

**SAÇILMA TEORİSİ VE ELEKTROMANYETİK
DALGA SAÇILMASI**

Mehtap LAFCI

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**HAZİRAN 2010
ANKARA**

Mehtap LAFCI tarafından hazırlanan SAÇILMA TEORİSİ VE ELEKTROMANYETİK DALGA SAÇILMASI adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR
Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Adil MISIR
Matematik Anabilim Dalı, Gazi Üniversitesi

Doç. Dr. Fatma TAŞDELEN
Matematik Anabilim Dalı, Ankara Üniversitesi

Tarih : 23.06.2010

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Bilal TOKLU
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mehtap LAFCI

SAÇILMA TEORİSİ VE ELEKTROMANYETİK**DALGA SAÇILMASI****(Yüksek Lisans Tezi)****Mehtap LAFCI****GAZİ ÜNİVERSİTESİ****FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ****Haziran 2010****ÖZET**

Bu tez çalışmasında $\mathbb{R}^2$ de Laplace denklemi için tek katlı ve çift katlı potansiyellerin tanımları verildi ve Dirichlet, Neumann problemleri Fredholm integral denklemleri olarak formüle edildi. $\mathbb{R}^3$ te Helmholtz denklemi için tek katlı ve çift katlı Helmholtz potansiyelleri tanımlandı. Homogen olmayan bir ortamda zaman harmonik dalga yayılması probleminin çözümü incelendi. Ayrıca bir sonsuz silindirli zaman harmonik elektromanyetik dalgaların saçılma problemi ve bu silindirin keyfi kesitinde zaman harmonik düzlem dalganın saçılma problemi incelendi.

Bilim Kodu : 204.1.138**Anahtar Kelimeler : Harmonik Fonksiyon, Potansiyel Teori,
Elektromanyetik Dalga, Saçılma, Direkt Saçılma****Sayfa Adedi : 118****Tez Yöneticisi : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR**

SCATTERING AND POTENTIAL THEORY**(M.Sc.Thesis)****Mehtap LAFCI****GAZİ UNIVERSITY****INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY****June 2010****ABSTRACT**

In this thesis, definitions of single and double layer potentials are given and the Dirichlet, Neumann problems are formulated as the Fredholm integral equations for the Laplace equation in $\mathbb{R}^2$. Single and double layer Helmholtz potentials are defined for the Helmholtz equations in $\mathbb{R}^3$. The solution of time harmonic wave scattering problem is investigated in a nonhomogeneous medium. Also the scattering problem of time harmonic electromagnetic waves with an infinite cylinder and the scattering problem of time harmonic plane wave in arbitrary cross section of this cylinder are analyzed.

Science Code : 204.1.138**Key Words : Harmonic Function, Potential Theory, Electromagnetic Wave, Scattering, Direct Scattering****Page Number : 118****Adviser : Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR**

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren hocam Prof. Dr. İbrahim Ethem ANAR'a ve tez çalışmam sırasında desteklerini benden esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
SİMGELER VE KISALTMALAR	x
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER	2
2.1. C^k Sınıfından Sürekli Fonksiyonlar	2
2.2. Bölge	2
2.3. Harmonik Fonksiyonlar	2
2.4. Green Özdeşlikleri, Laplace Denklemleriyle Birlikte Tanımlanan Sınır Değer Problemleri	3
2.5. Fredholm Alternatifi	10
2.6. Düzlem Dalga	11
2.7. İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi	12
2.8. Schwarz Eşitsizliği	12
2.9. Bessel Denklemleri, Çözümleri ve Asimptotik Bağlantıları	13
2.10. Fourier Serilerinin Kompleks Formu	14
2.11. Özdeşlik Teoremi	15
3. POTANSİYEL TEORİ	16
4. DIRICHLET VE NEUMANN PROBLEMLERİNE UYGULAMALAR	38
4.1. İç Dirichlet Problemi	38

	Sayfa
4.2. Dış Dirichlet Problemi	40
4.3. İç Neumann Problemi	43
4.4. Dış Neumann Problemi	47
5. HELMHOLTZ DENKLEMİ İÇİN POTANSİYEL TEORİ	52
5.1. Helmholtz Denklemi	52
5.2. İki Katlı Helmholtz Potansiyelin Süreklilik Özellikleri	56
5.3. Tek Katlı Helmholtz Potansiyelin Süreklilik Özellikleri	65
6. FİZİKSEL ALTYAPI	69
6.1. Direkt Saçılma Problemi	78
6.2. Ters Saçılma Problemi	78
6.3. Homogen Olmayan Bir Ortamda Zaman Harmonik Dalga Yayılması	78
7. MAXWELL DENKLEMLERİ VE ELEKTROMANYETİK DALGA SAÇILMASI	92
8. SİLİNDİRİN KEYFİ BİR KESİTİNDE SAÇILMA	103
KAYNAKLAR	118
ÖZGEÇMİŞ	119

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Dirichlet Problemi	5
Şekil 2.2. Neumann Problemi	6
Şekil 3.1. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi	17
Şekil 3.2. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi	18
Şekil 3.3. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi	21
Şekil 3.4. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi	22
Şekil 3.5. D^+ ve D^- bölgeleri	25
Şekil 5.1. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi	53
Şekil 5.2. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi	54
Şekil 5.3. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi	57
Şekil 5.4. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi	58
Şekil 5.5. D^+ ve D^- bölgeleri	61
Şekil 8.1 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ için $\Omega(O, R) \setminus (D \cup \Omega(x, \varepsilon))$ bölgesi	106
Şekil 8.2. $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ için $D_R = \Omega \setminus \overline{D}$ bölgesi	110
Şekil 8.3. D ve Ω bölgeleri	113
Şekil 8.4. $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ için $\Omega \setminus \overline{D}$ bölgesi	114

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
∂D	D bölgesinin sınırı
$\overline{D}$	D bölgesinin kapanışı
$\mathbb{R}^n$	n boyutlu Euclid uzayı
$C(D)$	D de tanımlı reel veya kompleks değerli sürekli fonksiyonların normlu uzayı
$C^k(D)$	D de tanımlı k-inci mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli olan reel veya kompleks değerli fonksiyonların normlu uzayı
Δ	Laplace operatörü
∇	Gradient
$L^2(\partial\Omega)$	$\partial\Omega$ da karesi integrallenebilir fonksiyonların normlu uzayı
o, O	Landau sembolü
Curl	Rot operatörü
Re	Reel kısım
Im	İmajiner kısım

1. GİRİŞ

Bu çalışmada $\mathbb{R}^2$ de tek katlı ve çift katlı potansiyellerin tanımları verildi. Bu potansiyellerin süreklilik özelliklerinden yararlanarak $\mathbb{R}^2$ de Laplace denklemi için verilen Dirichlet ve Neumann problemleri Fredholm integral denklemlerine indirgendi. Bu integral denklemlerinin çözümlerinin varlığı gösterildi. Ayrıca $\mathbb{R}^3$ te tek katlı ve çift katlı Helmholtz potansiyelleri ve bu potansiyellerin süreklilik özellikleri verildi. Akışkan bir ortamda hareket eden akustik dalgalar Helmholtz denklemi olarak ifade edildi ve homogen olmayan bir ortamda zaman harmonik dalga yayılması probleminin çözümü incelendi. Son olarak bir sonsuz silindirin keyfi kesitinde zaman harmonik düzlem dalganın saçılma problemi incelendi.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız bazı tanım ve teoremleri vereceğiz.

2.1. C^k Sınıfından Sürekli Fonksiyonlar

2.1. Tanım

f fonksiyonu $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinde tanımlansın. Kabul edelim ki f ve f nin k . mertebeye kadar olan tüm kısmi türevleri, $B \subset A$ kümesinde sürekli olsun. O zaman f fonksiyonuna, B kümesinde C^k sınıfındandır denir.

B de C^k sınıfından olan fonksiyonlar ailesi $C^k(B)$ ile gösterilir. B de sürekli olan fonksiyonlar ailesi $C(B)$ ile gösterilir.

2.2. Bölge

2.2. Tanım

$A \subset \mathbb{R}^n$ herhangi bir küme olsun. A nın herhangi iki noktası, tamamen A nın içinde kalan bir kırık çizgi (eğri) ile birleştirilebiliyorsa A kümesine bağlantılıdır denir. $A \subset \mathbb{R}^n$ açık ve bağlantılı bir küme ise A ya bir bölge denir [1].

2.3. Harmonik Fonksiyonlar

2.3. Tanım

$D \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge olsun. Bir $u \in C^2(D)$ fonksiyonu, D de

$$\Delta u(x) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0$$

Laplace denklemini sağlasın. O zaman u ya, D de harmoniktir denir.

$n \geq 3$ için Laplace denkleminin temel çözümü, $x = (x_1, \dots, x_n)$ ve $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\mathbb{R}^n$ de herhangi iki nokta olmak üzere, $x \neq y$ için

$$u(x, y) = \frac{1}{[(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2]^{(n-2)/2}} = \frac{1}{|x - y|^{n-2}}$$

olur.

Özel olarak $n = 2$ için Laplace denkleminin temel çözümü, $x = (x_1, x_2)$ ve $y = (y_1, y_2)$, $\mathbb{R}^2$ de herhangi iki nokta olmak üzere, $x \neq y$ için

$$u(x, y) = \log \frac{1}{|x - y|}$$

olur.

2.1. Teorem (Kuvvetli Maksimum Prensibi)

$D \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge ve $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, D de harmonik olsun ve bir sabite eşit olmasın. O zaman $u(x)$, maksimum ve minimum değerine D nin ∂D sınırında ulaşır [1].

2.4. Green Özdeşlikleri, Laplace Denklemleriyle Birlikte Tanımlanan Sınır Değer Problemleri

2.2. Teorem (Divergens Teoremi)

V vektör fonksiyonu, $V \in C^1(D)$, $\bar{D} \subset \mathbb{R}^2$ sınıfından olsun. D bölgesinin sınırı ∂D olsun. ∂D nin birim dış normal vektörü v olsun. Divergens teoremi

$$\int_D \nabla V dy = \int_{\partial D} V \cdot v \cdot ds(y)$$

formülü ile ifade edilir.

2.4. Tanım (Curl)

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$ ve $\vec{A}$ herhangi bir vektör olmak üzere

$$\text{curl} \vec{A} = \nabla \times \vec{A}$$

şeklindedir.

2.3. Teorem

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı bölgesi aşağıdaki şartları sağlasın.

a) D nin ∂D sınırı, sonlu sayıda düzgün yüzeyden oluşsun.

b) Koordinat eksenlerine paralel doğrular ∂D yüzeyini ya sonlu sayıda noktada kessin ya da ∂D ile ortak noktaları bir aralık oluştursun.

∂D yüzeyi üzerinde, D nin dışına yönlendirilmiş birim normal vektör $v = (v_x, v_y)$ olsun.

Kabul edelim ki $u, w \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ olsunlar.

Birinci Green Özdeşliği olarak bilinen

$$\int_D u \nabla^2 w \, dy = \int_{\partial D} u \frac{\partial w}{\partial v} \, ds(y) - \int_D (\nabla u) \cdot (\nabla w) \, dy$$

bağıntısı sağlanır.

İkinci Green Özdeşliği olarak bilinen

$$\int_D (u \nabla^2 w - w \nabla^2 u) \, dy = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial w}{\partial v} - w \frac{\partial u}{\partial v} \right) \, ds(y)$$

bağıntısı sağlanır (Burada dy , D nin alan elementi, $ds(y)$ ∂D nin uzunluk elementidir.).

2.5. Tanım

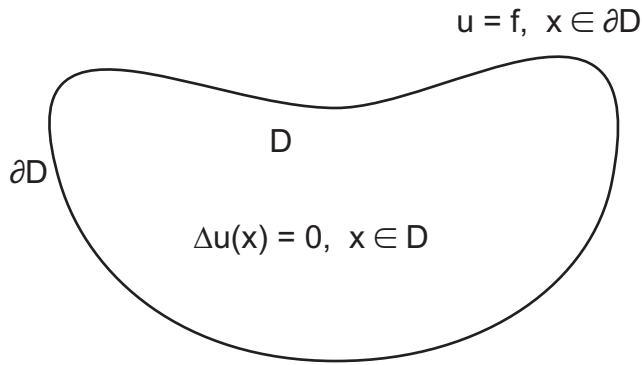
$D \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun ve D nin ∂D sınırı, düzgün olsun. $f \in C(\partial D)$ veril-

miş bir fonksiyon olsun.

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D \text{ ise} \quad (2.1)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D \text{ ise} \quad (2.2)$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ fonksiyonunun aranması problemi-ne Dirichlet problemi denir. Eğer D , bir sınırlı bölgenin dışı ise bu probleme dış Dirichlet problemi denir [1].



Şekil 2.1. Dirichlet problemi

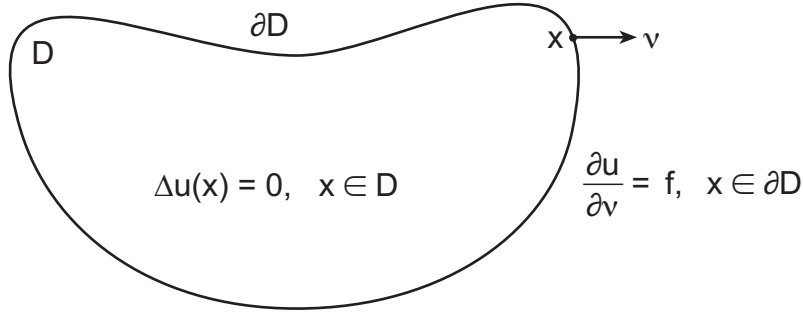
2.6. Tanım

$D \subset \mathbb{R}^n$ sınırlı bir bölge olsun ve ∂D sınırı düzgün olsun. ∂D sınırı üzerinde, $x \in \partial D$ noktasında ∂D nin birim dış normalini $v = v(x)$ ile gösterelim. $f \in C(\partial D)$ verilmiş bir fonksiyon olsun.

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in D \text{ ise} \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial v} = f(x), \quad x \in \partial D \text{ ise} \quad (2.4)$$

denklemlerini sağlayan $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ fonksiyonunun aranması problemi-ne Neumann problemi denir. Eğer D , bir sınırlı bölgenin dışı ise bu probleme dış Neumann problemi denir [1].



Şekil 2.2. Neumann problemi

2.4. Teorem

Eş.2.1 ve Eş.2.2 denklemleri ile tanımlanan Dirichlet probleminin en çok bir çözümü vardır [1].

İspat

Problemin herhangi iki çözümünün özdeş olduğunu göstermeliyiz. Problemin herhangi iki çözümü u_1 ve u_2 olsun. $\bar{u} = u_1 - u_2$ diyelim. O zaman $\bar{u}$, $\bar{D}$ de sürekli, D de harmonik ve ∂D sınırı üzerinde sıfır olur;

yani $\bar{u}$

$$\Delta \bar{u}(x) = 0 \quad , \quad x \in D \text{ ise}$$

$$\bar{u}(x) = 0 \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise}$$

denklemlerini sağlar. Maksimum prensibinden $\bar{u}$, maksimum minimum değerlerine ∂D sınırı üzerinde ulaşır. Böylece $x \in \bar{D}$ için $\bar{u} \equiv 0$ olur ve buradan $x \in \bar{D}$ için $u_1 \equiv u_2$ elde edilir.

2.5. Teorem

Dış Dirichlet probleminin çözümü tektir.

İspat

$$\Delta_2 u(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

Laplace denkleminin, $x_1 = \rho \cos \phi$, $x_2 = \rho \sin \phi$ kutupsal koordinatlardaki biçiminin,

$$\Delta_2 u(\rho, \phi) = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0$$

olduğunu biliyoruz. T dönüşümünü; $\rho = \frac{1}{r}$, $\phi = \theta$ ile

$$T: (\rho, \theta) \rightarrow \left(\frac{1}{r}, \theta \right)$$

olarak tanımlayalım. $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ sonsuz bölgesinin T altındaki görüntüsüne D' diyelim, yani,

$$T: \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \rightarrow D'$$

olsun. $u\left(\frac{1}{\rho}, \phi\right) = v(r, \theta)$ ile tanımlayalım.

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial v}{\partial r}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} = \frac{1}{\rho^4} \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}$$

türevleri ile dönüşmüş denklem,

$$\Delta_2 v(r, \theta) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.5)$$

olur. Dikkat edilirse Eş 2.5 ten, $v(r, \theta)$ nın $D' \setminus \{0\}$ bölgesinde harmonik ve $x \in \partial D'$ için $v(x) = f(x)$ olduğu gösterilebilir. Şimdi, $r = 0$ ın kaldırılabilir bir singüler nokta olduğunu ve $v(x)$ in D' de harmonik olduğunu gösterelim. Bunu yapmak için D' nün içinde,

$$\Omega_r = \{x : |x| < r\} \subset D'$$

yuvarını tanımlayalım. O zaman $v \in C^2(\partial\Omega_r)$ olur. Fourier teoreminden,

$$v(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\theta} \quad (2.6)$$

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (2.7)$$

yazarız. $v(r, \theta)$, Eş 2.5 i sağladığından, $a_n(r)$ ler

$$\frac{d^2 a_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da_n(r)}{dr} - \frac{n^2}{r^2} a_n(r) = 0 \quad (2.8)$$

denklemini sağlar. Eş 2.8 bir Euler denklemdir. Eş 2.8 in genel çözümü, a_0, b_0, a_n, b_n sabitler olmak üzere,

$$a_n(r) = \begin{cases} a_0 + b_0 \log r & , \quad n = 0 \text{ ise} \\ a_n r^{|n|} + b_n r^{-|n|} & , \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \text{ise} \end{cases} \quad (2.9)$$

olur. $v(x)$, $r = 0$ da (orijinde) sınırlı olduğundan, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için $b_n = 0$ olur. Böylece

$$v(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^{|n|} e^{in\theta}$$

olur; yani $v(r, \theta)$, Ω_r nin içinde harmonik olur ve $r = 0$ orijini, kaldırılabilir bir singüler noktadır. İç Dirichlet probleminin çözümünün tekliği sonucundan, dış Dirichlet probleminin çözümünün tekliği elde edilir.

2.6. Teorem

Eş.2.3 ve Eş.2.4 denklemleri ile tanımlanan Neumann probleminin mevcut olan herhangi iki çözümü, birbirinden sadece bir sabit kadar farklıdır [1].

İspat

u_1 ve u_2 fonksiyonları Neumann probleminin herhangi iki çözümü olsun.
 $\bar{u} = u_1 - u_2$ fonksiyonu

$$\Delta \bar{u}(x) = 0 \quad , \quad x \in D \text{ ise}$$

$$\frac{\partial \bar{u}(x)}{\partial \nu} = 0 \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise}$$

denklemlerini sağlar. Birinci Green özdeşliğinden,

$$\begin{aligned} \int_D \bar{u} \nabla^2 \bar{u} dy &= \int_{\partial D} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds(y) - \int_D (\nabla \bar{u}) \cdot (\nabla \bar{u}) dy \\ \int_D \bar{u} \nabla^2 \bar{u} dy + \int_D |\nabla \bar{u}|^2 dy &= \int_{\partial D} \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds(y) \\ \int_D |\nabla \bar{u}|^2 dy &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\nabla \bar{u} = 0$ ve $\bar{u}$, D de sabittir.

2.7. Teorem

Eş.2.3 ve Eş.2.4 denklemleri ile tanımlanan Neumann probleminin bir çözümünün mevcut olması için,

$$\int_{\partial D} f(x) ds(y) = 0$$

sağlanmalıdır [1].

İspat

u fonksiyonu Neumann probleminin bir çözümü olsun. Divergens teoremi uygulanarak,

$$0 = \int_D \nabla^2 u dy = \int_D \nabla \cdot \nabla u dy = \int_{\partial D} \nabla u \cdot \nu ds(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(y) = \int_{\partial D} f(x) ds(y)$$

elde edilir.

2.5. Fredholm Alternatifi

2.8. Teorem

İkinci türden Fredholm integral denklemi, $\Phi(s)$, bilinmeyen bir fonksiyon ve ℓ bir reel sayı olmak üzere,

$$\Phi(s) - \int_0^\ell K(s,t)\Phi(t)dt = f(s) \quad , \quad 0 \leq s \leq \ell \quad (2.10)$$

biçimindedir. (Özel olarak ℓ , ∂D sınırının yay uzunluğu ve $x \in \partial D$ için $\Phi(s) = \Psi(x(s))$ dir; burada s , ∂D sınırı boyunca ölçülen yay uzunluğudur). $K(s, t)$ çekirdek fonksiyonunun, $0 \leq s \leq \ell$, $0 \leq t \leq \ell$ karesinde, s ve t ye göre sürekli olduğunu kabul edelim. Ayrıca $f \in L^2([0, \ell])$ olduğunu kabul edelim. K operatörünü,

$$K\Phi = \int_0^\ell K(s,t)\Phi(t)dt \quad (2.11)$$

olarak tanımlayalım. Böylece Eş.2.10 integral denklemi, I özdeşlik operatörü olmak üzere,

$$(I - K)\Phi = f \quad (2.12)$$

olur. Eş.2.12 operatör denklemin adjointi,

$$(I - K^*)\Psi = g \quad (2.13)$$

dir; burada g , karesi integrallenebilir bir fonksiyon, K^* operatörü,

$$K^* \Psi = \int_0^\ell \overline{K(t,s)} \Psi(t) dt \quad (2.14)$$

olur.

$$\Phi - K\Phi = 0$$

ve

$$\Psi - K^*\Psi = 0$$

operatör denklemlerin her ikisi de, ya yalnız $\Phi = \Psi = 0$ özdeş sıfır çözümüne sahiptir ya da, her iki denklem de aynı $m \in \mathbb{N}$ sayıda lineer bağımsız $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ ve $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m$ çözümlerine sahiptir. İlk durumda, yani $\Phi - K\Phi = 0$ ve $\Psi - K^*\Psi = 0$ denklemlerinin her ikisi de yalnız $\Phi = \Psi = 0$ çözümüne sahip ise,

$$\Phi - K\Phi = f$$

ve

$$\Psi - K^*\Psi = g$$

denklemleri verilmiş her bir $f \in L^2$ ve $g \in L^2$ fonksiyonları için bir tek $\Phi \in L^2$ ve $\Psi \in L^2$ çözümüne sahiptir. İkinci durumda, yani $\Phi - K\Phi = 0$ ve $\Psi - K^*\Psi = 0$ denklemleri aynı $m \in \mathbb{N}$ sayıda lineer bağımsız $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m$ ve $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m$ çözümlerine sahip ise $\Phi - K\Phi = f$ denkleminin bir çözümü olması için gerek ve yeter koşul, $(f, \Psi_n) = 0$, ($n = 1, 2, \dots, m$) olmasıdır yani, f nin $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_m$ ye ortogonal olmasıdır. Aynı şekilde $\Psi - K^*\Psi = g$ denkleminin de bir çözümünün olması için gerek ve yeter koşul, $(g, \Phi_n) = 0$ ($n = 1, 2, \dots, m$) olmasıdır [1].

