

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SAÇILIM TERİMİ İÇEREN BİR KİNETİK DENKLEM İÇİN BİR TERS
PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN ARAŞTIRILMASI**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

NESLİHAN ALBUZ

EYLÜL 2019

ZONGULDAK BÜLENT ECEVİT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**SAÇILIM TERİMİ İÇEREN BİR KİNETİK DENKLEM İÇİN BİR TERS
PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN ARAŞTIRILMASI**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Neslihan ALBUZ

DANIŞMAN: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN

ZONGULDAK

Eylül 2019

KABUL:

Neslihan ALBUZ tarafından hazırlanan “Saçılım Terimi İçeren Bir Kinetik Denklem İçin Bir Ters Problemin Yaklaşık Çözümünün Araştırılması” başlıklı bu çalışma jürimiz tarafından değerlendirilerek Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak oybirliğiyle kabul edilmiştir. 27/09/2019

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Nazmiye GÖNÜL BİLGİN

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü



Üye: Dr. Öğr. Üyesi Funda TÜRK

Bartın Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü



ONAY:

Yukarıdaki imzaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../2019



Prof. Dr. Ahmet ÖZARSLAN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

“Bu tezdeki tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu; ayrıca bu kuralların ve ilkelerin gerektirdiği şekilde, bu çalışmadan kaynaklanmayan bütün atıfları yaptığımı beyan ederim.”

Neslihan ALBUZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SAÇILIM TERİMİ İÇEREN BİR KİNETİK DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN ARAŞTIRILMASI

Neslihan ALBUZ

Zonguldak Bülent Ecevit Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN

Eylül 2019, 51 sayfa

Bu tez çalışmasında, sınırlı bir bölgede saçılım terimi içeren durağan bir kinetik denklem için bir ters problem ele alınmıştır. Tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde ele alınan problemin uygulamadaki yeri ve önemi belirtilmiş ayrıca bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. İkinci bölümde problemin çözülebilirlik şartları sunulmuştur. Üçüncü bölümde problemin sayısal çözümünü elde etmek için sonlu fark yaklaşımına ve Newton-Cotes formüllerine dayanan bir çözüm algoritması oluşturulmuştur. Son olarak, dördüncü bölümde önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için elde edilen yaklaşık çözümler kesin çözümler ile tablo ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Kinetik denklem, ters problem, sonlu fark metodu, Newton-Cotes yöntemi.

Bilim Kodu: 403.06.00



ABSTRACT

M. Sc. Thesis

INVESTIGATION OF APPROXIMATE SOLUTION OF AN INVERSE PROBLEM FOR A KINETIC EQUATION WITH SCATTERING TERM

Neslihan ALBUZ

**Zonguldak Bülent Ecevit University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics**

Thesis Advisor: Assist. Prof. Dr. İsmet GÖLGELEYEN

September 2019, 51 pages

In this thesis, an inverse problem for a stationary kinetic equation with scattering term is considered in a bounded domain. The thesis consists of four chapters. In the first chapter, the importance of the problem in applications is mentioned. Moreover, some basic definitions and theorems are given. In the second chapter, solvability conditions for the problem are presented. In the third chapter, in order to obtain the approximate solution of the problem, a solution algorithm is developed based on the finite difference approximation and Newton-Cotes formulas. In the last chapter, in order to show the effectiveness of the proposed method, approximate solutions are compared with the exact solutions by using tables and graphs.

Keywords: Kinetic equation, inverse problem, finite difference method, Newton-Cotes formulas.

Science Code: 403.06.00



TEŞEKKÜR

Tezimin her aşamasında görüş ve önerileriyle beni yönlendiren, değerli vaktini hiç esirgemedi, ayıran, danışman hocam sayın Dr. Öğr. Üyesi İsmet GÖLGELEYEN'e sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarımın tüm aşamasında değerli vaktini ayırıp sorularıma cevap veren ve önerilerde bulunan hocam sayın Doç. Dr. Fikret GÖLGELEYEN'e saygı ve teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim. Tezime olan katkılarından dolayı Muhammed HASDEMİR'e teşekkür ederim.

Geçen süreçte hakkını hiçbir zaman ödeyemeyeceğim kıymetli anneme, her daim destekçim olan sevgili eşime, ilham kaynağım kızım Berrak ALBUZ'a teşekkür ederim. Bu tez çalışmasını rahmetli babam Tasin ORHANLI'nın anısına ithaf ediyorum.



İÇİNDEKİLER

	<u>Sayfa</u>
KABUL	ii
ÖZET	iii
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vii
İÇİNDEKİLER.....	ix
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	xi
ÇİZELGELER DİZİNİ	xiii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ.....	xv
 BÖLÜM 1 ÖNBİLGİLER	 1
1.1 GİRİŞ	1
1.2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER.....	2
 BÖLÜM 2 PROBLEM 1.1'İN ÇÖZÜLEBİLİRLİK ŞARTLARI.....	 5
 BÖLÜM 3 SAÇILIM TERİMİ İÇEREN BİR KİNETİK DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN ARAŞTIRILMASI	 9
3.1 TÜREVLERE SONLU FARK YAKLAŞIMI	9
3.2 NEWTON-COTES YÖNTEMİ	10
3.3 PROBLEM 3.1'İN SAYISAL ÇÖZÜMÜ	11
 BÖLÜM 4 SAYISAL ÖRNEKLER VE SONUÇ	 15
4.1 SAYISAL ÖRNEKLER.....	15
4.2 SONUÇ	48

İÇİNDEKİLER (devam ediyor)

	<u>Sayfa</u>
KAYNAKLAR.....	49
ÖZGEÇMİŞ	51



ŞEKİLLER DİZİNİ

No	Sayfa
Şekil 4.1 Örnek 4.1 için verilen (a) u için kesin çözüm ve (b) λ için kesin çözüm.....	16
Şekil 4.2 Örnek 4.1 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı	17
Şekil 4.3 Örnek 4.1 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görünümü.....	17
Şekil 4.4 Örnek 4.1 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.....	18
Şekil 4.5 Örnek 4.1 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.....	18
Şekil 4.6 Örnek 4.1 de u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	19
Şekil 4.7 Örnek 4.1 de u için Şekil 4.6 nın yakından görünümü	19
Şekil 4.8 Örnek 4.1 de u için (a) $i=3$ ve (b) $j=2$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm.....	20
Şekil 4.9 Örnek 4.1 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.	20
Şekil 4.10 Örnek 4.1 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.....	21
Şekil 4.11 Örnek 4.1 de λ için çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	21
Şekil 4.12 Örnek 4.1 de λ için Şekil 4.11 in yakından görünümü	22
Şekil 4.13 Örnek 4.2 için verilen (a) u kesin çözümü ve (b) λ kesin çözümü.....	23
Şekil 4.14 Örnek 4.2 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı	24
Şekil 4.15 Örnek 4.2 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görünümü.....	24
Şekil 4.16 Örnek 4.2 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.....	25
Şekil 4.17 Örnek 4.2 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.....	25
Şekil 4.18 Örnek 4.2 de u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	26
Şekil 4.19 Örnek 4.2 de u için Şekil 4.18'in yakından görünümü	26
Şekil 4.20 Örnek 4.2 de u için (a) $i=5$ ve (b) $j=3$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm.....	27
Şekil 4.21 Örnek 4.2 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.....	27
Şekil 4.22 Örnek 4.2 de λ için yaklaşık ve gerçek çözümlerin birlikte gösterimi.....	28
Şekil 4.23 Örnek 4.2 de λ nın çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	28
Şekil 4.24 Örnek 4.2 de λ için Şekil 4.23 ün yakından görünümü.....	29
Şekil 4.25 Örnek 4.2 de λ nın karşılaştırmalı grafiksel gösteriminin (a) $i=5$, (b) $j=3$ için kesitsel görünümü.....	29
Şekil 4.26 Örnek 4.3 için (a) u kesin çözüm ve (b) λ kesin çözüm.....	30
Şekil 4.27 Örnek 4.3 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı	31
Şekil 4.28 Örnek 4.3 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görünümü.....	31
Şekil 4.29 Örnek 4.3 için u için (a) yaklaşık çözümü ve (b) gerçek çözümü	32
Şekil 4.30 Örnek 4.3 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.....	32
Şekil 4.31 Örnek 4.3 de u nun karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	33
Şekil 4.32 Örnek 4.3 de u için Şekil 4.31 in yakından görünümü	33
Şekil 4.33 Örnek 4.3 de u nun çözüm vektörünün (a) $i=3$ ve (b) $j=2$ için kesitsel gösterimi .	34
Şekil 4.34 Örnek 4.3 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm	34
Şekil 4.35 Örnek 4.3 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.....	35

ŞEKİLLER DİZİNİ (devam ediyor)

No	Sayfa
Şekil 4.36 Örnek 4.3 de λ nın karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	35
Şekil 4.37 Örnek 4.3 de λ için Şekil 4.36 nın yakından görünümü	36
Şekil 4.38 Örnek 4.3 de λ nın çözümünün (a) $i=2$ ve (b) $j=5$ için kesitsel görünümü	36
Şekil 4.39 Örnek 4.4 de (a) u için kesin çözüm ve (b) λ için kesin çözüm	37
Şekil 4.40 Örnek 4.4 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı	38
Şekil 4.41 Örnek 4.4 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görünümü	38
Şekil 4.42 Örnek 4.4 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm	39
Şekil 4.43 Örnek 4.4 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi	39
Şekil 4.44 Örnek 4.4 de u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	40
Şekil 4.45 Örnek 4.4 de u için (a) $i=3$ ve (b) $j=2$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm	40
Şekil 4.46 Örnek 4.4 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm	41
Şekil 4.47 Örnek 4.4 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi	41
Şekil 4.48 Örnek 4.4 de λ nın karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	42
Şekil 4.49 Örnek 4.4 de λ için (a) $i=3$ ve (b) $j=2$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm	42
Şekil 4.50 Örnek 4.5 de verilen (a) u için kesin çözüm ve (b) λ için kesin çözüm	43
Şekil 4.51 Örnek 4.5 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı	44
Şekil 4.52 Örnek 4.5 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm	44
Şekil 4.53 Örnek 4.5 de u için yaklaşık ve gerçek çözümler birleştirilmiştir	45
Şekil 4.54 Örnek 4.5 de u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	45
Şekil 4.55 Örnek 4.5 de u için (a) $i=5$ ve (b) $j=3$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm	46
Şekil 4.56 Örnek 4.5 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm	46
Şekil 4.57 Örnek 4.5 de λ için yaklaşık ve gerçek çözümlerin birlikte gösterimi	47
Şekil 4.58 Örnek 4.5 de λ nın çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi	47
Şekil 4.59 Örnek 4.5 de λ için (a) $i=5$ ve (b) $j=4$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm	48

ÇİZELGELER DİZİNİ

No

Sayfa

Çizelge 4.1 Örnek 4.1 de $u(x,v)$ ve $\lambda(x,v)$ için sayısal sonuçlar 16

Çizelge 4.2 Örnek 4.2 de $u(x,v)$ ve $\lambda(x,v)$ için sayısal sonuçlar 23





SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER

Ω	: Verilen bir bölge
$\bar{\Omega}$	: Ω bölgesinin kapanışı
$\partial\Omega$	: Ω bölgesinin sınırı
$C^k(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı k . mertebeye kadar sürekli kısmi türevlere sahip fonksiyonlar uzayı
$C_0^\infty(\Omega)$	: Ω bölgesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nın kompakt alt kümesi olan fonksiyonlar uzayı
$\nabla_x u$	: $u(x)$ fonksiyonunun gradienti; $\nabla_x u = (u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_n})$
$\nabla_v u$	: $u(v)$ fonksiyonunun gradienti; $\nabla_v u = (u_{v_1}, u_{v_2}, \dots, u_{v_n})$
$H^k(\Omega)$	: Kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L_2(\Omega)$ ya ait olan fonksiyonlar uzayı
$L_1(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$L_2(\Omega)$	: Ω üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve karesi integrallenebilir fonksiyonlar uzayı
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	: $L_2(\Omega)$ da iç çarpım



BÖLÜM 1

ÖN BİLGİLER

1.1 GİRİŞ

Bu çalışmada, bir

$$\Omega = \{(x, v) \mid x \in D \subset \mathbb{R}^n, v \in G \subset \mathbb{R}^n, n \geq 1\}$$

bölgesinde

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^n (v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial u}{\partial v_i}) + \int_G K(x, v, v') u(x, v') dv' = \lambda(x, v) \quad (1.1)$$

kinetik denklemi ele alınacaktır. Kinetik denklemler matematiksel fiziğin temel denklemleri olup maddenin hareketinin sürekliliğini modellemektedir. Fizik, Kimya, Biyoloji ve Sosyal bilimlerdeki birçok olayın matematiksel tasvirinde karşımıza çıkmaktadır (Anikonov 2001). Kinetik denklemler için ters problemler hem teorik hem de pratik açıdan önemlidir. Bu problemler fiziksel olarak parçacık etkileşim kuvvetleri, radyasyon kaynakları, saçılım göstergeleri ve diğer fiziksel parametrelerin belirlenmesini içerir (Amirov 2001).

Bu tezde aşağıdaki problemin yaklaşık çözümü araştırılmıştır:

Problem 1.1 *Kabul edelim ki $f \in C^1(\bar{\Omega})$, $K(x, v, v') \in C^2(\bar{\Omega})$ fonksiyonları verilsin. (1.1) denklemini ve*

$$u|_{\partial\Omega} = u_0, \quad (1.2)$$

$$\hat{L}\lambda \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x_i \partial v_i} = 0 \quad (1.3)$$

bağıntılarını sağlayan Ω da tanımlı (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Yukarıda verilen (1.3) diferensiyel denklemi genelleşmiş fonksiyonlar anlamında sağlanır. Yani her $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\langle \lambda, \hat{L}^* \eta \rangle = 0$$

dır. Burada $\hat{L}^$, $\hat{L}$ nın Lagrange anlamında eşlenik ifadesidir.*

Matematiksel fiziğin problemleri geleneksel olarak aşağıdaki kurala göre direkt ve ters problem olarak sınıflandırılmaktadır. Örneğin fiziksel bir sistem içerisinde ve dış etkiye maruz olan bir süreci ele alalım. Sistemin özelliklerinin bilindiği kabul edilmektedir. Bu durumda bu süreci tanımlama problemi direkt problem olarak ifade edilir. Bununla birlikte başka bir durumda mümkündür. Kabul edelim ki bu sürecin nasıl işlediği hakkında ek bir bilgimiz olsun fakat sistemin bazı parametreleri veya kaynakları bilinmesin. Bu parametrelerin belirlenmesi problemi ters problem olarak adlandırılır.

Klasik olarak direkt problem, uygun fizik yasalarını kullanarak verilen bir sebepten bir tek sonucun bulunması olarak ifade edilir. Bu nedenle geleneksel olarak matematikte ve diğer doğa bilimlerinde bir problemin çözümünün varlığı, tekliği ve küçük değişikliklere karşı duyarlılığı önemli bir araştırma konusu olmaktadır. Böyle problemlere iyi konulmuş problem denir.

Bilim ve teknolojiadaki gelişmeler ve gereksinimler doğrultusunda klasik direkt problemlere ters olan problemlerin çözümüne ihtiyaç duyulmuştur. Daha açık olarak bir sonuçtan nedenin veya neden ve sonuç verildiğinde fizik kanunlarının belirlenmesi problemi ortaya çıkmıştır. Bu tür problemlere örnek olarak sınırda yapılan ölçümlerden ulaşılamayan bir bölgenin iç yapısının özelliklerinin belirlenmesi, girdi ve çıktı ölçümlerinden sistem parametrelerinin belirlenmesi, bugüne ait verilerden geçmiş olayların belirlenmesi gibi uzaktan algılama ve direkt olmayan ölçüm ile ilgili pek çok problem verilebilir.

Bu tür ters problemler genellikle kötü konulmuştur çünkü farklı sebepler aynı sonucu doğurabilir ve sonuçta ortaya çıkan küçük değişiklikler verilen sebepte büyük bir değişikliğe karşılık gelebilir (Blagoveshchenskii 2001, Groetsch 1993).

1.2 TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Tanım 1.1 ($C^k(\Omega)$ Uzayı) Ω , $\mathbb{R}^n$ uzayında bir bölge olsun. Her negatif olmayan k tam sayısı için $|\alpha| \leq k$ olmak üzere $D^\alpha \varphi$ kısmi türevleri Ω bölgesinde sürekli olacak şekilde tüm φ fonksiyonlarının oluşturduğu vektör uzayı $C^k(\Omega)$ ile gösterilir (Adams and Fournier 2003, s. 10). Bu uzayda norm aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\|f\|_{C^k(\bar{\Omega})} = \sum_{|\alpha| \leq k} \max_{x \in \bar{\Omega}} |D^\alpha f(x)|.$$

Tanım 1.2 ($L^2(\Omega)$ Uzayı) Ω bölgesi üzerinde Lebesgue ölçülebilir ve modülünün karesi integrallenebilir tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. $L^2(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f_1(x) \overline{f_2(x)} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir (Mikhailov 1978, s. 105).

Tanım 1.3 Eğer u , G üzerinde tanımlı bir fonksiyon ise, u nun supportu

$$\text{supp}(u) = \overline{\{x \in G : u(x) \neq 0\}}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer $\text{supp}(u) \Subset \Omega$ ise, Ω da u nun kompakt supportu vardır denir (Adams and Fournier 2003, s. 2).

Tanım 1.4 ($C_0^\infty(\Omega)$ Uzayı) $C_0^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlı sonsuz defa diferensiyellenebilir ve supportu Ω nun kompakt alt kümesi olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir (Mikhailov 1978, s. 10).

Tanım 1.5 (Genelleşmiş Fonksiyon) $C_0^\infty(\Omega)$ üzerinde aşağıdaki yakınsaklık yardımı ile verilen topoloji ile elde edilen uzaya test fonksiyonlar uzayı denir ve $D(\Omega)$ ile gösterilir:

- i) Öyle bir $K \subset \Omega$ kompakt cümlesi vardır ki her $k \in \mathbb{N}$ için $\text{supp } \varphi_k \in K$ dır.
- ii) Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ve $k \rightarrow \infty$ için $D^\alpha \varphi_k(x) \rightarrow D^\alpha \varphi(x)$ yakınsaması Ω bölgesinde düzgün ise $k \rightarrow \infty$ için $\varphi_k \xrightarrow{D(\Omega)} \varphi$ yakınsar denir.

$D(\Omega)$ topolojik uzayında tanımlı sürekli, lineer fonksiyonellere genelleşmiş fonksiyon denir. Genelleşmiş fonksiyonlar sınıfı $D'(\Omega)$ ile gösterilir (Vladimirov 1971, s. 66).

Tanım 1.6 (Genelleşmiş Türev) $f \in D'(\Omega)$ olmak üzere, f genelleşmiş fonksiyonunun $D^\alpha f$ (genelleşmiş) türevi,

$$(D^\alpha f, \varphi) = (-1)^{|\alpha|} (f, D^\alpha \varphi), \varphi \in D(\Omega)$$

eşitliği ile tanımlanır (Vladimirov 1971, s. 79).

Tanım 1.7 ($H^k(\Omega)$ Uzayı) $H^k(\Omega)$, kendisi ve k . mertebeye kadar tüm genelleşmiş türevleri $L^2(\Omega)$ ya ait olan tüm fonksiyonların oluşturduğu cümledir. $H^k(\Omega)$, üzerinde tanımlanan

$$(f_1, f_2)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha f_1 \overline{D^\alpha f_2} dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır, bu iç çarpım ile tanımlanan norm

$$\|f\|_{H^k(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^\alpha f|^2 dx \right)^{1/2}$$

biçimindedir (Mikhailov 1978, s. 121).

Tanım 1.8 (Steklov Eşitsizliği) Her $f \in H_0^1(\Omega)$ için

$$\|f\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq C \int_G |\nabla f|^2 dx$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $C > 0$ sayısı sadece Ω bölgesine bağlıdır (Mikhailov 1978, s. 149).

Tanım 1.9 (Büyük $\mathcal{O}$ gösterimi) Eğer $\forall s \in S$ için $|f(s)| \leq A |\phi(s)|$ olacak şekilde bir A sabiti varsa $s \in S$ için $f(s) = \mathcal{O}(\phi(s))$ dir. Bu durumda $f(s)$, $\phi(s)$ mertebededir denir (Thomas 2013, s. 11).

BÖLÜM 2

PROBLEM 1.1'İN ÇÖZÜLEBİLİRLİK ŞARTLARI

Bu bölümde, Problem 1.1'in çözülebilirliği için ispat yöntemi Amirov (2001) de verilen iki teorem sunulmuştur. Bu amaçla ilk olarak aşağıdaki kümeyi tanımlayalım:

$\Gamma(A)$ kümesi aşağıdaki özellikleri sağlayan fonksiyonlardan oluşan bir kümedir:

- i. $u \in \Gamma(A)$ için genelleşmiş fonksiyonlar anlamında $Au \in L_2(\Omega)$ dır. Burada $Au = \hat{L}Lu$ olarak tanımlıdır.
- ii. Bir $\{u_k\} \subset \tilde{C}_0^3 = \{\varphi : \varphi \in C^3(\Omega), \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$ dizisi vardır öyle ki $u_k \xrightarrow{L_2(\Omega)} u$ ve $\langle Au_k, u_k \rangle \rightarrow \langle Au, u \rangle, k \rightarrow \infty$ dır.

