

**T.C.
ADİYAMAN ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

**SALGIN HASTALIK MODELİNİN NİTELİKLİ ANALİZİ VE
UYGULAMALARI ÜZERİNE**

HAKİM BARAN

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADİYAMAN, 2022

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

SALGIN HASTALIK MODELİNİN NİTELİKLİ ANALİZİ VE UYGULAMALARI ÜZERİNE

Hakim BARAN

Adıyaman Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

Danışman : Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ
Yıl : 2022, Sayfa sayısı: VII+48

Jüri : Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ
Doç. Dr. Murat CANDAN
Dr. Öğr. Üyesi Serbay DURAN

Bu tez salgın hastalıkların matematiksel modelinin yapısını ve analizini içerir. Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde salgın hastalıkların tarihi incelendi ve salgın hastalıkların modellerine yer verildi. İkinci bölümde konu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalardan söz edildi. Üçüncü bölümde materyal ve yöntemlere yer verildi. Dördüncü bölümde tedavili ve tedavisiz *SIR* salgın model kararlılığı ve çatallanması araştırıldı ve bu iki model karşılaştırıldı. Son bölümde sonuçlar ve önerilere yer verildi.

Anahtar Kelimeler: *SIR* model; Salgın hastalıklar; Denge noktası; Kararlılık; Çatallanma

ABSTRACT

MSc Thesis

ON QUALIFIED ANALYSIS AND APPLICATIONS OF THE EPIDEMIC DISEASE MODEL

Hakim BARAN

Adiyaman University
Graduate Education Sciences
Department of mathematics

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ
Year : 2022 , Number of pages: VII+48
Jury : Assoc. Prof. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ
Assoc. Prof. Dr. Murat CANDAN
Asst. Prof. Dr. Serbay DURAN

This thesis includes the structure and analysis of mathematical models of epidemic diseases. The thesis consists of five chapters. In the first chapter, the history of epidemic diseases is examined; and the models of epidemic diseases are given. In the second part, previous studies on the subject are mentioned. In the third chapter, materials and methods are given. In the fourth chapter, the stability of the treated and untreated *SIR* epidemic model and bifurcation are investigated; and these two models are compared. In the last section, the results and recommendations are given.

Key Words: *SIR* model; Epidemic diseases; Equilibrium point; Stability; Bifurcation

BEYAN

“Tedavi Fonksiyonu ile *SIR* Salgın Modelinin Dinamikleri” başlıklı tezimde çalışmaların tamamen akademik kurallara ve etik değerlere sadık kalınarak yürütüldüğünü ve yazımda yararlandığım eserlerin kaynakçada gösterilenlerden oluştuğunu ayrıca alıntılardan bilimsel etiğe uygun atıf yaparak yararlanmış olduğumu beyan ederim.

Hakim BARAN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bana her daim yardımcı olup yönlendiren değerli hocam Doç. Dr. Özlem AK GÜMÜŞ'e teşekkür ederim.

Bana yüksek lisans dönemi boyunca sevgisini ve desteğini hiç esirgemeyip teşvik eden hayatımın en değerli varlığı eşim Yeşim BARAN'a ve bu hayatta hep yanımda hissettiğim değerli aileme teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

ÖZET.....	I
ABSTRACT.....	II
BEYAN.....	III
TEŞEKKÜR.....	IV
İÇİNDEKİLER	V
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	VI
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	VII
1. GİRİŞ	1
1.1. Salgın Hastalıkların Tarihçesi	1
1.2. Salgın Hastalık Modelleri.....	7
1.2.1. <i>SI</i> Salgın Modeli :.....	9
1.2.2. <i>SIS</i> Salgın Modeli :.....	10
1.2.3. <i>SIR</i> Salgın Modeli :.....	11
1.2.4. <i>SIRS</i> Salgın Modeli.....	12
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	16
3. MATERYAL ve YÖNTEM.....	22
4. BULGULAR ve TARTIŞMA.....	29
4.1. Sistem (4.3) için denge noktalarının varlığı ve kararlılığı.....	31
4.2. Sistem (4.4) için denge noktalarının varlığı ve kararlılığı.....	33
4.3. Nümerik Simülasyonlar.....	35
4.3.1. Sistem (4.3) için Nümerik Simülasyonlar	35
4.3.2. Sistem (4.4) için Nümerik Simülasyonlar	38
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	43
KAYNAKLAR	46
KİŞİSEL BİLGİLER.....	48

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1 Hastalık faz çizgisi diyagramı.....	9
Şekil 1.2 <i>SIR</i> salgını modeli için faz düzlemi diyagramı	12
Şekil 4.1 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5, \delta = 0.4$ parametre değerleri ile (4. 3) sisteminin zaman serisi grafiği	36
Şekil 4.2 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5$ ve $0 < \delta < 0.7$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin çatallanma grafiği.....	36
Şekil 4.3 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 90, \delta = 0.03$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin zaman serisi grafiği	37
Şekil 4.4 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 90$ ve $0 < \delta < 0.07$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin çatallanma grafiği	38
Şekil 4.5 $k = 0.5, \gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5, \delta = 0.2$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin zaman serisi grafiği	39
Şekil 4.6 $\gamma = 2, \mu = 4, k = 0.5, \lambda = 5$ ve $0 < \delta < 0.5$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin çatallanma grafiği.....	39
Şekil 4.7 $k = 0.5, \gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 90, \delta = 0.002$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin zaman serisi grafiği	40
Şekil 4.8 $\gamma = 2, \mu = 4, k = 0.5, \lambda = 90$ ve $0 < \delta < 0.05$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin çatallanma grafiği	41
Şekil 4.9 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5$ ve $0 < \delta < 0.020$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin çatallanma grafiği.....	42
Şekil 4.10 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5, k = 2$ ve $0 < \delta < 0.020$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin çatallanma grafiği	42

SİMGELER VE KISALTMALAR

Simgeler

ν	: Bağışıklık kaybı oranı
b	: Doğum-ölüm oranı
γ	: İyileşme oranı
β	: Birim zamanda enfekte olmuş bireyler tarafından yapılan ortalama temas
$\frac{dR}{dt}$	: Birim zamanda bağışıklık kazanan bireylerin değişim hızı
$\frac{dS}{dt}$	: Birim zamanda duyarlı bireylerin değişim hızı
$\frac{dI}{dt}$	: Birim zamanda enfekte bireylerin değişim hızı
R_0	: Temel üreme sayısı
E	: Hastalığa maruz kalma durumu; bulaşıcı olmadan önceki durum.
I	: Hasta olmuş kişiler
M	: Yeni doğanlarda anneden gelen bağışıklığın doğumdan bir müddet sonra kaybolması
N	: Toplam popülasyon büyüklüğü
p	: Aşılama oranı
R	: İyileşen ve hastalığa bağışıklık kazanan kişiler
S	: Hastalığa henüz yakalanmamış ve yakalanmaya açık sağlıklı kişiler sayısı
$T(I)$	: Tedavi fonksiyonu

Kısaltmalar

$MSEIRS$	: M, E, S, I, R değerlerinin olduğu model tipi
$SEIR$	: S, E, I, R değerlerinin olduğu model tipi
SI	: S, I değerlerinin olduğu model tipi
SIR	: S, I, R değerlerinin olduğu model tipi

1. GİRİŞ

Salgın hastalıkların yayılmasını anlamak, enfekte insan nüfusunu ölçmek ve hastalığı kontrol altına almak hastalıklarla mücadele etmek açısından önemlidir. Mücadele yöntemleri hastalıkların faktörüne göre değişmekle birlikte karantina, izolasyon, aşılama ve hastalık kaynağının bulunması, erken tanı, takip ve tedavi etkili yöntemlerdir. Tek bir çözümü olmayan hastalıkların kontrolünde toplumsal hijyen kurallarına riayet edilmesi, sağlıklı su ve kanalizasyon sistemlerinin sağlanması, sağlıklı ve yeterli beslenme gibi durumların önemi vazgeçilmezdir. Ayrıca sağlık tesislerinin tüm aşamalarının koordinasyonu, yerel ve genel bilim kurullarında epidemiyoloji ve halk sağlığı uzmanlarının görüş ve önerilerinin kullanılması, bireysel koruyucu sağlık hizmetleri için kaynakların ve tıbbi tesislerin etkin bir şekilde kullanılması giderek daha da önemli hale gelmektedir. Çeşitli hastalıklarla ilgili yüzlerce yıllık deneyim, insanlara gelecekteki salgınlarla başa çıkabileceğine dair umut vermektedir. Türkiye’inde içinde olduğu bu salgın döneminde hastalıkları anlamak, süreçleri değerlendirmek ve sonuçlar elde etmek hastalık gelişmeden riskleri ortadan kaldırmak toplumun kaliteli bir hayat sürmesi adına bir zorunluluktur. Bu çalışmada amaç matematiksel modelleri araç olarak kullanarak hastalıkların süreçleri konusunda fikir sahibi olmaktır. Hastalığı tanımlayan uygun matematiksel model alınarak model analiz edilir ve böylece hastalığın ilerleyişine dair sonuçlar elde edilir. Hastalığı tanımlayan matematiksel modelleri daha iyi anlamak için öncelikle geçmişte yaşanan büyük salgınları [21] araştırmak gerekir.

1.1. Salgın Hastalıkların Tarihçesi

Salgın hastalıklar, tarih boyunca insanlık için bir sorun oluşturmuştur. Çünkü sadece enfekte insanları değil, tüm toplumu birçok yönden etkilemiştir. Mikroorganizmalar da insanlar gibi modern ulaşım araçlarından faydalandığı için, hastalığa bağlı salgınlar geçmişe göre çok daha hızlı ve tehlikeli şekilde ortaya çıkmaktadır. Salgın, duyarlı organizmaları doğrudan veya dolaylı olarak enfekte eden, birçok organizma türüne yayılan ve hastalıklara neden olan patojenlerin neden olduğu bulaşıcı bir hastalık olarak tanımlanır. Pandemi terimi (eski Yunanca: pan: tüm +

demos: insanlar) ise çok geniş bir alana yayılan ve etkisini gösteren salgın hastalıklara verilen isim olarak karşımıza çıkmaktadır. Salgın olarak yayılan tüm bulaşıcı hastalıklar tipik bir protokol izler. Hastalığın sağlıklı insanlara kısa sürede bulaştığında yayılması, akut ve şiddetli seyri, enfekte kişinin kısa sürede ölmesi veya tamamen iyileşmesi, hastalıktan kurtulanda uzun süreli veya ömür boyu bağışıklığın gelişmesi ve varlığı taşıyıcıların belirli bir yüzdesine bağlılığını içermesi, bulaşıcı hastalık döngüsünün tipik özellikleridir. Salgınların ana nedeni, mikroorganizmaların doğadaki büyük dalgalanmalara verdiği tepkilerdir. Savaş, nüfus artışı, depremler, seller, kasırgalar, kıtlık, olağandışı hava koşulları, evsizlik ve çevre kirliliği bu dalgalanmaları yaratan durumlardandır. Örneğin, tarih boyunca Afrika'da yoksulluk ve ölüm; kolera, ebola, AIDS ve tüberküloz nedeniyle şiddetlenmiştir. HIV; Asya'nın kenar mahallelerinde, hantavirüs ise Kuzey Amerika'nın kenar mahallelerinde yayılmıştır. Salgın hastalıklar, orduları kırıp imparatorlukları yok etmiş, insanların yaşam tarzını sürekli değiştirmiş ve halen değiştirmeye devam etmektedir. Dünyada yaşanan salgın hastalıklara bakıldığında kolera salgınları; temizliğin önemini göstermiş, hemşireliğin gelişmesini sağlamış ve oral sıvı tedavisinin uygulanmasını gündeme getirmiş, çiçek hastalığı salgınları; eradikasyon da büyük rol oynayan aşının bulunmasına, verem salgınları ise zayıflatılmış canlı aşıların geliştirilmesini sağlamıştır. Dahası veba; karantina önlemlerinin gelişmesini sağlamış, sifiliz; cinsel yaşamda korkuyu ortaya çıkarmış, ilaç tedavisinin önünü açmış, sıtma; çevrede sağlığı olumsuz etkileyen biyolojik, fiziksel ve kimyasal etkenleri yok ederek veya kişilerin etkilenmesini önleyerek çevreyi olumlu hale getirmenin zeminini oluşturmuştur. Veba, çiçek, sifiliz, sıtma, kolera, ebola, tüberküloz, grip, AIDS ve günümüzün hastalığı Covid-19 da olduğu gibi farklı ve pek çok bulaşıcı hastalıkla baş edebilmek için bazı olumlu gelişmeler yaşama dahil edilse de, hastalıklar etkileri sebebiyle büyük salgınlara yol açarak insan nüfusunu büyük oranda azaltmıştır. Bu etkiler ile salgın hastalıkları daha iyi anlamak için onları ayrı bir şekilde incelemek yerinde olacaktır.

COVID-19 (koronavirüs) pandemisi: Covid-19 salgınının yeni olması sebebiyle sonuçları süreç devam ettiği için kestirmek güçtür, fakat tahminlerde bulunulabilir, çünkü en net sonuçlar ancak salgın sonrasında görülecektir. Bu nedenle şimdilik tarihteki salgınlar incelenip çıkarımlar yapılabilir.

SARS (severe acute respiratory syndrome-şiddetli akut solunum yolu sendromu) salgını: Koronavirüsün (SARS-CoV) sebep olduğu bir solunum yolu hastalığı olarak ortaya çıkmıştır. Damlacıklar yoluyla insandan insana geçtiği tespit edilmiştir. Salgın, Hong Kong'da başlamış ve Kasım 2002'den Haziran 2003'e kadar sürmüştür. SARS salgını sırasında dünya genelinde 8.422 vaka ve 916 ölüm meydana gelmiştir. 37 ülkeye yayılan salgından etkilenen insanların yarısı 65 yaş ve üstünde olduğu gözlemlenmiştir.

MERS (Middle East Respiratory Syndrome-Orta Doğu Solunum Yolu Sendromu) salgını: İnsandan insana yakın temasla bulaşan ve kendini ateş, öksürük ve nefes almada zorluk şeklinde gösteren MERS-CoV enfeksiyonunun her yaşta ortaya çıkabileceği görülmüştür. İlk olarak Eylül 2012'de Suudi Arabistan'da rapor edilmiştir, ancak geriye dönük araştırmalar, bilinen ilk vakaların Ürdün'de Nisan 2012'de meydana geldiğini ortaya koymuştur. MERS salgını Arap Yarımadası dışından gelen bir kişinin salgına neden olması sebebiyle 2015 yılında Güney Kore'de tekrar ortaya çıkmıştır. MERS, özellikle ilkbaharda hastane salgınlarına neden olmuş, ancak yıl boyunca yeni vakalar da gözlemlenmiştir. Bu nedenle enfeksiyonu ilerlemeden önlemenin ve kontrol etmenin önemli olduğu saptanmıştır.