2.6. Düzlem Dalga

2.7. Tanım

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (2.10)$$

şeklindeki dalga denklemi için

$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\mathbb{R}^n$ de bir birim vektör olsun; yani

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 = 1$$

sağlansın. O zaman her bir sabit t ve her bir sabit c için,

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \dots + \xi_n x_n - t = c \quad (2.11)$$

denklemi, x uzayında ($\mathbb{R}^n$ de) bir düzlem belirtir. Bu düzlemin normali, ξ vektörüdür. t arttıkça Eş 2.11 düzlemi, ξ vektörü doğrultusunda 1 hızıyla hareket eder. $F(y)$, y değişkenine göre C^2 sınıfından bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = F(\xi_1 x_1 + \dots + \xi_n x_n - t) \quad (2.12)$$

fonksiyonu Eş 2.10 un bir çözümüdür. u nun Eş 2.11 hareket düzlemi üzerindeki değeri sabittir ve $F(c)$ ye eşittir. Bu nedenle Eş 2.12 biçimindeki çözümler düzlem dalgalar olarak bilinir [1].

2.7. İntegraller İçin Ortalama Değer Teoremi

2.9. Teorem

Eğer $G = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve $\psi : [a, b] \rightarrow [0, \infty]$ integrallenebilir bir fonksiyon ise o halde $[a, b]$ aralığında bir x sayısı vardır öyle ki

$$\int_a^b G(t)\psi(t)dt = G(x) \int_a^b \psi(t)dt$$

dir. Özel olarak $[a, b]$ de tüm t ler için $\psi(t) = 1$ ise $[a, b]$ de bir x vardır öyle ki

$$\int_a^b G(t)dt = G(x)(b - a)$$

dır.

2.8. Schwarz Eşitsizliği

2.8. Tanım

Karesi, $[a, b]$ kapalı aralığında integrallenebilir kompleks değerli fonksiyonlar uzayına $L^2([a, b])$ diyelim. $f, g \in L^2([a, b])$ olsun.

$$\left| \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \right| \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |g(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

eşitsizliğine Schwarz eşitsizliği denir.

2.9. Bessel Denklemi, Çözümleri ve Asimptotik Bağınıtları

2.9. Tanım

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$$

şeklindeki denkleme p . mertebeden Bessel denklemi denir. Burada p negatif olmayan gerçel bir parametredir.

Bu denklemin çözüm fonksiyonları

$$J_p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+2k}$$

şeklindeki p . mertebeden 1. tür Bessel fonksiyonu,

$p = n(n = 0, 1, 2, \dots)$ olduğunda

$\forall k \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(k + 1) = k!$

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi} J_n(x) \log \frac{x}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)!}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)]$$

$\psi(m+1) = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$, $\psi(1) = -\gamma$, γ Euler sabiti

şeklindeki n . mertebeden 2. tür Bessel fonksiyonudur.

$$H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$$

$$H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$$

şeklindeki birinci tür ve ikinci tür Hankel fonksiyonları 3. tür Bessel fonksiyonudur.

2.10. Tanım

$z \rightarrow 0$ ve $z \rightarrow \infty$ İken 1., 2. ve 3. Tür Bessel Fonksiyonlarının Asimptotik Bağlılıları

$$Y_0(z) \approx \frac{2}{\pi} \log \frac{z}{2}, \quad z \rightarrow 0$$

$$Y_n(z) \approx -\frac{(n-1)!}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}, \quad z \rightarrow 0 \quad n = 1, 2, \dots$$

$$Y_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right), \quad z \rightarrow \infty$$

$$J_n(z) \approx \frac{z^n}{2^n \Gamma(1+n)} \quad , \quad z \rightarrow 0$$

$$J_n(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \quad , \quad z \rightarrow \infty$$

$$H_n^{(p)}(z) \approx \mp i \left(\frac{2}{z}\right)^n \frac{\Gamma(n)}{\pi} \quad , \quad z \rightarrow 0 \quad , \quad n > 0$$

$$H_n^{(p)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{\mp i\left(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi\right)} \quad , \quad z \rightarrow \infty$$

$$H_0^{(p)}(z) \approx \mp i \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{z} \quad , \quad z \rightarrow 0$$

burada $p = 1$ durumunda eksi işareti $p = 2$ durumunda artı işareti kullanılır.

2.10. Fourier Serilerinin Kompleks Formu

2.11. Tanım

$f(x)$, $[-\pi, \pi]$ aralığında integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere $f(x)$ in Fourier serilerinin kompleks formu

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

şeklinde dir. Buradaki c_n ler $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ için

$$c_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

dir.

2.11. Özdeşlik Teoremi

2.10. Teorem

$f_1(z)$ ve $f_2(z)$ bir Ω bölgesinde analitik fonksiyonlar olsun. Öyle ki Ω da yığılma noktalarının bir kümesinde $f_1(z) = f_2(z)$ dir. O zaman Ω içinde $f_1(z) = f_2(z)$ dir.

3. POTANSİYEL TEORİ

Bu bölümde, $\mathbb{R}^2$ de çift katlı ve tek katlı potansiyel kavramlarını vereceğiz. Bu potansiyellerin süreklilik özelliklerinden faydalanarak, $\mathbb{R}^2$ de Laplace denklemi için verilen Dirichlet ve Neumann problemlerini Fredholm integral denklemlerine indirgeyeceğiz. Bunu yaparken Dirichlet probleminin çözümünü çift katlı potansiyel, Neumann probleminin çözümünü ise tek katlı potansiyel biçiminde arayacağız.

Çalışmalarımızda, Gauss formülüne ihtiyacımız olduğundan, $\mathbb{R}^2$ de Gauss formülünü verelim.

3.1. Teorem (Gauss Formülü)

$D \subset \mathbb{R}^2$ sınırlı, basit bağıntılı bir bölge olsun. D nin sınırı ∂D , C^2 sınıfından yani ∂D sürekli eğriliğe sahip olsun.

ν , ∂D sınırının birim dış normali, $ds(y)$ uzunluk elementi olmak üzere,

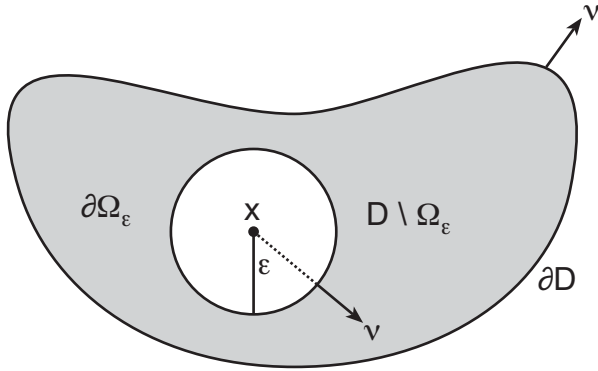
Gauss formülü;

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y) = \begin{cases} -2\pi, & x \in D \text{ ise} \\ -\pi, & x \in \partial D \text{ ise} \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ ise} \end{cases} \quad (3.1)$$

sağlanır.

İspat

1) $x \in D$ olsun. $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük olsun ve $\Omega_\varepsilon = \{y : |y - x| \leq \varepsilon\}$ yuvarı D nin içinde yatsın. $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesinde ikinci Green özdeşliğini yazalım. dy alan elementi olmak üzere,



Şekil 3.1. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

$$\begin{aligned}
 & \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[1 \cdot \nabla^2 \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \nabla^2(1) \right] dy \\
 &= \int_{\partial D} \left[1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} 1 \right] ds(y) \\
 & \quad + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} 1 \right] ds(y) \\
 &= \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \\
 &0 = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) - \int_0^{2\pi} \left(\frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon \cdot d\theta \\
 &0 = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) - \left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) \cdot \varepsilon \cdot 2\pi
 \end{aligned}$$

yazarız. $\partial \Omega_\varepsilon$ üzerinde, $\frac{\partial}{\partial \nu} = -\frac{d}{d\varepsilon}$ olur.

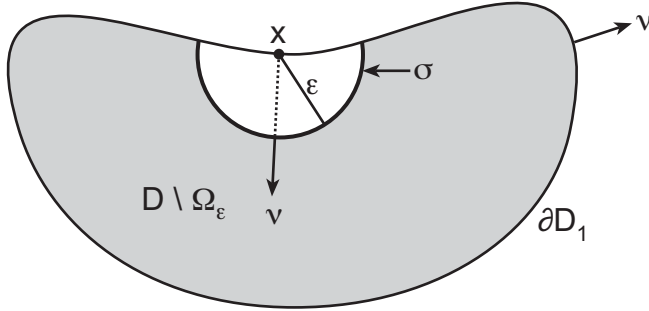
Böylece $\varepsilon \rightarrow 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -2\pi \tag{3.2}$$

elde edilir.

2) $x \in \partial D$ olsun. $\sigma = D \cap \partial \Omega_\varepsilon = D \cap \{y : |y-x| = \varepsilon\}$ ve

$\partial D_1 = \partial D \setminus (\partial D \cap \{y : |y - x| \leq \varepsilon\})$ olsun.



Şekil 3.2. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

$D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesinde ikinci Green özdeşliğini yazalım.

$$\begin{aligned}
 & \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[1 \cdot \nabla^2 \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \nabla^2(1) \right] dy \\
 &= \int_{\partial D_1} \left[1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} 1 \right] ds(y) \\
 & \quad + \int_{\sigma} \left[1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} 1 \right] ds(y) \\
 &= \int_{\partial D_1} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) + \int_{\sigma} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \\
 0 &= \int_{\partial D_1} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) - \int_0^\pi \left(\frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon d\theta \\
 0 &= \int_{\partial D_1} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) - \left(-\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2} \right) \cdot \varepsilon \cdot \pi
 \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -\pi \tag{3.3}$$

elde edilir.

3) $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ise $\log \frac{1}{|x-y|}$ fonksiyonu D bölgesinde singüler değildir. D de ikinci Green özdeşliğini yazarsak,

$$\begin{aligned} & \int_D \left[1 \cdot \nabla^2 \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \nabla^2(1) \right] dy \\ &= \int_{\partial D} \left[1 \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} 1 \right] ds(y) \\ & \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

elde edilir.

3.1. Tanım

$\Psi(y)$, $y \in \partial D$ için tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. ∂D nin birim dış normali ν olsun.

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (3.5)$$

ye, $\Psi(y)$ yoğunluklu iki katlı (double layer) potansiyel denir.

İki katlı potansiyel, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ için Laplace denkleminin bir çözümüdür. Çözüm olduğu kolayca gösterilebilir.

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ için,

$$\begin{aligned} \Delta_2 W(x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) W(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

sağlanır.

Çift katlı potansiyelin süreklilik özelliğinden faydalanarak iç Dirichlet ve dış Dirichlet problemini Fredholm integral denklemine indirgeyelim.

3.2. Teorem

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun. $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ ve $f \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 u(x) &= 0 & , \quad x \in D \text{ ise} \\ u(x) &= f(x) & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

iç Dirichlet probleminin çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y) , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım.

O zaman iç Dirichlet probleminin çözümü,

$$\Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y) = -2f(x) , \quad x \in \partial D$$

integral denkleminin çözümüne indirgenir.

İspat

$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ noktasının, $x_0 \in \partial D$ noktasına yaklaşması halinde iki katlı potansiyelin süreklilik özelliğinden bazı sonuçlar çıkaralım. $v \in C^2(\bar{D})$ olsun. Birinci Green özdeşliğini ve Eş.3.1 Gauss formülünü kullanalım.

$$\int_D (v \nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u) dy = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(y) \quad (3.7)$$

Birinci Green özdeşliğini $v \in C^2(\bar{D})$ ve $u = \log \frac{1}{|x-y|}$ fonksiyonları için yazalım.

$\Omega_\varepsilon = \{y : |y-x| \leq \varepsilon\} \subset D$ olsun. O zaman Eş.3.7 yi $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesine yazarsak,

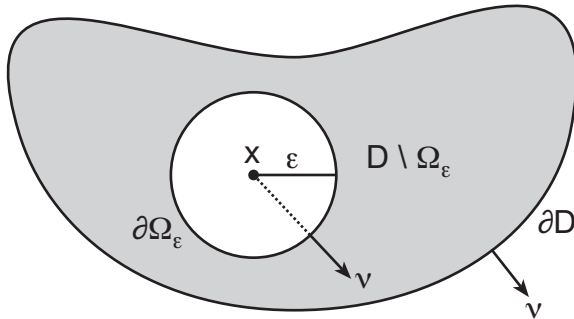
$$\begin{aligned} & \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \nabla_y^2 \log \frac{1}{|x-y|} + \nabla v(y) \cdot \nabla_y \log \frac{1}{|x-y|} \right] dy \\ &= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \end{aligned} \quad (3.8)$$

olur.

1) $x \in D$ olsun. O zaman integraller için ortalama değer teoremini kullanarak,

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} v(y) \left(-\frac{d}{d\varepsilon} \log \frac{1}{\varepsilon} \right) \varepsilon \cdot d\theta \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 2\pi v(x_1 + \varepsilon \cos \theta^*, x_2 + \varepsilon \sin \theta^*) \quad , \quad 0 \leq \theta^* \leq 2\pi \\ &= 2\pi v(x) \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir.

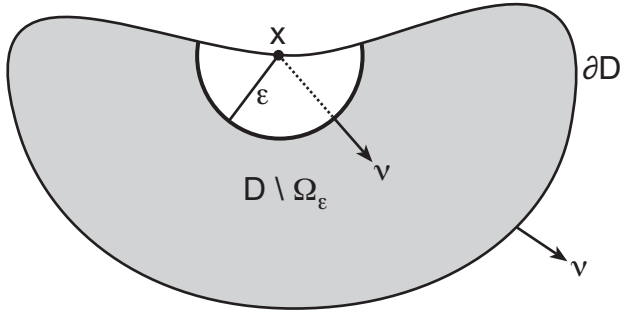


Şekil 3.3. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

2) $x \in \partial D$ olsun. O zaman,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = \pi v(x) \quad (3.10)$$

elde edilir.



Şekil 3.4. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

3) $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ olsun. O zaman $\log \frac{1}{|x-y|}$ fonksiyonu, $y \in D$ için tanımlıdır.

Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & \int_D \left[v(y) \nabla_y^2 \log \frac{1}{|x-y|} + \nabla v(y) \cdot \nabla_y \log \frac{1}{|x-y|} \right] dy \\ &= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \end{aligned} \quad (3.11)$$

olur.

Böylece Eş.3.8 $\varepsilon \rightarrow 0$ için,

$$\begin{aligned} & \int_D \left[v(y) \nabla_y^2 \log \frac{1}{|x-y|} + \nabla v(y) \cdot \nabla_y \log \frac{1}{|x-y|} \right] dy \\ &= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) - \pi v(x) \end{aligned}$$

veya

$$\int_D \nabla v(y) \cdot \nabla_y \log \frac{1}{|x-y|} dy + p v(x) = \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \quad (3.12)$$

olur, bu formülde p sayı,

$$p = \begin{cases} -2\pi & , \quad x \in D \text{ ise} \\ -\pi & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ ise} \end{cases} \quad (3.13)$$

dır.

Benzer olarak ikinci Green özdeşliğinden,

$$\begin{aligned} & \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \nabla_y^2 \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\ &= \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\ &+ \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \end{aligned} \quad (3.14)$$

elde edilir. Eş.3.9, Eş.3.10 ve Eş.3.11 den,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = \begin{cases} 2\pi v(x) & , \quad x \in D \text{ ise} \\ \pi v(x) & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ ise} \end{cases} \quad (3.15)$$

olduğunu biliyoruz.

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \log \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) ds(y) \right| \\ & \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \log \left| \frac{1}{|x-y|} \right| \left\| \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right\| ds(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right| \int_0^{2\pi} \left| \log \frac{1}{\varepsilon} \right| \varepsilon d\theta \\
&\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K \cdot \varepsilon \left| \log \frac{1}{\varepsilon} \right| \cdot 2\pi = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

olur. Burada

$$K = \max_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right|$$

şeklindedir.

Böylece $\varepsilon \rightarrow 0$ sıfıra gittiğinde Eş.3.14,

$$-\int_{\bar{D}} \left(\log \frac{1}{|x-y|} \right) \nabla^2 v(y) dy = \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) - pv(x)$$

veya

$$pv(x) = \int_{\bar{D}} \left(\log \frac{1}{|x-y|} \right) \nabla^2 v(y) dy + \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \tag{3.17}$$

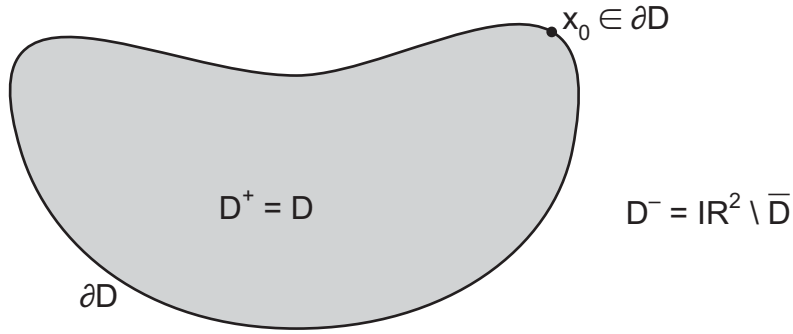
olur.

Şimdi Eş.3.5 ile tanımlanan iki katlı potansiyeli gözönüne alalım ve kabul edelim ki, $\Psi \in C^2(\partial D)$ olsun. O zaman Ψ fonksiyonu $\bar{D}$ da, C^2 sınıfındandır.

$D^+ = D$, $D^- = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ve $x_0 \in \partial D$ olsun.

$$W^+(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} W(x) \quad , \quad W^-(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} W(x)$$

tanımlayalım.



Şekil 3.5. D^+ ve D^- bölgeleri

Eş.3.12 de $v(x) = \Psi(x)$ koyalım ve iki katlı potansiyelin tanımını kullanalım.

$$\begin{aligned} \int_D \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \log \frac{1}{|x-y|} dy + p\Psi(x) &= \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial v(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \\ &= 2\pi W(x) \end{aligned} \quad (3.18)$$

olur.

Eş.3.18 de, D üzerindeki integral süreklidir. Şimdi Eş.3.18 de $x \in D^+$ olmak üzere $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limit hesaplırsak,

$$\int_D \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \log \frac{1}{|x_0-y|} dy - 2\pi\Psi(x_0) = 2\pi W^+(x_0) \quad (3.19)$$

elde edilir. $x_0 \in \partial D$ için Eş.3.18,

$$\int_D \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \log \frac{1}{|x_0-y|} dy - \pi\Psi(x_0) = 2\pi W(x_0) \quad (3.20)$$

olur. Eş.3.20 den Eş.3.19 u çıkarırsak,

$$\pi\Psi(x_0) = 2\pi[W(x_0) - W^+(x_0)]$$

veya

$$\Psi(x_0) = 2[W(x_0) - W^+(x_0)] \quad (3.21)$$

elde edilir. Şimdi Eş.3.18 de, $x \in D^-$ olmak üzere $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limit hesaplayalım.

$$\int_{\bar{D}} \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \log \frac{1}{|x_0 - y|} dy = 0. \Psi(x_0) = 2\pi W^-(x_0) \quad (3.22)$$

elde edilir. Eş.3.20 den Eş.3.22 yi çıkarırsak,

$$-\pi \Psi(x_0) = 2\pi[W(x_0) - W^-(x_0)]$$

veya

$$-\Psi(x_0) = 2[W(x_0) - W^-(x_0)] \quad (3.23)$$

elde edilir. Böylece Eş.3.21 ve Eş.3.23 ü,

$$\left. \begin{aligned} W^+(x_0) - W(x_0) &= -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \\ W^-(x_0) - W(x_0) &= +\frac{1}{2}\Psi(x_0) \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

yazarız. Eş.3.24 denklemlerinden,

$$W^+(x_0) - W^-(x_0) = -\Psi(x_0) \quad (3.25)$$

sıçrama (jump) bağıntısı elde edilir.

Şimdi tekrar Eş.3.17 ye dönelim. Eş.3.17 de $v \in C^2(\bar{D})$ seçelim öyle ki $x \in \partial D$ için,

$$v(x) = \Psi(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) = 0 \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \quad (3.26)$$

olsun. Böylece Eş.3.26 koşulları altında Eş.3.17,

$$pv(x) = \int_D \log \frac{1}{|x-y|} \nabla^2 v(y) dy + \int_{\partial D} \left[\Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y)$$

veya iki katlı potansiyelin tanımı ile,

$$pv(x) = \int_D \log \frac{1}{|x-y|} \nabla^2 v(y) dy + 2\pi W(x) \quad (3.27)$$

olur. Şimdi Eş.3.27 nin iki yanının, $x \in D^+$ olmak üzere $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ için $\frac{\partial}{\partial \nu(x)}$ türevini hesaplayalım,

$$-2\pi \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \log \frac{1}{|x_0-y|} \nabla^2 v(y) dy + 2\pi \frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) \quad (3.28)$$

olur. Yine Eş.3.27 nin iki yanının, $x \in D^-$ olmak üzere, $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ için $\frac{\partial}{\partial \nu(x)}$ türevini hesaplırsak,

$$0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \log \frac{1}{|x_0-y|} \nabla^2 v(y) dy + 2\pi \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0) \quad (3.29)$$

elde edilir. Eş.3.28 ve Eş.3.29 dan iki katlı potansiyelin türevleri için,

$$\frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0) \quad (3.30)$$

aynı süreksizlik özelliği ortaya çıkar, burada

$$\frac{\partial W^+}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial W}{\partial \nu}(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial W^-}{\partial \nu}(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial W}{\partial \nu}(x)$$

anlamındadır. Böylece iki katlı potansiyelin, ∂D nin normali doğrultusundaki türevi, x değişkeni sınırdan $x_0 \in \partial D$ noktasındaki normali boyunca geçerken, sürekli olarak değişir.

Şimdi, $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ ve $f \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$\left. \begin{array}{ll} \Delta_2 u(x) = 0 & , \quad x \in D \text{ ise} \\ u(x) = f(x) & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \end{array} \right\} \quad (3.6)$$

iç Dirichlet problemini gözönüne alalım. Eş.3.6 probleminin çözümünü, iki katlı potansiyel biçiminde arayalım.

