kapalı) ise N ye açıktır (kuvvetli açık) denir.

(6) $B = N$ veya $N = \emptyset$ ise N hem kapalı hem de kuvvetli kapalıdır.

Örnek 4.1.4 $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}, \{c\}, \{b, c\}\}$ için (X, τ) topolojik uzayında $N = \{a\}$ kapalıdır.

$$\begin{array}{ccc} & A_a^\infty & \\ V_a^\infty X & \longrightarrow & (X^\infty, \tau_*) \\ \nabla_a^\infty \downarrow & & \\ (X, P(X)) & & \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_a^{\infty-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
\nabla_a^{\infty-1}(X) &= V_a^{\infty}X \\
\nabla_a^{\infty-1}(\{a\}) &= \{a\} \\
\nabla_a^{\infty-1}(\{b\}) &= \{b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\} \\
\nabla_a^{\infty-1}(\{c\}) &= \{c_1, c_2, c_3, c_4, \dots\} \\
\nabla_a^{\infty-1}(\{a, b\}) &= \{a, b_1, b_2, b_3, b_4, \dots\} \\
\nabla_a^{\infty-1}(\{a, c\}) &= \{a, c_1, c_2, c_3, c_4, \dots\} \\
\nabla_a^{\infty-1}(\{b, c\}) &= \{b_1, b_2, b_3, \dots, c_1, c_2, c_3, \dots\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_a^{\infty-1}(\emptyset) &= \emptyset \\
A_a^{\infty-1}(X^{\infty}) &= V_a^{\infty}X \\
A_a^{\infty-1}(\{a\} \times X \times X \times X \times \dots) &= \{a, b_2, c_2, b_3, c_3, \dots\} \\
A_a^{\infty-1}(X \times \{a\} \times X \times X \times \dots) &= \{a, b_1, c_1, b_3, c_3, \dots\} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
A_a^{\infty-1}(\{a\} \times \{a\} \times X \times X \times \dots) &= \{a, b_3, c_3, b_4, c_4, \dots\} \\
A_a^{\infty-1}(\{a\} \times \{a\} \times \{a\} \times X \times \dots) &= \{a, b_4, c_4, b_5, c_5, \dots\} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
A_a^{\infty-1}(\{b\} \times X \times X \times X \times \dots) &= \{b_1\} \\
A_a^{\infty-1}(X \times \{b\} \times X \times X \times \dots) &= \{b_2\} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
A_a^{\infty-1}(\{b\} \times \{b\} \times X \times X \times \dots) &= \emptyset \\
A_a^{\infty-1}(\{b\} \times \{b\} \times \{b\} \times X \times \dots) &= \emptyset \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
A_a^{\infty-1}(\{c\} \times X \times X \times X \times \dots) &= \{c_1\}
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
A_a^{\infty-1}(X \times \{c\} \times X \times X \times \dots) & = & \{c_2\} \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & . \\
A_a^{\infty-1}(\{c\} \times \{c\} \times X \times X \times \dots) & = & \emptyset \\
A_a^{\infty-1}(\{c\} \times \{c\} \times \{c\} \times X \times \dots) & = & \emptyset \\
. & & . \\
. & & . \\
. & & .
\end{array}$$

$S = \{\emptyset, V_a^\infty X, \{b_1\}, \{b_2\}, \dots, \{c_1\}, \{c_2\}, \dots, \{a\}, \dots, \{b_1, b_2, b_3, \dots\}, \dots, \{c_1, c_2, c_3, \dots\}\}$ alt bazındaki elemanların sonlu kesişimleri ile β bazı, ardından β dakilerin keyfi birleşimleri alınır

$\tau_W = \{\emptyset, V_a^\infty X, \{a\}, \{b_1\}, \dots, \{c_1\}, \{c_2\}, \dots, \{a, b_1\}, \{a, b_2\}, \dots, \{a, c_1\}, \{a, c_2\}, \dots\} = P(V_a^\infty X)$ olur. Dolayısıyla, Tanım 4.1.3 den $N = \{a\}$ nin kapalı olduğu görülür.

4.2 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylarda Kuvvetli Kapalılık

Yukarıda tanımlanan $q: A \rightarrow A/N$ dönüşümü göz önüne alınsın.

Lemma 4.2.1 (Baran, 1992) α ve σ , A üzerindeki süzgeçler ve $\emptyset \neq N \subset A$ olsun. Bu durumda,

- (i) $\sigma \cup [N]$ öz olmayan süzgeç ise $q\alpha \subset q\sigma \Leftrightarrow \alpha \subset \sigma$.
- (ii) $\sigma \cup [N]$ öz süzgeç ise $q\alpha \subset q\sigma \Leftrightarrow \alpha \cap [N] \subset \sigma$ ve $\alpha \cup [N]$ öz süzgeçtir.

Lemma 4.2.2 (Baran, 1992) α , A üzerindeki süzgeç ve $\emptyset \neq N \subset A$ olsun. Bu durumda,

- (i) $a \notin N$ için $q\alpha \subset [a] \Leftrightarrow \alpha \subset [a]$.
- (ii) $q\alpha \subset [*] \Leftrightarrow \alpha \cup [N]$ öz süzgeçtir.

Lemma 4.2.3 (Baran, 1992) α , A üzerindeki süzgeç, $\emptyset \neq N \subset A$ ve $a \notin N$ olsun. $[a] \cap [b] = q([a] \cap [N]) \supset q\alpha$ dır ancak ve ancak $\alpha \cup [N]$ öz süzgeç ve $\alpha \subset [a]$ dır.

Teorem 4.2.4 $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}$, $b \in A$ ve $\emptyset \neq N \subset A$ olsun.

(1) Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

- (i) N kapalıdır.
- (ii) N kuvvetli kapalıdır.

(iii) Her $\alpha \in K$ ve $a \notin N$ olacak şekildeki $\forall a \in A$ için $\alpha \not\subset [a]$ veya $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir.

(2) $\{b\}$ kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $a \in A$ ve $b \neq a$ için $[a] \cap [b] \notin K$ dir.

(3) Aşağıdakiler birbirine denktir:

(i) N açıktır.

(ii) N kuvvetli açıktır.

(iii) Her $\alpha \in K$ ve $a \in N$ olacak şekildeki $\forall a \in A$ için $\alpha \not\subset [a]$ veya $\alpha \cup [N^c]$ öz olmayan süzgeçtir.

İspat: (1) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) açıktır. Çünkü kabul edelim ki (A, K) sabit süzgeç yakınsak uzay olsun. $\emptyset \neq N \subset A$ kuvvetli kapalıdır $\Leftrightarrow$ Tanım 4.1.3 den A/N kümesi $*$ da T_1 dir. $\Leftrightarrow$ Her $a \in A/N$, $a \neq *$ için $[a] \cap [*] \notin K'$ dir. $\Leftrightarrow A/N$, $*$ noktasında $\bar{T}_0$ dir. $\Leftrightarrow \{*\}$ kümesi A/N de kapalıdır. $\Leftrightarrow N$ kümesi kapalıdır.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Kabul edelim ki N kapalı olsun. Tanım 4.1.3 den $\{*\}$ kümesi A/N de kapalıdır. Her $a \neq *$ için $[*] \cap [a] \notin K_N$ dir. Burada K_N , A/N bölüm kümesi üzerindeki final yapısıdır.

$[a] \cap [*] \in K_N$, $\beta = [a] \cap [N]$ olsun. Böylece $N \neq \emptyset$ olduğundan

$\beta \cup [N] = ([a] \cap [N]) \cup [N] = [N]$ öz süzgeçtir. Lemma 4.2.2 den,

$q\alpha \subset q\beta \Leftrightarrow \alpha \cap [N] \subset \beta$ ve $\alpha \cup [N]$ öz süzgeçtir. Yani

$q\alpha \subset q([a] \cap [N]) \Leftrightarrow \alpha \cap [N] \subset [a] \cap [N]$ ve $\alpha \cup [N]$ öz süzgeçtir. Bu durumda $\alpha \cap [N] \subset [a] \cap [N] \Leftrightarrow \alpha \subset [a]$ olduğunu göstereceğiz.

Eğer $\alpha \subset [a]$ ise $\alpha \cap [N] \subset [a] \cap [N]$ dir. Tersine $\alpha \cap [N] \subset [a] \cap [N]$ ve $\alpha \not\subset [a]$ olsun. Böylece, $\exists V \in \alpha$ vardır öyle ki $a \notin V$ dir. $a \notin N, a \notin V \cup N$ den

$$N \cup V \in [N] \cap \alpha \subset [a] \cap [N] \subset [a]$$

olur. $N \cup V \in [a]$ elde edilir ki $a \in N \cup V$ olur, bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $\alpha \subset [a]$ olmalıdır. Sonuç olarak $[a] \cap [*] \in K_N$ dir $\Leftrightarrow \alpha \cup [N]$ öz süzgeç ve $\alpha \subset [a]$ olur. $[a] \cap [*] \notin K_N$ dan $\forall \alpha \in K$ için $[a] \cap [*] = q([a] \cap [N]) \not\supset q\alpha \Leftrightarrow \alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeç veya $\alpha \not\subset [a]$ dir.

(2) (1) de yer alan ispatta $N = \{b\}$ alınırsa ispat elde edilir.

(3) Tanım 4.1.3 ve (1) in ispatına benzer şekilde yapılır.

Örnek 4.2.5 (1) $A = \{a, b, c\}$, $K = \{[a], [b], [c], [\emptyset], [b] \cap [a]\}$ olsun.

$N = \{a\}$ için $b \notin N$ olmak üzere $\alpha = [b] \cap [a]$ ise $\alpha \subset [a]$ ve $\alpha \cup [a]$ öz süzgeç olmasından N kapalı değildir.

$N = \{c\}$ için $a \notin N$ olmak üzere ya $\alpha \not\subset [a]$ ya da $\alpha \cup [c]$ öz olmayan süzgeç olduğundan N kapalı (kuvvetli kapalı) dır.

$N = \{b, c\}$ için $a \notin N$ için $\alpha = [a] \cap [b]$ ise $\alpha \subset [a]$ ve $\alpha \cup [\{b, c\}]$ öz süzgeç olduğundan N kapalı değildir.