Ebola salgını: Ebola virüsü hastalığı (EVH), insanlarda nadir görülen ve ölümcül bir hastalık olduğu bilinmektedir. EVH'ye neden olan virüsler esas olarak Sahra altı Afrika'da ortaya çıkmıştır. İnsanların, enfekte hayvanlarla veya Ebola virüsü bulaşmış hasta veya ölmüş kişilerle doğrudan temas yoluyla virüsü kapabilecekleri saptanmıştır. ABD Gıda ve İlaç Dairesi (FDA) tarafından onaylanan RVSV-ZEBOV aşısının güvenli olduğu ve yalnızca Zaire'den gelen ebolavirüs türlerine karşı koruduğu gösterilmiştir.

Sifiliz salgını: Treponema pallidum alttürünün yol açtığı cinsel yolla bulaşan bir enfeksiyon olduğu kanıtlanmıştır. Avrupa'da 18. ile 19. yüzyıllar arasında çok yaygın olduğu görülen bu hastalığın etkisi gelişmiş ülkelerde antibiyotiklerin yaygın kullanımı ile beraber, 20. yüzyıl içerisinde hızla azalmıştır. Çiçek hastalığının, "Eski Dünya"'nın "Yeni Dünya"'ya tehlikeli bir armağanı olarak bahsedildiği gibi, sifilizin de Amerika'nın Avrupa'ya biyolojik bir sürprizi olduğu vurgulanmıştır. Sifiliz kıtaya, 1493 yılında Kristof Kolomb'un gemisindeki denizciler ile gelmiş ve kalıcı olarak

yerleşerek takma saçı, antibiyotiği, kondomu, beraberinde cinsel yaşamda korkuyu tanıtmıştır.

Sıtma salgınları (malaria: kötü hava): Dişi Anopheles sivrisinekleri tarafından insanlara bulaşan “Plasmodium falciparum” adında parazit türünün sebep olduğu ateşli ve en ölümcül hastalık olduğu bilinmektedir. Asurbanipal'in MÖ 1500'deki kitaplığındaki kil tabletler ve klasik bir Çin tıbbi eseri olan ‘Classic of Medicine’ deki kayıtlar, genişlemiş dalak, periyodik ateş, baş ağrısı ve titremeden bahsetmiştir. Hipokrat, “Peaks and Diseases” kitabında belirli sıtma türlerini tanımlamıştır. Dünya genelinde sıtmadan kurtulanların sayısı artıyor olsa da, 2018'de yaklaşık 228 milyon sıtma vakası tespit edilmiştir (Afrika'da 213 milyon, %93, Güneydoğu Asya: %3,4 ve Doğu Akdeniz: %2,1). Tüm çabalara rağmen özellikle Türkiye'nin Güney ve Güneydoğu Anadolu bölgelerinde görülmekte olup, bildirimi zorunlu bir hastalık olarak karşımıza çıkmaktadır. Sıtma kontrol girişimleri; bataklıkları kurutmayı, böcek ilacı emdirilmiş cibinliklerin kullanımını ve ekolojik olarak daha az zararlı böcek ilaçlarının püskürtülmesini içermektedir. Bu hususta erken teşhisin çok önemli olduğu belirtilmiştir.

Grip salgınları: Zarflı, tek sarmallı RNA virüsleri olan Orthomyxoviridae ailesinden influenza A, B ve C virüslerinden kaynaklandığı bilinmektedir. Toplumda grip A ve B nin her yıl yaygın olarak görüldüğü, A tipinin salgınlara da neden olabildiği ve grip C virüslerinin sadece hafif hastalığa sebebiyet verdiği bilinmektedir. Virüslerin epidemiyolojik başarısının, virüsün devam eden evriminin bir parçası olarak sürekli mutasyona uğramalarına bağlı olduğu vurgulanmaktadır. Tıptaki birçok ilerlemeye rağmen virüslerin insanlar için bir tehdit oluşturmayı başardığı görülmektedir.

İspanyol gribi: 20. yüzyılda influenza pandemileri her on yılda bir tekrarlamıştır ve bunların en şiddetlisi 1918-1919 yıllarında milyonlarca insanı öldürdüğü tahmin edilen H1N1 virüsünün neden olduğu "İspanyol gribi" olmuştur. 4-6 ay içinde, tamamen yeni bir influenza virüs alt tipi ortaya çıkmış ve iki yıllık bir süre boyunca çeşitli dalgalar halinde dünyaya yayılmıştır. Tarihin en büyük grip salgını olarak bilinen bu grip, 1918 yılında Birinci Dünya Savaşı sırasında başlamış ve askeri kampların hareket etmeye devam etmesiyle bir salgın haline gelmiştir. İspanyol

gazetelerinde adı geçtiği için İspanyol gribi denmiş ve İspanya savaşa gitmeyen bir ülke olduğu için bu bilgi sansürlenmemiştir. Osmanlı İmparatorluğu dahil tüm dünyayı etkisi altına alan salgın, sağlıklı gençleride etkilemesi bakımından geçmişteki salgınlardan farklı olmuştur. Asya gribi, 1956'da Çin'de ortaya çıkan ve 1958'e kadar devam eden influenza A-H2N2 alt tipinin bir salgını olarak belirlenmiştir. İki yıl içinde Çin'in Guizhou eyaletinden Singapur, Hong Kong ve Amerika Birleşik Devletleri'ne yayılarak yaklaşık iki milyon insanı, 1968'de ise A-H3N2 virüsünün neden olduğu Hong Kong gribi yaklaşık 4 milyon insanı öldürmüştür.

Veba salgınları: Gram-negatif bir bakteri türü ve hareketsiz bir kokobasil olan *Yersinia pestis* etken organizması, Fransız Alexandre Yersin (1863-1943) tarafından tanımlanmıştır. En yaygın olanı hıyarcıklı form olmuştur. Klinik belirtilere göre enfekte fareleri ısırarak *Y. pestis*'i yutan pireler, insanların derisine bu maddeyi yerleştirdikten en az iki en fazla sekiz gün sonra hastalığın ortaya çıktığı bulunmuştur. Sepsis ve pnömoni komplikasyonlarının varlığından dolayı ölümlerin arttığı görülmüştür. 541, 1347 ve 1894 yıllarında dünyada her seferinde yüksek ölüm oranlarına neden olan üç büyük veba kaydedilmiştir. Hepsinin farklı yayılma biçimlerine ve coğrafi kaynaklara sahip oldukları belirtilmiştir. MS 160'ta Hun İmparatorluğu'nun çöküşünde rol oynamıştır. MS 165 ile 180 yılları arasında Roma İmparatorluğu'nda yaklaşık 5 milyon kişinin ölümüne neden olmuştur. İlk veba salgını; 541 yılında Mısır'da başlamıştır. Ekonomik, sosyal ve dini yönden birçok etkisi olan bu veba (541-542), Bizans İmparatorluğu'nun çöküşüne neden olduğundan imparatoru onurlandırmak için "Justinian Vebası" olarak adlandırılmıştır. Avrupa, Kuzey Afrika, Orta ve Güney Asya'daki popülasyonların yarısından fazlasının bu salgın sırasında kaybedildiği düşünülmüştür. İkinci veba salgını; 1347-1351 yılları arasında yaşanmış ve "Kara Ölüm" olarak adlandırılmıştır. Hastalığın "kara ölüm" olarak nitelendirilmesinin nedeni, siyah renkli şişliklerin (iltihap ve LAP) hastalığın tipik özelliği olmasından kaynaklanmıştır. Dünya ikliminin 1330'lardaki değişimi bozkırlardaki kemirgenlerin hayatını yok etmiş, sıcak ve kuru rüzgârlar, bakteri, pire ve hayvanları çöllerden Moğolların yerleşim yerlerine sürmüş, taze baharat, ipek vb. ticareti ile hastalık Asya ve Avrupa'ya taşınmış, bütün şiddetiyle görüldüğü 1348 sonrasında Avrupa'yı birkaç nükleer savaşa eşdeğer bir etkiyle vurmuştur. "Kara

ölüm”, ortaçağ yaşamında hayatı her yönden değiştirmiş ve feodalizme darbe vurmuştur. 1720-1722 yılları içinde 75-200 milyon bireyin öldüğü kabul edilen Fransa’dan süregelen Büyük Marsilya salgını sonrasında 3. pandeminin 1855’te Çin’de başlayarak yayılmış olduğu tahmin edilmiştir. 1898 ile 1918 yılları arasındaki on senelik müddette 12,5 milyon Hintlinin can verdiği düşünülmüştür. Veba salgınları, 1950’li yıllardan sonraki koruyucu hekimlik önlemleri ve antibiyotiklerin kullanılmaya başlaması ile yavaşlatılabilmektedir.

Kolera salgınları: Etken ajanı V. Cholera olan kontamine su ve yiyeceklerle bulaşarak akut ishale neden olan bulaşıcı bir hastalık olduğu bulunmuştur. Bilinen ilk kolera salgını 1817’de ortaya çıkmış ve 19. yüzyılın en ölümcül hastalığı olmuştur. 2004-2014 yılları arasında toplam 2.260.389 vaka ve 45.543 ölüm gözlemlenmiştir. Saatler içinde ölüme sebep olabilen hastalıkta iyi bir tedavi ile hastalığa yakalananların ölüm hızı %20’lerden %1’lerin altına indirilmiştir. Son yıllarda halen arada bir salgınlar yapabilen koleranın, tarihte Asya’nın ilk kolera salgını olarak bilineni 1817-1824 yılları arasında olmuş ve milyonlarca kişi yaşamını kaybetmiştir. 19. yüzyılın üçüncü büyük kolera salgını 1852’den 1860’a kadar sürmüştür. Üçüncü salgın Hindistan’da ortaya çıkmış, Ganj deltasından yayılmış ve Asya, Avrupa, Kuzey Amerika ve Afrika’da bir milyondan fazla insanın ölümüyle sonuçlanmıştır. Londra’nın yoksul bir bölgesinde çalışan Dr. John Snow, kolera vakalarının izini sürmüş ve sonunda, hastalığı bulaştırmanın bir yolu olarak kontamine suyu tanımlamayı başarmıştır.

Tifo salgınları: Hastalık etkeni olan Salmonella bakterisinin kontamine içme suyu ve kirli gıdalar yoluyla bulaşıp vücuda girmesinden 7-15 gün sonra ortaya çıktığı bulunmuştur. Bakteriler hastaların dışkısında, idrarında, kanında, tükürüğünde veya deri döküntülerinde görülmüştür. Dünyada her yıl 20 milyona yakın tifo vakası görülürken, bu görülen vakaların 200 bine yakını ölümle sonuçlanmıştır. Tifo kontrolünde, içme ve kullanma sularının kontrolü, besin hijyeni ve sağlıklı beslenme, lağım ve kanalizasyon altyapısının hijyen kurallarına uyularak yapılması, sıvı ve antibiyotik tedavisi içermesinin önemli olduğu vurgulanmıştır. Endemik ülkelere seyahat etmeden önce tifo aşısı önerilmektedir, ancak korumasının tam olmadığı bilinmektedir.

1.2. Salgın Hastalık Modelleri

Salgın hastalıklar [22], popülasyondaki bireylerin sağlıklı, hastalıklı ve bağışıklık durumlarına göre sınıflandırılmasıyla modellenir. Virüs veya bakterilerin neden olduğu hastalıklar doğrudan nüfus düzeyinde değil, sadece dolaylı olarak enfekte olmuş bireylerin sayısı ile modellenir. Hastalık durumları S, I ve R aşağıdaki gibi tanımlanır:

S (Duyarlı) = enfekte olmayan ancak hastalığı kapma ve enfekte olma yeteneğine sahip kişiler,

I (Enfekte) = enfekte ve bulaşıcı olan, hastalığı başkalarına aktarabilen bireyler,

R (Bağışık) = iyileşen ve hastalığa bağışıklık kazanan veya iyileşme ve bağışıklık oluşana kadar izole edilen bireyler.

Bu üç duruma sahip modeller SIR salgın modelleri olarak adlandırılır. SIR salgın modelinin, bireylerin bağışıklık kazanıp kazanmadığına veya iyileşip iyileşmediğine bağlı olarak varyasyonları vardır. Bu tip bazı modellere ait kısaltmalar aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$S \rightarrow I, SI$ (iyileşme yoktur, tüm duyarlı bireyler hasta olur),

$S \rightarrow I \rightarrow S, SIS$ (iyileşmeyi gerektirir, ancak bağışıklık yoktur),

$S \rightarrow I \rightarrow R, SIR$ (kalıcı bağışıklık),

$S \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow S, SIRS$ (geçici bağışıklık).

Salgın dinamikler, nüfus dinamiklerinden daha hızlı bir zaman ölçeğinde meydana gelir. Bir $SIRS$ salgın modeline karşılık gelen diferansiyel denklemler doğum oranı ölüm oranı eşit olacak şekilde dikkate alınarak aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} SI - bS + bS + bI + bR + vR$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} SI - \gamma I - bI$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - bR - vR . \quad (1.1)$$

Model (1.1) de başlangıç koşulları $S > 0$, $I > 0$, $R \geq 0$ olmak üzere $S(0) + I(0) + R(0) = N$ dir. Bu modelde kullanılan parametreler aşağıdaki gibi tanımlanır;

- β = Birim zamanda enfekte olmuş bireyler tarafından yapılan ortalama yeterli temas sayısı,
- $\frac{\beta}{N} S$ = Birim zamanda enfekte olmuş bir birey tarafından yapılan ve her seferinde duyarlı bir bireyin enfeksiyonuna yol açan ortalama yeterli temas sayısı,
- $\frac{\beta}{N} SI$ = Birim zamanda tüm enfekte olmuş bireylerin neden olduğu enfeksiyon sayısı,
- γ = İyileşme oranı , $\frac{1}{\gamma}$ = Ortalama enfeksiyon periyodu,
- v = Bağışıklık kaybı oranı , $\frac{1}{v}$ = Bağışıklığın ortalama uzunluğu,
- b = Doğum oranı = Ölüm oranı,
- N = Toplam popülasyon büyüklüğü.

Diferansiyel denklemlerde tanımlanan iyileşme ve bağışıklık kaybına bağlı olan γI ve vR lineer fonksiyonlardır. İyileşme veya bağışıklık kaybının oranı, sırasıyla γ ve v parametreleriyle tanımlanır. $1/\gamma$ iyileşme için ortalama bekleme süresi (ortalama enfeksiyon dönemi) ve $1/v$ de bağışıklık için ortalama bekleme süresi (ortalama bağışıklık dönemi) olarak ifade edilir. Eğer popülasyonda doğum oranı ölüm

oranına eşit alınırsa, popülasyon büyüklüğünün zaman içinde sabit kalacağı açıktır. Yani $S(t) + I(t) + R(t) = N$ ve $dS/dt + dI/dt + dR/dt = 0$ anlamına gelir.

Dört temel salgın modelinin (SI , SIR , SIS ve $SIRS$) dinamikleri aşağıdaki dört örnekle incelenecektir. Her örnekte, doğumun ve ölümün olmadığı varsayılmaktadır, $b = 0$ alınır.