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

iki katlı potansiyelin $x \in D$ ve $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ limiti,

$$W^+(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) = f(x_0) \quad (3.31)$$

şeklindedir. Eş.3.31 i Eş.3.24 ün ilk denkleminde yerine yazalım.

$$W^+(x_0) - W(x_0) = -\frac{1}{2} \Psi(x_0)$$

$$f(x_0) - W(x_0) = -\frac{1}{2} \Psi(x_0)$$

veya $\Psi(x)$ bilinmeyen yoğunluklu,

$$f(x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) = -\frac{1}{2} \Psi(x_0)$$

$$\Psi(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) = -2f(x_0), \quad x_0 \in \partial D \quad (3.32)$$

integral denklemi elde edilir. Böylece Eş.3.6 iç Dirichlet probleminin çözümü Eş.3.32 integral denkleminin çözümüne indirgendi.

3.3. Teorem

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun. $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ ve $f \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 u(x) &= 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ ise} \\ u(x) &= f(x), & x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned} \right\} \quad (3.33)$$

dış Dirichlet probleminin çözümünü $\Psi(y) \in C(\partial D)$ olmak üzere

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım.

O zaman dış Dirichlet probleminin çözümü,

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y) = 2f(x), \quad x \in \partial D$$

integral denkleminin çözümüne indirgenir.

İspat

Dış Dirichlet probleminin çözümünü,

$$W(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım. $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ olmak üzere $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ için iki katlı potansiyelin limiti,

$$W^-(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) = f(x_0) \quad (3.34)$$

olmalıdır. Eş.3.34 ü Eş.3.24 ün ikinci denkleminde yerine yazarsak,

$$\begin{aligned} W^-(x_0) - W(x_0) &= \frac{1}{2} \Psi(x_0) \\ f(x_0) - W(x_0) &= \frac{1}{2} \Psi(x_0) \end{aligned}$$

veya $\Psi(x)$ bilinmeyen yoğunluklu,

$$\begin{aligned} f(x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) &= \frac{1}{2} \Psi(x_0) \\ \Psi(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) &= 2f(x_0), \quad x_0 \in \partial D \end{aligned} \quad (3.35)$$

integral denklemi elde edilir.

Böylece Eş.3.33 dış Dirichlet probleminin çözümü Eş.3.35 integral denkleminin çözümüne indirgendi.

3.2. Tanım

$\Psi(y)$, $y \in \partial D$ için tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \log \frac{1}{|x - y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (3.36)$$

ye, $\Psi(y)$ yoğunluklu tek katlı (single layer) potansiyel denir.

Tek katlı potansiyel, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ için Laplace denkleminin bir çözümüdür. Çözüm olduğu kolayca gösterilebilir.

$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ için

$$\begin{aligned}\Delta_2 V(x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) V(x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \\ &= 0\end{aligned}$$

sağlanır.

Tek katlı potansiyelin süreklilik özelliğinden faydalanarak iç Neumann ve dış Neumann problemini Fredholm integral denklemine indirgeyelim.

3.4. Teorem

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun.

$u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $g \in C(\partial D)$ ve v , ∂D sınırının birim dış normali olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned}\Delta_2 u(x) &= 0, & x \in D \text{ ise} \\ \frac{\partial u}{\partial v}(x) &= g(x), & x \in \partial D \text{ ise}\end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

iç Neumann probleminin çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \log \frac{1}{|x-y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

tek katlı potansiyel biçiminde arayalım.

O zaman iç Neumann probleminin çözümü,

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial v(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 2g(x), \quad x \in \partial D$$

integral denklemin çözümüne indirgenir.

İspat

Eş.3.17 de, yani;

$$pv(x) = \int_D \left(\log \frac{1}{|x-y|} \right) \nabla^2 v(y) dy + \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} - \log \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \quad (3.17)$$

formülünde $v(x)$ fonksiyonunu $v \in C^2(\bar{D})$ ve

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= 0, & x \in \partial D \text{ ise} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) &= \Psi(x), & x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

seçelim,

Eş.3.38 koşulları, Eş.3.17 de yazılırsa,

$$pv(x) = \int_D \left(\log \frac{1}{|x-y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - \int_{\partial D} \Psi(y) \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \quad (3.39)$$

denklemini elde edilir. Eş.3.39 u tek katlı potansiyel ile ifade edersek,

$$pv(x) = \int_D \left(\log \frac{1}{|x-y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi V(x) \quad (3.40)$$

olur.

Şimdi, tek katlı potansiyelin, $x \in \mathbb{R}^2$ için sürekli olduğunu gösterelim. Eş.3.40 ın $x \in D^+ \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limitini hesaplırsak,

$$\underbrace{-2\pi v(x_0)}_{=0} = \int_D \left(\log \frac{1}{|x_0-y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi V^+(x_0) \quad (3.41)$$

olur. Eş.3.40 ın $x \in D^- \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limitini hesaplırsak,

$$0.v(x_0) = \int_D \left(\log \frac{1}{|x_0 - y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi V^-(x_0) \quad (3.42)$$

olur. Eş.3.41 ve Eş.3.42 den, $x_0 \in \partial D$ için,

$$V^+(x_0) = V^-(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_D \left(\log \frac{1}{|x_0 - y|} \right) \nabla^2 v(y) dy \quad (3.43)$$

elde edilir. Eş.3.40 ı, $x_0 \in \partial D$ için yazarsak,

$$\underbrace{-\pi v(x_0)}_{=0} = \int_D \left(\log \frac{1}{|x_0 - y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi V(x_0) \quad (3.44)$$

olur. Eş.3.43 ve Eş.3.44 ten, $V(x)$ tek katlı potansiyel, $x \in \mathbb{R}^2$ için süreklidir.

Eş.3.40 ın $x \in D^+ \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye v doğrultusundaki türevi

$$-2\pi \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \left(\log \frac{1}{|x_0 - y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0)$$

veya

$$-2\pi \Psi(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \left(\log \frac{1}{|x_0 - y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) \quad (3.45)$$

olur. Eş.3.40 ın $x \in D^- \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye v doğrultusundaki türevi

$$0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \left(\log \frac{1}{|x_0 - y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) \quad (3.46)$$

olur. $x_0 \in \partial D$ için Eş.3.40 ın v doğrultusundaki türevi

$$-\pi \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \left(\log \frac{1}{|x_0 - y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0)$$

veya

$$-\pi\Psi(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \left(\log \frac{1}{|x_0 - y|} \right) \nabla^2 v(y) dy - 2\pi \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) \quad (3.47)$$

olur. Eş.3.45 ten Eş.3.47 çıkarılırsa,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D \quad (3.48)$$

elde edilir. Eş.3.46 dan Eş.3.47 çıkarılırsa,

$$\frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D \quad (3.49)$$

olur. Eş.3.48 ve Eş.3.49 dan,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) = \Psi(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D \quad (3.50)$$

tek katlı potansiyellerin, ν doğrultusundaki türevleri için sıçrama (jump) bağıntısı elde edilir.

Şimdi $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ ve $g \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 u(x) &= 0 \quad , \quad x \in D \text{ ise} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= g(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

iç Neumann problemini gözönüne alalım. Eş.3.37 probleminin çözümünü tek katlı potansiyel biçiminde arayalım.

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \log \frac{1}{|x - y|} ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

tek katlı potansiyelin $x \in D^+ \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye $\frac{\partial}{\partial \nu}$ türevi

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) = g(x_0) \quad (3.51)$$

şeklinde olur. Eş.3.51 i Eş.3.48 de yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) &= \frac{1}{2} \Psi(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D \\ g(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) &= \frac{1}{2} \Psi(x_0) \end{aligned}$$

veya $x_0 \in \partial D$ için

$$\begin{aligned} g(x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) &= \frac{1}{2} \Psi(x_0) \\ \Psi(x_0) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \log \frac{1}{|x_0 - y|} ds(y) &= 2g(x_0) \end{aligned} \quad (3.52)$$

integral denklemi elde edilir. Böylece Eş.3.37 iç Neumann probleminin çözümü Eş.3.52 integral denkleminin çözümüne indirgendi.

3.5. Teorem

$D \subset \mathbb{R}^2$ bölgesi sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D sınırı C^2 sınıfından olsun.

$u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ ve $g \in C(\partial D)$ ve ν , ∂D sınırının birim dış normal olmak üzere,

$$\left. \begin{aligned} \Delta_2 u(x) &= 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ ise} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= g(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned} \right\} \quad (3.53)$$

dış Neumann probleminin çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \log \frac{1}{|x-y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

tek katlı potansiyel biçiminde arayalım.

O zaman dış Neumann probleminin çözümü,

$$\Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -2g(x), \quad x \in \partial D$$

integral denkleminin çözümüne indirgenir.

İspat

Eş.3.53 dış Neumann probleminin çözümünü, tek katlı potansiyel biçiminde arayalım. $x \in D^- \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye tek katlı potansiyelin $\frac{\partial}{\partial \nu}$ türevini hesaplayalım.

$$\frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \log \frac{1}{|x_0-y|} ds(y) = g(x_0) \quad (3.54)$$

olur. Eş.3.54 ü Eş.3.49 da yazarsak,

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) &= -\frac{1}{2} \Psi(x_0), \quad x_0 \in \partial D \\ g(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) &= -\frac{1}{2} \Psi(x_0) \\ g(x_0) - \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \log \frac{1}{|x_0-y|} ds(y) &= -\frac{1}{2} \Psi(x_0) \\ \Psi(x_0) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \log \frac{1}{|x_0-y|} ds(y) &= -2g(x_0), \quad x_0 \in \partial D \end{aligned} \quad (3.55)$$

integral denklemi elde edilir. Böylece Eş.3.53 dış Neumann probleminin çözümü Eş.3.55 integral denklemin çözümüne indirgendi.

4. DİRİCHLET VE NEUMANN PROBLEMLERİNE UYGULAMALAR

4.1. İç Dirichlet Problemi

$$\Delta_2 u(x) = 0 \quad , \quad x \in D \text{ ise} \quad (4.1)$$

$$u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \quad (4.2)$$

İç Dirichlet probleminin $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \quad , \quad x \in D \quad (4.3)$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım. x , ∂D sınırına gittiğinde iki katlı potansiyeller için olan sıçrama bağıntıları kullanılarak

$$\Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -2f(x) \quad , \quad x \in \partial D \quad (4.4)$$

integral denklemi elde edilir. Şimdi Eş.4.4 integral denkleminin bir tek çözümünün varlığını göstermek için, Fredholm alternatifinden,

$$\Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \quad , \quad x \in \partial D \quad (4.5)$$

homojen denklemin çözümünün sadece $\Psi(x) \equiv 0$ olduğunu göstermeliyiz.

Kabul edelim ki $\Psi(x)$, Eş.4.5 i sağlasın ve $u(x)$ i, Eş.4.3 ile tanımlayalım. O zaman $u(x)$, D de harmonik ve $x \in \partial D$ için $u(x) = 0$ olur. İç Dirichlet probleminin çözümünün tekliğinden, $x \in D$ için $u(x) \equiv 0$ olur. Bu sonuç, $x \in \partial D$ için $\partial u(x) / \partial \nu = 0$ olmasını gerektirir. Şimdi $u(x)$, Eş.4.3 iki katlı potansiyel olarak $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için verilmiş olsun. O zaman $u(x)$, $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ de harmonik olur ve iki katlı potansiyelin normal doğrultusundaki türevinin süreklilik özelliğinden, $x \in \partial D$ için $\partial u(x) / \partial \nu = 0$ olur. (x i $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ dan ∂D ye yaklaştıırıyoruz.) Ayrıca x sonsuza gittiğinde, Eş.4.3 iki katlı potansiyeli,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{1}{|x-y|} &= \nabla_y \left(\log \frac{1}{|x-y|} \right) \cdot v \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial y_1} i + \frac{\partial}{\partial y_2} j \right) \log \frac{1}{\sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}} \cdot v \\
&= \frac{(x-y) \cdot v}{|x-y|^2}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

olduğundan $|x| = r \rightarrow \infty$ için

$$u(x) = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial r} = o\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

ye gider. Böylece Green formülünden,

$$\Omega_R = \{x : |x| \leq R\} \text{ ve } D \subset \Omega_R$$

olmak üzere,

$$\int_{\Omega_R \setminus D} \nabla(u \nabla u) dx = \int_{\Omega_R \setminus D} \left(|\nabla u|^2 + \underbrace{u \nabla^2 u}_{=0} \right) dx = \int_{\Omega_R \setminus D} |\nabla u|^2 dx$$

ve

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_R \setminus D} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\partial \Omega_R \cup \partial D} u \frac{\partial u}{\partial v} ds \\
&= \int_{\partial \Omega_R} u \frac{\partial u}{\partial v} ds + \int_{\partial D} \underbrace{u}_{=0} \frac{\partial u}{\partial v} ds \\
&= \int_{\partial \Omega_R} u \frac{\partial u}{\partial v} ds = o\left(\frac{1}{R^2}\right), \quad R \rightarrow \infty
\end{aligned} \tag{4.7}$$

olur. $R \rightarrow \infty$ gittiğinde $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ için $u(x)$ in bir sabite eşit olduğunu görürüz. Fakat $|x| \rightarrow \infty$ sonsuza gittiğinde $u(x) \rightarrow 0$ sıfıra gittiğini biliyoruz. Böylece

Eş.4.3 iki katlı potansiyel ile tanımlanan $u(x)$, D de ve $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ da $u(x) = 0$ olur ve iki katlı potansiyelin,

$$u^+(x) - u^-(x) = -\Psi(x) \quad , \quad x \in \partial D$$

sıçrama bağıntısından, $x \in \partial D$ için $\Psi(x) = 0$ elde edilir.

4.2. Dış Dirichlet Problemi

$$\Delta_2 u(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ ise} \quad (4.8)$$

$$u(x) = f(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \quad (4.9)$$

$$u(x) \text{ sonsuzda sınırlı} \quad (4.10)$$

dış Dirichlet probleminin bir $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ çözümünü arayalım. Dış Dirichlet probleminin çözümünün varlığını gösterelim. Bunun için, Eş.4.8 - Eş.4.10 probleminin bir çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (4.11)$$

iki katlı potansiyel biçiminde arayalım. İki katlı potansiyelin sıçrama süreksizliği bağıntısından $\Psi(x)$,

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 2f(x) \quad , \quad x \in \partial D \quad (4.12)$$

Fredholm integral denklemini sağlamalıdır. Fakat, $x \in \partial D$ için Gauss formülü,

$$1 + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \quad (4.13)$$

olduğundan, Eş.4.13 ü $\Psi(x) \equiv \text{sabit}$ ile çarparsak, $\Psi(x) \equiv \text{sabit}$ fonksiyonu

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \quad (4.14)$$

homojen integral denkleminin bir çözümü olur. Böylece Fredholm alternatifinden,

$$\Phi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Phi(y) \overline{\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|}} ds(y) = 0$$

veya

$$\Phi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Phi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \quad (4.15)$$

homojen adjoint integral denklemin, özdeş sıfır olmayan reel değerli bir $\Phi(x)$ çözümü vardır. Eş.4.15 ile tanımlanan homojen adjoint denklemin $\Phi(x)$ çözümü $f(x)$ e ortogonal değil ise, Eş.4.12 integral denklemin bir çözümü mevcut değildir. Yani Eş.4.12 nin bir çözümünün mevcut olması için,

$$\int_{\partial D} f(x) \Phi(x) ds(x) = 0 \quad (4.16)$$

olmalıdır. Genel olarak $f(x)$ in Eş.4.16 koşulunu sağladığını kabul edemeyiz. Bu nedenle, yöntemimizde değişiklik yapmalıyız. Özel olarak, dış Dirichlet probleminin çözümü, genel olarak iki katlı potansiyel biçiminde gösterilemez. İkinci olarak, dış Dirichlet probleminin çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \left[\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} + 1 \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (4.17)$$

biçiminde arayalım. O zaman Eş.4.17 ile tanımlanan $u(x)$ fonksiyonu $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için harmonik, sonsuzda sınırlı ve $x \in \partial D$ için $u(x) = f(x)$ sağlama-sı için $\Psi(x)$ fonksiyonu,

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \left[\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} + 1 \right] ds(y) = 2f(x), \quad x \in \partial D \quad (4.18)$$

Fredholm integral denklemini sağlamalıdır. Yine Fredholm alternatifinden Eş.4.18 in bir tek çözümünün olması için,

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \left[\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} + 1 \right] ds(y) = 0, \quad x \in \partial D \quad (4.19)$$

homojen integral denklemin çözümü yalnız, $\Psi(x) \equiv 0$ olmalıdır.

Kabul edelim ki Eş.4.19 homojen denklemin bir çözümü $\Psi(x)$ olsun ve $u(x)$ fonksiyonu, bu $\Psi(x)$ için Eş.4.17 ile tanımlansın. O zaman, $x \in \partial D$ için $u(x) = 0$ olur. (Çünkü Eş.4.19 homojen integral denklemi, $x \in \partial D$ için $f(x) = 0$ sınır koşullu probleme karşılık gelir.) O zaman dış Dirichlet probleminin çözümünün tekliğinden $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için $u(x) = 0$ elde edilir. Eş.4.17 de $x \rightarrow \infty$ sonsuza gittiğinde, $u(x)$ sonsuzda sınırlı olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \left[\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} \right] ds(y) \\ &\quad + \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) ds(y) \\ &= o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \end{aligned} \quad (4.20)$$

yazarız. İki katlı potansiyelin $|x| \rightarrow \infty$ için,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = o\left(\frac{1}{r}\right) \quad (4.21)$$

olduğundan

$$\int_{\partial D} \Psi(y) ds(y) = 0 \quad (4.22)$$

elde edilir. Böylece Eş.4.19 homojen integral denklem

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial v(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \quad (4.23)$$

olur.

Eş.4.23 ile Eş.4.14 aynı denklemlerdir. Yani sadece $\Psi(x) = \text{sabit}$ bir çözümdür. Eş.4.22 den dolayı $\Psi(x) \equiv 0$ olmak zorundadır. Böylece, Eş.4.19 homojen denklemin çözümü yalnız $\Psi(x) \equiv 0$ olur ve Eş.4.18 integral denklemin bir tek çözümü mevcuttur.

4.3. İç Neumann Problemi

$$\Delta_2 u(x) = 0 \quad , \quad x \in D \text{ ise} \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial v} = g(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \quad (4.25)$$

İç Neumann probleminin $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ çözümünü, $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \quad , \quad x \in D \quad (4.26)$$

tek katlı potansiyel biçiminde arayalım. x , ∂D sınırına gittiğinde, tek katlı potansiyellerin normal türevleri için olan, sıçrama bağıntıları kullanılarak,

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial v(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 2g(x) \quad , \quad x \in \partial D \quad (4.27)$$

Fredholm integral denklemi elde edilir.

Eğer $u(x)$, iç Neumann probleminin bir çözümü ise c herhangi sabiti için $u(x) + c$ de bir çözümdür.

Eş.4.27 integral denkleminde $\Psi(x)$ i belirleyelim. Eş.4.27 integral denkleminin bir çözümünün mevcut olduğunu göstermek için, Fredholm alternatifini izleyerek,

$$\Psi(x) + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0, \quad x \in \partial D \quad (4.28)$$

homojen adjoint denklemin her çözümünün, $g(x)$ e ortagonal olduğunu göstermeliyiz.

$$\int_D (u \Delta_2 v - v \Delta_2 u) dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

ikinci Green özdeşliğinde u harmonik ve $v = 1$ ise

$$0 = \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds$$

veya Eş.4.25 sınır koşulu ile

$$\int_{\partial D} g(x) ds = 0 \quad (4.29)$$

elde edilir. Böylece Eş.4.24, Eş.4.25 iç Neumann probleminin bir çözümünün mevcut olması için, Eş.4.29 koşulu sağlanmalıdır. Şimdi Eş.4.29 un sağlandığını kabul edelim.

Kabul edelim ki $\Psi(x)$ fonksiyonu, Eş.4.28 adjoint homojen denklemi sağlasın ve $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için tanımlanmış harmonik, iki katlı potansiyeli,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (4.30)$$

fonksiyonu göz önüne alalım. Genelliği bozmadan kabul edelim ki, $\Psi(x)$ reel değer olsun. x değişkeni, $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ den ∂D sınırına gittiğinde, iki katlı potansiyel-

lerin sıçrama süreksizlikleri kullanılırsa,

$$\lim_{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \rightarrow x_0 \in \partial D} u(x) = u^-(x_0)$$

olmak üzere,

$$u^-(x_0) - u(x_0) = \frac{1}{2}\Psi(x_0), \quad x_0 \in \partial D \quad (4.31)$$

elde edilir. Eş.4.28 homojen adjoint denklemi ile Eş.4.30 denklemi birlikte düşünüldüğünde $x_0 \in \partial D$ için Eş.4.28 adjoint homojen denklemi,

$$\Psi(x_0) + 2u(x_0) = 0, \quad x_0 \in \partial D$$

veya

$$u(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad (4.32)$$

olur. Eş.4.32 yi Eş.4.31 de yerine koyarsak,

$$u^-(x_0) = 0$$

elde ederiz. $u(x)$, Eş.4.30 ile tanımlı olduğundan, iki katlı potansiyeller, $|x| \rightarrow \infty$ sonsuza gittiğinde,

$$u(x) = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty$$

sıfıra gider. Maksimum prensibinden $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için $u(x) \equiv 0$ elde ederiz. Eş.4.30 iki katlı potansiyelin normal doğrultudaki türevi sürekli olduğundan; yani,

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial u^-}{\partial \nu}(x_0) , \quad x_0 \in \partial D \quad (4.33)$$

olduğundan, $x \in D$ için $u(x)$ harmonik ve $x \in \partial D$ için

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 , \quad x \in \partial D$$

elde edilir. Böylece, $x \in D$ için $u(x) = \text{sabit}$ elde edilmiş olur. İki katlı potansiyellerin sıçrama süreksizliğinden,

$$\underbrace{u^+(x_0)}_{=\text{sabit}} - u(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) , \quad x_0 \in \partial D$$

$\Psi(x_0) = \text{sabit}$ elde edilir. Gauss formülünden,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = \begin{cases} -2\pi , & x \in D \text{ ise} \\ -\pi , & x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 , & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ ise} \end{cases} \quad (4.34)$$

$x \in \partial D$ için,

$$1 + \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = 0 \quad (4.35)$$

yazarız. Eş.4.35 ten, $\Psi(x) = \text{sabit}$, Eş.4.28 homojen adjoint denklemin bir çözümüdür. Eş.4.29 koşulundan, her $\Psi(x) = \text{sabit}$ fonksiyonu için,

$$\int_{\partial D} \Psi g(x) ds(x) = \Psi \int_{\partial D} g(x) ds(x) = 0 \quad (4.36)$$

ortogonallık şartı sağlanır. Böylece Eş.4.27 integral denklemin bir çözümü mevcuttur.