Teorem 2.1 *Kabul edelim ki $f \in C^1(\Omega)$, $K(x, v, v') \in C^1(\bar{D} \times \bar{G} \times \bar{G})$ olsun ve aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın:*

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \xi^i \xi^j \geq \alpha_1 |\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n,$$

$$\alpha_1 - \frac{L_0}{2} > \alpha_2, \quad L_0 = l_0 C, \quad l_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{x \in \bar{D}} \int_G \int_G K_{v_i}^2(x, v, v') dv dv' \right\}. \quad (2.1)$$

Bu durumda Problem 1.1, en çok bir (u, λ) çözümüne sahiptir öyle ki $u \in \Gamma(A)$ ve $\lambda \in L_2(\Omega)$ dır. Burada α_1, α_2 pozitif sayılardır.

İspat. Kabul edelim ki (u, λ) , $\partial\Omega$ sınırında $u = 0$ ve $u \in \Gamma(A)$ olacak şekilde Problem 1'in bir çözümü olsun. (1.1) denklemi ve (1.3) şartından $Au = 0$ olur. $u \in \Gamma(A)$ olduğundan bir $\{u_k\} \subset \tilde{C}_0^3$ dizisi vardır öyle ki $L_2(\Omega)$ da $u_k \rightarrow u$ yakınsar ve $k \rightarrow \infty$ iken $\langle Au_k, u_k \rangle \rightarrow 0$ olur. $\partial\Omega$ sınırında $u_k = 0$ olduğu göz önünde bulundurularak

$$-2 \langle Au_k, u_k \rangle = 2 \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial}{\partial v_i} (Lu_k), u_{k_{x_i}} \right\rangle$$

yazılabilir. Son eşitliğin sağ tarafı için:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n 2 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial v_i} (Lu_k) &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_j} \left(v_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(v_i \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \\
&- \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(v_i \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \right) - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(f_i \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \right) \\
&+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(v_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 \right) + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_j} \left(f_i \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \\
&+ \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial v_i} \left(f_i \frac{\partial u_k}{\partial v_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) + \int_G K_{v_i}(x, v, v') u_k(x, v') dv' \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (2.2)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Eğer bölgenin geometrisi ve $\partial\Omega$ 'da $u_k = 0$ olması dikkate alınırsa (2.2) den

$$- \langle Au_k, u_k \rangle = J(u_k) \quad (2.3)$$

elde edilir. Burada

$$J(u_k) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial v_i} \frac{\partial u_k}{\partial v_j} + \int_G K_{v_i}(x, v, v') u_k(x, v') dv' \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) d\Omega \quad (2.4)$$

dır. (2.4) teki üçüncü terimi aşağıdaki şekilde değerlendirebiliriz:

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \int_G K_{v_i}(x, v, v') u_k(x, v') dv' u_{k_{x_i}} d\Omega \\
&\geq - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \left(\left(\int_G K_{v_i}(x, v, v') u_k(x, v') dv' \right)^2 + (u_{k_{x_i}})^2 \right) d\Omega \\
&\geq -L_0 \int_{\Omega} |\nabla_v u_k|^2 d\Omega - \int_{\Omega} |\nabla_x u_k|^2 d\Omega. \quad (2.5)
\end{aligned}$$

Burada

$$l_0 = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \max_{x \in \bar{D}} \int_G \int_G K_{v_i}^2(x, v, v') dv dv' \right\}, L_0 = l_0 C$$

dır. Ω bölgesi sınırlı ve $\partial\Omega$ sınırında $u_k = 0$ olduğundan, Steklov eşitsizliği, teoremin kabulleri ve (2.5) den

$$\begin{aligned} J(u_k) &> \frac{1}{2} \int_G |\nabla_x u_k|^2 d\Omega + \alpha_1 \int_\Omega |\nabla_v u_k|^2 d\Omega - \frac{L_0}{2} \int_\Omega |\nabla_v u_k|^2 d\Omega - \frac{1}{2} \int_G |\nabla_x u_k|^2 d\Omega \\ &\geq c \int_G |u_k|^2 d\Omega, c > 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. $\Gamma(A)$ nın tanımını kullanarak

$$c \int_G u^2 d\Omega \leq 0$$

bulunur. Bu durumda (1.1) denkleminde

$$\lambda(x, v) = 0$$

olduğu görülür. Böylece Problem 1'in çözümünün tekliği ispatlanmış olur. ■

Eğer $u_0 \in C^3(\partial\Omega)$ ve $\partial D \in C^3$, $\partial G \in C^3$ ise Problem 1.1 aşağıdaki probleme indirgenebilir.

Problem 2.1 $F \in H_2(\Omega)$ olmak üzere

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^n \left(v_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + f_i \frac{\partial u}{\partial v_i} \right) + \int_G K(x, v, v') u(x, v') dv' = \lambda(x, v) + F(x, v), \quad (2.6)$$

bağıntısından,

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.7)$$

sınır şartının ve (1.3) denkleminin sağlanması koşulu ile (u, λ) fonksiyonlar çiftini bulunuz.

Teorem 2.2 Kabul edelim ki $F \in H_2(\Omega)$ olsun. Teorem 2.1'in şartları altında Problem 2.1'in bir (u, λ) çözümü vardır öyle ki $u \in \Gamma(A) \cap H^1(\Omega)$, $\lambda \in L_2(\Omega)$ dır.

İspat. Amirov (2001) de verilen Teorem 2.2.2 ile aynı şekilde yapılır. ■

BÖLÜM 3

SAÇILIM TERİMİ İÇEREN BİR KİNETİK DENKLEM İÇİN BİR TERS PROBLEMİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMÜNÜN ARAŞTIRILMASI

Bu bölümde aşağıdaki problem için bir sayısal çözüm yöntemi verilmiştir:

Problem 3.1 Bir $\Omega = \{(x, v) \mid x \in (a, b) \subset \mathbb{R}, v \in (c, d) \subset \mathbb{R}\}$ bölgesinde

$$\left(v \frac{\partial u}{\partial x} + f \frac{\partial u}{\partial v} \right) + \int_c^d K(x, v, v') u(x, v') dv' = \lambda(x, v) + F(x, v) \quad (3.1)$$

denkleminde

$$u|_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.2)$$

sınır koşulu ve

$$\widehat{L}\lambda = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial v \partial x} = 0 \quad (3.3)$$

şartı altında (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemi için bir sayısal çözüm metodu verilecektir. Bu amaçla $\widehat{L}$ operatörünü (3.1) denklemine uygulayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned} & u_{xx} + u_{xvx}v + f_{vx}u_v + f_vu_{vx} + f_xu_{vv} + fu_{v vx} \\ & + \int_c^d K_{vx}(x, v, v') u(x, v') dv' + \int_c^d K_v(x, v, v') u_x(x, v') dv' \\ & = \mathcal{F} \end{aligned} \quad (3.4)$$

üçüncü mertebeden bir kısmi türevli diferensiyel denklem elde edilir. Böylece (3.2) koşuluyla birlikte bir Dirichlet problemi ortaya çıkar. Aşağıda bu problemin sayısal çözümü için bir yöntem verilecektir. Bu kapsamda denklemdeki türevler için sonlu fark yaklaşımı, integral terimler için ise Newton-Cotes formülü kullanılacaktır.

3.1 TÜREVLERE SONLU FARK YAKLAŞIMI

İlk olarak n ve m tamsayılar olmak üzere $\Delta x = \frac{(b-a)}{n}$, $\Delta v = \frac{(d-c)}{m}$ adım büyüklüklerini tanımlayalım. $[a, b]$ aralığını Δx genişliğinde n eşit parçaya, $[c, d]$ aralığını da Δv genişliğinde m tane eşit parçaya bölelim. Bu durumda $x_i = a + i\Delta x$, $i = 0, \dots, n$; $v_j = c + j\Delta v$, $j = 0, \dots, m$ olmak üzere (x_i, v_j) koordinatlarından geçen dikey ve yatay doğrularla bir ızgara sistemi oluşturulur. Burada $x = x_i$ ve $v = v_j$ doğrularının kesişim noktaları örgü noktaları olarak adlandırılır. Bu ızgaranın içindeki her (x_i, v_j) , $i = 1, \dots, n-1$, $j = 1, \dots, m-1$, örgü noktasında x değişkenine göre x_i civarında Taylor serisine açılım yapılarak

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, v_j) = \frac{u(x_{i+1}, v_j) - u(x_{i-1}, v_j)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2)$$

formülü elde edilir. Diğer taraftan v değişkenine göre v_j civarında Taylor serisi açılımından

$$\frac{\partial u}{\partial v}(x_i, v_j) = \frac{u(x_i, v_{j+1}) - u(x_i, v_{j-1})}{2\Delta v} + O(\Delta v^2)$$

bulunur. Benzer düşünceyle ikinci ve üçüncü mertebeden kısmi türevler için aşağıdaki merkezi fark temsilcileri yazılır:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, v_j) = \frac{u(x_{i+1}, v_j) - 2u(x_i, v_j) + u(x_{i-1}, v_j))}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial v^2}(x_i, v_j) = \frac{u(x_i, v_{j+1}) - 2u(x_i, v_j) + u(x_i, v_{j-1}))}{(\Delta v)^2} + O(\Delta v^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial v}(x_i, v_j) &= \frac{u(x_{i+1}, v_{j+1}) - u(x_{i+1}, v_{j-1}) - u(x_{i-1}, v_{j+1}) + u(x_{i-1}, v_{j-1}))}{4(\Delta x)(\Delta v)} \\ &\quad + O(\Delta x^2) + O(\Delta v^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial v}(x_i, v_j) &= \frac{u(x_{i+1}, v_{j+1}) - 2u(x_i, v_{j+1}) + u(x_{i-1}, v_{j+1}) - u(x_{i+1}, v_{j-1})}{2(\Delta x)^2(\Delta v)} \\ &\quad + \frac{2u(x_i, v_{j-1}) - u(x_{i-1}, v_{j-1})}{2(\Delta x)^2(\Delta v)} \\ &\quad + O(\Delta x^2) + O(\Delta v^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial v^2}(x_i, v_j) &= \frac{u(x_{i+1}, v_{j+1}) - 2u(x_{i+1}, v_j) + u(x_{i+1}, v_{j-1}) - u(x_{i-1}, v_{j+1})}{2(\Delta x)^2(\Delta v)} \\ &\quad + \frac{2u(x_{i-1}, v_j) - u(x_{i-1}, v_{j-1})}{2(\Delta v)^2(\Delta x)} \\ &\quad + O(\Delta x^2) + O(\Delta v^2). \end{aligned}$$

3.2 NEWTON-COTES YÖNTEMİ

Newton-Cotes formülleri en yaygın olarak kullanılan sayısal integrasyon yöntemleridir. Bu yöntemin esası, karışık bir fonksiyona integrali daha kolay hesaplanabilen fonksiyonlarla yaklaşma fikrine dayanır. Bu bölümde

$$\int_c^d K_{vx}(x, v, v') u(x, v') dv', \int_c^d K_v(x, v, v') u_x(x, v') dv' \quad (3.5)$$

integrallerini yaklaşık olarak hesaplamak için $(m + 1)$ -noktalı kapalı Newton-Cotes formülü kullanılacaktır. Bu yöntem $j = 0, 1, \dots, m$ için $v_j = v_0 + jk$ noktalarını kullanır. Burada $v_0 = c$, $v_m = d$ ve $k = \frac{d-c}{m}$ dir. Bu durumda yaklaşık integral formülü,

$$\int_c^d f(v)dv \approx \sum_{j=0}^m a_j f(v_j) \quad (3.6)$$

şeklinde yazılır. Burada,

$$a_j = \int_{v_0}^{v_m} L_j(v)dv = \int_{v_0}^{v_m} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^m \frac{(v - v_j)}{(v_i - v_j)} dv \quad (3.7)$$

dır (Burden and Faires 2011).

3.3 PROBLEM 3.1'İN SAYISAL ÇÖZÜMÜ

Eğer türevler için sonlu fark formülleri ve integralli terimler için ise Newton-Cotes yöntemi (3.4) denkleminde yerine yazılırsa:

$$\begin{aligned} & \frac{w_{i+1,j} - 2w_{i,j} + w_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{2w_{i,j-1} - 2w_{i,j+1} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2(\Delta x)^2 \Delta v} v_j \\ & + \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta v} \frac{\tilde{f}_{i+1,j+1} - \tilde{f}_{i+1,j-1} - \tilde{f}_{i-1,j+1} + \tilde{f}_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta v} \\ & + \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta v} \frac{\tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i-1,j}}{2\Delta x} \\ & + \frac{w_{i,j+1} - 2w_{i,j} + w_{i,j-1}}{(\Delta v)^2} \frac{\tilde{f}_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j-1}}{2\Delta v} \\ & + \frac{2w_{i-1,j} - 2w_{i+1,j} + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2(\Delta v)^2 \Delta x} \tilde{f}_{i,j} \\ & + [a_j k_7 w_{i,j}] + [a_j k_8 (w_{i+1,j} - w_{i-1,j})] \\ & = \mathcal{F}_{i,j} \end{aligned} \quad (3.8)$$

bulunur. Burada I, J pozitif sayılar, $\Delta x = \frac{b-a}{I+1}$ ve $\Delta v = \frac{d-c}{J+1}$, sırasıyla x ve v yönlerindeki adım büyüklükleri, $w_{i,j}, u(x_i, v_j) = u(a + i\Delta x, c + j\Delta v)$ için sonlu fark yaklaşımı olup, $\mathcal{F}_{i,j} = F(x_i, v_j) = F(a + i\Delta x, c + j\Delta v)$, $\tilde{f}_{i,j} = f(x_i, v_j) = f(a + i\Delta x, c + j\Delta v)$ dir. Yukarıdaki eşitlikler düzenlenirse:

$$\begin{aligned}
& w_{i-1,j-1}(-k_2 + k_4 - k_6) + w_{i,j-1}(2k_2 + k_3 + k_5) \\
& + w_{i+1,j-1}(-k_2 - k_4 + k_6) + w_{i-1,j}(k_1 + 2k_6 - a_j k_8) \\
& + w_{i,j}(-2k_1 - 2k_5 + a_j k_7) + w_{i+1,j}(k_1 - 2k_6 + a_j k_8) \\
& + w_{i-1,j+1}(k_2 - k_4 - k_6) + w_{i,j+1}(-2k_2 + k_3 + k_5) + w_{i+1,j+1}(k_2 + k_4 + k_6) \\
& = \mathcal{F}_{i,j}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada (3.9) dan

$$\begin{aligned}
k_1 &= \frac{1}{(\Delta x)^2}, \quad k_2 = \frac{v}{2(\Delta x)^2(\Delta v)}, \\
k_3 &= \frac{1}{2(\Delta v)} \frac{\tilde{f}_{i+1,j+1} - \tilde{f}_{i+1,j-1} - \tilde{f}_{i-1,j+1} + \tilde{f}_{i-1,j-1}}{4\Delta x \Delta v}, \\
k_4 &= \frac{1}{4(\Delta x)(\Delta v)} \frac{\tilde{f}_{i,j+1} - \tilde{f}_{i,j-1}}{2\Delta v}, \\
k_5 &= \frac{1}{(\Delta v)^2} \frac{\tilde{f}_{i+1,j} - \tilde{f}_{i-1,j}}{2\Delta x}, \quad k_6 = \frac{\tilde{f}_{i,j}}{2(\Delta x)(\Delta v)^2}, \\
k_7 &= a_j \frac{K(x_{i+1}, v_{j+1}) - K(x_{i+1}, v_{j-1}) - K(x_{i-1}, v_{j+1}) + K(x_{i-1}, v_{j-1})}{4(\Delta x)(\Delta v)}, \\
k_8 &= a_j \frac{K(x_{i+1}, v_{j+1}) - K(x_{i+1}, v_{j-1}) - K(x_{i-1}, v_{j+1}) + K(x_{i-1}, v_{j-1})}{4(\Delta x)(\Delta v)}, \\
k_9 &= a_j \frac{K(x_i, v_{j+1}) - K(x_i, v_{j-1})}{4(\Delta x)(\Delta v)}
\end{aligned} \tag{3.10}$$

olarak tanımlıdır. Benzer şekilde sınır koşulları diskritize edilirse:

$$w_{0,j} = u(a, v_j) = 0, w_{I+1,j} = u(b, v_j) = 0, w_{i,0} = u(x_i, c) = 0, w_{i,J+1} = u(x_i, d) = 0$$

yazılabilir. Böylece $w_{1,1}, w_{2,1}, \dots, w_{I,1}, w_{1,2}, w_{2,2}, \dots, w_{I,2}, \dots, w_{1,J}, w_{2,J}, \dots, w_{I,J}$ sıralaması esas alınarak,

$$NW = \mathcal{T} \tag{3.11}$$

şeklinde bir cebirsel denklem sistemi ortaya çıkar. Burada N bir üçlü köşegensel bant matris olup aşağıdaki formdadır:

$$N = \begin{bmatrix} P^{(1)} & R^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ S^{(2)} & P^{(2)} & R^{(2)} & \ddots & \vdots \\ 0 & S^{(3)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & R^{(J-1)} \\ 0 & \dots & 0 & S^{(J)} & P^{(J)} \end{bmatrix}_{IJ \times IJ}. \quad (3.12)$$

(3.12) matrisinde yer alan $P^{(J)}$, $R^{(J)}$, $S^{(J)}$ matrisleri aşağıdaki şekilde tanımlıdır. Burada $P^{(J)} = P^{(J)'} + K^{(J)'}$ olup

$$P^{(J)'} = \begin{bmatrix} p_1^{(1,j)} & p_2^{(1,j)} & 0 & \dots & 0 \\ p_3^{(2,j)} & p_1^{(2,j)} & p_2^{(2,j)} & \ddots & \vdots \\ 0 & p_3^{(3,j)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & p_2^{(I-1,j)} \\ 0 & \dots & 0 & p_3^{(I,j)} & p_1^{(I,j)} \end{bmatrix}_{I \times I}, \quad (3.13)$$

$$K^{(J)'} = \begin{bmatrix} k_1^{(1,j)} & k_2^{(1,j)} & k_3^{(1,j)} & \dots & k_I^{(1,j)} \\ k_1^{(2,j)} & k_2^{(2,j)} & k_3^{(2,j)} & \ddots & \vdots \\ k_1^{(3,j)} & k_2^{(3,j)} & \ddots & \ddots & k_I^{(3,j)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & k_I^{(I-1,j)} \\ k_1^{(I,j)} & \dots & 0 & k_{(I-1)}^{(I,j)} & k_I^{(I,j)} \end{bmatrix}_{I \times I} \quad (3.14)$$

dır. İkinci olarak, $R^{(J)} = R^{(J)'} + L^{(J)'}$ olup

$$R^{(J)'} = \begin{bmatrix} r_1^{(1,j)} & r_2^{(1,j)} & 0 & \dots & 0 \\ r_3^{(2,j)} & r_1^{(2,j)} & r_2^{(2,j)} & \ddots & \vdots \\ 0 & r_3^{(3,j)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & r_2^{(I-1,j)} \\ 0 & \dots & 0 & r_3^{(I,j)} & r_1^{(I,j)} \end{bmatrix}_{I \times I}, \quad (3.15)$$

$$L^{(J)'} = \begin{bmatrix} l_1^{(1,j)} & l_2^{(1,j)} & l_3^{(1,j)} & \dots & l_I^{(1,j)} \\ l_1^{(2,j)} & l_2^{(2,j)} & l_3^{(2,j)} & \ddots & \vdots \\ l_1^{(3,j)} & l_2^{(3,j)} & \ddots & \ddots & l_I^{(3,j)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & l_I^{(I-1,j)} \\ l_1^{(I,j)} & \dots & l_{(I-2)}^{(I,j)} & l_{(I-1)}^{(I,j)} & l_I^{(I,j)} \end{bmatrix}_{I \times I} \quad (3.16)$$

dır. Benzer bir gösterimle $S^{(J)} = S^{(J)'} + L^{(J)''}$ matrisi

$$S^{(J)'} = \begin{bmatrix} s_1^{(1,j)} & s_2^{(1,j)} & 0 & \dots & 0 \\ s_3^{(2,j)} & s_1^{(2,j)} & s_2^{(2,j)} & \ddots & \vdots \\ 0 & s_3^{(3,j)} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & s_2^{(I-1,j)} \\ 0 & \dots & 0 & s_3^{(I,j)} & s_1^{(I,j)} \end{bmatrix}_{I \times I}, \quad (3.17)$$

$$L^{(J)''} = \begin{bmatrix} -l_1^{(1,j)} & -l_2^{(1,j)} & -l_3^{(1,j)} & \dots & -l_I^{(1,j)} \\ -l_1^{(2,j)} & -l_2^{(2,j)} & -l_3^{(2,j)} & \ddots & \vdots \\ -l_1^{(3,j)} & -l_2^{(3,j)} & \ddots & \ddots & -l_I^{(3,j)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -l_I^{(I-1,j)} \\ -l_1^{(I,j)} & \dots & -l_{(I-2)}^{(I,j)} & -l_{(I-1)}^{(I,j)} & -l_I^{(I,j)} \end{bmatrix}_{I \times I} \quad (3.18)$$

olarak verilmiştir. Burada

$$p_1 = -2k_1 - 2k_5, \quad p_2 = -2k_2 + k_3 + k_5, \quad p_3 = 2k_2 - k_3 + k_5,$$

$$r_1 = k_1 - 2k_6, \quad r_2 = k_2 + k_4 + k_6, \quad r_3 = -k_2 - k_4 + k_6,$$

$$s_1 = k_1 + 2k_6, \quad s_2 = k_2 - k_4 - k_6, \quad s_3 = -k_2 + k_4 - k_6,$$

$$k_1 = a_1 k_7, \quad k_2 = a_2 k_7, \quad k_3 = a_3 k_7, \quad k_{(I-1)} = a_{(I-1)} k_7, \quad k_I = a_I k_7,$$

$$l_1 = a_1 k_8, \quad l_2 = a_2 k_8, \quad l_3 = a_3 k_8, \quad l_{(I-1)} = a_{(I-1)} k_8, \quad l_I = a_I k_8,$$

$$I = 1, \dots, N; \quad J = 1, \dots, M,$$

$$\mathcal{T} = [\mathcal{F}_{1,1}, \mathcal{F}_{2,1}, \dots, \mathcal{F}_{I,1}, \mathcal{F}_{1,2}, \mathcal{F}_{2,2}, \dots, \mathcal{F}_{I,2}, \dots, \mathcal{F}_{1,J}, \mathcal{F}_{2,J}, \dots, \mathcal{F}_{I,J}]^T \quad (3.19)$$

olarak tanımlıdır. Ayrıca $\mathcal{F}_{i,j} = \mathcal{F}(a + i\Delta x, b + j\Delta v)$ değerleri, W ise

$$W = [w_{1,1}, w_{2,1}, \dots, w_{I,1}, w_{1,2}, w_{2,2}, \dots, w_{I,2}, \dots, w_{1,J}, w_{2,J}, \dots, w_{I,J}]^T \quad (3.20)$$

şeklinde çözüm vektörüdür. Son olarak (3.1) denkleminde merkezi fark formülleri ve Newton-Cotes formülü yazılarak elde edilen

$$v_j \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2\Delta x} + f_{i,j} \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2\Delta v} + \sum_{j=0}^m a_j K_{i,j} w_{i,j} = \tilde{\lambda}_{i,j} + \mathcal{F}_{i,j}. \quad (3.21)$$

denkleminden $\tilde{\lambda}_{i,j}$ yaklaşık değerleri hesaplanır.

