



**T.C.
AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

MATEMATİK ANABİLİM DALI

**SAGE İLE DİFERENSİYEL GEOMETRİ VE LİNEER CEBİR
ÖĞRETİMİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mohammed Abdulmaged ISMAEL

DANIŞMAN

Yrd. Doç. Dr. Pelin TEKİN

AKSARAY, 2018

AKSARAY ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ONAY BELGESİ

Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü'nün 172342626 numaralı Yüksek Lisans öğrencisi, "Mohammed Abdulmaged ISMAEL", ilgili yönetmeliklerin belirlediği gerekli tüm şartları yerine getirdikten sonra hazırladığı "SAGE İLE DİFERENSİYEL GEOMETRİ VE LİNEER CEBİR ÖĞRETİMİ" başlıklı tezini, aşağıda imzaları olan jüri önünde başarı ile sunmuştur.

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Pelin TEKİN


.....

Trakya Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Gülhan AYAR


.....

Karamanoğlu Mehmet Bey Üniversitesi

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Zeynep CAN


.....

Aksaray Üniversitesi

Teslim Tarihi: 29.12.2017

Savunma Tarihi: 25.01.2018

DOĞRULUK BEYANI

Yüksek lisans tezi olarak sunduğum bu çalışmayı, bilimsel etik, ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yol ve yardıma başvurmaksızın yazdığımı, yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ve bu eserleri her kullanışında alıntı yaparak yararlandığımı belirtir; bunu şerefimle doğrularım. Enstitü tarafından belli bir zamana bağlı olmaksızın, tezimle ilgili yaptığım bu beyana aykırı bir durumun saptanması durumunda, ortaya çıkacak tüm ahlaki ve hukuki sonuçlara katlanacağımı bildiririm.



Mohammed Abdulmaged ISMAEL

TEŞEKKÜR

Bana Türkiye’de eğitim alma fırsatı veren Aksaray Üniversitesi yetkililerine ve eğitim süresince yardımlarını esirgemeyen Fen Bilimleri Enstitüsü idareci ve çalışanlarına, Bu tezin çalışma ve hazırlık aşamalarında sürekli yardım ve desteğini gördüğüm danışmanım Yrd. Doç. Dr. Pelin TEKİN’e ve çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen aileme en derin şükranlarımı sunarım.

Mohammed Abdulmaged ISMAEL

İÇİNDEKİLER

Sayfa

DOĞRULUK BEYANI.....	i
TEŞEKKÜR	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ÖZET.....	iv
ABSTRACT	v
ŞEKİLLER DİZİNİ	vi
ÇİZELGELER DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1 Açık Kaynak Kodlu Yazılım: SAGE	3
2.2 Lineer Cebir İçin Temel Kavramlar	6
2.3 Eğrilerin Diferansiyel Geometrisi	15
2.3.1 Uzayda eğrilerinin analitik tanımı.....	15
2.3.2 Uzayda bir eğrinin teğet ve normal düzlemleri.....	16
2.3.3 Serret-Frenet 3-ayaklısı ve Serret-Frenet formülleri.....	18
2.3.4 Uzay eğrilerinin eğriliği ve burulması	21
3. SAGE İLE LİNEER CEBİR UYGULAMALARI	24
4. SAGE İLE DİFERENSİYEL GEOMETRİ UYGULAMALARI	33
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	43
KAYNAKLAR	45
ÖZGEÇMİŞ.....	46

ÖZET

SAGE İLE DİFERANSİYEL GEOMETRİ VE LİNEER CEBİR ÖĞRETİMİ

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. Bu bölümde bazı literatür bilgilerine yer verilmiştir. İkinci bölüm lineer cebir ve diferansiyel geometri ile ilgili temel tanım ve teoremlerin sunulduğu bölümdür. Üçüncü ve dördüncü bölümlerde sırasıyla lineer cebir ve diferansiyel geometri derslerinde karşımıza çıkabilecek bazı örneklerin Sage programı yardımı ile çözümleri sunulmuştur. Beşinci ve son bölüm ise sonuç ve öneriler bölümüdür, yapılan çalışma özetlenmiş ve çalışma hakkındaki fikirler sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Açık kaynak kodlu yazılım Sage, Sage ile lineer cebir öğretimi, Sage ile diferansiyel geometri öğretimi,

ABSTRACT

DIFFERENTIAL GEOMETRY AND LINEAR ALGEBRA TEACHING WITH SAGE

This thesis consists five chapters. The first chapter devoted to some literature knowledge. In the second chapter some fundamental definitions and theorems are given for linear algebra and differential geometry. In the third and fourth chapters, solutions of some linear algebra and differential geometry examples via Sage are given respectively. In the fifth and the final chapter some suggestions and conclusions are given.

Key Words: Open source software Sage, Linear algebra teaching with Sage, Differential Geometry teaching with Sage.

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 2.1: Sage ile yapılabilen bazı işlem örnekleri	3
Şekil 2.2: Sage'nin web arayüzü örneği 1	5
Şekil 2.3: Sage'nin web arayüzü örneği 2	5
Şekil 2.4: Yönlü doğru parçasının gösterimi	6
Şekil 2.5: Aynı doğrultuya sahip iki yönlü doğru parçası örneği.....	6
Şekil 2.6: Doğrudaş vektörlerin örneği.....	8
Şekil 2.7: Bir ters vektör örneği.....	8
Şekil 2.8: Bazı eş düzlemlı vektörlerin örneği.....	8
Şekil 2.9: Paralel kenar kuralının çizimi.....	9
Şekil 2.10: Üçgen kuralının çizimi.....	9
Şekil 2.11: E^3 de Kartezyen koordinatlar.....	11
Şekil 2.12: İki nokta arasındaki uzaklık.....	11
Şekil 2.13: İki vektör arasındaki açı.....	12
Şekil 2.14: Vektörel çarpımın grafiksel gösterimi.....	13
Şekil 2.15: Bir eğrinin teğeti.....	16
Şekil 2.16: Frenet 3-ayaklısı ($T = \tau, N = \nu, B = \beta$ ile gösterilmiştir)	18
Şekil 2.17: Ortalama Eğrilik ($\tau = T$)	22
Şekil 3.1: Bir sağ üçgen örneği.....	25
Şekil 3.2: $\overline{MM_1}$ ve $\overline{MM_2}$ vektörlerinin $\overline{MA}$ ve $\overline{MB}$ vektörleri cinsinden ifadesi	26
Şekil 3.3: Örnek 3.5 in geometrik ifadesi.....	27
Şekil 3.4: $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ vektörlerinin gösterimi.....	29
Şekil 3.5: Bir üçgenin yüksekliklerinin kesişimi.....	29
Şekil 3.6: Bir eşkenar dörtgenin köşegenlerinin kesişimi.....	30
Şekil 3.7: Örnek 3.9 un Sage ile çözümü.....	32
Şekil 4.1: Γ eğrisinin Frenet vektörleri.....	34
Şekil 4.2: $x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 4t$ eğrisi.....	40

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 2.1: Sage yazılımının desteklediği alanlar ve beraberinde gelen ilgili araçlar ve yazılımlar	4
---	---



1. GİRİŞ

Milattan önce 535-475 yılları arasında Efes'te yaşayan filozof Heraklitos “değişmeyen tek şey değişimin kendisidir” diyerek, hem değişimin önemine vurgu yapmış hem de değişimin hayatta önlenemeyecek bir gerçek olduğunu hatırlatmıştır. O zamanlardan günümüze kadar her olayda insanoğlu değişimin gerekliliğini acısı ve tatlısıyla deneyimlemiştir. İnsanoğlunun gözlemlere, tecrübeler, laboratuvar çalışmalarına dayalı olarak ürettiği bilgilerin sistematik bir şekilde aktarılması eylemi olan eğitim faaliyetleri, bahsi geçen değişimin günümüzde en güzel uygulamasıdır. Yaşamımızda bu değişime ayak uydurmak, daha kolay ve erişilebilir bilimsel çıktılar elde etmek üzere artık bilgisayarlar da eğitimin vazgeçilmez bir parçası haline almıştır.

Bilginin işlenmesi, üretilmesi, saklanması, kullanılması, paylaşılması gibi süreçlerin gerçekleştirilmesinde kullanılan tüm teknolojiler “Bilişim Teknolojisi” olarak adlandırılmaktadır. Bilindiği gibi söz konusu bu teknolojiler de bilgisayar teknolojisine dayanmaktadır. (Baki, 2002). Dolayısıyla matematik eğitiminde de eğitimin daha hızlı ve kolay uygulanmasını sağlamak üzere bu teknolojinin kullanıldığı birçok yazılım üretilmiştir. Bu yazılımların temel karakteristik yapısının; uygulaması kolay ve anlaşılır, istenilen ve hedeflenen sonuçlara hızlıca erişilebilir ve eğitimin etkin-verimli yapılabilmesine yönelik olduğu söylenebilir.

Matematik eğitiminde bilgisayarın ve buna dayalı teknolojinin kullanılması genel olarak “bilgisayar destekli matematik öğretimi” şeklinde anılmaktadır. Bu faaliyetlerde ücretli ve ücretsiz birçok yazılımın kullanıldığı bilinmektedir. Açık kaynak kodlu yazılımların kullanılması, ücretsiz olması nedeniyle lisans ve lisansüstü düzey eğitimlerde öğrencilerin doğal olarak tercih edeceği bir yöntemdir. Açık kaynak kodlu bir yazılım olan SAGE yazılımı da ücretsiz yazılımlar arasında önemli bir yer tutmaktadır. Bu yazılımın etkin olarak eğitimde kullanılması ürettiği sonuçları kadar maliyeti de düşürmesi nedeniyle ciddi avantajlar sağlamaktadır.

Bu nedenle SAGE yazılımının nasıl kullanıldığını bilmek ve açıklamak koşulunun yerine getirilmesi anılan avantajlara erişmenin bilimsel bir yöntemini oluşturmaktadır.

Bu tez çalışmasında öncelikle SAGE yazılımı kısaca tanıtılmış ardından lineer cebir ve diferensiyel geometri de kullanılan temel tanım ve teoremler ele alınmıştır. Bu bilgiler kullanılarak SAGE programı yardımıyla lineer cebir ve diferensiyel geometride sıkça kullanılan örneklere yer verilerek konunun bir bütün olarak ele alınması sağlanmıştır.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Açık Kaynak Kodlu Yazılım: SAGE

SAGE, (Software for Algebra and Geometry Experimentation) yazılımı Genel Kamu Lisansı (GPL) ile üretilmiş bir matematik yazılımıdır. SAGE ile sadece cebir, geometri, sayılar teorisi alanlarında çalışmalar yapmayı değil aynı zamanda, bu alanlarda öğretmeyi ve araştırmayı destekleyen, Maple, Magma, Matlab gibi ücretli yazılımlara alternatif bir açık kaynak kodlu yazılımdır.

Sage proje başlangıcı Ocak 2005 ve ilk sürümü 24 Şubat 2005'te piyasaya sürülmüştür. Lider geliştiricisi William Stein,, Washington Üniversitesi'nde sayılar teorisi alanında profesördür Bilgisayar bilimi bölümünden lisans derecesine sahiptir. Yazılım 2007 yılında özgür yazılımlar için uluslararası bir yarışma olan *Les Trophées Du Libre*'de bilimsel yazılım dalında birincilik almıştır (Yıldırım, 2009).