1.2.1. SI Salgın Modeli :

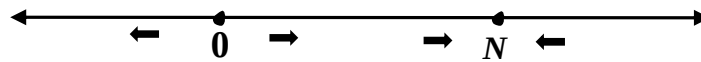
Doğum ve ölüm olmadan basit bir SI salgın modeli aşağıdaki forma sahiptir:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} SI \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI.\end{aligned}\tag{1.2}$$

Model (1.2) de $S(0) > 0$, $I(0) > 0$ olmak üzere $S(0) + I(0) = N$ dir. Böylece $S(t) + I(t) = N$ ve S 'nin yerine $(N - I)$ yazarsak hastalığın zamana bağlı değişimi

$$\frac{dI}{dt} = \beta I \left(1 - \frac{I}{N}\right)\tag{1.3}$$

olur. Denklem (1.3), N tarafından verilen taşıma kapasitesi ile lojistik büyümedir.



Şekil 1.1 Hastalık faz çizgisi diyagramı

Şekil 1.1'deki bir faz çizgisi diyagramında $I(t) \rightarrow N$ olması durumu herkesin enfekte olduğunu gösterir. Bu tür modeller, nüfusun büyük bir kısmının enfekte olduğu grip gibi oldukça bulaşıcı bir hastalık için geçerlidir. Salgının süresi sadece enfeksiyona kadar takip edilir, ancak iyileşme gerçekleşmez.

1.2.2. SIS Salgın Modeli :

Doğum ve ölüm olmayan basit bir SIS modeli aşağıdaki forma sahiptir:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} SI + \gamma I$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} SI - \gamma I$$

ve burada γ , bu modeldeki iyileşme oranıdır. Aynı zamanda $S(0) > 0$, $I(0) > 0$ ve $S(0) + I(0) = N$ dir. Yine $S(t) + I(t) = N$ ve S 'nin yerine $(N - I)$ yazarsak hastalığın zamana bağlı değişimi

$$\frac{dI}{dt} = (\beta - \gamma)I \left(1 - \frac{\beta}{(\beta - \gamma)N} I \right)$$

olarak ifade edilir. $\beta \neq \gamma$ için; eğer $\beta > \gamma$ ise, enfekte olmuş popülasyon $(\beta - \gamma)N / \beta$ sayısına ve duyarlı popülasyon $\gamma N / \beta$ sayısına yaklaşır. Açıktır ki hastalık kalıcıdır. Eğer $\beta \leq \gamma$ ise, o zaman enfekte popülasyon sıfıra yaklaşır; salgın devam etmez. SIS tipi modeller, bireylerin tedavi edildiği, ancak hemen tekrar duyarlı hale geldiği bel soğukluğu ve frengi gibi cinsel yolla bulaşan hastalıklara uygulanmıştır.

SIS salgın modelindeki β / γ oranı temel üreme değeri olarak adlandırılır ve genellikle R_0 olarak belirtilir. $\beta = \lambda N$ olarak yeniden tanımlarsak, temel üreme sayısı

$$R_0 = \frac{\beta}{\gamma} = \frac{\lambda N}{\gamma}$$

olur. Temel üreme sayısı R_0 , bir enfekte bireyin bulaşıcı döneminde $(1/\gamma)$ neden olduğu ikincil enfeksiyonların (β) sayısıdır [3]. R_0 parametresi epidemiyolojide çok önemli bir parametredir. SIS salgın modeli için, R_0 değeri salgın dinamikler hakkında çok daha fazla öngöründe bulunur. Genellikle, $R_0 > 1$ ise, enfekte olmuş bireylerin

popülasyona dâhil edilmesi bir salgın ile sonuçlanır. $R_0 > 1$ ise hastalık endemik hale gelirken $R_0 \leq 1$ ise hastalık kaybolur.

1.2.3. SIR Salgın Modeli :

Doğum ve ölümün olmadığı SIR modelinin formu;

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\frac{\beta}{N} SI \\ \frac{dI}{dt} &= \frac{\beta}{N} SI - \gamma I = I \left(\frac{\beta}{N} S - \gamma \right) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}\tag{1.4}$$

ile verilebilir. Model (1.4) de $S(0) > 0$, $I(0) > 0$, $R(0) \geq 0$, ve $S(0) + I(0) + R(0) = N$ dir. Böylece $S(t) + I(t) + R(t) = N$ olduğu açıktır. $R(t)$; $S(t)$ ve $I(t)$ den bulunabildiğinden, sadece S ve I değişkenlerini dikkate almak yeterlidir. $\frac{dI}{dt}$

ifadesini $\frac{dS}{dt}$ ifadesine oranlarsak

$$\frac{dI}{dS} = -1 + \frac{\gamma N}{\beta S}\tag{1.5}$$

elde edilir. (1.5) denklemini çözülürse

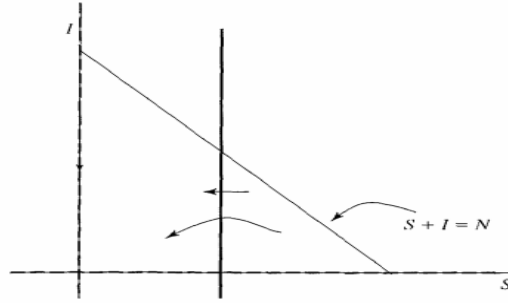
$$I(t) = N - R(0) - S(t) + \frac{\gamma N}{\beta} \ln \frac{S(t)}{S(0)}$$

elde edilir. Ayrıca, $S(t)$ büyüklüğünün azaldığını ve $S(t) = \gamma N / \beta$ olduğunda maksimum $I(t)$ oluştuğunu görebiliriz. $S(t)$; t 'nin azalan bir fonksiyonu olduğundan, $S(0) > \gamma N / \beta$ ise, $I(t)$ maksimuma yükselir (salgın oluşur), sonra sıfıra düşer. Öte

yandan, $S(0) \leq \gamma N / \beta$ ise, $I(t)$ sıfıra düşer. Yani her iki durumda salgın yok olacaktır. Bir SIR modeli için değişen dinamikler aşağıdaki oranla verilebilir:

$$R = \frac{\beta}{\gamma} \frac{S(0)}{N} = R_0 x^*.$$

Burada $x^* = S(0) / N$ duyarlı bireylerin oranı ve $R_0 = \beta / \gamma$ temel üreme sayısıdır. R parametresine bazen etki oranı denir [3,22].



Şekil 1.2 SIR salgını modeli için faz düzlemi diyagramı

Şekil 1.2 deki faz düzlemi diyagramı *SIR* dinamiklerini göstermektedir. Çözümler S ekseninde bir noktaya eğilimlidir.

1.2.4. *SIRS* Salgın Modeli

Dört temel salgın modelden sonuncusu, doğum ve ölüm olmaksızın *SIRS* salgın modelidir. Model aşağıdaki forma sahiptir:

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} SI + \nu R$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta}{N} SI - \gamma I = I \left(\frac{\beta}{N} S - \gamma \right)$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma I - \nu R. \quad (1.6)$$

Model (1.6)'da benzer şekilde $S(0) > 0$, $I(0) > 0$, $R(0) \geq 0$, $S(0) + I(0) + R(0) = N$ ve $S(t) + I(t) + R(t) = N$ yazılır. $R(t)$; $S(t)$ ve $I(t)$ den elde edilebildiği için S ve I değişkenlerini dikkate almak yeterlidir. Denklem (1.6) da $R = (N - S - I)$ olmak üzere S ve I ya bağlı diferansiyel denklemleri yazarsak

$$\frac{dS}{dt} = -\frac{\beta}{N} SI + \nu(N - S - I)$$

$$\frac{dI}{dt} = I \left(\frac{\beta}{N} S - \gamma \right)$$

elde edilir. Model (1.6) nın dinamikleri *SIR* modelinden farklıdır. Salgının yok olduğu durum meydana gelmez. Bireylerde oluşan bağışıklık kaybı, hastalığın yöresel (yaygın) olmasına izin verir. Hastalığın yaygınlığının durumu temel üreme sayısı ile belirlenir.

Şimdiye kadar modellerimizde kullanılan $\beta SI / N$ ifadesine genel olarak standart etki oranı, λSI ya ise genel olarak kitle hareketi etki oranı denir. Burada incelenen tüm modellerde popülasyon büyüklüğü sabit olduğundan kitle hareketi veya standart etki ile tanımlanan modellerin dinamiklerinde fark yoktur. Tanımlardan da görebileceği gibi, kitlesel etki, temas oranlarının nüfus (popülasyon) büyüklüğüne veya yoğunluğuna bağlı olduğunu ima eder, ancak standart etki için temas oranları popülasyon büyüklüğünden bağımsızdır. N sabit değilse yani zamana göre değişirse, kitlesel etkili salgın modeller ve standart etkili modeller oldukça farklı dinamikler üretebilir.

Modeli daha gerçekçi hale getirmek için temel salgın modellere ek durumlar dâhil edilebilir. Örneğin, gizli veya maruz kalma durumu; bulaşıcı olmadan önceki dönemdir. Bahsedilen gizli durum popülasyon modellerinde E olarak gösterilir, böylece model bir *SEIR* salgın modeli olarak adlandırılır. Çocukluk çağı hastalıklarında sıklıkla yer alan bir başka durum, yeni doğanların başlangıçta anneden gelen antikorlar (hastalığa önceden maruz kalmış bir anneden) nedeniyle enfeksiyona karşı bağışıklık olduğu bir aşamadır. Sonunda, yeni doğan bu bağışıklığı kaybeder ve

duyarlı hale gelir. Bu son durum M olarak belirtilir. Tüm durumlar modele dâhil edilirse, *MSEIR* salgın modeli olarak adlandırılır.

Kitle aşılama programlarının etkisi temel salgın modellerde incelenebilir. Aşılama, enfeksiyon etkisini doğrudan veya dolaylı olarak azaltır veya ortadan kaldırır. Aşılanan bireyler doğrudan enfeksiyondan korunur ve daha az bulaşıcı birey olurlar. Bu durum aşılanmamış duyarlı bireylerin hastalıkla temas etme olasılığının azalmasına neden olur. Bu ikinci dolaylı etkiye sürü bağışıklığı denir. Aşılama programının etkili olabilmesi için aşılanan popülasyon sayısı pN olmak üzere aşılanmayan popülasyonu gösteren $(1-p)N$ nin hastalığın devam etmesini sağlayan eşik değerinden daha az sayıda olması gerekir. Bir *SIR* salgın modelinde $R = R_0 x^*$, $R_0 = \beta / \gamma$ ve $x^* = S(0) / N$ olmak üzere bir salgının başlangıcında $S(0) \approx N$ olması durumu doğrudur. Dolayısıyla, duyarlı bireylerde pN kişi aşılanırsa $S(0) \approx (1-p)N$ ve $R = R_0(1-p)$ olur. Bir salgını önlemek için, $R_0(1-p) < 1$ olmak üzere minimum p değeri için bir tahmin $R_0(1-p) = 1$ veya $p = \frac{R_0 - 1}{R_0}$ dır. İngiltere ve Galler'de (1956-1968) yapılan çalışmada kızamık için tahmin edilen R_0 değeri 13'e yakındır. O halde salgını önlemede minimum aşılama oranı

$$p = \frac{13-1}{13} = \frac{12}{13} \approx \%92$$

dir. Aşı önleyici bir stratejidir. Toplu aşılamamanın olumsuz sonuçları olabilir. Bir hastalık çocuktan ziyade yetişkin olarak edinilirse, daha ciddi sonuçlar ortaya çıkabilir. Örneğin, hamile bir kadına bulaşmış kızamıkçık yeni doğanda doğuştan kızamıkçık sendromuna neden olabilir. Herhangi bir toplu aşılama programının başlatılması, tüm sonuçların dikkatle incelenmesini gerektirir. Bununla birlikte, bir salgın sırasında, hastalık için herhangi bir aşı veya tedavi mevcut değilse, şüpheli vakaların karantinası veya hastalık teşhisi konanların izolasyonu alternatif stratejilerdir. Bu kontrol stratejileri, 2003 yılında SARS-Şiddetli Akut Solunum Sendromu adlı yeni bir hastalığın ortaya çıkmasında kullanıldı. 2019 da tüm dünyayı etkileyen COVID-19

hastalığında da şüpheli vakaların karantinası ve hastalık teşhisi konanların izolasyonu yapılarak hastalığın yayılması önlendi.



2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

Brauer F., Castillo-Chavez C. [1] çalışmalarında özellikle bulaşıcı hastalıkların yayılması bağlamında, ekolojideki klasik uygulamaların epidemiyolojideki daha yeni uygulamalarla bütünleştirilmesi yoluyla matematiksel biyoloji alanına bir giriş sağlar. Modellemeyi, matematiğini ve uygulamalarını incelemişlerdir.

Britton N.F. [2] kitabında bir salgın sürecinin modellenmesi için etkilenen nüfus, hastalığın yayılma şekli, hastalıktan kurtulma veya popülasyondan uzaklaştırma nüfusla ilgili olarak modellemiştir. Nüfus dinamikleri için nüfusun doğum ve hastalıkla ilgili olmayan ölüm oranını ihmal etmiştir.

Herbert W.H. [3] çalışmasında popülasyonlarda bulaşıcı hastalıkların yayılmasını açıklayan birçok model matematiksel olarak analiz edilmiş ve belirli hastalıklara uygulanmıştır. Klasik *SIR* epidemik ve endemik modeller için temel üreme sayısı R_0 , temas oranı σ ve değiştirme sayısı R yi içeren eşik teoremleri gözden geçirilmiştir.

Ak Gümüş Ö., Selvam A.G.M, Vianny D. [4] yaptıkları çalışmada fark zamanlı salgın modelin hastalıklı ve hastalıklı denge noktalarının asimptotik kararlılıklarını analiz etmişlerdir. Ek olarak “period-doubling çatallanma”nın oluşması için gerekli koşullar elde edilmiş ve bununla birlikte elde edilen sonuçlara bağlı olarak zaman serisi grafikleri, faz portreleri ve çatallanma diyagramları çizilerek doğrulanmıştır.

Ak Gümüş Ö., Acer S. [5] yaptıkları çalışmada enfeksiyonu diğer bireylere bulaştıran ayrık zamanlı bir *SIS* modelinde enfekte bireylerin durumunu belirleyen eşik parametresini bulmak ve enfeksiyona yakalanan birey sayısını belirlemekle ilgilidir. Bu çalışmada öncelikle modelin denge noktaları incelenmiş ve hastalıklı birey sayısına bağlı olarak tek bir pozitif denge noktasının varlığı belirlenmiştir. Eşik parametresine bağlı olarak denge noktasının lokal asimptotik kararlılık koşulları araştırılmıştır. Ayrıca, bu denge noktalarının topolojik bir sınıflandırması sağlanmıştır. Son olarak verilen modelde “period-doubling çatallanma”nın ortaya çıkmasını sağlayan koşullar elde edilmiş ve elde edilen teorik sonuçlar SageMath yazılımı kullanılarak sayısal örneklerle doğrulanmıştır.

