

**SALİH ZEKİ'DE
MODERN MATEMATİK KAVRAMLARI
ANALİZİ**

Hacer KÖTEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK**

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ARALIK 2009

ANKARA

Hacer KÖTEN tarafından hazırlanan SALİH ZEKİ'DE MODERN MATEMATİK KAVRAMLARI ANALİZİ adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Prof.Dr. Ömer AKIN

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans olarak kabul edilmiştir.

Üye : Prof.Dr.Ömer AKIN (TOBB Ünı)

Üye : Prof.Dr.Baki KARLIAĞA

Üye : Prof.Dr.Yusuf YAYLI(Ank. Ünı)

Üye : Doç.Dr. Fatma AYAZ

Üye :Doç. Dr. Ogün DOĞRU

Tarih: 08 /12/ 2009

Bu tez ile G.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Prof. Dr. Nail ÜNSAL

**SALİH ZEKİ'DE
MODERN MATEMATİK KAVRAMLARI
ANALİZİ
(Yüksek Lisans Tezi)**

Hacer KÖTEN

**GAZİ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Aralık 2009**

ÖZET

Bu tezde on ciltten oluşan Kâmûs-ı Riyâziyyât (Matematik Bilimleri Ansiklopedisi) adlı eserin birinci cildinde incelenen üç önemli kavramın matematiksel analizi yapılmıştır. Osmanlıca olarak yazılan bu Matematik Bilimleri Ansiklopedisi 19. yüzyılda yetişmiş olan (1864-1921) Salih Zeki Bey'e aittir. Salih Zeki Bey Osmanlı'nın yetiştirdiği son üç matematikçiden birisi olup çağdaş matematiğin tanınması ve uygulanması için çok değerli çalışmalar yapmıştır. Bugünkü İstanbul Üniversitesi (Dârü'l-Fünûn)'nin ilk rektörüdür. Burada incelenen üç kavram integral alma, sonsuz küçük ve episikloiddir.

Bilim Kodu : 500.1.005
Anahtar Kelimeler : İntegral alma, sonsuz küçük, n. mertebeden
sonsuz küçük, episikloid, uzamış (kısaltmış) episikloid.
Sayfa Adedi : 81
Tez Yöneticisi : Prof. Dr. Ömer AKIN

**THE ANALYSES OF
MODERN MATHEMATICAL NOTATIONS
IN SALİH ZEKİ
(M. Sc. Thesis)**

Hacer KÖTEN

**GAZI UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY
December 2009**

ABSTRACT

In this thesis, three important mathematical notions, which were investigated in the first part of Kâmûs-ı Riyâziyyât which has ten parts (Mathematical Sciences Encyclopedia), have been analyzed. This Mathematical Sciences Encyclopedia, which was written in the Ottoman language has been done by Salih Zeki Bey, who was grown up in the 19. century. Salih Zeki Bey who was one of the last three mathematicians raised in the latest times of the Ottoman Empire, had made very precious studies for the recognition and application of Modern Mathematics. He was the first rector of today's İstanbul University (Dârü'l-Fünûn). The three notions have been examined which are integration, infinitesimal quantities and epicycloid.

Science Code : 500.1.005

**Key Words : İntegration, infinitesimal, infinitesimal of degree n,
epicycloid, extended (shortened) epicycloid.**

Page Number: 81

Adviser : Prof.Dr. Ömer AKIN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardım ve katkıları ile bana yol gösteren, önerilerde bulunarak değerli zamanını benden esirgemeyen Hocam Prof. Dr. Ömer AKIN'a yine kıymetli tecrübelerinden faydalandığım Ankara Üniversitesi, Dil ve Tarih-Coğrafya Fakültesi, Bilim Tarihi Anabilim Dalı öğretim üyesi Prof. Dr. Remzi DEMİR'e, manevi destekleriyle beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan çok değerli kızım Emine Elçin KÖTEN'e ve oğlum Mustafa KÖTEN'e teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	iv
ABSTRACT	v
TEŞEKKÜR	vi
İÇİNDEKİLER	vii
ŞEKİLLERİN LİSTESİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. SALİH ZEKİ BEY VE KÂMÛS-I RİYÂZİYYÂT	2
3.İNTEGRAL ALMA (TAMÂMÎ).....	5
3.1. Uygulama Yoluyla İntegral Alma (Türevi Doğrudan Uygulayarak İntegral Alma) (İtmâm bi't-Tatbîk)	5
3.2. Çözümleme Yoluyla İntegral Alma (İtmâm bi't-Tahlîl).....	7
3.3. Değişken Değiştirme Yoluyla İntegral Alma (İtmâm bi'l-Vaz)	11
3.4. Parçalama Yoluyla (Kısmî) İntegral Alma (İtmâm bi't-Tefrîk)	16
3.5. Serilerle İntegral Alma (İtmâm bi'l-Tevsî)	20
4. SONSUZ KÜÇÜK	27
4.1. Temel Sonsuz Küçük (Asgar-ı Nâ-Mütenâhî-yi Aslî)	29
4.2. Birinci Mertebeden Sonsuz Küçük (Birinci Mertebeen Asgar-ı Nâ-Mütenâhî).....	31
4.3. İkinci Mertebeden Sonsuz Küçük (İkinci Mertebeen Asgar-ı Nâ-Mütenâhî)	31
4.4. Üçüncü Merteben Sonsuz Küçük (Üçüncü Mertebeen Asgar-ı Nâ-Mütenâhî)	32
4.5. n. Mertebeden Sonsuz Küçük (n. Mertebeden Asgar-ı Nâ-Mütenâhî)	32

Sayfa

5.EPİSİKLOİD.....	39
5.1. Düzlemsel Episikloid (Müstevî Episikloid)	39
5.2. Dışsal Episikloid veya Üstsel Episikloid (Episikloid-i Hârîcî veya Episikloid-i Fevkânî)	40
5.3. İçsel veya Altsal Episikloid (Hiposikloid) (Episikloid-i Dâhilî veya Episikloid-i Tahtânî).....	46
5.4. Üç Köşeli Episikloid	50
5.5. Üçgensel Episikloid (Müsellesî Episikloid) =Hiposikloid.....	52
5.5.1. Steiner içsel episikloidi (İştâyner episikloid-i dâhilîsi) = Hiposikloid	54
5.6. İçsel Dört Köşeli Episikloid (Dört Köşeli Episikloid-i Dâhilî).....	54
5.7. Uzatılmış Episikloid (Episiloid-i Memdûd).....	57
5.8. Kısaltılmış episikloid (Episikloid-i Maksûr).....	58
5.9. Küresel Episikloid (Kürevî Episikloid).....	62
5.10. Episikloidsel Eğri (Episikloidî Münhanî)	65
5.11. Episikloidsel Hareket (Hareket-i Episikloidiyye)	70
6.SONUÇ VE ÖNERİLER	71
KAYNAKLAR	73
EKLER.....	74
EK-1 Sonsuz Küçük.....	75
EK-2 İçsel Üçgensel Episikloid Eğrisinin Denklemi.....	76
ÖZGEÇMİŞ	81

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 4.1. Sonsuz küçükte merteye kavramının geometrik gösterilişi	34
Şekil 5.1. Düzlemsel dışsal episikloid	39
Şekil 5.2. Dışsal düzlemsel episikloid ($r = r'$)	42
Şekil 5.3. İçsel düzlemsel episikloid	46
Şekil 5.4. İçsel düzlemsel episikloid ($r = 2r'$)	49
Şekil 5.5. İçsel düzlemsel episikloid ($r = 3r'$)	51
Şekil 5.6. Üçgensel episikloid	52
Şekil 5.7. İçsel dört köşeli düzlemsel episikloid ($r = 4r'$)	55
Şekil 5.8. Uzun ve kısalmış episikloid	57
Şekil 5.9. Özel aletlerle çizilebilen bazı episikloidler	59
Şekil 5.10. Küresel episikloid	63
Şekil 5.11. Episikloidsel eğri	66

1. GİRİŞ

Bu çalışmanın amacı, Osmanlı Devleti'nin son döneminde yaşamış ve yapmış olduğu bilimsel çalışmalarla çağdaş bilimlerin ve özellikle de çağdaş matematiğin Türkiye'de tanınmasına ve yayılmasına önemli katkılarda bulunmuş olan Salih Zeki Bey'in *Kâmûs-ı Riyâziyyât (Matematik Bilimleri Ansiklopedisi)* adlı önemli eserini inceleyerek burada yer alan çağdaş matematik kavramları hakkında ayrıntılı bilgi vermektir. Böylece sözü geçen eserin, çağdaş matematiğin Türkiye'ye girişi bakımından taşıdığı önemi ayrıntılı bir biçimde göstermek mümkün olabilecektir.

Bu tezin, çağımızda geniş uygulama alanı bulan disiplinler arası ortak çalışmaya bir örnek teşkil ettiği kanaatindeyim.

Bu tez beş bölümden oluşmuş olup birinci bölümü, giriş bölümü olarak düzenlenmiştir.

İkinci bölümünde Türkiye'de çağdaş matematik çalışmalarına ve Salih Zeki Bey'in Türk matematik tarihindeki yerine değinerek önemli iki eseri ve hayatı ile ilgili kısaca bilgi verilmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümünde integral alma kavramı, dördüncü bölümünde sonsuz küçük ile sonsuz küçükte merteye kavramı ve beşinci bölümünde episikloid kavramı Salih Zeki Bey'in *Kâmûs-ı Riyâziyyât (Matematik Bilimleri Ansiklopedisi)* adlı eserinde bahsettiği şekliyle ve örneklerle açıklanmış olup sonuç ve öneriler kısmıyla tez tamamlanmıştır.

2. SALİH ZEKİ BEY VE KÂMÛS-I RİYÂZİYYÂT

Türkiye’de, aşağı yukarı XVIII. yüzyılın son çeyreğini, bütün XIX. yüzyılı ve XX. yüzyılın ilk çeyreğini, yani yaklaşık 150 yılı kapsayan çağdaş matematik çalışmaları, kabaca iki döneme ayrılarak incelenebilir [1].

Birinci Dönem, 1775-1850 yılları arasını kapsar ve bu dönemin belirgin özelliği, özellikle Fransızca’dan yapılan tercüme yoluyla çağdaş Batı matematiğinin temel alanlarının Türkçe’ye aktarılması ve yeni kurulan mekteplerde öğretilmesidir.

İkinci Dönem ise, 1850-1925 yılları arasını kapsar ve bu dönemin ayırıcı özelliği ise, - yeni matematik dallarını tercüme yoluyla aktarma etkinliği devam ederken - matematiğin Lineer Cebir ve Sayılar Kuramı gibi alanlarına, bazı önemli katkılarının yapılmasıdır. Bu alanlarda katkıda bulunmayı başarmış bazı önemli matematikçiler arasında, özellikle Vidinli Tevfik Paşa, Mehmed Nâdir Bey ve Salih Zeki Bey’in, Türk matematik tarihinde seçkin yerleri olduğu anlaşılmaktadır.

Hoca İshak Efendi ve Vidinli Tevfik Paşa’dan sonra, Türkiye’de çağdaş matematiğin tanınması ve benimsenmesi yolunda en çok katkıda bulunan bilginlerin başında *Salih Zeki Bey* gelmektedir. Ancak Salih Zeki Bey, sadece matematik bakımından değil, aynı zamanda bu alanı tarihi ve felsefi yönden inceleyen matematik tarihi ve matematik felsefesi bakımından da Türk matematikçiliğinin gelişimine çok önemli hizmetlerde bulunmuştur.

Türkiye’de çağdaş matematiğin tanınması ve benimsenmesi yolunda çok değerli bilimsel çalışmalar yapmış olan Salih Zeki Bey’in çalışmaları yukarıda bahsettiğimiz ikinci döneme rastlar. Salih Zeki Bey’in kitap ve makale biçiminde çok sayıda eseri bulunmaktadır [2,3].

En önemli eserlerinden biri olan *Âsâr-ı Bâkiye*’nin Birinci Cild’i *trigonometri tarihine*, İkinci Cild’i *aritmetik ve cebir tarihine*, Üçüncü Cild’i *astronomi tarihine* ve Dördüncü Cild’i ise *geometri tarihine* ayrılmıştır. Sadece birinci ve ikinci ciltleri yayımlanmış ama diğer ciltleri el yazması olarak kalmıştır [1,3].

Salih Zeki Bey, *Âsar-ı Bakiye'den* 16 sene önce 1897'de *Kâmûs-ı Riyâziyyât* (*Matematiksel Bilimler Ansiklopedisi*) adlı on ciltlik eserinin Birinci Cild'ini yayımlamıştır.

Kâmûs-ı Riyâziyyât'ın bu Birinci Cild'i 1315/1897 yılında İstanbul'da Karabet Matbaası'nda basılmış ve her hakkı Dârü's-Şafaka'ya bırakılmıştır. Toplam 400 sayfadır. Geriye kalan dokuz cildi yazma halinde bulunan bu muhteşem eser, matematiksel bilimlerde kullanılan terimleri açıklamak ve bu alanda çalışan bilgileri ve bunların kitaplarını tanıtmak maksadıyla hazırlanmıştır [1,3].