4.4. Dış Neumann Problemi

$$\Delta_2 u(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ ise} \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = g(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \quad (4.38)$$

$$u(x) \text{ sonsuzda düzgün (regular)} \quad (4.39)$$

koşullarını sağlayan bir $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ çözümünü arayalım. Bu problemde Eş.4.39 sonsuzda düzgünlük koşulu şöyle tanımlanır; (r, θ) kutupsal koordinatlar olmak üzere, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ için düzgün olarak,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} |ru(r, \theta)| < \infty$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left| r^2 \frac{\partial u}{\partial r}(r, \theta) \right| < \infty$$

ise $u(x)$ sonsuzda düzgündür denir. $\Omega_R = \{x : |x| \leq R\}$ ve $D \subset \Omega_R$ olsun. $\Omega_R \setminus D$ bölgesinde, birinci Green özdeşliğini uygulayalım.

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R \setminus D} (v \Delta_2 u + \nabla v \cdot \nabla u) dx &= \int_{\partial(\Omega_R \setminus D)} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\partial \Omega_R} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \end{aligned} \quad (4.40)$$

yazarız. Eş.4.40 da $v = 1$ alırsak ve $u(x)$, Eş.4.37 - Eş.4.39 probleminin bir çözümü ise,

$$0 = \int_{\partial D} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)}_{g(x)} ds(x) - \int_{\partial \Omega_R} \frac{\partial}{\partial R} u(x) ds(x)$$

veya

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} g(x) ds(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial R} R d\theta = 2\pi \frac{\partial u}{\partial R} \cdot R \\ &= 2\pi R^2 \cdot \frac{\partial u}{\partial R} \cdot \frac{1}{R} = o\left(\frac{1}{R}\right)\end{aligned}$$

olur. Böylece dış Neumann probleminin bir çözümünün mevcut olması için bir gerek koşulu; yani,

$$\int_{\partial D} g(x) ds(x) = 0 \quad (4.41)$$

elde ettik. Şimdi yine Eş.4.37 - Eş.4.39 probleminin bir çözümünü $\Psi \in C(\partial D)$ olmak üzere,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \log \frac{1}{|x - y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (4.42)$$

tek katlı potansiyel biçiminde arayalım. Eğer $\Psi \in C(\partial D)$ fonksiyonu,

$$\int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) = 0 \quad (4.43)$$

koşulunu sağlar ise, Eş.4.42 tek katlı potansiyel ile tanımlanan $u(x)$ fonksiyonu sonsuzda düzgün (regular) olur. x , ∂D sınırına gittiğinde Eş.4.42 tek katlı potansiyelin normal türevinin sıçrama süreksizliklerini kullanarak, $\Psi(x)$ in sağlaması gereken,

$$\Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial v(x)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y) = -2g(x), \quad x \in \partial D \quad (4.44)$$

Fredholm integral denklemini elde ederiz. Fredholm alternatifine göre,

$$\Psi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial v(x)} \log \frac{1}{|x - y|} ds(y) = 0, \quad x \in \partial D \quad (4.45)$$

homojen denklemin çözümü yalnız $\Psi \equiv 0$ ise, Eş.4.44 integral denklemin bir tek çözümü mevcuttur.

Kabul edelim ki $\psi(x)$, Eş.4.45 in bir çözümü olsun. Eş.4.45 in iki yanını ∂D üzerinden integrallersek,

$$\int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \left\{ \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial v(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \right\} ds(x) = 0$$

veya

$$\int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \left[\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial v(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(x) \right] ds(y) = 0 \quad (4.46)$$

elde ederiz. $x \in \partial D$ için Gauss formülünden,

$$\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial v(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) = -\pi$$

veya

$$1 = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial v(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \quad (4.47)$$

yazarız. Eş.4.47 nin iki yanını $\Psi(x)$ ile çarpıp, ∂D sınırı üzerinden integrallersek,

$$\int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(x) \left[\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial v(y)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(y) \right] ds(x) \quad (4.48)$$

olur. Eş.4.48 i Eş.4.46 da yazarsak,

$$2 \int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) = 0 \quad (4.49)$$

elde ederiz. Böylece $\Psi(x)$, Eş.4.43 koşulunu sağlar. Yani Eş.4.42 tek katlı

potansiyeli ile tanımlanan $u(x)$ fonksiyonu harmoniktir ve sonsuzda düzgündür. Böylece, $\Psi(x)$, Eş.4.45 homojen denklemin çözümü kabulü ile ($g(x) = 0$), Eş.4.42 tek katlı potansiyel ile tanımlanan $u(x)$ harmoniktir ve $x \in \partial D$ için,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = g(x) = 0, \quad x \in \partial D$$

olur. Green formülünden,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R \setminus D} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\partial \Omega_R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\partial D} u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=0} ds \\ &= \int_{\partial \Omega_R} u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \\ &= 2\pi u \frac{\partial u}{\partial R} \cdot R = 2\pi \cdot R u \cdot R^2 \frac{\partial u}{\partial R} \cdot \frac{1}{R^2} \\ &= o\left(\frac{1}{R^2}\right) \end{aligned}$$

yazarız. Dolayısıyla $\nabla u = 0$ ve $u = \text{sabit}$ elde edilir. Fakat,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| u(x) < \infty$$

olduğundan $|x| \rightarrow \infty$ için $u(x) = 0$ olur. Buradan, $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için $u(x) \equiv 0$ elde edilir. Özel olarak sonsuzda düzgünlük koşulu, dış Neumann probleminin çözümünün tekliğini verir. Tek katlı potansiyelin sürekliliğinden $u(x)$, D de harmonik ve $x \in \partial D$ için $u(x) = 0$ olur. Böylece $x \in D$ için $u(x) \equiv 0$ olur. Tek katlı potansiyelin, normal doğrultudaki türevlerinin

$$\frac{\partial u^+}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial u^-}{\partial \nu}(x) = \Psi(x), \quad x \in \partial D \quad (4.50)$$

denklemini sağladığını biliyoruz. Buradan $\Psi(x) \equiv 0$ elde edilir. Böylece Eş.4.44 integral denklemin bir tek çözümü mevcuttur.

Kabul edelim ki $\Psi(x)$, Eş.4.44 integral denkleminin bir tek çözümü olsun.

Eş.4.44 ün iki yanını, ∂D sınırı üzerinden integrallersek, Eş.4.41 koşulu ile

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \left[\int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \log \frac{1}{|x-y|} ds(x) \right] ds(y) \\ = -2 \int_{\partial D} g(x) ds(x) \end{aligned} \quad (4.51)$$

veya Gauss formülünden $x \in \partial D$ için

$$2 \int_{\partial D} \Psi(x) ds(x) = 0 \quad (4.52)$$

elde edilir. Böylece Eş.4.43 koşulu sağlanır. $\Psi(x)$, Eş.4.44 integral denklemin bir tek çözümüdür ve dolayısıyla Eş.4.42 tek katlı potansiyel, dış Neumann denkleminin bir tek çözümüdür [1].

5. HELMHOLTZ DENKLEMİ İÇİN POTANSİYEL TEORİ

Bu bölümde Helmholtz denklemi için çift katlı ve tek katlı potansiyellerin özelliklerini inceleyeceğiz.

5.1. Helmholtz Denklemi

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y$$

$\Delta_3 u + k^2 u = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. Kolaylıkla türev alınarak gösterilebilir ki, sabit $y \in \mathbb{R}^3$ ve $x \neq y$ için $\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ Helmholtz denklemini sağlar.

5.1. Teorem

$D \subset \mathbb{R}^3$ sınırlı, basit bağlantılı bir bölge olsun. D nin sınırı ∂D , C^2 sınıfından yani ∂D sürekli eğriliğe sahip olsun.

ν , ∂D sınırının birim dış normali ve u , $\Delta_3 u + k^2 u = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümü olmak üzere

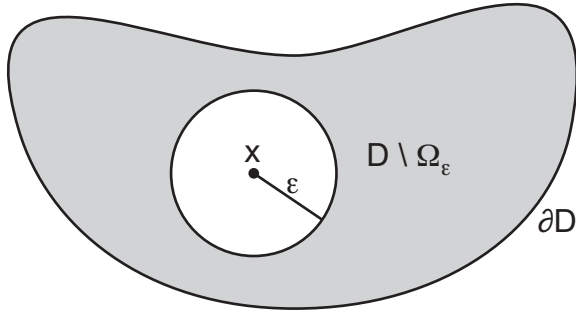
$$\int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu(y)}(y) \right] ds(y) = \begin{cases} -4\pi u(x), & x \in D \text{ ise} \\ -2\pi u(x), & x \in \partial D \text{ ise} \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \text{ ise} \end{cases} \quad (5.1)$$

sağlanır.

İspat

1) $x \in D$ olsun. $\varepsilon > 0$ yeteri kadar küçük olsun ve $\Omega_\varepsilon = \{y : |y - x| \leq \varepsilon\}$ yuvarı D nin içinde yatsın. $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesinde ikinci Green özdeşliğini yazalım. İntegraller için ortalama değer teoremi yardımıyla,

$$\begin{aligned}
& \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[u(y) \cdot \underbrace{\nabla^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}}_{-k^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \underbrace{\nabla^2 u(y)}_{-k^2 u} \right] dy \\
&= \int_{\partial D} \left[u(y) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\
&+ \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[u(y) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y)
\end{aligned}$$



Şekil 5.1. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial \Omega_\varepsilon} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi u(y) \left(-\frac{d}{d\varepsilon} \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \varepsilon^2 \sin \Phi d\Phi d\theta \\
&= u(y^*) \left[\frac{e^{ik\varepsilon} - ike^{ik\varepsilon} \cdot \varepsilon}{\varepsilon^2} \right] \varepsilon^2 \cdot 4\pi, \quad y^* \in \partial \Omega_\varepsilon
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y) \right| \leq \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left| \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right| ds(y) \\
&\leq \max_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right| \varepsilon^2 \sin \Phi d\Phi d\theta \\
&\leq M \cdot \varepsilon^2 \cdot \left| \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right| \cdot 4\pi
\end{aligned}$$

Burada,

$$M = \max_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right|$$

dir.

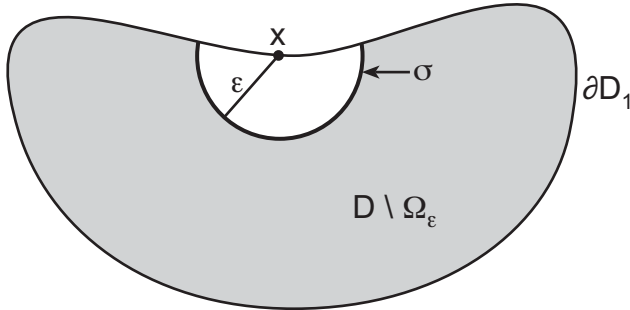
$\varepsilon \rightarrow 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) = -4\pi u(x) \quad (5.2)$$

elde edilir.

2) $x \in \partial D$ olsun. $\sigma = D \cap \partial \Omega_\varepsilon = D \cap \{y : |y - x| = \varepsilon\}$ olsun.

$\partial D_1 = \partial D \setminus (\partial D \cap \{y : |y - x| \leq \varepsilon\})$ olsun.



Şekil 5.2. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

$D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesinde ikinci Green özdeşliğini yazalım.

$$\begin{aligned} & \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[u(y) \cdot \nabla^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 u(y) \right] dy \\ &= \int_{\partial D_1} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\ &+ \int_{\sigma} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \end{aligned}$$

(1) dekinе benzer bir inceleme ile $\varepsilon \rightarrow 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) = -2\pi u(x) \quad (5.3)$$

elde edilir.

3) $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ ise $\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonu D bölgesinde singüler değildir. D de ikinci Green özdeşliğini yazarsak,

$$\begin{aligned} & \int_D \left[u(y) \cdot \nabla^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 u(y) \right] dy \\ &= \int_{\partial D} \left[u(y) \cdot \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\ & \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) = 0 \end{aligned} \quad (5.4)$$

elde edilir.

5.1. Tanım

$\Psi(y)$, $y \in \partial D$ için tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. ∂D nin birim dış normali ν olsun.

$$W(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \quad (5.5)$$

ye $\Psi(y)$ yoğunluklu iki katlı Helmholtz potansiyeli denir.

Eş.5.5, $\Delta_3 u(x) + k^2 u(x) = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. Çözüm olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\begin{aligned}\Delta_3 W(x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) W(x) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right)}_{-k^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}} ds(y)\end{aligned}$$

$$\Delta_3 W(x) = \frac{-k^2}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y)$$

$$\Delta_3 W(x) + k^2 W(x) = 0$$

sağlanır.

5.2. İki Katlı Helmholtz Potansiyelin Süreklilik Özellikleri

$x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ noktasının, $x_0 \in \partial D$ noktasına gitmesi halinde, iki katlı potansiyelin süreklilik özelliğinden bazı sonuçlar çıkaralım. $v \in C^2(\bar{D})$ olsun. Birinci Green özdeşliğini ve Eş.5.1 i kullanalım.

$$\int_D (v \nabla^2 u + \nabla v \cdot \nabla u) dy = \int_{\partial D} v \frac{\partial u}{\partial \nu} ds(y) \quad (5.6)$$

Birinci Green özdeşliğini $v \in C^2(\bar{D})$ ve $u = \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonları için yazalım.

$\Omega_\varepsilon = \{y : |y - x| \leq \varepsilon\} \subset D$ olsun. O zaman Eş.5.6 yı, $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi üzerinden yazarsak,

$$\begin{aligned}& \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \nabla_y^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \nabla v(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dy \\ &= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y)\end{aligned}$$

yani

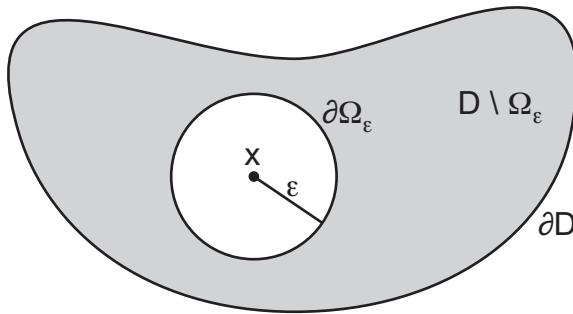
$$\begin{aligned}
& \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[-k^2 v(y) \cdot \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \nabla v(y) \nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dy \\
&= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) + \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y)
\end{aligned} \tag{5.7}$$

olur.

1) $x \in D$ olsun. O zaman, integraller için ortalama değer teoremi kullanılarak,

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi v(y) \left(-\frac{d}{d\varepsilon} \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right) \varepsilon^2 \cdot \sin \Phi d\Phi d\theta \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ik\varepsilon} - ik \cdot \varepsilon \cdot e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon^2} \right) \cdot \varepsilon^2 \cdot 4\pi \cdot v(y^*) , \quad y^* \in \partial \Omega_\varepsilon \\
&= 4\pi v(x)
\end{aligned} \tag{5.8}$$

elde edilir.

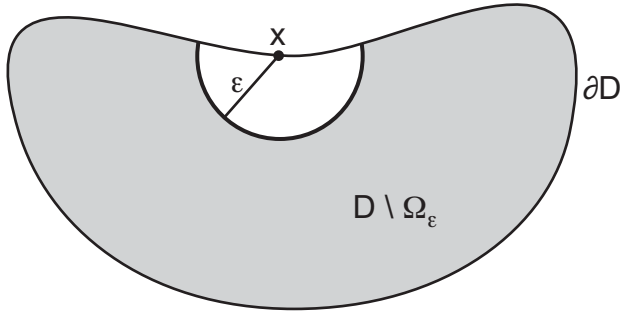


Şekil 5.3. $x \in D$ için $D \setminus \Omega_\varepsilon$ bölgesi

2) $x \in \partial D$ olsun. O zaman,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) = 2\pi v(x) \tag{5.9}$$

elde edilir.



Şekil 5.4. $x \in \partial D$ için $D \setminus \Omega_\epsilon$ bölgesi

3) $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ise $\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonu, $y \in D$ için tanımlıdır. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} & \int_D \left[v(y) \nabla_y^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \nabla v(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dy \\ &= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) \end{aligned} \quad (5.10)$$

olur.

Böylece Eş.5.7 $\epsilon \rightarrow 0$ için,

$$\begin{aligned} & \int_D \left[-k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \nabla v(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] dy \\ &= \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) - p v(x) \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla v(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy + p v(x) \\ &= k^2 \int_D v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy + \int_{\partial D} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) \end{aligned} \quad (5.11)$$

olur, bu formülde p sayısı,

$$p = \begin{cases} -4\pi & , \quad x \in D \text{ ise} \\ -2\pi & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \text{ ise} \end{cases} \quad (5.12)$$

dır.

Benzer olarak, ikinci Green özdeşliğinden,

$$\begin{aligned} & \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \nabla_y^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\ &= \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\ &+ \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} & \int_{D \setminus \Omega_\varepsilon} \left[-k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\ &= \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\ &+ \int_{\partial \Omega_\varepsilon} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \end{aligned} \quad (5.13)$$

yazarız.

Eş.5.8, Eş.5.9 ve Eş.5.10 dan

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_\varepsilon} v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) = \begin{cases} 4\pi v(x) & , \quad x \in D \text{ ise} \\ 2\pi v(x) & , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \text{ ise} \end{cases} \quad (5.14)$$

dır.

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) ds(y) \right| \\
& \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left| \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right| ds(y) \\
& \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \max_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right| \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left| \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right| \varepsilon^2 \sin \Phi d\Phi d\theta \\
& \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K \cdot \varepsilon^2 \left| \frac{e^{ik\varepsilon}}{\varepsilon} \right| 4\pi = 0
\end{aligned}$$

Burada,

$$K = \max_{y \in \bar{D}} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right|$$

dır.

Böylece $\varepsilon \rightarrow 0$ sıfıra gittiğinde Eş.5.13,

$$\begin{aligned}
& \int_D \left[-k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\
& = \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) - pv(x)
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
pv(x) &= \int_D \left[k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\
&+ \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \tag{5.15}
\end{aligned}$$

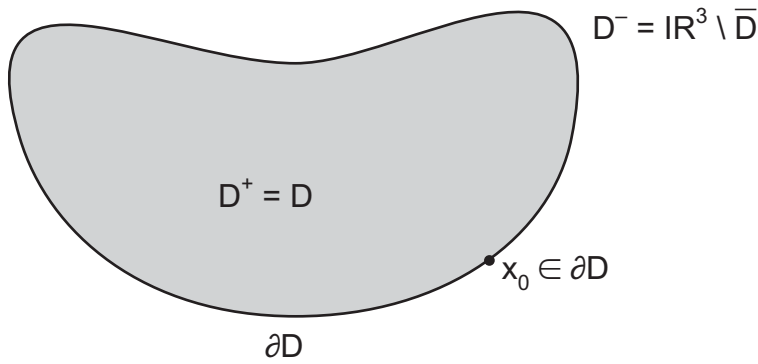
olur.

Şimdi Eş.5.5 iki katlı Helmholtz potansiyeli gözönüne alalım ve kabul edelim ki, $\Psi \in C^2(\partial D)$ olsun. O zaman Ψ fonksiyonu $\bar{D}$ da, C^2 sınıfındandır.

$D^+ = D$ $D^- = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ ve $x_0 \in \partial D$ olsun.

$$W^+(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} W(x) \quad , \quad W^-(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} W(x)$$

tanımlayalım.



Şekil 5.5. D^+ ve D^- bölgeleri

Eş.5.11 de $v(x) = \Psi(x)$ koyalım ve iki katlı potansiyelin tanımını kullanalım.

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy + p\Psi(x) \\ &= k^2 \int_D \Psi(y) \cdot \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy + \int_{\partial D} \Psi(y) \cdot \frac{\partial}{\partial v(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) \end{aligned}$$

yani

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy + p\Psi(x) \\ &= k^2 \int_D \Psi(y) \cdot \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} dy + 4\pi W(x) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Eş.5.16 da $x \in D^+$ olmak üzere $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limit hesaplırsak,

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} dy - 4\pi\Psi(x_0) \\ &= k^2 \int_D \Psi(y) \cdot \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} dy + 4\pi W^+(x_0) \end{aligned} \quad (5.17)$$

elde edilir. $x_0 \in \partial D$ için Eş.5.16,

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} dy - 2\pi\Psi(x_0) \\ &= k^2 \int_D \Psi(y) \cdot \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} dy + 4\pi W(x_0) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Eş.5.18 den Eş.5.17 yi çıkarırsak,

$$2\pi\Psi(x_0) = 4\pi[W(x_0) - W^+(x_0)]$$

veya

$$\Psi(x_0) = 2[W(x_0) - W^+(x_0)] \quad (5.19)$$

elde edilir. Şimdi Eş.5.16 da, $x \in D^-$ olmak üzere $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limit hesaplayalım.

$$\begin{aligned} & \int_D \nabla \Psi(y) \cdot \nabla_y \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} dy - 0 \cdot \Psi(x_0) \\ &= k^2 \int_D \Psi(y) \cdot \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} dy + 4\pi W^-(x_0) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Eş.5.18 den Eş.5.20 yi çıkarırsak,

$$-2\pi\Psi(x_0) = 4\pi[W(x_0) - W^-(x_0)]$$

veya

$$-\Psi(x_0) = 2[W(x_0) - W^-(x_0)] \quad (5.21)$$

elde edilir. Böylece Eş.5.19 ve Eş.5.21 den,

$$\left. \begin{aligned} W^+(x_0) - W(x_0) &= -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \\ W^-(x_0) - W(x_0) &= +\frac{1}{2}\Psi(x_0) \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

yazarız. Eş.5.22 den,

$$W^+(x_0) - W^-(x_0) = -\Psi(x_0) \quad (5.23)$$

sıçrama (jump) bağıntısı elde edilir.