(2) $A = \{m, n, p, r\}$ kümesi üzerinde

a) $K_1 = \{[n], [p], [m], [r], [n] \cap [m], [\emptyset]\},$

b) $K_2 = \{[n], [p], [m], [r], [p] \cap [n], [p] \cap [r], [n] \cap [r], [\emptyset]\},$

c) $K_3 = \{[n], [p], [m], [r], [n] \cap [m], [n] \cap [p], [p] \cap [r], [p] \cap [m], [m] \cap [n] \cap [p], [\emptyset]\}$

sabit süzgeç yakınsak yapılar için K_1 e göre açık ve kapalı kümeler $\{p\}, \{r\}, \{n, m\}, \{r, p\}, \{n, p, m\}, \{n, m, r\}, A$ ve $\emptyset$ dir.

K_2 ye göre açık ve kapalı kümeler $\{m\}, \{n, p, r\}, A$ ve $\emptyset$ dir.

K_3 ye göre açık ve kapalı kümeler A ve $\emptyset$ dir.

(3) (A, K) diskre sabit süzgeç yakınsak uzay olsun. Teorem 4.2.4 den her $N \subseteq A$ alt kümesi hem açık hem de kapalıdır.

(4) $(A, F(A))$ indiskre sabit süzgeç yakınsak uzay ve $s(A) \geq 2$ olsun. Bu durumda Teorem 4.2.4 den A nın kapalı (açık) alt kümeleri A ve $\emptyset$ dir.

Teorem 4.2.6 (A, K) ve (B, L) sabit süzgeç yakınsak uzaylar, $f: (A, K) \rightarrow (B, L)$ sürekli olsun.

(1) $M \subset B$ kapalı ise $f^{-1}(M) \subset A$ kapalıdır.

(2) $M \subset N$ kapalı ve $N \subset A$ kapalı ise $M \subset A$ kapalıdır.

İspat: (1) Kabul edelim ki $M \subset B$ kapalı, $a \notin f^{-1}(M)$ ve $\alpha \in K$ olsun. Göstereceğiz ki $\alpha \not\subset [a]$ veya $\alpha \cup [f^{-1}(M)]$ öz olmayan süzgeçtir.

$f(a) \notin M, f(a) \in L$ için M kapalı olduğundan $f(a) \notin [f(a)]$ veya $f(a) \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir.

(i) Kabul edelim ki $f(a) \cup [M]$ öz olmayan süzgeç olsun. Önerme 3.1.7 den

$$f(a) \cup [M] \subset f(a) \cup [ff^{-1}(M)] \subset f(a) \cup f[f^{-1}(M)] \subset f(\alpha \cup [f^{-1}(M)])$$

dir. Eğer $\alpha \cup [f^{-1}(M)]$ öz süzgeç olsaydı, bu durumda $f(\alpha \cup [f^{-1}(M)])$ de öz süzgeç olurdu. Böylece $\alpha \cup [f^{-1}(M)]$ öz olmayan süzgeçtir.

(ii) Kabul edelim ki $f(\alpha) \notin [f(a)]$ olsun. $\alpha \notin [a]$ olduğunu gösterelim. $\alpha \subset [a]$ ise $f(\alpha) \subset [f(a)]$ olurdu. Bu da $M \subset B$ nin kapalı olması ile çelişir.

Sonuç olarak $\alpha \notin [a]$ ve Teorem 4.2.4 den dolayı $f^{-1}(M) \subset A$ kapalıdır.

(2) Kabul edelim ki $M \subset N$ ve $N \subset A$ kapalı olsun. Ayrıca $a \in A$ olmak üzere $a \notin M$ ve $\alpha \in K$ olsun.

(a) Eğer $a \notin N$ ise Teorem 4.2.4 den $N \subset A$ de kapalı olduğundan $\alpha \notin [a]$ veya $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir.

(i) Kabul Edelim ki $\alpha \notin [a]$ olsun. Teorem 4.2.4 den $M \subset A$ de kapalıdır.

(ii) Kabul edelim ki $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeç olsun. Bundan dolayı

$$[N] \subset [M], \alpha \cup [N] \subset \alpha \cup [M]$$

olur ki buradan $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir.

(b) $a \in N$ olsun. K_N , N üzerinde $i: N \hookrightarrow (A, K)$ içine dönüşümleri ile elde edilen N deki alt sabit süzgeç yakınsak yapı olsun. Dikkat edelim ki $i^{-1}(\alpha) = \alpha \cup [N]$ ve Önerme 3.1.7 (4) den $\alpha \subset i(i^{-1}(\alpha))$. $\alpha \in L$ olduğundan $i(i^{-1}(\alpha)) \in K$ dir ve başlangıç kaldırma tanımından $i^{-1}(\alpha) \in K_N$ dir. $a \notin M$, $a \in N$ ve $i^{-1}(\alpha) \in K_N$ olduğundan Teorem 4.2.4 den ve $M \subset N$ de kapalı olduğundan

$i^{-1}(\alpha) \notin [a]$ veya $i^{-1}(\alpha) \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir.

(i) Kabul edelim ki $i^{-1}(\alpha) \cup [M]$ öz olmayan süzgeç olsun. Buradan hareketle

$$i^{-1}(\alpha) \cup [M] = \alpha \cup [N] \cup [M] = \alpha \cup [M]$$

(ii) Kabul edelim ki $i^{-1}(\alpha) \notin [a]$ olsun. Buradan $i^{-1}(\alpha) = \alpha \cup [N] \notin [a]$ olur ki bu ise $\alpha \notin [a]$ olmasını gerektirir. (Aksi takdirde eğer $\alpha \subset [a]$ ise $a \in N$ olduğundan $\alpha \cup [N] \subset [a]$ dir.).

Sonuç olarak $\alpha \notin [a]$ veya $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir ve Teorem 4.2.4 den $M \subset A$ kapalıdır.

Teorem 4.2.7 $(B, L) \in \mathbf{ConFCO}$ olsun.

(1) $\forall i \in I$ için $N_i \subset B$ kapalı ise $\bigcap_{i \in I} N_i$ kapalıdır.

(2) $N_1, N_2, \dots, N_n \subset B$ kapalı ise $\bigcup_{i=1}^n N_i$ kapalıdır.

(3) $N_1, N_2, \dots, N_n \subset B$ açık ise $\bigcup_{i \in I} N_i$ açıktır.

(4) $N_1, N_2, \dots, N_n \subset B$ kapalı ise $\bigcap_{i=1}^n N_i$ kapalıdır.

(5) $\forall i \in I$ için $N_i \subset (B_i, K_i)$ kapalı ise $N = \prod_{i \in I} N_i$, $B = \prod_{i \in I} B_i$ de kapalıdır.

(6) $\forall i \in I$ için $N_i \subset (B_i, K_i)$ açık ise $N = \prod_{i \in I} N_i$, $B = \prod_{i=1}^n N_i$ de kapalıdır.

İspat: (1) $a \in B, a \notin \bigcap_{i \in I} N_i$ ve $\alpha \in L$ olsun. En az bir $k \in I$ için $a \notin N_k$ olur. $N_k \subset B$ nin kapallılığından ve Teorem 4.2.4 den $\alpha \cup [N_k]$ öz olmayan süzgeç veya $\alpha \not\subset [a]$ dır. $\alpha \not\subset [a]$ ise ispat açıktır.

$\alpha \cup [N_k]$ öz olmayan süzgeç olsun. $\bigcap_{i \in I} N_i \subset N_k$ olması $[N_k] \subset [\bigcap_{i \in I} N_i]$ olmasını bu da $\alpha \cup [N_k] \subset \alpha \cup [\bigcap_{i \in I} N_i]$ olmasını gerektirir. $\alpha \cup [N_k]$ öz olmayan süzgeç olduğundan $\alpha \cup [\bigcap_{i \in I} N_i]$ de öz olmayan süzgeçtir. Sonuç olarak Teorem 4.2.4 den $\bigcap_{i \in I} N_i$ kapalıdır.

(2) $a \in B, a \notin \bigcup_{i=1}^n N_i = N$ ve $\alpha \in L$ olsun. $i = 1, 2, \dots, n$ için $a \notin N_i$ olur. $i = 1, 2, \dots, n$ için N_i ler kapalı olduğundan Teorem 4.2.4 den $\alpha \cup [N_i]$ öz olmayan süzgeç veya $\alpha \not\subset [a]$ dır. $\alpha \not\subset [a]$ ise ispat açıktır.

$i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha \cup [N_i]$ öz olmayan süzgeç olsun. Bu durumda $\exists V_i \in \alpha$ için $V_i \cap N_i = \emptyset$ olur. $V = \bigcup_{i=1}^n V_i$ olur ki $V \in \alpha$ dır.

$$\begin{aligned} V \cap N &= \left(\bigcup_{i=1}^n V_i \right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^n N_i \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (V_i \cap N_i) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

olur ki $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir. Teorem 4.2.4 den $\bigcup_{i=1}^n N_i = N$ kapalıdır.

(3) ve (4) ispatı Teorem 4.2.4 den, (1) ve (2) den açıktır.

(5) Kabul edelim ki her $i \in I$ için $N_i \subset B_i$ kapalı olsun. $a = (a_1, a_2, \dots)$, $a \in B = \prod_{i \in I} B_i$, $a \notin N = \prod_{i \in I} N_i$ ve $\alpha \in L$ olsun. L, B deki çarpım yapısıdır.

$\pi_i: (B = \prod_{i \in I} B_i, L) \rightarrow (B_i, L_i)$ iz düşüm fonksiyonları için her $i \in I$ olmak üzere $\alpha \in L$ ise $\pi_i \alpha \in L_i$ olur. Ayrıca $a \notin N$ olduğundan en az bir $t \in I$ için $a_t \notin N_t$ olur. N_t, B_t de kapalı ve Teorem 4.2.4 den $\pi_t \alpha \not\subset [a_t]$ veya $\pi_t \alpha \cup [N_t]$ öz olmayan süzgeçtir.