BÖLÜM 4

SAYISAL ÖRNEKLER VE SONUÇ

4.1 SAYISAL ÖRNEKLER

Örnek 4.1 (3.1) denkleminde $f(x, v) = -2x$, $K(x, v, s) = -5xvs$ ve

$$\begin{aligned} F(x, v) = & \frac{2v^2 \cos(\pi x)}{81} - \frac{2v^4 \cos(\pi x)}{9} - \frac{2v^2 \sin(\pi x)}{81} + \frac{2v^4 \sin(\pi x)}{9} - \frac{8vx^2 \cos(\pi x)}{6561} \\ & + \frac{8vx^4 \cos(\pi x)}{729} + \frac{8vx^2 \sin(\pi x)}{6561} - \frac{8vx^4 \sin(\pi x)}{729} - 2v^2 x^2 \cos(\pi x) \\ & + 12v^2 x^4 \cos(\pi x) + 6v^4 x^2 \cos(\pi x) + 2v^2 x^2 \sin(\pi x) - 12v^2 x^4 \sin(\pi x) \\ & - 6v^4 x^2 \sin(\pi x) - \frac{2v^2 x \pi \cos(\pi x)}{81} + \frac{2v^4 x \pi \cos(\pi x)}{9} - \frac{2v^2 x \pi \sin(\pi x)}{81} \\ & + \frac{2v^4 x \pi \sin(\pi x)}{9} + \frac{2v^2 x^3 \pi \cos(\pi x)}{9} - 2v^4 x^3 \pi \cos(\pi x) \\ & + \frac{2v^2 x^3 \pi \sin(\pi x)}{9} - 2v^4 x^3 \pi \sin(\pi x) \end{aligned}$$

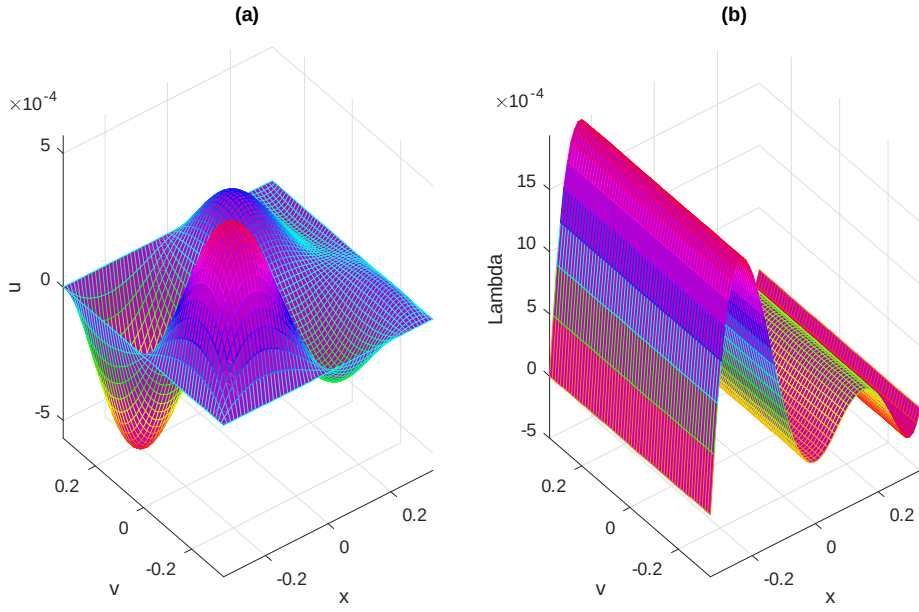
olmak üzere, $\Omega = (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \times (-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ bölgesinde (3.1) denkleminde (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümünün,

$$u(x, v) = (x^2 - \frac{1}{9})(v^2 - \frac{1}{9})(\cos(\pi x) - \sin(\pi x))2xv$$

ve

$$\lambda(x, v) = \frac{4x^2 \cos(\pi x)}{81} - \frac{4x^4 \cos(\pi x)}{9} - \frac{4x^2 \sin(\pi x)}{81} + \frac{4x^4 \sin(\pi x)}{9}$$

olduğu bilinmektedir ve bu çözümler Şekil 4.1 de gösterilmiştir.

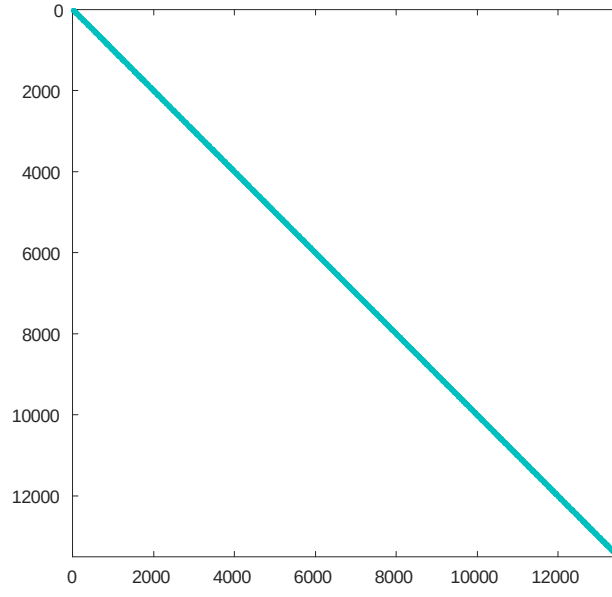


Şekil 4.1 Örnek 4.1 için verilen (a) u için kesin çözüm ve (b) λ için kesin çözüm.

Aşağıdaki çizelgede problemin $u(x, v)$ ve $\lambda(x, v)$ yaklaşık çözümlerinden elde edilen sayısal sonuçlar ve hesaplama süreleri verilmiştir:

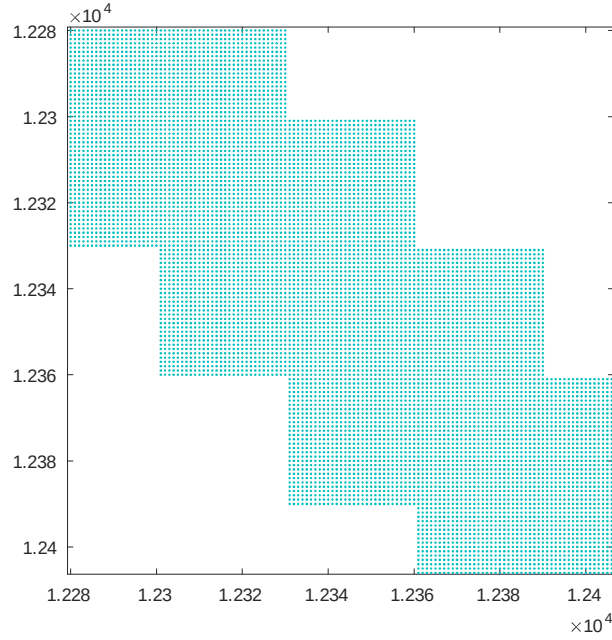
Çizelge 4.1 Örnek 4.1 de $u(x, v)$ ve $\lambda(x, v)$ için sayısal sonuçlar			
	$I = 450, J = 10$	$I = 450, J = 20$	$I = 450, J = 30$
Örgü Noktalarının Sayısı	4500	9000	13500
$u(x, v)$ için Minimum Hata	$1.4112E - 10$	$6.7122E - 11$	$1.3217E - 11$
$u(x, v)$ için Maksimum Hata	$1.1449E - 05$	$3.4881E - 06$	$1.6538E - 06$
$\lambda(x, v)$ için Minimum Hata	$1.7095E - 09$	$1.0784E - 10$	$1.0337E - 10$
$\lambda(x, v)$ için Maksimum Hata	$1.9845E - 04$	$6.2724E - 05$	$3.0917E - 05$
Hesaplama Süresi	3330.986592 s	15301.924411 s	41272.609121 s

Şekil 4.2 de verilen grafikte $\tilde{N}$ matrisinin yapısının 13500×13500 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmektedir.



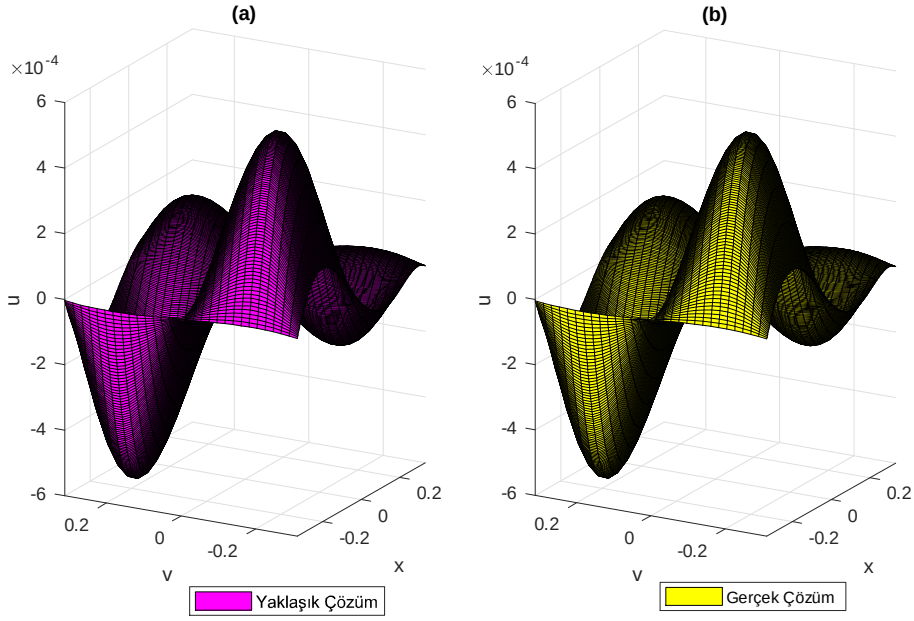
Şekil 4.2 Örnek 4.1 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı.

Şekil 4.3 te $\tilde{N}$ matrisi yakından gösterilmektedir.



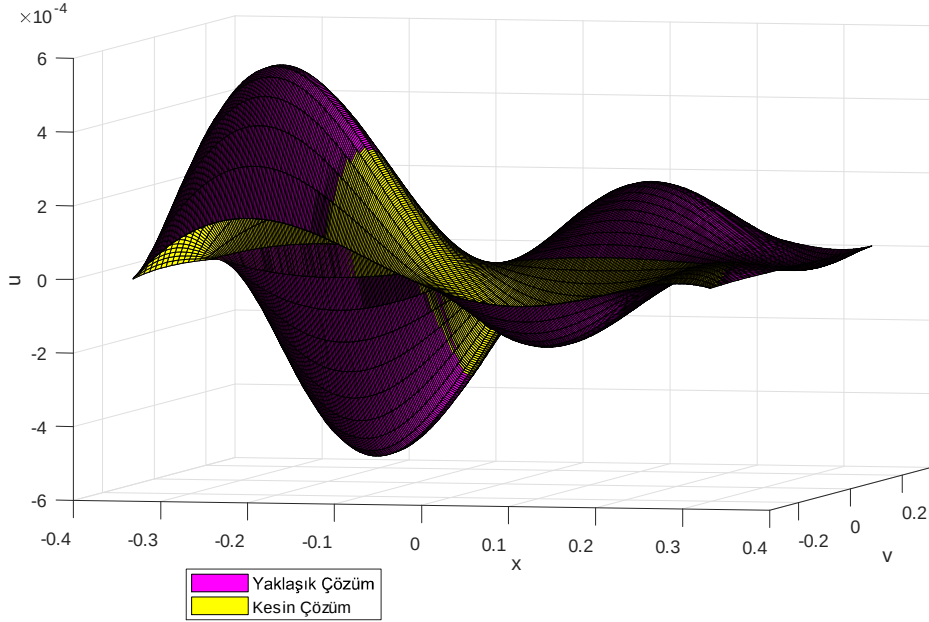
Şekil 4.3 Örnek 4.1 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görünümü.

Şekil 4.4 te u için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümler sunulmuştur.



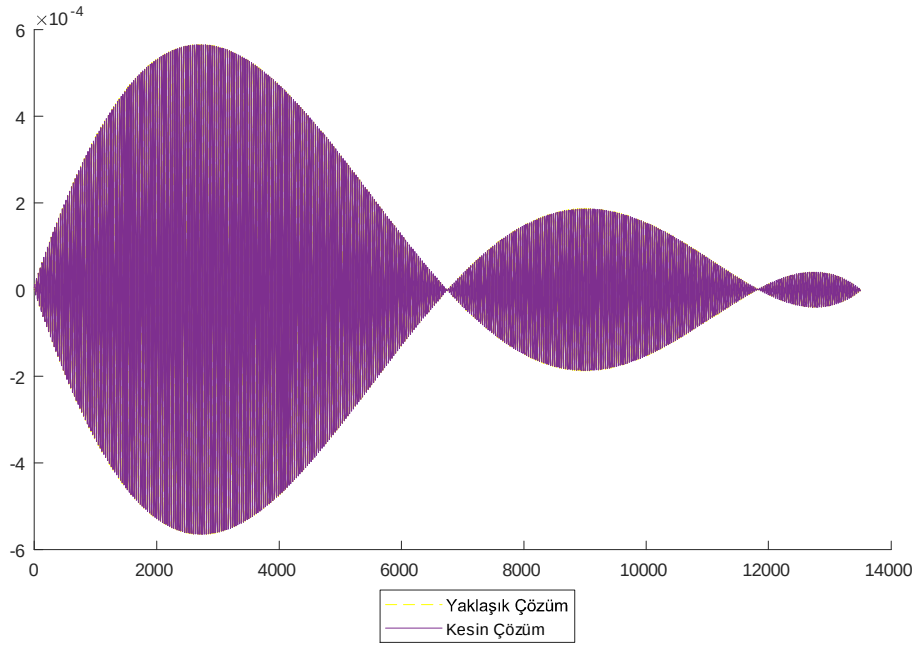
Şekil 4.4 Örnek 4.1 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.

Şekil 4.5 te u fonksiyonu için Şekil 4.4 de verilen çözümler birleştirilerek gösterilmiştir:



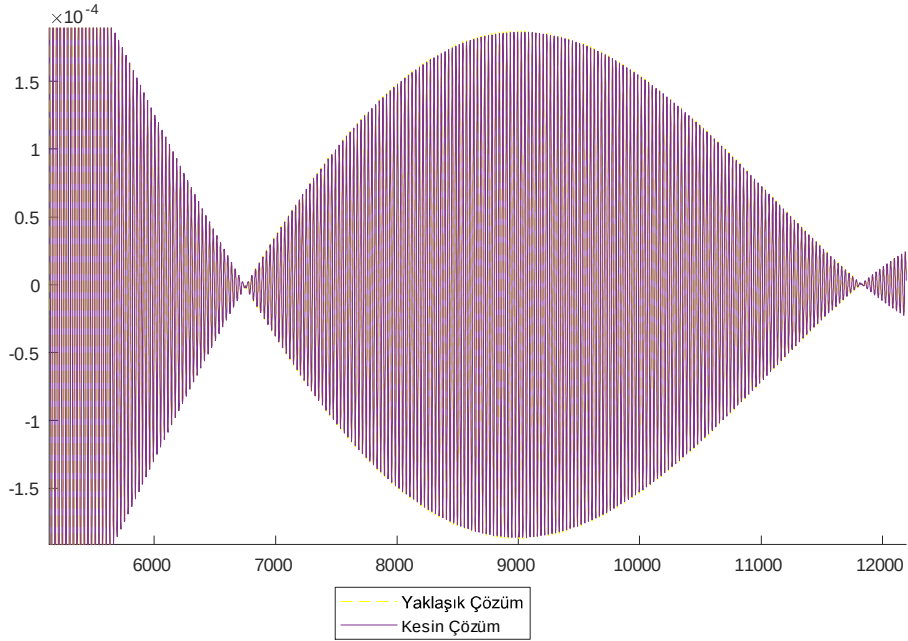
Şekil 4.5 Örnek 4.1 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 4.6 da u için elde edilen sayısal sonuçlar 13500 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır:



Şekil 4.6 Örnek 4.1 de u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

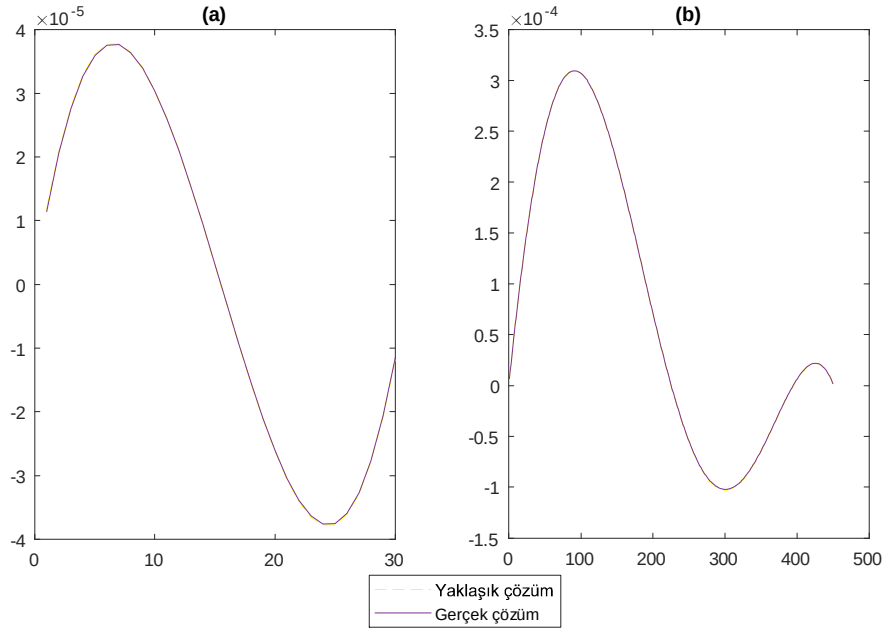
Şekil 4.6 nın 6000-12000 aralığındaki bir parçası yakınlaştırılarak aşağıdaki şekilde verilmiştir:



Şekil 4.7 Örnek 4.1 de u için Şekil 4.6 nın yakından görünümü.

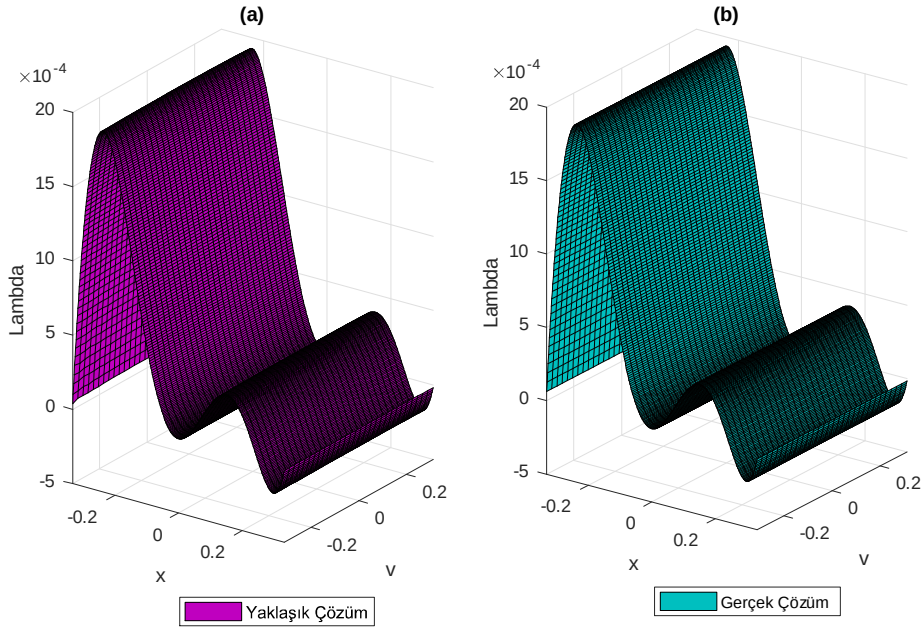
Şekil 4.8 de u çözümünün (a) $i=3$ ve (b) $j=2$ için kesitsel gösterimleri sunulmuştur. Bu-

rada sarı renk ile yaklaşık çözüm ve mor renk ile kesin çözüm gösterilmektedir.