Şimdi tekrar Eş.5.15 e dönelim. Eş.5.15 de $v \in C^2(\bar{D})$ seçelim öyle ki $x \in \partial D$ için

$$\begin{aligned} v(x) &= \Psi(x) \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) &= 0 \quad , \quad x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned} \quad (5.24)$$

olsun. Böylece Eş.5.24 koşulları altında Eş.5.15,

$$\begin{aligned} p v(x) &= \int_D \left[k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\ &+ \int_{\partial D} \left[\Psi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}(y)}_{=0} \right] ds(y) \end{aligned}$$

veya iki katlı Helmholtz potansiyelin tanımı ile,

$$\begin{aligned}
pv(x) &= \int_D \left[k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy + 4\pi W(x) \\
pv(x) &= \int_D \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy + 4\pi W(x)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

olur. Şimdi Eş.5.25 nin iki yanının, $x \in D^+$ olmak üzere $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ için $\frac{\partial}{\partial v(x)}$ türevini hesaplayalım.

$$-4\pi \underbrace{\frac{\partial v}{\partial v}(x_0)}_{=0} = \int_D \frac{\partial}{\partial v(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy + 4\pi \frac{\partial W^+}{\partial v}(x_0) \tag{5.26}$$

olur. Yine Eş.5.25 nin iki yanının, $x \in D^-$ olmak üzere, $x \rightarrow x_0 \in \partial D$ için $\frac{\partial}{\partial v(x)}$ türevini hesaplarsak,

$$0 \cdot \frac{\partial v}{\partial v}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial v(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy + 4\pi \frac{\partial W^-}{\partial v}(x_0) \tag{5.27}$$

elde edilir. Eş.5.26 ve Eş.5.27 den iki katlı Helmholtz potansiyelin türevleri için,

$$\frac{\partial W^+}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial W^-}{\partial v}(x_0) \tag{5.28}$$

aynı süreksizlik özelliği ortaya çıkar, burada,

$$\frac{\partial W^+}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^+}} \frac{\partial W}{\partial v}(x) \quad \text{ve} \quad \frac{\partial W^-}{\partial v}(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D^-}} \frac{\partial W}{\partial v}(x)$$

anlamındadır. Böylece iki katlı potansiyelin, ∂D nin normali doğrultusundaki türevi, x değişkeni sınırdan $x_0 \in \partial D$ noktasındaki normali boyunca geçerken, sürekli olarak değişir.

5.2. Tanım

$\Psi(y)$, $y \in \partial D$ için tanımlanmış sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman,

$$V(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \quad (5.29)$$

ye, $\Psi(y)$ yoğunluklu tek katlı Helmholtz potansiyel denir.

Tek katlı potansiyel, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ için Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. Çözüm olduğu kolayca gösterilebilir.

$$\begin{aligned} \Delta_3 V(x) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) V(x) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}}_{-k^2 \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}} ds(y) \end{aligned}$$

$$\Delta_3 V(x) = \frac{-k^2}{4\pi} \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y)$$

$$\Delta_3 V(x) + k^2 V(x) = 0$$

sağlanır.

5.3. Tek Katlı Helmholtz Potansiyelin Süreklilik Özellikleri

Tek katlı potansiyelin süreklilik özelliklerini kurarken $\Psi \in C^1(\partial D)$ kabul edelim. Eş.5.15 te yani,

$$\begin{aligned} p_v(x) &= \int_D \left[k^2 v(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} + \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \nabla^2 v(y) \right] dy \\ &+ \int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \end{aligned} \quad (5.15)$$

formülünde $v(x)$ fonksiyonunu $v \in C^2(\bar{D})$ ve

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= 0, & x \in \partial D \text{ ise} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu}(x) &= \Psi(x), & x \in \partial D \text{ ise} \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

seçelim. Eş.5.30 koşulları, Eş.5.15 te yazılırsa,

$$pv(x) = \int_D \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - \int_{\partial D} \Psi(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} ds(y) \quad (5.31)$$

denklemini elde edilir. Eş.5.31 i tek katlı Helmholtz potansiyel ile ifade edersek,

$$pv(x) = \int_D \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - 4\pi V(x) \quad (5.32)$$

olur.

Şimdi, tek katlı Helmholtz potansiyelin, $x \in \mathbb{R}^3$ için sürekli olduğunu göstere-
lim. Eş.5.32 nin $x \in D^+ \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limitini hesaplırsak,

$$-4\pi \underbrace{v(x_0)}_{=0} = \int_D \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - 4\pi V^+(x_0) \quad (5.33)$$

olur. Eş.5.32 nin $x \in D^- \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye limitini hesaplırsak,

$$0 \cdot v(x_0) = \int_D \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - 4\pi V^-(x_0) \quad (5.34)$$

olur. Eş.5.33 ve Eş.5.34 ten $x_0 \in \partial D$ için,

$$V^+(x_0) = V^-(x_0) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy \quad (5.35)$$

elde edilir. Eş.5.32 yi $x_0 \in \partial D$ için yazarsak,

$$-2\pi \underbrace{v(x_0)}_{=0} = \int_D \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - 4\pi V(x_0) \quad (5.36)$$

olur. Eş.5.35 ve Eş.5.36 dan, $V(x)$ tek katlı Helmholtz potansiyel, $x \in \mathbb{R}^3$ için süreklidir.

Eş.5.32 nin $x \in D^+ \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye v doğrultusundaki türevi,

$$-4\pi \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - 4\pi \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0)$$

veya

$$-4\pi \Psi(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - 4\pi \frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) \quad (5.37)$$

olur. Eş.5.32 nin $x \in D^- \rightarrow x_0 \in \partial D$ ye v doğrultusundaki türevi

$$0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0) = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - 4\pi \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) \quad (5.38)$$

olur. $x_0 \in \partial D$ için Eş.5.32 nin v doğrultusundaki türevi,

$$-2\pi \underbrace{\frac{\partial v}{\partial \nu}(x_0)}_{=\Psi(x_0)} = \int_D \frac{\partial}{\partial \nu(x_0)} \frac{e^{ik|x_0-y|}}{|x_0-y|} [\nabla^2 v(y) + k^2 v(y)] dy - 4\pi \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) \quad (5.39)$$

olur. Eş.5.37 den Eş.5.39 çıkarılırsa,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = \frac{1}{2} \Psi(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D \quad (5.40)$$

elde edilir. Eş.5.38 den Eş.5.39 çıkartılırsa,

$$\frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V}{\partial \nu}(x_0) = -\frac{1}{2}\Psi(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D \quad (5.41)$$

olur. Eş.5.40 ve Eş.5.41 den,

$$\frac{\partial V^+}{\partial \nu}(x_0) - \frac{\partial V^-}{\partial \nu}(x_0) = \Psi(x_0) \quad , \quad x_0 \in \partial D \quad (5.42)$$

tek katlı Helmholtz potansiyellerin, ν doğrultusundaki türevleri için, sıçrama (jump) bağıntısı elde edilir.

6. FİZİKSEL ALTYAPI

Akışkan bir ortamda hareket eden akustik dalgaları gözönüne alalım. $V(x, t)$, $x \in \mathbb{R}^3$ noktasındaki parçacığın t zamanındaki hız vektörü olsun. Akışkanın basıncını, yoğunluğunu ve spesifik entropisini sırasıyla $p(x, t)$, $\rho(x, t)$ ve $s(x, t)$ ile gösterelim. Akışkan üzerine hiç dış kuvvetin etki etmediğini varsayalım. O zaman parçacığın hareketi aşağıdaki denklemlerle ifade edilir;

Euler denklemi

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} + (V(x, t) \cdot \nabla) V(x, t) + \gamma V(x, t) + \frac{1}{\rho(x, t)} \nabla p(x, t) = 0 \quad (6.1)$$

Süreklilik denklemi

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \nabla [\rho(x, t) V(x, t)] = 0 \quad (6.2)$$

Durum denklemi

$$f(\rho(x, t), s(x, t)) = p(x, t) \quad (6.3)$$

Adiabatic hipotezi

$$\frac{\partial s(x, t)}{\partial t} + V(x, t) \nabla s(x, t) = 0 \quad (6.4)$$

Burada f akışkana bağlı bir fonksiyondur. γ sönüm katsayısıdır. Bu sistem V , ρ , p ve s bilinmeyen fonksiyonlarına göre lineer değildir. Başlangıçta yani $t = 0$ da $V_0 = 0$, $\rho = \rho_0(x)$, $s = s_0(x)$ ve p_0 sabiti $p_0 = f(\rho_0(x), s_0(x))$ şeklinde olsun. Bu lineer olmayan sistemin lineerleştirilmesi, bu sistemin (V_0, p_0, ρ_0, s_0) daki türevleri

$$V(x, t) = \varepsilon V_1(x, t) + o(\varepsilon^2)$$

$$p(x, t) = p_0 + \varepsilon p_1(x, t) + o(\varepsilon^2)$$

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t) + o(\varepsilon^2)$$

$$s(x, t) = s_0(x) + \varepsilon s_1(x, t) + o(\varepsilon^2)$$

ile verilir ve bu son eşitlikleri Eş.6.1, Eş.6.2, Eş.6.3, Eş.6.4 de yerine koyalım. $o(\varepsilon^2)$ yi içeren terimleri ihmal edersek,

$$\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} + \gamma V_1(x, t) + \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x, t) = 0 \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \nabla[\rho_0(x) V_1(x, t)] = 0 \quad (6.6)$$

$$\frac{\partial f(\rho_0, s_0)}{\partial \rho} \rho_1(x, t) + \frac{\partial f(\rho_0, s_0)}{\partial s} s_1(x, t) = p_1(x, t) \quad (6.7)$$

$$\frac{\partial s_1(x, t)}{\partial t} + V_1(x, t) \nabla s_0(x) = 0 \quad (6.8)$$

lineer sistem oluşur [3].

Bunu görelim.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\varepsilon V_1(x, t))}{\partial t} + (\varepsilon V_1(x, t) \cdot \nabla)(\varepsilon V_1(x, t)) + \gamma(\varepsilon V_1(x, t)) \\ & \quad + \frac{1}{\rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t)} \nabla(p_0 + \varepsilon p_1(x, t)) = 0 \\ & \varepsilon \frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} + \varepsilon^2 (V_1(x, t) \cdot \nabla) V_1(x, t) + \gamma \varepsilon V_1(x, t) + \frac{1}{\rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t)} \varepsilon \nabla p_1(x, t) = 0 \\ & \varepsilon \left[\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} + \varepsilon (V_1(x, t) \cdot \nabla) V_1(x, t) + \gamma V_1(x, t) + \frac{1}{\rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t)} \nabla p_1(x, t) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} + \varepsilon(V_1(x, t) \cdot \nabla)V_1(x, t) + \gamma V_1(x, t) + \frac{1}{\rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t)} \nabla p_1(x, t) = 0$$

olur. $\varepsilon \rightarrow 0$ gittiğinde

$$\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} + \gamma V_1(x, t) + \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x, t) = 0 \quad (6.5)$$

denklemini elde edilir.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t))}{\partial t} + \nabla[(\rho_0(x) + \varepsilon \rho_1(x, t)) \cdot (\varepsilon V_1(x, t))] &= 0 \\ \underbrace{\frac{\partial \rho_0(x)}{\partial t}}_{=0} + \varepsilon \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \nabla[\varepsilon \rho_0(x) V_1(x, t) + \varepsilon^2 \rho_1(x, t) V_1(x, t)] &= 0 \\ \varepsilon \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \varepsilon \nabla(\rho_0(x) V_1(x, t)) + \varepsilon^2 \nabla(\rho_1(x, t) V_1(x, t)) &= 0 \\ \varepsilon \left[\frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \nabla(\rho_0(x) V_1(x, t)) + \varepsilon \nabla(\rho_1(x, t) V_1(x, t)) \right] &= 0 \\ \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \nabla(\rho_0(x) V_1(x, t)) + \varepsilon \nabla(\rho_1(x, t) V_1(x, t)) &= 0 \end{aligned}$$

olur. $\varepsilon \rightarrow 0$ gittiğinde

$$\frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \nabla(\rho_0(x) \cdot V_1(x, t)) = 0 \quad (6.6)$$

denklemini elde edilir.

$$p(x, t) = f(\rho(x, t), s(x, t)), \quad p_0 = f(\rho_0, s_0)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_{p = p_0 + \varepsilon p_1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} \right) \Big|_{\substack{\rho = \rho_0 + \varepsilon \rho_1 \\ s = s_0 + \varepsilon s_1}}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(p_0 + \varepsilon p_1) &= \left[\frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, s_0 + \varepsilon s_1) \right] \frac{\partial}{\partial t}(\rho_0 + \varepsilon \rho_1) \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial s} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, s_0 + \varepsilon s_1) \right] \frac{\partial}{\partial t}(s_0 + \varepsilon s_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{\partial p_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, s_0 + \varepsilon s_1) \varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial s} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, s_0 + \varepsilon s_1) \varepsilon \frac{\partial s_1}{\partial t}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial p_1}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, s_0 + \varepsilon s_1) \frac{\partial \rho_1}{\partial t} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial s} f(\rho_0 + \varepsilon \rho_1, s_0 + \varepsilon s_1) \frac{\partial s_1}{\partial t}\end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ gittiğinde

$$\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0(x), s_0(x)) \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} f(\rho_0(x), s_0(x)) \frac{\partial s_1(x, t)}{\partial t}$$

veya ses hızı c

$$c^2(x) = \frac{\partial}{\partial \rho} f(\rho_0(x), s_0(x))$$

olmak üzere

$$\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = [c(x)]^2 \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} f(\rho_0(x), s_0(x)) \frac{\partial s_1(x, t)}{\partial t} \quad (6.9)$$

olur.

$$\nabla p_0 = \nabla f(\rho_0(x), s_0(x))$$

$$0 = \frac{\partial f(\rho_0, s_0)}{\partial \rho} \nabla \rho_0 + \frac{\partial f(\rho_0, s_0)}{\partial s} \nabla s_0 \quad (6.10)$$

yazılabilir.

$$\frac{\partial}{\partial t}(s_0(x) + \varepsilon s_1(x, t)) + (\varepsilon V_1(x, t)) \nabla(s_0(x) + \varepsilon s_1(x, t)) = 0$$

$$\varepsilon \frac{\partial s_1(x, t)}{\partial t} + \varepsilon V_1(x, t) [\nabla s_0(x) + \varepsilon \nabla s_1(x, t)] = 0$$

$$\frac{\partial s_1(x, t)}{\partial t} + V_1(x, t) [\nabla s_0(x) + \varepsilon \nabla s_1(x, t)] = 0$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ gittiğinde

$$\frac{\partial s_1(x, t)}{\partial t} + V_1(x, t) \cdot \nabla s_0(x) = 0 \quad (6.8)$$

elde edilir.

Önce s_1 i yok edelim.

Eş.6.8 ve Eş.6.10, Eş.6.9 da kullanılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} &= [c(x)]^2 \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} f(\rho_0(x), s_0(x)) \frac{\partial s_1(x, t)}{\partial t} \\ &= [c(x)]^2 \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} f(\rho_0(x), s_0(x)) (-V_1(x, t) \nabla s_0(x)) \\ &= [c(x)]^2 \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} - V_1(x, t) \frac{\partial}{\partial s} f(\rho_0(x), s_0(x)) \cdot \nabla s_0(x) \\ &= [c(x)]^2 \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + V_1(x, t) \frac{\partial f(\rho_0, s_0)}{\partial \rho} \nabla \rho_0(x) \\ &= [c(x)]^2 \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + V_1(x, t) [c(x)]^2 \nabla \rho_0(x) \\ \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} &= [c(x)]^2 \left[\frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + V_1(x, t) \nabla \rho_0(x) \right] \end{aligned} \quad (6.11)$$

Şimdi V_1 ve ρ_1 i yok edelim. Bunun için Eş.6.11 in t ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} = [c(x)]^2 \left[\frac{\partial^2 \rho_1(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} \nabla \rho_0(x) \right] \quad (6.12)$$

Eş.6.6 nın t ye göre türevini alalım.

$$\frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} + \nabla [\rho_0(x) V_1(x, t)] = 0 \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_1(x, t)}{\partial t^2} &= -\nabla \left[\rho_0(x) \frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} + V_1(x, t) \underbrace{\frac{\partial \rho_0(x)}{\partial t}}_{=0} \right] \\ &= -\nabla \left[\rho_0(x) \frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} \right] \end{aligned} \quad (6.13)$$

olur. Eş.6.13 de, Eş.6.5 i yani

$$\frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} = -\gamma V_1(x, t) - \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x, t)$$

yi kullanırsak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \rho_1(x, t)}{\partial t^2} &= -\nabla \left[\rho_0(x) \left(-\gamma V_1(x, t) - \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x, t) \right) \right] \\ &= \nabla [\nabla p_1(x, t) + \gamma \rho_0(x) V_1(x, t)] \\ &= \nabla^2 p_1(x, t) + \gamma \nabla (\rho_0(x) V_1(x, t)) \end{aligned} \quad (6.14)$$

olur.

Eş.6.5 ve Eş.6.14, Eş.6.12 de yerine yazılırsa

$$\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} = [c(x)]^2 \left[\frac{\partial^2 \rho_1(x, t)}{\partial t^2} + \frac{\partial V_1(x, t)}{\partial t} \nabla \rho_0(x) \right] \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} &= [c(x)]^2 \left[\nabla^2 p_1(x, t) + \gamma \nabla(\rho_0(x) V_1(x, t)) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\gamma V_1(x, t) - \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x, t) \right) \nabla \rho_0(x) \right] \\
\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} &= [c(x)]^2 \left[-\gamma \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + \nabla^2 p_1(x, t) - \gamma V_1(x, t) \nabla \rho_0(x) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\rho_0} \nabla p_1(x, t) \nabla \rho_0(x) \right]
\end{aligned} \tag{6.15}$$

elde edilir. Eş.6.15 te $\frac{\partial p_1}{\partial t}$ yerine Eş.6.11 den

$$\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{[c(x)]^2} \left[\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} - [c(x)]^2 V_1(x, t) \nabla \rho_0(x) \right]$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} &= [c(x)]^2 \left[-\gamma \frac{1}{[c(x)]^2} \left(\frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} - [c(x)]^2 V_1(x, t) \nabla \rho_0(x) \right) \right. \\
&\quad \left. + \nabla^2 p_1(x, t) - \gamma V_1(x, t) \nabla \rho_0(x) - \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \nabla p_1(x, t) \right] \\
\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} &= -\gamma \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} + [c(x)]^2 \left[\nabla^2 p_1(x, t) - \frac{1}{\rho_0} \nabla \rho_0(x) \nabla p_1(x, t) \right] \\
\frac{\partial^2 p_1(x, t)}{\partial t^2} + \gamma \frac{\partial p_1(x, t)}{\partial t} &= [c(x)]^2 \rho_0(x) \nabla \left[\frac{1}{\rho_0(x)} \nabla p_1(x, t) \right]
\end{aligned} \tag{6.16}$$

elde edilir. Bu p_1 için dalga denklemdir.

Şimdi kabul edelim ki $p_1(x, t)$ zaman periyodik (veya zaman harmonik) yani,

$$p_1(x, t) = \text{Re}[u(x)e^{-i\omega t}] \tag{6.17}$$

sadece uzaysal değişkene bağlı kompleks değerli bir $u = u(x)$ fonksiyonu ve $\omega > 0$ frekansı ile tanımlansın. Eş.6.17 i, dalga denklemi Eş.6.16 da yerine

koyarsak, u için üç boyutlu Helmholtz denklemi sağlanır.

$$\nabla^2 u(x) + \frac{w^2}{[c(x)]^2} \left(1 + i \frac{\gamma}{w}\right) u(x) = \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \cdot \nabla u(x) \quad (6.18)$$

Serbest uzayda $c = c_0$ sabit ve $\gamma = 0$ dır. “Dalga sayısı” ve “kırılma indeksi”ni,

$$k = \frac{w}{c_0} > 0 \quad \text{ve} \quad n(x) = \frac{c_0^2}{[c(x)]^2} \left(1 + i \frac{\gamma}{w}\right) \quad (6.19)$$

ile tanımlarsak Helmholtz denklemi

$$\Delta u(x) + k^2 n(x) \cdot u(x) = \frac{1}{\rho_0(x)} \nabla \rho_0(x) \cdot \nabla u(x) \quad (6.20)$$

şeklinde olur. Burada $\text{Re } n(x) \geq 0$ ve $\text{Im } n(x) \geq 0$ olmak üzere $n(x)$ bir kompleks değerli fonksiyondur.

Eş.6.20, küçük genlikli zaman harmonik ses dalgalarının homogen olmayan bir ortamda yayılmasını belirtir.

Bu denklem $\mathbb{R}^3$ teki her serbest kaynak bölgesinde sağlanır. Kabul edelim ki her $|x| \geq a$ için $c(x) = c_0$ ve $\gamma(x) = 0$ yani $|x| \geq a$ için $n(x) = 1$ olacak biçimde $a > 0$ sayısı mevcut olsun. Bunun anlamı, homogen olmayan

$$\{x \in \mathbb{R}^3 : n(x) \neq 1\}$$

ortamı sınırlıdır ve a yarıçaplı

$$K(0, a) = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| < a\}$$

yuvarının içinde yatmasıdır. $K(0, a)$ nın kapanışı,

$$K[0, a] = \{y \in \mathbb{R}^3 : |y| \leq a\}$$

ile tanımlanır. Ek olarak kaynağın $K[0, a]$ yuvarının dışında olduğunu kabul edelim.

Bu kaynaklar, u^i olay dalgayı üretir, öyle ki $K[0, a]$ yuvarının içinde,

$$\Delta u^i + k^2 u^i = 0$$

Helmholtz denklemini sağlar. Biz u^i yi “noktasal kaynak” veya “düzlemsel dalga” olarak alacağız, yani, zamana bağımlı olay dalga, kaynak z de ise

$$p_1^i(x, t) = \frac{1}{|x - z|} \text{Re} e^{ik|x-z| - i\omega t} \quad \text{yani} \quad u^i(x) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x - z|}, \quad |z| > a$$

veya $\hat{\theta} \in \mathbb{R}^3$ birim vektör olmak üzere

$$p_1^i(x, t) = \text{Re} e^{ik\hat{\theta} \cdot x - i\omega t} \quad \text{yani} \quad u^i(x) = e^{ik\hat{\theta} \cdot x}$$

dir.

Her durumda, $K[0, a]$ yuvarının içinde u^i , $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$ Helmholtz denkleminin bir çözümüdür. İlk durumda, p_1^i bir “küresel dalga”yı tanımlar öyle ki küresel dalga kaynaktan c_0 hızıyla uzaklaşır.

İkinci durumda $p_1^i(x, t)$ bir düzlemsel dalgadır, öyle ki $\hat{\theta}$ doğrultusunda c_0 hızıyla yayılır.

Olay dalga $n(x)$ kırılma indeksiyle tanımlanan homogen olmayan ortamda, $u^s(x)$ “saçılan dalga”yı üretir.

$u = u^i + u^s$ toplam alanı, kaynağın dışında $\Delta u + k^2 u = 0$ Helmholtz denklemini sağlar. Ayrıca biz saçılan dalganın homogen olmayan ortamdaki, bir küresel dalga olarak uzaklaştığını beklemeliyiz.

Bu, aşağıdaki “yayılma koşulu” ile tanımlanır.

$$\lim_{r=|x| \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - iku^s(x) \right) = 0 \quad (6.21)$$

$\frac{x}{|x|} \in s^2$, burada s^2 , $\mathbb{R}^3$ teki birim küredir [3].