1. Durum: $\pi_t \alpha \cup [N_t]$ öz olmayan süzgeç ise $\exists U \in \pi_t \alpha$ için $U \cap N_t = \emptyset$ olur. $U \in \pi_t \alpha$ dan $\exists w \in \alpha$ vardır öyle ki $\pi_t w \subset U$ olur ki buradan $\pi_t w \cap N_t = \emptyset$ yazılır. $\sigma = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \pi_i \alpha$ olsun. Baran (1992) deki Sonuç 3.3 den $\forall i \in I$ için $\sigma \subset \alpha$ ve $\pi_i \sigma = \pi_i \alpha$ olur. $Z = \prod_{i \in I} \pi_i w$ olsun. Burada $Z \in \sigma$ olduğuna dikkat edelim.

$$Z \cap N = \left(\prod_{i \in I} \pi_i w \right) \cap \left(\prod_{i \in I} N_i \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{i \in I} (\pi_i w \cap N_i) \\
&= \emptyset
\end{aligned}$$

olur ki buradan $\sigma \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir. $\sigma \subset \alpha$ dan $\sigma \cup [N] \subset \alpha \cup [N]$ olur. Sonuç olarak $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir.

2. Durum: $\pi_t \alpha \notin [a_t]$ ise $\sigma \notin [a]$ olur. Çünkü öyle olmasaydı her $i \in I$ için $\pi_i \sigma = \pi_i \alpha \subset [a_i]$ olurdu. Bu ise (B_i, L_i) lerde N_i lerin kapalı olması ile çelişir. Sonuç olarak N kümesi kapalıdır.

4.3 Bilinen Topolojik Kategorilerdeki Kapalı Objeler

Bu kısımda bilinen bazı uzaylardaki (kuvvetli) kapalılık kavramlarını ifade edelim:

(1) Top kategorisinde,

(X, τ) topolojik uzayında $N \subset X$ nin açık (kapalı) olması bilinen anlamda açık (kapalı) olmasına denktir.

(2) Born kategorisinde,

(X, F) bornolojik uzay ve $N \subset X$ olsun. Baran (1993) deki Teorem 3.9 ve 3.10 dan X in her alt kümesi kuvvetli kapalıdır. Ayrıca N kapalıdır ancak ve ancak $X = N$ dir.

(3) FCO (Süzgeç yakınsak uzaylar ve sürekli dönüşümler) kategorisinde,

(A, K) süzgeç yakınsak uzay ve $N \subset A$ olsun. Baran (2000) deki Teorem 2.1 den N kapalıdır ancak ve ancak her $a \notin N$ için $\alpha \cup [F]$ öz süzgeç olacak şekilde $\alpha \in K(a)$ mevcut ise her $b \in N$ için $[a] \notin K(b)$ dir.

(4) RRel kategorisinde

(X, R) yansıma bağıntılı uzay, $N \subset X$ olsun. Baran (2023) deki Teorem 2.4 den N kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için xRa ve bRx olacak şekilde $a, b \in N$ varsa $x \in N$ dir. Ayrıca N kuvvetli kapalıdır $\Leftrightarrow$ Her $x \in X$ için xRa veya aRx olacak şekilde $a \in N$ varsa $x \in N$ dir.

(5) CP (Çiftler uzayı ve sürekli dönüşümler) kategorisinde

(A, B) çiftler uzayı olsun. Baran (1993) deki Teorem 3.8 den B nin her alt kümesi hem kapalı hem de kuvvetli kapalıdır.

(6) ConLim (Sabit limit uzaylar ve sürekli dönüşümler) kategorisinde,

(A, K) sabit limit uzay ve $N \subset A$ olsun. Erciyes vd. (2024) deki Teorem 1 den N kapalı (açık) dır ancak ve ancak $N = A$ dir. Erciyes vd. (2024) deki Teorem 2 den A nın her alt kümesi kuvvetli açık ve kuvvetli kapalıdır.

(7) psqMet (Pseudo-quasi-semi metrik uzaylar ve non-expansive dönüşümler) kategorisinde,

(X, d) extented-pseudo-quasi-semi metrik uzay ve $M \subset X$ olsun. Baran (2020) deki Teorem 3.9 ve 3.10 dan N kapalı (kuvvetli kapalı) dır $\Leftrightarrow \forall x \in X$ için $x \notin N$ olmak üzere $d(N, x) = \infty$ veya $d(x, N) = \infty$ ($d(N, x) = \infty = d(x, N)$) dir.

5. KAPANIŞ OPERATÖRLERİ

5.1 Sabit Süzgeç Yakınsak Uzaylarda Kapanış Operatörleri

Tanım 5.1.1 $\mathcal{A}$ bir kategori ve $X \in Ob(\mathcal{A})$ olsun. X nin her N alt kümesini yine X nin $c(N)$ alt kümesine götüren ve aşağıdaki şartları sağlayan c dönüşümüne kapanış operatörü adı verilir (Dikranjan ve Giuli, 1987; Dikranjan ve Tholen, 1995).

$$c: P(X) \rightarrow P(X)$$

$$N \mapsto c(N)$$

- (i) $N \subset c(N)$,
- (ii) $N \subset M$ olduğunda $c(N) \subset c(M)$,
- (iii) $\mathcal{A}$ daki her $f: X \rightarrow Y$ morfizmi ve her $N \subseteq X$ için $f(c(N)) \subset c(f(N))$.

Ayrıca,

$c(N) = N$ ise N ye X de c -kapalıdır denir.

$c(N) = c(c(N))$ ise c ye idempotent denir.

$N \subset A \subset X$ için $c_A(N) = c_X(N) \cap A$ ise c ye kalıtsaldır denir.

Her $N \subset X$ için $c(N) = X$ ise yani $\mathcal{A}$ daki her X objenin N alt objesi $\mathcal{A}$ -yoğun ise c ye zayıf kalıtsal denir.

Her $N \subset X$ için $i(N) = X$ ve $i(\emptyset) = \emptyset$ ise i ye indiske kapanış operatörü denir.

Her $N \subset X$ için $\delta(N) = N$ ise δ ya diskre kapanış operatörü denir.

Tanım 5.1.2 (A, K) sabit yakınsak süzgeç uzayı ve $N \subset A$ olsun.

(1) N nin kapanışı

$$cl(N) = \bigcap \{ F \subset A : N \subset F \text{ ve } F \text{ kapalı} \}$$

(2) N nin kuvvetli kapanışı

$$scl(N) = \bigcap \{ F \subset A : N \subset F \text{ ve } F \text{ kuvvetli kapalı} \}$$

(3) N nin quasi-component kapanışı

$$Q(N) = \bigcap \{ F \subset A : N \subset F \text{ ve } F \text{ açık ve kapalı} \}$$

(4) N nin kuvvetli quasi-component kapanışıdır.

$$sQ(N) = \bigcap \{ F \subset A \mid N \subset F, F \text{ kuvvetli açık ve kuvvetli kapalı} \}$$

Teorem 5.1.3 (1) cl ve scl operatörleri idempotent, zayıf kalıtsal, çarpımsal ve sonlu toplamsaldır fakat kalıtsal değildir.

(2) Q operatörü idempotent, zayıf kalıtsal, sonlu çarpımsal ve toplamsaldır fakat kalıtsal değildir.

İspat: (1) Erciyes vd. (2020) deki Teorem 4.2 ve Dikranjan ve Giuli (1987) deki Alıştırma 2.D den cl idempotent ve zayıf kalıtsaldır.

Şimdi cl nin çarpımsal olduğunu gösterelim. Her $i \in I$ için M_i ler (B_i, L_i) de kapalı, $a = (a_1, a_2, \dots) \in B = \prod_{i \in I} B_i$, $a \notin M = \prod_{i \in I} M_i$ ve $\alpha \in L$ olsun. Tanım 3.2.4 den $\forall i \in I$ için $\pi_i \alpha \in L_i$ ve $\exists k \in I$ için $a_k \notin M_k$ dır. M_k nin kapalılığından Teorem 4.2.4 den $\pi_k \alpha \cup [M_k]$ öz olmayan süzgeç veya $\pi_k \alpha \not\subseteq [a_k]$ dır.

Eğer $\pi_k \alpha \cup [M_k]$ öz olmayan süzgeç ise $G \cap M_k = \emptyset$ olacak şekilde $\exists G \in \pi_k \alpha$ vardır. Böylece $\pi_k H \subset G$ olacak şekilde $\exists H \in \alpha$ vardır bu durumda $\pi_k H \cap M_k = \emptyset$ olur.

$\sigma = \bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1} \pi_i \alpha$ olsun. Baran (1992) deki Sonuç 3.3 den $\forall i \in I$ için $\pi_i \sigma = \pi_i \alpha$ ve $\sigma \subset \alpha$ dır. $Z = \prod_{i \in I} (\pi_i W)$ olsun. Bu durumda $Z \in \sigma$ ve

$$\begin{aligned} Z \cap M &= \left(\prod_{i \in I} \pi_i W \right) \cap \left(\prod_{i \in I} M_i \right) \\ &= \prod_{i \in I} (\pi_i W \cap M_i) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

olur. Bu ise $\sigma \cup [M]$ nin öz olmayan süzgeçtir ve bu $\alpha \cup [M]$ nin öz olmayan süzgeç olduğunu gösterir.

Eğer $\pi_k \alpha \notin [a_k]$ ise bu durumda $\alpha \notin [a]$ olmalıdır. Eğer $\alpha \subset [a]$ olsaydı her $i \in I$ için $\pi_i \alpha \subset \pi_i([a])$ den $\pi_i \sigma = \pi_i \alpha \subset [\pi_i(a)] = [a_i]$ elde edilirdi. Bu ise çelişkidir. Sonuç olarak Teorem 4.2.4 den cl çarpımsaldır.

Şimdi ise cl nın sonlu toplamsal olduğunu gösterelim. $i = 1, 2, \dots, n$ için $M_i \subset B_i$ kapalı, $a \in B$, $a \notin M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ ve $\alpha \in L$ olsun.