Sage, lineer cebirde; lineer denklem çözümleri, verilen ifadeyi sadeleştirme, analizde; köklü, üslü ifadeler, logaritmik ve trigonometrik fonksiyonlar, türev, integral hesaplamaları, diferansiyel denklem çözümleri, grafik çizimleri, istatistik ve olasılık gibi konularda kolayca kullanılabilen bir programdır (Bkz.Şekil 2.1) (URL-1).

```
def f(x):
    return x*sin(1/x)

evaluate

derivative(f(x), x).rational_simplify()

(sin(1/x)*x - cos(1/x))/x

max = -1
for i in [0.01,0.0125..1]:
    temp = abs(sin(1/i)-cos(1/i))
    if temp > max:
        max = temp
        mi = i

max; mi

1.41420607832605
0.4250000000000000

sqrt(2.)

1.41421356237310

1/0.11575000000000000

8.63930885529158
```

jsMath

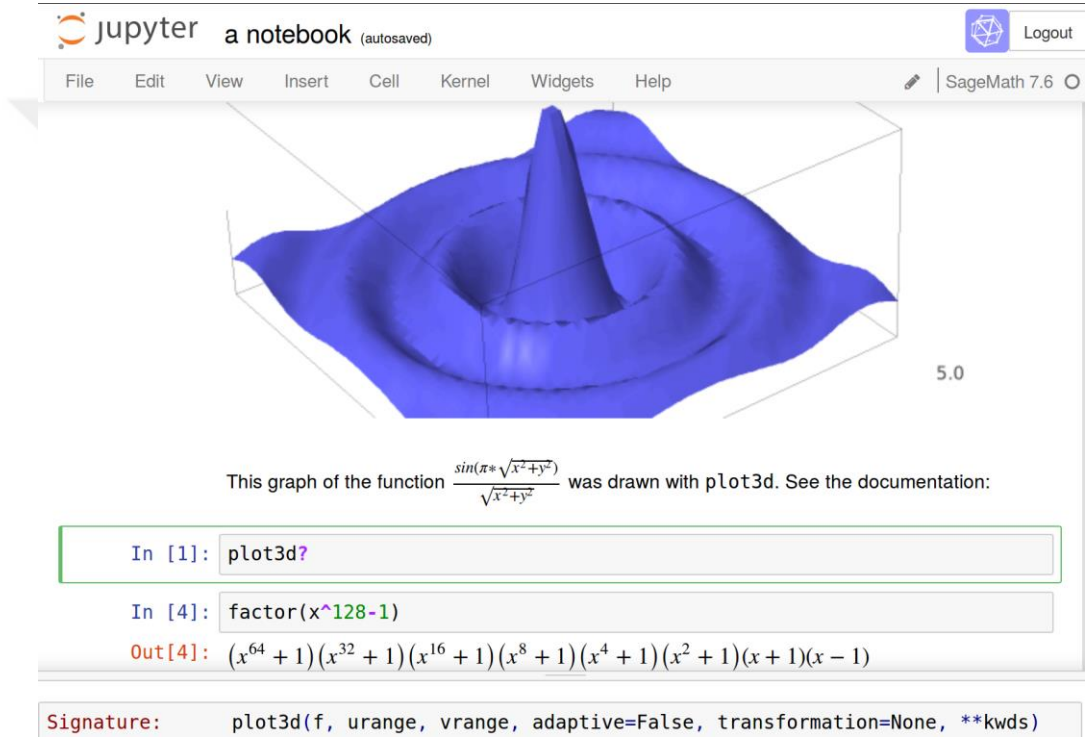
Şekil 2.1: Sage ile yapılabilen bazı işlem örnekleri.

Sage, kolay kullanım amacıyla hem web tabanlı hem de gelişmiş komut satırı arayüzü sunmaktadır. Web arayüzü sayesinde yapılan çalışmaların kaydedilmesi, paylaşılması, komutlar hakkında bilgi alınması gerçekleştirilebilmektedir. Aynı zamanda bu web arayüzü sayesinde grafik çizimleri, grafik arayüze sahip bir masaüstü uygulamayı kullanır gibi gerçekleştirilebilmektedir. Sage'nin bünyesinde barındırdığı programlama dili olan Jupyter, Python olarak da bilinir, güçlü ve modern nesne yönelimli, yorumlanabilen, modüler ve etkileşimli bir programlama dilidir. Python ile yeni bir veri tipi tanımlamak kolaydır. Sage'nin, Microsoft Windows, Linux ve Apple MacOS işletim sistemleri için kaynak koddan veya ikili sürümlerden kurulumları mevcuttur. Sage kurulumuyla beraberinde gelen matematik yazılımları herhangi bir işlem yapılmadan kolayca yüklenebilmektedir. (Bkz. Çizelge 2.1) (Altuntaş,2014).

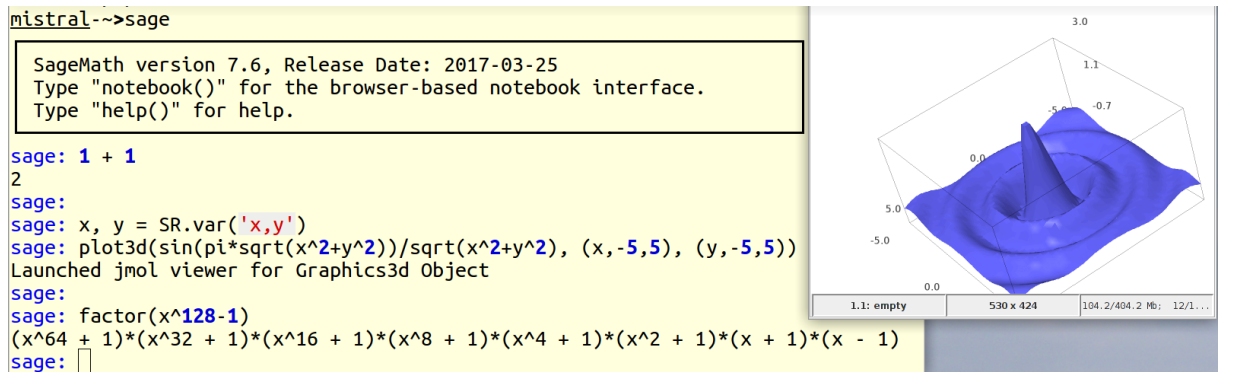
Çizelge 2.1: Sage yazılımının desteklediği alanlar ve beraberinde gelen ilgili araçlar ve yazılımlar

Sage'de Desteklenen Alanlar	Beraberinde Gelen İlgili Araçlar ve Yazılımlar
Aritmetik	GMP, MPFR, Givaro, MPFI
Değişmeli Cebir	PoliBori, SINGULAR (libSINGULAR)
Lineer Cebir	LinBox, M4RI, IML, fpLLL
Kriptosistemler	GnuTLS, PyCrypto
Tamsayı Çarpanlarına Ayırma	FlintQS, ECM
Grup Teorisi	GAP
Kombinasyon Hesabı	Symmetrca, sagecombinat
Grafik Teorisi	NetworkX
Sayılar Teorisi	PARI, NTL, Flint, mwrank, eclib
Sayısal Hesaplama	GSL, Numpy, Scipy, ATLAS
Kalkülüs (hesap), Sembolik Hesaplama	Maxima, Sympy, Pynac
İstatistik	R, Scipy.stats
Kullanıcı Arayüzü	Sage Notebook, jsmath, Moinwiki, Ipython
Grafikler	Matplotlib, Tachyon, libgd, Jmol
Ağ oluşturma	Twisted
Veri Tabanları	ZODB, Sqlite, SQLAlchemy, Python pickle
Programlama Dili	Python, Cython (derlenmiş)

SAGE nin güçlü komut satırının yanısıra, grafik kullanıcı arayüzü SAGE Notebook ile web tarayıcısı üzerinden kullanılabilir. Her iki arayüz üzerinde de komutlar hakkında kolaylıkla yardım alınabilmekte ve kodlara ulaşılabilir. Çevrim içi kullanımı <http://www.sagemath.org/> internet sitesinden yapılabilir. Daha ileriye gitmek için Cocalc (<http://cocalc.com>) resmi olarak Sage Math Cloud olarak da bilinir daha ileri hesaplamalar için kullanılabilir. Komut satırından notebook komutu ile başlatılır. SAGE'nin web arayüzü ile bünyesinde barındırdığı programları yüklemeyen web üzerinden çevrimiçi kullanmak mümkün hale gelmektedir (Bkz. Şekil 2.2, Şekil 2.1).



Şekil 2.2: Sage'nin web arayüzü örneği 1.



Şekil 2.3: Sage'nin web arayüzü örneği 2.

Teorem 2.2.5 Yönlü doğru parçalarının kümesi üzerinde tanımlı denklik, bir denklik bağıntısıdır (Anastassiou ve Iatan, 2014).

İspat: Yönlü doğru parçaları üzerindeki denklik kavramı bir denklik bağıntısıdır. Yani; Bu bağıntı $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}$ olduğundan yansıyandır, $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ ise $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}$ olduğundan simetriktir ve $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}$ ve $\overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF}$ iken $\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}$ olduğundan geçişlidir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Vektörleri aşağıdaki şekilde sınıflandırabiliriz:

- 1.Serbest vektörler, uzayda herhangi bir noktada keyfi başlangıç noktasına sahiptir, ancak bunların uzaydaki yönü ve doğrultusu ve uzunluğu belirlidir;
- 2.Bağlı vektörler, başlangıç noktası belirlidir;
- 3.Kayar vektörler, aynı doğrultman boyunca hareket ederler ve bunların başlangıç noktası doğru üzerinde herhangi bir yerde olabilir.

Tanım 2.2.6 $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçası ile karakterize edilmiş ve $\overrightarrow{AB}$ ile denk olan yönlü doğru parçalarının kümesini

$$\overline{AB} = \{ \overrightarrow{CD} | \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB} \} \quad (2.1)$$

serbest vektör veya geometrik vektör olarak adlandırırız. Bu kümenin herhangi bir yönlendirilmiş doğru parçasına serbest vektör $\overline{AB}$ nin temsilcisi denir. Buradan $\overrightarrow{CD} \in \overline{AB}$ dir ve eğer bir serbest vektörün boyu 1 ise birim vektör olarak adlandırılır ve genellikle $\bar{e}$ ile gösterilir, 0 ise sıfır vektörü olarak adlandırılır ve $\bar{0}$ ile gösterilir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Tanım 2.2.7 Sıfırdan farklı bir serbest vektörün uzunluğu, yönü ve doğrultusu temsilcisi olan yönlü doğru parçasının uzunluğu yönü ve doğrultusu anlamına gelir.

E^3 Öklid uzayında geometrik vektörlerin kümesini

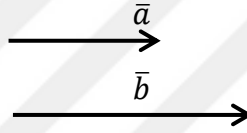
$$V^3 = \{ \overline{AB} | A, B \in E^3 \} \quad (2.2)$$

ile gösterelim. Diğer bir ifadeyle V^3 , $\overrightarrow{AB}$ yönlü doğru parçasının denklik sınıflarının kümesi demektir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

$\bar{a}$ veya $\overline{AB}$ serbest vektörlerinin uzunluğunu göstermek için $\|\bar{a}\|, \|\overline{AB}\|$ veya $d(A, B)$ gösterimleri kullanılır.

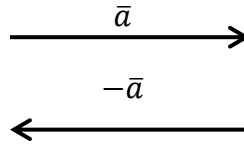
Tanım 2.2.8 İki serbest vektörün temsilcileri denk ise bu vektörler eşittir ve $\bar{a} = \bar{b}$ şeklinde ifade edilir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Tanım 2.2.9 Sıfırdan farklı iki serbest vektör $\bar{a}$ ve $\bar{b}$ aynı yöne sahipse (eş doğrusal) doğrudadır (Bkz. Şekil 2.6) (Anastassiou ve Iatan, 2014).



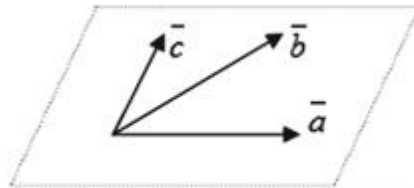
Şekil 2.6: Doğrudaki vektörlerin örneği.

Tanım 2.2.10 İki doğrudaki vektörün uzunlukları aynı fakat yönleri ters ise bu vektörler ters vektörler olarak adlandırılır. Bir serbest vektör $\bar{a}$ ise tersi $-\bar{a}$ dır (Bkz. Şekil 2.7) (Anastassiou ve Iatan, 2014).



Şekil 2.7: Bir ters vektör örneği.

Tanım 2.2.11 Eğer üç serbest vektör $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ nin doğrultmanları aynı düzlemde yatıyorsa bu vektörlere eş düzlemli vektörler denir (Bkz. Şekil 2.8) (Anastassiou ve Iatan, 2014).



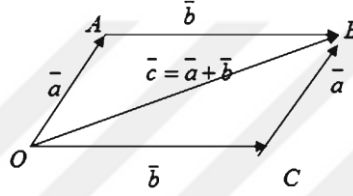
Şekil 2.8: Bazı eş düzlemli vektörlerin örneği.

Tanım 2.2.12 V^3 üzerinde

$$\begin{aligned} +: V^3 \times V^3 &\rightarrow V^3 \\ (\bar{a}, \bar{b}) &\rightarrow \bar{a} + \bar{b} \end{aligned}$$

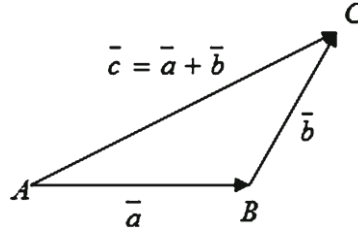
şeklinde tanımlanan iç işleme serbest vektörlerin toplamı denir.