6.1. Direkt Saçılma Problemi

$k > 0$ dalga sayısı, $|x| \geq a$ için $n(x) = 1$ olmak üzere kırılma indeksi $n = n(x)$ olsun ve u^i olay dalga verilsin. $\mathbb{R}^3$ te kaynak alanın dışında,

$$\Delta u + k^2 n(x) u = 0 \quad (6.22)$$

Helmholtz denklemini sağlayan (eğer $\Delta \rho_0 = 0$ ise) u toplam alanı, öyle ki, $u^s = u - u^i$ saçılan alan Eş.6.21 yayılma koşulunu sağlamak üzere, belirleme problemidir.

6.2. Ters Saçılma Problemi

$K(0, a)$ yuvarının dışında, çok sayıda farklı u^i olay dalga ve (veya) farklı k dalga sayısına karşılık gelen $u(x)$ toplam alanın değerlerinden $n = n(x)$ kırılma indeksinin belirlenmesi problemidir.

6.3. Homogen Olmayan Bir Ortamda Zaman Harmonik Dalga Yayılması

Uzayda az yoğunluklu veya çok yoğunluklu bir bölgeden geçerek yayılan, zaman harmonik ses dalgasını gözönüne alalım. Kabul edelim ki, bölgenin yoğunluğu $\rho_0 = \rho_0(x)$ fonksiyonu ile verilsin ve $\rho_0(x)$ yavaş değişsin; yani $\nabla \rho_0(x)$ terimi ihmal edilebilir olsun. Bu nedenle $\nabla \rho_0(x) = 0$ alacağız. $U(x, t)$ hız potansiyeli, $x \in \mathbb{R}^3$, $(x, t) \in \mathbb{R}^4$ için,

$$\Delta_3 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x_3^2} = \frac{1}{c^2(x)} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (6.23)$$

dalga denklemini gerçekler. Eş.6.23 te $c(x) \in C^1(\mathbb{R}^3)$, ses hızı olarak tanımlanır. $a > 0$, $c_0 > 0$ pozitif sabitler olmak üzere, $|x| \geq a$ için $c(x) = c_0$ tanımlansın.

Eş.6.23 dalga denkleminin,

$$U(x, t) = u(x)T(t) \quad (6.24)$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilir çözümü arandığında, $-w^2$ ayırma sabiti olmak üzere, $u(x)$ ve $T(t)$ fonksiyonları,

$$\Delta_3 u(x) + \frac{w^2}{c^2(x)} u(x) = 0 \quad (6.25)$$

$$T''(t) + w^2 T(t) = 0 \quad (6.26)$$

denklemlerini sağlamalıdır. Eş.6.26'nın çözümleri, $e^{\mp iwt}$ olur. Burada w ses dalgasının frekansıdır. Ses dalgası, zaman harmonik olduğundan Eş.6.24 ayrılabilir çözümü,

$$U(x, t) = u(x)e^{-iwt} \quad (6.27)$$

olur. Böylece,

$$k^2 = \frac{w^2}{c_0^2} \quad \text{ve} \quad m(x) = 1 - \frac{c_0^2}{c^2(x)} \quad (6.28)$$

olmak üzere kompleks değerli $u(x)$ fonksiyonu,

$$\Delta_3 u(x) + k^2[1 - m(x)]u(x) = 0 \quad (6.29)$$

indirgenmiş dalga denklemini sağlamalıdır.

$U(x, t)$ yi iki fonksiyonun toplamı olarak düşünelim; bunlar $U^i(x, t)$ olay dalga ve $U^s(x, t) = U(x, t) - U^i(x, t)$ saçılan dalga olsunlar. Dikkat edilirse, az yoğunluklu ya da çok yoğunluklu bir bölge yok ise $U^s(x, t) \equiv 0$ ve $U(x, t) = U^i(x, t)$ olur. Kabul edelim ki $U^i(x, t)$ olay dalga, düzlemsel dalga olsun. $U^i(x, t)$ düzlemsel dalga,

$$\Delta_3 U^i(x, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 U^i(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (6.30)$$

denklemini gerçekler. $\alpha \in \mathbb{R}^3$, $|\alpha| = 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ birim vektör olsun.

O zaman her bir t için

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - c_0 t = \text{sabit}$$

denklemini, $\mathbb{R}^3$ te bir düzlem belirtir. Dolayısıyla keyfi $F_1 \in C^2$ fonksiyonu olmak üzere,

$$U(x, t) = F_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 - c_0 t) \quad (6.31)$$

fonksiyonu, Eş.6.30 dalga denkleminin bir çözümüdür. Eş.6.31 fonksiyonu düzlemsel dalga olarak bilinir.

Eş.6.28 den dolayı düzlemsel dalgayı,

$$U(x, t) = F_1\left(\alpha \cdot x - \frac{w}{k} t\right)$$

veya

$$U(x, t) = F(k\alpha x - wt), F \in C^2$$

yazarız. α doğrultusundaki düzlemsel dalgayı özel olarak,

$$U^i(x, t) = e^{i(k\alpha \cdot x - wt)} = e^{ik\alpha \cdot x} \cdot e^{-iwt} \quad (6.32)$$

alalım. $U^i(x, t)$ düzlemsel dalga α doğrultusunda hareket eder. Şimdi tekrar saçılan dalgaya dönelim $U^s(x, t)$ saçılan dalganın, engel bölgeden büyük uzaklıklardaki davranışı, uzaklaşan zaman harmonik küresel dalgalara benzer; yani $U^s(x, t)$

$$\Delta_3 U^s(x, t) = \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 U^s(x, t)}{\partial t^2} \quad (6.33)$$

dalga denklemini sağlar. Eş.6.33 dalga denkleminin

$$U^s(x, t) = u^s(x)T(t) \quad (6.34)$$

biçiminde değişkenlerine ayrılabilir çözümü arandığında, $-w^2$ ayırma sabiti ve $w^2 = c_0^2 k^2$ olmak üzere, $u^s(x)$ ve $T(t)$ fonksiyonları

$$\Delta_3 u^s(x) + k^2 u^s(x) = 0 \quad (6.35)$$

$$T''(t) + w^2 T(t) = 0 \quad (6.36)$$

denklemlerini sağlamalıdır. Eş.6.35 in $x_1 = r \cos \theta \sin \Phi$, $x_2 = r \sin \theta \sin \Phi$, $x_3 = r \cos \Phi$ küresel koordinatlardaki biçimi,

$$\frac{\partial^2 u^s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u^s}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\sin \Phi \frac{\partial u^s}{\partial \Phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Phi} \frac{\partial^2 u^s}{\partial \theta^2} + k^2 u^s = 0 \quad (6.37)$$

olur. Eş.6.37 in $u^s(r, \theta, \Phi) = R(r)F(\theta, \Phi)$ biçiminde çözümü arandığında $R(r)$ ve $F(\theta, \Phi)$ fonksiyonları

$$\frac{1}{\sin \Phi} \frac{\partial}{\partial \Phi} \left(\sin \Phi \frac{\partial F}{\partial \Phi} \right) + \frac{1}{\sin^2 \Phi} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \gamma F = 0$$

$$r^2 R'' + 2rR' + (k^2 r^2 - \gamma)R = 0 \quad (6.38)$$

denklemlerini sağlamalıdır. γ ayırma sabiti, $\gamma = n(n+1)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) seçilirse, Eş.6.38 denklemi $v = r^{1/2} R$ bağımlı değişken değişirmesiyle, $(n+1/2)$. mertebeden

$$r^2 v'' + rv' + [k^2 r^2 - (n + 1/2)^2]v = 0 \quad (6.39)$$

Bessel denkleminde dönüşür. Böylece Eş.6.38 in lineer bağımsız çözümleri,

$$r^{-1/2} J_{(n+1/2)}(kr) \quad \text{ve} \quad r^{-1/2} J_{-(n+1/2)}(kr)$$

olur. Yani $u^s(r, \theta, \Phi)$ yi

$$u^s(r, \theta, \Phi) = F(\theta, \Phi) r^{-1/2} J_{\mp(n+1/2)}(kr)$$

biçiminde yazarız. Bessel fonksiyonlarının, çok büyük r ler için asimptotik değeri kullanılırsa,

$$u^s(r, \theta, \Phi) \sim \frac{F(\theta, \Phi)}{r} e^{ikr} \quad (6.40)$$

olur. Böylece çok büyük r ler için,

$$U^s(x, t) \sim \frac{F(\theta, \Phi)}{r} e^{i(kr - \omega t)} \quad (6.41)$$

yazarız. Eş.6.40 koşulu, $U^s(x, t)$ saçılan dalganın Sommerfeld yayılma koşulunu sağlamasını garanti eder yani

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial U^s}{\partial r} - ik U^s \right) = 0$$

dır.

Bu incelemeler bizi, aşağıda tanımlanan probleme götürür. Kompleks değerli bir $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ fonksiyonu bulmalıyız öyle ki; u ,

$$\Delta_3 u(x) + k^2 [1 - m(x)] u(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (6.42)$$

$$u(x) = e^{ik\alpha \cdot x} + u^s(x) \quad (6.43)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0 \quad (6.44)$$

denklemlerini sağlasın.

Eş.6.42 – Eş.6.44 problemi için bir çözüm kuralım.

$$\Omega = \{x: |x| \leq a\}, \quad \Omega_\delta = \{y: |y - x| < \delta\} \quad \text{ve} \quad \Omega_\delta \subset \Omega$$

olsun.

$x \in \Omega$ için

$$I(x) = \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y) u(y) dy$$

integralini inceleyelim.

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\Omega_\delta} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y) u(y) dy + \int_{\Omega \setminus \Omega_\delta} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y) u(y) dy \\ &= I^{(1)}(x) + I^{(2)}(x) \end{aligned} \quad (6.45)$$

yazalım.

$x \neq y$ için $\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonu, $\Delta_3 u + k^2 u = 0$ denklemini sağlar. Böylece,

$$\Delta_3 I(x) + k^2 I(x) = \Delta_3 I^{(1)}(x) + k^2 I^{(1)}(x)$$

olur.

$$I^{(1)}(x) = \int_{\Omega_\delta} \frac{e^{ik|x-y|} - 1}{|x-y|} m(y) u(y) dy + \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{|x-y|} m(y) u(y) dy$$

yazalım.

$$\begin{aligned} \Delta_3 I^{(1)}(x) + k^2 I^{(1)}(x) &= \int_{\Omega_\delta} (\Delta_3 + k^2) \left(\frac{e^{ik|x-y|} - 1}{|x-y|} \right) m(y) u(y) dy \\ &+ \Delta_3 \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{|x-y|} m(y) u(y) dy + k^2 \int_{\Omega_\delta} \frac{1}{|x-y|} m(y) u(y) dy \end{aligned}$$

olur.

$\delta \rightarrow 0$ sıfıra gittiğinde,

$$\Delta_3 I(x) + k^2 I(x) = -4\pi m(x) u(x) \quad (6.46)$$

elde edilir. $e^{ik\alpha \cdot x}$, $\Delta_3 u + k^2 u = 0$ denkleminin bir çözümüdür. Bu nedenle eğer $u(x)$,

$$u(x) = e^{ik\alpha \cdot x} - \frac{k^2}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y) u(y) dy \quad (6.47)$$

integral denkleminin bir çözümü ise o zaman $u(x)$

$$\Delta_3 u(x) + k^2 [1 - m(x)] u(x) = 0$$

denkleminin $x \in \Omega$ için bir çözümüdür.

Eş.6.47 integral denklemini kurarken $x \in \Omega$ kabul etmiştik. $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ ise o zaman $|x| \geq a$ için $m(x) = 0$ olduğundan ve $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ için $\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}$ fonksiyonu Ω da singüler olamayacağından $u(x)$, açık olarak Eş.6.42 nin bir çözümüdür.

Eş.6.47 integral denkleminin, Ω içinde sürekli olan bir $u(x)$ çözümünü bulabileceğimizi kabul edelim. O zaman, $u(x) \in C^2(\mathbb{R}^3)$ ve $u(x)$ in $\mathbb{R}^3$ te Eş.6.42 nin bir çözümü olduğunu gösterebiliriz.

$u^s(x)$ saçılan dalga fonksiyonunu,

$$u^s(x) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y) u(y) dy \quad (6.48)$$

ile tanımlayalım. Böylece Eş.6.47 yi

$$u(x) = e^{ik\alpha \cdot x} + u^s(x)$$

yazarız.

$r > a$ için $u^s(x)$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - iku^s(x) \right) = 0$$

yayıma koşulunu sağlar. Yani $u(x)$, Eş.6.47 integral denkleminin bir çözümü ise Eş.6.48 ile tanımlanan $u^s(x)$ saçılan dalga,

$$u(x) = e^{ik\alpha \cdot x} + u^s(x)$$

ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s(x)}{\partial r} - iku^s(x) \right) = 0$$

denklemleri sağlar. Bu nedenle Eş.6.42 – Eş.6.44 denklemleriyle tanımlanan saçılma probleminin bir çözümünü bulmak için, Eş.6.47 integral denkleminin bir sürekli çözümünü bulmak gerekir. Eş.6.47 integral denklemini, yeteri kadar küçük k lar için, ardışık yaklaşımlar yöntemini uygulayarak çözeceğiz.

$$T: C(\Omega) \rightarrow C(\Omega)$$

lineer operatörünü,

$$(Tu)(x) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy \quad (6.49)$$

ile tanımlayalım. Böylece Eş.6.47 yi

$$u(x) = e^{ik\alpha \cdot x} + (Tu)(x) \quad (6.50)$$

yazarız. Ardışık yaklaşımlar dizisini,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= 0 \\ u_{n+1}(x) &= e^{ik\alpha \cdot x} + (Tu_n)(x), \quad (n \geq 0 \text{ için}) \end{aligned} \quad (6.51)$$

tanımlayalım.

$\{u_n(x)\}$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1}(x) - u_n(x)] \quad (6.52)$$

serisinin yakınsak olmasıdır.

Eğer $x \in \Omega$ için

$$\|u_{n+1} - u_n\| \leq M\gamma^n \quad (6.53)$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ ve $0 < \gamma < 1$ pozitif sabitleri bulunabilirse Eş.6.52 serisi düzgün yakınsak olur. Burada $\|u\| = \max_{x \in \Omega} |u(x)|$ şeklindedir. T bir daralma operatörü ise Eş.6.53 sağlanır.

T bir daralma operatörü ise her $u, v \in C(\Omega)$ ve $0 < \gamma < 1$ için

$$\|Tu - Tv\| \leq \gamma \|u - v\| \quad (6.54)$$

sağlanır. T lineer olduğundan Eş.6.54 eşitsizliği, $u \in C(\Omega)$ için

$$\|Tu\| \leq \gamma \|u\| \quad (6.55)$$

eşitsizliğine denktir.

Eğer $\|Tu\| \leq \gamma \|u\|$ sağlanıyor ise o zaman $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [u_{n+1}(x) - u_n(x)]$ serisi

düzgün yakınsak olur ve bir $u \in C(\Omega)$ fonksiyonu mevcuttur öyle ki,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

olur. $u(x)$ in Eş.6.47 integral denkleminin bir çözümü olduğunu biliyoruz.

Şimdi T nin bir daralma operatörü olduğunu göstermeliyiz; yani, $0 < \gamma < 1$ yı sağlayan γ lar için

$$\|Tu\| \leq \gamma \|u\|, \quad u \in C(\Omega)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$u \in C(\Omega)$ için

$$\|Tu\| = \max_{x \in \Omega} \frac{k^2}{4\pi} \left| \int_{\Omega} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y)u(y)dy \right| \leq \frac{k^2 \mu \|u\|}{4\pi} \left\| \int_{\Omega} \frac{1}{|x-y|} dy \right\| \leq \frac{1}{2} k^2 \mu a^2 \|u\| \quad (6.56)$$

olur.

Burada

$$\mu = \max_{x \in \Omega} |m(x)|$$

dir.

Eğer,

$$\frac{k^2 \mu a^2}{2} < 1$$

ise yani,

$$k^2 < \frac{2}{\mu a^2} \quad (6.57)$$

ise Eş.6.47 integral denklemi, ardışık yaklaşımlar ile çözülebilir.

Şimdi Eş.6.47 integral denklemin çözümünün,

$$k^2 < \frac{2}{\mu a^2}$$

koşulu altında tek olduğunu gösterelim. Bunu görmek için kabul edelim ki iki çözüm $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ olsun. O zaman $V(x) = u_1(x) - u_2(x)$ fonksiyonu $V = TV$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $V = T^n V$ denklemlerini sağlar.

Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\|V\| = \|T^n V\| \leq \frac{1}{2^n} k^{2n} \mu^n a^{2n} \|V\| \quad (6.58)$$

eşitsizliği sağlanır ve Eş.6.57 eşitsizliği kullanılırsa $n \rightarrow \infty$ gittiğinde $V \equiv 0$ olduğu gösterilir.

Şimdi Eş.6.57 eşitsizliği sağlandığında Eş.6.42 – Eş.6.44 probleminin çözümünün tek olduğunu görelim yani $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$ fonksiyonu,

$$\Delta_3 u + k^2[1 - m(x)]u = 0, \quad x \in \mathbb{R}^3 \quad (6.59)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (6.60)$$

denklemlerini sağlasın.

Dikkat edilirse Eş.6.42 – Eş.6.44 saçılma probleminin iki çözümü

$$u_1 = e^{ik\alpha.x} + u_1^s, \quad u_2 = e^{ik\alpha.x} + u_2^s$$

ise $u = u_1 - u_2$ fonksiyonu Eş.6.59 – Eş.6.60 ı sağlar.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0$$

yayılma koşulu $|y| = a$ küresi üzerinden,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|y|=a} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds(y) = 0 \quad (6.61)$$

dır ve İkinci Green özdeşliğinden

$$\int_{|y|=a} \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) ds(y) = 0 \quad (6.62)$$

u nun kompleks eşleniği $\bar{u}$ olmak üzere yazabiliriz.

Eş.6.61 ve Eş.6.62 den

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|y|=a} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds(y) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|y|=a} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 + ik \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \right] ds(y) \\ &= \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|y|=a} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) ds(y) \end{aligned} \quad (6.63)$$

elde edilir.

$\mathbb{R}^3$ te keyfi $a > 0$ için $|y| \leq a$ bölgesinde gösterilim teoreminden

$$\begin{aligned}
u(x) = & \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=a} \left[\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial r}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] ds(y) \\
& - \frac{k^2}{4\pi} \int_{|y| \leq a} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y) u(y) dy
\end{aligned} \tag{6.64}$$

olur. Schwarz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{4\pi} \int_{|y|=a} \left(\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial r}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right) ds(y) \right| & \leq \frac{1}{4\pi} \left[\int_{|y|=a} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + |u|^2 \right) ds(y) \right]^{1/2} \\
\left[\int_{|y|=a} \left(\left| \frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right|^2 + \left| \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right|^2 \right) ds(y) \right]^{1/2} &
\end{aligned} \tag{6.65}$$

Eş.6.63 ten

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|y|=a} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 ds(y) = \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{|y|=a} |u|^2 ds(y) = 0$$

elde edilir.

$r = |x|$ için ve yeteri kadar büyük r ler için

$$\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

ve

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} = o\left(\frac{1}{r}\right)$$

yazılabilir. Böylece $a \rightarrow \infty$ sonsuza gittiğinde Eş.6.65 in sol yanı sıfıra gider. Diğer yandan $|x| \geq a$ için $m(x) \equiv 0$ olduğundan Eş.6.64 $a \rightarrow \infty$ için ve $|x| < a$ için

$$u(x) = -\frac{k^2}{4\pi} \int_{|x| \leq a} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} m(y) u(y) dy \quad (6.66)$$

olur. Fakat k , $k^2 < \frac{2}{\mu a^2}$ eşitsizliğini sağladığından $a \rightarrow \infty$ için $k^2 \rightarrow 0$ sıfıra gider. Böylece Eş.6.66 integral denklemin çözümü yalnız $u(x) \equiv 0$ olur. Biz bu işlemi, a keyfi ve $|x|$, $|x| < a$ eşitsizliğini sağlayan herhangi bir nokta için yaptık.

Eş.6.42 – Eş.6.44 saçılma problemini, bir integral denklem olarak yazabilmek için Helmholtz denkleminin bir temel çözümünü kullandık. Eş.6.47 integral denklemini çözebilmek için, T operatörünün bir daralma dönüşümü olduğunu göstermek gerekir. Eğer, $k^2 < \frac{2}{\mu a^2}$ sağlanmaz ise, T bir daralma dönüşümü olmaz [1,4].

7. MAXWELL DENKLEMLERİ VE ELEKTROMANYETİK DALGA SAÇILMASI

Bu bölümde bir sonsuz silindirik zaman harmonik elektromanyetik dalgaların saçılma problemini inceleyeceğiz.

Elektrik katsayısının ϵ ve manyetik katsayısının μ olduğu $\mathbb{R}^3$ te homogen, izotropik, iletken olmayan bir ortamda elektromanyetik dalga üretimini dikkate alalım.