Selvam A.G.M., Vianny D.A., Jacintha M. [6] makalelerinde insan popülasyonunda çocukluk çağı hastalığının *SIR* epidemik modelini incelemeyi önermiştir. Kesirli mertebeden fark zamanlı *SIR* salgın modeli göz önüne alınmıştır. Hastalıksız ve endemik denge noktalarının lokal asimptotik kararlılığı tartışılmış ve temel üreme sayısı R_0 yeni nesil matris yöntemi ile elde edilmiştir. Sonuçları doğrulamak için uygun başlangıç koşulları altında zaman serisi grafikleri, faz portreleri, çatallanma diyagramı sayısal örnekler kullanılarak sunulmuştur.

Selvam A. G. M., Vianny D.A. [7] yaptıkları çalışmada, bir popülasyonda hastalık yayılımının dinamiklerini açıklayan kesirli mertebeden *SIR* salgın modeli ile ilgilenmişlerdir. Hastalıksız Denge (DFE) ve Endemik Denge (EE) noktaları hesaplanmış ve bu noktalardaki kararlılık durumu tartışılmıştır. Temel üreme sayısı R_0 sayısını hesaplamak için yeni nesil matris yöntemi uygulanmıştır. Zaman grafikleri, faz portreleri ve çatallanma, farklı parametre değerleri için çizilmiştir. Kesirli mertebeden fark zamanlı *SIR* salgın modelinin sayısal simülasyonları, salgın modelinin kararlılık sonuçlarını göstermek için gerçekleştirilmiştir.

Din Q. [8] bu çalışmasında, ayrık zamanlı bir salgın modelinin niteliksel davranışını incelemiştir. Daha açık olarak, hem hastalıksız hem de endemik denge noktalarının asimptotik kararlılığını araştırmıştır. Ayrıca yazar, karşılaştırma yöntemini kullanarak belirli parametrik koşullar altında bu denge noktalarının global kararlılığını elde etmiş ve teorik sonuçlarını desteklemek için bazı açıklayıcı örnekler vermiştir.

Wang W., Ruan S. [9] makalelerinde enfekte bireylerin tedavisi için sınırlı kaynakların hastalığın yayılması üzerindeki etkisini anlamak için, enfekte bireylerin sabit bir uzaklaştırma oranına sahip bir salgın modeli üzerinde durmuşlardır. Hastalığı yok etmek için endemik dengeleri ortadan kaldıracak kadar büyük bir tedavi kapasitesi almanın gereksiz olduğu bulunmuştur. Hastalığın yayılmasının sonucunun, belirli bir parametre aralığı için başlangıç durumlarının konumuna bağlı olabileceği gösterilmiştir. Ayrıca modelin, eyer düğümü (saddle-node) çatallanması, kritik altı

Hopf çatallanması ve homoklinik çatallanma dahil olmak üzere bir dizi çatallanma geçirdiği de gösterilmiştir.

Feng Z., Thieme H.R. [10] çalışmalarında kızamık ve diğer çocukluk çağı hastalıklarını tekrarlayan salgınları daha önce sönümlenmiş salınımlar ve mevsimsel stokastik uyarım oluşturan içsel epidemiyolojik güçlerin etkileşimi ile açıklamışlardır. İzolasyonun (yani, hasta bireylerin evde kalması ve bulaşıcı etkilerinin azalması), kişi başına temas sayısının mevcut bireylerin sayısından büyük ölçüde bağımsız olması koşuluyla, kendi kendine devam eden salınımlar yaratabileceğini göstermişlerdir. Bu, hastalık insidansı için bilineer kitle eylem teriminin, izole edilmemiş bireylerin sayısına bölünerek değiştirildiği anlamına geldiğini söylemişlerdir.

Hyman J.M., Li J. [11] çalışmalarında duyarlı-enfektif-duyarlı (SIS) modelini ve cinsel yolla bulaşan hastalık (STD) modelini formülize edip analizini yapmışlardır. Yüksek düzeyde enfekte olmuş bir gruptaki insanlarla temas kurmaktan kaçınarak salgının yayılmasını sınırlamak için çalışmalarında iki yolla analiz yapılmıştır. Birinci yollarında, yüksek düzeyde enfekte olan gruptaki kişiler, yalnızca kendi gruplarının dışındaki kişilerle temas kurmasını; ikinci yollarında ise bir grup yüksek oranda enfekte olduğunda, diğer gruptaki insanlar bir izolasyon stratejisi benimser ve yüksek oranda enfekte olmuş bu gruptaki insanlarla herhangi bir temas olmamasını sağlarlar. İkinci yaklaşımın salgını yüksek düzeyde enfekte olan grupla sınırlayabileceğini gösteriyorlar. Diğer grup enfeksiyondan arınmış olacak, ancak toplam nüfustaki salgın, salgın eşiğini aştığı sürece salgının devam edeceğinden bahsetmişlerdir. Enfeksiyonsuz grubun grup üreme sayısı birden fazlaysa ve enfeksiyonun enfeksiyonsuz grubu istila etmesi gerekiyorsa, bu kendilerini izole etmemiş olmaları durumunda meydana gelecek olana benzer bir salgına yol açacağını söylemişlerdir. Bu basit iki gruplu modelde, bu izolasyon stratejileri bir STD salgınının boyutunu azaltabilse de, bir salgını önlemede etkisiz olduğunu ve o zaman kendilerini diğer gruptan izole etmeselerdi meydana gelecek olana benzer bir salgına yol açacağını söylemişlerdir.

Wu, L. Feng Z. [12] çalışmalarında çocukluk hastalıklarının bulaşma dinamiklerini tanımlayan bir ODE sistemini ele almışlardır. Biyolojik hususlar nedeniyle durum uzayında belirli kısıtlamalara tabi olan orijinal sistemin olası karmaşık dinamiklerini yakalamak için normal formun üç parametrelili bir açılımını incelemişlerdir. Bozulmuş sistemin homoklinik çatallanma ürettiğini göstermişlerdir.

Wang W. [13] çalışmasında tedavi kapasitesinin etkisini anlamak için tedavi için sınırlı kaynağa sahip bir salgın modeli önermiştir. Tedavi hızının kapasitenin altındaki enfeksiyon sayısı ile orantılı olduğu ve enfeksiyon sayısı kapasiteden fazla olduğunda sabit olduğunu varsaymıştır. Kapasite küçükse geriye doğru çatallanmanın meydana geldiğini bulmuş ve kapasitenin düşük olması durumunda iki kararlı endemik dengenin olduğunu tespit etmiştir.

Ullah R., Zaman G., Islam S. [14] çalışmalarında bulaşıcı bir hastalığı yayılmasının büyük boyutlu dinamiklerini anlamak için uygun bir matematiksel model yapısı gerekli olduğundan bahsetmişler. Bu yazıda bulaşıcı hastalıkların doğrudan bulaşmasını temsil eden genel bir SIR salgın modelinden bahsedilmiş. Üreme sayısı R_0 belirleyip hem hastalıksız hem de endemik dengenin lokal ve global kararlılığından söz edilmiştir.

D’Innocenzo A., Paladinia F., Renna L. [15] çalışmalarında iki ayrı zamanlı deterministik salgın modelinin özelliklerini ve gelişimlerini belirlemek için modeli sayısal olarak analiz etmişlerdir. Modellerden biri, karşılık gelen sürekli zaman modelinin ayrık zamanlı yaklaşımı olarak formüle edilmiştir. Geçişlerin gerçek olasılıklarla belirlendiğini garanti etmek için modellerin parametreleri üzerinde kısıtlayıcı varsayımlar yapılmış, böylece stokastik ayrık zamanlı öngörülerle karşılaştırmalar da sağlanabildiğini söylemişlerdir. Bulaşıcı hastalıkta periyodikliğe neden olan durumlar araştırılmıştır. Salgının, bireylerin küçük bir bölümünün kalıcı olarak aşılınmadığında salınım yaptığını bulmuşlardır. İyileşen bir kişinin duyarlı hale gelme olasılığı ne kadar küçükse, genellikle enfekte popülasyondaki salınımların periyodunun daha uzun olduğunu görmüşlerdir.

Hu Z., Teng Z., Zhang L. [16] çalışmalarında, ayrık zamanlı bir *SIS* salgın modelinin dinamik davranışlarını tartışmışlar. Modelin, merkez manifold teoremi ve çatallanma teoremi kullanılarak flip çatallanmaya maruz kaldığını göstermişlerdir. Sayısal simülasyonlarla, elde ettikleri sonuçları ve 2,4,8 periyodundaki periyot ikiye katlama ve kaotik kümeler gibi karmaşık dinamik davranışları da göstermişler.

Hu Z., Teng Z., Jiang H. [17] makalelerinde, ayrık zamanlı *SIRS* salgın modellerinin bir sınıfının dinamik davranışları tartışılmaktadır. Hastalısız denge ve endemik dengenin varlığı ve lokal kararlılığı için koşullar elde edilmiştir. Sayısal simülasyonlar yalnızca sonuçlarının geçerliliğini göstermekle kalmamış, aynı zamanda flip çatallanma, hopf çatallanma ve kaos fenomeni gibi daha karmaşık dinamik davranışları da sergilemişlerdir. Bu sonuçlar, sürekli salgın modelleriyle karşılaştırıldığında ayrık salgın modelinin çok daha zengin dinamik davranışlar ortaya koyduğunu göstermişlerdir.

Chen Q., Teng Z., Wang L., Jiang H. [18] çalışmalarında, standart insidanslı ayrık bir *SIS* salgın modelinin dinamik karmaşıklığını nitel analiz ve sayısal simülasyonlarla araştırmışlardır. 1:2 ve 1:4 güçlü rezonanslar ve kaos fenomeni ile ilişkili ortak boyut-iki çatallanma olduğu doğrulamışlardır. Sonuçları çatallanma teorisi ve normal form yöntemi kullanılarak oluşturmuşlardır. Ayrıca, sayısal simülasyonlar, 3 boyutlu bir uzayda iki farklı değişken parametre için faz portreleri, eş-boyut-iki çatallanma diyagramları ve maksimum Lyapunov üs diyagramları ile elde edilmiştir. Bu çalışmalarında elde edilen sonuçlar, ayrık bir *SIS* salgın modelinin çok zengin dinamik davranışlara sahip olabileceğini göstermişlerdir.

Hu Z., Teng Z., Zhang L. [19] çalışmalarında, kesikli zamanlı bir *SIR* salgın modelinin dinamik davranışlarını incelemişlerdir. Hastalısız denge ve endemik denge noktasının lokal kararlılığı elde edilmiştir. Merkez manifold teoremi ve çatallanma teorisi kullanılarak modelin flip çatallanma ve Hopf çatallanma geçirdiği gösterilmiştir. Sayısal simülasyonlar ile sonuçlar doğrulanmış, aynı zamanda periyot-2, 4, 8, yarı periyodik yörüngelerde periyot ikiye katlama ve kaotik kümeler gibi karmaşık dinamik davranışlarda sergilenmiştir. Bu sonuçlar, ayrık zamanlı modellerin sürekli salgın modellerine kıyasla çok daha zengin dinamik davranışlar sergilediğini göstermiştir.

Kapçak S. [20] çalışmasında, Fark Dinamik Sistemlerin (DDS) matematiksel ve geometrik analizi için SageMath'te etkileşimli araçlar geliştirmiştir. Tek boyutlu ve iki boyutlu dönüşümler için çeşitli diyagramların elde edilmesinin yanı sıra iki boyutlu bir DDS için ne tür çatallanmaların oluştuğunun bilinmesine yardımcı olan yeni bir araç sunmuştur.

Parıldar H. [21] çalışmasında mikropların, öldürmeye başlamak için güçlü bir dürtüye ihtiyacı olduğunu ve ölüm başladığında onları durdurmak için daha fazla çaba gerektiğinden bahsetmiştir. Tarihsel olarak mikroorganizmalardan, "salgınlar" adına kimliği belirsiz katiller terimini kullanarak, salgınların asıl nedenlerinin mikroorganizmaların doğadaki büyük türbülansa verdiği tepkinin sonucu olduğunu vurgulamıştır. Savaşlar, nüfus artışı, depremler, seller, fırtınalar, kıtlıklar, anormal hava koşulları, evsizlik ve çevre kirliliği bu türbülansa örnek olarak verilmiştir. Geçmişteki salgınların nedenleri, kontrolü ve sonuçları incelenerek "salgınlarla" başa çıkma stratejilerinin güçlendirilebildiği hususuna çalışmasında değinmiştir.



3. MATERİYAL ve YÖNTEM

Araştırmamızın yöntemine uygun olarak kapsamlı bir literatür taraması yapıldıktan sonra önceki çalışmalar bölümünde makaleler ve referanslarda verdiğimiz ilgili kitapların da incelenmesiyle çalışmamız oluşturulmuştur. Sürekli ve kesikli zaman modellerinin analizlerine dayanan çalışmalar kapsamlı bir şekilde incelenerek konu hakkında bir ön bilgi oluşturulmuştur. Bu bağlamda, bu çalışmada salgın hastalıkların kesikli zamana bağlı modellerini incelemek ve bu modellerin analizini yapmak amaçlanmıştır. Belirli zamanda meydana gelen durumların varlığından dolayı kesikli zaman modelleri ele alınmıştır. Enfekte ve duyarlı bireyler etkileşime girdiğinde bulaşıcı hastalıkların toplumlar arasında nasıl yayıldığı ve etkilerini görmek için kalıcı bağışıklığa sahip olan bulaşıcı hastalıklara uyarlanabilen bir *SIR* salgın modeli ele alınmıştır ve tedavinin hastalığa etkisi incelenerek bazı sonuçlara ulaşılmıştır. Burada ele alınan tedavi fonksiyonu hasta olan her bireyin tedavi edilme olasılığının varlığı fikrine dayanır. Matematiksel olarak, ele alınan *SIR* salgın modeline doğrusal tedavi fonksiyonu ekleyerek modelin kararlılık ve çatallanma analizi yapılır. Tedavili ve tedavisiz olarak modelin analizinden elde edilen sonuçlar uygulamalarla karşılaştırılarak bazı yorumlar verilir. Böylece tedavi etkisine bağlı olarak hastalığın süreci ve yayılımı için kayda değer sonuçlar elde edilmiş olur.

Çoğu sistemin doğasında olduğu gibi hastalıkların yayılımındaki davranışlarda genelde karmaşık bir yapıya sahip olduğundan lineer olmayan modeller bu hastalıkları açıklamak için daha uygundur. Doğrusal olmayan sistemlerde çıktıdaki değişiklikler girdideki değişikliklerle aynı olmadığından davranışlar kaotik ve tahmin edilemez olup bu durum mühendisler, biyologlar, fizikçiler ve matematikçiler tarafından dikkat çekici bir hal alır. Lineer olmayan dinamik sistemlerin çözülmesi zor olduğundan çözüm lineerleştirme ile sağlanır. Bu çalışmada hastalığı tanımlayan lineer olmayan modeller için lineerleştirme tekniği kullanılır. Hastalığın süreci ve tedavinin hastalık üzerindeki etkisini görmek için modelin denge noktaları bulunarak, bu denge noktalarının kararlılık ve çatallanma şartları elde edilir. Teorik bilgiler nümerik simülasyonlarla desteklenerek karşılaştırmalar grafikler üzerinden yorumlanır.