Tanım 2.2.13 $\bar{a}, \bar{b} \in V^3$ aynı başlangıç noktasına sahip iki serbest vektör olsun ve $A \in E^3$ herhangi bir sabit nokta olsun, eğer $\overrightarrow{OA} \in \bar{a}$ ve $\overrightarrow{OC} \in \bar{b}$ ise ve $\overrightarrow{OB}$ serbest vektörünü de $\bar{c}$ ile gösterirsek $\bar{c}$, $\bar{a}$ ve $\bar{b}$ nin toplamıdır. $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ veya $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}$ şeklinde gösterilir (Bkz. Şekil 2.9) (Anastassiou ve Iatan, 2014).



Şekil 2.9: Paralel kenar kuralının çizimi.

Tanım 2.2.14 $\bar{a}, \bar{b} \in V^3$ aynı başlangıç noktasına sahip iki serbest vektör olsun ve $A \in E^3$ herhangi bir sabit nokta olsun, eğer $\overrightarrow{AB} \in \bar{a}$ ve $\overrightarrow{BC} \in \bar{b}$ ise ve $\overrightarrow{AC} \in \bar{c}$, $\bar{c}$ vektörü $\bar{a}$ ve $\bar{b}$ nin toplamı olarak adlandırılır ve $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ veya $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ şeklinde gösterilir (Bkz. Şekil 2.10) (Anastassiou ve Iatan, 2014).



Şekil 2.10: Üçgen kuralının çizimi.

Teorem 2.2.15 Serbest vektörlerin toplamı işlemi $(V^3, +)$ kümesi üzerinde bir Abelyen gruptur (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Tanım 2.2.16 $\mathbb{R}$ reel sayıların kümesi olmak üzere

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{R} \times V^3 &\rightarrow V^3 \\ (t, \bar{a}) &\rightarrow t\bar{a} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan " $\cdot$ " dış işlemine bir vektörün bir skalar ile çarpımı işlemi denir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Eğer $t=0$ veya $\bar{a}=\bar{0}$ ise $t\bar{a}=\bar{0}$ dir. Eğer $t > 0$ ise $t\bar{a}$, $\bar{a}$ ile aynı yönde, $t < 0$ ise $\bar{a}$ ile zıt yöndedir. Ayrıca $\|t\bar{a}\|=|t| \cdot \|\bar{a}\|$ dir.

Teorem 2.2.17 Serbest vektörlerin skalar ile çarpımı aşağıdaki özelliklere sahiptir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

1. Bir skaler ile çarpımın vektör toplamı üzerinde dağılma özelliği:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall \bar{a}, \bar{b} \in V^3 \text{ için } t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b} \text{ dir.} \quad (2.3)$$

2. Skaler toplamının bir vektörün skalarle çarpımı üzerinde dağılma özelliği:

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in V^3 \text{ için } (s + t)\bar{a} = s\bar{a} + t\bar{a} \text{ dir.} \quad (2.4)$$

3. $\forall s, t \in \mathbb{R}, \forall \bar{a} \in V^3 \text{ için } s(t\bar{a}) = (st)\bar{a}$ dir.

4. $\forall \bar{a} \in V^3$ için 1. $\bar{a} = \bar{a}$ dir.

Önerme 2.2.18 Aynı yönlü bir vektörün ayrışımı $\bar{a}, \bar{b} \in V^3 \setminus \{0\}$ olsun. $\bar{A}$ ve $\bar{b}$ vektörleri doğrudadır ancak ve ancak $\bar{b} = t\bar{a}$ olacak şekilde bir tek $t \in \mathbb{R}$ bulunabilirse (Anastassiou ve Iatan, 2014).

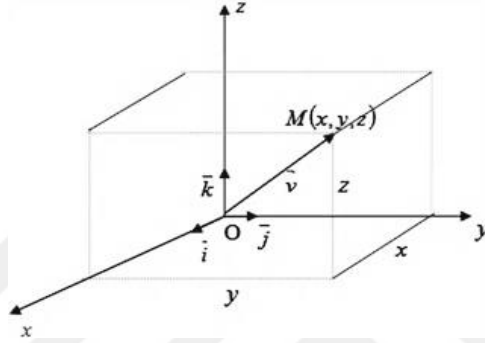
Teorem 2.2.19 $\bar{a}, \bar{b} \in V^3 \setminus \{0\}$ olsun. $\bar{A}$ ve $\bar{b}$ vektörleri doğrudadır ancak ve ancak $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfıra eşit olmayan yani $(\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ bulunabiliyorsa (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Önerme 2.2.20 (Doğrudas olmayan iki vektörün ayışımı) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V^3 \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ eş düzlemli iseler $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$ tek olarak bellidir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Teorem 2.2.21 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V^3 \setminus \{0\}$ olsun. $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ vektörleri eş düzlemlidir, ancak ve ancak $\alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c} = 0$ olacak şekilde hepsi birden sıfır olmayan yani $(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0)$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ bulunabiliyorsa (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Önerme 2.2.22 (Eş düzlemlı olmayan üç vektörün ayrışımı) $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in V^3 \setminus \{0\}$ olsun. Eğer $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ eş düzlemlı değil ise $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ için $\bar{d} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b} + \gamma\bar{c}$ dir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Varsayalım ki O, E^3 de başlangıç noktası olsun. $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ da Ox, Oy, Oz koordinat eksenlerinde eş düzlemlı olmayan üç birim vektör olsun. Bu vektörler koordinat eksenleri ile aynı doğrultuda vektörlerdir ve bunlara E^3 ün Kartezyen koordinatları denir (Bkz. şekil 2.11) (Anastassiou ve Iatan, 2014).

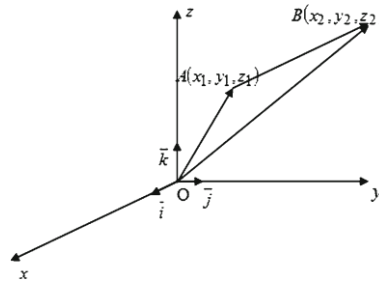


şekil 2.11: E^3 de Kartezyen koordinatlar.

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ eş düzlemlı olmayan vektörleri ve $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $\bar{d} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ şeklindeki $\bar{d} \in V^3$ gösterimine $\bar{d}$ vektörünün analitik gösterimi denir. (a, b, c) sayıları da $\bar{d}$ nin $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ koordinat sistemine göre Öklid koordinatları adını alır.

Tanım 2.2.23 $M \in E^3$ sabit bir nokta olsun, $\overline{OM}$ vektörü de M noktasının yer vektörü olarak adlandırılır. Yer vektörü $\overline{OM}$ nin koordinatları $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ ile gösterilir ve (x, y, z) olarak yazılır (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Tanım 2.2.24 $A(x_1, y_1, z_1)$ ve $B(x_2, y_2, z_2)$ E^3 de verilen iki nokta olsun



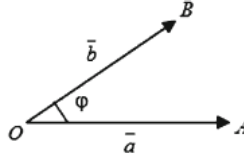
şekil 2.12: İki nokta arasındaki uzaklık.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k} \quad (2.5)$$

İki vektör arasındaki uzaklık $d(A, B)$ ile gösterilir ve şu formül ile hesaplanır (Bkz. Şekil 2.12):

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \quad (2.6)$$

Tanım 2.2.25 $\vec{a}, \vec{b} \in V^3 \setminus \{0\}, O \in E_3$ ve $\overrightarrow{OA} \in \vec{a}, \overrightarrow{OB} \in \vec{b}$ olsun, $\varphi \in [0, \pi]$, reel sayısına $\overrightarrow{OA}$ ve $\overrightarrow{OB}$ yönlü doğru parçaları arasındaki açı denir (Bkz. Şekil 2.13) (Anastassiou ve İatan, 2014).



Şekil 2.13: İki vektör arasındaki açı.

Tanım 2.2.26 $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin skaler (nokta) çarpımı

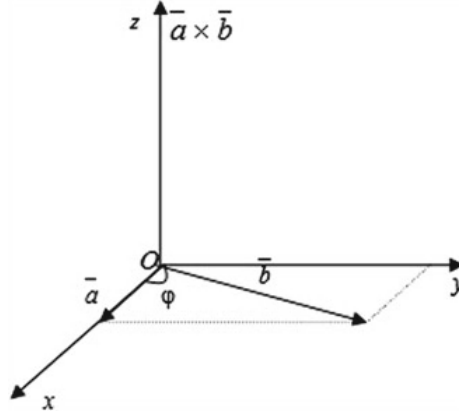
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{cases} \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi, & \vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, & \vec{a} = \vec{0}, \vec{b} = \vec{0}. \end{cases} \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır (Anastassiou ve İatan, 2014).

Tanım 2.2.27 $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin vektörel (dış) çarpımı $\vec{a} \times \vec{b}$ ile gösterilir. Bu vektörün uzunluğu

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \begin{cases} \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi, & \vec{a} \text{ ve } \vec{b} \text{ doğrudan doğruya değilse} \\ 0 & \vec{a} \text{ ve } \vec{b} \text{ doğrudan doğruysa} \end{cases} \quad (2.8)$$

Şeklindedir. $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ nin içinde bulundukları düzleme dik olan bir vektördür (Bkz. Şekil 2.14) (Anastassiou ve İatan, 2014).



Şekil 2.14: Vektörel çarpımın grafiksel gösterimi.

Tanım 2.2.28 $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in V^3 \setminus \{\bar{0}\}$ de üç serbest vektör olsunlar. Bu serbest vektörlerin karma çarpımı $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$ şeklinde bir reel sayıdır, bir paralel yüzün hacmini de bu çarpım yardımıyla elde ederiz (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Vektör uzayı kavramı lineer cebirin önemli kavramlarından bir tanesidir. Vektör uzayının en iyi örneği ise geometrik vektörlerdir (serbest vektörler). Matematikte, fizikte ve daha birçok teknolojik alanda önemli bir rol oynarlar.

Tanım 2.2.29 Şimdi K bir cisim ve V bir vektör kümesi olmak üzere, aşağıdaki gibi toplama ve çarpma işlemleri tanımlayalım. Bu işlemler için aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa V ye K cismi üzerinde bir vektör uzayı denir (Hacısalıhoğlu, 1996).

$$+ : \begin{matrix} V \times V & \rightarrow V \\ () & \rightarrow \bar{a} + \bar{b} \end{matrix} \quad \text{ve} \quad \bullet : \begin{matrix} K \times V & \rightarrow V \\ (r, \bar{a}) & \rightarrow r\bar{a} \end{matrix}$$

1. Toplama işlemine göre V bir Abel gruptur (değişmeli grup).

2. “ $\bullet$ ”, ile gösterilen dış işlem (skalerle çarpma işlemi) için

$$(a) \forall \alpha, \beta \in K \text{ ve } \forall \bar{a} \in V \text{ için} \quad (\alpha + \beta) \bar{a} = \alpha \bar{a} + \beta \bar{a}$$

$$(b) \forall \alpha \in K \quad \forall \bar{a}, \bar{b} \in V \text{ için} \quad \alpha (\bar{a} + \bar{b}) = \alpha \bar{a} + \alpha \bar{b}$$

$$(c) \forall \alpha, \beta \in K \text{ ve } \forall \bar{a} \in V \text{ için} \quad \alpha (\beta \bar{a}) = (\alpha \beta) \bar{a}$$

$$(d) \forall \bar{a} \in V \text{ için} \quad 1. \bar{a} = \bar{a}$$

Teorem 2.2.30 Eğer V bir reel vektör uzay ise, aşağıdaki ifadeler sağlanır.

$$(i) \quad \forall \bar{a} \in V \text{ için } 0. \bar{a} = 0$$

$$(ii) \quad \forall \alpha \in R \text{ için } \alpha . 0 = 0$$

$$(iii) \quad \forall \bar{a} \in V \text{ için } (-1). \bar{a} = -\bar{a}$$

$$(iv) \quad \forall \alpha \in K \text{ ve } \forall \bar{a} \in V \text{ için } \alpha. \bar{a} = 0 \text{ ise, ya } \alpha = 0 \text{ ya da } \bar{a} = 0 \text{ dır}$$

(Hacısalihoglu, 1996).

Tanım 2.2.31 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V deki vektörlerin kümesi $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ olmak üzere,

$$\alpha_1 \bar{x}_1 + \dots + \alpha_m \bar{x}_m = \bar{0} \quad (2.9)$$

bağıntısında $\forall \alpha_i \in K, i = 1, \dots, m$ için $\exists \alpha_i \neq 0$ oluyorsa $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ vektör kümesi lineer bağımlı, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ oluyorsa $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ vektör kümesi lineer bağımsızdır denir (Hacısalihoglu, 1996).