$w > 0$ frekanslı elektromanyetik dalga,

$$\left. \begin{aligned} \text{curl} \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, t) + \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= 0 \\ \text{curl} \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t) - \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

şeklindeki Maxwell denklemlerini sağlayan $\vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, t)$ elektrik alan ve $\vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t)$ manyetik alan ile tanımlanır. $w > 0$ frekanslı

$$\left. \begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, t) &= \epsilon^{-1/2} \vec{E}(\vec{x}) e^{-iwt} \\ \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t) &= \mu^{-1/2} \vec{H}(\vec{x}) e^{-iwt} \end{aligned} \right\} \quad (7.2)$$

biçimindeki zaman harmonik elektromanyetik dalgalar için kompleks değerli uzay bağlı bölümleri $\vec{E}(\vec{x})$ ve $\vec{H}(\vec{x})$ in indirgenmiş zaman harmonik Maxwell denklemlerini (Eş.7.3 ve Eş.7.4) sağladığını görürüz.

$$\begin{aligned} \text{curl} \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, t) + \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \epsilon^{-1/2} e^{-iwt} \text{curl} \vec{E}(\vec{x}) + \mu [\mu^{-1/2} \vec{H}(\vec{x}) (-iw) e^{-iwt}] = 0 \\ &= \underbrace{e^{-iwt}}_{\neq 0} [\text{curl} \vec{E}(\vec{x}) - iw \epsilon^{1/2} \mu^{1/2} \vec{H}(\vec{x})] = 0 \\ \Rightarrow \text{curl} \vec{E}(\vec{x}) - iw \epsilon^{1/2} \mu^{1/2} \vec{H}(\vec{x}) &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

$$\begin{aligned}
\text{curl } \vec{\mathcal{H}}(\vec{x}, t) - \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}(\vec{x}, t)}{\partial t} &= \mu^{-1/2} e^{-i\omega t} \text{curl } \vec{H}(\vec{x}) - \epsilon [\epsilon^{-1/2} \vec{E}(\vec{x}) (-i\omega) e^{-i\omega t}] = 0 \\
&= e^{-i\omega t} [\text{curl } \vec{H}(\vec{x}) + i\omega \mu^{1/2} \epsilon^{1/2} \vec{E}(\vec{x})] = 0 \\
\Rightarrow \text{curl } \vec{H}(\vec{x}) + i\omega \mu^{1/2} \epsilon^{1/2} \vec{E}(\vec{x}) &= 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

k dalga sayısı $k = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$ olursa o zaman Eş.7.3 ve Eş.7.4

$$\text{curl } \vec{E}(\vec{x}) - ik \vec{H}(\vec{x}) = 0 \tag{7.5}$$

$$\text{curl } \vec{H}(\vec{x}) + ik \vec{E}(\vec{x}) = 0 \tag{7.6}$$

şeklini alır. Sonuç olarak zaman harmonik elektromanyetik dalgaların saçılımının matematiksel tanımı bir D engel bölgesinde Eş.7.5 ve Eş.7.6 için sınır değer problemine götürür. Aslında $\vec{E}^i(\vec{x})$ olay dalgayı $\vec{E}^s(\vec{x})$ saçılan dalgayı belirtirse, o zaman $\vec{E}^s(\vec{x})$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\vec{H} \times \vec{e}_r - \vec{E}) = 0 \tag{7.7}$$

Silver-Müller radyasyon koşulunu sağlayan bir uzaklaşan dalga olmalıdır. Burada $\vec{e}_r$ radyal yöndeki birim vektör ve ∂D da

$$\vec{v} \times \vec{E} = 0 \tag{7.8}$$

dır. Burada $\vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}^i(\vec{x}) + \vec{E}^s(\vec{x})$ ve $\vec{v}$, ∂D da birim dış normaldir.

Şimdi z yönündeki eksenle bir sonsuz silindir için saçılımı dikkate alalım, $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, ve olay dalganın silindire dik yönde geldiğini farz edelim. O zaman

$$\vec{E}(\vec{x}) = (E_1(\vec{x}), E_2(\vec{x}), E_3(\vec{x})) \text{ ve } \vec{H}(\vec{x}) = (H_1(\vec{x}), H_2(\vec{x}), H_3(\vec{x}))$$

z den bağımsızdır, bu yüzden Eş.7.5 ve Eş.7.6, Eş.7.9 ve Eş.7.10 şeklinde iki grup denkleme ayrılır.

$$\text{curl} \vec{E}(\vec{x}) - ik\vec{H}(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} - ik(H_1, H_2, H_3) = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - \underbrace{\frac{\partial E_2}{\partial z}}_{=0} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial E_3}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial E_1}{\partial z}}_{=0} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right) \vec{e}_z - ik(H_1, H_2, H_3) = 0$$

$$\left(\frac{\partial E_3}{\partial y} - ikH_1 \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial E_3}{\partial x} + ikH_2 \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} - ikH_3 \right) \vec{e}_z = 0$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial y} = ikH_1 \Rightarrow \frac{\partial E_3(x, y)}{\partial y} = ikH_1(x, y)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial x} = -ikH_2 \Rightarrow \frac{\partial E_3(x, y)}{\partial x} = -ikH_2(x, y)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = ikH_3 \Rightarrow \frac{\partial E_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial E_1(x, y)}{\partial y} = ikH_3(x, y)$$

ve

$$\text{curl} \vec{H}(\vec{x}) + ik\vec{E}(\vec{x}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_1 & H_2 & H_3 \end{vmatrix} + ik(E_1 \vec{e}_x + E_2 \vec{e}_y + E_3 \vec{e}_z) = 0$$

$$\left(\frac{\partial H_3}{\partial y} - \underbrace{\frac{\partial H_2}{\partial z}}_{=0} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial H_3}{\partial x} - \underbrace{\frac{\partial H_1}{\partial z}}_{=0} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right) \vec{e}_z$$

$$+ ik(E_1 \vec{e}_x + E_2 \vec{e}_y + E_3 \vec{e}_z) = 0$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial y} = -ikE_1 \Rightarrow \frac{\partial H_3(x, y)}{\partial y} = -ikE_1(x, y)$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial x} = ikE_2 \Rightarrow \frac{\partial H_3(x, y)}{\partial x} = ikE_2(x, y)$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = -ikE_3 \Rightarrow \frac{\partial H_2(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial H_1(x, y)}{\partial y} = -ikE_3(x, y)$$

olur.

Bu denklemler

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_3(x,y)}{\partial y} &= ikH_1(x,y) \\ \frac{\partial E_3(x,y)}{\partial x} &= -ikH_2(x,y) \\ \frac{\partial H_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial H_1(x,y)}{\partial y} &= -ikE_3(x,y) \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

ve

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_3(x,y)}{\partial y} &= -ikE_1(x,y) \\ \frac{\partial H_3(x,y)}{\partial x} &= ikE_2(x,y) \\ \frac{\partial E_2(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial E_1(x,y)}{\partial y} &= -ikH_3(x,y) \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

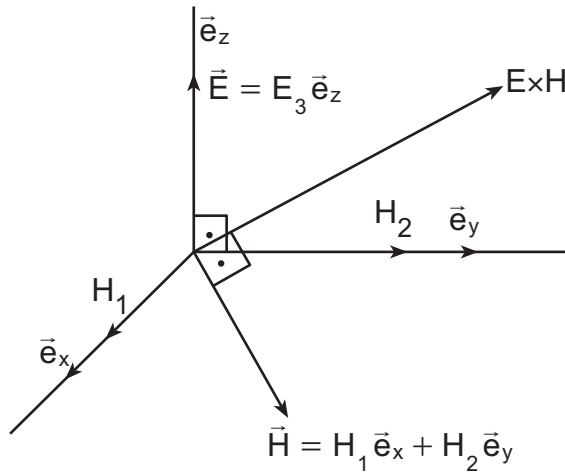
şeklindedir.

Burada birinci grup sadece $H_1(\vec{x})$, $H_2(\vec{x})$ ve $E_3(\vec{x})$ i içerir, ikinci grup sadece $E_1(\vec{x})$, $E_2(\vec{x})$ ve $H_3(\vec{x})$ i içerir. $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$; x, y, z yönlerindeki birim vektörler olsun. $H_1(\vec{x})$, $H_2(\vec{x})$ ve $E_3(\vec{x})$ Eş.7.9 u sağlasın.

$$\vec{E}(\vec{x}) = E_3(\vec{x})\vec{e}_z \text{ ve } \vec{H}(\vec{x}) = H_1(\vec{x})\vec{e}_x + H_2(\vec{x})\vec{e}_y$$

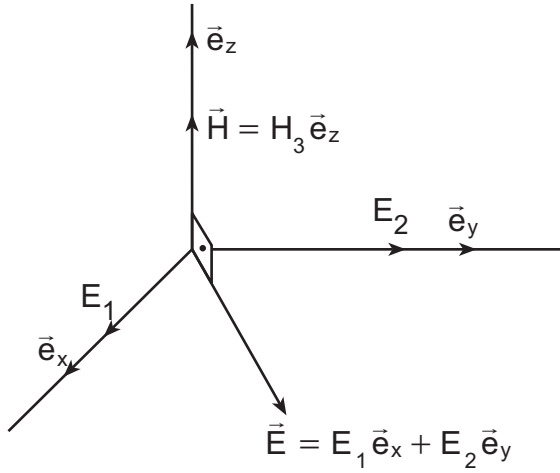
şeklindedir ve Eş.7.9 z eksenine dik kutuplaştırılan bir elektromanyetik dalgayı belirtir. Öyle ki

$$\begin{aligned}
 \vec{E} \times \vec{H} \cdot \vec{e}_z &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & E_3 \\ H_1 & H_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_z \\
 &= (-H_2 E_3 \vec{e}_x + H_1 E_3 \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



dır. Benzer olarak Eş.7.10, z eksenine paralel kutuplaştırılan bir elektromanyetik dalgayı belirtir.

$$\begin{aligned}
 \vec{H}(\vec{x}) &= H_3(\vec{x}) \vec{e}_z \text{ ve } \vec{E}(\vec{x}) = E_1(\vec{x}) \vec{e}_x + E_2(\vec{x}) \vec{e}_y \\
 \vec{H} \times \vec{E} \cdot \vec{e}_z &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & H_3 \\ E_1 & E_2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{e}_z \\
 &= (-E_2 H_3 \vec{e}_x + E_1 H_3 \vec{e}_y) \cdot \vec{e}_z \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



Eş.7.9 ve Eş.7.10 un genel çözümü

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial r} ds = 0$$

ve

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\log \frac{1}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial r}(y) - u(y) \frac{\partial}{\partial r(y)} \log \frac{1}{|x-y|} \right) ds$$

denklemlerinin çözümlerinin eklenmesiyle elde edilir. Eş.7.9 dan $H_1(\vec{x})$ ve $H_2(\vec{x})$ i yok edersek, $E_3(\vec{x})$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E_3}{\partial y} &= ikH_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_3}{\partial y^2} = ik \frac{\partial H_1}{\partial y} \\ \frac{\partial E_3}{\partial x} &= -ikH_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} = -ik \frac{\partial H_2}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_3}{\partial y^2} = -ik \underbrace{\left(\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} \right)}_{= -ikE_3}$$

$$\Rightarrow \Delta_2 E_3 + k^2 E_3 = 0$$

$$\frac{\partial H_2}{\partial x} - \frac{\partial H_1}{\partial y} = -ikE_3$$

$$\Delta_2 E_3 + k^2 E_3 = 0 \quad (7.11)$$

denklemini sağlar ve $E_3(\vec{x})$ i bulabilirsek, Eş.7.9 dan $H_1(\vec{x})$ ve $H_2(\vec{x})$ i elde edebiliriz. Benzer olarak Eş.7.10 dan $H_3(x)$ in

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial H_3}{\partial y} &= -ikE_1 \Rightarrow \frac{\partial^2 H_3}{\partial y^2} = -ik \frac{\partial E_1}{\partial y} \\ \frac{\partial H_3}{\partial x} &= ikE_2 \Rightarrow \frac{\partial^2 H_3}{\partial x^2} = ik \frac{\partial E_2}{\partial x} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial^2 H_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_3}{\partial y^2} = ik \left(\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} \right)$$

$$= ikikH_3$$

$$= -k^2 H_3$$

$$\Rightarrow \Delta_2 H_3 + k^2 H_3 = 0$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial x} - \frac{\partial E_1}{\partial y} = ikH_3$$

$$\Delta_2 H_3 + k^2 H_3 = 0 \quad (7.12)$$

denklemini sağladığı görürüz ve $H_3(\vec{x})$ bulabilirsek, Eş.7.10 dan $E_1(\vec{x})$ ve $E_2(\vec{x})$ i elde edebiliriz. Sonuç olarak $\vec{E}(\vec{x})$ ve $\vec{H}(\vec{x})$ i bulma problemi, $E_3(\vec{x})$ ve $H_3(\vec{x})$ için Helmholtz denklemini çözme problemine indirgendir. $\vec{E}(\vec{x})$ ve $\vec{H}(\vec{x})$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r(\vec{H} \times \vec{e}_r - \vec{E}) = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} r(\vec{E} \times \vec{e}_r + \vec{H}) = 0 \quad (7.13)$$

Silver-Müller yayılma koşulunu sağlarsa

$$E_3(\vec{x}) \text{ ve } H_3(\vec{x}),$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial E_3}{\partial r} - ikE_3 \right) = 0 \quad \text{veya} \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial H_3}{\partial r} - ikH_3 \right) = 0$$

Sommerfeld yayılma koşulunu sağlamalıdır. $E_3(\vec{x})$ ve $H_3(\vec{x})$ le sağlanan sınır

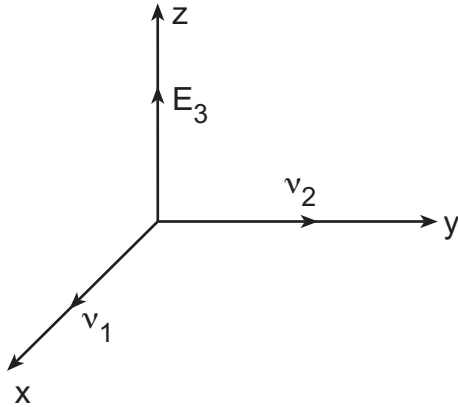
koşullarını belirleyelim. $\vec{x} = (x, y)$ olmak üzere $(\vec{E}(\vec{x}), \vec{H}(\vec{x}))$, z eksenine dik kutuplaştırılırsa $E_1(\vec{x}) = E_2(\vec{x}) = H_3(\vec{x}) = 0$ dir. O zaman Eş.7.8 den

$$\vec{v} \times \vec{E} = 0, \quad \vec{E}(\vec{x}) = \vec{E}^i(\vec{x}) + \vec{E}^s(\vec{x})$$

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{E} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 \end{vmatrix} = (v_2 E_3 - \cancel{v_3 E_2}^0) \vec{e}_x - (v_1 E_3 - \cancel{E_1 v_3}^0) \vec{e}_y + (\cancel{v_1 E_2}^0 - \cancel{E_1 v_2}^0) \vec{e}_z \\ &= v_2 E_3 \vec{e}_x - v_1 E_3 \vec{e}_y = \vec{0} \end{aligned}$$

$$v_2 E_3 = 0, \quad v_1 E_3 = 0 \Rightarrow E_3 = 0$$

olur.



$$E_3(\vec{x}) = 0 \quad \partial D \text{ da} \quad (7.14)$$

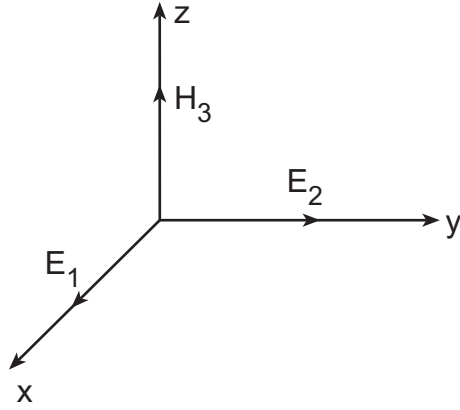
$$\text{ve } E_3^s(\vec{x}) + E_3^i(\vec{x}) = \vec{E}(\vec{x}) = 0$$

$$E_3^s(\vec{x}) = -E_3^i(\vec{x}), \quad \partial D \text{ da} \quad (7.15)$$

dir. Diğer taraftan $(\vec{E}(\vec{x}), \vec{H}(\vec{x}))$, z eksenine paralel kutuplaştırılırsa $H_1(\vec{x}) = H_2(\vec{x}) = E_3(\vec{x}) = 0$ dir. O zaman Eş.7.8 den

$$\vec{v} \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ v_1 & v_2 & 0 \\ E_1 & E_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\underbrace{-v_3}_{=0} E_2 \right) \vec{e}_x - \left(\underbrace{v_3}_{=0} E_1 \right) \vec{e}_y + (v_1 E_2 - E_1 v_2) \vec{e}_z = 0$$

$$\Rightarrow v_1 E_2 - E_1 v_2 = 0$$



$$v_1 E_2 - E_1 v_2 = 0 \quad (7.16)$$

olur. Fakat Eş.7.10 dan

$$\begin{aligned} \nabla H_3(\vec{x}) &= \frac{\partial H_3}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial H_3}{\partial y} \vec{e}_y \\ &= ikE_2 \vec{e}_x - ikE_1 \vec{e}_y \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Sonuç olarak

$$\begin{aligned} \nabla H_3(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) &= (ikE_2 \vec{e}_x - ikE_1 \vec{e}_y) (E_1 \vec{e}_x + E_2 \vec{e}_y + 0 \cdot \vec{e}_z) \\ &= ikE_2 E_1 - ikE_1 E_2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\nabla H_3(\vec{x}) \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 0 \quad (7.17)$$

olur.

$$\begin{aligned}
\nabla H_3 \cdot \vec{v} &= (ikE_2 \vec{e}_x - ikE_1 \vec{e}_y)(v_1 \vec{e}_x + v_2 \vec{e}_y + v_3 \vec{e}_z) \\
&= ikE_2 v_1 - ikE_1 v_2 \\
&= ik \underbrace{(E_2 v_1 - E_1 v_2)}_{= 0 \text{ (Eş 7.16 dan)}} \\
&= 0 \\
\nabla H_3 \cdot \vec{v} &= \frac{\partial H_3(x)}{\partial v} = 0, \quad \partial D \text{ da} \tag{7.18}
\end{aligned}$$

dır.

Yani, $(\vec{E}(\vec{x}), \vec{H}(\vec{x}))$, z eksenine dik kutuplaştırılırsa

$E_1(\vec{x}) = E_2(\vec{x}) = H_3(\vec{x}) = 0$ dır. O zaman

$$\Delta_2 E_3(\vec{x}) + k^2 E_3(\vec{x}) = 0$$

$$E_3(\vec{x}) = 0, \quad \partial D \text{ da}$$

olur.

$(\vec{E}(\vec{x}), \vec{H}(\vec{x}))$, z eksenine paralel kutuplaştırılırsa

$H_1(\vec{x}) = H_2(\vec{x}) = E_3(\vec{x}) = 0$ dır. O zaman

$$\Delta_2 H_3(\vec{x}) + k^2 H_3(\vec{x}) = 0$$

$$\frac{\partial H_3(\vec{x})}{\partial v} = 0, \quad \partial D \text{ da}$$

olur.

Özetle, bir sonsuz silindirik zaman harmonik elektromanyetik dalgaların saçılma problemi

$$\Delta_2 E_3(\vec{x}) + k^2 E_3(\vec{x}) = 0$$

$$E_3(\vec{x}) = 0, \partial D \text{ da}$$

veya

$$\Delta_2 H_3(\vec{x}) + k^2 H_3(\vec{x}) = 0$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial \nu}(\vec{x}) = 0, \partial D \text{ da}$$

denklemlerini çözmeye indirgenebilir. Burada olay alan z eksenine dik veya paralel kutuplaştırılmıştır ve sırasıyla $E_3(\vec{x})$ ve $H_3(\vec{x})$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial E_3}{\partial r} - ik E_3 \right) = 0 \text{ veya } \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial H_3}{\partial r} - ik H_3 \right) = 0$$

Sommerfeld yayılma koşulunu sağlar.

Olay alan keyfi kutuplaştırılmışsa o zaman olay dalgaının z eksenine dik ve z eksenine paralel olan bileşenleri dikkate alınır. $E_3(\vec{x})$ ve $H_3(\vec{x})$ Sommerfeld yayılma koşulunu sağlar.

$$\Delta_2 E_3 + k^2 E_3 = 0$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial \nu} = 0, \partial D \text{ da}$$

denklem çözülür ve o zaman iki çözüm eklenir.

8. SİLİNDİRİN KEYFİ BİR KESİTİNDE SAÇILMA

Bir sonsuz silindirin keyfi D kesitinde zaman harmonik düzlem dalganın saçılma problemini ele alalım. Kabul edelim ki D sınırlı, basit bağlantılı ve ∂D , C^2 sınıfından olsun ν , ∂D da birim dış normal ve genelliği bozmadan D orijini içersin.

$$\Delta_2 u + k^2 u = 0 \quad , \quad \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \text{ de} \quad (8.1)$$

$$u(x) = -u^i(x) \quad , \quad \partial D \text{ üzerinde} \quad (8.2)$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = -\frac{\partial u^i}{\partial \nu}(x) \quad , \quad \partial D \text{ da} \quad (8.3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0 \quad (8.4)$$

burada $u^i(r, \theta) = \exp[ikr \cos \theta]$ dir. Eş.8.2, silindire dik kutuplaştırılan bir elektromanyetik dalgaya karşılık gelir. Eş.8.3, silindire paralel kutuplaştırılan bir elektromanyetik dalgaya karşılık gelir. Eş.8.4 (r, θ) kutupsal koordinatlar olmak üzere θ ın her değeri için düzgün olarak sağlanır. Amacımız nümeriksel hesaplamalar için uygun olan bir durumda Eş.8.1 - Eş.8.4 ün (kompleks değerli) çözümünün varlığını ve tekliğini elde etmektir. Eş.8.1, Eş.8.2, Eş.8.4 için $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ ve Eş.8.1, Eş.8.3, Eş.8.4 için $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ olsun. Bununla birlikte eğer $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ ise aslında $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ dır. Sonuç olarak Eş.8.1 in ve Eş.8.4 ün herhangi çözümünün $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ olduğu kabul edilir.

Tanım 8.1

Eş.8.1 Helmholtz denkleminin temel çözümü

$$\Phi(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|)$$

dir. Burada $H_0^{(1)}(k|x - y|)$ birinci tür sıfırıncı mertebeden Hankel fonksiyonudur.

Hankel fonksiyonu aşağıdaki asimptotik bağıntıyı sağlar.

$$H_n^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i\left(kr - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} + O\left(\frac{1}{r}\right), \quad r \rightarrow \infty$$

Buradan $\Phi(x, y)$ nin x ve y ye göre

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial R} - ik\Phi(x, y) \right) ; \quad |x - y| = R \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left(\frac{d}{dR} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) - ik \frac{i}{4} H_0^{(1)}(kR) \right) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left\{ \frac{d}{dR} \left[\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} R^{-1/2} e^{i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} \right] + \frac{k}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} R^{-1/2} e^{i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} \right\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \sqrt{R} \left\{ \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \left(-\frac{1}{2} R^{-3/2} e^{i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} + \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} R^{-1/2} (ik) e^{i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{k}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} R^{-1/2} e^{i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} \right\} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k}} R^{-1} e^{i\left(kR - \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Sommerfeld yayılma koşulunu sağladığını görürüz.

$|x - y|$ sıfıra giderken

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} + O(1)$$

dir.

$$H_0^{(1)}(x) \approx -i \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{x}$$

$|x - y| \rightarrow 0$ iken

$$H_0^{(1)}(k|x - y|) \approx -i \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{|x - y|}$$

ve

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|) \\ &\approx \frac{i}{4} \left(-i \frac{2}{\pi} \log \frac{2}{|x - y|} \right) \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \log \frac{2}{|x - y|}, \quad |x - y| \rightarrow 0 \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \left[\log 2 + \log \frac{1}{|x - y|} \right] \\ &\approx \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} + \frac{1}{2\pi} \log 2, \quad \frac{1}{2\pi} \log 2 = O(1) \end{aligned}$$

olur. Sonuç olarak

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x - y|} + O(1)$$

dir.