M_i ler kapalı olduğundan Teorem 4.2.4 den $i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha \cup [M_i]$ öz olmayan süzgeç veya $\alpha \notin [a]$ dır.

Eğer $i = 1, 2, \dots, n$ için $\alpha \cup [M_i]$ öz olmayan süzgeç ise $G_i \cap M_i = \emptyset$ olacak şekilde $\exists G_i \in \alpha$ vardır. $G = \bigcap_{i=1}^n G_i$ olsun. $G \in \alpha$, α bir süzgeç ve

$$\begin{aligned} M \cap G &= \left(\bigcup_{i=1}^n M_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^n G_i \right) \\ &= \bigcup_{i=1}^n (M_i \cap G_i) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

olur. Böylece $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeç olur. Teorem 4.2.4 den M kapalı olur. Diğer taraftan $\alpha \notin [a]$ ise M nin kapalılığı aşıkârdır. Sonuç olarak cl sonlu toplamsaldır.

$B = \{m, n, p, r\}$ deki

$L = \{[n], [p], [m], [r], [n] \cap [m], [p] \cap [n], [r] \cap [p], [m] \cap [p], [n] \cap [m] \cap [p], [\emptyset]\}$ yapısı için $A = \{m, r\}$ ve $M = \{m\}$ olsun. L_A , A daki $i: A \hookrightarrow (B, L)$ içine dönüşümleri ile elde edilen alt uzay yapısı olsun. Böylece $L_A = \{[r], [m], [\emptyset]\}$ için Teorem 4.2.4 den $\{m\}, \{r\}, \emptyset$ ve A kümeleri kapalıdır.

$$cl_A(M) = cl_A(\{m\}) = \{m\} \text{ ve } cl_B(M) = cl_A(\{m\}) = B,$$

$$cl_B(M) \cap A = \{m, r\} \text{ ve } cl_A(M) = \{m\} \text{ dir.}$$

Böylece $cl_B(M) \cap A \neq cl_A(M)$ olur ki bu da cl nin kalıtsal olmadığını gösterir.

(2) Erciyes vd. (2020) deki Teoremden 3.4, Dikranjan ve Tholen (1995) deki Alıştırma 2.D ve Teorem 4.2.4 den Q idempotent ve zayıf kalıtsal bir kapanış operatörüdür.

Şimdi Q nun sonlu çarpımsallığını gösterelim. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $M_i \subset B_i$ ler hem açık hem de kapalı, $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in B = \prod_{i=1}^n B_i$, $a \in M = \prod_{i=1}^n M_i$ ve $\alpha \in L$ olsun. Burada L, B deki çarpım yapısıdır. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $a_i \in M_i$ ve $\pi_i \alpha \in L_i$ olsun. $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $M_i \subset B_i$ açık olmasından Teorem 4.2.4 den $\pi_i \alpha \notin [a_i]$ veya $\pi_i \alpha \cup [B_i \setminus M_i]$ öz olmayan süzgeçtir.

$\sigma = \bigcup_{i=1}^n \pi_i^{-1} \pi_i \alpha$ olsun. Baran (1992) deki Sonuç 3.3 den her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\pi_i \sigma = \pi_i \alpha$ dır ve Önerme 3.1.7 den $\sigma \in L$ dir.

Her $i = 1, 2, 3, \dots, n$ için $\alpha_i \notin [a_i]$ ise $\sigma \notin [a]$ olur.

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\pi_i \alpha \cup [B_i \setminus M_i]$ öz süzgeç olsun. Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $\pi_i W_i \cap (B_i \setminus M_i) = \emptyset$ olacak şekilde $\exists W_i \in \alpha$ vardır.

$$W = \bigcap_{i=1}^n W_i \text{ ve } Z = \prod_{i=1}^n (\pi_i W_i)$$

olsun. α süzgeç olduğundan $W \in \alpha$ ve $Z \in \sigma$ dır. Şimdi de $\sigma \cup [M^c] = \sigma \cup [B \setminus M]$ nin öz olmayan süzgeç olduğunu gösterelim. Burada

$$\begin{aligned} B \setminus M &= \left(\prod_{i=1}^n B_i \right) \setminus \left(\prod_{i=1}^n M_i \right) \\ &= [(B_1 \setminus M_1) \times B_2 \times \dots \times B_n) \cup (B_1 \times (B_2 \setminus M_2) \times B_3 \times \dots \times B_n) \cup \dots \cup B_1 \times B_2 \times \dots \times (B_n \setminus M_n)] \\ Z \cap M^c &= \left(\prod_{i=1}^n \pi_i W_i \right) \cap [(B_1 \setminus M_1) \times B_2 \times \dots \times B_n) \cup (B_1 \times (B_2 \setminus M_2) \times \dots \times B_n) \dots \\ &\quad \cup (B_1 \times B_2 \times \dots \times (B_n \setminus M_n))] \\ &= ((\pi_1 W_1 \cap (B_1 \setminus M_1)) \times \pi_2 W_2 \times \dots \times \pi_n W_n) \cup (\pi_1 W_1 \times (\pi_2 W_2 \cap (B_2 \setminus M_2)) \times \pi_3 W_3 \times \dots \times \pi_n W_n) \\ &\quad \cup \dots \cup (\pi_1 W_1 \times \pi_2 W_2 \times \dots \times (\pi_n W_n \cap (B_n \setminus M_n))) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

Böylece $\alpha \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeç olur. Teorem 4.2.4 den M kümesi B de açıktır. Teoremin ilk kısmından M kapalıdır ve böylece Tanım 5.1.2 den Q sonlu çarpımsaldır. Şimdi de Q operatörünün toplamsal olduğunu gösterelim.

Her $i = 1, 2, \dots, n$ için $M_i \subset B$ açık olsun. $a \in M = \bigcup_{i=1}^n M_i$ olmak üzere $a \in B$ olsun. Teorem 4.2.4 den M açık ve teoremin ilk kısmından M kapalıdır. Sonuç olarak Q toplamsaldır. Son olarak da Q nun kalıtsal olmadığını bir örnekle gösterelim.

$B = \{m, n, p, r\}$ kümesi üzerinde aşağıdaki şekilde verilen

$L = \{[p], [n], [m], [r], [m] \cap [n], [n] \cap [p], [r] \cap [p], [p] \cap [m], [n] \cap [p] \cap [m], [\emptyset]\}$ yapısını inceleyelim. Ayrıca $M = \{r\}$ ve $A = \{p, r\}$ olsun. $i: (A, L_A) \rightarrow (B, L)$ alt küme dönüşümleri ile elde edilen L_A alt uzay yapısı

$$L_A = \{[p], [r], [\emptyset]\}$$

şeklindedir.

Burada $Q_B(M) = B$, $M = Q_A(M)$ dir.

$$Q_B(M) \cap A = B \cap A \neq M = Q_A(M)$$

olur ki böylece Q kalıtsal değildir.

5.2 Kapanış Operatörleri İle Elde Edilen Dolu Alt Kategoriler

Tanım 5.2.1 $\mathcal{A}$ topolojik kategorisinin kapanış operatörü c olsun.

(1) $\mathcal{A}_{0c} = \{X \in \mathcal{A} : y, x \in X \text{ için } x \in c(\{y\}) \text{ ve } y \in c(\{x\}) \text{ ise } y = x\},$

(2) $\mathcal{A}_{1c} = \{X \in \mathcal{A} : \forall x \in X \text{ için } c(\{x\}) = \{x\}\},$

(3) $\mathcal{A}_{2c} = \{X \in \mathcal{A} : c(\Delta) = \Delta, \text{diagonal}\}.$

$\mathcal{A} = \mathbf{Top}$, $c = K$, bilinen kapanış operatörü ise $\mathbf{Top}_{ic}$, $i = 0, 1, 2$ için T_i uzayların sınıfına karşılık gelir. Bunun dışında $c = Q$, quasi-component kapanış operatörü ise $\mathbf{Top}_{1Q}$ tam bağlantısız uzaylara karşılık gelir.

Teorem 5.2.2 (A, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{ocl},$

(2) $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{0scl}$,

(3) Farklı $y, x \in A$ için

(i) $x \notin M, y \in M$ olacak şekilde $M \subset B$ vardır öyle ki $\forall \alpha \in K$ için $\alpha \notin [x]$ veya $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir

veya

(ii) $x \in N, y \notin N$ olacak şekilde $N \subset A$ vardır ve $\forall \alpha \in K$ için $\alpha \notin [y]$ veya $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir.

İspat: Teorem 4.2.4 den $(1) \Leftrightarrow (2)$ olduğu görülür. $(1) \Leftrightarrow (3)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{0cl}$ ve $x, y \in A$ farklı elemanlar olsun. $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{0cl}$ olduğundan Tanım 5.2.1 (1) den $x \notin cl(\{y\})$ ve $y \notin cl(\{x\})$ olur. Tanım 5.1.2 den $x \notin M$ ve $y \in M$ olacak şekilde $M \subset A$ kapalı alt kümesi vardır. Teorem 4.2.4 den $\forall \alpha \in K$ için $\alpha \notin [x]$ veya $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir. Benzer şekilde Tanım 5.1.2 den $x \in N$ ve $y \notin N$ olacak şekilde $N \subset A$ kapalı alt kümesi vardır. Teorem 4.2.4 den $\forall \alpha \in K$ için $\alpha \notin [y]$ veya $\alpha \cup [N]$ öz olmayan süzgeçtir. Böylece $(1) \Rightarrow (3)$ ispatlanmış olur.

Tersine olarak (3)(i) deki ifade sağlansın ve farklı $x, y \in A$ olsun. Teorem 4.2.4 den $M \subset A$ kapalı ve Tanım 5.1.2 den $x \notin cl(\{y\})$ dir. Benzer şekilde (3)(ii) deki ifade sağlansın ve farklı $x, y \in A$ olsun. Teorem 4.2.4 den $N \subset A$ kapalı ve Tanım 5.1.2 den $y \notin cl(\{x\})$ olur ki bu da $(3) \Rightarrow (1)$ olduğunu gösterir.