Salih Zeki Bey'in hayatı[1,3,4,5]: Salih Zeki, 1864 yılında İstanbul'da doğmuştur. Sinop'un Boyabat ilçesinden Hasanağa'nın oğludur. Çocuk yaşında annesi Saniye hanımı kaybetmiş, babasının da İstanbul'dan ayrılıp memleketine gitmesi üzerine büyük annesi tarafından büyütülmüştür. 1879'da Dârü's-Şafaka'ya girmiş ve orada sekiz yıl okumuş, *bütün sınıfları birincilikle geçerek* 1882'de mezun olmuştur. Dârü's-Şafaka'da matematik öğretmeni olan Mehmet Nadir, Muallimler Mecmuası'nın 2 Mart 1919 tarihli sayısında öğrencisi Salih Zeki'nin matematik alanındaki yüksek yeteneğini övgüyle anlatır.

Dârü's-Şafaka'dan mezun olduktan sonra, o zamanki deyimle, Salih efendi, Posta ve Telgraf Nezaretinde (Bakanlığında) memurluğa başlıyor. Orada telgraf tekniği öğrenirken bir Fransız uzmandan *diferensiyel* ve *integral* hesap dersleri alıyor. 1883 yılı sonbaharında yüksek öğrenim yapmak üzere, Posta ve Telgraf Nezareti bursuyla Paris'e gönderiliyor.

Paris'te, Fransız Posta ve Telgraf Bakanlığına bağlı Yüksek Mühendis Okulunda elektrik mühendisliği öğrenimi görüyor ve 1887'de mezun oluyor. Onunla beraber, aynı okulda okuyan arkadaşı (sonradan Posta ve Telgraf Umum Müdürlüğü yapan) Ahmet Fahri Beyin Muallimler Mecmuasında Mayıs 1924 sayısında (s. 589-597) anlattığına göre Salih Zeki, Pariste iken Collège de France'daki derslere de devam etmeye başlamış ve doktora yapmak istiyormuş. Fakat mühendis olunca Bakanlık

Pariste daha fazla kalmasına izin vermemiş. Parise gittiğinde yalnız Salih adıyla anılırken, Zeki adının eklenmesi de orada olmuş. Bir gün, Fransız arkadaşlarıyla birlikte bir matematiksel ifadenin integralini bulmaya çalışıyor, fakat başaramıyorlarmış. Sonunda Salih, derste gördükleri bir formül yardımıyla integrali hesap etmenin yolunu bulmuş. Onun üzerine arkadaşı Ahmet Fahri kendisine, daha sonra “Salih, sen zekisin” demiş ve arkasından oradakilerin önerisiyle Zeki lakabını almıştır.

1887’de yurda dönen Salih Zeki, Posta ve Telgraf Nezaretinde elektrik mühendisi olarak görevlendirilmiştir. Ek olarak, Mülkiye Mektebinde fizik, kimya dersleri vermeye başlamış ve bu arada da bilim tarihi çalışmalarının ilk sonuçlarını yayımlamaya devam etmiştir. 1892’de Resimli Gazete’de “Asâr-ı Eslâf” ve “Felekiyât” genel başlıkları altında dizi-makaleler bastırmış ve bu makalelerde, daha önce çok iyi bilinmeyen yazarları ve eserleri ayrıntılı olarak tanıtmıştır [6].

1895’te Rasadhâne-i Âmire müdürlüğüne atanmış, 1908’de İkinci Meşrutiyetin ilanından sonra Maarif Nezareti Maarif Meclisi üyeliğine getirilmiş, 1910’da Şair Tevfik Fikret’in hayli yankı uyandıran ünlü istifası üzerine Galatasaray Sultanisi Müdürlüğüne atanmış, 1912’de Maarif Müsteşarı, bir yıl sonra da Dârü’l-Fünûn Umum Müdürü (*Rektörü*) olmuştur. Bundan sonra zamanının çoğunu Fen Fakültesinde Matematik ve Fizik dersleri vermeye ayırmıştır. 1917’de rektörlükten ayrılmış, Fen Fakültesinde *Müderris* (*Profesör*) olarak çalışmaya devam etmiştir. Ömrünün son yıllarında zamanın bilimsel (matematik, fizik, kimya, tıp, ... gibi bilimlerin) dergisi olan *Resimli Gazete*’nin editörlüğünü de yapmıştır [6].

1919 yılı sonlarında rahatsızlanmış, “taab-ı dimaği” bir tür demans (bunama) teşhisiyle Fransız hastanesinde tedavi altına alınmış, 1921 de vefat etmiştir.

3. İNTEGRAL ALMA (TAMÂMÎ)

İntegral alma, matematik terminolojisinde diferensiyeli belli olan bir ifadenin integralini (kendisini) belirlemek demektir. Bu anlamda, integral alma kavramı ilk defa merhum Hoca İshâk Efendi tarafından kullanılmıştır. (Bkz. “Diferensiyel” ve “İntegral Alma” kelimeleri) [7, Sayfa 159].

Bir fonksiyonun diferensiyelinin veya türevinin belirlenmesi, diferensiyeli veya türevi belli olan bir fonksiyonun da kendisinin veya ters türevinin araştırılması doğaldır. İşte diferensiyelleri bilinen fonksiyonları bulmaya bu diferensiyellerin “İntegralini Alma” denilir.¹

Diferensiyel ifadelerinin integrallerinin alınması için çeşitli yöntemler mevcut ise de bunların tamamı aşağıdaki beş yöntemden birine indirgenebilir:

- 1) Uygulama Yoluyla İntegral Alma (Türevi Doğrudan Kullanarak İntegral Alma)
- 2)Çözümleme Yoluyla İntegral Alma
- 3)Değişken Değiştirme Yoluyla İntegral Alma
- 4)Parçalama Yoluyla (Kısmî) İntegral Alma
- 5) Serilerle İntegral Alma

3.1. Uygulama Yoluyla İntegral Alma

(Türevi Doğrudan Uygulayarak İntegral Alma) (İtmâm bi't-Tatbîk)

İntegrali istenen diferensiyel ifade, bilinen bir fonksiyonun türevine uygun bulunduğu halde söz konusu ifadenin integrali hemen alınabilir. Gerçekten de bilinen

¹ Leibniz (1646-1716) ve Newton (1642-1727) ayrı ayrı integrali keşfetmişlerdir. Ana fikirleri diferensiyel ve integral hesabının birbirleri ile bağlantılı olmasıdır. Bu sembolik bağlantıyı kullanarak, matematik, fizik ve astronomi alanlarındaki önemli sayıda problemi çözüme kavuşturabilmişlerdir. Gauss (1777-1855) integraldeki ilk tabloyu ve devamında birçok matematiksel doğa bilimlerindeki integralleri uygulamak açısından tablolar yapmıştır. Cauchy (1789-1857) integralleri karmaşık bir şekle getirmiştir. Riemann (1826-1866) ve Lebesgue (1875-1941) kesin integrasyonu sağlam mantıksal temellere oturtmuştur.

bu fonksiyona istenilen herhangi bir miktar sabitin eklenmesi ile elde edilen sonuç, integrali istenen diferensiyel ifadeyi veren fonksiyondan ibarettir. Ancak integrali alınacak diferensiyel ifadede bir sabit katsayısı bulunduğu halde elde edilen fonksiyonu da bu katsayı ile çarpmak gerekir.

Basit (temel) fonksiyonların türevleri bilindiğinden bu gibi diferensiyellerin integrali hususunda asla güçlüklerle tesadüf olunamayacağı açıktır.

Mesela $x^{1+m}/1+m$ fonksiyonunun türevi alındığı zaman

$$d\left(x^{1+m}/1+m\right)=x^m dx$$

bulunduğundan $x^m dx$ diferensiyel ifadesinin integrali alındığında

$$\int x^m dx = \left(x^{1+m}/1+m\right) + k$$

bulunur.

Keza $db^x = b^x \ln b dx$ olduğundan buna tatbik ederek

$$\int b^x dx = \left(b^x/\ln b\right) + k$$

bulunur.

Aynı şekilde $d\sin x = \cos x dx$ olduğundan buna tatbik ettiğimizde

$$\int \cos x dx = \sin x + k$$

bulunur.

İntegrali istenen türev ifadesi, bilinen bir fonksiyonun türevi ile aynı ise integral hemen bu fonksiyon olarak bulunur ve keyfi bir sabit eklenir. Gerçekten de belli olan bu fonksiyona istenilen herhangi bir miktar sabitin eklenmesi ile elde edilen sonuç integraldir.

3.2. Çözümleme Yoluyla İntegral Alma (İtmâm bi't-Tahlîl)

Çeşitli fonksiyonların toplamının diferensiyeli, söz konusu fonksiyonların ayrı ayrı alınan diferensiyelleri toplamına eşit olduğu için doğal olarak çeşitli diferensiyeller toplamının belirli integrali de bu diferensiyellerin ayrı ayrı alınan integralleri ile bir sabit miktarın toplamına eşit olur.

Mesela:

$$d[f(x) + g(x) - h(x)] = f'(x) + g'(x) - h'(x)$$

olduğu gibi

$$\int [f'(x) + g'(x) - h'(x)] dx = \int f'(x) dx + \int g'(x) dx - \int h'(x) dx$$

veya

$$\int [f'(x) + g'(x) - h'(x)] dx = f(x) + g(x) - h(x) + k$$

bulunur.

İşte bu esasa dayanarak bir diferensiyel ifadeyi birçok diferensiyel ifadeye ayırdıktan sonra integralini alma yöntemine “İtmâm bi't-Tahlîl” (Ayrırma Yoluyla İntegral Alma) adı verilmiştir.

Bu yönteme uygun olarak bir diferensiyel ifadenin integrali için söz konusu ifade mümkün olduğu mertebe ayrı ayrı integralleri alınabilecek diğer birtakım diferensiyel ifadelere ayrılır.

Bir diferensiyel ifadenin bu şekilde terimlerine ayrılmasındaki amaç, söz konusu ifade yerine, kolaylıkla integrali alınabilen diğer diferensiyel ifadeleri koymak olduğundan bu kısımların sayısının teorik olarak sınırlanamayacağı doğaldır. Hatta bazı defalar söz konusu kısımların sayısının sonsuz olduğu ve diğer bir deyişle integrali istenen diferensiyel ifadenin seri şeklinde genişletildiği de olan bir şeydir. Ancak bu durumda seriyi teşkil eden terimlerin integralleri toplamı, seri toplamının yani asıl diferensiyel ifadenin integrali olur ise de serinin yakınsaklığı hakkında bazı koşulların varlığı kaçınılmazdır (Bkz. Serilerle integral alma) [7, Sayfa 161].

Örnek 3.1

$$(4x^3 - 5x^2 - 3x + 8)dx$$

toplam diferensiyelinin ayırma yoluyla integrali istenirse yukarıdaki kurala uygun olarak,

$$\int (4x^3 - 5x^2 - 3x + 8)dx = \int 4x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x dx - \int 8 dx$$

$$= \frac{4}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{1}x + k$$

$$= x^4 - \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{8}{1}x + k$$

bulunur.

Örnek 3.2

$$\frac{(3-2x)dx}{x^2-x-2}$$

kesirli ifadenin diferensiyelinin integrali için belirsiz katsayılar yöntemine uygun olarak söz konusu kesrin

$$\frac{B}{x-x_1} + \frac{C}{x-x_2}$$

gibi iki kesre ayrılması gerekir. Bunların paydalarında bulunan x_1, x_2 miktarları $x^2 - x - 2 = 0$ denkleminin köklerinden ve paylarını teşkil eden B, C miktarları da değerleri aşağıda belirlenecek niceliklerden ibarettir.

Bu halde, söz konusu denklemin kökleri sırasıyla $x_1 = 2, x_2 = -1$ olacağı için

$$\frac{3-2x}{x^2-x-2} = \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

veya

$$\frac{3-2x}{(x-2)(x+1)} = \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

olacağından, iki taraf $(x-2)(x+1)$ ile çarpıldığında

$$3-2x = B(x+1) + C(x-2)$$

veya

$$3 - 2x = Bx + B + Cx - 2C$$

bulunur.

Şimdi belirsiz katsayılar yöntemine uygun olarak eşitliğin iki tarafında x bilinmeyeninin aynı kuvvetine ait katsayılar birbirine eşitlenir ise,

$$-2 = B + C$$

$$3 = B - 2C$$

denklemleri hasıl olur. Bunlardan da

$$B = -\frac{1}{3}, C = -\frac{5}{3}$$

değerleri elde edilir.

Bu takdirde

$$\frac{3-2x}{x^2-x-2} = -\frac{1}{3(x-2)} - \frac{5}{3(x+1)}$$

olacağı için

$$\int \frac{3-2x}{x^2-x-2} dx = -\frac{1}{3} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{5}{3} \int \frac{dx}{x+1}$$

ve bundan dolayı

$$\int \frac{3-2x}{x^2-x-2} dx = -\frac{1}{3} \ln(x-2) - \frac{5}{3} \ln(x+1) + k$$

bulunmuş olur.