Tanım 2.2.32 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $S = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ kümesi ise V deki vektörlerin bir kümesi olsun. $\bar{x}_i \in S$ ve $\alpha_i \in K, i = 1, \dots, m$ için

$$v = \sum_{i=1}^m \alpha_i \bar{x}_i \quad (2.10)$$

bağıntısına v vektörünün S kümesindeki vektörler cinsinden lineer bileşimi denir (Hacısalihoglu, 1996).

Tanım 2.2.33 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $S = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m\}$ kümesi ise V deki sonlu vektörlerin bir kümesi olsun. Eğer V nin vektörleri S nin elemanlarının lineer bileşimi şeklinde yazılabiliyor ise S kümesi V yi geriyor denir (Hacısalihoglu, 1996).

Tanım 2.2.34 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. V nin sonlu vektörlerinin sistemi B , aşağıdaki şartları sağlıyorsa V nin bir bazı (tabanı) olarak adlandırılır.

(a) B kümesi lineer bağımsızdır,

(b) B, V kümesini gerer.

Tanım 2.2.35 n -boyutlu K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. V 'nin boş olmayan altkümesi W , aşağıdaki şartları sağlıyorsa W ye V nin bir alt vektör uzayı veya alt uzayı denir (Hacısalihoglu, 1996).

$$(1) \forall \bar{x}, \bar{y} \in W \text{ için } \bar{x} + \bar{y} \in W$$

$$(2) \forall \alpha \in K, \forall \bar{x} \in W \text{ için } \alpha \bar{x} \in W$$

Önerme 2.2.36 n -boyutlu K cismi üzerinde bir vektör uzayı V olsun. V nin boş olmayan altkümesi W , aşağıdaki şartları sağlıyorsa W ye V nin bir alt uzayı denir ancak ve ancak (Hacısalıhoğlu, 1996).

$$\alpha \bar{x} + \beta \bar{y} \in W, \quad \forall \alpha, \beta \in K, \forall \bar{x}, \bar{y} \in W. \quad (2.11)$$

sağlanır.

Önerme 2.2.37 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve W_1 ve W_2 , V nin iki alt uzayı olsun. Bu durumda $W_1 \cap W_2$ de V 'nin bir alt uzayıdır (Hacısalıhoğlu, 1996).

Tanım 2.2.38 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve V nin iki alt uzayı olsun. W_1 ve W_2 'nin toplamı aşağıdaki gibi tanımlanır

$$W_1 + W_2 = \{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 \mid \bar{x}_1 \in W_1 \text{ ve } \bar{x}_2 \in W_2\}. \quad (2.12)$$

Önerme 2.2.39 V, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun ve W_1 ve W_2 , V nin iki alt uzayı olsun. Bu durumda $W_1 + W_2$ de V nin bir alt uzayıdır (Hacısalıhoğlu, 1996).

2.3 Eğrilerin Diferansiyel Geometrisi

2.3.1 Uzayda eğrilerinin analitik tanımı

Tanım 2.3.1.1 Bir eğrinin regüler yayı, üç boyutlu reel Öklid uzayında $M(x, y, z)$ noktalarının kümesi Γ olarak tanımlanır ve x, y, z koordinatları ile aşağıdaki eşitlikler verilir (Anastassiou ve İatan, 2014).

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}, \forall (x, y, z) \in D \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ (implicit gösterimi)} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} z = f(x, y) = 0 \\ z = g(x, y) = 0 \end{cases}, \forall (x, y) \in D \subseteq \mathbb{R}^3 \text{ (explicit gösterimi)} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} x = f_1(t) = 0 \\ y = f_2(t) = 0 \\ z = f_3(t) = 0 \end{cases}, \forall t \in (a, b) \text{ (parametrik gösterimi)} \quad (2.15)$$

Burada $F, G, f, g, f_1, f_2, f_3$ fonksiyonları aşağıdaki regülerlik koşullarını sağlarlar:

- (a) Reel ve sürekli fonksiyonlardır,
- (b) Birinci mertebeden türevleri vardır, hepsi birden sıfır değildir.
- (c) Fonksiyonların determinantlarından en az biri sıfırdan farklıdır.

$$\frac{D(F, G)}{D(y, z)}, \frac{D(F, G)}{D(z, x)}, \frac{D(F, G)}{D(x, y)}$$

Tanım 2.3.1.2 Regüler eğri, regüler eğri yaylarının birleşimidir.

Tanım 2.3.1.3 Γ , $M(x, y, z)$ noktasında parametrik denklemi ile verilmiş bir eğri olsun.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), \quad (\forall) (t) \in (a, b) \\ z = z(t) \end{cases} \quad (2.16)$$

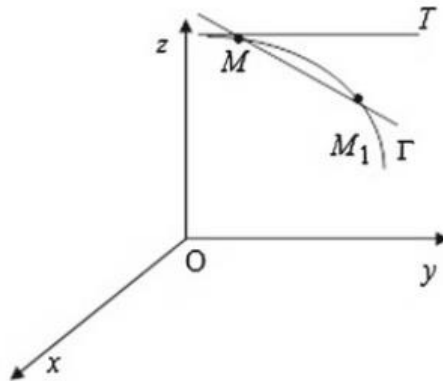
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ vektörlerinin kartezyen koordinatlarını göz önüne alırsak ve $\bar{a}$ de M noktasının yer vektörü ise

$$\bar{a} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}, \quad \forall t \in (a, b) \quad (2.17)$$

eşitliği Γ eğrisinin vektörel denklemidir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

2.3.2 Uzayda bir eğrinin teğet ve normal düzlemleri

Tanım 2.3.2.1 Bir regüler eğri Γ ve $M, M_1 \in \Gamma$ olsun. M ve M_1 doğrusu limit pozisyonunda M_1, M ye yaklaşırken oluşan doğruya Γ nın teğeti denir (Bkz. Şekil 2.15) (Anastassiou ve Iatan, 2014).



Şekil 2.15: Bir eğrinin teğeti.

$M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasında eğrinin teğetinin denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

(a) Eğri parametrik denklemi ile verildiğinde:

$$T: \frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \quad (2.18)$$

(b) Eğri (2.13) denklemindeki gibi verildiğinde:

$$T: \frac{\frac{x - x_0}{D(F, G)}}{\frac{D(F, G)}{D(y_0, z_0)}} = \frac{\frac{y - y_0}{D(F, G)}}{\frac{D(F, G)}{D(z_0, x_0)}} = \frac{\frac{z - z_0}{D(F, G)}}{\frac{D(F, G)}{D(x_0, y_0)}} \quad (2.19)$$

(c) Eğri (2.14) denklemindeki gibi verildiğinde:

$$T: \frac{\frac{x - x_0}{g'_{y_0} - f'_{y_0}}}{\frac{y - y_0}{f'_{x_0} - g'_{x_0}}} = \frac{\frac{z - z_0}{f'_{x_0}g'_{y_0} - f'_{y_0}g'_{x_0}}}{\frac{y - y_0}{f'_{x_0} - g'_{x_0}}} \quad (2.20)$$

Tanım 2.3.2.2 Bir regüler eğri Γ ve $M \in \Gamma$ olsun. Γ eğrisinin M noktasındaki normal düzlemi, eğrinin teğetine dik olan düzlemdir ve π_N ile gösterilir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

$M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasında normal düzlem π_N in denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilir:

(a) Eğri parametrik denklemi ile verildiğinde:

$$\pi_N: x'(t_0)(x - x(t_0)) + y'(t_0)(y - y(t_0)) + z'(t_0)(z - z(t_0)) = 0 \quad (2.21)$$

(b) Eğri (2.13) denklemindeki gibi verildiğinde:

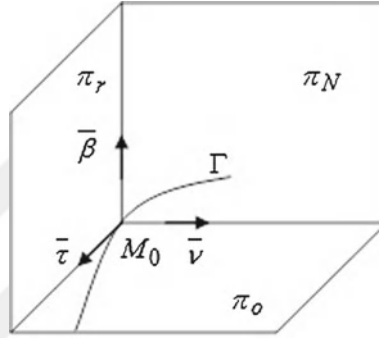
$$\pi_N: \frac{D(F, G)}{D(y_0, z_0)}(x - x(t_0)) + \frac{D(F, G)}{D(z_0, x_0)}(y - y(t_0)) + \frac{D(F, G)}{D(x_0, y_0)}(z - z(t_0)) = 0 \quad (2.22)$$

(c) Eğri (2.14) denklemindeki gibi verildiğinde:

$$\pi_N: (g'_{y_0} - f'_{y_0})(x - x(t_0)) + (f'_{x_0} - g'_{x_0})(y - y(t_0)) + (f'_{x_0}g'_{y_0} - f'_{y_0}g'_{x_0})(z - z(t_0)) = 0 \quad (2.23)$$

2.3.3 Serret-Frenet 3-ayaklısı ve Serret-Frenet formülleri

Tanım 2.3.3.1 Bir regüler eğri Γ ve $M_0 \in \Gamma$ noktasındaki Frenet vektörleri T, N, B olsun (Bkz.Şekil 2.16) (Anastassiou ve Iatan, 2014).



Şekil 2.16: Frenet 3-ayaklısı ($T = \bar{T}, N = \bar{N}, B = \bar{B}$ ile gösterilmiştir).

T, N, B vektörlerinin çiftleri aşağıdaki düzlemleri belirlerler:

- N ve B tarafından gerilen düzleme normal düzlem π_N ;
- T ve N tarafından gerilen düzleme oskütör (yapışan) düzlem π_O ;
- T ve B tarafından gerilen düzleme rektifiyan (tamamlayan) düzlem π_T denir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Bir $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasındaki normal düzlemi (2.21), (2.22) veya (2.23) ile ifade edilebilir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Bir $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasındaki oskütör düzlemin denklemleri aşağıdaki şekilde verilebilirler:

(a) Eğri parametrik denklemi ile verildiğinde:

$$\pi_0: \begin{vmatrix} x - x(t_0) & y - y(t_0) & z - z(t_0) \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

(b) Eğri (2.13) denklemindeki gibi verildiğinde:

$$\pi_0: \begin{vmatrix} \frac{x - x_0}{D(F, G)} & \frac{y - y_0}{D(F, G)} & \frac{z - z_0}{D(F, G)} \\ \frac{D(y_0, z_0)}{D^2(F, G)} & \frac{D(z_0, x_0)}{D^2(F, G)} & \frac{D(x_0, y_0)}{D^2(F, G)} \\ \frac{D^2(y_0, z_0)}{D^2(y_0, z_0)} & \frac{D^2(z_0, x_0)}{D^2(z_0, x_0)} & \frac{D^2(x_0, y_0)}{D^2(x_0, y_0)} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.25)$$

(c) Eğri (2.14) denklemindeki gibi verildiğinde:

$$\pi_0: \begin{vmatrix} \frac{x - x_0}{g'_{y_0} - f'_{y_0}} & \frac{y - y_0}{f'_{x_0} - g'_{x_0}} & \frac{z - z_0}{f'_{x_0}g'_{y_0} - f'_{y_0}g'_{x_0}} \\ \frac{g''_{y_0} - f''_{y_0}}{f''_{x_0} - g''_{x_0}} & \frac{f''_{x_0} - g''_{x_0}}{f''_{x_0}g''_{y_0} - f''_{y_0}g''_{x_0}} & \end{vmatrix} = 0 \quad (2.26)$$

Eğer

$$N = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k} \quad (2.27)$$

ise $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasındaki rektifiyan düzlemin denklemi

$$\pi_r: a_1(x - x(t_0)) + a_2(y - y(t_0)) + a_3(z - z(t_0)) = 0 \quad (2.28)$$

Bir $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasındaki Frenet 3-ayaklısının denklemleri aşağıdaki gibidir:

1. Eğrinin Bir $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasındaki teğet vektörünün denklemlerini yukarıda (2.18), (2.19) ve (2.20) denklemleri ile ifade etmiştik.

2. Eğrinin Bir $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasındaki binormali aşağıdaki denklem ile verilir.

$$B: \frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y'(t_0) & z'(t_0) \\ y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z'(t_0) & x'(t_0) \\ z''(t_0) & x''(t_0) \end{vmatrix}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x'(t_0) & y'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) \end{vmatrix}}$$

3. Eğrinin Bir $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasındaki asli normali aşağıdaki denklem ile verilir.

$$N: \frac{x - x(t_0)}{a_1} = \frac{y - y(t_0)}{a_2} = \frac{z - z(t_0)}{a_3} \quad (2.29)$$

Rektifiyan düzlem $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasındaki teğetin ve binormalin gerdiği düzlem olduğundan

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ t_1 & t_2 & t_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (2.30)$$

dir. Burada $M(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ noktasında teğet vektör, $T = (t_1, t_2, t_3)$ ve binormal vektör $B = (b_1, b_2, b_3)$ dir.