Teorem 8.1

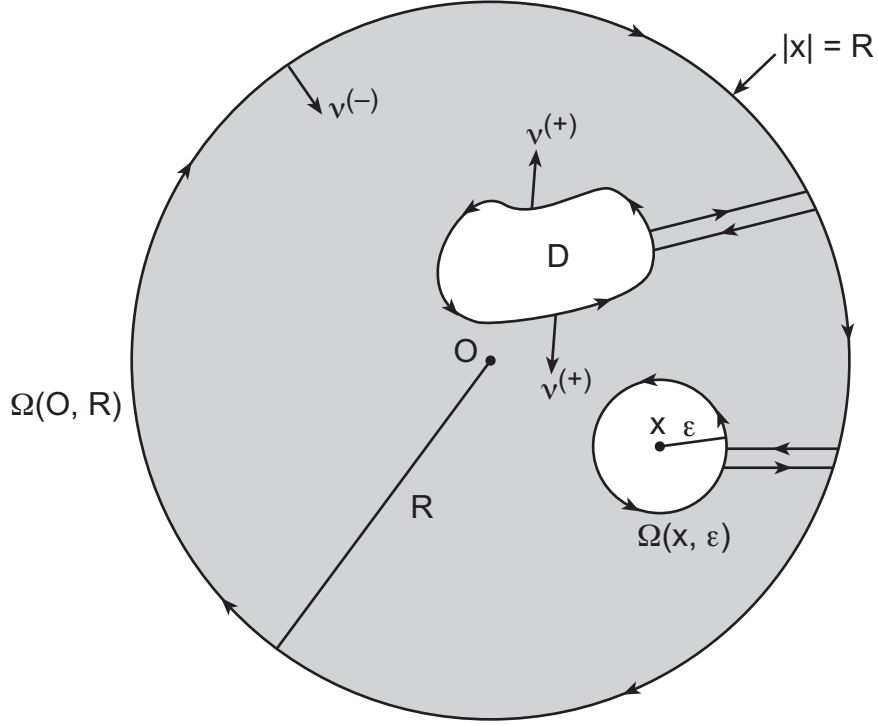
$u(\vec{x})$, D nin dışında Helmholtz denkleminin bir çözümü olsun ve Sommerfeld yayılma koşulunu sağlasın. O zaman $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[u(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(\vec{y}) \Phi(x, y) \right] ds(y) \quad (8.5)$$

dir.

İspat

$x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ olsun $\Omega_{x,\varepsilon} = \{y : |x - y| < \varepsilon\}$ ile sınırlayalım. Burada $\Omega(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ dır. $\Omega(O, R)$, orijin merkezli, R yarıçaplı, D ve $\Omega_{x,\varepsilon}$ i içeren bir yuvar olsun.



Şekil 8.1 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ için $\Omega(O, R) \setminus (D \cup \Omega(x, \varepsilon))$ bölgesi

O zaman ikinci Green özdeşliğinden

$$\int_{\partial D + \partial \Omega(x, \varepsilon) + \partial \Omega(O, R)} \left[u(\bar{y}) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) = 0 \quad (8.6)$$

dır. Hankel fonksiyonun tanımından

$$\frac{d}{dz} H_0^{(1)}(z) = -H_1^{(1)}(z) \quad (8.7)$$

elde ederiz ve bu nedenle $y \in \partial \Omega(x, \varepsilon)$ üzerinde

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) &= \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) \\
&= \frac{d}{d\varepsilon} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\varepsilon) \\
&= -\frac{i}{4} k H_1^{(1)}(k\varepsilon)
\end{aligned} \tag{8.8}$$

şeklindedir.

$x \rightarrow 0$ için

$$x H_1^{(1)}(x) \approx -\frac{2i}{\pi}$$

dir.

O zaman

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega(x, \varepsilon)} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) ds(y) \\
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} u(x + \varepsilon \widehat{\theta}) \left(-\frac{i}{4} \right) k H_1^{(1)}(k\varepsilon) \varepsilon d\theta \\
&= -\frac{i}{4} u(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (k\varepsilon) H_1^{(1)}(k\varepsilon) \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= -\frac{i}{4} u(x) \left(-\frac{2i}{\pi} \right) 2\pi \\
&= -u(x)
\end{aligned} \tag{8.9}$$

olur. Burada $|\widehat{\theta}| = 1$ dir.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon H_0^{(1)}(k\varepsilon) \approx -\frac{2i}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon \log \frac{2}{k\varepsilon} = 0 \text{ olduğundan}$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega(x, \varepsilon)} \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k\varepsilon) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x + \varepsilon \hat{\theta}) \varepsilon d\theta \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8.10)$$

elde edilir. Eş.8.9 ve Eş.8.10 u, Eş.8.6 da yazarsak

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \\ &\quad - \int_{|y|=R} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) \end{aligned} \quad (8.11)$$

olur. ν , her zaman D nin sınırında birim dış normaldir. Bu yüzden ispatın tamamlanması için $R \rightarrow \infty$ iken $|y| = R$ de integralin sıfıra gittiğini göstermek yeterlidir.

İlk önce $R \rightarrow \infty$ giderken

$$\int_{|y|=R} |u|^2 d(s) = O(1) \quad (8.12)$$

olduğunu gösterelim. Yani Eş.8.12 nin sol tarafındaki integralin R de sınırlı olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için ilk önce Sommerfeld yayılma koşulundan

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \right|^2 d\theta = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 \underbrace{rd\theta}_{=ds} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right)} ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + i\bar{k}\bar{u} \right) ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left[\frac{\partial u}{\partial r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} + i\bar{k}\bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} - iku \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} - i^2 k^2 u \cdot \bar{u} \right] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 + ik \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \right] ds \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 + ik \left[-2i \operatorname{Im} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \right] \right\} ds \\
&= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 + 2k \operatorname{Im} \left(u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) \right] ds
\end{aligned} \tag{8.13}$$

veya

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) ds = -2k \operatorname{Im} \int_{|y|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} ds \tag{8.14}$$

elde edilir. $D_R = \Omega \setminus \bar{D}$ de birinci Green özdeşliğini uygularsak

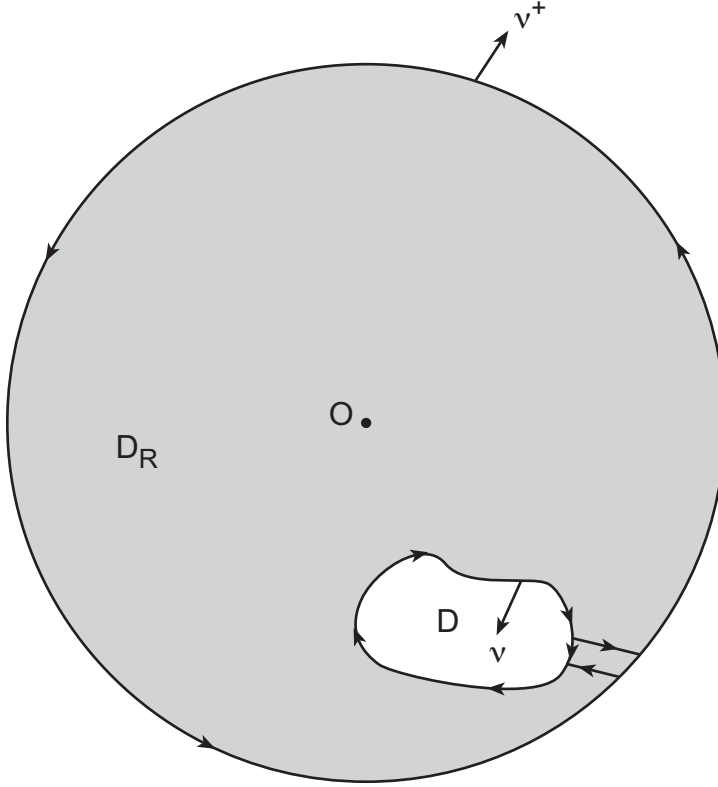
$$\int_{D_R} u \Delta_2 \bar{u} dy = \int_{\partial D_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \int_{D_R} (\nabla u)(\nabla \bar{u}) dy; \quad \partial D_R = \partial D \cup \partial \Omega(O, R)$$

veya

$$\begin{aligned}
\int_{D_R} u(y) \underbrace{\Delta_2 \bar{u}(y)}_{=-k^2 \bar{u}} dy &= \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds(y) + \int_{\partial \Omega(O, R)} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds(y) - \int_{D_R} |\nabla u(y)|^2 dy \\
-k^2 \iint_{D_R} u \bar{u} dy &= - \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds + \int_{|y|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - \int_{D_R} |\nabla u|^2 dy
\end{aligned}$$

veya

$$\int_{|y|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds - k^2 \int_{D_R} |u|^2 dy + \int_{D_R} |\operatorname{grad} u|^2 dy \tag{8.15}$$



Şekil 8.2 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için $D_R = \Omega \setminus \bar{D}$ bölgesi

Eş.8.15 ten dolayı

$$\operatorname{Im} \int_{|y|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} ds = \operatorname{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} ds \quad (8.16)$$

olur. O zaman Eş.8.14,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right) ds = -2k \operatorname{Im} \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} ds \quad (8.17)$$

şeklinde olur.

$R \rightarrow \infty$ iken Eş.8.17 nin sağ tarafının sınırlı olmasından

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 ds + k^2 \int_{|y|=R} |u|^2 ds \right]$$

sınırlıdır. Öyleyse

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} |u|^2 dy = O(1) \quad (8.18)$$

dir. Teoremin ispatını tamamlamak için

$$\begin{aligned} & \int_{|y|=R} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial v(y)} \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial v}(y) \right] ds(y) \\ &= \int_{|y|=R} u(y) \left[\frac{\partial}{\partial r} \Phi(x, y) - ik \Phi(x, y) \right] ds(y) \\ &- \int_{|y|=R} \Phi(x, y) \left[\frac{\partial u}{\partial r}(y) - iku(y) \right] ds(y) \end{aligned} \quad (8.19)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada $\frac{\partial}{\partial r}$, radyal yönde y ye göre türevi belirtir. Eş.8.19 daki integrallerin herbirine Schwarz eşitsizliğini uygularsak ve Eş.8.18 i kullandırsak $\Phi(x, y) = O\left(\frac{1}{\sqrt{R}}\right)$ nin ve $u(y)$ nin Sommerfeld yayılma koşulunu sağlamasıyla

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{|y|=R} u(y) \left(\frac{\partial}{\partial r} \Phi(x, y) - ik \Phi(x, y) \right) ds(y) \right]^2 \\ & \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|y|=R} |u(y)|^2 ds(y) \right) \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial}{\partial r} \Phi(x, y) - ik \Phi(x, y) \right|^2 ds(y) \right) = 0 \end{aligned} \quad (8.20)$$

ve

$$\begin{aligned} & \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\int_{|y|=R} \Phi(x, y) \left[\frac{\partial u}{\partial r}(y) - iku(y) \right] ds(y) \right]^2 \\ & \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|y|=R} |\Phi(x, y)|^2 ds(y) \right) \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|y|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(y) - iku(y) \right|^2 ds(y) \right) = 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

elde edilir.

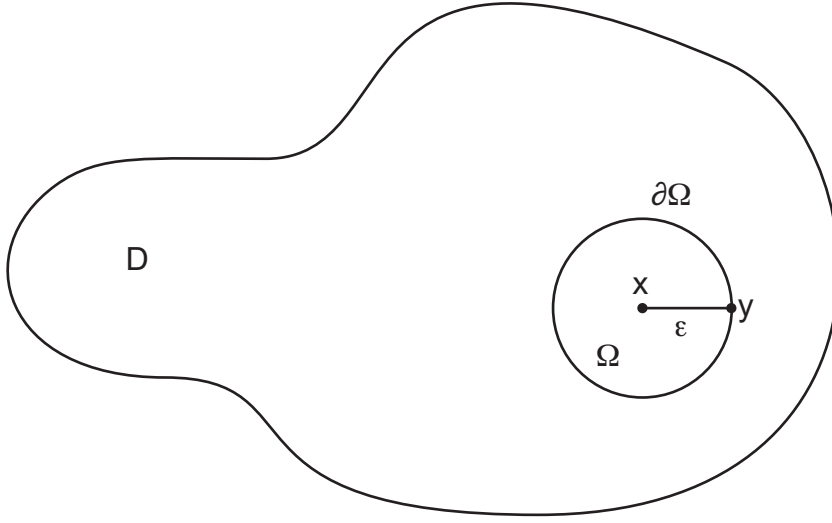
$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|y|=R} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y) = 0 \quad (8.22)$$

Eş.8.11 de Eş.8.22 yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

D herhangi bir bölge ve $u(x)$, D de Helmholtz denkleminin bir çözümü olsun. x , D nin bir iç noktası ve $\Omega = \{y : |x - y| < \varepsilon\}$, D yi içeren bir yuvar ise Teorem 8.1 in ispatından

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - \frac{\partial u}{\partial \nu} \Phi(x, y) \right) ds(y) \quad (8.23)$$

olduğunu görürüz.



Şekil 8.3 D ve Ω bölgeleri

Sonuç olarak $\Phi(x, y)$, $\vec{x}$ in bir analitik fonksiyonu olduğundan $u(x)$, Ω da analiktir. Burada $x \neq y$ dir. x keyfi bir iç nokta olduğundan aşağıdaki teoremi veririz.

Teorem 8.2

$x = (x_1, x_2)$ olmak üzere D bölgesinde Helmholtz denkleminin $u(x)$ çözümü x_1, x_2 bağımsız değişkenlerinin analitik fonksiyonudur.

İspat

$x \in D$ ve $\Omega \subset D$, x i içeren bir yuvar olsun. O zaman Eş.8.23 ten her $x \in \Omega$ için

$$u(x) = - \int_{\partial\Omega} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) - \Phi(x, y) \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \right] ds(y)$$

dir. $x \neq y$ için $\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|)$ analitik olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 8.3 (Teklik Teoremi)

$u(x)$,

$$\Delta_2 u(x) + k^2 u(x) = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (8.24)$$

$$u(x) = 0 \quad , \quad x \in \partial D \quad (8.25)$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 \quad , \quad x \in \partial D \quad (8.26)$$

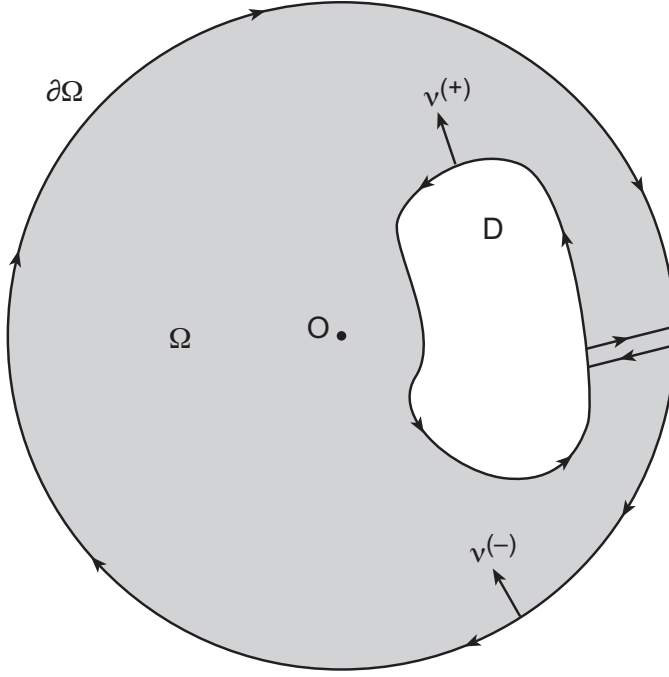
ve

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r}(x) - iku(x) \right) = 0 \quad (8.27)$$

sağlasın. O zaman $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için $u(x) \equiv 0$ dır.

İspat

Ω , orijin merkezli D yi içeren bir yuvar olsun.



Şekil 8.4 $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ için $\Omega \setminus \overline{D}$ bölgesi

O zaman ikinci Green özdeşliğinden, k dalga sayısı, $x \in \partial D$ için $u(x) = \overline{u(x)} = 0$ veya $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}(x) = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \overline{D}} \left[\underbrace{u(\Delta_2 + k^2)}_{=0} \overline{u} - \underbrace{\overline{u}(\Delta_2 + k^2)}_{=0} u \right] dy &= \int_{\Omega \setminus \overline{D}} (u \Delta_2 \overline{u} - \overline{u} \Delta_2 u) dy \\ &= \int_{\partial D} \left(\underbrace{u}_{=0} \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} - \underbrace{\overline{u}}_{=0} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds + \int_{\partial \Omega} \left(u \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} - \overline{u} \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds \end{aligned} \quad (8.28)$$

veya

$$\int_{\partial \Omega} \left(\overline{u} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \overline{u}}{\partial r} \right) ds = 0 \quad (8.29)$$

buluruz. Eş.8.24 Helmholtz denklemi kutupsal koordinatlarda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \Phi^2} + k^2 u = 0 \quad (8.30)$$

biçimindedir. Bu denklemin

$$u(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$$

şeklinde değişkenlerine ayrılabilir çözümü arandığında

$$\frac{d^2 R^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0 \quad (8.31)$$

$$\frac{d^2 \Theta^2}{d\theta^2} + n^2 \Theta = 0 \quad (8.32)$$

olduğu görülür. Burada n ayırma sabiti bir tamsayı olarak seçilir. Eş.8.31 ve Eş.8.32 denklemlerinin genel çözümü

$$R(r) = a_n H_n^{(1)}(kr) + b_n H_n^{(2)}(kr)$$

$$\Theta(\theta) = c_n \cos n\theta + d_n \sin n\theta = e^{in\theta}$$

dır. Burada a_n, b_n, c_n, d_n sabitlerdir. Sonuç olarak

$$u_n(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) = [a_n H_n^{(1)}(kr) + b_n H_n^{(2)}(kr)] e^{in\theta}$$

şeklindedir. Eş.8.24 ün bir çözümünü

$$u(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\theta} \quad (8.33)$$

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (8.34)$$

biçiminde ararız. Eş.8.33 te $a_n(r)$ ler

$$a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(r, \theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (8.34)$$

şeklindedir. Burada seriler ve r ye göre türevleri düzgün yakınsaktır. $a_n(r)$,

$$\frac{d^2 a_n(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da_n(r)}{dr} + \left(k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) a_n(r) = 0 \quad (8.35)$$

Bessel denkleminin bir çözümü olduğundan ve $u(x)$, Sommerfeld yayılma koşulunu sağladığından $b_n = 0$ olur. Dolayısıyla

$$a_n(r) = a_n H_n^{(1)}(kr) \quad (8.36)$$

olur. Eş.8.29 da Eş.8.33, Eş.8.34 ve Eş.8.36 yazılıp terim terim integrallenirse, $\overline{H_n^{(1)}(kr)} = H_n^{(2)}(kr)$ olduğundan ve $H_n^{(1)}(kr)$ ve $H_n^{(2)}(kr)$ nin Wronskian formülünden

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \left(\bar{u} \frac{\partial u}{\partial r} - u \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} \right) ds \quad ; \quad \bar{u}(r, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n(r)} e^{-in\theta} \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n(r)} e^{-in\theta} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n'(r) e^{in\theta} \right) - \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\theta} \right) \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n'(r)} e^{-in\theta} \right) \right] ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left| \begin{array}{cc} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n(r)} e^{-in\theta} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \overline{a_n'(r)} e^{-in\theta} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n'(r) e^{in\theta} \end{array} \right| ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left| \begin{array}{cc} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(2)}(kr) e^{-in\theta} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)}(kr) e^{in\theta} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(2)'}(kr) e^{-in\theta} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n H_n^{(1)'}(kr) e^{in\theta} \end{array} \right| ds \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_n^2 H_n^{(2)} H_n^{(1)'} - a_n^2 H_n^{(2)'} H_n^{(1)} \right) \right] r d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n^2 W(H_n^{(2)}, H_n^{(1)} r d\theta) ; W(H_v^{(1)}(z), H_v^{(2)}(z)) = -\frac{4i}{\pi z} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_n^2 \frac{4i}{\pi k r} r d\theta \\
0 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 \frac{4i}{\pi k} 2\pi
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = 0$ elde edilir. $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ için $u(x) \equiv 0$ ve Helmholtz

denkleminin çözümlerinin analitikliğinden $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ için $u(x) \equiv 0$ olduğunu özdeşlik teoreminden çıkartırız.

Sonuç

$$\Delta_2 u + k^2 u = 0 \quad , \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$$

$$u(x) = -u^i(x) \quad , \quad x \in \partial D$$

veya

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = -\frac{\partial u^i}{\partial \nu}(x) \quad , \quad x \in \partial D$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0$$

saçılma probleminin çözümü varsa tektir.

İspat

$u_1(x)$ ve $u_2(x)$ çözümleri varsa, $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ alalım. Teorem 8.3 ten $u(x) \equiv 0$ olduğundan $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ için $u_1(x) = u_2(x)$ bulunur.

KAYNAKLAR

1. Anar, İ.E., "Kısmi Diferansiyel Denklemler", **Palme**, Ankara, 187-386 (2005).
2. Mikhlin, S.G., "Mathematical Physics an Advanced Course", **North-Holland Publishing Company**, 151-181, 217-270, 357-387 (1970).
3. Colton, D., Kress, R., "Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory", **Springer-Verlag**, Berlin, 13-21, 211-214 (1992).
4. Colton, D., "Partial Differential Equations: An Introduction", **Random House**, New York, 181-220 (1988).
5. Colton, D., Kress, R., "Integral Equations Methods in Scattering Theory", **John Wiley**, New York, 46-58, 66-84 (1983).
6. John, F., "Partial Differential Equations, Ed.2", **Springer- Verlag**, New York, 94-125 (1975).
7. Kaplan, W., "Advanced Calculus, Ed. 4", **Addison Vesley**, New York, 317-378 (1991).
8. Sobolev, S. L., "Partial Differential Equations of Mathematical Physics" , **Pergamon Press** , Elmsford, 228-260 (1965).
9. Zachmanoglou, E.C., Dale, W., "Introduction to Partial Differential Equations with Applications" , **Dover Publications**, New York, 171-260 (1986).
10. Bitsadze, A.V., "Equations of Mathematical Physics", **Mir Publishers**, Moscow, 47-94 (1980).
11. Turan, S., "Saçılma ve Potansiyel Teori", Yüksek Lisans Tezi, **Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü**, Ankara, 50-90 (2010).

ÖZGEÇMİŞ**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, adı : LAFCI, Mehtap
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 16.02.1985, Hatay
Medeni hali : Bekar
Telefon : 0 (555) 266 82 72
e-mail : mehtaplafci2@hotmail.com

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	Gazi Üniversitesi / Matematik Bölümü	2008
Lise	Başkent Yabancı Dil Ağırlıklı Lisesi	2003