3.3. Değişken Değiştirme Yoluyla İntegral Alma (İtmâm bi'l-Vaz)

Bazı defalar integrali mümkün görülmeyen bir diferensiyel ifadenin, değişkenine karşılık gelen diğer bir değişkeni içeren bir fonksiyon seçerek ve yerine koyarak kolayca integrali alınabilecek bir duruma getirmek ve dönüştürmek mümkün olur. Bu gibi diferensiyel ifadelerin integrali için aşağıda bildirilen esasa dayanarak “İtmâm bi'l-Vaz” (Değişken Değiştirme Yoluyla İntegral Alma) denilen yönteme başvurulur.

Şöyle ki:

$$f(x)dx \tag{3.1}$$

diferensiyel ifadenin integralini almak için, y bir aracı değişken olmak üzere,

$$x = g(y)$$

kabul edilecek olur ise doğal olarak

$$dx = g'(y)dy$$

olacağından bilinen ifade

$$f[g(y)]g'(y)dy \tag{3.2}$$

şekline dönüşmüş olur. Bu halde tabidir ki bu iki diferensiyel ifadenin son değerleri birbirine uygun geldiği surette, ikinci diferensiyel ifadenin tümü birinci diferensiyel ifadenin değerine eşit bulunur. Diğer bir deyişle x_1, x_2 değerleri

$$x_1 = g(y_1) \quad x_2 = g(y_2)$$

denklemleri ile tayin edildiği halde

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \int_{y_1}^{y_2} f[g(y)] g'(y) dy$$

olması gerekir.

Bundan şu netice çıkarılır ki

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + k^1$$

belirli integrali yerine gerekirse,

$$\int_{y_1}^{y_2} f[g(y)] g'(y) dy + k^2$$

belirli integrali hesaplanır.

Bu halde problem, $x = g(y)$ münasebetini integrali istenen diferensiyel ifadeden daha kolay bir biçimde integrali alınabilen bir ikinci diferensiyel ifade verebilecek surette seçmekten ibaret kalır. Bu da hesabı yapan kimsenin alışkanlık ve becerisine kalmıştır.

¹ Orijinalde k sabiti bulunmaktadır. Ancak, belirli integralin özelliği gereğince k sabiti olmamalıdır. Başka bir ifade ile k=0 alınmalıdır.

Örnek 3.3

$$\frac{dx}{b^2 + x^2}$$

diferensiyel ifadenin integralini almak gerekirse

$$x = by$$

varsayıldığında

$$dx = b \, dy$$

olacağından bunlar yerlerine konulduğunda

$$\frac{dx}{b^2 + x^2} = \frac{b \, dy}{b^2 + b^2 y^2} = \frac{1}{b} \frac{dy}{1 + y^2}$$

olduğundan

$$\int \frac{dx}{b^2 + x^2} = \frac{1}{b} \int \frac{dy}{1 + y^2}$$

olur.

İkinci tarafta bulunan $\frac{dy}{1 + y^2}$ ifadesi, $\arctan y$ fonksiyonunun diferensiyeli olduğundan

$$\int \frac{dx}{b^2 + x^2} = \frac{1}{b} \arctan y + k$$

$$\int \frac{dx}{b^2 + x^2} = \frac{1}{b} \arctan y + k = \frac{1}{b} \arctan \frac{x}{b} + k$$

bulunur.

Örnek 3.4

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c}$$

integralini bulmak için öncelikle integral işareti dahilinde bulunan ifadenin paydası

$$x^2 + bx + c = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)$$

olduğundan

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4}\right)}$$

yazılabilir. Şimdi

$$\frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} = y$$

varsayıldığından

$$dy = \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} dx$$

veya

$$dx = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}} dy$$

olacağından

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + bx + c} &= \int \frac{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}} dy}{y^2 \left(c - \frac{b^2}{4} \right) + \left(c - \frac{b^2}{4} \right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \int \frac{dy}{1 + y^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \arctan y + k \\ &= \frac{1}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} \arctan \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{c - \frac{b^2}{4}}} + k \end{aligned}$$

bulunur.

$x^2 + bx + c$ üçterimlisinin x_1, x_2 kökleri karmaşık olduğu yani $\frac{b^2}{4} - c < 0$ bulunduğu

halde $x_1 = m + n\sqrt{-1}$, $x_2 = m - n\sqrt{-1}$ gibi birer reel kısım ile birer de sanal kısımdan oluşacağı gibi

$$m = -\frac{b}{2}, \quad n = \sqrt{c - \frac{b^2}{4}}$$

olacağından, bu halde

$$\int \frac{dx}{x^2 + bx + c} = \frac{1}{n} \arctan \frac{x-m}{n} + k$$

olur.

3.4. Parçalama Yoluyla (Kısmî) İntegral Alma (İtmâm bi't-Tefrîk)

Bazı defalar integrali istenen bir diferensiyel ifade, birinin integrali bilinen diğerinin de kolay bir şekilde integrali mümkün olan iki kısma ayrılabilir. Şöyle ki u, v nicelikleri x bağımsız değişkeninin birer fonksiyonu olmak üzere,

$$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

veya

$$d(uv) = u dv + v du$$

olacağından iki tarafın integrali alındığında

$$uv = \int u dv + \int v du$$

ve bu yüzden

$$\int u dv = uv - \int v du$$

kuralı elde edilir.

Bu kurallardan anlaşılacağı üzere $u dv$ diferensiyel ifadesinin integrali uv çarpım sonucuyla $-\int v du$ gibi bir integral toplamına eşit bulunduğundan bu ikinci integral kolayca elde edildiğinde $\int u dv$ integrali de kolayca çıkarılabilir.

İşte bir diferensiyel ifadenin, bu suretle birinin integrali bilinen diğerinin de integrali mümkün olan iki kısma ayrılarak integralini almaya “İtmâm Bi’t-Tefrîk” (Parçalama Yoluyla İntegral Alma) adı verilmiştir.

Örnek 3.5

$$\int x \cos x \, dx$$

integralini hesaplamak gerekirse

$$x = u, \cos x \, dx = dv$$

varsayarak yukarıdaki kuralda yerlerine koymak yeterlidir.

Hakikaten de

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx$$

olacağından ve zaten

$$\int \sin x \, dx = -\cos x$$

olduğundan

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + k$$

integrali bulunmuş olur.

Örnek 3.6

$$\int x^m e^x \, dx$$

integralini çıkarmak için

$$x^m = u, \, e^x \, dx = dv$$

varsayıldığında

$$du = mx^{m-1} \, dx, \, v = e^x$$

olduğundan yukarıdaki kurala uygun olarak

$$\int x^m e^x \, dx = x^m e^x - \int mx^{m-1} e^x \, dx$$

$$= x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x \, dx$$

olur.

Bu suretle $\int x^m e^x \, dx$ integrali $\int x^{m-1} e^x \, dx$ integraline indirgendiği gibi aynı yöntemle uygun olarak

$$\int x^{m-1} e^x dx = x^{m-1} e^x - (m-1) \int x^{m-2} e^x dx$$

ve yine

$$\int x^{m-2} e^x dx = x^{m-2} e^x - (m-2) \int x^{m-3} e^x dx$$

ve bu biçimde m pozitif tam sayısı olduğuna göre sonuç olarak

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x\end{aligned}$$

bulunacağından bunlar sırasıyla yerlerine konulduğunda

$$\int x^m e^x dx = e^x \left[x^m - mx^{m-1} + m(m-1)x^{m-2} - m(m-1)(m-2)x^{m-3} + \dots m m(m-1) \dots \times 3 \times 2 x m m(m-1) \dots 2 \times 1 \right] + k$$

kuralı elde edilir.

Söz konusu kural , $m = 2$ varsayıldığına göre aşağıdaki şekle dönüşür.

$$\int x^2 e^x dx = e^x [x^2 - 2x + 2] + k$$

3.5. Serilerle İntegral Alma (İtmâm bi'l-Tevsî)

$f(x)dx$ diferensiyel ifadesinin, tam olarak integrali alınamadığı takdirde söz konusu ifadenin integralini seri biçiminde genişletmek yolu araştırılır ve bunun için özellikle $f(x)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi bir seri şekline konulur:

$$f(x) = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_n + \dots \quad (3.3)$$

Bununla birlikte bu serinin mutlaka iki sınır arasında yakınsak olması şarttır. Aksi halde söz konusu serinin x değişkeninin $f(x)$ gibi bir belirli ve daimi fonksiyonunu gösteremeyeceği şüphesizdir (Bkz. “Tûsî” kelimesi).

Bu yakınsak serinin baştaki n teriminin toplamı, evvelki terimleri toplamı m ve geriye kalan terimlerin toplamı da m' ile ifade edilecek olur ise

$$f(x) = m + m'$$

olmalıdır. n yani terimlerin sayısı sınırsız olarak arttığı halde m toplamı serinin limiti olan $f(x)$ fonksiyonuna yaklaşacağı gibi m' toplamı da sıfıra yaklaşır.

Şimdi söz konusu eşitliklerin iki tarafını dx ile çarptıktan sonra x değişkeninin $x = b$, $x = c$ değerleri arasında integralleri alınacak olur ise

$$\int_b^c f(x)dx = \int_b^c m dx + \int_b^c m' dx$$

olur.

Fakat n sınır sayısının sınırsız olarak arttığı tasavvur edildiği halde, m' toplamı sıfıra yaklaşacağından doğal olarak

$$\int_b^c m' dx$$

integrali de sıfıra gideceğinden

$$\int_b^c f(x) dx = \lim \int_b^c m dx \quad (3.4)$$

veya

$$\int_b^c f(x) dx = \int_b^c y_0 dx + \int_b^c y_1 dx + \int_b^c y_2 dx + \dots$$

olur. Bu eşitliğin ikinci tarafını teşkil eden seri, $x = c$ değeri için “Eş. 3.3” serisi yakınsak olmasa dahi yine doğrudur. Çünkü son denklem x değişkeninin b ile c arasında kalan her bir değeri için doğru olduğu ve diğer bir deyişle iki tarafı x değişkeninin birer sürekli fonksiyonu bulunmasından ötürü x değişkeni c değerinde son bulunduğu anda dahi her iki tarafın yine aynı limite yaklaşması doğaldır.

Şimdi $x = b$, $x = c$ değerleri için elde edilen bu eşitliklerin x değişkeninin her bir değeri için de doğru olması gerekeceğinden

$$\int f(x)dx = \int y_0 dx + \int y_1 dx + \int y_2 dx + \dots \quad (3.5)$$

olur.

Bazen $f(x)$ fonksiyonu çeşitli yakınsak serilere açılabilir olduğundan integrali için bunlar arasında probleme en çok uygun düşeni seçmek gerekir.

Genellikle $f(x)$ ifadesi Maclaurin serisine uygun olarak

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{x^2}{1 \times 2} f''(0) + \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} f'''(0) + \dots$$

biçiminde bir yakınsak seriye dönüştürülebileceğinden doğal olarak

$$\begin{aligned} \int f(x)dx &= \int f(0)dx + \int x f'(0)dx + \int \frac{x^2}{1 \times 2} f''(0)dx + \dots \\ &= k + x f(0) + \frac{x^2}{1 \times 2} f'(0) + \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} f''(0) + \dots \end{aligned}$$

olur. Bu da yine Maclaurin serisine göre $f(x)dx$ diferansiyel ifadesinin açılmasından ve k sabit miktarı da $x = 0$ için bu fonksiyonun alacağı değerden ibarettir.

Bazen de $y = \int f(x)dx$ ifadesi Bernoulli ilkesine uygun olarak aşağıda gösterilen seri biçiminde açılır:

$$y = y_0 + x \frac{dy}{dx} - \frac{x^2}{1 \times 2} \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} \frac{d^3 y}{dx^3} - \dots$$

bu kuralda bulunan y_0 miktarı y fonksiyonunun $x = 0$ değerine uygun düşen değerinden ibaret olduğu için söz konusu miktar k ile ifade ve

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \frac{d^2 y}{dx^2} = f'(x), \dots \text{ değerleri ile değiştirildiğinde}$$

$$\int f(x)dx = k + \frac{x}{1} f(x) - \frac{x^2}{1 \times 2} f'(x) + \frac{x^3}{1 \times 2 \times 3} f''(x) - \dots$$

bulunur.

Serilerle integral alma yolu, diferensiyel ifadelerin integralinden ziyade türev veya diferensiyelleri bilinen fonksiyonların seriye açılması hususunda kullanılması muhtemeldir.

Örnek 3.7

$$\int \frac{dx}{1+x^2}$$

ifadesinin integrali $\arctan x$ olduğu bilindiğinden serilerle integral alma yoluyla $\arctan x$ fonksiyonu aşağıdaki bir seri şeklinde açılabilir:

Hakikatte $x < 1$ varsayıldığına göre $\frac{1}{1+x^2}$ ifadesi, x değişkeninin artan kuvvetlerine göre düzenlenmiş olan

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots$$

yakınsak serisinin limitine eşit olduğundan

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dx - \int x^2 dx + \int x^4 dx - \int x^6 dx + \dots$$

veya

$$\arctan x = k + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

bulunur.