Öncelikle model analizi için bilinmesi gereken tanım ve teoremlere yer veririz [22,25-28].

Bir x_0 sayısının reel değerli f fonksiyonu altındaki

$$f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), f(f(f(f(x_0)))) \dots \quad (3.1)$$

iterasyonlarından oluşan denklemlere **fark denklemleri** denir. Ayrıca (3.1) iterasyonları

$$f(x_0), f^2(x_0), f^3(x_0), f^4(x_0), \dots \quad (3.2)$$

notasyonu ile de gösterilebilir.

Fark denklemlerinde x_0 başlangıç değeri olmak üzere $x(t) = f^t(x_0)$ reel değerli fonksiyonu sistemin t anındaki durumunu gösterir ve aynı zamanda x_t notasyonu ile de ifade edilebilir. Ayrıca birden fazla fark denklemleriyle ifade edilen sistemlerde sistemin t anındaki durumu $X(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$ vektörü olup X_t notasyonu ile gösterilir. Takiple fark denklem ve sistemlerin genel tanımları verilir.

Tanım 3.1. x_t bir t değişkenine bağlı reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$f(x_{k+t}, x_{k+t-1}, \dots, x_{t+1}, x_t) = 0 \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

formundaki denkleme k . mertebeden fark denklemi denir. Genellikle (3.3) denklemi açık olarak

$$x_{t+k} + a_1 x_{t+k-1} + \dots + a_{k-1} x_{t+1} + a_k x_t = b_t \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (3.4)$$

ile ifade edilir. (3.4) ifadesinden de anlaşılacağı üzere bir fark denkleminin k . mertebeden olabilmesi için $a_k \neq 0$ olması gerekmektedir. Bir (3.4) formundaki fark denkleminde $a_1, \dots, a_{k-1}, a_k$ katsayıları sabit veya sadece t değişkenine bağlı fakat durum değişkenlerine yani $i = t, \dots, t+k$ için x_i lere bağlı değil ise bu denkleme **lineer**

fark denklemi aksi halde **lineer olmayan fark denklemi** denir. Ayrıca $b_t = 0$ ise bu fark denkleminde **homojen**, $b_t \neq 0$ ise **homojen olmayan** denir. Denklem t değişkenini açık olarak içeriyorsa sistem **otonom olmayan** aksi halde **otonom fark denklemi** adını aldığını söyleyebiliriz.

Tanım 3.2. x_i 'ler ($i = 1, \dots, n$), t ye bağlı reel değerli fonksiyonlar olmak üzere

$$\begin{cases} x_1(t+1) = f_1(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ x_2(t+1) = f_2(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \vdots \\ x_n(t+1) = f_n(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad (3.5)$$

şeklinde n tane fark denkleminde oluşan sisteme n denklemlili birinci mertebeden **fark denklem sistemi** denir. Ayrıca n denklemlili birinci mertebeden bir fark denklem sistemi genel olarak

$$x_i(t+1) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j(t) + b_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.6)$$

biçiminde de yazılabilir ve $X = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T$, $B = (b_1(t), \dots, b_n(t))^T$ vektörleri ile $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ tipinde bir matris olarak alınırsa (3.6) ifadesi

$$X(t+1) = A(t)X(t) + B(t) \quad (3.7)$$

matris notasyonu biçimine de dönüştürülebilir. Eğer (3.6) ifadesinde $i, j = 1, 2, \dots, n$ için a_{ij} ve b_i katsayıları durum değişkeni olan x_i fonksiyonlarına bağlı değil ise sisteme **lineerdir** denir. Aksi halde sistem **lineer olmayan** adını alır. Eğer $b_i = 0$ ise sisteme **homojen**, $b_i \neq 0$ ise **homojen olmayan** sistem denir.

Örnek 3.1. a, b, c sıfırdan farklı sabitler olmak üzere;

$$x_{t+1} = ax_t^2 + bx_t - c$$

fark denklemi birinci mertebeden, lineer olmayan otonom bir fark denklemdir.

Tanım 3.3. Birinci mertebeden lineer olmayan bir fark denklemi olan

$$x_{t+1} = f(x_t) \quad (3.8)$$

ifadesinde

$$\bar{x} = f(\bar{x})$$

eşitliğini sağlayan $\bar{x}$ noktasına fark denkleminin **denge noktası** denir. Benzer şekilde birinci mertebeden bir fark denklem sistemi olan

$$X_{t+1} = f(X_t) \quad (3.9)$$

ifadesinde

$$\bar{X} = f(\bar{X})$$

eşitliğini sağlayan $\bar{X}$ vektörüne sistemin **denge noktası** denir.

Tanım 3.4. f , a yı bir iç nokta olarak içeren bir aralıkta her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. f tarafından $x = a$ da üretilen **Taylor serisi**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \cdots$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.5. $T: V \rightarrow V$ lineer dönüşümü verilsin. $x \in V$, sıfırdan farklı bir x vektörü için $T(x) = \lambda x$ eşitliğini sağlayan bir λ sayısı varsa, λ sayısına T dönüşümünün **özdeğeri**, x vektörüne de λ özdeğerine karşılık gelen **özvektörü** denir.

Teorem 3.1 $\bar{x}$, (3.8) fark denkleminin bir denge noktası olmak üzere, $\bar{x} \in I$ açık aralığında f' sürekli olsun. Bu durumda $|f'(\bar{x})| < 1$ ise $\bar{x}$ **lokal asimptotik kararlı**, $|f'(\bar{x})| > 1$ ise $\bar{x}$ **kararsızdır**.

İspat: $\bar{x}$ lineer olmayan bir fark denklemi olan (3.8) ifadesinin bir denge noktası olsun. Burada

$$u_t = x_t - \bar{x} \quad (3.10)$$

dönüşümü yapılır ve $\bar{x}$ denge noktası orijine taşınırsa

$$\begin{aligned} u_{t+1} &= x_{t+1} - \bar{x} \\ &= f(x_t) - \bar{x} \\ &= f(u_t + \bar{x}) - f(\bar{x}) \\ &= g(u_t) \end{aligned}$$

yeni bir $g(u_t) = u_{t+1}$ denklemi elde edilir. Dikkat edilirse (3.8) için, (3.10) dönüşümü yapılırsa yeni bir denkleme dönüştürülür ve denge noktası $\bar{x}$ dan 0 noktasına taşındığı açıkça görülür. Burada $\bar{x}$ ile 0 denge noktalarının dinamik yapıları birebir aynıdır. Şimdi $\bar{x}$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olabilmesi için gereken şartları bulmaya çalışalım. (3.8) denklemindeki f fonksiyonunun $f \in C^2$ olduğunu kabul ederek Taylor serisini bir $\bar{x} \in I$ aralığında açalım. Böylece

$$f(x_t) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x_t - \bar{x}) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x_t - \bar{x})^2$$

olacak biçimde $\exists \xi \in I$ mevcuttur. Yeterince küçük $(x_t - \bar{x})$ değerleri için

$$f(x_t) - \bar{x} \approx f'(\bar{x})(x_t - \bar{x})$$

veya

$$u_{t+1} \approx f'(\bar{x})u_t$$

şeklinde lineer yaklaşım yapılabilir. Bu lineer yaklaşımla elde edilen

$$u_{t+1} = f'(\bar{x})u_t \quad (3.11)$$

ifadesine (3.8) fark denkleminin $\bar{x}$ denge noktasındaki **lineerleştirmesi** ismi verilir. Açıktır ki $\bar{x}$ denge noktasının kararlı veya kararsız olması $f'(\bar{x})$ nin değerine bağlı olduğu görülür. Çünkü

- $|f'(\bar{x})| > 1 \Rightarrow u_t$ iterasyonu 0 noktasından uzaklaşır. Sonuç olarak $x_t \not\rightarrow \bar{x}$ gerçekleşir.
- $|f'(\bar{x})| < 1 \Rightarrow u_t$ iterasyonları 0 noktasına yakınsar. Sonuç olarak $x_t \rightarrow \bar{x}$ gerçekleşir.

Tanım 3.6. $f : I \times J \rightarrow I$ ve $g : I \times J \rightarrow J$ sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere iki boyutlu fark dinamik sistemini

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= f(x_n, y_n) \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

göz önüne alalım. Sistemin $(\bar{x}, \bar{y})$ denge noktası

$$\begin{aligned} \bar{x} &= f(\bar{x}, \bar{y}) \\ \bar{y} &= g(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

denklemlerini sağlar.

$$(\bar{x}, \bar{y}) \text{ denge noktasında lineerleştirilmiş sistem } X_{n+1} = F_J(X_n), \quad X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

olmak üzere F_J , (3.12) sisteminin **Jakobiye matrisidir**.

Teorem 3.2 : (3.12) sistemine bağlı bir karakteristik polinom $F(x) = x^2 + Bx + C$ olsun. Varsayalım ki $F(1) > 0$ ve $F(x) = 0$ ın iki kökü x_1 ve x_2 ise;

- (i) Eğer $F(-1) > 0$ ve $C < 1 \Leftrightarrow |x_1| < 1$ ve $|x_2| < 1$ dir.
- (ii) Eğer $F(-1) < 0 \Leftrightarrow |x_1| < 1$ ve $|x_2| > 1$ (veya $|x_1| > 1$ ve $|x_2| < 1$) dir.
- (iii) Eğer $F(-1) > 0$ ve $C > 1 \Leftrightarrow |x_1| > 1$ ve $|x_2| > 1$ dir.
- (iv) Eğer $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2 \Leftrightarrow x_1 = -1$ ve $|x_2| \neq 1$ dir.

(v) Eğer $B^2 - 4C < 0$ ve $C = 1 \Leftrightarrow x_1$ ve x_2 karmaşık sayılar ve $|x_1| = |x_2| = 1$ dir.

Eşdeğer anlamda aşağıdakiler tanımlıdır:

- (i) $|x_1| < 1$ ve $|x_2| < 1$ ise denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. (Denge noktası bir sink noktadır.)
- (ii) $|x_1| < 1$ ve $|x_2| > 1$ (veya $|x_1| > 1$ ve $|x_2| < 1$) ise denge noktası eyer (saddle) noktasıdır.
- (iii) $|x_1| > 1$ ve $|x_2| > 1$ ise kararsızdır (source-repeller).
- (iv) $x_1 = -1$ ve $|x_2| \neq 1$ ise sistem denge noktasında flip çatallanmaya gider.
- (v) $|x_1| = |x_2| = 1$ ise denge noktasında Neimark-Sacker çatallanma ortaya çıkar.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Salgın hastalıklar geçmişten günümüze büyük yıkımlara sebebiyet vermiştir. Bilim insanları bu hastalıklara bilgi birikimleriyle çare olmaya çalışmışlarsa da kısa sürelerde bu hastalıklar insanların nüfusunu ciddi oranda düşürmüştür. Bu hastalıklardan en bilinenleri veba, çiçek hastalığı, kolera, Hong Kong gribi (H3N2), HIV/AIDS, SARS, domuz gribi (H1N1), ebola (ve diğerleri] ve son olarak da günümüzdeki Covid-19. Son desek de salgın hastalıkları insanların yaşamında tarihin getirdiği tecrübelerle hep var olacağı bir gerçektir.

Hastalık sürecinin anlaşılması için matematiksel hesaplama yöntemlerinin çalışmalara dahil edilmesi önemlidir. Salgın hastalık modellerinin dinamikleri çoğu yazar tarafından ele alınmıştır [1-19,23-25]. Bir hastalığın bulaşma hızının hesaplanması, ölüm oranının hesaplanması alınacak tedbirler için elzemdir. Bu süreçte yapılacak olan tedavi ve aşılama hem hastalığın yayılımlarının önlenmesinde hem de hastalıktan kurtulmak için önemli uygulamalar arasındadır. Aşılama aşamasına geçilme işlemi hastalığın durumuna göre uzun zamanlar alabilmektedir. Bu zamana kadar tedavi aşaması hastalığı önlemede etkili yöntemlerdendir [9,13].

Ullah ve çalışma ekibi (4.1) de tanımlanan sürekli SIR salgın modelinin kararlılık analizi üzerine çalışmışlardır:

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu - \lambda S(t)I(t) - \mu S(t) \\ \frac{dI}{dt} &= \lambda S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Burada $S(t) + I(t) + R(t) = 1$ olmak üzere parametreler,

- S : Duyarlı (hassas) bireyler- hastalığı kapmamış ancak hastalığı kapmaya elverişli olan bireylerdir.
- I : Bulaşmış (enfekte) bireyler- hastalığı kapmış ve başkalarına da hastalığı bulaştıran bireylerdir.

- R : Bağışıklık kazanmış bireyler- hastalığa sahip olup iyileşen bireylerdir. Bu bireylerde kalıcı bir bağışıklık olur.
- λ : Birim zamanda enfekte olan bireyler tarafından yapılan yeterli temasın ortalama sayısı
- λS : Birim zamanda bir duyarlı bireyle, enfeksiyondaki enfekte olan bireyler tarafından yapılan yeterli temasın ortalama sayısı
- λSI : Birim zamanda tüm enfekte olmuş bireyler tarafından sebep olunan enfeksiyon sayısı
- γ : İyileşme oranı
- μ : doğum-ölüm oranı

ile açıklanır.

(4.1) deki sisteme $T(I)$ tedavi fonksiyonu eklenirse

$$\begin{aligned}
 \frac{dS}{dt} &= \mu - \lambda S(t)I(t) - \mu S(t) \\
 \frac{dI}{dt} &= \lambda S(t)I(t) - \gamma I(t) - \mu I(t) - T(I) \\
 \frac{dR}{dt} &= \gamma I(t) - \mu R(t) + T(I).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

elde edilir. Aslında, fark zamanlı modeller rastgele zaman adım birimlerine izin verdiklerinden karşılık geldiği sürekli zaman modellerinin temel özelliklerini koruyabilen ve daha zengin uygulamalar içeren, farklı karakteristik zamanlara sahip süreçlerin bir açıklaması için daha gerçekçidir [15-19].