Tanım 2.3.3.2 Γ eğrisi için $s = s(t)$ fonksiyonunun diferensiyeline Γ eğrisinin yay elementi denir. Yay elementi eğrinin ilgili yayının uzunluğunu verir. Eğriyi parametrik olarak ifade edersek, yay elementi

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} \quad (2.31)$$

dir.

Γ eğrisinin $\bar{\alpha} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$ vektörel denklemi ile düzenlersek

$$ds = \|d\bar{\alpha}\| \quad (2.32)$$

dir.

Frenet 3-ayaklısının teğet, binormal ve asli normal vektörleri sırasıyla

$$T(s) = \frac{\bar{\alpha}'}{\|\bar{\alpha}'\|} = \frac{x'(t)\bar{i} + y'(t)\bar{j} + z'(t)\bar{k}}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}} \quad (2.33)$$

$$B(s) = \frac{\bar{\alpha}' \times \bar{\alpha}''}{\|\bar{\alpha}' \times \bar{\alpha}''\|} \quad (2.34)$$

$$N(s) = B(s) \times T(s) \quad (2.35)$$

bağıntıları ile verilir (Hacısalıhoğlu, 2000).

Teorem 2.3.3.3 Γ regüler eğrisi için Frenet vektörleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır (Anastassiou ve Iatan, 2014).

$$\begin{aligned}
T &= N \times B \\
N &= B \times T \\
B &= T \times N \\
\|T\| &= \|N\| = \|B\| = 1 \\
T \cdot N &= T \cdot B = N \cdot B = 0
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Şimdi Frenet vektörleri yardımıyla Frenet formülleri adı verilen bazı bağıntılar tanımlayalım.

Teorem 2.3.3.4 Γ regüler eğrisi için M noktasında $\bar{\alpha}$ nın T, N, B vektörleri olsun ve ds yay parametresi ise aşağıdaki bağıntılar sağlanır (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Birinci Frenet formülü:

$$T'(s) = \frac{N(s)}{R(s)} \Rightarrow \frac{1}{R(s)} = T'(s) \cdot N(s) \tag{2.37}$$

İkinci Frenet formülü:

$$B'(s) = \frac{N(s)}{L(s)} \Rightarrow L(s) = -B'(s) \cdot N(s) = N'(s) \cdot B(s) \tag{2.38}$$

Üçüncü Frenet formülü:

$$N'(s) = -\frac{1}{R(s)}T(s) + \frac{1}{L(s)}B(s) \tag{2.39}$$

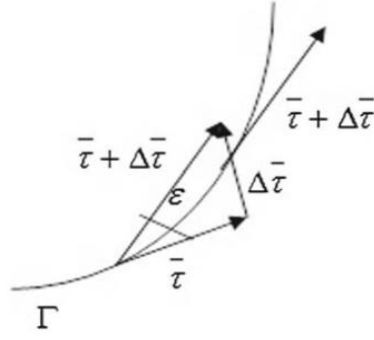
2.3.4 Uzay eğrilerinin eğriliği ve burulması

2.3.3.4 teoremde Frenet formülleri olarak tanıtılan $\frac{1}{R}$ ve $\frac{1}{L}$ skalerleri sırasıyla eğrinin bir M noktasındaki eğriliği ve burulması olarak adlandırılırlar (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Tanım 2.3.4.1 Ortalama eğrilik, teğetin, birim yaydaki değişimidir. Bir eğrinin bir noktadaki eğriliği yay parametresi 0'a giderken ortalama eğriliğin limitidir. Yani

$$K = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta T}{\Delta s} \right| \tag{2.40}$$

dir (Anastassiou ve Iatan, 2014). (Bkz. Şekil 2.17)



Şekil 2.17 Ortalama Eğrilik ($\bar{\tau} = T$).

Tanım 2.3.4.2 Bir eğrinin bir noktadaki eğrilik yarıçapı, eğrinin o noktadaki eğriliğinin tersine eşittir R ile gösterilir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Açıklama 2.3.4.3 Bir eğrinin eğriliği, o eğrinin teğetinden ne kadar ayrıldığını gösterir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Teorem 2.3.4.4 Γ bir regüler eğri olsun. Bu eğrinin doğru olması için gerek ve yeter şart $K = 0$ olmasıdır (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Tanım 2.3.4.5 Bir eğrinin bir noktadaki burulması (torsiyonu), yay parametresi sıfıra yaklaşıırken eğrinin binormalinin yönündeki değişimdir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Tanım 2.3.4.6 Eğrinin bir noktasındaki buruma yarıçapı, o noktada burulmanın tersine eşittir. Yani L dir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Açıklama 2.3.4.7 Eğrinin burulması, o eğrinin oskülatör düzleminden ne kadar ayrıldığını gösterir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Teorem 2.3.4.8 Γ regüler bir eğri olsun. Bu eğrinin eş düzlemliliği için gerek ve yeter şart $\frac{1}{L} = 0$ olmasıdır (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Teorem 2.3.4.9 Γ regüler bir eğri için $M \in \Gamma$ bir nokta ve $\bar{\alpha}$ yer vektörü olsun. ds yay parametresi olmak üzere eğrilik,

$$\kappa = K = \frac{1}{R} = \frac{\|\bar{\alpha}' \times \bar{\alpha}''\|}{\|\bar{\alpha}'\|^3} \quad (2.41)$$

dir (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Teorem 2.3.4.10 Γ regüler bir eğri için $M \in \Gamma$ bir nokta ve $\bar{\alpha}$ yer vektörü olsun. ds yay parametresi olmak üzere torsiyon,

$$\tau = \frac{1}{L} = \frac{\bar{\alpha}' \cdot (\bar{\alpha}'' \times \bar{\alpha}''')}{\|\bar{\alpha}' \times \bar{\alpha}''\|^2} \quad (2.42)$$

dir (Anastassiou ve Iatan, 2014).



3. SAGE İLE LİNEER CEBİR UYGULAMALARI

Örnek 3.1 $\bar{v}_1 = \bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ vektörünü

$$\bar{a} = \bar{i} + \bar{j}, \bar{b} = \bar{j} + \bar{k}, \bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}. \quad (3.1)$$

Vektörlerinin yönünde ayrıştırınız.

Çözümü Sage'de şöyle gösteririz (Anastassiou ve Iatan, 2014):

Çözüm:

```
sage: v1=vector([1,-3,2]);a=vector([1,1,0]);b=vector([0,1,1]);c=vector([1,1,3])
sage: al1,al2,al3=var('al1,al2,al3')
sage: u=al1*a+al2*b+al3*c
sage: solve([u[0]==v1[0],u[1]==v1[1],u[2]==v1[2]],al1,al2,al3)
[[al1 == -1, al2 == -4, al3 == 2]]
```

Örnek 3.2 $A(3, -1, 1), B(4, 1, 4)$ ve $C(6, 0, 4)$ noktalarının bir sağ üçgenin köşeleri olduğunu gösteriniz (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Sage kullanarak, şunu elde ederiz:

Çözüm:

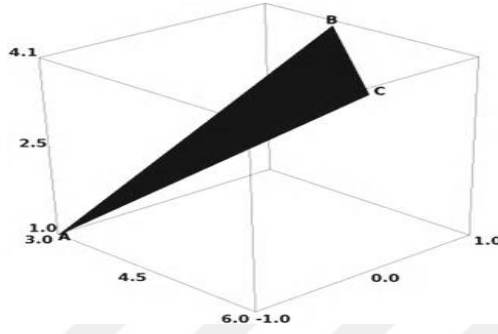
```
sage: A=vector([3,-1,1]);B=vector([4,1,4]);C=vector([6,0,4])
sage: AB=B-A
sage: AC=C-A
sage: BC=C-B
sage: AC.norm()^2==BC.norm()^2+AB.norm()^2
19 == 19
```

Sağ üçgeni göstermek için (Bkz. Şekil 3.1) aşağıdaki Sage koduna ihtiyacımız var:

```

sage: P=polygon3d([(3,-1,1), (4,1,4), (6,0,4)])
sage: t1=text3d("A", (3.1,-1,1))
sage: t2=text3d("B", (4,1,4.1))
sage: t3=text3d("C", (6,0.1,4))
sage: show(P+t1+t2+t3)

```



Şekil 3.1: Bir sağ üçgen örneği.

Örnek 3.3 Aşağıdaki vektörlerin lineer bağımlılığını araştırınız. Bu vektörler $\mathbb{R}^4$ için bir baz oluştururlar mı? (Anastassiou ve Iatan, 2014)

$$\bar{v}_1 = (2,1,3,1), \quad \bar{v}_2 = (1,2,0,1), \quad \bar{v}_3 = (-1,1,-3,0)$$

Çözüm:

Sage ile çözümü şu şekilde verilebilir:

```

sage: V=RR^4
sage: v1=V([2,1,3,1]);v2=V([1,2,0,1]);v3=V([-1,1,3,0])
sage: V.linear_dependence([v1,v2,v3])==[]
True
sage: A=matrix([v1,v2,v3])
sage: A.rank()==V.dimension()
False

```

Örnek 3.4 $\bar{v}_1 = (2, 4, 1, 3)$, $\bar{v}_2 = (7, 4, -9, 5)$, $\bar{v}_3 = (4, 8, -3, 7)$, $\bar{v}_4 = (5, 5, -5, 5)$, $\bar{v}_5 = (8, 4, -14, 6)$ vektörleri verilsin. Bu vektörler tarafından oluşturulan alt uzayın boyutu nedir? (Anastassiou ve Iatan, 2014)

Çözüm:

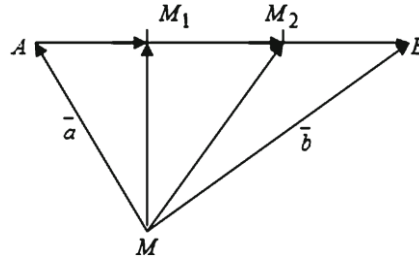
```
sage: V=VectorSpace(GF(5),4)
sage: v1=V([2,4,1,3]);v2=V([7,4,-9,5]);v3=V([4,8,-3,7]);
sage: v4=V([5,5,-5,5]);v5=V([8,4,-14,6])
sage: W=V.subspace([v1,v2,v3,v4,v5])
sage: W.dimension();W
3
```

5 inci Dereceden sonlu cisim üzerinde 4 üncü dereceden vektör uzayının boyutu 3 tür ve baz vektör matrisi aşağıdaki gibidir.

Basis matrix:

```
[1 0 0 0]
[0 1 4 0]
[0 0 0 1]
```

Örnek 3.5 Varsayalım ki, M_1 ile M_2 noktaları $\overline{AB}$ doğru parçasını üç eşit parçaya bölsün. Eğer M doğru parçasının dışında bir rasgele nokta ise $\overline{MM_1}$ ve $\overline{MM_2}$ vektörlerini, $\overline{MA}=\vec{a}$ ve $\overline{MB}=\vec{b}$ vektörleri cinsinden ifade ediniz (Bkz. Şekil 3.2) (Anastassiou ve İatan, 2014).



Şekil 3.2: $\overline{MM_1}$ ve $\overline{MM_2}$ vektörlerinin $\overline{MA}=\vec{a}$ ve $\overline{MB}=\vec{b}$ vektörleri cinsinden ifadesi.

Çözüm:

Üçgen kuralını kullanarak, şunu elde ederiz:

$\overline{MM_1} = \overline{MA} + \overline{AM_1}$ ve $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB} = -\vec{a} + \vec{b}$ buradan aşağıdaki ifade yazılabilir.

$$\overline{AM_1} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{\vec{b}-\vec{a}}{3} \text{ ve } \overline{MM_1} = \vec{a} + \frac{\vec{b}-\vec{a}}{3} = \frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$$

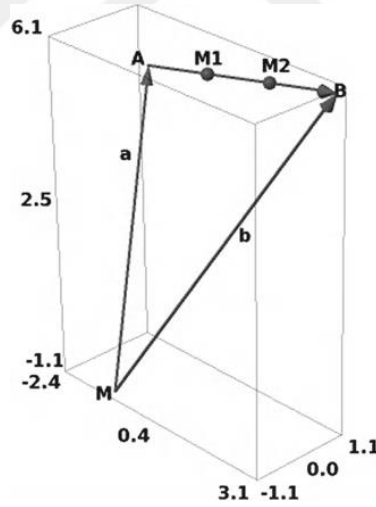
Benzer olarak

$$\overline{MM_2} = \overline{MA} + \overline{AM_2} = \overline{MA} + \frac{2}{3}\overline{AB} = \bar{a} + 2\frac{\bar{b}-\bar{a}}{3} = \frac{\bar{a}+2\bar{b}}{3} \quad (3.2)$$

(Bkz. Şekil 3.3).