Şimdi $x = 0$ değeri için $\arctan x = 0$ olduğundan $k = 0$ olması gerekeceğinden

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

serisi elde edilmiş olur.

Aksine $x > 1$ olduğunda $\frac{1}{x^2 + 1}$ ifadesi, x değişkeninin azalan kuvvetlerine göre düzenlenmiş olur.

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \dots$$

yakınsak serisi şeklinde genişletilebileceğinden

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^4} + \int \frac{dx}{x^6} - \int \frac{dx}{x^8} + \dots$$

ve bu nedenle

$$\arctan x = k - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$$

olur.

Şimdi $x = 0$ olamayacağından ve $x = \infty$ değeri için $\arctan x = \frac{\pi}{2}$ olduğundan doğal

olarak $k = \frac{\pi}{2}$ olacağından

$$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$$

serisi elde edilir.

Bu iki seriden birincisi 0 ile $\frac{\pi}{4}$ arasında ve ikincisi $\frac{\pi}{4}$ ile ∞ arasında kalan yayların değerlerini gösterir. Çünkü birincisinde x değişkeni, 0 ile +1 ve ikincisinde ise +1 ile $+\infty$ arasında değişken varsayılmıştır. Fakat hangisinde olursa olsun $x = 1$ varsayılacak olur ise,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

meşhur serisi elde edilir.

Örnek 3.8

$$\int \frac{dx}{1+x}$$

ifadesinin integrali $\ln(1+x)$ olduğu bilindiğine göre serilerle integralini alma yoluyla $\ln(1+x)$ fonksiyonunun da genişletilmesi mümkün olur. Hakikaten de $x < 1$ olduğuna göre

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

olacağından

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int dx - \int x dx + \int x^2 dx - \int x^3 dx + \dots$$

ve bu yüzden

$$\ln(1+x) = k + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

olur.

Fakat $x = 0$ değeri için $\ln(1+x) = 0$ olacağından, doğal olarak $k = 0$ olması gerekeceğinden

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

serisi elde edilir.

4. SONSUZ KÜÇÜK

Limiti sıfırdan ibaret bulunan değişken niceliklere genellikle “Asgari Nâ-Mütenâhî” (Sonsuz Küçük) denir¹. Bu tanıma göre bir nicelik sonsuz küçüktür denilince, her şeyden önce, o niceliğin değişken olduğu ve ikinci olarak da sıfıra yaklaşık bulunduğu anlaşılır [7].

Genellikle bir matematik probleminde yer alan sonsuz küçük nicelikler, tek değişkenli fonksiyonlardan oluşur. Söz konusu değişken belirli bir değere yaklaştıkça bu fonksiyonlar da sıfıra doğru yaklaşırlar. Nitekim

$$y = 1 - \sin x$$

fonksiyonu x yayı $\pm \frac{\pi}{2}$ değerine yaklaştıkça sonsuz küçük bir miktar olur.

Fakat bir problemde birkaç sonsuz küçük niceliğin bulunduğu durumda, bu sonsuz küçük nicelikleri birbirinden “mertebe” itibarıyla ayırmak gerekir. Diğer bir deyişle sonsuz küçük denilen fonksiyonlar için çeşitli mertebeler mevcuttur. Şöyle ki aralarındaki oran, sınırlı bir nicelikte biten iki sonsuz küçük niceliğe aynı mertebeden ve bilakis aralarındaki oran sıfıra bitişen (yaklaşan) iki sonsuz küçükten birincisi ikincisinin üstünde (daha yüksek) bir mertebeden sayılır ve kabul edilir.

Mesela x yayı $\frac{\pi}{2}$ değerine yaklaştığı durumda

¹ 19. yüzyılda Karl Weierstrass (1815-1897) tarafından limit kavramının matematiğe kazandırılması sonsuz küçük sayıların matematikte geniş kullanımının önünü açmıştır.

$$y = 1 - \sin x$$

$$z = \cos^2 x$$

fonksiyonlarından her biri aynı mertebeden bir sonsuz küçük gibi kabul edilir. Çünkü bunlar arasındaki oranın limiti¹

$$\lim \frac{y}{z} = \lim \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x} = \lim \frac{1 - \sin x}{1 - \sin^2 x} = \lim \frac{1}{1 + \sin x} = \frac{1}{2}$$

gibi belirli bir sabite yaklaşır.

Halbuki $y = 1 - \sin x$

fonksiyonu $z = \cos x$

fonksiyonundan daha büyük mertebeden bir sonsuz küçüktür. Çünkü bunlardan birincisi ile ikincisi arasındaki oranın limiti

$$\lim \frac{y}{z} = \lim \frac{1 - \sin x}{\cos x} = \lim \frac{1 - \sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \lim \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}} = 0$$

olduğu gibi sıfıra gider.

¹ Orjinalde $\lim \frac{y}{z}$ yazmaktadır. Ancak, günümüzde $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{y}{z}$ şekli kullanılmaktadır.

4.1. Temel Sonsuz Küçük (Asgar-ı Nâ-Mütenâhî-yi Aslî)

Genellikle bir probleme dahil olan sonsuz küçüklerin mertebelerini belirlemek için bunlardan biri karşılaştırma terimi olarak seçilir. İşte karşılaştırma terimi olarak kabul edilen bu sonsuz küçüğe “Asgar-ı Nâ-Mütenâhî-yi Aslî” (Temel Sonsuz Küçük) adı verilir. Bunun mutlaka probleme dahil olan diğer sonsuz küçüklerden daha küçük ve en azından eşit bir mertebeden bulunması lazımdır.

Bundan sonra bu asli sonsuz küçüğe nazaran aynı mertebede bulunan sonsuz küçüklere, “1.mertebeden” sonsuz küçük denildiği gibi aksine bunun karesi ile aynı mertebeden olan sonsuz küçüklere “2.mertebeden” ve küpüyle aynı mertebeden olan sonsuz küçüklere “3. mertebeden” ve bunun gibi asli sonsuz küçüğün n . kuvvetiyle aynı mertebeden olan sonsuz küçüklere de “ n . mertebeden” sonsuz küçük adı verilir.

Maksadımızı açıklamak için birbirlerine

$$g(x, y) = 0$$

gibi bir denklem ile bağlı iki değişken nicelik tasavvur ve bu niceliklerden birinde meydana gelecek yeterince küçük bir değişmeden dolayı diğerinin de aynı derecede bir değişime uğrayacağını varsayalım ve kabul edelim.

Bu halde bu iki değişkenden biri, mesela x niceliği bağımsız değişken olarak kabul edilirse diğerinin $y = f(x)$ gibi bunun sürekli bir fonksiyonu olacağı doğaldır.

Şimdi x değişkeninin yeterince küçük olan artma miktarı h ile ve bu değişmeden dolayı diğer y niceliğinin uğrayacağı değişim miktarı da k ile ifade edildiği halde

$\frac{k}{h}$ oranı sıfırdan farklı b gibi bir belirli bir limite ulaştığına göre söz konusu oran anlaşıldığı gibi,

$$\frac{k}{h} = b + \alpha$$

biçiminde ifade olunabilir. Bu eşitliğin ikinci tarafında bulunan α miktarı h artma miktarıyla beraber sıfıra gitmek ve diğer bir değişle

$$\lim \frac{k}{h} = b$$

bulunmak üzere konulur ve kabul edilir.

4.2. Birinci Mertebeden Sonsuz Küçük

(Birinci Mertebeden Asgar-ı Nâ-Mütenâhî)

İşte h artma miktarı, aslında sonsuz küçük bir nicelikten ibarettir, “Asgarî Nâ-Mütenâhî-yi Aslî” (Temel Sonsuz Küçük) adıyla anıldığı gibi k artma miktarına da “1. mertebeden bir sonsuz küçüktür” denilir.

Bu örnekten anlaşılacağı üzere 1.mertebeden sonsuz küçükleri genellikle, h asli sonsuz küçük, b belirli bir miktar, α ise h ile birlikte sıfıra giden bir sonsuz küçük niceliği göstermek üzere

$$k = h(b + \alpha)$$

şeklinde ifade edilebilir.

4.3. İkinci Mertebeden Sonsuz Küçük

(İkinci Mertebeden Asgar-ı Nâ-Mütenâhî)

Yukarıdaki $\frac{k}{h^2}$ oranı yine h artma miktarı arasındaki limitte sıfırdan farklı c gibi belirli bir miktara ulaştığı varsayılacak olur ise :

$$\frac{k}{h^2} = c + \alpha$$

olması lazım geleceğinden bu durumda söz konusu k miktarı sonsuz küçüğüne de “ikinci mertebeden bir sonsuz küçüktür” denilir.

4.4. Üçüncü Merteben Sonsuz Küçük (Üçüncü Mertebeden Asgar-ı Nâ-Mütenâhî)

Bunun gibi $\frac{k}{h^3}$ ile yine h asli sonsuz küçüğü arasındaki oran sıfırdan farklı bir d limitine yaklaşıldığında söz konusu oran,

$$\frac{k}{h^3} = d + \alpha$$

tarzında ifade olunabileceğinden $\frac{k}{h^3}$ oranı da “3.mertebeden bir sonsuz küçük” olur.

4.5. n. Mertebeden Sonsuz Küçük (n. Mertebeden Asgar-ı Nâ-Mütenâhî)

Genellikle $\frac{k}{h^n}$ oranı sıfırdan farklı belirli bir limite yaklaştığı durumda söz konusu orana “n. mertebeden” sonsuz küçüktür denilir.

Çeşitli mertebelerden olan sonsuz küçükler hakkında yukarıda bahsedilen maddeleri açıklamak için yukarıdaki $y = f(x)$ fonksiyonunun ardışık türevlerini incelemeye alalım:

Türevin tanımına göre söz konusu fonksiyonun 1.türevi ($f'(x)$) α miktarı h artma miktarıyla beraber sıfırda biten bir sonsuz küçük miktarı göstermek üzere,

$$f'(x) = \frac{k}{h} + \alpha$$

olacağından

$$k = h[f'(x) + \alpha]$$

bulunur ki burada $f'(x)$ türevi sıfırdan farklı bir belirli değeri haiz bulunduğu takdirde $h f'(x)$ çarpım sonucu 1.mertebeden bir sonsuz küçük olur.

Şimdi $f(x)$ fonksiyonunun ardışık türevleri x değişkeninin birer belirli ve sürekli fonksiyonu olduğu takdirde k artma miktarı Taylor serisine uygun olarak açıldığında,

$$k = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1 \times 2} f''(x) + \frac{h^3}{1 \times 2 \times 3} f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{1 \times 2 \times \dots n} f^{(n)}(x) \\ + \frac{h^{n+1}}{1 \times 2 \times \dots n(n+1)} f^{(n+1)}(x + \gamma h)$$

olur.

İşte değişkenin h artma miktarı asli sonsuz küçük kabul edildiğine göre bu serinin birinci terimi 1. mertebeden; ikinci terimi 2. mertebeden ve böylece $(n+1)$ inci terimi olan $\frac{h^{n+1}}{1.2 \dots (n+1)} f^{(n+1)}(x + \gamma h)$ miktarı da $(n+1)$. mertebeden sonsuz küçükten ibarettir.

Bu takdirde

$$k - \frac{h}{1} f'(x) = \frac{h^2}{1 \times 2} f''(x) + \dots$$

x değişkenini apsis ve y değişkeni de ordinat kabul ederek (Şekil 4.1)

$$y = f(x)$$

eğrisini çizelim.

Şimdi x değişkenine ML değerinden itibaren

$$h = LL'$$

gibi sonsuz küçük bir miktar arttırma verilecek olur ise y fonksiyonunun da CL değerinden itibaren

$$k = C'L' - CL = BC'$$

gibi sonsuz küçük bir miktar artış kazanması doğaldır.

Bu halde türev kelimesinde açıklandığı üzere $f'(x)$ birinci türevi ve diğer bir deyişle

$\frac{k}{h} = \frac{BC'}{LL'} = \frac{BC'}{BC}$ oranının limiti eğriye C noktasında çizilen teğet doğrusunun x eksenine ile oluşturduğu β açısının tanjantına eşit bulunur.

İşte

$$h = LL'$$

miktarı asli sonsuz küçük gibi kabul edildiği takdirde

$$k = BC'$$

artış miktarıyla

$$hf'(x) = BT$$

çarpım sonucu ve CC' yayı veya kirişi de 1. mertebeden birer sonsuz küçük olur.

Çünkü söz konusu miktarlardan her birinin h aslı sonsuz küçüğüne oranı sıfır olamayacak şekilde belirli bir miktara yaklaşmış bulunur.

Bunun gibi birbirine sonsuz yakın olan C, C' noktalarından eğriye çizilen teğet doğrularının oluşturdukları açı da yine 1. mertebeden bir sonsuz küçüktür.