Dikkat edilirse $\mathbf{ConFCO}_{0cl}$ sınıfı $\mathbf{ConFCO}$ kategorisindeki diğer T_0 objelerin hiçbirine karşılık gelmemektedir.

Teorem 5.2.3 (A, K) sabit süzgeç yakınsak uzayında aşağıdakiler denktir:

(1) $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$,

(2) $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1scl}$,

(3) Farklı $x, y \in A$ nokta çifti için $[x] \cap [y] \notin K$.

İspat: Teorem 4.2.4 ve Tanım 5.1.2 den $(1) \Leftrightarrow (2)$ olduğu görülür. $(1) \Leftrightarrow (3)$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ ve farklı $x, y \in A$ noktaları olsun. Kabulden $cl(\{x\}) = \{x\}$ yani $\{x\}$ kapalıdır. Teorem 4.2.4 den $y \neq x$ olduğundan $[y] \cap [x] \notin K$ dır. Böylece $(1) \Rightarrow (3)$ ispatlanmış olur.

Tersine olarak farklı $x, y \in A$ için $[y] \cap [x] \notin K$ olsun. Teorem 4.2.4 den $\{x\}$ kapalı olur. Tanım 5.2.1 (2) den dolayı $cl(\{x\}) = \{x\}$ dir. $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ olur ki bu da $(3) \Rightarrow (1)$ olduğunu gösterir.

Dikkat edilirse $\mathbf{ConFCO}_{1cl}$ sınıfı $\mathbf{ConFCO}$ kategorisindeki T_1 ve $\bar{T}_0$ objeye karşılık gelmektedir.

Teorem 5.2.4 (A, K) sabit süzgeç yakınsak uzayı için aşağıdakiler denktir:

(1) $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$,

(2) $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2scl}$,

(3) Her $\alpha, \beta \in K$ öz süzgeci ve farklı $y, x \in A$ noktaları için $\alpha \not\subset [x]$ veya $\beta \not\subset [y]$ veya $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeçtir.

İspat: Her $\alpha, \beta \in K$ öz süzgeci ve her farklı $x, y \in A$ noktaları için

$(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olsun. $\alpha \cup \beta$ nın öz olmayan süzgeç olduğunu göstereceğiz. $\alpha \cup \beta$ nın öz süzgeç olduğunu kabul edelim. $\sigma = \pi_1^{-1}\alpha \cup \pi_2^{-1}\beta$ olsun. Baran (1992) deki Sonuç 3.3 den dolayı $\pi_1\sigma = \alpha \in K$ ve $\pi_2\sigma = \beta \in K$ dir. Böylece $\sigma \in K_*$ ve $\sigma \subset [(x, y)]$ dir. $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç demek $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde $\exists U_1 \in \alpha$ ve $\exists U_2 \in \beta$ olması demektir. Böylece $(U_1 \times U_2) \cap \Delta \neq \emptyset$ olur. Bu ise $\sigma \cup [\Delta]$ nın öz süzgeç olması demektir. Teorem 4.2.4 den Δ kapalı değildir. Bu bir çelişkidir. Sonuç olarak $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeç olur.

Tersine olarak farklı $x, y \in A$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için $\beta \subset [y]$ ve $\alpha \subset [x]$ ise $\alpha \cup \beta$ nın öz olmayan süzgeç olduğunu kabul edelim. $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olduğunu göstereceğiz. Yani Teorem 4.2.4 den her $(x, y) \in \Delta$ ve her $\alpha \in K_*$ için $\alpha \cup [\Delta]$ öz olmayan süzgeç veya $\alpha \not\subset [(x, y)]$ olduğunu göstereceğiz.

$\sigma = \pi_1^{-1}\pi_1\alpha \cup \pi_2^{-1}\pi_2\alpha$ olsun. Baran (1992) deki Sonuç 3.3 den $\sigma \subset \alpha$ ve $\pi_1\sigma = \pi_1\alpha \in K$ dir. Kabulden dolayı $\pi_1\sigma \notin [x]$ veya $\pi_i\sigma \notin [y]$ veya $\pi_1\sigma \cup \pi_2\sigma = \pi_1\alpha \cup \pi_2\alpha$ öz olmayan süzgeçtir.

$\pi_1\alpha = \pi_1\sigma \notin [x]$ veya $\pi_2\alpha = \pi_2\sigma \notin [y]$ ise $\alpha \notin [(x, y)]$ dir. Kabul edelim ki $\pi_1\sigma \cup \pi_2\sigma$ öz olmayan süzgeç olsun. Bu durumda $V \cap U = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \pi_1\sigma = \pi_1\alpha$ ve $V \in \pi_2\sigma = \pi_2\alpha$ vardır. Böylece $\Delta \cap (U \times V) = \emptyset$ yani $\sigma \cup [\Delta]$ öz olmayan süzgeç ve böylece $\alpha \cup [\Delta]$ öz olmayan süzgeçtir. Teorem 4.2.4 den Δ kapalıdır ve Tanım 5.2.1 den $cl_{A^2}(\Delta) = \Delta$, yani $(A, K) \in \Delta(cl)$ dir.

Dikkat edilirse **ConFCO**_{2cl} sınıfı **ConFCO** kategorisindeki farklı T_2 objelerinin hiçbirine karşılık gelmemektedir.

Teorem 5.2.5 **ConFCO**_{1cl} ve **ConFCO**_{2cl} kategorileri **ConFCO** nun bölüm-yansımalı (quotient-reflective) alt kategorileridir.

İspat: **ConFCO**_{1cl} ve **ConFCO**_{2cl} kategorileri izomorfizm-kapalı, dolu, alt uzay altında kapalı ve en ince yapılar altında kapalıdır. Dolayısıyla sadece çarpım altında kapalı olduğunu göstermemiz yeterlidir.

$\forall i \in I$ için $(B_i, L_i) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ ve $B = \prod_{i \in I} B_i$ olsun. $(B, L) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ olduğunu göstereceğiz. Kabul edelim ki $(B, L) \notin \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ olsun. Bu durumda bazı $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots)$, $x \neq y$, $x, y \in B$ için Teorem 5.2.3 den $[x] \cap [y] \in K$ olur. $x \neq y$ den $\exists j \in I$ için $y_j \neq x_i$, $x_i, y_j \in B_j$ vardır ve Erciyes ve Baran (2021) deki Önerme 2.1 ile Lemma 2.1 den

$$\pi_j([x] \cap [y]) = \pi_j([x] \cap [y])$$

$$= [x_j] \cap [y_j] \in K_j$$

olur. Bu $(B_j, K_j) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ ile çelişir. O halde $(B, L) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ dir.

Kabul edelim ki her $i \in I$ için $(B_i, K_i) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ ve $(B, K) \notin \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olsun. Teorem 5.2.4 den $x \neq y$, $x, y \in B$ ve bazı $\alpha, \beta \in K$ öz süzgeçleri için $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç, $\alpha \subset [x]$ ve $\beta \subset [y]$ dir. Böylece $x_j \neq y_j$ şeklindeki $\exists j \in I$ için $\pi_j(\alpha), \pi_j(\beta) \in K_j$ de öz süzgeçler, $\pi_j(\alpha) \cup \pi_j(\beta)$ öz süzgeç

$(\pi_j(\alpha) \cup \pi_j(\beta) \subset \pi_j(\alpha \cup \beta)$ ve $\alpha \cup \beta$ öz süzgeç olduğundan) , $\pi_j(\alpha) \subset [x_j]$ ve $\pi_j(\beta) \subset [y_j]$ olur. $(B_j, K_j) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olduğundan bu bir çelişkidir. Sonuç olarak Teorem 5.2.4 den $(B, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olur.

Teorem 5.2.6 $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1Q}$ $((A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1sQ})$ dur $\Leftrightarrow$ Farklı $y, x \in A$ için $[y] \cap [x] \notin K$ ve $x \in M, y \notin M$ olacak şekilde $M \subset A$ vardır öyle ki $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeç veya her $\alpha, \beta \in K$ öz süzgeçleri için $\alpha \cup \beta$ öz olmayan veya $\beta \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeçtir.

İspat: $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1Q}$ olsun. Tanım 5.2.1 den her $x \in A$ için $Q(\{x\}) = \{x\}$ kapalıdır. Teorem 4.2.4 den her $y \in A$ için $[x] \cap [y] \notin K$ dir. $y \notin \{x\} = Q(\{x\})$ ve Tanım 5.1.2 den $x \in M$ ve $y \notin M$ olacak şekilde hem açık hem de kapalı $M \subset A$ vardır. M kapalı (sırasıyla açık) Teorem 4.2.4 den her $\alpha, \beta \in K$ öz süzgeçleri için $\alpha \cup [M]$ (sırasıyla $\alpha \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeç) öz olmayan süzgeç veya $\alpha \not\subset [y]$ (sırasıyla $\beta \not\subset [x]$) dir.

$\beta \cup [M^c]$ ve $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeç ise $U \cap M = \emptyset = V \cap M^c$ olacak şekilde $\exists V \in \beta$ ve en az bir $U \in \alpha$ vardır. Bu ise $U \cap V \subset M^c \cap M = \emptyset$ olması anlamına gelir. Sonuç olarak $U \cap V = \emptyset$ olur. Bu ise $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeç olması demektir.

$\alpha \cup [M]$ ($\beta \cup [M^c]$) öz olmayan süzgeç ise $U \cap M = \emptyset$ ($V \cap M^c = \emptyset$) olacak şekilde $\exists U \in \alpha$ (sırasıyla $V \in \beta$) vardır. Böylece her $a \in M$ (sırasıyla her $b \in M^c$), $a \notin U$ (sırasıyla $b \notin V$) için $\alpha \not\subset [x]$ (sırasıyla $\beta \not\subset [y]$) dir.

$\{x\}$ ve $\{y\}$ kapalı olduğundan $\beta \not\subset [x]$ ve $\alpha \not\subset [y]$ olması durumu her zaman sağlanır. Dolayısıyla $\alpha \cup \beta$ nın öz olmayan süzgeç veya $y \notin M, x \in M$ olacak şekildeki bazı $M \subset A$ alt kümesi için $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeç veya $\beta \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeçtir.