Sage de çözümü ise şu şekildedir.

```
sage: a,b=var('a,b')
sage: AB=b-a;AM1=AB/3;AM2=2*AB/3
sage: MM1=a+AM1;MM2=a+AM2;MM1;MM2
2/3*a + 1/3*b
1/3*a + 2/3*b
sage: v1=arrow3d((-1,-1,-1),(-2,1,5),2)+text3d("M",(-1.2,-1.1,-1.1))
sage: v2=arrow3d((-1,-1,-1),(3,1,6),2)+text3d("A",(-2.4,1.1,5))
sage: v3=arrow3d((-2,1,5),(3,1,6),2)+text3d("B",(3,1.1,6))
sage: t=text3d("b",(2.3,-0.6,3.5))+text3d("a",(-2.4,0.7,3.1))
sage: p1=point3d((-1/3,1,16/3),size=20)+text3d("M1",(-0.4,1.1,5.6))
sage: p2=point3d((4/3,1,17/3),size=20)+text3d("M2",(1.4,1.1,6))
sage: (v2+v3+v1+t+p1+p2).show(aspect_ratio=1)
```



Şekil 3.3: Örnek 3.5 in geometrik ifadesi.

Örnek 3.6

$$\begin{aligned} \overline{v_1} &= 2\bar{i} + (\lambda + 2)\bar{j} + 3\bar{k} \\ \overline{v_2} &= \bar{i} + \lambda\bar{j} - \bar{k} \\ \overline{v_3} &= 4\bar{j} + 2\bar{k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Vektörleri eş düzlemli olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ bulunuz. Bulduğunuz bu λ değeri ile $\bar{v}_1$ vektörünü $\bar{v}_2$ ve $\bar{v}_3$ yönünde ayırıştırınız (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Çözüm:

Teorem 2.2.21 kullanarak, $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ eş düzlemli, ancak ve ancak $\alpha\bar{v}_1 + \beta\bar{v}_2 + \gamma\bar{v}_3 = \bar{0}$ olacak şekilde $(\exists) \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \neq 0)$ vardır.

Buradan,

$$(2\alpha + \beta)\bar{i} + [(\lambda + 2)\alpha + \lambda\beta + 4\gamma]\bar{j} + (3\alpha - \beta + 2\gamma)\bar{k} = \bar{0} \quad (3.4)$$

Yazılabilir. Yani

$$\begin{aligned} (2\alpha + \beta) &= 0 \\ (\lambda + 2)\alpha + \lambda\beta + 4\gamma &= 0 \\ (3\alpha - \beta + 2\gamma) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

dir. Bu homojen lineer denklem sisteminin aşikar çözümden farklı bir çözümünün olması için $\lambda = -8$ bulunur.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ \lambda + 2 & \lambda & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda = -8 \quad (3.6)$$

Eğer v_1, v_2, v_3 eş düzlemli ise, Önerme 2.2.20'den,

$$\bar{v}_1 = \alpha'\bar{v}_2 + \beta'\bar{v}_3; \quad (3.7)$$

Olacak şekilde $\exists \alpha', \beta' \in \mathbb{R}$ tek olarak bellidir.

```

sage: var('l','a1','be','ga')
(1, a1, be, ga)
sage: v1=vector([2,1+2,3])
sage: v2=vector([1,1,-1])
sage: v3=vector([0,4,2])
sage: u=a1*v1+be*v2+ga*v3
sage: show(u)
(2a1 + be, (l + 2)a1 + be + 4ga, 3a1 - be + 2ga)
sage: A=matrix([[2,1,0],[1+2,1,4],[3,-1,2]])
sage: la=solve(A.determinant()==0,l)
sage: show(la)
[l = (-8)]
sage: v1=v1.substitute(l=-8)
sage: v2=v2.substitute(l=-8)
sage: w=a1*v2+be*v3
sage: solve([v1[0]==w[0],v1[1]==w[1],v1[2]==w[2]],a1,be)
[[a1 == 2, be == (5/2)]]

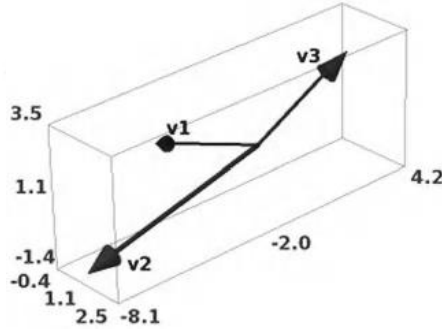
```

Şimdi Sage'de $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ vektörlerini gösterelim (Bkz. Şekil 3.4):

```

sage: P=arrow3d((0,0,0),(1, -8, -1), 6, color='red')+text3d("v2", (1.3,-6.2,-1.3))
sage: Q=arrow3d((0,0,0),(0, 4, 2), 6, color='green')+text3d("v3", (0.5,1.8,2.7))
sage: R=arrow3d((0,0,0),(2, -6, 3), 4, color='blue')+text3d("v1", (2.5,-5.5,3.5))
sage: (P+Q+R).show(aspect_ratio=1)

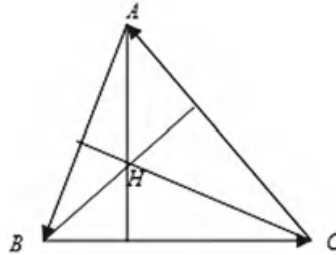
```



Şekil 3.4: $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ vektörlerinin gösterimi.

Örnek 3.7 Bir üçgenin yüksekliklerinin kesiştiğini ispatlayınız (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Çözüm:



Şekil 3.5: Bir üçgenin yüksekliklerinin kesişimi.

H , A ve B 'den çizilen yüksekliklerin kesişimi olsun. $\overline{CH}$ 'nin $\overline{AB}$ 'ye dik olduğunu göstermeliyiz, diğer bir deyişle skaler çarpımlarının sıfır olduğunu göstermeliyiz yani; $\overline{CH} \cdot \overline{AB} = 0$ dır. Üçgen kuralını kullanarak, şunu elde ederiz:

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC}. \quad (3.8)$$

Şunu elde etmemiz gerekir;

$$\begin{aligned} \overline{CH} \cdot \overline{AB} &= \overline{CH} \cdot (\overline{AC} - \overline{BC}) = \overline{CH} \cdot \overline{AC} - \overline{CH} \cdot \overline{BC} \\ &= -(\overline{HB} + \overline{BC}) \cdot \overline{AC} + (\overline{HA} + \overline{AC}) \cdot \overline{BC} \end{aligned} \quad (3.9)$$

Yani;

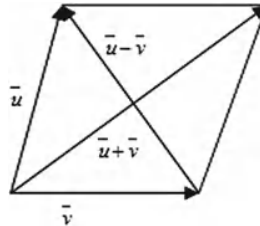
$$\overline{CH} \cdot \overline{AB} = -\overline{HB} \cdot \overline{AC} - \overline{BC} \cdot \overline{AC} + \overline{HA} \cdot \overline{BC} + \overline{AC} \cdot \overline{BC} = -\overline{HB} \cdot \overline{AC} + \overline{HA} \cdot \overline{BC} = 0. \quad (3.10)$$

Burada, skaler çarpımın değişme özelliğini ve $\overline{BH}$ 'nin $\overline{AC}$ üzerinde ve $\overline{AH}$ 'nin $\overline{BC}$ üzerinde dik olduğu gerçeğini kullandık (Bkz. Şekil 3.5). Bu problem için aşağıdaki Sage koduna ihtiyacımız var:

```
sage: var("a1,a2,a3,b1,b2,b3,c1,c2,c3,h1,h2,h3")
(a1, a2, a3, b1, b2, b3, c1, c2, c3, h1, h2, h3)
sage: A=vector(SR,[a1,a2,a3]);B=vector(SR,[b1,b2,b3])
sage: C=vector(SR,[c1,c2,c3]);H=vector(SR,[h1,h2,h3])
sage: AC=C-A;BC=C-B;CH=H-C;AB=AC-BC;HB=B-H;HA=A-H
sage: E=CH.dot_product(AB).expand()
sage: u=AC.dot_product(HB);v=HA.dot_product(BC)
sage: s=solve([u==0,v==0],h1,h2,h3)
sage: s1=s[0][0].right();s2=s[0][1].right();s3=s[0][2].right()
sage: E.subs(h1=s1,h2=s2,h3=s3).simplify_exp()
0
```

Örnek 3.8 Bir eşkenar dörtgenin köşegenlerinin dik kesiştiğini ispatlayınız (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Çözüm:



Şekil 3.6: Bir eşkenar dörtgenin köşegenlerinin kesişimi.

$$(\bar{u} - \bar{v}).(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{u}.(\bar{u} + \bar{v}) - \bar{v}.(\bar{u} + \bar{v}) = \bar{u}.\bar{u} + \bar{u}.\bar{v} - \bar{v}.\bar{u} - \bar{v}.\bar{v} = \|\bar{u}\|^2 - \|\bar{v}\|^2$$

Eşkenar dörtgen olduğundan $\|\bar{u}\| = \|\bar{v}\|$ dır. ve buradan da

$$(\bar{u} - \bar{v}).(\bar{u} + \bar{v}) = 0 \quad (3.11)$$

Elde edilir. Yani, bir eşkenar dörtgende köşegenler dik kesişirler (Bkz. Şekil 3.6).

Sage'de çözerek, şunu elde ederiz:

```
sage: var("u1,u2,u3,v1,v2,v3")
(u1, u2, u3, v1, v2, v3)
sage: u=vector(SR,[u1,u2,u3]);v=vector(SR,[v1,v2,v3])
sage: ((u.norm()^2).simplify_exp()-(v.norm()^2).simplify_exp()==0).assume()
sage: E=(u-v).dot_product(u+v)
sage: j=assumptions();j[0].left()-E.expand()
0
```

Örnek 3.9 Bir üçgenin iki köşesi $\overline{AB} = 3\bar{i} - 4\bar{j}$ ve $\overline{BC} = \bar{i} + 5\bar{j}$ ise $\overline{CD}$ yüksekliğinin uzunluğunu hesaplayınız (Anastassiou ve Iatan, 2014).

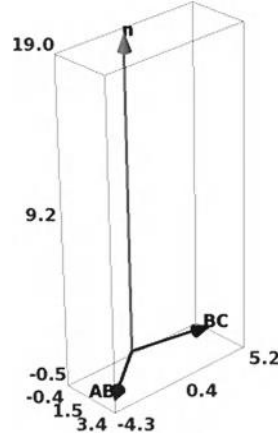
Çözüm: $\|\overline{AB}\| = \sqrt{9 + 16} = 5$

$$\overline{AB} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 19\bar{k} \quad (3.12)$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{\|\overline{AB} \times \overline{BC}\|}{2} = \frac{\|\overline{AB}\| \|\overline{BC}\| \sin \theta}{2} \Rightarrow \|\overline{CD}\| = \frac{\|\overline{AB} \times \overline{BC}\|}{\|\overline{AB}\|} = \frac{19}{5} \quad (3.13)$$

Sage kullanarak da şöyle bir çözüm sunabiliriz (Bkz. Şekil 3.7).

```
sage: AB=vector(QQ,[3,-4,0])
sage: P=arrow3d((0,0,0),(3,-4,0),6,color='red')+text3d("AB",(2.3,-4.2,0.3))
sage: BC=vector(QQ,[1,5,0])
sage: Q=arrow3d((0,0,0),(1,5,0),6,color='blue')+text3d("BC",(1.3,5.2,0.3))
sage: n=AB.norm()
sage: cp=AB.cross_product(BC)
sage: cp.norm()/n
19/5
sage: R=arrow3d((0,0,0),cp,6,color='orange')+text3d("n",(0,0.3,19))
sage: (P+Q+R).show(aspect_ratio=1)
```



Şekil 3.7: Örnek 3.9 un Sage ile çözümü.