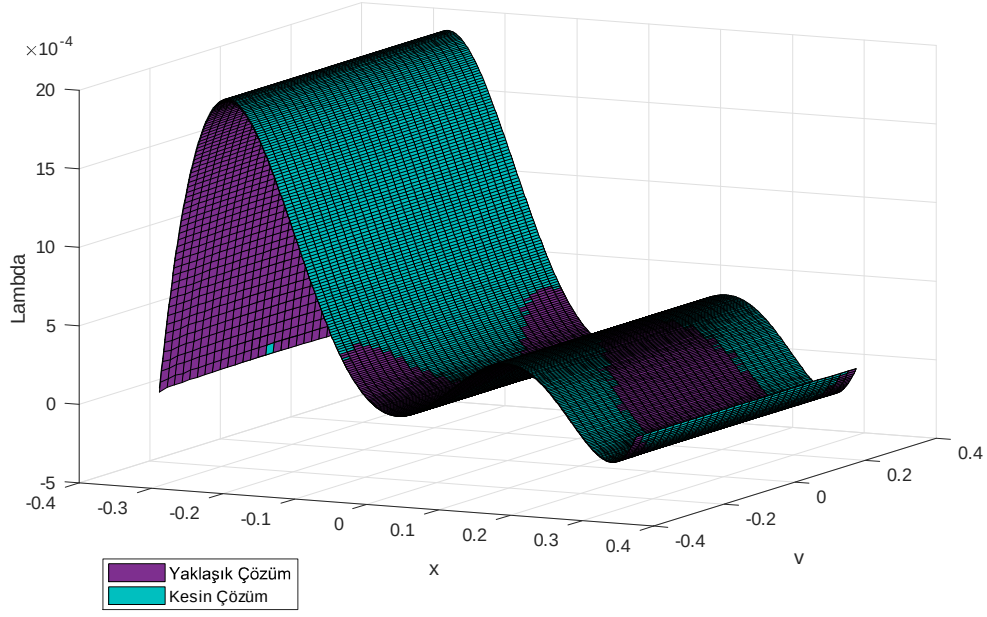
Şekil 4.8 Örnek 4.1 de u için (a) $i = 3$ ve (b) $j = 2$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm.

Şekil 4.9 da λ için yaklaşık ve kesin çözümler verilmiştir.



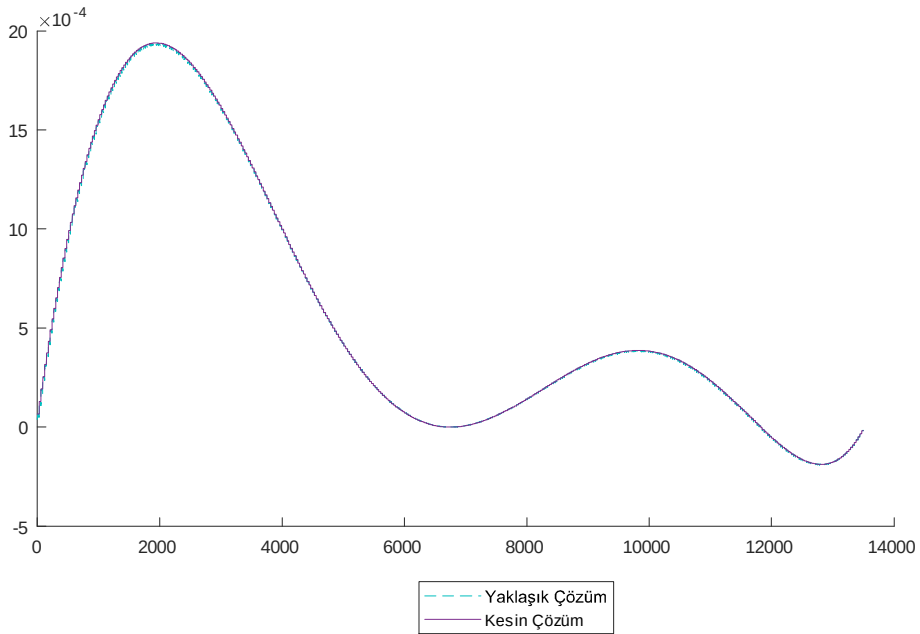
Şekil 4.9 Örnek 4.1 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.

Şekil 4.9 da verilen yaklaşık ve kesin çözümler Şekil 4.10 da birleştirilerek verilmiştir.



Şekil 4.10 Örnek 4.1 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

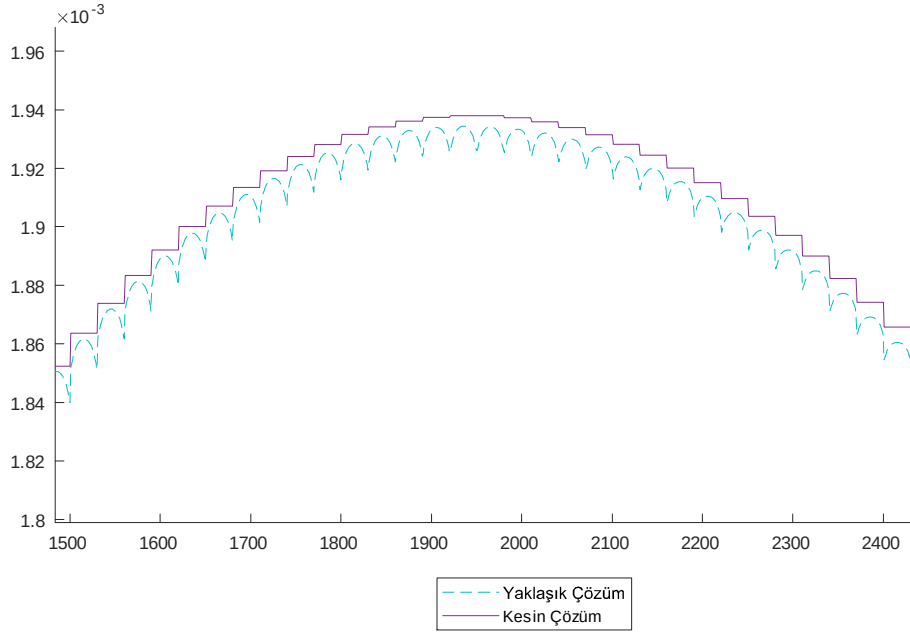
Şekil 4.11 de λ için elde edilen sayısal sonuçlar 13500 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.11 Örnek 4.1 de λ için çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 4.12 de, λ için Şekil 4.11 de sunulan sayısal sonuçlar 1500-2500 aralığında yakın-

laştırılarak gösterilmiştir.



Şekil 4.12 Örnek 4.1 de λ için Şekil 4.11 in yakından görünümü.

Örnek 4.2 (3.1) denkleminde $f(x, v) = -2x$, $K(x, v, s) = -(6 + x)vs$ ve

$$F(x, v) = 3v^4x^2 + 6v^2x^4 - \frac{68v^2x^2}{27} + \frac{128vx^4}{3645} + \frac{256vx^3}{1215} - \frac{2048vx^2}{295245} - \frac{4096vx}{98415}$$

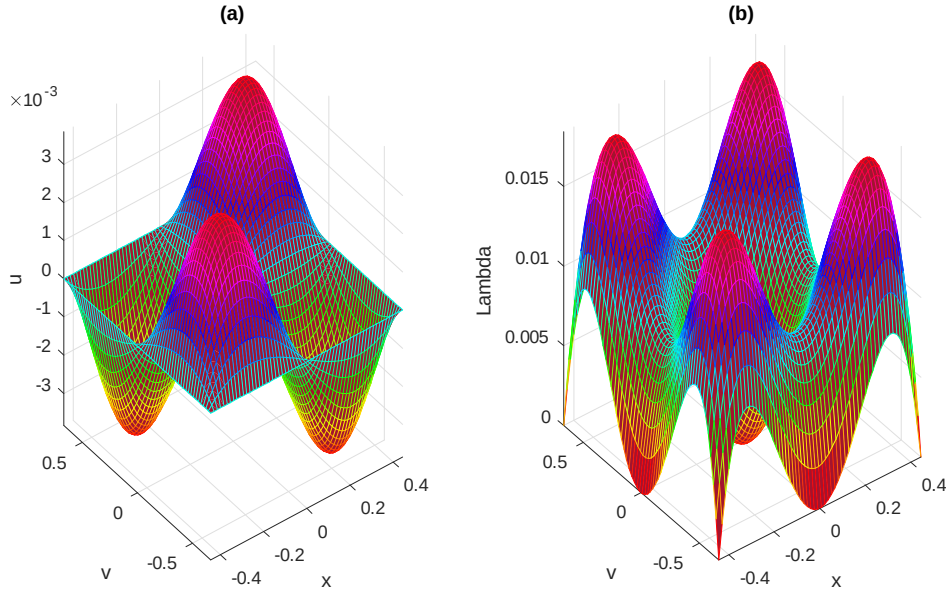
olmak üzere, $\Omega = (-\frac{4}{9}, \frac{4}{9}) \times (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ bölgesinde (3.1) denkleminde (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümünün,

$$u(x, v) = (x^2 - \frac{16}{81})(v^2 - \frac{4}{9})xv$$

ve

$$\lambda(x, v) = -\frac{16v^4}{81} + \frac{64v^2}{729} - \frac{8x^4}{9} + \frac{128x^2}{729}$$

olduğu bilinmektedir ve bu çözümler Şekil 4.13 te grafiksel olarak gösterilmiştir.

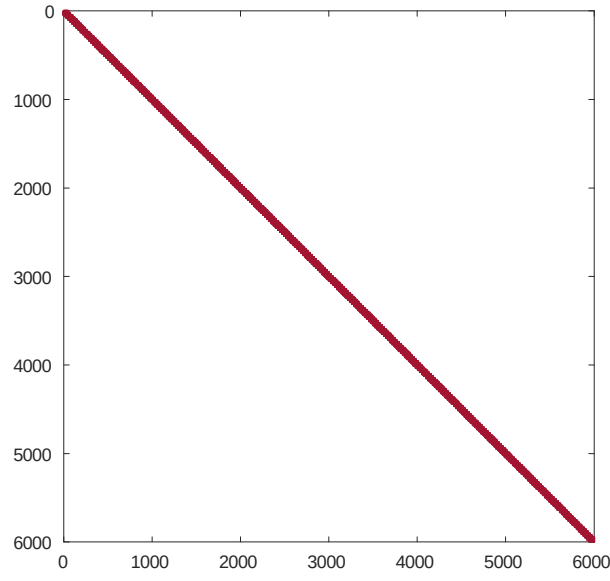


Şekil 4.13 Örnek 4.2 için verilen (a) u kesin çözümü ve (b) λ kesin çözümü.

$u(x, v)$ ve $\lambda(x, v)$ fonksiyonlarının farklı örgü noktalarında hesaplanan yaklaşık değerleri ve hesaplama süreleri aşağıdaki çizelgede gösterilmiştir. Çizelge 4.2 de maksimum ve minimum hatalar, ilgili fonksiyonun bir örgü noktasındaki kesin değeri ile hesaplanan yaklaşık değeri arasındaki farkın mutlak değeri kullanılarak hesaplanmıştır.

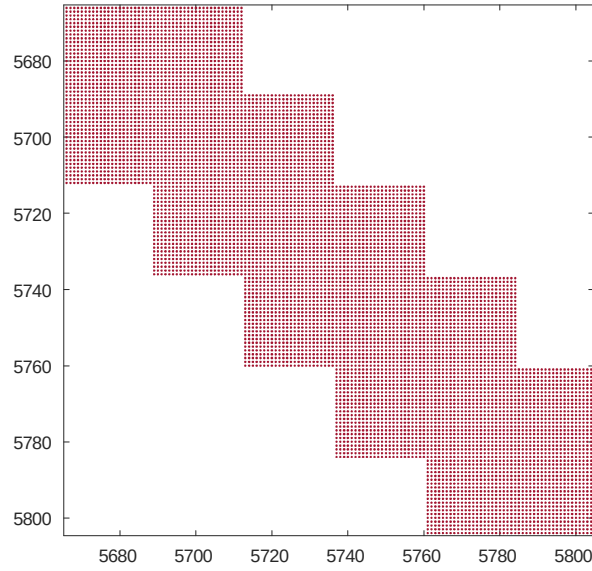
Çizelge 4.2 Örnek 4.2 de $u(x, v)$ ve $\lambda(x, v)$ için sayısal sonuçlar.			
	$I = 36, J = 10$	$I = 250, J = 20$	$I = 250, J = 24$
Örgü Noktalarının Sayısı	360	5000	6000
Minimum hata $u(x, v)$	$7.0975E - 07$	$3.7991E - 09$	$7.5916E - 11$
Maksimum hata $u(x, v)$	$2.0259E - 04$	$5.9373E - 05$	$4.2443E - 05$
Minimum hata $\lambda(x, v)$	$3.7451E - 07$	$1.8240E - 08$	$2.0428E - 09$
Maksimum hata $\lambda(x, v)$	$1.7E - 03$	$7.4517E - 04$	$6.4713E - 04$
Hesaplama Süresi	372.706008 s	4452.092252 s	16815.232110 s

Şekil 4.14 te verilen grafikte $\tilde{N}$ matrisinin yapısının 6000×6000 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmektedir.



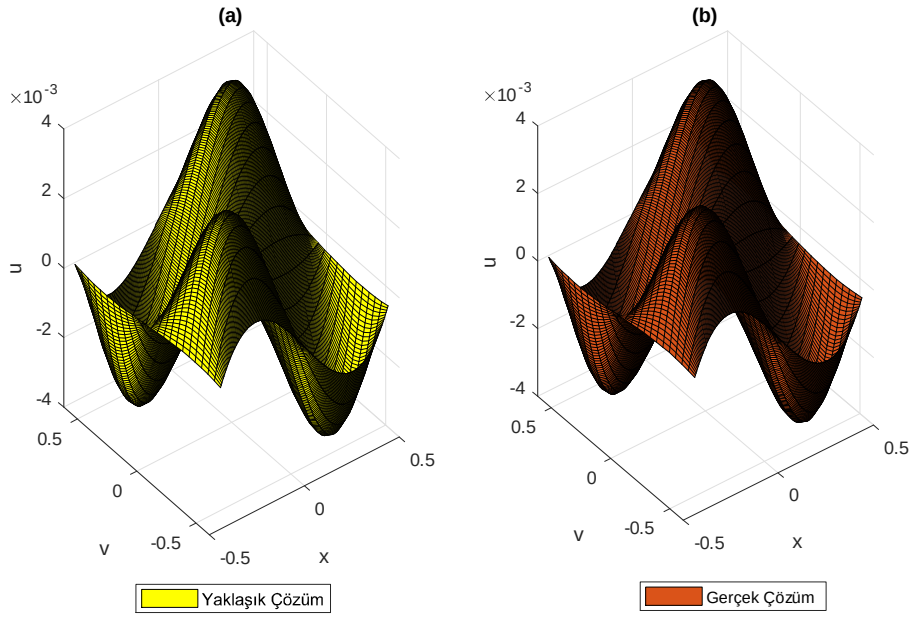
Şekil 4.14 Örnek 4.2 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı.

Şekil 4.15 te $\tilde{N}$ matrisi yakından gösterilmektedir.



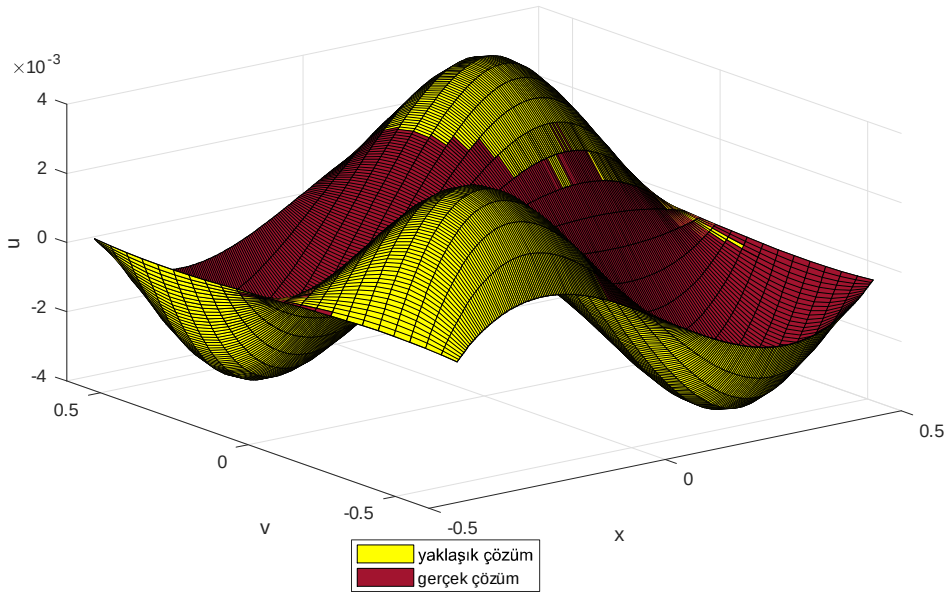
Şekil 4.15 Örnek 4.2 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görünümü.

Şekil 4.16 da u için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümler sunulmuştur.



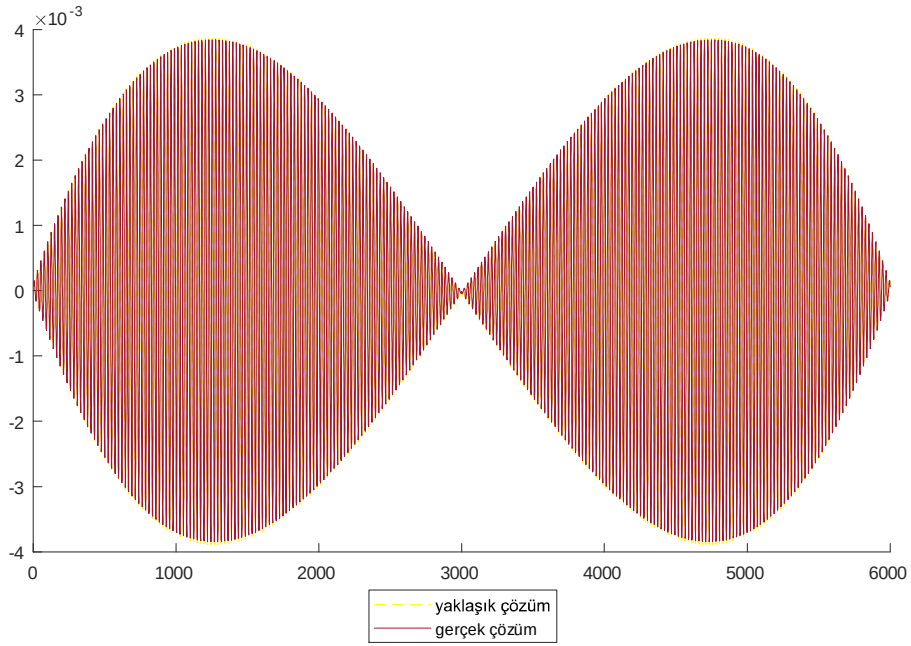
Şekil 4.16 Örnek 4.2 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.

Şekil 4.17 de u için Şekil 4.16’da verilen çözümler birleştirilerek gösterilmiştir.