$(\Leftarrow)$ Tersine, şartlar sağlansın. Farklı $x, y \in A$ için $\alpha, \beta \in L$ öz süzgeç olsun. $[x] \cap [y] \notin K$ olduğundan Teorem 4.2.4 den $\{x\}$ kapalıdır. $M = \{x\}$ olsun. Kabulden (i) $\alpha \cup [x]$ öz olmayan süzgeç veya (ii) $\beta \cup [\{x\}^c]$ öz olmayan süzgeç veya (iii) $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeçtir.

(i) $\alpha \cup [x]$ öz olmayan süzgeç ise $\alpha \not\subseteq [x]$ dir. Teorem 4.2.4 den $\{x\}$ kapalı ve açıktır. Tanım 5.2.1 den $\forall x \in A$ için $Q(\{x\}) = \{x\}$ dir. Bu durumda, $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1Q}$ dir.

(ii) $\beta \cup [\{x\}^c]$ öz olmayan süzgeç ise $U \cap \{x\}^c = \emptyset$ olacak şekilde $\exists U \in \beta$ vardır. Böylece $U = \emptyset$ veya $U = \{x\}$ olur. β öz süzgeç olmasından her $a \neq x$ için $\{x\} = U \in \beta$ ve $\beta = [x] \not\subseteq [a]$ dir. Teorem 4.2.4 den $\{x\}$ açık ve Tanım 5.2.1 den $\forall x \in A$ için $Q(\{x\}) = \{x\}$ dir. Bu durumda, $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1Q}$ dir.

(iii) $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeç olsun. Öyleyse $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $\exists V \in \beta$ ve $\exists U \in \alpha$ vardır. $U \cap M = \emptyset$ ise $x \notin U$ ve $\alpha \not\subseteq [x]$ dir. $U \cap M \neq \emptyset$ ise $\beta \not\subseteq [x]$ ve $x \notin V$ dir. Teorem 4.2.4 den $\{x\}$ açık ve Tanım 5.2.1 den $\forall x \in A$ için $Q(\{x\}) = \{x\}$ dir. Bu durumda, $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1Q}$ dir.

Teorem 5.2.7 $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2Q}$ ise farklı her $x, y \in A$ ve her $\alpha, \beta \in K$ öz süzgeçleri için $\alpha \not\subseteq [x]$ veya $\beta \not\subseteq [y]$ veya $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeçtir.

İspat: $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2Q}$ ve farklı $y, x \in A$ için $(x, y) \notin \Delta = Q_{A^2}(\Delta)$ kabul edelim. Tanım 5.1.2 den en az bir $(x, y) \notin M$ şekilde hem açık hem de kapalı $\Delta \subset M$ kümesi vardır. M kapalı olduğundan Teorem 4.2.4 den her $\alpha \in K_*$ için $\alpha \not\subseteq [(x, y)]$ veya $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeçtir. Şimdi bu durumları inceleyelim:

$\alpha \not\subseteq [(x, y)]$ ise $\pi_1 \alpha \not\subseteq [x]$ veya $\pi_2 \alpha \not\subseteq [y]$ dir. M nin açık olmasından Teorem 4.2.4 den her $\alpha \in L^2$ için ve $\forall (a, b) \in M$ için $\alpha \not\subseteq [(a, b)]$ veya $\alpha \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeçtir. $\alpha \not\subseteq [(a, b)]$ ise $\pi_1 \alpha \not\subseteq [a]$ veya $\pi_2 \alpha \not\subseteq [b]$ olur. $\alpha \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeç ise $\sigma = \pi_1^{-1} \pi_1 \alpha \cup \pi_2^{-1} \pi_2 \alpha$ olsun. $\sigma \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeç ise

$$(U_1 \times U_2) \cap M^c = \emptyset$$

olacak şekilde $\exists U_1 \in \pi_1 \alpha$ ve $U_2 \in \pi_2 \alpha$ vardır. $\sigma \cup [M]$ öz olmayan süzgeç ise $(V_1 \times V_2) \cap M = \emptyset$ olacak şekilde $\exists V_1 \in \pi_1 \alpha$ ve $V_2 \in \pi_2 \alpha$ vardır. $U_1 \cap V_1 \in \pi_1 \alpha$ ve $U_2 \cap V_2 \in \pi_2 \alpha$ elde edilir.

$$(U_1 \cap V_1) \times (U_2 \cap V_2) \cap M^c = \emptyset$$

dir. Teorem 4.2.4 den M açık değildir. Bu ise $Q_{A^2}(\Delta) = \Delta$ olması ile çelişir.

$\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeç ise $\alpha \cup [\Delta]$ öz olmayan süzgeç, böylece $\pi_1\alpha \cup \pi_2\alpha$ öz olmayan süzgeçtir.

Teorem 5.2.8 (1) Aşağıdaki kategoriler ikişerli olarak izomorftur.

(i) **ConFCO_{1cl}**,

(ii) **ConFCO_{1scl}**,

(iii) **T₁ConFCO**,

(iv) **T₀ConFCO**.

(2) $i = 0, 1, 2$ için **ConFCO_{icl}** kategorileri **ConFCO** nun epirefleksif (epireflective) alt kategorileridir.

İspat: (1) Teorem 3.2.8 ve Teorem 5.2.6 dan ispat açıktır.

(2) Bu alt kategorilerin dolu ve izomorfizm altında kapalı oldukları açıktır. Dolayısıyla alt uzay ve çarpım altında kapalı olduklarını göstermek yeterlidir. $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$, $M \subset A, i: M \hookrightarrow A$ içine dönüşüm ve K_M de M üzerindeki alt uzay yapısı olsun. Ayrıca her farklı $y, x \in M$ nokta çifti için $[y] \cap [x] \in K_M$ olsun. Önerme 3.2.7 den her farklı $y, x \in X$ nokta çifti için

$$i([y] \cap [x]) = i([x]) \cap i([y]) = [x] \cap [y] \in K$$

olur ki Teorem 5.2.3 den bu bir çelişkidir. Böylece $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ dir. Farklı her $y, x \in M$ için $[x] \cap [y] \notin K_M$ dir. Teorem 5.2.3 den $(M, K_M) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ dir.

$(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ ve K_M, M tarafından üretilen alt sabit süzgeç yakınsak yapı olsun. Ayrıca $i: M \hookrightarrow A$ içine fonksiyon olsun. $(M, K_M) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olduğunu göstereceğiz. Yani $\forall x, y \in M, x \neq y$ ve $\alpha, \beta \in K_M$ için $\alpha \subset [x]$ ve $\beta \subset [y]$ ise $\alpha \cup \beta$ nın öz olmayan süzgeç olduğunu göstereceğiz.

$i: (M, K_M) \hookrightarrow (A, K)$ alt küme fonksiyonu dikkate alınırsa,

$\alpha \subset [x]$ den $\alpha = i\alpha \subset i[x] = [i(x)] = [x]$ den $\alpha \subset [x]$ olur.

$\beta \subset [y]$ den $\beta = i\beta \subset i[y] = [i(y)] = [y]$ den $\beta \subset [y]$ olur.

$(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olduğundan teorem 5.2.4 den $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeçtir.

Şimdi ise $\mathbf{ConFCO}_{1cl}$ ve $\mathbf{ConFCO}_{2cl}$ nın çarpım altında kapalı olduklarını gösterelim.

Kabul edelim ki $\forall i \in I$ için $(A_i, K_i) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ ve $\prod_{i \in I} A_i = A$ olsun. A daki çarpım yapısı K_* olmak üzere $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ göstereceğiz. $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in A$, $x \neq y$ den $\exists i_0 \in I$ için $x_{i_0} \neq y_{i_0}$ olur. $(A_{i_0}, K_{i_0}) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ dan Teorem 5.2.3 den $[y_{i_0}] \cap [y_x] \notin K_{i_0}$ olur. $\pi_{i_0}: (\prod_{i \in I} A_i, K_*) \rightarrow (A_{i_0}, K_{i_0})$ izdüşüm fonksiyonları için $[y] \cap [x] \in K_*$ olsun.

$$\begin{aligned} \pi_{i_0}([y] \cap [x]) &= \pi_{i_0}([y]) \cap \pi_{i_0}([x]) \\ &= [y_{i_0}] \cap [x_{i_0}] \end{aligned}$$

$[y_{i_0}] \cap [x_{i_0}] \notin K_{i_0}$ olduğundan $[y] \cap [x] \in K_*$ olamaz. Böylece $[y] \cap [x] \in K_*$ dır. Teorem 5.2.3 den $(A, K_*) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ dir.

Her $i \in I$ için $(A_i, K_i) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olduğunu ve $(A = \prod_{i \in I} A_i, K)$ çarpım uzayı kabul edelim. Dolayısıyla $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olduğunu göstereceğiz.

Farklı $\forall x = (x_1, x_2, \dots), y = (y_1, y_2, \dots) \in A$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha \subset [x]$ ve $\beta \subset [y]$ olsun. Teorem 5.2.7 den $\alpha \cup \beta$ nın öz olmayan süzgeç olduğunu göstereceğiz.

$$\pi_i: (A, K) \rightarrow (A_i, K_i)$$

$\alpha \subset [x]$ olduğundan $\pi_i \alpha \subset \pi_i [x] = [x_i]$ ve $\beta \subset [y]$ olduğundan $\pi_i \beta \subset \pi_i [y] = [y_i]$ yazılır. $(A_i, K_i) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olduğundan Teorem 5.2.7 den $\pi_i(\alpha) \cup \pi_i(\beta)$ öz olmayan süzgeçtir. Teorem 5.2.7 den

$$\pi_i(\alpha) \cup \pi_i(\beta) \subset \pi_i(\alpha \cup \beta)$$

elde edilir ki bu ise $\pi_i(\alpha \cup \beta)$ nın öz olmayan dolayısıyla $\alpha \cup \beta$ nın öz olmayan süzgeç olması demektir. Sonuç olarak $(A, K_*) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$ olur.