Çünkü C noktasında çizilen CD teğet doğrusunun x eksenini ile teşkil eylediği β açısı, esasen x değişkeninin bir sürekli fonksiyonu olduğu için söz konusu açının bu noktaya sonsuz yakın bulunan C' noktasında kazanacağı değer, ilk değerinden sonsuz küçük olan bir miktar artış kadar değişeceği şüphesizdir.

Böyle birbirine sonsuz yakın bulunan iki noktanın teğet doğruları arasında meydana gelen açı ise, bu teğet doğruların x eksenini ile teşkil eyledikleri açılar arasındaki farktan başka bir şey değildir.

Halbuki $C'T$ doğrusu 2.mertebeden bir sonsuz küçüktür. Gerçekten de

$$C'T = BC' - TB = k - hf'(x) = h^2 \left[\frac{f''(x)}{1 \times 2} + \alpha \right]$$

olduğundan söz konusu doğrunun 2.mertebeden bir sonsuz küçüğe eşit bulunması doğaldır. Bunun gibi C' noktasından CD teğet doğrusuna $C'K$ dikmesi indirilecek olur ise söz konusu doğrunun boyu da yine 2. mertebeden bir sonsuz küçük olur.

Çünkü $C'KT$ dik üçgeninde

$$C'K = C'T \times \cos \beta$$

olacağından ve β açısı ise varsayımlar gereği $\frac{\pi}{2}$ den küçük olduğu için $\cos \beta$ sıfıra eşit olamayacağından doğal olarak yukarıdaki tanımlara uygun olarak $C'K$ doğrusunun da 2. mertebeden bir sonsuz küçük olması gerekir.

Eğer fonksiyonun $f''(x)$ 2. türevi sıfıra eşit bulunacak olur ise , zorunlu olarak

$$C'T = k - hf'(x) = h^3 \left[\frac{f'''(x)}{1 \times 2 \times 3} + \alpha \right]$$

olacağından bu halde $C'T$ doğrusu ve bu yüzden $C'K$ dikmesi de üçüncü mertebeden birer sonsuz küçük olur.

İşte bu özel durum x değişkeninin $f'(x)$ türevinin bir büyük veya küçük değerden geçtiği zaman meydana gelerek eğrinin C noktası da bir dönme noktasından ibaret bulunur. Bu yüzden bir eğri üzerinde bulunan bir dönme noktasından sonsuz küçük uzaklıkta bulunan diğer bir noktanın, söz konusu eğri bu dönme noktasında çizilen teğet çizgisine olan geometrik uzaklığı sonuçta 3. mertebeden bir sonsuz küçük olabilir. Bu noktalardan eğriye çizilen teğet doğrular arasında meydana gelen açı da 2.mertebeden bir sonsuz küçüktür.

Sonsuz küçükler, aslında sıfıra yakın değişken niceliklerden ibaret oldukları için kullanımları yalnız bir oran veya toplam biçiminde yarar sağlar. Hakikaten de iki sonsuz küçük aynı mertebeden bulunduğu taktirde bunların aralarındaki oran da belirli bir değere eşit olabilir.

Böylece sonsuz küçük bir miktar yalnız başka hiçbir öneme sahip olmasa da sayısı sürekli artan bir cins sonsuz küçüklerin toplamı belirli bir değere yaklaşabilir. Ancak bu sonsuz küçüklerin her biri sıfıra yaklaştıkça sayılarının da sonsuza yaklaşması gerekli ve yeterlidir. Bu konuda gerekli olan ayrıntı “Hisâb” (Hesap), “Tefâzuli” (Diferensiyel) ve “Tamâmî” (İntegral) kelimelerinde verilecektir.

Sonsuz büyük bir miktar alelade ∞ işareti ile gösterildiği gibi sonsuz küçük bir miktar da genellikle $\frac{1}{\infty}$ ile gösterilir.

Ancak $\frac{1}{\infty}$ ifadesi 1. mertebeden bir sonsuz küçüğü göstereceği için 2. mertebeden olan sonsuz küçükler $\frac{1}{\infty^2}$, 3. mertebeden olan sonsuz küçükler $\frac{1}{\infty^3}$ ve n.mertebeden bir sonsuz küçük de $\frac{1}{\infty^n}$ ile gösterilmesi gerekir.

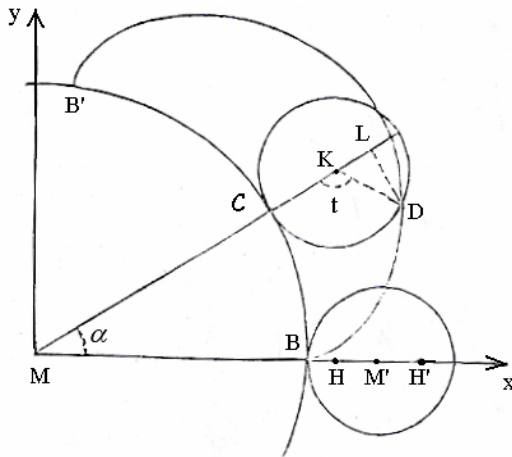
5. EPİSİKLOİD

Bu ad genellikle sabit bir daire çevresi üzerinde kaymaksızın yuvarlanarak hareket ettiği düşünülen diğer bir daire çevresinin bir noktasının çizdiği eğriye verilmektedir [7].

Bir düzlemde bulunan bir doğru üzerinde yuvarlanarak hareket eden bir daire çevresinin bir noktasının çizdiği eğriye “Sikloid”¹ denildiği gibi söz konusu hareketli daire bir doğru yerine diğer bir daire çevresi üzerinde kaymaksızın yuvarlandığı halde bir noktasının çizdiği eğriye de “Episikloid” denir.

Ancak söz konusu iki daire çevresi yani hareketli daire ile sabit daire aynı düzlem üzerinde bulunduğunda meydana gelen episikloide “Düzlemsel Episikloid” ve aksine farklı düzlemlerde bulunduklarında meydana gelen episikloide “Küresel Episikloid” denir.

5.1. Düzlemsel Episikloid (Müstevî Episikloid)



Şekil 5.1. Dışsal düzlemsel episikloid

¹ İlk kez 1590’da Galileo sikloid eğrisini hayal etti. Galileo’nin ölümünden sonra öğrencileri Viviani ve Torricelli sikloid’i matematiksel olarak incelediler. Sikloid’in alanı, Torricelli ve Roberval tarafından ve sikloid’in etrafında dönmesinden doğan hacmi de, Roberval tarafından hesaplandı. Blaise Pascal (1623-1662) 16 yaşında Konik’ler üzerine bir kitap yazdı. Sikloid’i geliştirdi. Viviani helezonlarla sikloid’in ilişkilerini, Huyghens, Newton, Leibniz ve Bernoulli kardeşler ise sikloid’in mekanik özelliklerini incelediler.

İlk olarak düzlemsel episikloid eğrisini değerlendirmeye alalım ve bunun için ilk iş olarak sabit dairenin dışına teğet olarak hareketli dairenin yuvarlandığını tasavvur edelim: M noktası (Şekil 5.1) sabit dairenin merkezi, MB, MC yarıçapı ve M' noktası hareketli dairenin merkezi $M'B$ yarıçapı ve sonuç olarak B noktası da iki daire çevresinin başlangıç konumlarındaki değme noktası olsun. M' hareketli dairesi M sabit dairesinin çevresi üzerinde kaymaksızın yuvarlandığı ve mesela K konumuna geldiği halde B değme noktası BD gibi bir eğri çizer. Söz konusu eğri “Episikloid-i Hâricî” (Dışsal Episikloid) veya “Episikloid-i Fevkânî” (Üstsel Episikloid) adı verilir. Hareketli daireye “Daire-i Müvellide” (Doğrucu Daire) ve doğrucu dairenin bir tam devrinde yani B noktasının tekrar sabit daire üzerine gelmesinde çevresi ile çakışmış olan BB' yayına “Episikloidin Kâidesi” (Episikloidin Tabanı) denir.

5.2. Dışsal Episikloid veya Üstsel Episikloid

(Episikloid-i Hâricî veya Episikloid-i Fevkânî)

Bu eğrinin ayırıcı özelliği, çiziliş biçiminde de görüleceği üzere değme noktasının başından itibaren hareketli daire ile sabit daire çevresi üzerinde sürekli olarak birbirini ile intibak hasıl eden yayların birbirine eşit bulunmasından ibarettir. Hareketli daire M' konumundan harekete başlayarak K konumuna geldiğinde başlangıç olan B değme noktası D noktasında bulunacağından DC, BC yayları uzunluk olarak birbirine eşit olur.

Dışsal veya üstsel episikloid eğrisinin matematiksel ifadesini çıkarmak için (Şekil 5.1) sabit dairenin yarıçapını r , hareketli dairenin yarıçapını r' ile gösterelim. Her konumda M, K merkezleri ile C temas noktası aynı doğrultuda bulunacağından bu merkezler çizgisini geçici olarak apsis eksenini ve ona dik bulunan istikameti de ordinat eksenini olmak üzere kabul edelim. Bu durumda D noktasının bu iki eksen üzerindeki konumsal niceliği x', y' ile gösterildiğinde,

$$x' = \overline{ML} = \overline{MK} + \overline{KL}$$

$$y' = -\overline{LD}$$

olur. Fakat

$$\overline{MK} = r + r' \quad \overline{KL} = -r' \cos t \quad \overline{LD} = r' \sin t$$

olduğu gibi uzunluk cinsinden $YayCD = YayCB$ bulunduğundan

$$\frac{\pi r'}{180} t = \frac{\pi r}{180} \alpha$$

ve buradan $t = \frac{r}{r'} \alpha$

bulunur. Yerlerine koyduğumuzda

$$x' = r + r' - r' \cos \frac{r}{r'} \alpha$$

$$y' = -r' \sin \frac{r}{r'} \alpha$$

denklemleri elde edilir.

Şimdi bu suretle geçici olarak kabul edilen hareketli eksenlere göre tayin olunan bu konumsal nicelikler, M merkezi ile B değme noktasından geçen Mx ve ona dik olan My eksenlerine göre değiştirilecek olursa

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

olacağından yerlerine konulduğunda

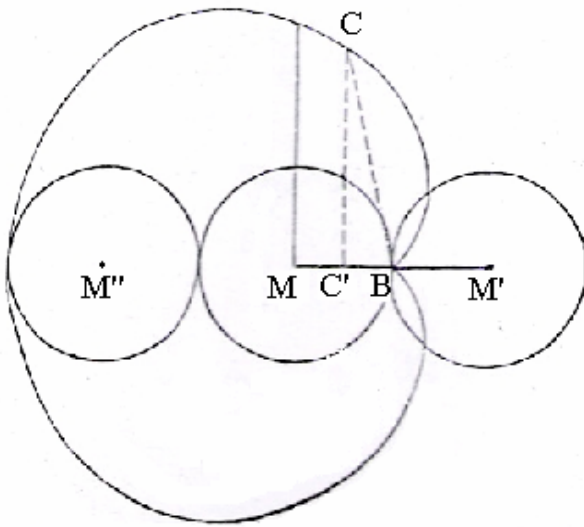
$$x = (r + r') \cos \alpha - r' \cos \left(\frac{r}{r'} \alpha + \alpha \right) \quad (5.1)$$

$$y = (r + r') \sin \alpha - r' \sin \left(\frac{r}{r'} \alpha + \alpha \right) \quad (5.2)$$

bulunur.

Dışsal episikloid eğrisinin denklemini çıkarmak için bu iki denklemden α açısını yok etmek gerekir ise de bu da $\frac{r}{r'}$ oranının değerinin sınırlandırılmasıyla ilgili bulunduğundan zorunlu olarak x, y konumsal niceliklerinin, α açısına bağlı bulunan bu cebirsel ifadeleri ile yetinilir.

Hareketli daire ile (Şekil 5.2) sabit dairenin yarıçapları birbirine eşit yani $\frac{r}{r'} = 1$ olduğunda önceki iki denklem



Şekil 5.2. Dışsal düzlemsel episikloid ($r = r'$)

$$x = 2r \cos \alpha - r \cos 2\alpha$$

$$y = 2r \sin \alpha - r \sin 2\alpha$$

şekline veya

$$x = 2r \cos \alpha + r(1 - 2 \cos^2 \alpha) \quad (5.3)$$

$$y = 2r \sin \alpha - 2r \sin \alpha \cos \alpha \quad (5.4)$$

şekline dönüşmüş olur.

Şimdi y eksenine konumuna paralel kalarak M orijini eğrinin B başlangıcına nakledilecek olur ise x apsisi yerine $(x + r)$ koymak gerekeceğinden bu halde söz konusu denklemler

$$x = 2r \cos \alpha (1 - \cos \alpha) \quad (5.5)$$

$$y = 2r \sin \alpha (1 - \cos \alpha) \quad (5.6)$$

olacağından birbirlerine bölündüklerinde

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$$

bulunacağı gibi trigonometride bilindiği üzere

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha}}$$

olduğundan yerine konulduğunda

$$\cos \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}} = \pm \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

bulunacağından bunlar “Eş. 5.5” de yerine konulduğunda

$$x = \pm 2r \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 - \frac{\pm x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \quad (5.7)$$

veya

$$x^2 + y^2 = 2r \left(\pm \sqrt{x^2 + y^2} - x \right) \quad (5.8)$$

denklemini elde edilmiş olur.