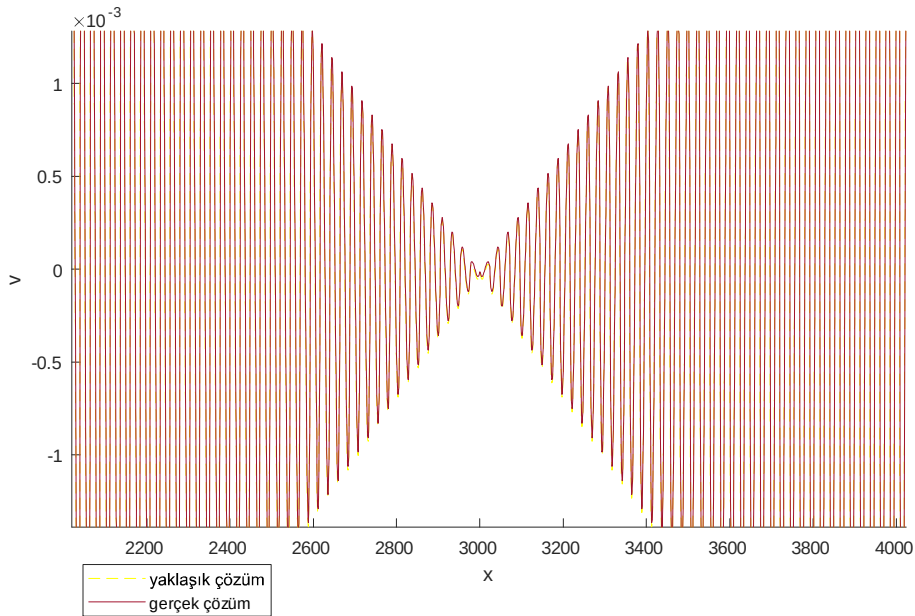
Şekil 4.17 Örnek 4.2 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 4.18 de u için elde edilen sayısal sonuçlar 6000 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



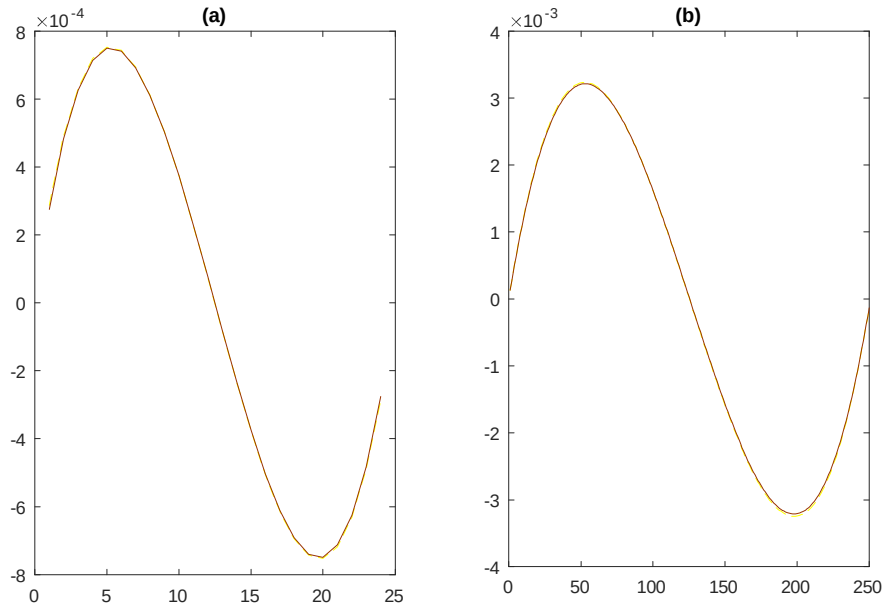
Şekil 4.18 Örnek 4.2 de u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 4.18 in 1500-4500 aralığındaki bir parçası yakınlaştırılarak Şekil 4.19 da verilmiştir.



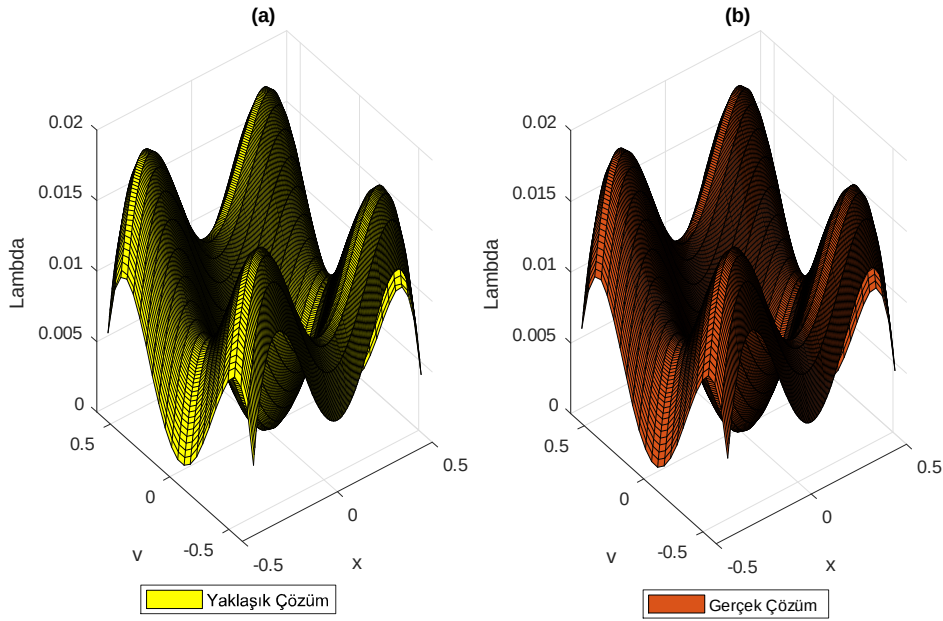
Şekil 4.19 Örnek 4.2 de u için Şekil 4.18'in yakından görünümü.

Şekil 4.20 de u çözümünün (a) $i=5$ ve (b) $j=3$ için kesitsel gösterimleri sunulmuştur. Burada sarı renk ile yaklaşık çözüm ve turuncu renk ile gerçek çözüm gösterilmektedir.



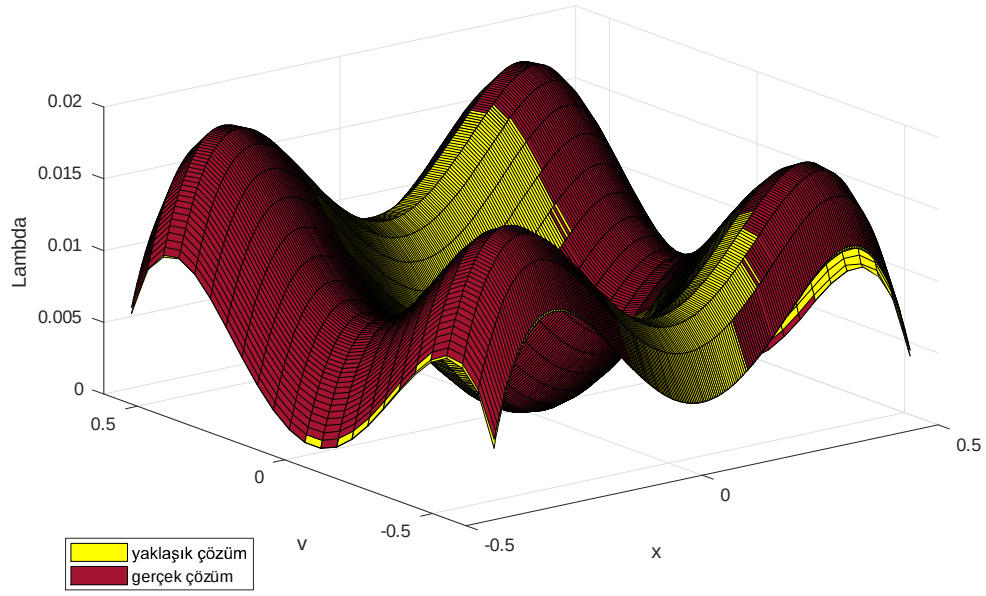
Şekil 4.20 Örnek 4.2 de u için (a) $i=5$ ve (b) $j=3$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm.

Şekil 4.21 de λ için yaklaşık ve gerçek çözümler verilmiştir.



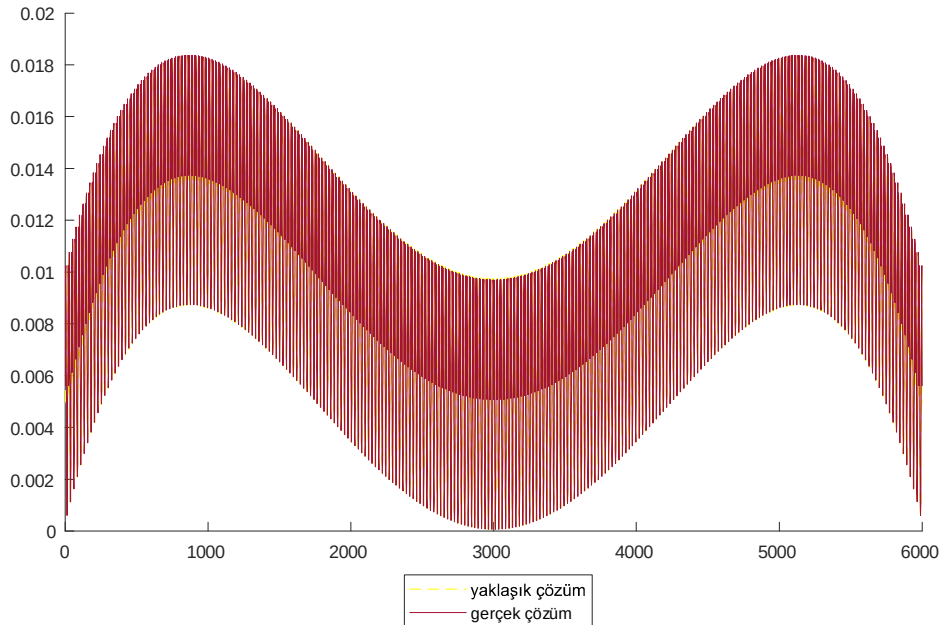
Şekil 4.21 Örnek 4.2 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.

Şekil 4.22 de λ için Şekil 4.21 deki yaklaşık ve gerçek çözümler birleştirilerek sunulmuştur.



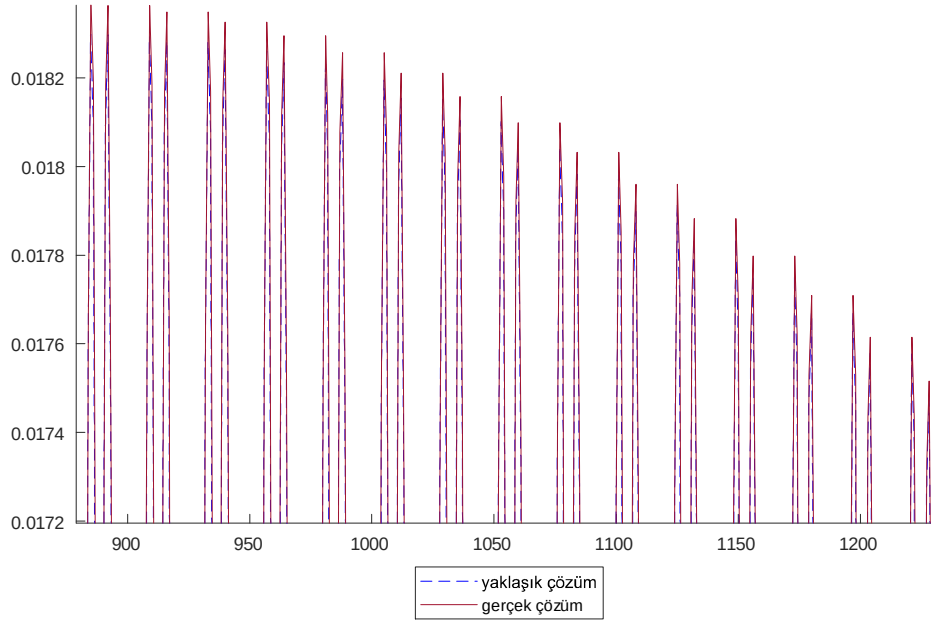
Şekil 4.22 Örnek 4.2 de λ için yaklaşık ve gerçek çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 4.23 te λ için elde edilen sayısal sonuçlar 6000 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



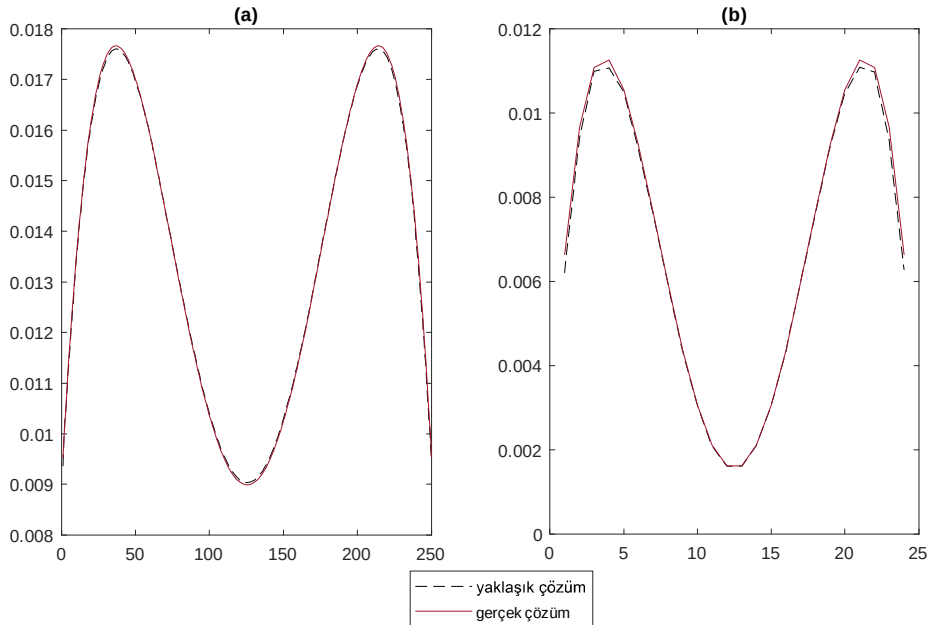
Şekil 4.23 Örnek 4.2 de λ nın çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 4.24 te λ için Şekil 4.23 te elde edilen sayısal sonuçlar 2500-3000 adet örgü noktası aralığında yakınlaştırılarak gösterilmiştir.



Şekil 4.24 Örnek 4.2 de λ için Şekil 4.23 ün yakından görünümü.

Şekil 4.25 te λ çözümünün $i=5$ ve $j=3$ için kesitsel gösterimleri sunulmuştur.



Şekil 4.25 Örnek 4.2 de λ nın karşılaştırmalı grafiksel gösteriminin (a) $i = 5$,
(b) $j = 3$ için kesitsel görünümü.

Örnek 4.3 (3.1) denkleminde $f(x, v) = -2x - 6$, $K(x, v, s) = -xvs$ ve

$$F(x, v) = 14v^4x^2 + 21v^4x + 28v^2x^4 + 147v^2x^3 + 21v^2x^2 - 672v^2x - \frac{1792vx^4}{45} + \frac{448vx^3}{5} - \frac{7168vx^2}{45} - \frac{1792vx}{5}$$

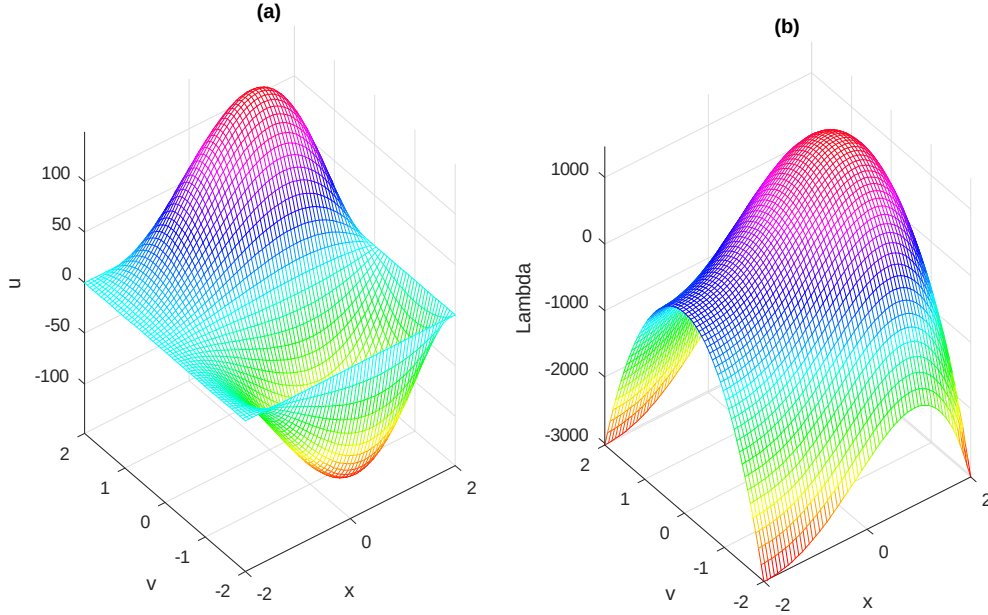
olmak üzere, $\Omega = (-2, 2) \times (-2, 2)$ bölgesinde (3.1) denkleminde (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümünün,

$$u(x, v) = \left(\frac{7x^2 - 28}{6}\right)(4x + 9)(v^2 - 4)v$$

ve

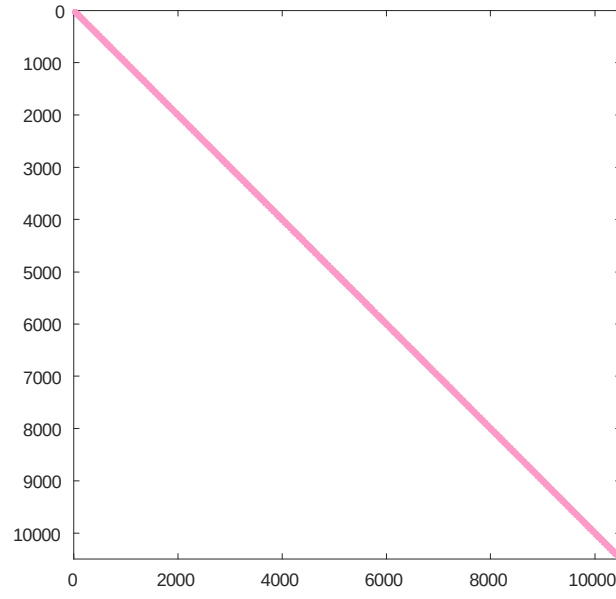
$$\lambda(x, v) = -\frac{112x^4}{3} - \frac{2044v^2}{3} - 196x^3 - \frac{308x^2}{3} + 784x - \frac{56v^4}{3} + 1008$$

olduğu bilinmektedir ve bu çözümler Şekil 4.26 da grafiksel olarak gösterilmiştir.



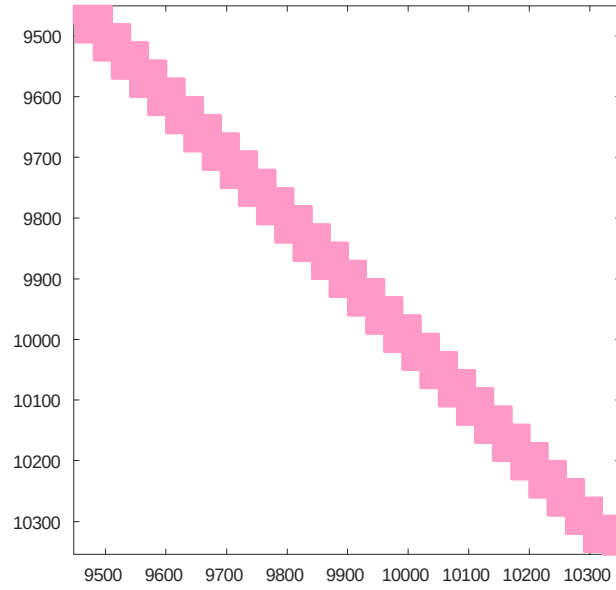
Şekil 4.26 Örnek 4.3 için (a) u kesin çözüm ve (b) λ kesin çözüm.

Şekil 4.27 de verilen grafikte $\tilde{N}$ matrisinin yapısının 10500×10500 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmektedir.



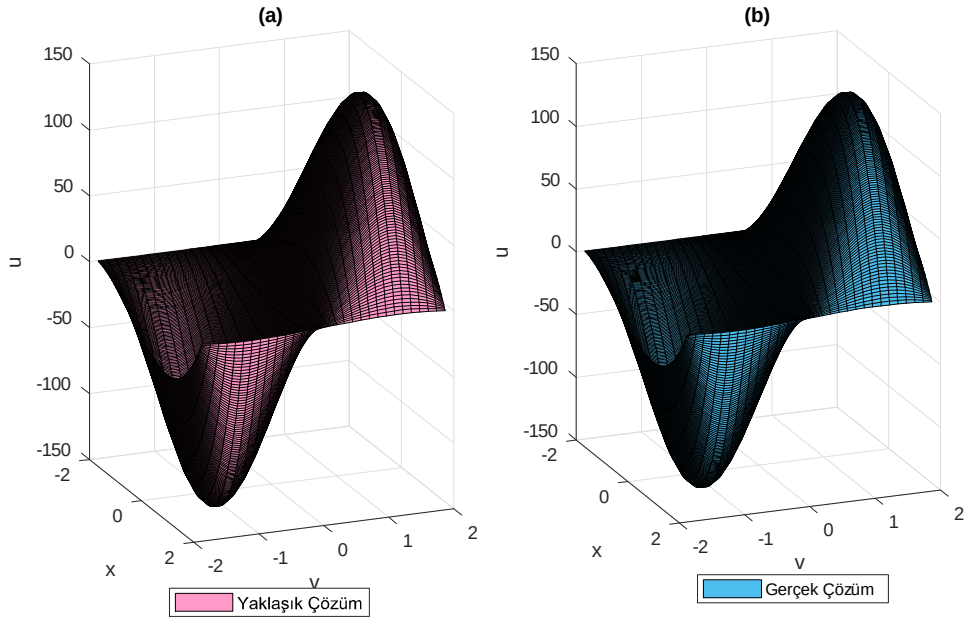
Şekil 4.27 Örnek 4.3 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı.

Şekil 4.28 de $\tilde{N}$ matrisinin yapısı yakından gösterilmektedir.