Teorem 5.2.9 ConFCO nin dolu alt kategorileri için aşağıdaki durumlar vardır:

$$(1) \text{ConFCO}_{1Q} \subset \text{ConFCO}_{1cl}$$

$$(2) \text{ConFCO}_{1Q} \subset \text{ConFCO}_{2cl}$$

$$(3) \text{ConFCO}_{2cl} \subset \text{ConFCO}_{1cl}$$

İspat: (1) Kabul edelim ki $(A, K) \in \text{ConFCO}_{1Q}$ ve $x, y \in A, x \neq y$ olsun.

$(A, K) \in \text{ConFCO}_{1Q}$ olduğunda $y \notin \{x\} = Q_A(\{x\})$ ve Tanım 5.2.1 den $Q_A(\{x\}) = \{x\}$ kapalıdır. Teorem 4.2.4 den $[x] \cap [y] \notin K$ ve Teorem 5.2.3 den $(A, K) \in \text{ConFCO}_{1cl}$ dir.

(2) $(A, K) \in \text{ConFCO}_{1Q}$, $\alpha, \beta \in K$, $y, x \in A, x \neq y$ olsun. $y \notin \{x\} = Q_A(\{x\})$ ve Tanım 5.1.2 den x i içeren fakat y yi içermeyen A nın bir M kapalı ve açık alt kümesi vardır.

M kapalı olduğundan her $\alpha \in K$ öz süzgeci için Teorem 4.2.4 den $\alpha \cup [M]$ öz olmayan süzgeç veya $\alpha \not\subset [y]$ dir. M açık olduğundan her $\beta \in K$ için Teorem 4.2.4 den $\beta \cup [M^c]$ öz olmayan süzgeç veya $\beta \not\subset [x]$ dir.

$\beta \cup [M^c]$ ve $\alpha \cup [M]$ öz süzgeç ise $U \cap M = \emptyset = V \cap M^c$ şekilde $\exists U \in \alpha$ ve $V \in \beta$ vardır. Bu ise $U \cap V \subset M^c \cap M = \emptyset$ den $U \cap V = \emptyset$ olmasını gerektirir. O halde $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeçtir. Böylece $\forall a \in M$ (her $b \in M^c$) için $a \notin U (b \notin V)$ olur ki $\alpha \not\subset [x] (\beta \not\subset [y])$ elde edilir. Sonuç olarak Teorem 5.2.4 den $(A, K) \in \text{ConFCO}_{2cl}$ dir.

(3) Kabul edelim ki bazı $x, y \in A, x \neq y$ için $(A, K) \in \text{ConFCO}_{2cl}$ ve $[x] \cap [y] \in K$ olsun. Ayrıca $\alpha = [x] \cap [y] = \beta$ olsun. $\alpha, \beta \in K$ olmak üzere $\alpha \subset [x]$ ve $\beta \subset [y]$ olduğundan $\alpha \cup \beta$ öz olmayan süzgeçtir. Fakat bu bir çelişkidir. Çünkü $(A, K) \in \text{ConFCO}_{2cl}$ idi. Böylece farklı $x, y \in A$ için $[x] \cap [y] \notin K$ dir. O halde Teorem 5.2.3 den ConFCO_{1cl} olur.

Teorem 5.2.10 A sonlu bir küme olmak üzere aşağıdakiler denktir:

$$(1) (A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1Q}$$

$$(2) (A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$$

$$(3) (A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2Q}$$

$$(4) (A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{2cl}$$

İspat: A nın sonlu, $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ ve α nın A de öz süzgeç olduğunu kabul edelim. Bu durumda bazı $C \subset A$ için $\alpha = [C]$ olsun.

Farklı $y, x \in C$ noktaları için $\alpha \in K$ ise $\alpha \subset [y] \cap [x]$ ve $[x] \cap [y] \in K$ olur. Bu $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ ile çelişir. C tek nokta kümesi olmalıdır. $H \subset A$ ise H hem açık hem de kapalıdır. Gerçekten $H = \emptyset$ ise Tanım 4.1.3 den H hem açık hem de kapalıdır. $H = \{a\}$ tek nokta kümesi ise

$(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$ den H kapalı olur.

$$H^c = A \setminus \{a_1\} = \{a_2, a_3, \dots, a_n\} = \{a_2\} \cup \{a_3\} \cup \{a_4\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

kapalıdır. Böylece $H = \{a_1\}$ açık olur.

$$H = \{a_1, a_2, \dots, a_k\} = \{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_k\}$$

den H hem açık hem de kapalıdır.

Önerme 5.2.11 Teorem 5.2.9 ve 5.2.10 dan

$$\mathbf{ConFCO}_{2cl} = \mathbf{ConFCO}_{2scl} \subset \mathbf{ConFCO}_{1cl} = \mathbf{ConFCO}_{1scl} = \bar{\mathbf{T}}_0 \mathbf{ConFCO} = \mathbf{T}_1 \mathbf{ConFCO}$$

$$\mathbf{ConFCO}_{2cl} = \mathbf{ConFCO}_{2scl} \subset \mathbf{ConFCO}_{0cl} = \mathbf{ConFCO}_{0scl}$$

$$\mathbf{ConFCO}_{2cl} = \mathbf{ConFCO}_{2scl} \subset \mathbf{ConFCO}_{1cl} = \mathbf{ConFCO}_{1scl} \subset \mathbf{ConFCO}_{0cl} = \mathbf{ConFCO}_{0scl}$$

5.3 Bilinen Topolojik Kategorilerdeki Kapanış Operatörleri

Bu kısımda daha önce yapılan çalışmalarda araştırılan ve kapanış operatörleri sayesinde elde edilen dolu alt kategoriler ile alakalı sonuçlar verilecektir.

(1) **Top** kategorisinde,

$$\mathbf{Top}_{2cl} = \mathbf{Top}_{2scl} \subset \mathbf{Top}_{1cl} = \mathbf{Top}_{1scl} \subset \mathbf{Top}_{0cl} = \mathbf{Top}_{0scl}$$

(2) **Born** kategorisinde, Baran (2000) deki Lemma 2.11 den

$$\mathbf{Born}_{0cl} \subset \mathbf{Born}_{0scl}, \mathbf{Born}_{1cl} \subset \mathbf{Born}_{1scl} \text{ ve } \mathbf{Born}_{2cl} \subset \mathbf{Born}_{2scl}$$

(3) **FCO** kategorisinde, Baran (2000) deki Teorem 2.9 dan

$$\mathbf{FCO}_{2scl} \subset \mathbf{FCO}_{2cl} = \mathbf{FCO}_{1scl} = \mathbf{FCO}_{1cl} \subset \mathbf{FCO}_{0scl} = \mathbf{FCO}_{0cl}$$

(4) **RRel** kategorisinde, Baran (2023) deki Teorem 3.7 den

$$\mathbf{RRel}_{1cl} = \mathbf{T}_0 \mathbf{RRel} = \bar{\mathbf{T}}_0 \mathbf{RRel},$$

$$\mathbf{RRel}_{1scl} \subset \mathbf{RRel}_{1cl} \subset \mathbf{RRel}_{0cl},$$

$$\mathbf{RRel}_{1sQ} \subset \mathbf{RRel}_{1Q},$$

$$\mathbf{RRel}_{2cl} = \mathbf{RRel}_{2Q} = \mathbf{RRel}_{1scl} = \mathbf{RRel}_{1sQ} = \mathbf{RRel}_{2sQ} = \mathbf{RRel}_{2scl} = \mathbf{T}_1 \mathbf{RRel}$$

(5) **CP** kategorisinde, Baran (1994) deki Teorem 3.8 den ve Baran (2023) den

$$\mathbf{CP}_{1cl} = \mathbf{CP}_{2cl} = \mathbf{CP}_{1Q} = \mathbf{CP}_{2Q} = \mathbf{CP}_{1sQ} = \mathbf{CP}_{2sQ} = \mathbf{CP}_{1scl} = \mathbf{CP}_{2scl}$$

$$\mathbf{CP}_{1Q} = \mathbf{CP}_{2Q} = \bar{\mathbf{T}}_0 \mathbf{CP} = \mathbf{T}'_0 \mathbf{CP} = \mathbf{T}_1 \mathbf{CP} = \mathbf{CP}$$

(6) **ConLim** kategorisinde, Erciyes vd. (2024) den Teorem 4 ve 6 dan

$$\mathbf{ConLim}_{2cl} = \mathbf{ConLim}_{2scl} \subset \mathbf{ConLim}_{0cl} = \mathbf{ConLim}_{1cl} \subset \mathbf{ConLim}_{2scl}$$

$$= \mathbf{ConLim}_{0scl} = \mathbf{ConLim}_{1scl} = \mathbf{ConLim}$$

(7) **psqMet** kategorisinde Baran ve Kula (2022) deki Teorem 3.3-3.5 ve 3.15 ile Baran (2020) deki Teorem 3.10 dan

$$\mathbf{T}_1 \mathbf{psqMet} = \mathbf{psqMet}_{1sQ} = \mathbf{psqMet}_{1scl} = \mathbf{psqMet}_{2scl} \subset \mathbf{psqMet}_{1cl}$$

$$= \mathbf{psqMet}_{2cl} = \mathbf{psqMet}_{1Q} = \bar{\mathbf{T}}_0 \mathbf{psqMet}$$

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında **ConFCO** kategorisi ile ilgili aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır.

(1) $\mathbf{c} = cl, scl, Q, sQ$ olmak üzere iki farklı (Teorem 4.2.4 den dolayı **ConFCO** da kapalı ve kuvvetli kapalılık birbirinin aynısı olduğundan) kapanış operatörü üzerinde duruldu. Bu kapanış operatörlerinin idempotent, (sonlu) çarpımsal, (sonlu) toplamsal, (zayıf) kalıtsal olup olmaması Teorem 5.1.3 de ifade ve ispat edildi. Verilen bir kümenin sonlu veya sonsuz olması durumuna göre kapanış operatörleri arasındaki ilişkiler Teorem 5.2.10 da gösterildi.

(2) Teorem 4.2.4 ve 5.2.3 den aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) $(B, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1scl}$,
- (ii) $(B, K) \in \mathbf{ConFCO}_{1cl}$,
- (iii) $(B, K), T_1$ dir,
- (iv) $(B, K), \bar{T}_0$ dir,
- (v) Birbirinden farklı her $x, y \in B$ için $[x] \cap [y] \notin K$ dir.