$S_n = x_n$, $I_n = y_n$ olmak üzere (4.1) ve (4.2) sistemi 2 boyutlu sisteme indirgenir ve ileri euler metodu uygulanırsa

$$\begin{aligned}
 x_{n+1} &= x_n + \delta [\mu - \lambda x_n y_n - \mu x_n] \\
 y_{n+1} &= y_n + \delta [\lambda x_n y_n - \gamma y_n - \mu y_n]
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

ve

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= x_n + \delta[\mu - \lambda x_n y_n - \mu x_n] \\y_{n+1} &= y_n + \delta[\lambda x_n y_n - \gamma y_n - \mu y_n - k y_n]\end{aligned}\quad (4.4)$$

sistemlerine ulaşılır. (4.3) deki sistem tedavisiz, (4.4) deki sistem ise tedavi fonksiyonu içeren sistemdir. (4.4) sisteminde ilaçların veya hastanedeki yatak sayısının yeterli olduğu durum göz önüne alınmıştır. Bu durumda, tedavi işlemi enfeksiyonların sayısı ile orantılı olacağından tedavi fonksiyonu $0 \leq y \leq y_0$ için $T(I_n) = ky_n$ ile verilir [10-12].

4.1. Sistem (4.3) için denge noktalarının varlığı ve kararlılığı

İlk olarak sistem (4.3) için denge noktalarını bulup bu denge noktalarında sistemin kararlı olma şartlarını inceleyeceğiz.

Teorem 4.1: Sistem (4.3); $E_0 = (1, 0)$ ve $E_1 = \left(\frac{\gamma + \mu}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda}(R_0 - 1)\right)$ olacak şekilde iki denge noktasına sahiptir.

İspat: Tanım 3.6' yı göz önüne alarak denge noktasını $(x, y) = (x^*, y^*)$ alalım.

$x_{n+1} = x_n = x^*$ ve $y_{n+1} = y_n = y^*$ eşitlikleri ile denge noktalarının kolay bir şekilde elde edildiği görülür.

Sistem (4.3) için Jakobiye matris

$$J(x_n, y_n) = \begin{bmatrix} 1 - \delta(\lambda y_n + \mu) & -\delta \lambda x_n \\ \delta \lambda y_n & 1 + \delta(\lambda x_n - \gamma - \mu) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

olarak elde edilir. Şimdi E_0 ve E_1 de değerlendirilen Jakobiye matrislerini elde ederek, denge noktalarının lokal kararlılık durumlarını inceleyelim. E_0 ve E_1 de değerlendirilen Jakobiye matrisleri sırasıyla,

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 - \delta\mu & -\delta\lambda \\ 0 & 1 + \delta(\lambda - \gamma - \mu) \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

ve

$$J\left(\frac{\gamma+\mu}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda}\left(\frac{\lambda}{\gamma+\mu}-1\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\delta\mu\lambda}{\gamma+\mu} & -\delta(\gamma+\mu) \\ \delta\mu\left(\frac{\lambda}{\gamma+\mu}-1\right) & 1 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

dir. Burada $R_0 = \frac{\lambda}{\gamma+\mu}$ ikincil enfeksiyon (temel üreme sayısı) oranıdır. O halde

aşağıdaki teoremlere sahip oluruz.

Teorem 4.2: $\gamma + \mu > \lambda$ olmak üzere $E_0 = (1, 0)$ denge noktalarının dinamikliği ile ilgili aşağıdakiler doğrudur. $0 < \delta < 1$ göz önüne alarak;

(i) $0 < \delta < \min\left\{\frac{2}{\gamma+\mu-\lambda}, \frac{2}{\mu}\right\}$ sağlanıyorsa $E_0 = (1, 0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır,

(ii) $\delta \neq \frac{2}{\gamma-\lambda+2\mu}, \frac{4}{\gamma-\lambda+2\mu}$ olmak üzere $\delta = \min\left\{\frac{2}{\gamma+\mu-\lambda}, \frac{2}{\mu}\right\}$ ise $E_0 = (1, 0)$ denge noktasında flip çatallanma ortaya çıkar.

İspat: (4.6) daki $E_0 = (1, 0)$ noktasında değerlendirilen Jakobiyen matris yardımıyla $F(x) = x^2 - (2 + \delta(\lambda - \gamma - 2\mu))x + (1 - \delta\mu)(1 + \delta(\lambda - \gamma - \mu))$ karakteristik polinomuna ulaşılır. Teorem 3.2 göz önüne alınırsa $F(1) > 0$ şartından $\gamma + \mu > \lambda$ eşitsizliğinin varlığı altında Teorem 3.2 (i) de $F(-1) > 0$ ve $C < 1$ şartları ve (iv) de $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$ şartlarından ispat açıktır.

Teorem 4.3: $\gamma + \mu < \lambda$ olmak üzere $E_1 = \left(\frac{\gamma+\mu}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda}(R_0-1)\right)$ denge noktasının dinamikliği ile ilgili aşağıdakiler doğrudur.

(i) $\delta < \frac{-\lambda\mu + \sqrt{\mu(4\gamma^3 - 4\gamma^2(\lambda - 2\mu)^2\mu + 4\gamma\mu(-2\lambda + 3\mu))}}{\mu(\gamma + \mu)(\gamma - \lambda + \mu)}$ sağlanıyorsa E_1

denge noktası lokal asimptotik kararlıdır.

(ii) $\delta \neq \frac{2(\gamma + \mu)}{\mu\lambda}, \frac{4(\gamma + \mu)}{\mu\lambda}$ olmak üzere

$$\delta = \frac{-\lambda\mu + \sqrt{\mu(4\gamma^3 - 4\gamma^2(\lambda - 2\mu)^2\mu + 4\gamma\mu(-2\lambda + 3\mu))}}{\mu(\gamma + \mu)(\gamma - \lambda + \mu)} \text{ ise } E_1 \text{ denge noktasında}$$

flip çatallanma vardır.

İspat: (4.7) deki E_1 Jakobiyeen matris yardımıyla

$$F(x) = x^2 - \left(2 - \frac{\delta\mu\lambda}{\gamma + \mu}\right)x + \left(1 - \frac{\delta\mu\lambda}{\gamma + \mu}\right) + \delta^2\mu(\gamma + \mu)\left(\frac{\lambda}{\gamma + \mu} - 1\right)$$

karakteristik polinomuna ulaşılır. Teorem 3.2 göz önüne alınırsa $F(1) > 0$ şartından $\gamma + \mu < \lambda$ elde edilir. Teorem 3.2 (i) de $F(-1) > 0$ ve $C < 1$ şartları ve Teorem 3.2 (iv) de $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$ şartlarından ispat açıktır.

4.2. Sistem (4.4) için denge noktalarının varlığı ve kararlılığı

Şimdi sistem (4.4) için denge noktalarını bulup, bu denge noktalarında sistemin kararlı olma şartlarını inceleyelim.

Lemma 4.1: (4.4) sistemi için aşağıdakiler geçerlidir:

(i) Sistem (4.4), $\lambda < k + \gamma + \mu$ olmak üzere tüm pozitif parametreler için $E_0 = (1, 0)$ hastalıksız denge noktasına sahiptir.

(ii) Sistem (4.4), $\lambda > k + \gamma + \mu$ olmak üzere $E_1 = \left(\frac{k + \gamma + \mu}{\lambda}, \frac{\mu(\lambda - k - \gamma - \mu)}{\lambda(k + \gamma + \mu)}\right)$

hastalıklı denge noktasına sahiptir.

Şimdi E_0 ve E_1 de değerlendirilen Jakobiyeen matrislerini elde ederek, denge noktalarının lokal kararlılık durumlarını inceleyelim. E_0 ve E_1 de değerlendirilen Jakobiyeen matrisleri sırasıyla,

$$J(1, 0) = \begin{pmatrix} 1 - \delta\mu & -\delta\lambda \\ 0 & 1 - \delta(k + \gamma - \lambda + \mu) \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

ve

$$J\left(\frac{k+\gamma+\mu}{\lambda}, \frac{\mu(\lambda-k-\gamma-\mu)}{\lambda(k+\gamma+\mu)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{k+\gamma+\mu-\delta\lambda\mu}{k+\gamma+\mu} & -\delta(k+\gamma+\mu) \\ -\frac{\delta\mu(k+\gamma-\lambda+\mu)}{k+\gamma+\mu} & 1 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

dir.

Teorem 4.4: $k+\gamma+\mu > \lambda$ olmak üzere $E_0 = (1,0)$ denge noktalarının dinamikliği ile ilgili aşağıdakiler doğrudur. $0 < \delta < 1$ göz önüne alınarak;

$$(i) \quad 0 < \delta < \min\left\{\frac{2}{\mu}, \frac{2}{k+\gamma+\mu-\lambda}\right\} \quad \text{ve} \quad 0 < \delta < \frac{k+\gamma+2\mu-\lambda}{\mu(k+\gamma+\mu-\lambda)} \quad \text{sağlanıyorsa}$$

$E_0 = (1,0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır,

$$(ii) \quad \delta \neq \frac{2}{k+\gamma-\lambda+2\mu}, \frac{4}{k+\gamma-\lambda+2\mu} \quad \text{olmak üzere} \quad \delta = \min\left\{\frac{2}{\mu}, \frac{2}{k+\gamma+\mu-\lambda}\right\}$$

ise $E_0 = (1,0)$ denge noktasında flip çatallanma ortaya çıkar.

İspat: (4.8) deki $E_0 = (1,0)$ değerlendirile Jakobiye matrisi göz önüne alınırsa $F(x) = x^2 - (2 - \delta(k+\gamma-\lambda+2\mu))x + (1 - \delta\mu)(1 - \delta(k+\gamma-\lambda+\mu))$ karakteristik polinomuna ulaşılır. Teorem 3.2 de $F(1) > 0$ şartından $k+\gamma+\mu > \lambda$ elde edilir. Teorem 3.2 (i) de $F(-1) > 0$ ve $C < 1$ şartları ve Teorem 3.2 (iv) de $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0, 2$ şartlarından ispat açıktır.

Teorem 4.5: $k+\gamma+\mu < \lambda$ olmak üzere $E_1 = \left(\frac{k+\gamma+\mu}{\lambda}, \frac{\mu(\lambda-k-\gamma-\mu)}{\lambda(k+\gamma+\mu)}\right)$ denge

noktasının dinamikliği ile ilgili aşağıdakiler doğrudur.

$$(i) \quad \delta < \frac{\frac{2\lambda\mu}{k+\gamma+\mu} - \sqrt{\frac{4\lambda^2\mu^2}{(k+\gamma+\mu)^2} - 4\mu(\lambda-k-\gamma-\mu)}}{2\mu(\lambda-k-\gamma-\mu)} \quad \text{ise } E_1 \text{ denge noktası lokal}$$

asimptotik kararlıdır.

$$(ii) \quad \frac{-2(k+\gamma)+(-2+\delta\lambda)\mu}{k+\gamma+\mu} \neq 0,2 \text{ olmak üzere}$$

$$\delta = \frac{\frac{2\lambda\mu}{k+\gamma+\mu} - \sqrt{\frac{4\lambda^2\mu^2}{(k+\gamma+\mu)^2} - 4\mu(\lambda-k-\gamma-\mu)}}{2\mu(\lambda-k-\gamma-\mu)} \text{ ise } E_1 \text{ denge noktasında flip}$$

çatallanma vardır.

İspat: (4.9)'daki E_1 de değerlendirilen Jakobiyeen matrisi göz önüne alınırsa

$$F(x) = x^2 + \left[\frac{-2(k+\gamma)+(-2+\delta\lambda)\mu}{k+\gamma+\mu} \right] x + 1 - \frac{\delta\lambda\mu}{k+\gamma+\mu} - \delta^2\mu(k+\gamma-\lambda+\mu)$$

karakteristik polinomuna ulaşırız. $F(1) > 0$ şartından $k+\gamma+\mu < \lambda$ elde edilir.

Teorem 3.2 (i) de $F(-1) > 0$ ve $C < 1$ şartları ve Teorem 3.2 (iv) de $F(-1) = 0$ ve $B \neq 0,2$ şartlarından ispat açıktır.

4.3. Nümerik Simülasyonlar

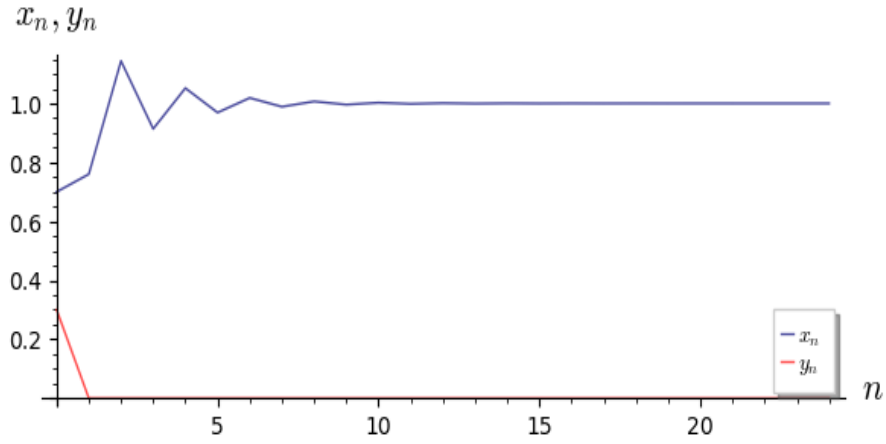
Bu bölümde SageMath [20] kullanılarak sistem (4.3) ve sistem (4.4) için bazı nümerik simülasyonlara yer verildi.

4.3.1. Sistem (4.3) için Nümerik Simülasyonlar

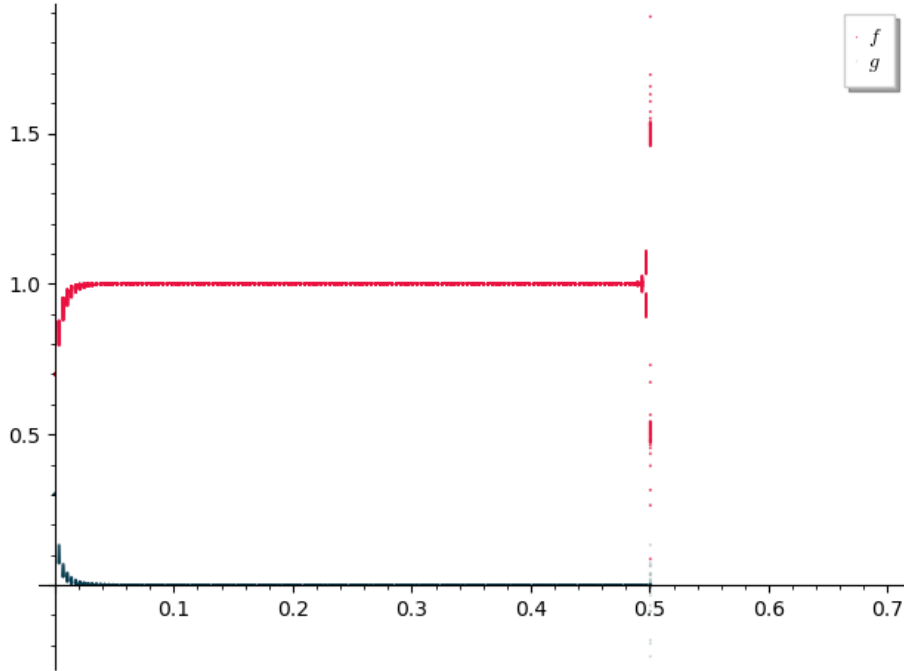
Örnek 4.1: $(x_0, y_0) = (0.7, 0.3)$ başlangıç şartı ve $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5$ parametre değerleri için sistem (4.3)'ü

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \delta[4 - 5x_n y_n - 4x_n] \\ y_{n+1} &= y_n + \delta[5x_n y_n - 2y_n - 4y_n] \end{aligned} \quad (4.10)$$

şeklinde yazabiliriz. Sistem (4.10)'un dinamik davranışı için aşağıdaki grafikler elde edilir.