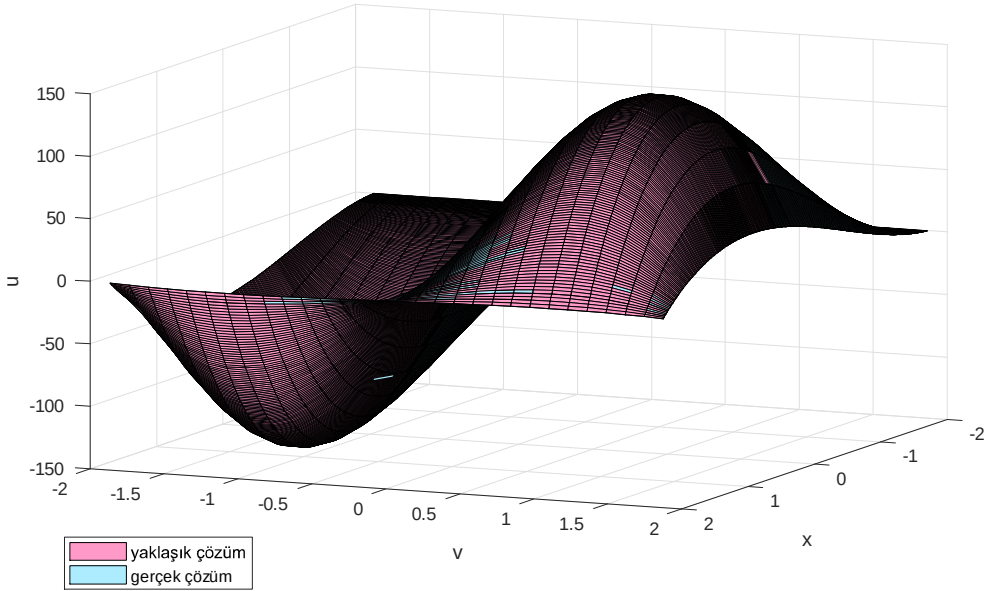
Şekil 4.28 Örnek 4.3 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görüntümü.

Şekil 4.29 da ele alınan problemde u nun kesin ve elde edilen yaklaşık çözümleri sunulmuştur.



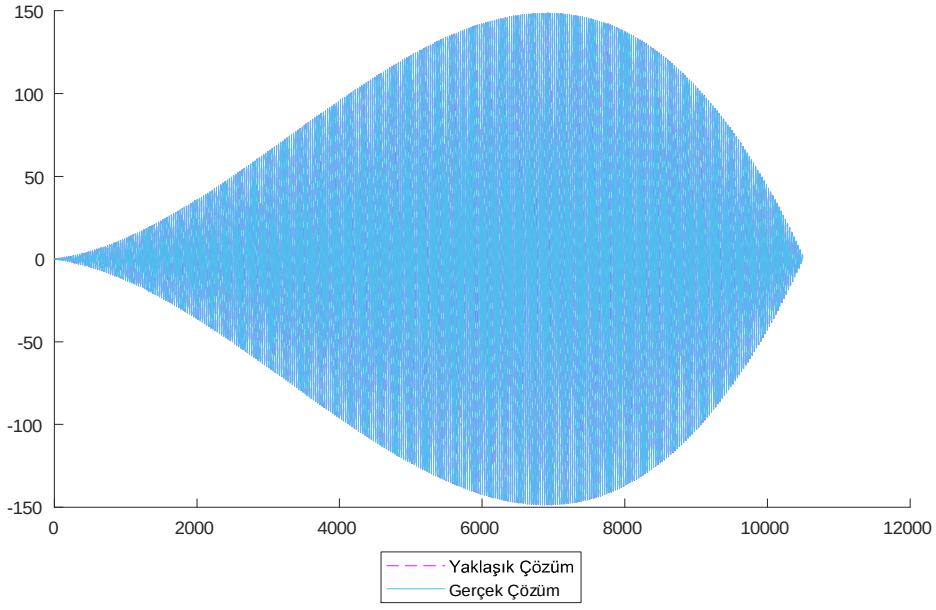
Şekil 4.29 Örnek 4.3 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.

Şekil 4.30 da u için Şekil 4.29 ile verilen çözümler birleştirilerek gösterilmiştir.



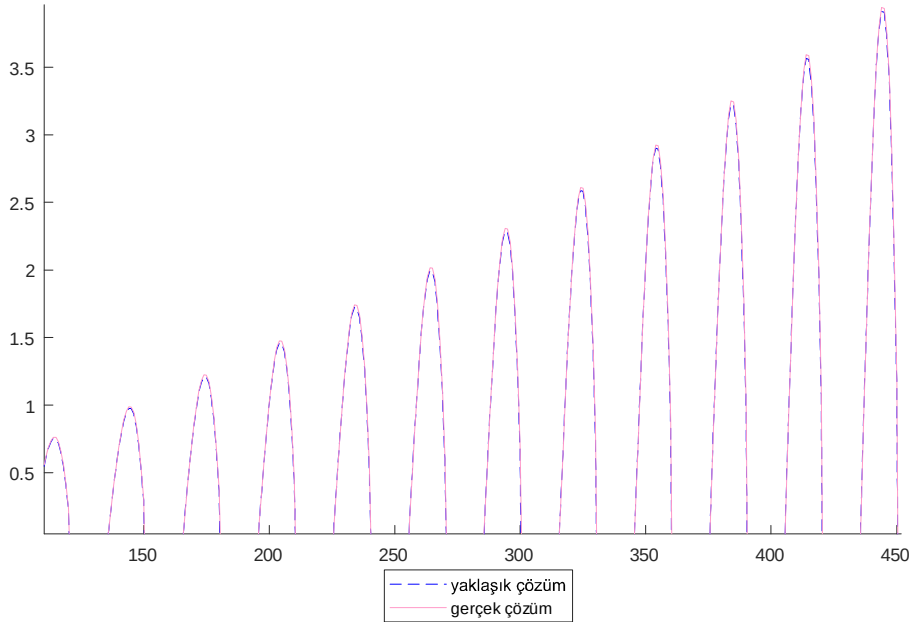
Şekil 4.30 Örnek 4.3 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 4.31 de u için elde edilen sayısal sonuçlar 10500 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



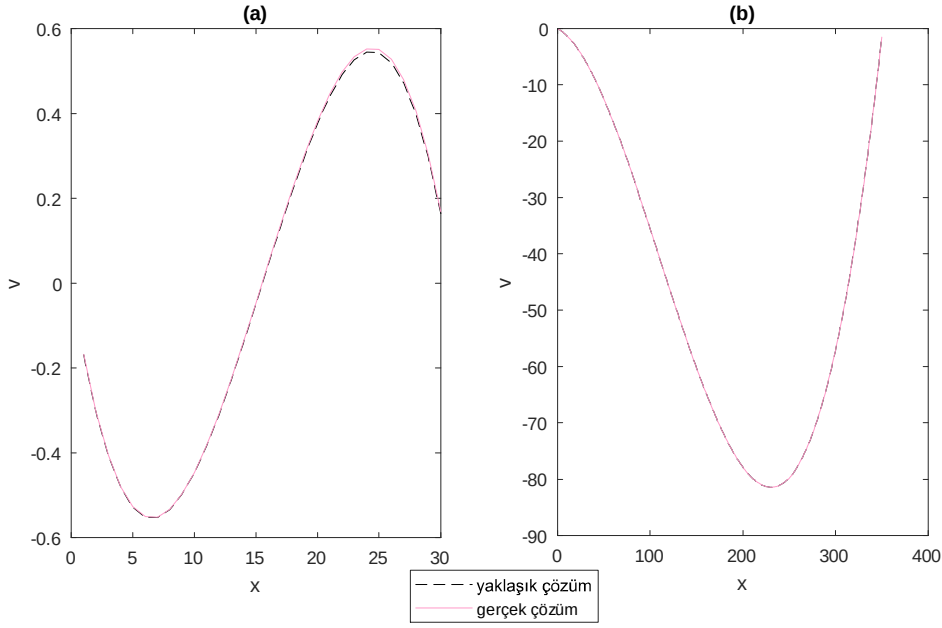
Şekil 4.31 Örnek 4.3 de u nun karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 4.32 de Şekil 4.31 de verilen u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösteriminin yakından görüntümü sunulmuştur.



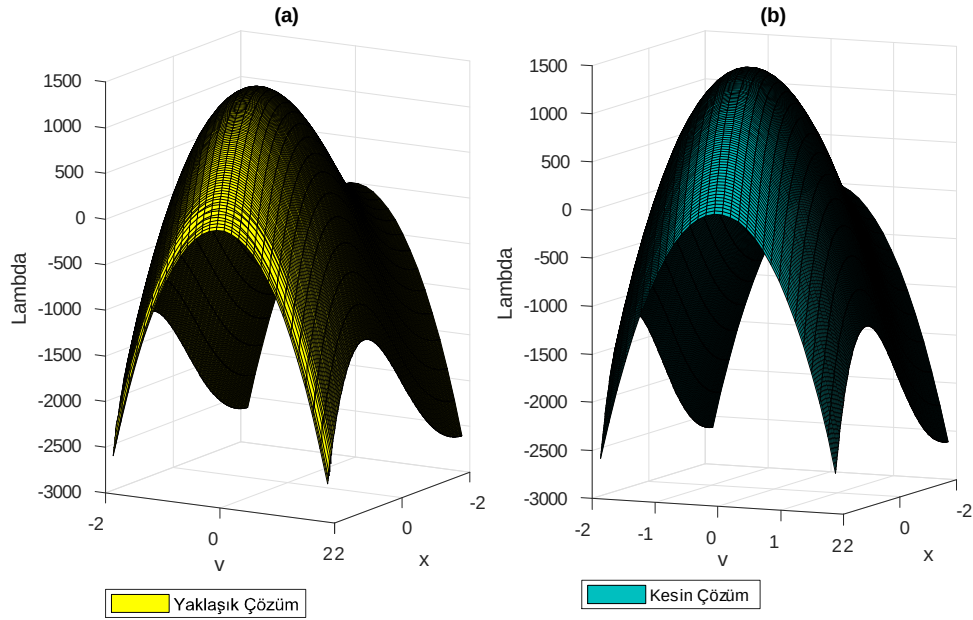
Şekil 4.32 Örnek 4.3 de u için Şekil 4.31 in yakından görüntüsü.

Aşağıdaki şekilde u çözümünün (a) $i = 3$ ve (b) $j = 2$ için kesitsel gösterimleri sunulmuştur.



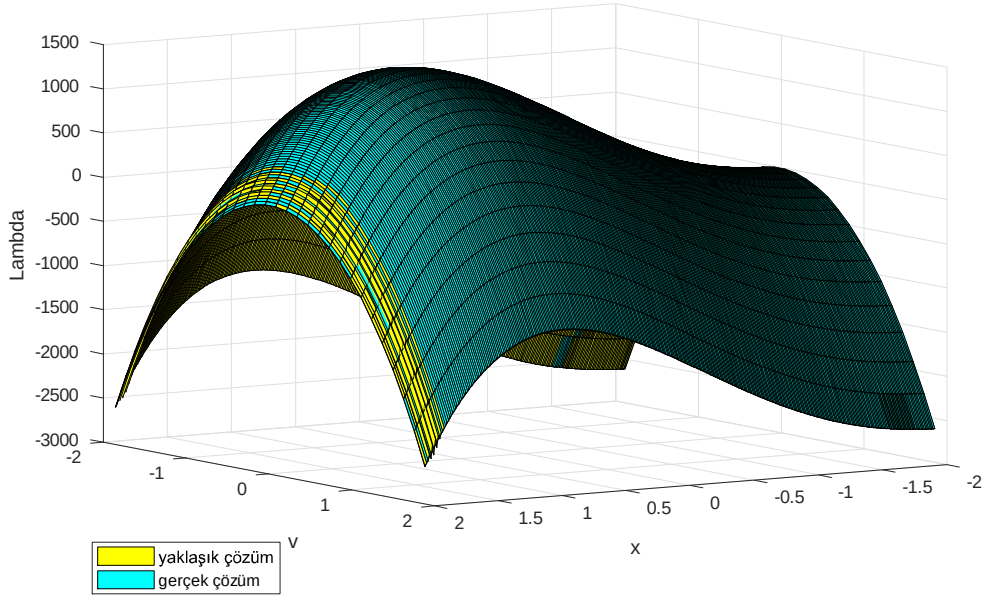
Şekil 4.33 Örnek 4.3 de u nun çözüm vektörünün (a) $i = 3$ ve (b) $j = 2$ için kesitsel gösterimi.

Şekil 4.34 de λ için yaklaşık ve gerçek çözümler verilmiştir.



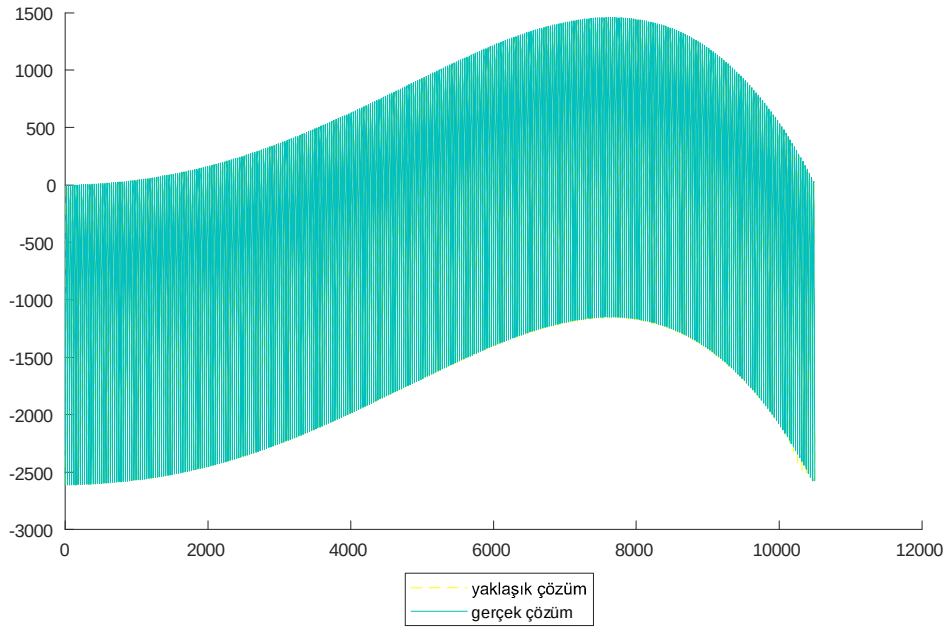
Şekil 4.34 Örnek 4.3 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) kesin çözüm.

Aşağıda λ için Şekil 4.34 deki yaklaşık ve kesin çözümler birleştirilerek sunulmuştur.



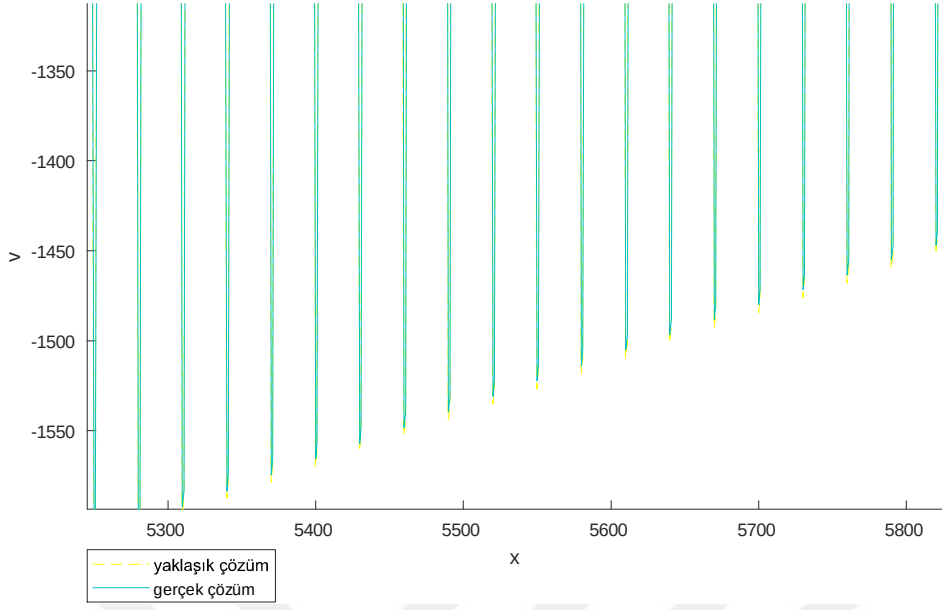
Şekil 4.35 Örnek 4.3 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Aşağıda λ için elde edilen sayısal sonuçlar 10500 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



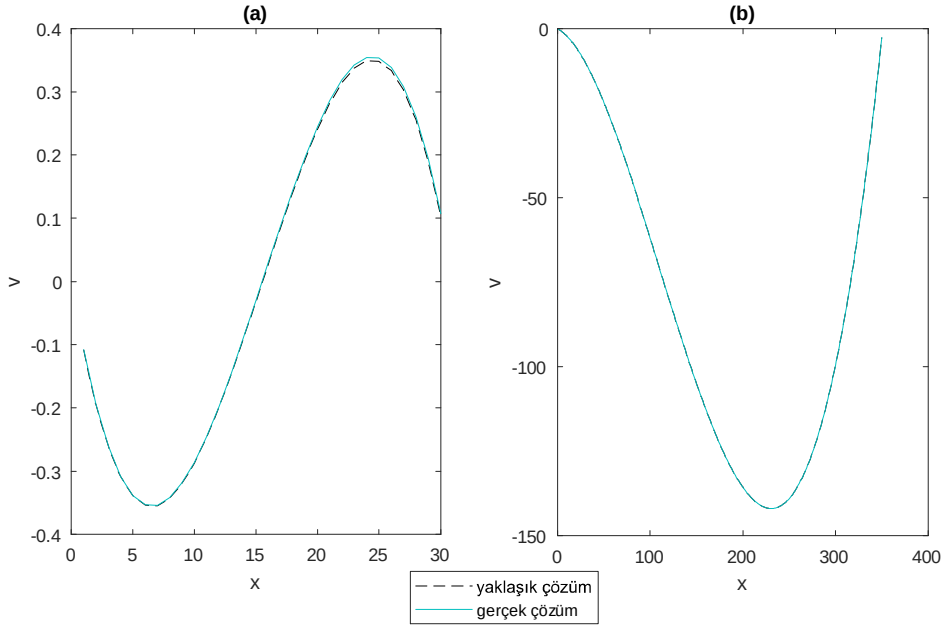
Şekil 4.36 Örnek 4.3 de λ nın karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 4.36 daki karşılaştırmalı grafiksel gösterimin 4000-6000 aralığındaki yakından görüntümü aşağıdaki grafikte sunulmuştur.



Şekil 4.37 Örnek 4.3 de λ için Şekil 4.36'nın yakından görünümü.

Aşağıdaki şekilde λ nın karşılaştırmalı grafiksel gösteriminin (a) $i = 2$, (b) $j = 5$ alınarak elde edilen kesitsel gösterimleri sunulmuştur.



Şekil 4.38 Örnek 4.3 de λ nın çözümünün (a) $i = 2$ ve (b) $j = 5$ için kesitsel görünümü.

Örnek 4.3 (3.1) denkleminde $f(x, v) = -1$, $K(x, v, s) = -xvs$ ve

$$\begin{aligned}
F(x, v) = & \frac{144v^2}{x} + 90v^2x^2 - \frac{32v^3}{x} \frac{72v^3}{x^2} - 20v^3x^2 - \frac{48v^4}{x^2} + \frac{8v^5}{x^2} \\
& + 147v^2e^x - 30v^3e^x + 5v^4e^x + \frac{9351vx}{10} - \frac{144v}{x} - \frac{8847vx^2}{20} \\
& - 522v^2x + \frac{243vx^3}{4} + 26v^3x + 60v^4x - 10v^5x - \frac{2364ve^x}{5} \frac{363vxe^x}{5} \\
& - \frac{96ve^x}{x} \frac{1749vx^2e^x}{10} - 258v^2xe^x - \frac{81vx^3e^x}{2} + 114v^3xe^x - 19v^4xe^x \\
& + \frac{96v^2e^x}{x} - \frac{72v^2e^x}{x^2} + 60v^2x^2e^x - \frac{48v^3e^x}{x} + \frac{48v^3e^x}{x^2} \\
& - 30v^3x^2e^x + \frac{8v^4e^x}{x} + \frac{8v^4e^x}{x^2} + 5v^4x^2e^x
\end{aligned}$$

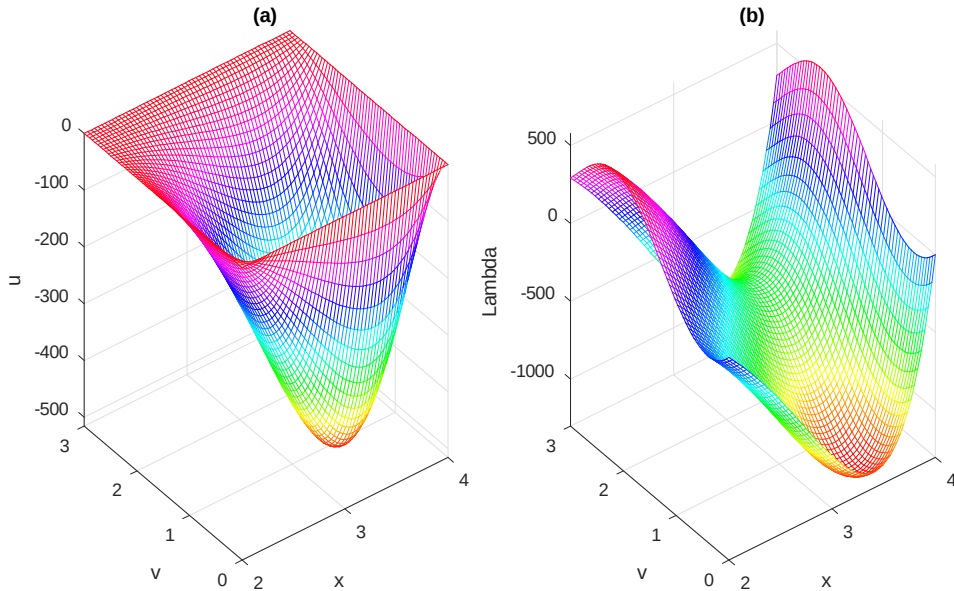
olmak üzere, $\Omega = (2, 4) \times (0, 3)$ bölgesinde (3.1) denkleminden (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümünün,

$$u(x, v) = (x^2 - 6x + 8) \left(\frac{1}{x+5} \right) (e^x - v)(v-3)^2(v)$$

ve

$$\lambda(x, v) = 306e^x - \frac{2574v}{5} + \frac{72e^x}{x} + 45x^2e^x - 261xe^x + 612v^2 + 125v^3 - 174v^4 + 29v^5$$

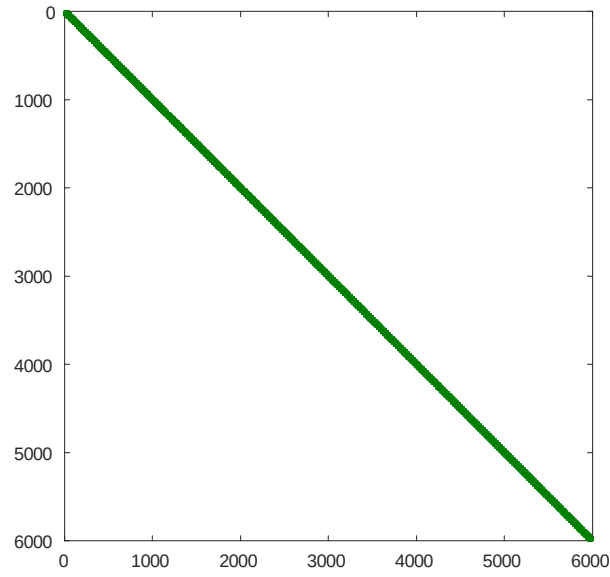
olduğu bilinmektedir ve bu çözümler Şekil 4.39 da grafiksel olarak gösterilmiştir.