Örnek 3.10 $\bar{a} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{c} = \lambda\bar{i} + 2\bar{j}$ vektörleri ile belirlenen bir paralelyüzün hacmi 5 ise $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısını bulunuz (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Çözüm:

Bu vektörler tarafından belirlenen paralel yüzünün hacmi şöyledir

$$v = \pm \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ \lambda & 2 & 0 \end{vmatrix} = \pm(10 + 5\lambda) \quad (3.14)$$

Koşul $v = 5$ 'ten, $10 + 5\lambda = \pm 5$ yani $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$ bulunur. Aynı çözüm Sage'de de elde edilebilir:

```
sage: la=var ('t')
sage: c=vector([t,2,0])
sage: a=vector([2,-3,1])
sage: b=vector([1,1,-2])
sage: V=matrix([a,b,c])
sage: t=solve(V.determinant()==5,la)
sage: t1=solve(V.determinant()==-5,la)
sage: print; t;t1
[t == -1]
[t == -3]
```

4. SAGE İLE DİFERENSİYEL GEOMETRİ UYGULAMALARI

Örnek 4.1. Aşağıda verilen Γ eğrisi için orjin noktasında Frenet vektörlerini bulunuz (Anastassiou ve Iatan, 2014).

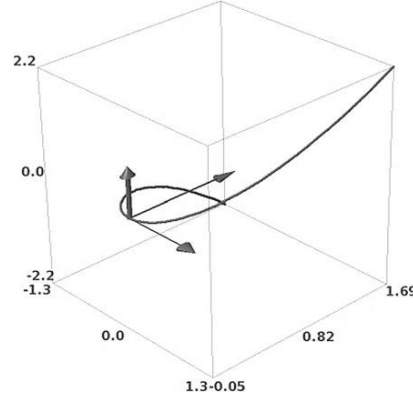
$$\Gamma: \bar{r} = t\bar{i} + t^2\bar{j} + t^3\bar{k} \quad (4.1)$$

Çözüm:

Sagede çözerek, şunu elde ederiz:

```
sage: t=var('t')
sage: r=vector([t,t^2,t^3])
sage: rp=diff(r,t);rs=diff(r,t,2)
sage: n=rp.norm().simplify_exp()
sage: tau=(rp/n).subs(t=0);tau
(1, 0, 0)
sage: v=rp.cross_product(rs)
sage: vn=v.norm().simplify_exp()
sage: be=(v/vn).subs(t=0);be
(0, 0, 1)
sage: nu=be.cross_product(tau).subs(t=0);nu
(0, 1, 0)
sage: c=parametric_plot3d((r[0],r[1],r[2]),(t,-1.3,1.3),thickness=5)
sage: a1=arrow3d((0,0,0),(tau[0],tau[1],tau[2]))
sage: a2=arrow3d((0,0,0),(be[0],be[1],be[2]))
sage: a3=arrow3d((0,0,0),(nu[0],nu[1],nu[2]))
sage: c+a1+a2+a3
```

(Bkz. Şekil 4.1).



Şekil 4.1: Γ eğrisinin Frenet vektörleri.

Örnek 4.2 Aşağıda verilen Γ eğrisi için, eğrinin eğriligi ve burulması arasındaki bağıntıyı bulunuz (Anastassiou ve Iatan, 2014).

$$\Gamma: \bar{r} = t\bar{i} + \frac{t^2}{2}\bar{j} + \frac{t^3}{6}\bar{k} \quad (4.2)$$

Çözüm

Sorulan bağıntıyı belirlemek için Sage kullanacağız:

```
sage: t=var('t')
sage: r=vector([t,t^2/2,t^3/6])
sage: rp=diff(r,t);rs=diff(r,t,2);rt=diff(r,t,3)
sage: rpn=sqrt(rp[0]^2+rp[1]^2+rp[2]^2)
sage: v=rp.cross_product(rs)
sage: vn=sqrt(v[0]^2+v[1]^2+v[2]^2)
sage: C=vn/rpn^3;C.factor()
4/(t^2 + 2)^2

sage: w=rp.dot_product(rs.cross_product(rt))
sage: iT=w/vn^2;iT.factor()
4/(t^2 + 2)^2
sage: C/iT
1
```

Örnek 4.3 Γ eğrisine ait noktaların konum vektörünü belirleyiniz (Anastassiou ve Iatan, 2014).

$$\Gamma: \bar{r} = t^{-1}\bar{i} + t\bar{j} + (2t^2 - 1)\bar{k} \quad (4.3)$$

Burada, binormal vektörü aşağıdaki doğruya diktir.

$$d: \begin{cases} x + y = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Çözüm:

Bu problemi çözümü için aşağıdaki Sage koduna ihtiyacımız var:

```
sage: n1=vector([1,1,0]);n2=vector([4,0,-1])
sage: n=n1.cross_product(n2)
sage: t=var('t'); (t!=0).assume()
sage: r=vector([1/t,t,2*t^2-1])
sage: r1=diff(r,t);r2=diff(r,t,2)
sage: rr=r1.cross_product(r2)
sage: rn=sqrt(rr[0]^2+rr[1]^2+rr[2]^2)
sage: w=rr/rn.simplify_exp()
sage: s=solve([n.dot_product(w).simplify_exp()],t);s
[t == 2, t == -1]
sage: t1=s[0].right();t2=s[1].right()
sage: v1=r.subs(t=t1);v2=r.subs(t=t2);v1;v2
(1/2, 2, 7)
(-1, -1, 1)
```

Örnek 4.4 $\Sigma: z: 5x^2 + 4y - 3$ bir yüzey olsun,

(a) $u = 0$ ve $v = 2$ noktalarında yüzeyin tanjant düzleminin denklemini bulunuz.

(b) $M(1,0,2)$ noktasında Σ yüzeyinin normalinin denkleminiz bulunuz (Anastassiou ve İatan, 2014).

Çözüm

Bu problemin sagedeki çözümü şu şekildedir:

```
sage: x,y,z=var('x,y,z');x0=1;y0=0;z0=2
sage: zz=5*x^2+4*y-3
sage: p=diff(zz,x).subs(x=x0,y=y0);q=diff(zz,y).subs(x=x0,y=y0)
sage: expand((x-x0)*p+(y-y0)*q-(z-z0))==0
10*x + 4*y - z - 8 == 0
sage: (x-x0)/p==(y-y0)/q;(y-y0)/q==(z-z0)/(-1)
1/10*x - 1/10 == 1/4*y
1/4*y == -z + 2
```

Örnek 4.5 $\bar{r}(t) = 2t\bar{i} + t^2\bar{j} + \ln t\bar{k}$, $t > 0$ bir eğri olsun. $t = 1$ noktasında eğrinin Frenet vektörlerini ve oskütör, normal ve rektifiyan düzlem denklemlerini bulunuz (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Çözüm:

teğet denklemleri şunlardır:

$$(\bar{\tau}): \frac{x-2t}{2} = \frac{y-t^2}{2t} = \frac{z-\ln t}{\frac{1}{t}}. \quad (4.5)$$

$t = 1$ noktasındaki teğet denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$(\bar{\tau}): \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}. \quad (4.6)$$

$t = 1$ noktasındaki binormal denklemleri:

$$(\bar{\beta}): \frac{x-x(1)}{\begin{vmatrix} y'(1) & z'(1) \\ y''(1) & z''(1) \end{vmatrix}} = \frac{y-y(1)}{\begin{vmatrix} z'(1) & x'(1) \\ z''(1) & x''(1) \end{vmatrix}} = \frac{z-z(1)}{\begin{vmatrix} x'(1) & y'(1) \\ x''(1) & y''(1) \end{vmatrix}} \quad (4.7)$$

yani

$$(\bar{\beta}): \frac{x-2}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{y-1}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{z}{\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}} \quad (4.8)$$

dir. Veya

$$(\bar{\beta}): \frac{x-2}{-4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4} \quad (4.9)$$

dir. Normal düzlemin denklemi:

$$\pi_N: 2(x-2t) + 2t(y-t^2) + \frac{1}{t}(z-\ln t) = 0; \quad (4.10)$$

$t = 1$ noktasında, normal düzlemin denklemi şu hale gelir:

$$\pi_N: 2(x-2) + 2(y-1) + z = 0; \quad (4.11)$$

veya

$$\pi_N : 2x + 2y + z - 6 = 0 \quad (4.12)$$

(2.12) kullanarak, nokta $t = 1$ 'in oskulator düzleminin denklemi:

$$\pi_0 : \begin{vmatrix} x - x(1) & y - y(1) & z - z(1) \\ x'(1) & y'(1) & z'(1) \\ x''(1) & y''(1) & z''(1) \end{vmatrix} = 0, \quad (4.13)$$

olur, yani

$$\pi_0 : \begin{vmatrix} x - 2 & y - 1 & z - 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (4.14)$$

veya

$$\pi_0 : 2x - y - 2z = 3 \quad (4.15)$$

bulunur. Asli normal düzlemi, oskulator düzlem ve normal düzlemin kesişimidir:

$$(\bar{v}) : \begin{cases} 2x - y - 2z = 3 \\ 2x + 2y + z = 6. \end{cases} \quad (4.16)$$

Rektifiyan düzlem $t = 1$ noktası boyunca teğet ve binormal vektörleri tarafından gerilen düzlem olduğundan, denklemi (2.18) den aşağıdaki gibi olacaktır.

$$\pi_r : \begin{vmatrix} x - x(1) & y - y(1) & z - z(1) \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.17)$$

burada:

• $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ noktası $t = 1$ de teğet vektörün doğrultman vektörüdür. Yani $\bar{a} = (2, 2, 1)$ dir.

• $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$, noktası $t = 1$ de binormal vektörün doğrultman vektörüdür. Yani $\bar{b} = (-4, 2, 4)$ tür; bu da şu sonucu verir:

$$\pi_r : \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z \\ 2 & 2 & 1 \\ -4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

Sage programında çözümü şu şekilde verilebilir:

```
sage: x,y,z,t,a,b,c,d=var('x,y,z,t,a,b,c,d'); (t>0).assume()
sage: r=vector([2*t,t^2,ln(t)]);r0=r.subs(t=1)
sage: rp=diff(r,t);rp0=rp.subs(t=1)
sage: (x-r0[0])/rp0[0]==(y-r0[1])/rp0[1];(y-r0[1])/rp0[1]==(z-r0[2])/rp0[2]
1/2*x - 1 == 1/2*y - 1/2
1/2*y - 1/2 == z
sage: A=matrix([[a,b],[c,d]])
sage: rs=diff(r,t,2);rs0=rs.subs(t=1)
sage: A1=A.subs(a=rp0[1],b=rp0[2],c=rs0[1],d=rs0[2])
sage: d1=A1.determinant()

sage: A2=A.subs(a=rp0[2],b=rp0[0],c=rs0[2],d=rs0[0])
sage: d2=A2.determinant()
sage: A3=A.subs(a=rp0[0],b=rp0[1],c=rs0[0],d=rs0[1])
sage: d3=A3.determinant()
sage: (x-r0[0])/d1==(y-r0[1])/d2;(y-r0[1])/d2==(z-r0[2])/d3
-1/4*x + 1/2 == 1/2*y - 1/2
1/2*y - 1/2 == 1/4*z
sage: u=rp0[0]*(x-r0[0])+rp0[1]*(y-r0[1])+rp0[2]*(z-r0[2]);u==0
2*x + 2*y + z - 6 == 0
sage: B=matrix([[x-r0[0],y-r0[1],z-r0[2]],[rp0[0],rp0[1],rp0[2]],[rs0[0],rs0[1],rs0[2]]])
sage: v=B.determinant();v==0
-4*x + 2*y + 4*z + 6 == 0
sage: n1=vector([u.coeff(x),u.coeff(y),u.coeff(z)])
sage: n2=vector([v.coeff(x),v.coeff(y),v.coeff(z)])
sage: n=n1.cross_product(n2)
sage: (x-r0[0])/n[0]==(y-r0[1])/n[1];(y-r0[1])/n[1]==(z-r0[2])/n[2]
1/6*x - 1/3 == -1/12*y + 1/12
-1/12*y + 1/12 == 1/12*z
sage: C=matrix([[x-r0[0],y-r0[1],z-r0[2]],[rp0[0],rp0[1],rp0[2]],[d1,d2,d3]])
sage: C.determinant()==0
6*x - 12*y + 12*z == 0
```

Örnek 4.6

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \sin t \\ z = 4t \end{cases} \quad (4.19)$$

Eğrisi verilsin

- (a) herhangi bir M noktasında eğrinin teğet vektörü;
- (b) M noktasında eğrinin eğriliği;
- (c) M noktasında eğrinin asli normal vektörü;
- (d) M noktasında asli normalinin denklemleri;
- (e) M noktasında binormal vektör;
- (f) M noktasında binormalin denklemleri;
- (g) M noktasında eğrinin burulması;
- (h) M noktasında oskülatör düzleminin denklemini bulunuz (Anastassiou ve Iatan, 2014).