(3) Teorem 5.2.2 den **ConFCO**_{ocl} ve **ConFCO**_{oscl} izomorfik kategorilerdir.

(4) Teorem 5.2.8 den $i = 0, 1, 2$ için **ConFCO**_{icl} kategorileri **ConFCO** nun epirefleksif alt kategorileridir.

(5) Teorem 5.2.5 den **ConFCO**_{1cl} ve **ConFCO**_{2cl} kategorileri **ConFCO** nun bölüm-yansımalı (quotient-reflective) alt kategorileridir.

(6) Teorem 5.2.8 den aşağıdaki kategoriler ikişerli olarak izomorftur.

- (i) **ConFCO**_{1cl}
- (ii) **ConFCO**_{1scl}
- (iii) **T**₁**ConFCO**
- (iv) **T**₀**ConFCO**

(7) Teorem 5.2.9 dan

- (i) **ConFCO**_{1Q} $\subset$ **ConFCO**_{1cl}
- (ii) **ConFCO**_{1Q} $\subset$ **ConFCO**_{2cl}
- (iii) **ConFCO**_{2cl} $\subset$ **ConFCO**_{1cl}

(8) Teorem 5.2.10 dan A sonlu bir küme olmak üzere $i = 1, 2$ için

(i) $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{iQ}, (A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{icl}$

(ii) $(A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{iscl}, (A, K) \in \mathbf{ConFCO}_{isQ}$

Bu tez çalışmasında kapanış operatörleri ile elde edilen sonuçlar kullanılarak konunun farklı ve çözüme açık yönleri düşünüldüğünde aşağıda belirtilen sorulara cevaplar aranabilir.

(1) **ConFCO** topolojik kategorisinde kapanış operatörleri kullanılarak literatürde yer alan diğer kapanış operatörleri karakterize edilebilir mi?

(2) Bu kapanış operatörleri ile elde edilen alt kategorilerin, **ConFCO** daki ayırma aksiyomları ile oluşturulan alt kategoriler ile kıyaslaması (izomorfizm, bölüm-yansımali, epirefleksif, birefleksif, vb.) yapılabilir mi?

(3) $c = cl, scl, Q, sQ$ olmak üzere c -bağlantılı, c -bağlantısız, tam bağlantısız, aşırı bağlantısız, kalıtsal bağlantısız objeler karakterize edilebilir mi?

KAYNAKLAR

- Adamek, J., Herrlich, H., ve Strecker, G. E., 1990. Abstract and concrete categories, A Willey–Interscience Publication, New York, USA.
- Baran, M., 1991. Separation properties, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 23, 333–341.
- Baran, M., 1992. Stack and Filter, Doğa-Turkish Journal of Mathematics, 16, 95–108.
- Baran, M., 1993. The notion of closedness in topological categories, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, 34, 2, 383–395.
- Baran, M., 1994. Separation properties in categories of constant convergence spaces, Turkish Journal of Mathematics, 18, 238–248.
- Baran, M. ve Altındış, H., 1996. T_2 – objects in topological categories. Acta Mathematica Hungarica, 71, 41–48.
- Baran, M., 1997. A notion of compactness in topological categories, Publications Mathematicae Debrecen, 50, 221–234.
- Baran, M., 1998. Completely regular objects and normal objects in topological categories. Acta Mathematica Hungarica.
- Baran, M., 2000. Closure operators in convergence spaces, Acta Mathematica Hungarica, 87, 33–45.
- Baran, M., 2002. Compactness, Perfectness, Separation, Minimality and Closedness with Respect to Closure Operators, Applied Categorical Structures, 10, 403–415.
- Baran, M. ve Kula, M., 2006. A note on connectedness, Publications Mathematicae Debrecen, 68, 489–501.
- Baran, M., Kula, S., Baran, T.M. ve Qasim, M., 2016. Closure Operators in Semiuniform Convergence Spaces, Filomat, 30, 131–140.
- Baran, M., 2023. Separation, connectedness, and disconnectedness, Turkish Journal of Mathematics, 47, 279–295.
- Baran, M., 2025. Topoloji, Nobel Akademik Yayıncılık, Ankara.
- Baran, T.M., 2020. Closedness, separation and connectedness in pseudo-quasi-semi metric spaces, Filomat, 34, 4757–4766.
- Baran, T.M. ve Kula, M., 2022. Separation axioms, Urysohn’s Lemma, and Tietze Extension Theorem for pseudo-quasi-semi metric spaces, Filomat, 36, 2,

703–713.

Bently, H. L., Herrlich, H., Lowen-Colebunders, E., 1987. The category of Cauchy spaces is Cartesian closed, *Topology and its Applications* 27, 105–112.

Bently, H.L., Herrlich, H. ve Lowen–Colebunders, E., 1990. Convergence, *Journal of Pure and Applied Algebra*, 68, 27–45.

Cartan, H. 1937. Théorie des filtres, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 205, 595–598.

Castellini, G. ve Hajek, D., 1994. Closure operators and connectedness, *Topology and its Applications*, 55, 29–45.

Choquet. G., 1947. Convergences, *Annales de l'université de Grenoble, Nouvelle Série, Section Sciences Mathématiques et Physiques (NS)*, 23, 55–112.

Choquet, G., 1947. Sur les notions de filtre et de grille, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 224, 171–173.

Clementino, M.M. ve Tholen, W., 1997. Separation versus connectedness, *Topology and its Applications*, 75, 143–181.

Cook, C. H. ve Fischer, H. R., 1967. Uniform convergence structures, *Mathematische Annalen*, 173, 290–306.

Császár, Á., 1996. λ -complete filter spaces, *Acta Mathematica Hungarica*, 70 (1996), 75–87.

Dikranjan, D. ve Giuli, E., 1987. Closure operators I, *Topology and its Applications*, 27, 129–143.

Dikranjan, D. ve Giuli, E., 1992. Epis in categories of convergence spaces, *Acta Mathematica Hungarica*, 61, 195–201.

Dikranjan, D. ve Tholen, W., 1995. *Categorical Structure of Closure Operators*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Edgar, G. A., 1976. A Cartesian closed category for topology, *General Topology and its Applications*, 6, 65–72.

Eilenberg, S. ve MacLane, S., 1945. General theory of natural equivalences, *Transactions of the American Mathematical Society*, 58, 2, 231–294.

Erciyes A, Baran T. M., ve Qasim M., 2020. Closure operators in constant filter convergence spaces, *Konuralp Journal of Mathematics*, 8, 1, 185–191.

Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2020. Local T_3 constant filter convergence spaces, *Gazi University Journal of Science*, 33, 2, 446–454.

- Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2021. T_4 , Urysohn's Lemma, and Tietze Extension Theorem for constant filter convergence space, *Turkish Journal of Mathematics*, 45, 843–855.
- Erciyes, A., Qasim, M. ve Güvey, İ.A., 2024. Separation, compactness, and sobriety in the category of constant limit spaces, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 73, 2, 319–335.
- Erciyes, A. ve Baran, T.M., 2025. Separation and connectedness in the category of constant filter convergence spaces, *Filomat*, 39, 2, 587–600.
- Fischer, H. R., 1959. Limesräume, *Mathematische Annalen*, 137, 269–303.
- Hausdorff, F., 1935. Gestufte Räume, *Fundamenta Mathematicae*, 25, 486–502.
- Katětov, M., 1965. On continuity structures and spaces of mappings, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 6, 257–278.
- Kent, D. C., 1964. Convergence functions and their related topologies, *Fundamenta Mathematicae*, 54, 125–133.
- Kowalsky, H., 1954. Limesräume und Komplettierung, *Mathematische Nachrichten*, 12, 301–340.
- Lechicki, A. ve Ziemińska, J., 1987. On uniform convergence structures, *Mathematische Nachrichten*, 184, 169–187.
- Moore, A., 1987. *Introduction to a Form of General Analysis*, New Haven: Yale University Press.
- Nauwelaerts, M., 2000. Some Cartesian closed topological constructs in the category of semi-approach uniform limit spaces, *Acta Mathematica Hungarica*, 88, 59–71.
- Preuss, G., 1979. Connection properties in topological categories and related topics, *Springer Lecture Notes in Mathematics* 719, 326–344.
- Preuss, G., 1998. The topological universe of locally precompact semiuniform convergence spaces, *Topology and its Applications*, 82, 387–396.
- Preuss, G., 2002. *Foundations of Topology—An Approach to Convenient Topology*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- Salbany, S., 1976. Reflective subcategories and closure operators, *Categorical Topology, The Lecture Notes in Mathematics* 719, 548–565.
- Schwarz, F. ve Hannover, T.U., 1978. Connections between convergence and nearness, *Categorical Topology, Lecture Notes in Mathematics*, 719, 345–425.
- Weil, A., 1937. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, *Actualités scientifiques et industrielles*, 551. Hermann, Paris.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı : Kübra KAYA

EĞİTİM BİLGİLERİ (Kurum ve Yıl)

Lisans : Gazi Üniversitesi, Gazi Eğitim Fakültesi, Matematik
Öğretmenliği Bölümü, 2007–2012.

Yüksek Lisans : Aksaray Üniversitesi, Matematik A.B.D., 2022–2025.

MESLEKİ DENEYİM VE ÖDÜLLERİ

1. MEB, Ağrı Doğubeyazıt A Takımı Savaş Ay Anadolu Lisesi, 2014–2018.
2. MEB, Aksaray Eski Ahmet Yaşar Eşmekaya Anadolu Lisesi, 2018–2022.
3. MEB, Aksaray Türkiye Odalar ve Borsalar Birliği Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi, 2022–

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER

Kongrelerde Sunulan Makaleler

1. Kübra KAYA ve Ayhan ERCİYES, Sabit süzgeç yakınsak uzaylar kategorisinde kapalı alt objeler, 5. BİLSEL International Truva Scientific Researches and Innovation Congress 2024, 02–03 Kasım 2024, Çanakkale.