Şekil 4.39 Örnek 4.4 de (a) u için kesin çözüm ve (b) λ için kesin çözüm.

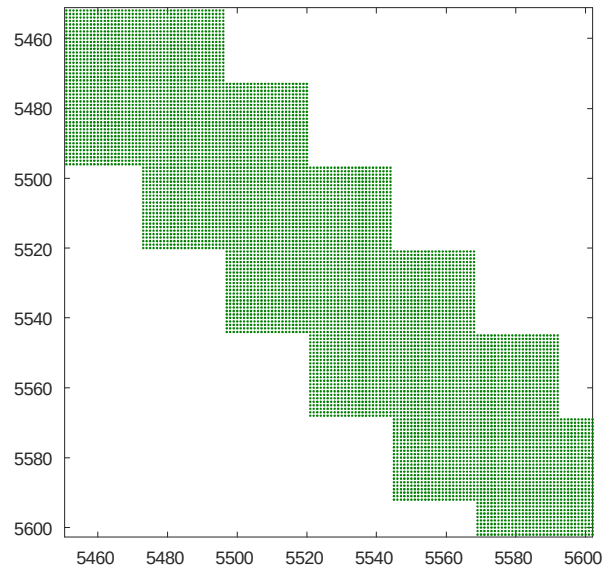
Aşağıda verilen grafikte $\tilde{N}$ matrisinin yapısının 6000×6000 tipinde üçlü blok bant matris

olduğu gösterilmektedir.



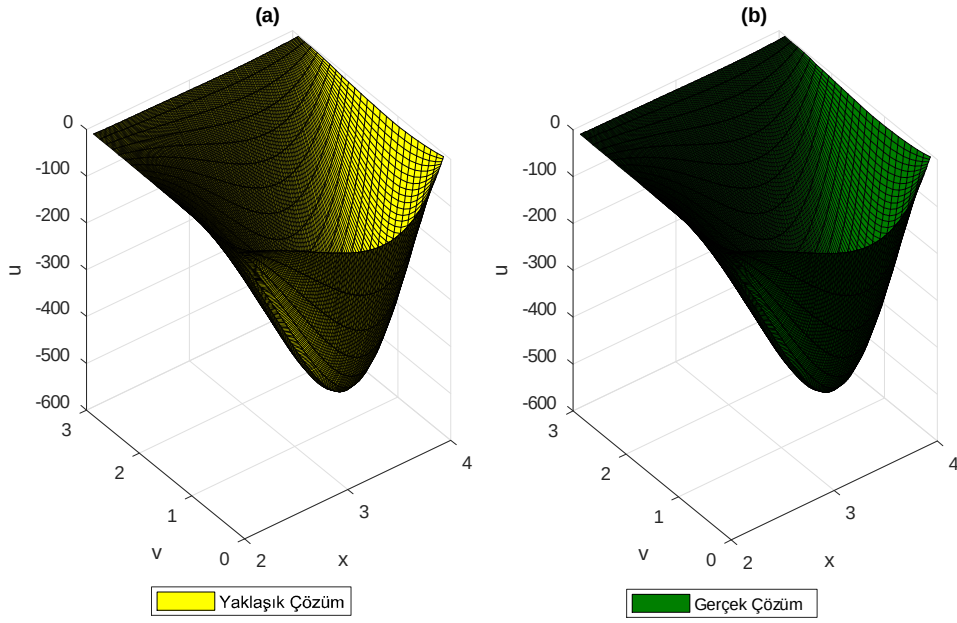
Şekil 4.40 Örnek 4.4 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı.

Şekil 4.41 de Örnek 4.4 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görüntüsü verilmiştir.



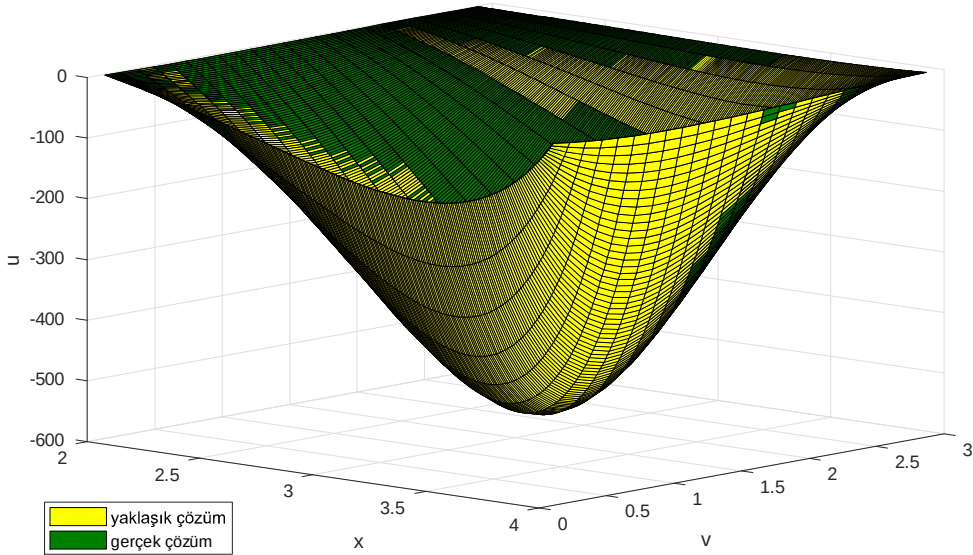
Şekil 4.41 Örnek 4.4 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısının yakından görüntüsü.

Şekil 4.42 de ele alınan problemin u çözümünün kesin ve yaklaşık değerleri sunulmuştur.



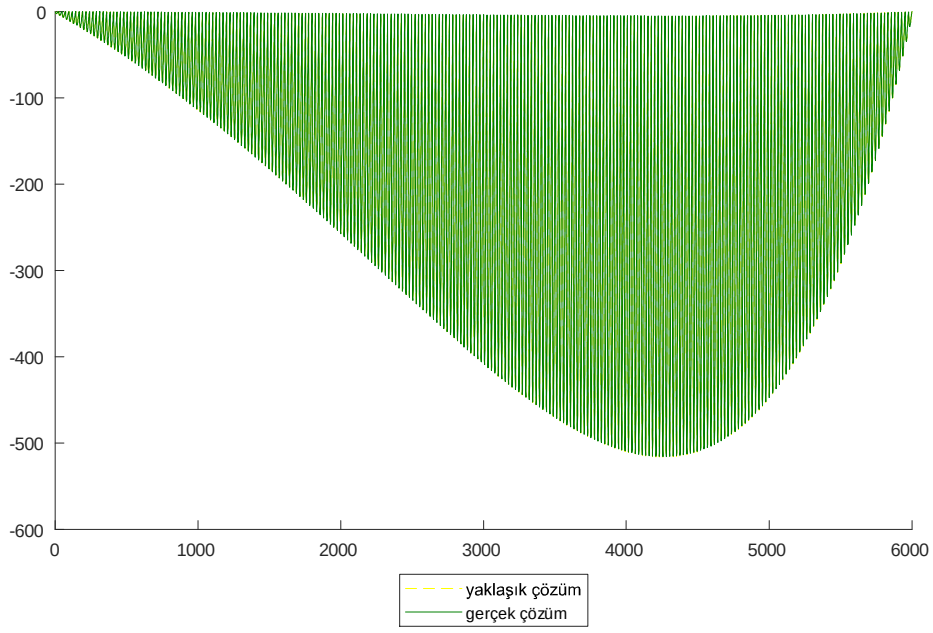
Şekil 4.42 Örnek 4.4 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.

Şekil 4.43 te Şekil 4.42 de ele alınan problemin u için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümleri birleştirilerek verilmiştir.



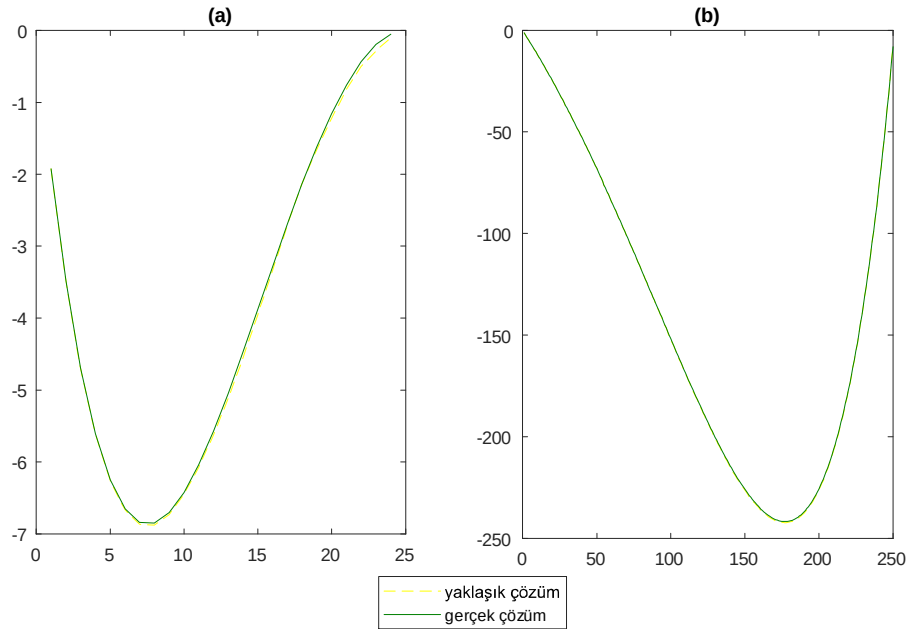
Şekil 4.43 Örnek 4.4 de u için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Aşağıda u için elde edilen sayısal sonuçlar 6000 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



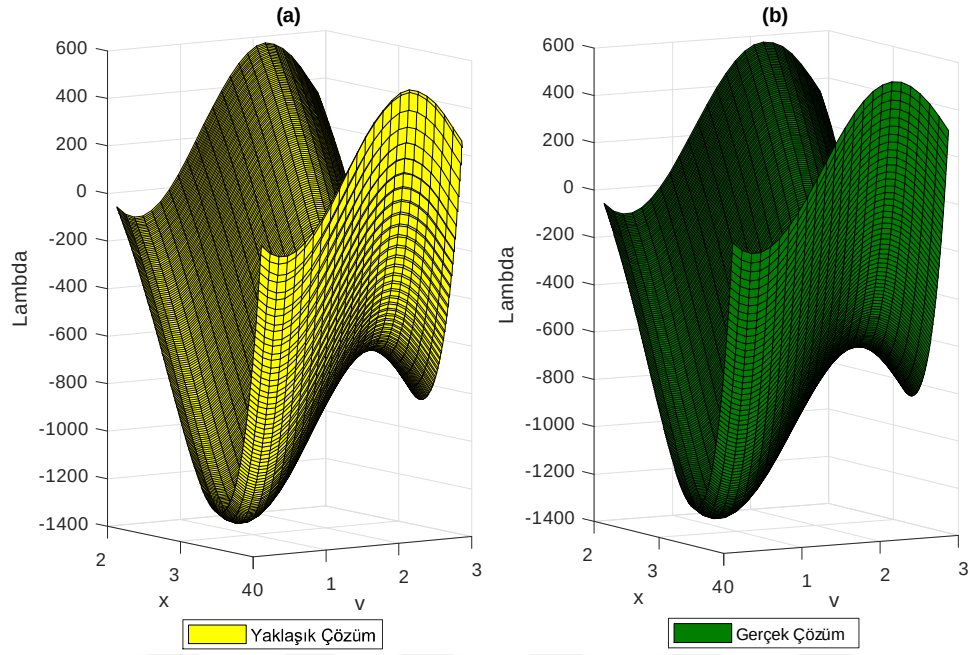
Şekil 4.44 Örnek 4.4 de u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 4.45 de u çözümünün (a) $i=3$ ve (b) $j=2$ için alınan kesitsel gösterimleri sunulmuştur.



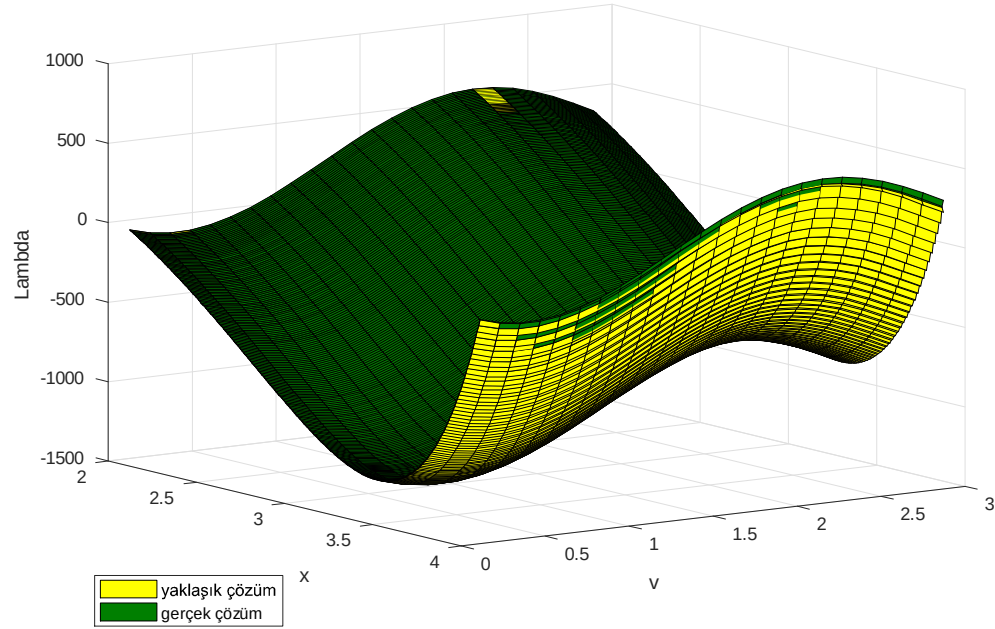
Şekil 4.45 Örnek 4.4 de u için (a) $i = 3$ ve (b) $j = 2$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm.

Şekil 4.46 da ele alınan problemin λ için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümleri verilmiştir.



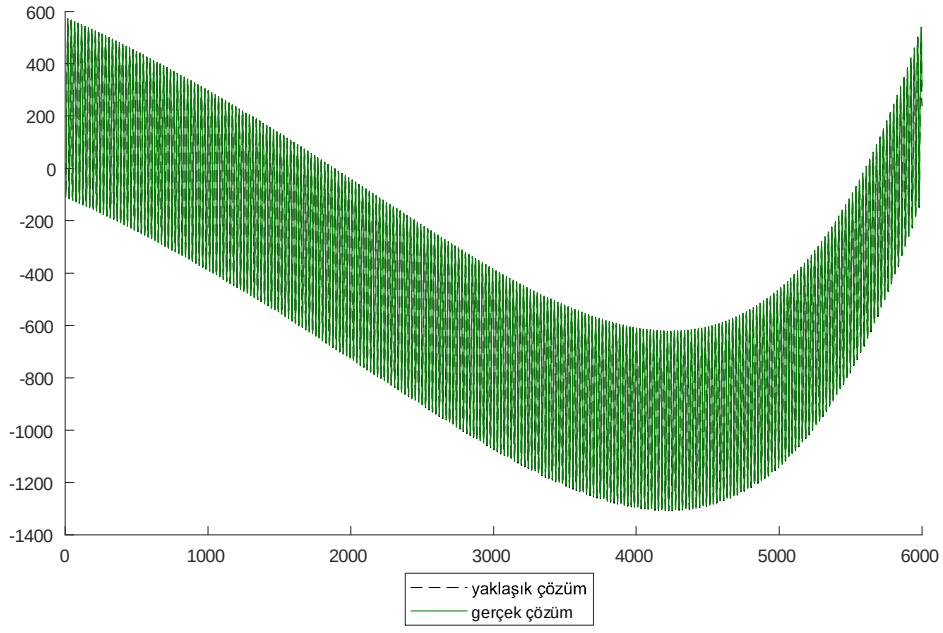
Şekil 4.46 Örnek 4.4 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.

Şekil 4.47 de verilen grafikte Şekil 4.46 da verilen λ çözümleri birleştirilerek sunulmuştur.



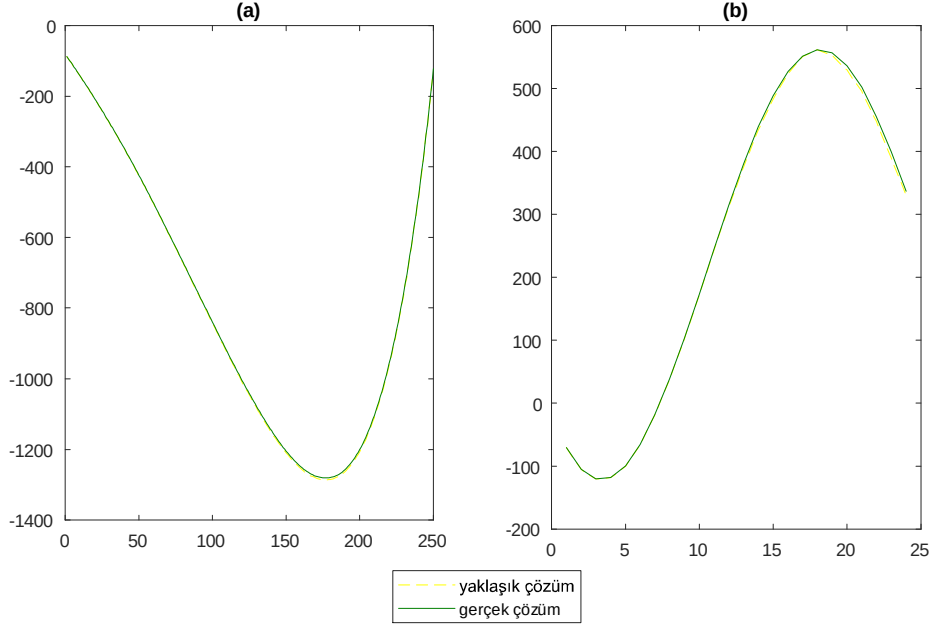
Şekil 4.47 Örnek 4.4 de λ için yaklaşık ve kesin çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 4.48 de verilen grafikte λ için elde edilen sayısal sonuçlar 6000 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.48 Örnek 4.4 de λ nın karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

Şekil 4.49 da λ için (a) $i=3$ ve (b) $j=2$ alınarak kesitsel gösterimleri verilmiştir.



Şekil 4.49 Örnek 4.4 de λ için (a) $i = 3$ ve (b) $j = 2$ alınarak elde edilen kesitsel görüntüm.