Son denklemde ilk olarak

$$x = 0 \quad \text{için}$$

$$y = 2r$$

elde edilir. Bu da eğrinin orijindeki ordinatından ibarettir.

İkinci olarak $x = -4r$ varsayılması halinde yukarıdaki denklem¹

$$64r^4 + 16r^2y^2 + y^4 = 64r^4 + 4r^2y^2$$

$$y^4 + 12r^2y^2 = 0$$

$$y^2(y^2 + 12r^2) = 0$$

¹ Salih Zeki Bey’in bulduğu eşitlik ise bu şekildedir: $y^4 + 12y^2r^2 + 36r^4 = 36r^4$ $y^2 = 6r^2 - 6r^2 = 0$

şekline konularak, sanal köklerini bir yana bırakarak

$$y = 0$$

çıkarılır.

Bu da hareketli dairenin yarım devri sonunda başlangıç olan B değme noktasının yine x eksenine üzerine geldiği dönme noktasını gösterir. Bu durumda hareketli dairenin yarıçapı sabit dairenin yarıçapına eşit olduğunda oluşan episikloid eğrisi “Kardioid” veya “Yürek Eğrisi” denilen eğriden başka bir şey değildir.

Söz konusu eğri genellikle B noktası kutup, MB doğrusu sabit eksen kabul edilerek kutupsal koordinat sistemi ile gösterilir ve ifade olunur.

Şöyle ki: eğri üzerinde özelliği olmayan herhangi bir C noktasının ışını z ve söz konusu ışının BM' eksenine ile oluşturduğu açı yine α ile ifade olunduğuna göre söz konusu eğri çoğunlukla

$$z^2 = x^2 + y^2, \quad z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$$

ve

$$\frac{x}{z} = \cos \alpha$$

olacağından bunlar yukarıda eğrinin

$$x^2 + y^2 = 2r\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2} - x\right)$$

denkleminde yerlerine konulduğunda

$$z^2 = 2r(z - z\cos\alpha)$$

veya

$$z = 2r(1 - \cos\alpha) \quad (5.9)$$

kutupsal denklemi elde edilir.

Gerçekten B noktası için $\alpha = 0$ olduğundan $z = 0$ olacağı gibi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ değeri için

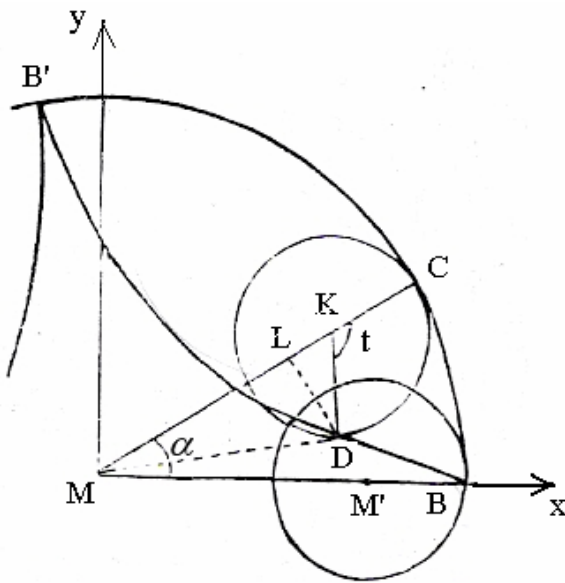
$$z = 2r$$

ve bunun gibi $\alpha = \pi$ değeri için de

$$z = 4r$$

bulunur. Bunlar yukarıda koordinat sistemi ile bulunan sonuçlarla aynıdır.

5.3. İçsel veya Altsal Episikloid (Hiposikloid) (Episikloid-i Dâhilî veya Episikloid-i Tahtânî)



Şekil 5.3. İçsel düzlemsel episikloid

Hareketli dairenin (Şekil 5.3) sabit daire içine teğet olarak döndüğü ve hareket ettiği tasavvur edilecek olur ise hareketin başlangıç noktasında sabit daireye temas eden B noktası yine bir episikloid eğrisi çizer ise de buna, diğerinden ayırmak için “Dâhilî veya Tahtânî Episikloid” (İçsel veya Altsal Episikloid) denilir ve hareketli daireye “Daire-i Müvellide” (Doğuran Daire) ve sabit dairenin bir tam devirde doğuran daire ile çakışan BB' yayına “Episikloidin Kaidesi” (Episikloidin Tabanı) denir.

İçsel episikloidin temel özelliği de yine hareketli daire ile sabit dairenin aynı zamanda birbiri ile çakışan yaylarının birbirine eşit olmasından ibarettir.

Söz konusu eğrinin dik eksenlere nazaran denklemini çıkarmak için diğerinde olduğu gibi evvela MC hareketli doğrusu ile buna dik bulunan DL doğrusu geçici birer konumsal nicelik eksenleri gibi kabul edilecek olur ise

$$x' = \overline{MK} - \overline{KL}$$

$$y' = -\overline{LD}$$

olması gerekir.

Fakat

$$\overline{MK} = r - r'$$

$$\overline{KL} = r' \cos DKL = -r' \cos t = -r' \cos \frac{r}{r'} \alpha$$

ve

$$\overline{LD} = r' \sin DKL = r' \sin t = +r' \sin \frac{r}{r'} \alpha$$

olduğundan

$$x' = (r - r') + r' \cos \frac{r}{r'} \alpha$$

$$y' = -r' \sin \frac{r}{r'} \alpha$$

denklemleri elde edilir.

Bu konumsal nicelikleri Mx, My dik eksenleri üzerindeki x, y konumsal niceliklerine dönüştürmek için

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

eşitliklerine uygun olarak işlem yapıldığında

$$x = (r - r') \cos \alpha + r' \cos \left(\frac{r}{r'} \alpha - \alpha \right) \quad (5.10)$$

$$y = (r - r') \sin \alpha - r' \sin \left(\frac{r}{r'} \alpha - \alpha \right) \quad (5.11)$$

denklemlerine ulaşılmış olur.

Gerçi içsel episikloidin dik eksenlere göre denklemini çıkarmak için bu eşitliklerden α açısını yok etmek gerekir ise de $\frac{r}{r'}$ oranının değeri sınırlanmadıkça bu yok etme keyfiyeti mümkün olamayacağından söz konusu denklemleri olduğu gibi bırakmak zorunludur.

Episikloid eğrisi gerek dışsal ve gerek içsel olsun aynı uzunlukta BDB' yaylarından oluşur. BCB' yayı sabit dairenin bütün çevresi ile orantılı bir yaydan ve diğer bir

değişle $2\pi r'$ ve $2\pi r$ çevreleri veya r' ile r yarıçapları orantılı birer miktardan ibaret oldukları takdirde episikloid eğrisini oluşturan BDB' yaylarının adedi de sınırlı olur ve bu yüzden eğri yine B noktasında kendi üzerine kapanır. Aksi halde episikloidi teşkil eden yayların sayısı sınırsız olacağından episikloid eğrisi de kapanmayan bir eğriden ibaret bulunur.

Hareketli dairenin yarıçapı (Şekil 5.4) sabit dairenin yarıçapının yarısına eşit olduğunda veya diğer bir deyişle $r = 2r'$ olduğunda $\frac{r}{r'} = 2$ olacağından “Eş. 5.10”, “Eş. 5.11”

$$x = r' \cos \alpha + r' \cos \alpha$$

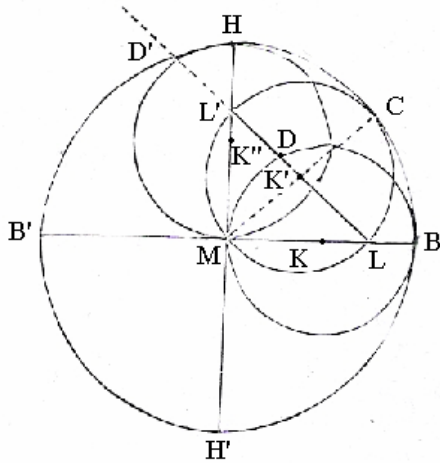
$$y = r' \sin \alpha - r' \sin \alpha$$

veya

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = 0$$

eşitliklerine indirgenir. Bu da x eksenini ile çakışan bir doğrunun ifadesinden başka bir şey değildir.



Şekil 5.4. İçsel düzlemsel episikloid ($r = 2r'$)

Bu halde (Şekil 5.4) K hareketli dairesi sabit dairenin çevresine içten dayanarak döndürüldüğü esnada başlangıç noktası olan B değme noktası da dört çeyrek devirde sabit daire çapının $BM, MB', B'M, MB$ kısımlarını kat etmek üzere her çeyrek döndürülme sonunda x eksenini üzerinde sırasıyla M, B', M, B noktalarıyla çakışır¹.

Hakikatte $\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}, \alpha = \pi, \alpha = \frac{3\pi}{2}, \alpha = 2\pi$ varsayımlarına göre son denklemler $x = 2r', x = 0, x = -2r', x = 0, x = +2r'$ değerlerini verir. Bunlar da karşılıklı BB' çapı üzerinde bulunan B, M, B', M, B noktalarına karşılık gelir.

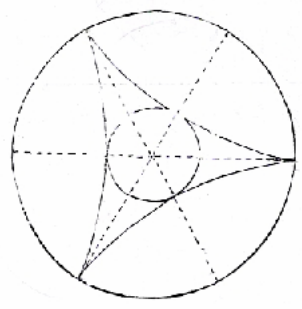
İşte bu halde hareketli daire daima sabit daire içinde yuvarlanarak hareket ettiği durumda B doğurucu noktasına göre BB' çapı üzerinde B den B' ve B' den B ye yönelmiş bir sarkaç hareketi yapar.

17. miladi asır matematikçilerinden La Hire (Philippe de) bir sürekli dairesel hareketi bir sürekli doğrusal harekete dönüştürmek için episikloidin bu geometrik özelliğinden yararlanarak bir tür “dişli çark terkibi” oluşturmuştur (8).

5.4. Üç Köşeli Episikloid

Hareketli dairenin yarıçapı sabit dairenin yarıçapının tamamen üçte birine eşit olduğu takdirde meydana gelen içsel episikloid (Şekil 5.5) üç tekrarlanan dönme noktası içereceği için bu tür bir içsel episikloide bilhassa “İçsel Üç Köşeli Episikloid” veya “İçsel Üçgensel Episikloid” adı verilir.

¹ Salih Zeki Bey’in ifadesi: “Bu halde (Şekil 5.4) K hareketli dairesi sabit dairenin çevresine içten dayanarak devrettiği esnada başlangıç noktası olan B değme noktası da dört çeyrek devirde sabit daire çapının $BM, MB', B'M, MB$ kısımlarını kat etmek üzere x eksenini üzerinde seyir ve hareket eder.”



Şekil 5.5. İçsel üçgensel episikloid ($r = 3r'$)

Söz konusu eğrinin denklemini çıkarmak için

$$x = (r - r') \cos \alpha + r' \cos \left(\frac{r}{r'} \alpha - \alpha \right) \quad (5.10)$$

$$y = (r - r') \sin \alpha - r' \sin \left(\frac{r}{r'} \alpha - \alpha \right) \quad (5.11)$$

denklemlerinde $r = 3r'$ veya $r' = \frac{r}{3}$ alındığında

$$x = \frac{2r}{3} \cos \alpha + \frac{r}{3} \cos 2\alpha \quad (5.12)$$

$$y = \frac{2r}{3} \sin \alpha - \frac{r}{3} \sin 2\alpha \quad (5.13)$$

veya

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$$

değerlerini yerine yazarsak

$$x = \frac{2r}{3} \cos \alpha + \frac{r}{3} [2 \cos^2 \alpha - 1]$$

$$y = \frac{2r}{3} \sin \alpha - \frac{r}{3} [2 \sin \alpha \cos \alpha]$$

bulunur.