Şekil 4.1 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5, \delta = 0.4$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin zaman serisi grafiği



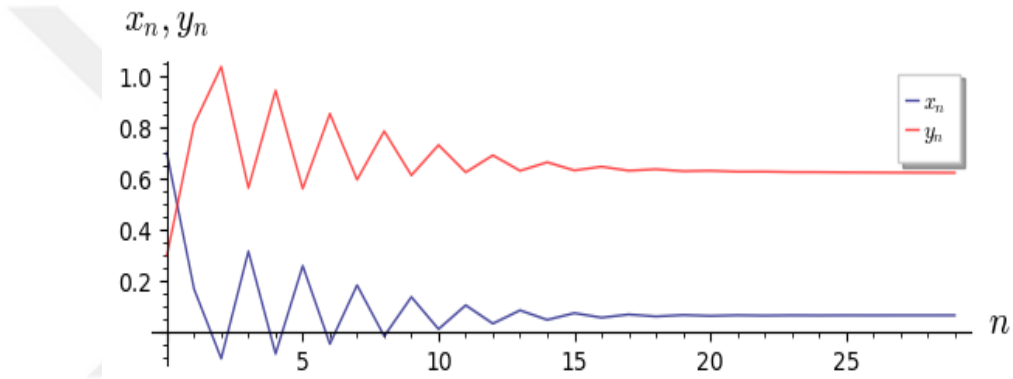
Şekil 4.2 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5$ ve $0 < \delta < 0.7$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin çatallanma grafiği

Grafikler incelendiğinde $0 < \delta < \min \{0.5, 2\}$ olduğundan $E_0 = (1, 0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. $\delta = 0.5$ için denge noktasında flip çatallanma olduğu görülür.

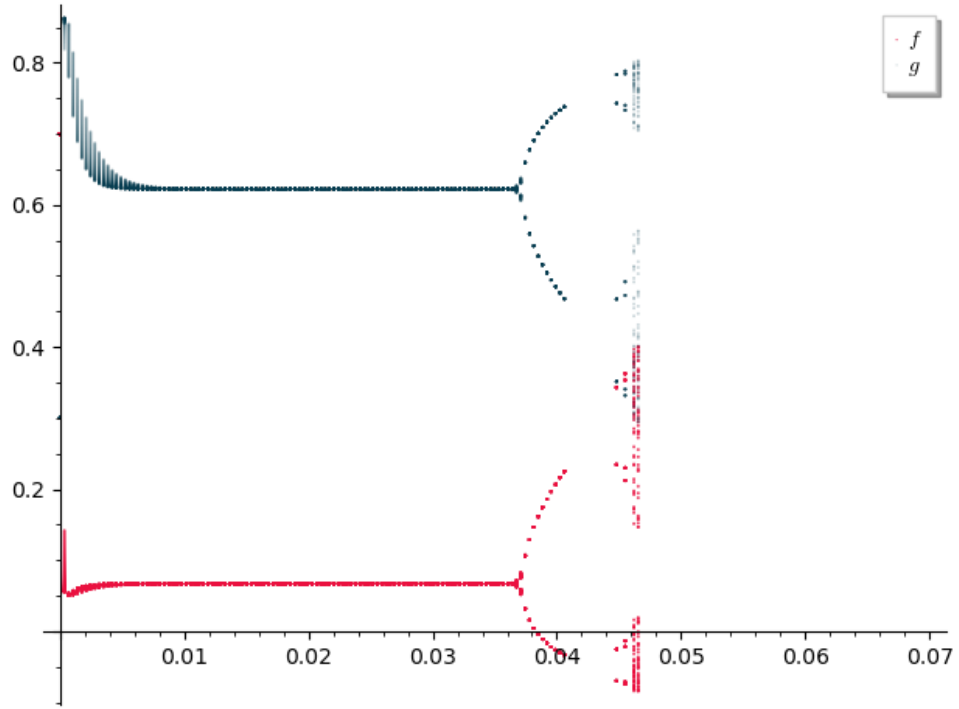
Örnek 4.2: $(x_0, y_0) = (0.7, 0.3)$ başlangıç şartı ve $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 90$ parametre değerleri için sistem (4.3)

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + [4 - 90x_n y_n - 4x_n] \\ y_{n+1} &= y_n + [90x_n y_n - 2y_n - 4y_n] \end{aligned} \quad (4.11)$$

olarak elde edilir. Sistem (4.11) in dinamik davranışı için aşağıdaki grafikler verilir.



Şekil 4.3 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 90, \delta = 0.03$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin zaman serisi grafiği



Şekil 4.4 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 90$ ve $0 < \delta < 0.07$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin çatallanma grafiği

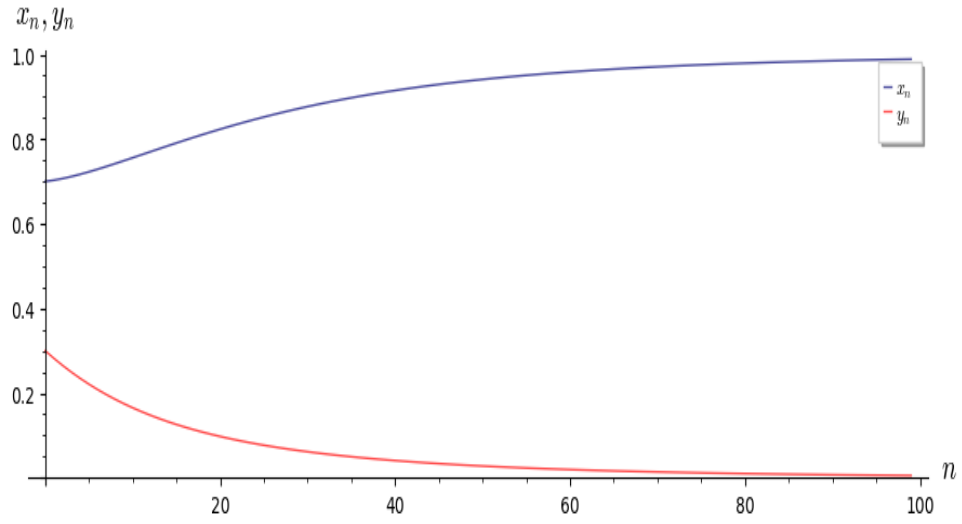
Grafiklerden $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 90$ parametre değerleri için $\delta < 0.0372$ olduğunda $E_1 = (0.066, 0.622)$ denge noktasının lokal asimptotik kararlı olduğu ve $\delta = 0.0372$ için denge noktasında flip çatallanma meydana geldiği görülür.

4.3.2. Sistem (4.4) için Nümerik Simülasyonlar

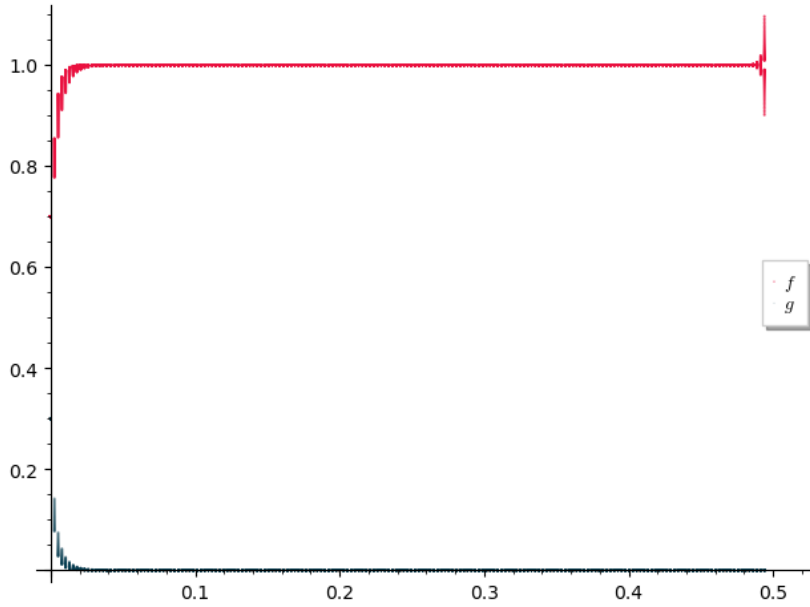
Örnek 4.3: $(x_0, y_0) = (0.7, 0.3)$ başlangıç şartı ve $\gamma = 2, \mu = 4, k = 0.5, \lambda = 5$ parametre değerlerini sistem (4.4) de yazarsak

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \delta [4 - 5x_n y_n - 4x_n] \\ y_{n+1} &= y_n + \delta [5x_n y_n - 2y_n - 4y_n - 0.5y_n] \end{aligned} \quad (4.12)$$

elde ederiz. Böylece sistem (4.12) ün dinamik davranışı aşağıdaki grafikler ile verilebilir.



Şekil 4.5 $k = 0.5$, $\gamma = 2$, $\mu = 4$, $\lambda = 5$, $\delta = 0.2$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin zaman serisi grafiği



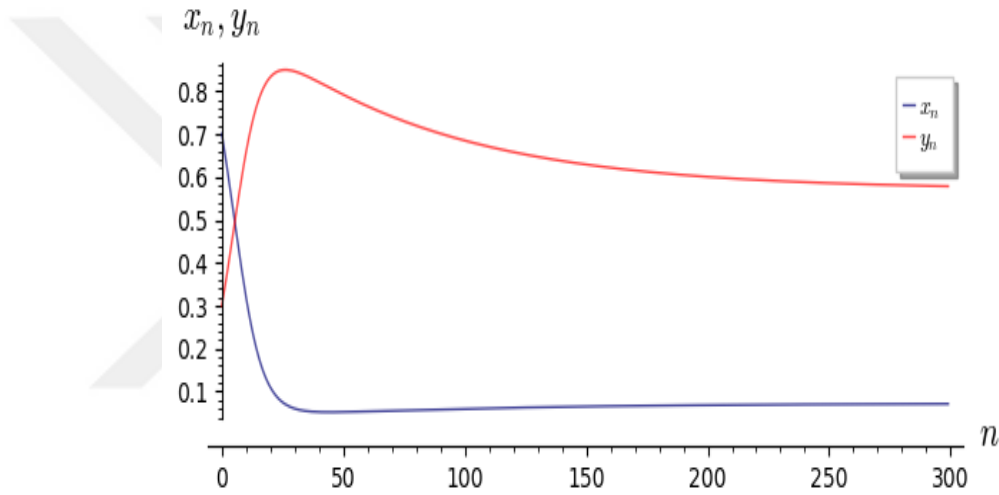
Şekil 4.6 $\gamma = 2$, $\mu = 4$, $k = 0.5$, $\lambda = 5$ ve $0 < \delta < 0.5$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin çatallanma grafiği

Grafikler incelendiğinde $0 < \delta < \min\{0.5, 1.33\}$ olduğunda $E_0 = (1, 0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlıdır. $\delta = 0.5$ için denge noktasında flip çatallanma olduğu görülür.

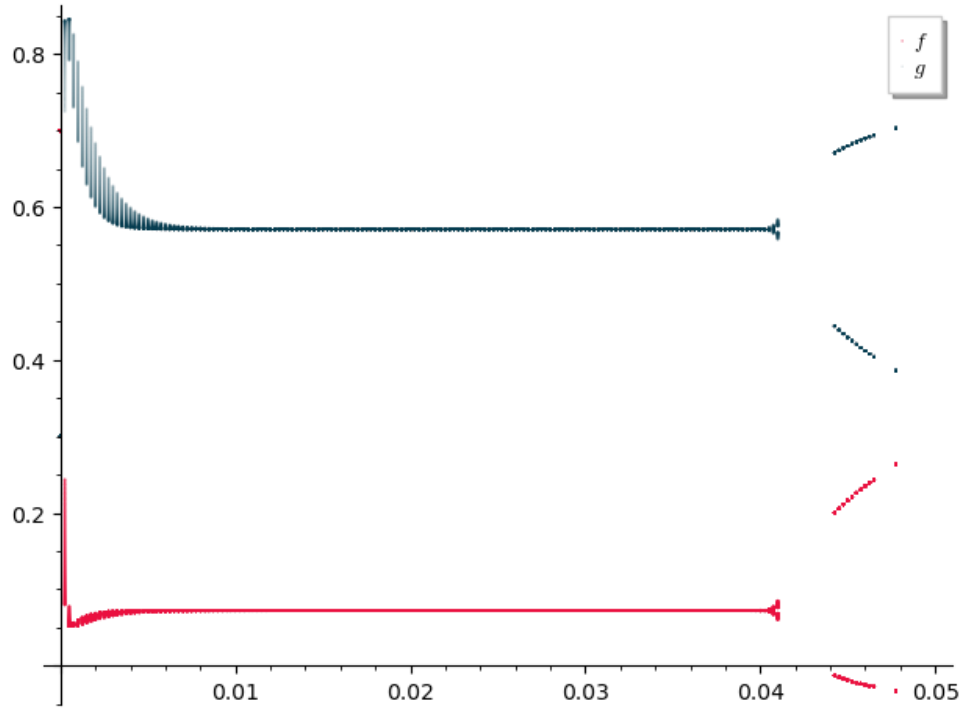
Örnek 4.4: $(x_0, y_0) = (0.7, 0.3)$ başlangıç şartı ve $\gamma = 2, \mu = 4, k = 0.5, \lambda = 90$ parametre değerlerini sistem (4.4) de yazarsak

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \delta [4 - 90x_n y_n - 4x_n] \\ y_{n+1} &= y_n + \delta [90x_n y_n - 2y_n - 4y_n - 0.5y_n] \end{aligned} \quad (4.13)$$

elde edilir. Böylece sistem (4.13) ün dinamik davranışı aşağıdaki grafik ile verilebilir.