Örnek 4.4 (3.1) denkleminde $f(x, v) = -2x$, $K(x, v, s) = -xvs$ ve

$$\begin{aligned} F(x, v) = & \frac{9v^4}{x} - \frac{-225v^2}{x} + 250v^2 \log x - 10v^4 \log x - 25v^2x + v^4x \\ & + 7500vx \log x - \frac{25000vx^2 \log x}{3} + 4v^2x \log x + \frac{2500vx^3 \log x}{3} \\ & + 2v^4x \log x - 60v^2x^2 \log x + 6v^2x^3 \log x \end{aligned}$$

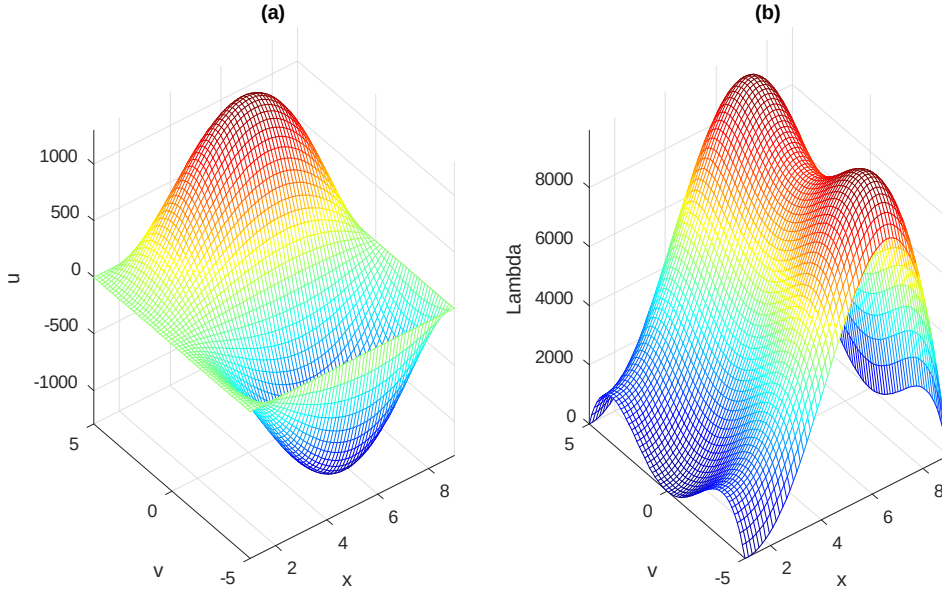
olmak üzere, $\Omega = (1, 9) \times (-5, 5)$ bölgesinde (3.1) denkleminde (u, λ) fonksiyonlar çiftinin bulunması problemini ele alalım. Bu problemin kesin çözümünün,

$$u(x, v) = (v^2 - 25)(\log x)(x - 9)(x - 1)v$$

ve

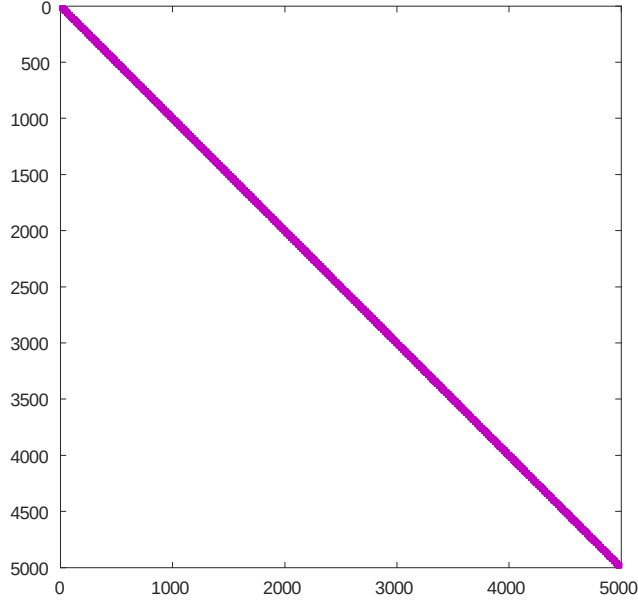
$$\lambda(x, v) = 500x^2 \log(x) - 50x^3 \log x - 450x \log x + 250v^2 - 10v^4$$

olduğu bilinmektedir ve bu çözümler Şekil 4.50 de grafiksel olarak gösterilmiştir.



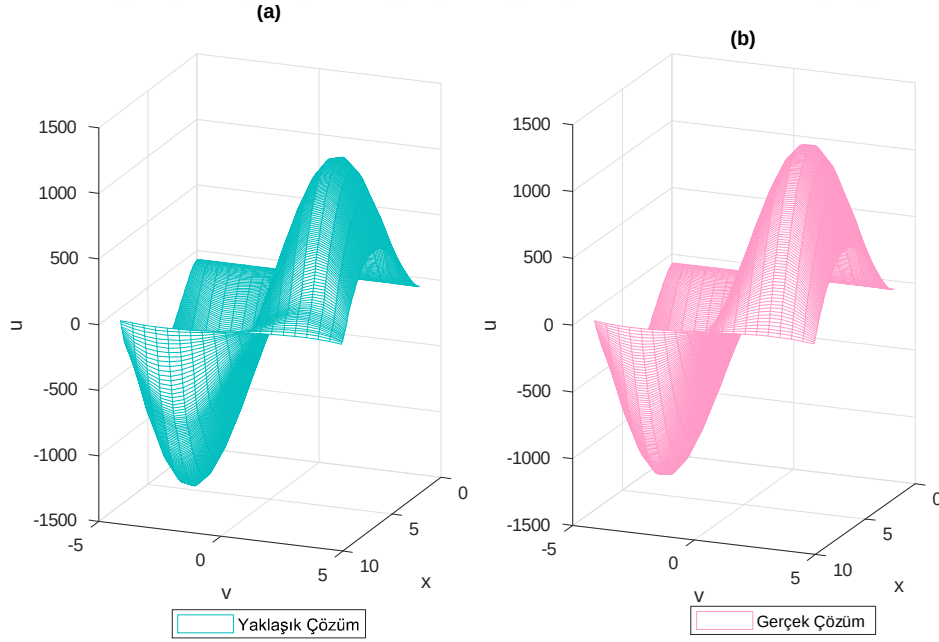
Şekil 4.50 Örnek 4.5 de verilen (a) u için kesin çözüm ve (b) λ için kesin çözüm.

Şekil 4.51 de verilen grafikte $\tilde{N}$ matrisinin yapısının 5000×5000 tipinde üçlü blok bant matris olduğu gösterilmektedir.



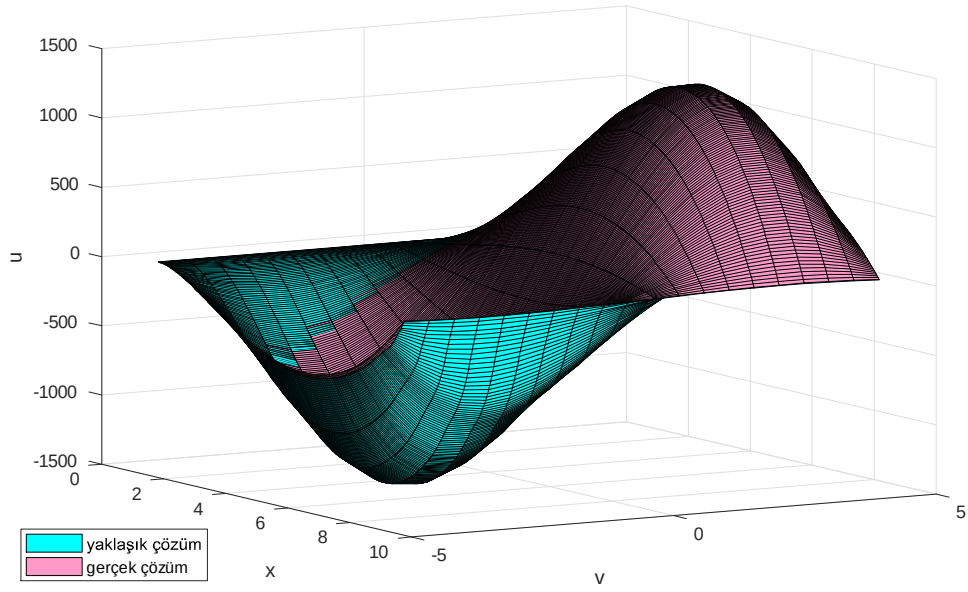
Şekil 4.51 Örnek 4.5 için $\tilde{N}$ matrisinin yapısı.

Şekil 4.52 de ele alınan problemin u için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümleri sunulmuştur.



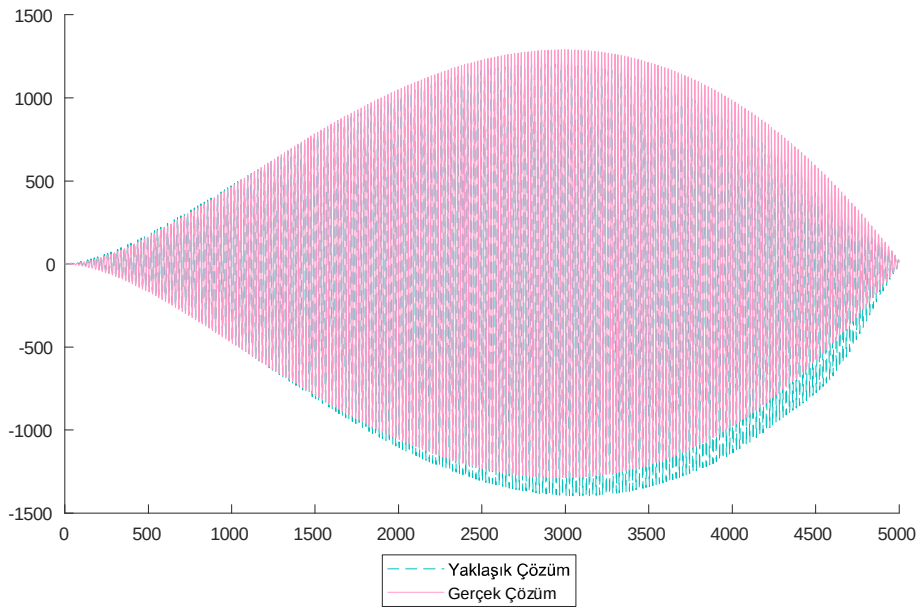
Şekil 4.52 Örnek 4.5 de u için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.

Şekil 4.53 te verilen grafikte Şekil 4.52 de ele alınan problemin u için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümleri birleştirilerek verilmiştir.



Şekil 4.53 Örnek 4.5 de u için yaklaşık ve gerçek çözümler birleştirilmiştir.

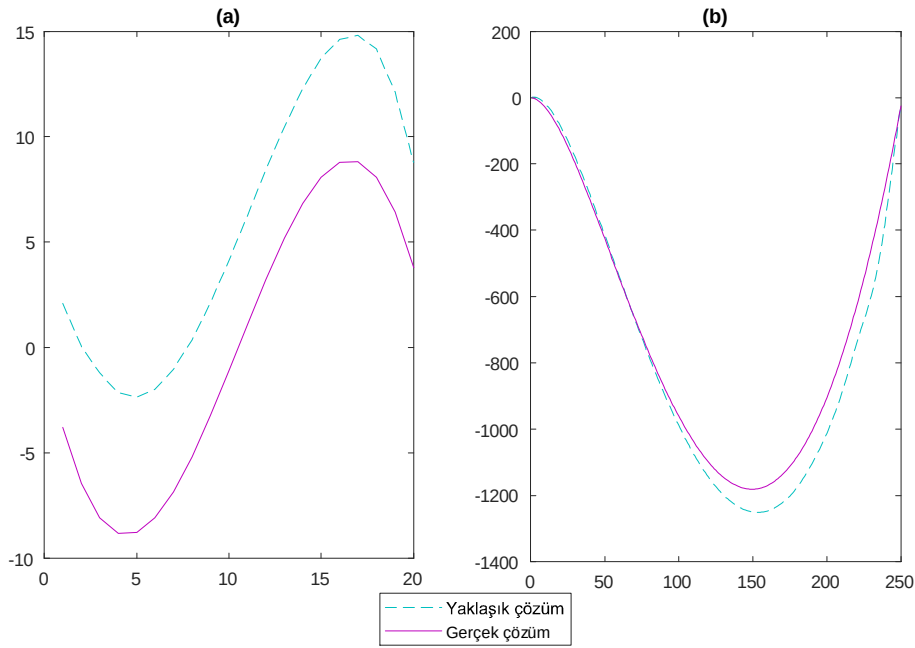
Şekil 4.54 te u için elde edilen sayısal sonuçlar 5000 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.54 Örnek 4.5 de u nun çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi.

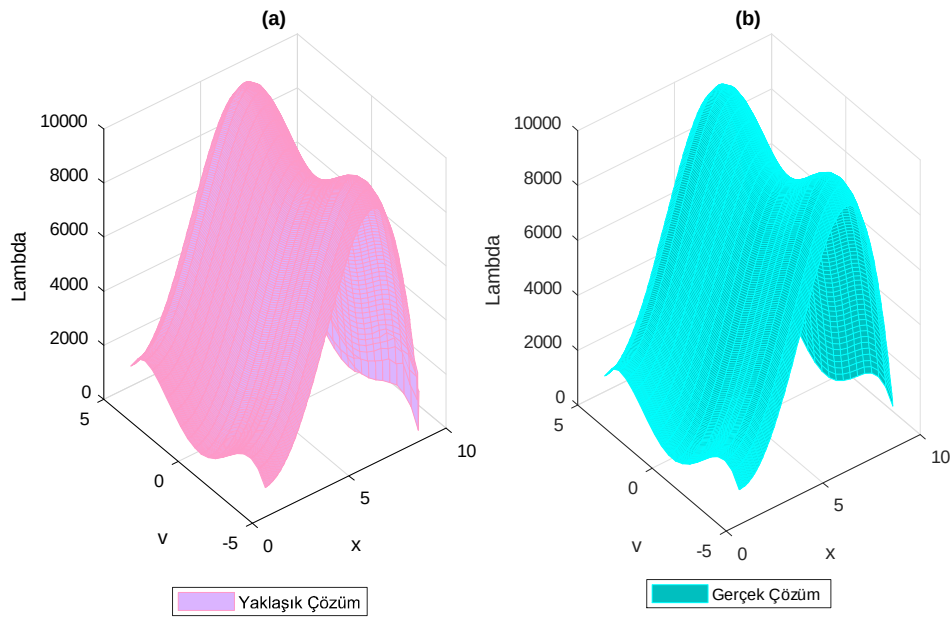
Şekil 4.55 te u çözümünün (a) $i=5$ ve (b) $j=3$ alınarak elde edilen kesitsel gösterimleri

sunulmuştur.



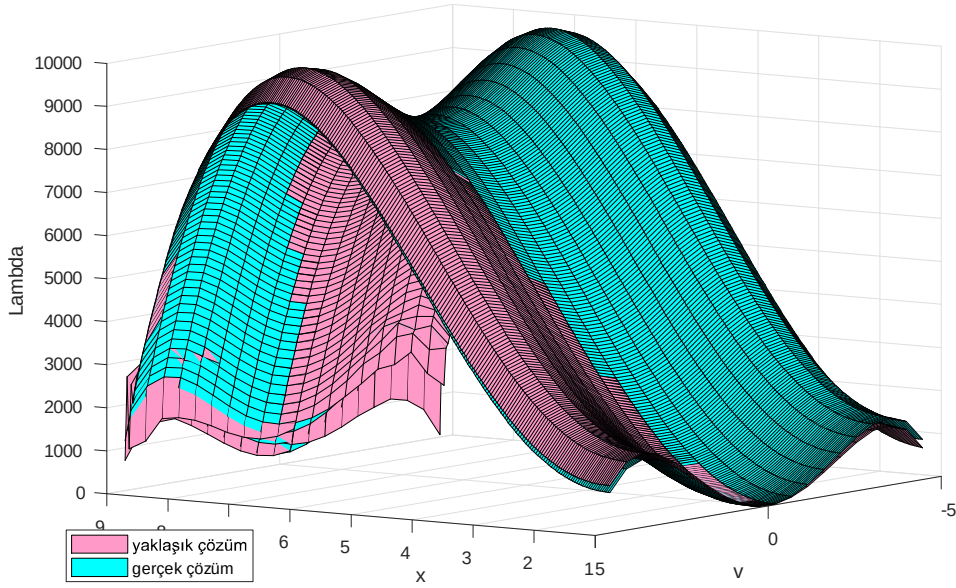
Şekil 4.55 Örnek 4.5 de u için (a) $i=5$ ve (b) $j=3$ alınarak elde edilen kesitsel görüntüm.

Şekil 4.56 de verilen grafikte ele alınan problemin λ için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümleri sunulmuştur.



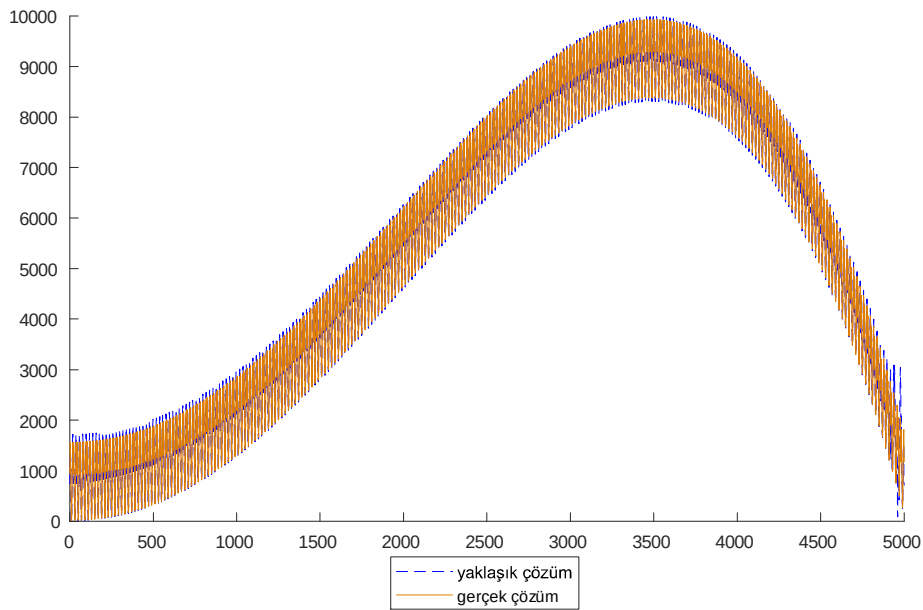
Şekil 4.56 Örnek 4.5 de λ için (a) yaklaşık çözüm ve (b) gerçek çözüm.

Şekil 4.56 da ele alınan problemin λ için kesin ve elde edilen yaklaşık çözümleri aşağıdaki grafikte birleştirilerek verilmiştir.



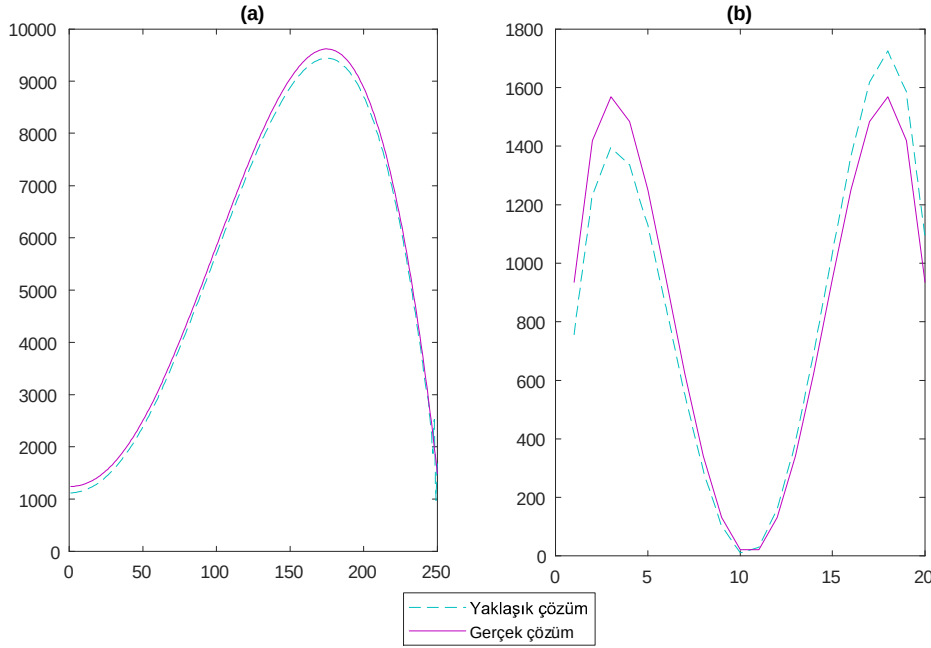
Şekil 4.57 Örnek 4.5 de λ için yaklaşık ve gerçek çözümlerin birlikte gösterimi.

Şekil 4.58 de verilen grafikte λ için elde edilen sayısal sonuçlar 5000 adet örgü noktasında kesin değerlerle karşılaştırılmıştır.



Şekil 4.58 Örnek 4.5 de λ nın çözüm vektörünün karşılaştırmalı grafiksel gösterimi .

Şekil 4.59 da verilen grafikte λ nın çözümünün $i=5$ ve $j=4$ alınarak elde edilen kesitsel gösterimleri sunulmuştur.



Şekil 4.59 Örnek 4.5 de λ için (a) $i=5$ ve (b) $j=4$ alınarak elde edilen kesitsel görünüm.

4.2 SONUÇ

Bu çalışmada, sınırlı bir bölgede saçılım terimi içeren durağan bir kinetik denklem için bir ters problem ele alınmıştır. İlk olarak, Amirov (2001) de verilen bir yöntem kullanılarak bu problem üçüncü mertebeden bir denklem için bir Dirichlet problemine indirgenmiştir. Daha sonra ortaya çıkan denklemdeki türev ve integral içeren terimler için sırasıyla sonlu fark metodu ve Newton-Cotes formülleri uygulanmıştır. Sonuç olarak, elde edilen lineer cebirsel denklem sistemi Matlab yazılımı kullanılarak çözülmüştür. Önerilen yöntemin etkinliğini göstermek için bulunan yaklaşık sonuçlar kesin çözümler ile tablo ve grafikler yardımıyla karşılaştırılmıştır.