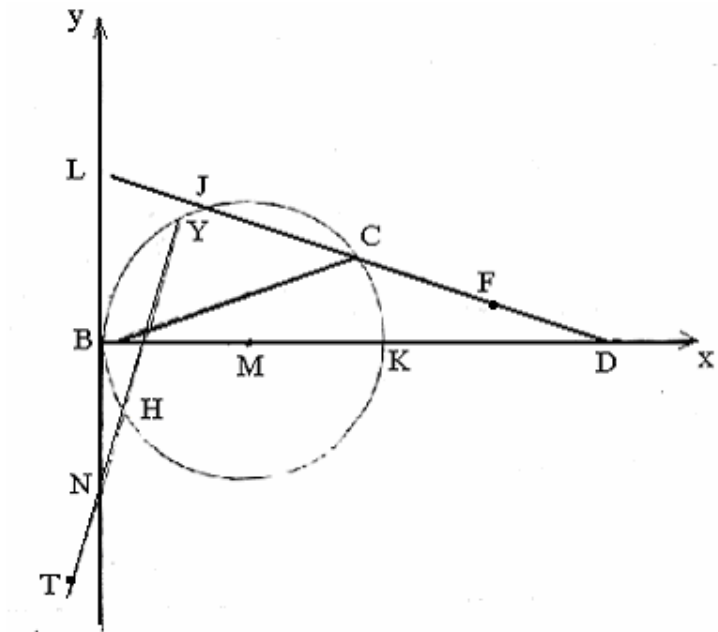
Şimdi bu iki denklemden $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ değerlerinin x, y konumsal büyüklükleri cinsinden değerleri bulunur ve kareleri alınarak birbirleriyle toplanır ise

$$(x^2 + y^2)^2 + 8r(3y^2 - x^2)x + 18r^2(y^2 + x^2) - 27r^4 = 0$$

denklemini bulunur. Bu da sabit dairenin merkezinden geçen iki eksene göre bir içsel üçgensel episikloidin denkleminde ibarettir.

5.5. Üçgensel Episikloid (Müsellesî Episikloid) = Hiposikloid

İçsel üçgensel episikloid aşağıdaki gibi iki şekilde tanımlanabilir:



Şekil 5.6. Üçgensel episikloid

Önce yarıçapı (Şekil 5.6) $MB = r$ olarak bilinen bir dairenin B noktasından söz konusu daire çevresine By teğeti çizilir ve daire çevresi üzerinde alınan bir C noktası ile B noktası birleştirilir ve BCD ikizkenar üçgeni tamamlanacak olur ise alınan C noktası dairenin çevresi üzerinde konumunu değiştirdiğinde bu üçgenin CD kenarının zarfı bir içsel üçgensel episikloidden ibaret bulunur.

İkinci olarak B değme noktasından itibaren daire çevresi üzerinde birbirlerinin iki katı olmak üzere BY, BH yayları alınarak bunların bitim noktalarının arası birleştirilir ise meydana gelen YH doğrusunun zarfı yine bir içsel üçgensel episikloidden ibaret olur.

Bu iki tanım birbirinin aynısıdır. Aslında ikinci surette meydana gelen BHN üçgeni de bir ikizkenar üçgen olduğu gibi birinci surette meydana gelen BJ, KC yayları da birbirinin iki katıdır.

Bu halde zarf eğrilerinin genel özelliğine dayanarak $HT=HY$ alınacak olur ise T noktası zarf eğrisi ile TY doğrusunun değme noktasından ibaret olacağı gibi $CF=CJ$ alınarak bulunan F noktası da CD doğrusunun kendi zarfıyla temas ettiği nokta olur.

Şimdi BDC açısı β ile gösterildiğine göre CD teğet doğrusunun denklemi

$$y = -x \tan \beta + 2r \sin 2\beta$$

olacağından bu teğet doğrusunun zarfı olan içsel episikloidin denklemi

$$(x^2 + y^2)^2 + 4r(5y^2 - 3x^2)x - 4r^2(y^2 - 12x^2) - 64r^2x = 0$$

veya iki dik eksenin orijinini M merkezine aktararak yani x yerine $(x + r)$ konulduğunda:

$$(x^2 + y^2)^2 + 8r(3y^2 - x^2)x + 81r^2(y^2 + x^2) - 72r^4 = 0$$

bulunur. Bu da yukarıda bulunan denklemin aynıdır.

Söz konusu eğrinin üç tekrarlanan dönme noktası olduğu gibi üç simetri eksenini de vardır. Bu üç simetri ekseninden birincisi BD doğrusundan ibaret olup diğer ikisi söz konusu doğru ile yüzyirmişer derecelik açı yapar. Üç tekrarlanan dönme noktası bir eşkenar üçgeninin üç köşesiyle çakışık bulunduğu gibi bu noktalardaki ortak teğet doğruları da eğrinin simetrik eksenlerinden ibaret olur.

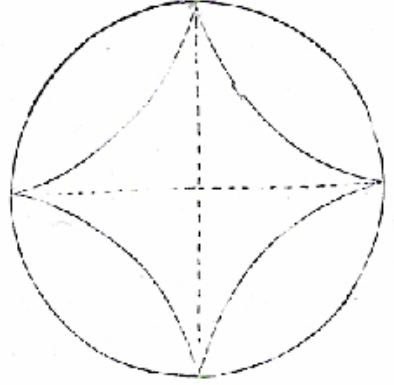
İçsel Üçgensel episikloid, üçüncü sınıf eğrilerden sayılıp bükülme noktalarını kapsamaz. Söz konusu eğri r yarıçapında bir daire içine ve $\frac{1}{3}r$ yarıçapında bir dairenin de dışına çizilidir.

5.5.1. Steiner içsel episikloidi (İştâyner episikloid-i dâhilîsi) = Hiposikloid

Bir üçgenin dışına çizilen daire çevresi üzerinde bulunan bir noktanın söz konusu üçgenin üç kenarı üzerindeki izlerini kapsayan “Simson” veya “Wallace” doğrusunun zarfı, bir içsel üçgensel episikloitten ibarettir. İşte içsel üçgensel episikloidin bu önemli özelliğini en önce keşfeden Steiner olduğundan bazen söz konusu eğriye “Steiner Episikloidi Dâhilîsi” (Steiner İçsel Episikloidi) adı dahi verilmektedir.

5.6. İçsel Dört Köşeli Episikloid (Dört Köşeli Episikloid-i Dâhilî)

Hareketli dairenin yarıçapı sabit dairenin yarıçapının tamamen dörtte birine eşit olduğunda meydana gelen (Şekil 5.7) içsel episikloid dört tekrarlanan dönme noktasını kapsayacağından bu tür episikloide “Dört Köşeli Episikloid-i Dâhilî” (İçsel Dört Köşeli Episikloid) denir.



Şekil 5.7. İçsel dört köşeli episikloid ($r = 4r'$)

Şimdi Eş. 5.10, Eş. 5.11 de $r' = \frac{r}{4}$ alınacak olur ise

$$x = \frac{3}{4}r\cos\alpha + \frac{r}{4}\cos 3\alpha \quad (5.14)$$

$$y = \frac{3}{4}r\sin\alpha - \frac{r}{4}\sin 3\alpha \quad (5.15)$$

olur. Halbuki,

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

olduğundan yerlerine konulduğunda

$$x = r\cos^3\alpha$$

$$y = r\sin^3\alpha$$

veya

$$x^2 = r^2 \cos^6 \alpha$$

$$y^2 = r^2 \sin^6 \alpha$$

ve iki tarafın üçüncü kuvvetten kökü alınarak birbirleriyle toplandığında

$$x^{2/3} + y^{2/3} = r^{2/3}$$

bulunur. Bu da içsel dört köşeli bir episikloidin, başlangıcı sabit daire merkezinden ibaret olan, dik eksenine göre denkleminde başka bir şey değildir.

Sabit dairesi yarıçapı hareketli dairesi yarıçapının dört katına eşit olan bu tür bir içsel episikloidde dört tekrarlanan dönme noktası bulunduğu gibi iki de simetri eksenini mevcuttur.

Bu dört dönme noktasının her biri sabit daire içine çizilmiş karenin bir köşesiyle çakıştığı gibi bu noktalardan geçen simetri eksenleri de söz konusu karenin tamamen köşegenleriyle çakışır. Matematikçilerden Montuacci söz konusu eğriye “Episikloid Mikâbî” [Cubo-cycloide] (Küpsel Episikloid) adını vermiş ve yine matematikçilerden Amstein aynı eğriye “Astroid” [Astroied] yani “Necmiye” (Yıldızsal Episikloid) denilmesini teklif etmiş ise de şimdilik bu tabirlerden hiçbiri yaygın olarak benimsenmemiştir. Söz konusu eğri iki ucu bir dik açının iki kenarı üzerinden ayrılmayarak hareket eden bir sabit doğrunun zarfından ibarettir.

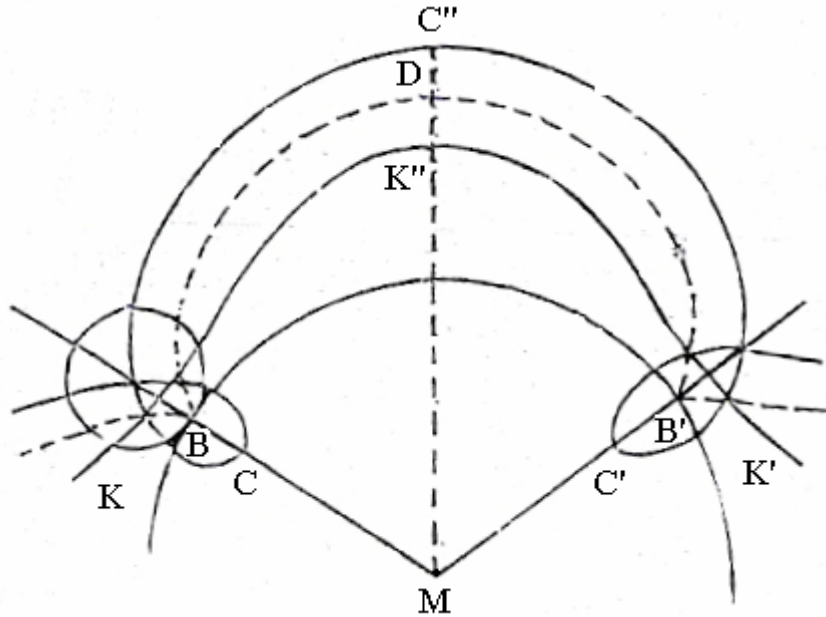
Bundan başka eksenleri toplamı sabit olan elipslerin zarfı da bir içsel dört köşeli episikloiddir.

Bunun gibi odakları bir daire çevresi üzerinde bulunan , kendileri bu daire çevresinin iki bilinen çapına teğet olan parabollerin tepe noktalarının geometrik yeri yine bir içsel dört köşeli episikloidden ibarettir.

Tanınmış matematikçilerden D'Alembert içsel dört köşeli episikloid tâdîli bahsinde güya integral hesabına göre bir yanlış tesadüf eylediğini Berlin bilimler akademisinin Miladi 1847 senesine mahsus dergisinde beyan etmiş ise de D'Alembert'in çözmek istediği güçlükleri tanınmış Matematikçilerden Lord Brougham ortadan kaldırmıştır.

5.7. Uzatılmış Episikloid (Episiloid-i Memdûd)

Hareketli daire sabit daire üzerinde hareket ettiği esnada söz konusu dairenin merkezi (Şekil 5.1) bir daire çemberi çizer. Bu daire çemberinin merkezi sabit dairenin merkezinden $MC + CK$ kadar uzaklıktadır.



Şekil 5.8. Uzatılmış ve kısaltılmış episikloid

Doğuran nokta olarak, hareketli daire çevresi üzerindeki ilk değme noktası alınacağı yerde M' merkezinin ilerisinde bulunan bir H' noktası seçilecek olur ise söz konusu nokta (Şekil 5.8) de görüleceği üzere iki ucu kendi üzerine kıvrılmış $CC''C'$ gibi bir episikloid eğrisi çizer ki bu tür bir eğriye “Episikloid-i Memdûd” (Uzatılmış Episikloid) adı verilir.

5.8. Kısaltılmış episikloid (Episikloid-i Maksûr)

Aksine, doğuran nokta (Şekil 5.1) M' merkezinin beri tarafında bulunan H noktası olduğu halde (Şekil 5.8) söz konusu nokta $KK''K'$ gibi bir episikloid eğrisi çizer. Bu tür episikloide de “Episikloid-i Maksûr” (Kısaltılmış Episikloid) denilir.

Uzatılmış ve kısaltılmış episikloidler -hareketli dairenin yarıçapı ile sabit dairenin yarıçapı birbirleriyle orantılı olup olmadığına göre- sınırlı veya sınırlı olmayan biçimlerde birtakım episikloid yaylarından oluşur.

Hareketli daire sabit dairenin içinde döndüğünde meydana gelen içsel episikloidin de uzatılmış ve kısaltılmış türleri vardır.

İşte gerek uzatılmış, gerek kısaltılmış bir dışsal episikloide “Epitrokoid” [Epitrochoide] ve gerek uzatılmış, gerek kısaltılmış bir içsel episikloide de “Hipotrokoid” [Hypotrochoide] adı verilir.