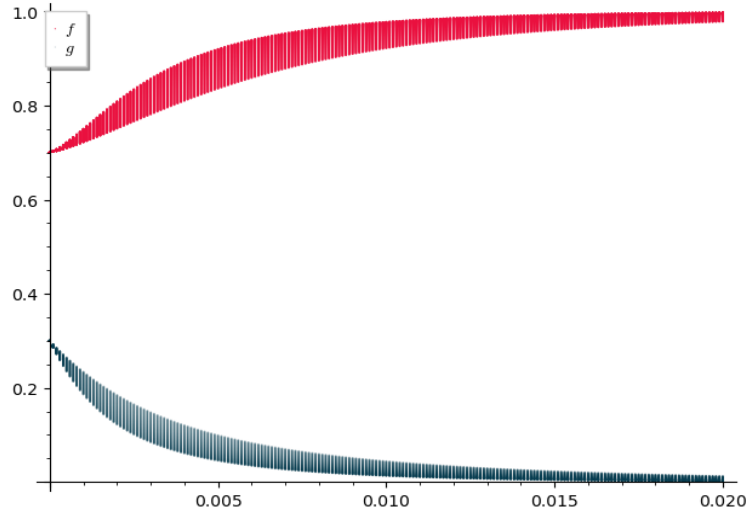
Şekil 4.7 $k = 0.5, \gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 90, \delta = 0.002$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin zaman serisi grafiği



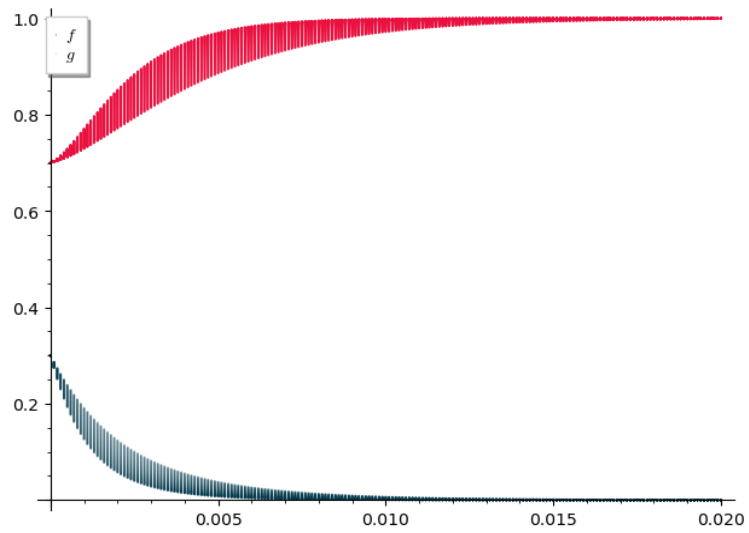
Şekil 4.8 $\gamma = 2, \mu = 4, k = 0.5, \lambda = 90$ ve $0 < \delta < 0.05$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin çatallanma grafiği

Grafikten $\gamma = 2, \mu = 4, k = 0.5, \lambda = 90$ parametre değerleri için $0 < \delta < 0.0412$ olduğunda $E_1 = (0.07222, 0.5709)$ denge noktası lokal asimptotik kararlı ve $\delta = 0.0412$ için ise denge noktasında flip çatallanma olduğu görülür.

Örnek 4.5: $(x_0, y_0) = (0.7, 0.3)$ başlangıç şartı ve $\gamma = 2, \mu = 4, k = 2, \lambda = 5$ ve $0 < \delta < 0.0020$ parametre değerlerini sistem (4.3)-(4.4) de yazarsak aşağıdaki çatallanma grafiklerini elde ederiz.



Şekil 4.9 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5$ ve $0 < \delta < 0.020$ parametre değerleri ile (4.3) sisteminin çatallanma grafiği



Şekil 4.10 $\gamma = 2, \mu = 4, \lambda = 5, k = 2$ ve $0 < \delta < 0.020$ parametre değerleri ile (4.4) sisteminin çatallanma grafiği

Değişen δ değerleri göz önüne alınarak tedavili sistem tedavisiz sisteme göre daha erken denge noktasına ulaştığı şekil 4.9 ve şekil 4.10'da kolayca görülür. Sonuç olarak görülür ki sisteme tedavi fonksiyonu eklendiğinde hastalık daha geç çatallanma noktasına ulaşır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında; tarihte yer edinmiş büyük salgın hastalıklar ile ilgili bilgilere yer verildi. Salgın hastalık modellerinden SI , SIS , SIR ve $SIRS$ temel modelleri kısaca anlatıldı. Tez ile ilgili literatür taramasında konu ile ilgili önceki çalışmalara yer verildi. Çalışma ile ilgili materyal ve yöntem hakkında açıklamalar yapıldı ve ilgili tanım ve teoremlere yer verildi. Bulgular ve tartışmalar tez çalışmasının orijinal kısmıdır. Bu kısım [14] de ele alınan sürekli modelin tedavili ve tedavi olmaksızın kesikli versiyonunun analizini içerir ve yeni sonuçları kapsar. Daha ayrıntılı bir şekilde açıklayacak olursak ele alınan SIR salgın modeli tedavisiz (sistem

(4.3)) ve tedavili (sistem (4.4)) olmak üzere iki ayrı şekilde analiz edildi. $R_0 = \frac{\lambda}{\gamma + \mu}$

ikincil enfeksiyon oranı olmak üzere (4.3) sistemi için $E_0 = (1, 0)$ ve

$E_1 = \left(\frac{\gamma + \mu}{\lambda}, \frac{\mu}{\lambda}(R_0 - 1) \right)$ olacak şekilde iki denge noktası bulundu. Burada

$0 < \delta < \min \left\{ \frac{2}{\gamma + \mu - \lambda}, \frac{2}{\mu} \right\}$ eşitsizliği sağlandığında $E_0 = (1, 0)$ denge noktası lokal

asimptotik kararlı olurken $\delta \neq \frac{2}{\gamma - \lambda + 2\mu}, \frac{4}{\gamma - \lambda + 2\mu}$ olmak üzere

$\delta = \min \left\{ \frac{2}{\gamma + \mu - \lambda}, \frac{2}{\mu} \right\}$ olduğunda $E_0 = (1, 0)$ denge noktasında flip çatallanma

meydana geldiği görüldü. Dahası eğer

$\delta < \frac{-\lambda\mu + \sqrt{\mu(4\gamma^3 - 4\gamma^2(\lambda - 2\mu)^2\mu + 4\gamma\mu(-2\lambda + 3\mu))}}{\mu(\gamma + \mu)(\gamma - \lambda + \mu)}$ sağlanıyorsa E_1 denge

noktası lokal asimptotik kararlı iken $\delta \neq \frac{2(\gamma + \mu)}{\mu\lambda}, \frac{4(\gamma + \mu)}{\mu\lambda}$ olmak üzere

$\delta = \frac{-\lambda\mu + \sqrt{\mu(4\gamma^3 - 4\gamma^2(\lambda - 2\mu)^2\mu + 4\gamma\mu(-2\lambda + 3\mu))}}{\mu(\gamma + \mu)(\gamma - \lambda + \mu)}$ olduğunda E_1 denge

noktasında flip çatallanma olduğu bulundu.

Benzer şekilde (4.4) sistemi için de $E_0 = (1, 0)$ ve $E_1 = \left(\frac{k + \gamma + \mu}{\lambda}, \frac{\mu(\lambda - k - \gamma - \mu)}{\lambda(k + \gamma + \mu)} \right)$ olacak şekilde iki tane denge noktası elde edildi.

Eğer $0 < \delta < \min \left\{ \frac{2}{\mu}, \frac{2}{k + \gamma + \mu - \lambda} \right\}$ ve $0 < \delta < \frac{k + \gamma + 2\mu - \lambda}{\mu(k + \gamma + \mu - \lambda)}$ sağlanıyorsa

$E_0 = (1, 0)$ denge noktası lokal asimptotik kararlı olurken

$\delta \neq \frac{2}{k + \gamma - \lambda + 2\mu}, \frac{4}{k + \gamma - \lambda + 2\mu}$ olmak üzere $\delta = \min \left\{ \frac{2}{\mu}, \frac{2}{k + \gamma + \mu - \lambda} \right\}$ için

$E_0 = (1, 0)$ denge noktasında flip çatallanmanın olduğu görüldü. Ek olarak

$\delta < \frac{\frac{2\lambda\mu}{k + \gamma + \mu} - \sqrt{\frac{4\lambda^2\mu^2}{(k + \gamma + \mu)^2} - 4\mu(\lambda - k - \gamma - \mu)}}{2\mu(\lambda - k - \gamma - \mu)}$ ise E_1 denge noktası lokal

asimptotik kararlı iken $\frac{-2(k + \gamma) + (-2 + \delta\lambda)\mu}{k + \gamma + \mu} \neq 0, 2$ olmak üzere

$\delta = \frac{\frac{2\lambda\mu}{k + \gamma + \mu} - \sqrt{\frac{4\lambda^2\mu^2}{(k + \gamma + \mu)^2} - 4\mu(\lambda - k - \gamma - \mu)}}{2\mu(\lambda - k - \gamma - \mu)}$ için E_1 denge noktasında flip

çatallanma var olduğu anlaşıldı. Modellerde elde edilen hesaplamalarla hastalığa tedavi uygulandığında popülasyonun daha hızlı bir şekilde denge noktasına ulaştığı şekil 4.9-4.10'da çizimlerle gözlemlendi.

Salgın hastalıklarda tedavinin ne kadar etkili olduğunun görülmesi için öncelikle sağlıklı veriler toplanması gereklidir. Bu veriler için özellikle sağlık alanı ve kuruluşların dikkatlice bu bilgileri toplaması önemlidir. Bu verilerden elde edilen bulaşma hızı, ölüm oranı, iyileşme oranı gibi veriler matematikte sağlıklı hesaplamalarda kullanılmak üzere modele işlenebilir hale gelir. Elde edilen bu modelde yapılacak tedavinin hastalığın seyrini ne derecede etkileyeceği hesaplanır. Böylece salgın hastalıkların etkisine göre başarılı şekilde önlem alınmaya çalışılır.

Bu konuda araştırma yapmak isteyen araştırmacılar için ele alınan *SIR* salgın modelinde doğrusal tedavi yerine sabit [9] veya doymuş tedavi [24] alınarak modifiye

edilmiş bir *SIR* salgın modelini analiz edebilirler. Ayrıca aşılama [4] oranını modele ekleyerek de model analizi yapılabilir.



KAYNAKLAR

- [1] F. Brauer, C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, Texts in Applied Mathematics, 40, New York: Springer, 2001.
- [2] N.F. Britton, *Essential Mathematical Biology*, London: Springer, 2003.
- [3] H.W. Hethcote, "The mathematics of infectious disease", *SIAM Rev.*, vol. 42, no. 4, pp.599-653, 2000.
- [4] Ö.A. Gümüş, A.G.M Selvam, D.A Vianny, "Bifurcation and stability analysis of a discrete time *SIR* epidemic model with vaccination", *International Journal of Analysis and Applications*, vol. 17, no. 5, pp. 809–820, 2019.
- [5] Ö.A. Gümüş, S. Acer, "Period-doubling bifurcation analysis and stability of epidemic model", *Journal of Science and Arts Year 19*, vol. 4, no. 49, pp. 905-914, 2019.
- [6] A.G.M. Selvam, D.A. Vianny and M. Jacintha, "Stability in a fractional order *SIR* epidemic model of childhood diseases with discretization", *IOP Conf. Ser., J. Phys., Conf. Ser.*, vol. 1139, pp. 012009, 2018.
- [7] A.G.M. Selvam and D.A. Vianny, "Discrete Fractional Order *SIR* Epidemic Model of Childhood Diseases with Constant Vaccination and its Stability", *Int. J. Techn. Innov. Modern Eng. Sci.*, vol. 4, no. 11, pp. 405-410, 2018.
- [8] Q. Din, "Qualitative behavior of a discrete *SIR* epidemic model", *Int. J. Biomath.*, vol. 9, no. 6, pp. 1650092, 2016.
- [9] W. Wang, S. Ruan, "Bifurcation in an epidemic model with constant removal rate of the infectives", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 291, pp. 775-793, 2004.
- [10] Z. Feng, H.R. Thieme, "Recurrent outbreaks of childhood diseases revisited: the impact of isolation", *Math. Biosci.*, vol. 128, no. 1-2, pp. 93-130, 1995.
- [11] J.M. Hyman, J. Li, "Modeling the effectiveness of isolation strategies in preventing STD epidemics", *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 58, pp. 912-925, 1998.
- [12] L. Wu, Z. Feng, "Homoclinic bifurcation in an *SIQR* model for childhood diseases", *J. Differ. Equat.*, vol. 168, no. 1, pp.150-167, 2000.
- [13] W. Wang, "Backward bifurcation of an epidemic model with treatment", *Math Biosci*, vol. 201, no. 1–2, pp. 58–71, 2006.
- [14] R. Ullah, G. Zaman, S Islam, "Stability analysis of a general *SIR* epidemic model", *VFAST Transactions on Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 57–61, 2013.
- [15] A. D'Innocenzo, F. Paladini, L. Renna, "A numerical investigation of discrete oscillating epidemic models", *Physica A*, vol. 364, pp. 497-512, 2006.
- [16] Z. Hu, Z. Teng, L. Zhang, "Stability and flip bifurcation of a discrete *SIS* epidemic model", *J. Xinjiang Univ. (Natural Science Edition)*, vol. 28, pp. 446-453, 2011.
- [17] Z. Hu, Z. Teng, H. Jiang, "Stability analysis in a class of discrete *SIRS* epidemic models", *Nonlinear Anal. RWA*, vol. 13, pp. 2017-2033, 2012.
- [18] Q. Chen, Z. Teng, L. Wang, H. Jiang, "The existence of codimension-two bifurcation in a discrete *SIS* epidemic model with standard incidence", *Nonlinear Dynam.*, vol. 71, no. 1, pp. 55-73, 2013.
- [19] Z. Hu, Z. Teng, L. Zhang, "Stability and bifurcation analysis in a discrete *SIR* epidemic model", *Math. Comput. Simulation*, vol. 97, pp. 80-93, 2014.

- [20] S. Kapcak, “SageMath ile Ayırık Dinamik Sistemler”, *The Electronic Journal of Mathematics & Technology*, vol. 12, no. 2, pp. 292-308, 2018.
- [21] H. Parıldar, “Tarihte Bulaşıcı Hastalık Salgınları”, *Tepecik Eğit. ve Araşt. Hast. Dergisi*; vol. 30(Ek sayı), pp.19-26, 2020.
- [22] L. J. S. Allen, *An introduction to mathematical biology*, New Jersey, Pearson, 2007.
- [23] X. Zhang and X. N. Liu, “Backward bifurcation of an epidemic model with saturated treatment function.” *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 348, no. 1, pp. 443-443, 2008.
- [24] J. Li, Z. Teng, G. Wang, L. Zang, and C. Hu, “Stability and bifurcation analysis of an SIR epidemic model with logistic growth and saturated treatment.” *Chaos, Solitons and Fractals*, vol. 99, pp. 63-71, 2017.
- [25] Ö.A. Gümüş, A. G. M. Selvam, R. Janagaraj, “Dynamics of the Mathematical Model Related to COVID-19 Pandemic with Treatment” *Thai Journal of Mathematics* (Basım aşamasında)
- [26] S.N. Elaydi, *An Introduction to Difference Equations*, New York: Springer-Verlag, 1996
- [27] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano, *Thomas Calculus*, U.S.A. : Addison Wesley, 2005
- [28] N. Çetin, N. Orhun, *Lineer Cebir*, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, 1998.