Çözüm

- (a) (2.21) kullanarak, teğet vektörü şöyle bulunur:

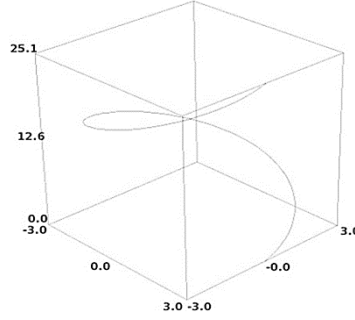
$$\bar{\tau} = \frac{-3 \sin t \bar{i} + 3 \cos t \bar{j} + 4 \bar{k}}{\sqrt{9+16}} = \frac{1}{5} (-3 \sin t \bar{i} + 3 \cos t \bar{j} + 4 \bar{k}). \quad (4.20)$$

Sagedeki tanjantı da elde edebiliriz:

```
sage: t=var('t');x=3 * cos(t);y=3 * sin(t);z=4*t
sage: ta=vector([diff(x),diff(y),diff(z)])
sage: tn=ta[0]^2+ta[1]^2+ta[2]^2
sage: tau=ta/sqrt(tn);tau.simplify_trig()
(-3/5*sin(t), 3/5*cos(t), 4/5)
```

Eğriyi çizmek için aşağıdaki Sage koduna ihtiyacımız var (Bkz. Şekil 4.2):

```
sage: show(parametric_plot3d((x, y, z), (t, 0, 2*pi)))
```



Şekil 4.2: $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$ eğrisi.

(b) + (c) Verilen eğri vektör denklemine sahiptir

$$\bar{r} = 3\cos t \bar{i} + 3\sin t \bar{j} + 4t \bar{k}. \quad (4.21)$$

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{d\bar{r}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\left\| \frac{d\bar{r}}{dt} \right\|} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{1}{\left\| \bar{r}' \right\|} \cdot \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{1}{25} (-3\cos t \bar{i} - 3\sin t \bar{j}). \quad (4.22)$$

İlk Frenet formülü kullanarak, şu sonucu verir:

$$\frac{1}{R} \bar{v} = \frac{3}{25} (-\cos t \bar{i} - \sin t \bar{j}): \quad (4.23)$$

buradan: eğrinin eğikliği;

$$\frac{1}{R} = \frac{3}{25}; \quad (4.24)$$

ve asli normal vektörü şöyledir:

$$\bar{v} = -\cos t \bar{i} - \sin t \bar{j}. \quad (4.25)$$

Eğrinin eğriliği (2.29) formülü kullanarak da belirlenebilir. Sage ile (b)+(c)+(e) yi çözersek şunu elde ederiz:

```

sage: tap=vector([diff(x,2),diff(y,2),diff(z,2)])
sage: tt=ta.cross_product(tap).simplify_trig()
sage: n1=sqrt(tt[0]^2+tt[1]^2+tt[2]^2).simplify_trig()
sage: K=n1/(tn^(3/2)).simplify_trig();K
3/25
sage: K=n1/(tn^(3/2)).simplify_trig()
sage: be=tt/n1;be
(4/5*sin(t), -4/5*cos(t), 3/5)
sage: nu=be.cross_product(tau);nu.simplify_trig()
(-cos(t), -sin(t), 0)

```

(d) asli normal denklemleri aşağıdaki gibidir:

$$\bar{v} : \begin{cases} \frac{x-3\cos t}{-\cos t} = \frac{x-3\sin t}{-\sin t} \\ z = 4t \end{cases} \quad (4.26)$$

(e) binormal vektör iki formülünden birini kullanarak (2.34) veya (2.36) bağıntılarından biri kullanılarak belirlenebilir:

$$\bar{\beta} = \frac{1}{5} (4 \sin t \bar{i} - 4 \cos t \bar{j} + 3 \bar{k}). \quad (4.27)$$

(f) Binormal denklemleri formül (2.16) kullanarak belirlenebilir:

$$(\bar{\beta}) = \frac{x-3\cos t}{4\sin t} = \frac{y-3\sin t}{-4\cos t} = \frac{z-4t}{3}. \quad (4.28)$$

(g)

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\beta}}{ds} &= \frac{d\bar{\beta}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dt}} \cdot \frac{d\bar{\beta}}{dt} = \frac{1}{\left\| \frac{dr}{dt} \right\|} \cdot \frac{d\bar{\beta}}{dt} \\ &= \frac{1}{\left\| \bar{r} \right\|} \cdot \frac{d\bar{\beta}}{dt} = \frac{1}{25} (4 \cos t \bar{i} + 4 \sin t \bar{j}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

İkinci Frenet formülü kullanarak aşağıdaki denklemi elde ederiz:

$$-\frac{1}{T} (-\cos t \bar{i} - \sin t \bar{j}) = \frac{4}{25} (\cos t \bar{i} + \sin t \bar{j}); \quad (4.30)$$

buradan, eğrinin burulması şöyledir:

$$\frac{1}{T} = \frac{4}{25}. \quad (4.31)$$

Aynı değer Sage kullanarak bulunabilir:

```
sage: tac=vector([diff(x,3),diff(y,3),diff(z,3)])
sage: g=tap.cross_product(tac).simplify_trig();g
(0, 0, 9)
sage: iT=ta.dot_product(g)/n1^2;iT
4/25
```

(h) M' deki oskütör düzleminin denklemi de (2.12) kullanılarak aşağıdaki gibi bulunur:

$$\pi_0 : \begin{vmatrix} x-3\cos t & y-3\sin t & z-4t \\ -3\sin t & -3\cos t & 4 \\ -3\cos t & -3\sin t & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.32)$$

Sage kullanarak, şunu elde ederiz:

```
sage: X,Y,Z=var('X,Y,Z')
sage: A=matrix([[X-x,Y-y,Z-z],[ta[0],ta[1],ta[2]],[tap[0],tap[1],tap[2]]])
sage: expand(A.determinant())
9*Z*sin(t)^2 + 9*Z*cos(t)^2 - 36*t*sin(t)^2 - 36*t*cos(t)^2 + 12*X*sin(t) - 12*Y*cos(t)
```

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çağımızda bilgisayarlar ve bilgisayar yazılımları her alanda hayatımızın içerisinde öncelikli bir yer almıştır. Bu tez çalışması boyunca öncelikli amacımız açık kaynak kodlu yazılımların matematik öğretiminde ne kadar önemli bir yere sahip olduğunu göstermek olmuştur. Matematikte bilgisayar kullanımı, bazı konuların öğretilmesi, bazı algoritmaların kurulması, işlemlerin yürütülmesi, çözüm, analiz ve araştırmaların yapılması için olanak sağlamaktadır. Ayrıca, bilgisayar destekli matematik öğretimi, geçmişte tartışıldığı gibi öğretmenin yerini bilgisayarların alması değil aksine bilgisayar destekli eğitimde öğretmenlerin rehberlik rolünün kaçınılmaz olduğu vurgulanmaktadır.

Bu tez çalışmasında yazılımlar arasında kullanım kolaylığı ve uygulama alanlarının genişliği göz önünde bulundurularak SAGE yazılımı seçilmiş ve öncelikle açık kaynak kodlu yazılım SAGE kısaca tanıtılmaya çalışılmıştır. SAGE yazılımının desteklediği alanlar ve beraberinde gelen ilgili araçlar ve yazılımlar ile ilgili yapılabilen işlemler çizelge 2.1 de detaylı şekilde verilmiştir. Ayrıca sage arayüzünde karşımıza çıkan görüntülere de örnekler verilmiştir. Tezin içerisinde verilmekle birlikte altını çizmek anlamında SAGE programının çevrim içi kullanımı <http://www.sagemath.org/> internet sitesinden yapılabildiğini bir kez daha belirtmeliyiz.

Bu tez çalışmasında SAGE programının tanıtımının dışında asıl üzerinde durduğumuz konu, bu programın üniversitelerin lisans eğitiminde önemli yere sahip olan iki dersi lineer cebir ve diferansiyel geometri derslerinde ne tür örnekler üzerinde kullanılarak nasıl kolaylıklar sağladığı konusudur. Örneklerin öncesinde 2.bölümde lineer cebirin temel konusu vektörler ve matrisler konusu ele alınmıştır. Özel olarak vektörlerin lineer bağımsızlığı, iç (skaler) çarpımı, vektörel çarpımları konusu üzerinde durulmuştur ki vektörler, diferansiyel geometride de çok önemli bir yere sahiptirler. 3. bölümdeki Örneklerde de vektör işlemleri sage kodları kullanılarak nasıl basit bir şekilde elde edilebileceği gösterilmiştir. Bilgisayar

kullanımının kolaylığı ise işlemleri kısaltmak ve grafiklerle sonuçlar elde etmek açısından oldukça kullanışlıdır. Tezin içerisinde kısıtlı sayıda örneğe yer verilebilmiştir ana başlıkları ile ele alınacak olursa bunlar vektör ayrışımı, vektörlerin lineer bağımlılığı (bağımsızlığı), alt vektör uzayının boyutu vb.

Çok iyi bilindiği üzere eğriler teorisi diferensiyel geometrinin en önemli konularından birisidir. Tez çalışmamızın içerisinde Frenet vektörlerinin bulunuşu, bir eğrinin eğriliği burulması, eğrinin konum vektörünün belirlenmesi, eğrinin oskülatör, normal ve rektifiyan düzlemlerinin bulunması gibi fizik ve matematikte önemli bir yer tutan konulara 2. bölümde yer verilmiştir. Bu bölümde konu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiş ve ardından 4. Bölümde bunlar ile ilgili örnekler çözülmüştür. Bu örneklerin çözümlerinin bir kısmında önce temel diferensiyel geometri bilgisi kullanılıp ardından sage programındaki kodları ile çözüm bir daha ele alınmış, bir kısmında ise sadece sage ile çözümü verilmiştir.

Bu tez çalışması boyunca Anastassiou ve Iatan'nın 2014 yılında yapmış olduğu "Intelligent Routines II; Solving Linear Algebra and Differential Geometry with Sage" adlı kaynağa sıkça başvurulmuş ve bu kaynaktan bir derleme hazırlanmıştır. Ayrıca Sage ile lineer cebir derslerine bir başka açıdan bakılmak istenirse Beezer'ın 2011 yılında yayımlanmış olan "Sage for Linear algebra" adlı kaynak lineer cebir açısından detaylı bilgiler vermektedir.

Yaptığımız derleme çalışmanın matematik öğretiminde açık kaynak kodlu yazılımları kullanmak isteyenler için kullanışlı bir kaynak oluşturacağını umuyoruz. Ayrıca sadece Sage programı değil diğer açık kaynak kodlu yazılımlar da benzer şekilde incelenerek faydaları ortaya konulabilir. Ayrıca literatürde mevcut olan axiom, maxima, geogebra vb. birçok açık kaynak kodlu yazılımlar ile de benzer örnekler bilgisayar yardımıyla çözülebilir ve bunların çözüm yöntemleri ve kullanım kolaylıkları da karşılaştırılabilir. Hepsinin ortak özelliğinin de tamamen ücretsiz oluşu, kullanımının kolay olduğu ve her seviye öğrenciye (ortaöğretim, lisans, lisansüstü) hitap edebilecek farklı yazılımların da mevcut olduğu unutulmamalıdır.

KAYNAKLAR

Altuntaş, M.A., 2014. Matematik eğitiminde açık kaynak kodlu yazılımlar ve karşılaştırmaları, Yüksek Lisans Tezi, Aksaray Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Aksaray.

Anastassiou, G.A. ve Iatan, I.F., 2014. Intelligent routines II; solving linear algebra and differential geometry with sage, Springer International Publishing, Switzerland.

Baki, A., 2002. Öğrenen ve öğretenler için bilgisayar destekli matematik. Tübitak Bitav-Ceren Yayınları, İstanbul.

Beezer, R. A., 2011. Sage for linear algebra, Copyright Robert A. Beezer GNU Free Documentation License.

Hacısalıhoğlu, H.H., 1996. Lineer cebir cilt I, Bilim Yayınları, İstanbul.

Hacısalıhoğlu, H.H., 2000. Diferensiyel geometri, Cilt I-II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi Yayınları, Ankara.

Yıldırım, H.M., 2009. Açık kaynak kodlu ve özgür yazılım SAGE, XI. Akademik Bilişim Konferansı, Şanlıurfa, Bildiriler Kitabı, 303-305.

URL-1 <<https://members.loria.fr/PZimmermann/sagebook/english.html>>, alındığı tarih: 2.11.2017.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı :Mohammed Abdulmaged ISMAEL
Doğum Tarihi/Yeri :Duhok\ IRAK 27\07\1985
E-posta adresi :mohammed85ismael@gmail.com
Lisans :Duhok Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü,
2007-2010.