Uzatılmış ve kısaltılmış episikloidler , bayağı episikloid eğrilerinin denklemlerine benzer bir analitik ifade ile gösterilebilir. Hakikaten de mesela bir epitrokoidin doğurucu noktasının hareketli dairenin merkezine olan uzaklığı d ile gösterildiği ve yukarıda belirtilen yöntemle uygun olarak işlem yapıldığı durumda

$$x = (r + r') \cos \alpha - d \cos\left(\frac{r}{r'} \alpha + \alpha\right)$$

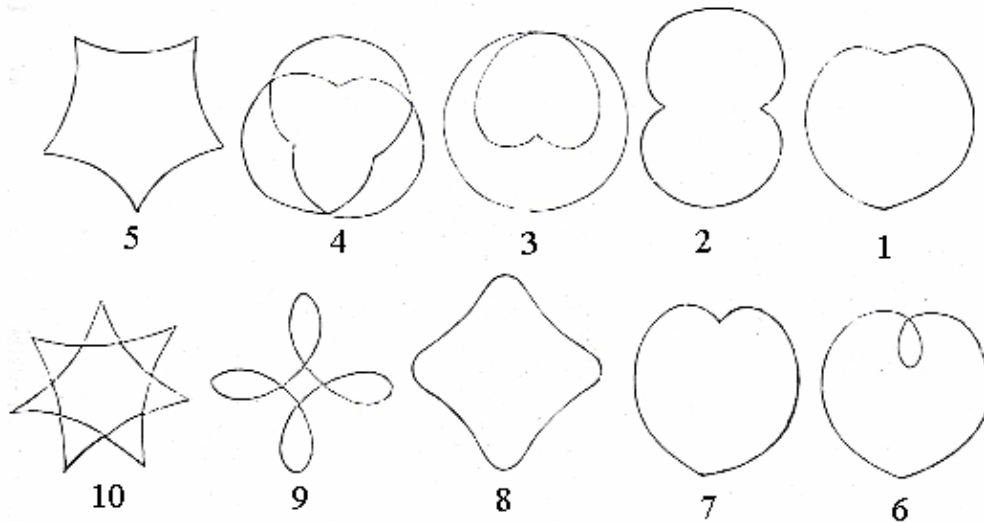
$$y = (r + r') \sin \alpha + d \sin\left(\frac{r}{r'} \alpha + \alpha\right)$$

konumsal denklemleri elde edilir.

Episikloid eğrileri bazı basit aletler yardımıyla bir sürekli hareket ile çizilebilir. Söz konusu aletler münasip biçimde bir araya getirilmiş çoğunlukla bir kol ile çevrilen dişli çarklar ile orta yerinde boylamasına bir oyuğu bulunan bir cetvelden ibarettir. Bunların en meşhurları Mösyö Saladin ile Perigal tarafından düşünülmüş bulunanlardır.

Bununla birlikte, Mösyö Suardi'nin "Kalem-i Hendese" (Geometri Kalemi) adını verdiği alet, söz konusu aletlerin en mükemmelidir. Bu konuda, ayrıntılı bilgi Mösyö Lantz ile Mösyö Betankur [Bétancourt]'un yazmış oldukları "Traité de la composition des machines" (makinelerin tertib edilmesi üzerine yazılı bir çalışma) adındaki kitaba havale edilerek gereken özlü bilgi "Kalem-i Hendese" (Geometri Kalemi) kavramında verilecektir.

Episikloidin pek çok türü vardır: özel aletler aracılığı ile çizilebilen episikloidlerin en meşhurları Mösyö Labulay [Laboulay]'nin "Traité de Cinématique" (kinematik üzerine bir çalışma) adındaki kitabında mevcut olduğundan burada aşağıda yalnız bir kaçının gösterilmesi ile yetinilmiştir.



Şekil 5.9. Özel aletlerle çizilebilen bazı episikloidler

Bu şeklin incelenmesi ile açığa çıkacağı üzere 1,2,3,4 birer dışsal episkloidden, 5 ile 10 birer içsel episikloidden, 6 ile 9 birer uzamış episikloiden ve 7 ile 8 de birer kısalmış episikloidden ibarettir. Bayağı episikloidlerde meydana gelen “Nukât-ı İyâd” (Tekrarlanan Dönme Noktaları), uzamış episikloidlerde birer “Ukde”ye (Düğüm) dönüştüğü gibi kısalmış episikloidlerde de yalnız birer “Nokta-ı İnhinâ”ya (Eğrilme Noktasına) dönüşmüş olur.

Yukarıda (Bkz. 5.3) hareketli dairenin yarıçapı, içinde bulunduğu sabit dairenin yarıçapının yarısına eşit olduğunda söz konusu hareketli dairenin bir noktasının çizeceği bayağı içsel episkloidin bir doğru çizgiye dönüşeceği söylenmiş idi. Bu halde (Şekil 5.4) hareketli dairenin çizeceği uzamış veya kısalmış episikloid eğrileri de birer elipsten ibaret olur.

Hakikaten de söz konusu maddede (Bkz. 5.3) B noktası hakkında belirtilen hususlar hareketli daire çevresinin diğer bütün noktalarına da uygulanabilir olduğundan hareketli dairenin çevresinin her bir noktasının sabit dairenin çapı boyunca hareket etmesi doğaldır.

Şimdi sabit dairenin M merkezi, hareketli dairenin çevresinin bir noktası gibi göz önüne alınabileceğinden söz konusu noktanın da sabit dairenin çaplarından biri üzerinde hareket etmesi gerekir. Halbuki hareketli daireye bağlıymış gibi düşünülen M noktasının veya daha iyisi hareketli dairenin ilk konumunda M merkezine çakışık bulunan noktasının sabit daire çevresi üzerine gelmesi, söz konusu hareketli dairenin yarım devir yapmasına veya sabit daire çevresinin dörtte birini kat etmesine bağlıdır. Bundan anlaşılabacağı üzere hareketli daire sabit daire içinde yuvarlanarak yarım devir yaptığı anda evvelce M merkezine çakışık bulunan M noktası da H noktasına intikal etmiş olur. Bu takdirde birinci konumda M hareketli dairesinin çevresine bağlanmış gibi düşünülen ve kabul olunan M noktası, söz konusu hareketli daire sabit daire içinde kaymaksızın yuvarlandığı esnada BB' çapına dik bulunan HH' çapı üzerinde seyir ve hareket eder.

İşte hareketli dairenin birinci konumdaki B noktası, söz konusu dairenin hareketi esnasında BB' çapı boyunca ve yine aynı konumda bulunduğu zaman M merkezine çakışık bulunan noktası da HH' çapı üzerinde hareket ettiği için BM çapı da LL' suretinde bir ucu daima BB' ve diğer ucu ona dik bulunan HH' çapına dayanmak üzere hareket eder.

Halbuki iki ucu bu biçimde iki dik çizgiye dayanmak üzere hareket eden bir sınırlanmış doğru çizginin bütün noktaları birer elips eğrisi çizdiğinden hareketli dairenin bu çapı üzerinde bulunan bir D noktası veya söz konusu çap istikametinde alınan diğer bir D' noktasının da bir elips çizeceği açığa çıkar.

Hareketli dairenin çapsal karşıt olarak her iki noktası hakkında bu durum geçerli olacağı yani özel olmayan bir noktası sabit dairenin bir çapı boyunca hareket ettiğinde çapsal karşıtı olan noktası bu çapa dik diğer bir çap üzerinde seyredeceği gibi bu iki nokta arasını birleştiren hareketli dairenin çapı da sabit dairenin birbirine dik bulunan bu iki çapına dayanarak hareket edeceğinden üzerinde bulunan bütün noktaların ve bu nedenle hareketli daireye içsel ve dışsal olarak bağlı bulunan her bir noktanın bir elips çizeceği sabit olur.

Ancak varsayılan nokta D noktası gibi hareketli dairenin içinde olduğuna göre çizilen elipsin yarım eksenleri toplamı BM çapına eşit olur. Aksi halde yani varsayılan doğurucu nokta D' noktası gibi hareketli dairenin dışında bulunan bir bağlı noktadan ibaret olduğu takdirde çizilen elipsin yarı eksenleri arasındaki fark BM çapına eşit bulunur.

Varsayılan doğurucu nokta hareketli dairenin K merkezine çakışık olduğu surette ise elips daire çemberine dönüşür. Söz konusu çemberin çapı tamamen BM yarıçapına eşittir.

5.9. Küresel Episikloid (Kürevî Episikloid)

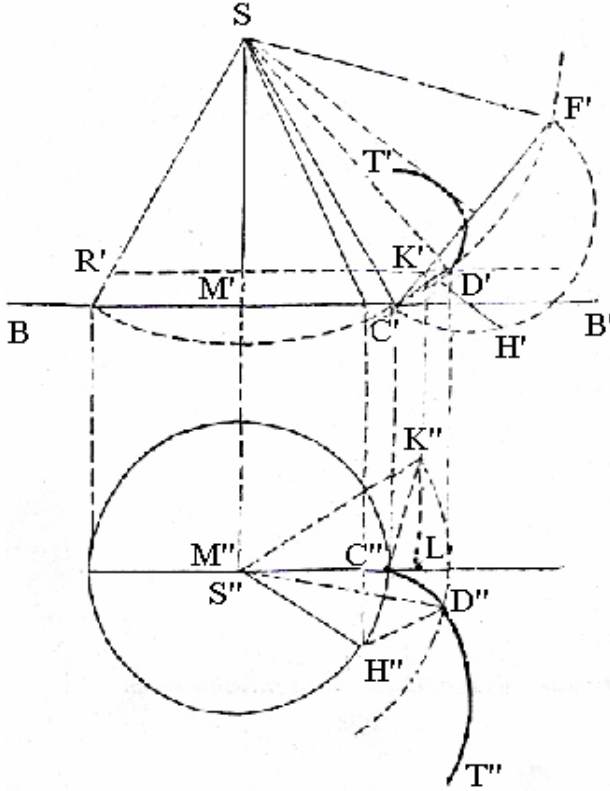
Bir dönel koninin, tepeleri müşterek olan diğer bir sabit dönel koni yüzeyi üzerinde kaymaksızın yuvarlanması durumunda hareketli koninin bir noktasının çizdiği eğriye “Kürevî Episikloid” (Küresel Episikloid) denir.

Hareketli koninin sabit koni etrafında hareketi esnasında doğurucu noktanın müşterek tepe noktasına olan uzaklığı, değişmez kalacağından söz konusu noktanın çizeceği eğri de doğrusal olarak bir küre yüzeyi üzerinde bulunur.

Eğer doğurucu nokta, hareketli koni ile sabit koninin başlangıç konumlarında müşterek olan doğurucu çizgi üzerinde alınacak olur ise söz konusu noktanın çizeceği episikloid eğrisini içeren küre yüzeyi, konilerin bu doğurucu noktadan geçen paralel dairelerini kapsar.

Bu nedenle çizilen eğri, küre yüzeyi üzerinde bir dairenin diğer bir daire üzerinde yuvarlanmasından meydana gelmiş gibi tasavvur edilebilir ki söz konusu eğrinin episikloid türlerinden sayılması da bu nedene dayanmaktadır.

Küresel episikloid, konik dişli çarkların matematiksel ifadesinde çok önemlidir. Diğer ayrıntıları “Dişli Çark” terimine bırakılarak burada, küresel episikloidin çizimleri ne biçimde belirlendiği gösterilecek ve bunun için sabit koninin ekseni, dikey (düşey) varsayılacağı gibi doğurucu nokta da konilerin ilk konumlarındaki doğurma teması üzerinde seçilecektir. Bir de yatay düzlemsel izdüşümü bu noktadan geçen yatay düzlemden ve dikey (düşey) düzlem izdüşümü de ilk konumdaki doğurucu kesitten geçen meridyen kesitine paralel bir dikey düzlemden ibaret olmak üzere kabul edilecektir.



Şekil 5.10 Küresel episikloid

Bu halde varsayalım ki (Şekil 5.10) BB' izdüşüm ekseni olmak üzere M', M'' noktaları konilerin müşterek olan tepelerinin ve $M''C''$ doğrusu sabit koninin tabanının BB' izdüşüm eksenine paralel olan yarıçapının, C', C'' noktaları da birinci konumda iken doğrucu noktanın izdüşümlerinden ibaret olsun ve hareketli koninin dikey (düşey) düzlemsel izdüşümüne paralel olan meridyen kesitinin dikey (düşey) izdüşümü $C'SF'$ ile gösterilsin.

Şimdi hareketli koninin sabit koni üzerinde bir miktar yuvarlandıktan sonra sabit koni ile yatay izdüşümü $M''H''$ olan, doğrucu doğru boyunca temas etmiş bulunduğu varsayılarak hareketli koniye bağlıymış gibi değerlendirilen ve izdüşümleri C', C'' ile gösterilen noktanın almış olacağı konumların izdüşümlerini araştıralım:

Bunun için bu temas doğurucuyu dikey düzleme paralel gelinceye kadar konilerin genel durumunu sabit koninin ekseni etrafında döndürelim. Döndürüldükten sonra alacakları konumda hareketli koninin son doğurucu temasını içeren meridyen kesiti, $C'SF'$ biçiminde dikey düzlem üzerine iz düşüreceği gibi hareketli koninin tabanın mensup ve izdüşümleri istenen doğurucu nokta dahi şimdi dikey izdüşümü $C'F'$ bulunan taban üzerinde ve C', C'' birinci konumundan $C''H''$ yayına eşit bir uzaklıkta bulunacağı için söz konusu taban, izdüşümü $C'F'$ olan çapı etrafında, dikey düzleme paralel gelinceye kadar devir ettirilecek olsa dikey izdüşümünün bir yarımı $C'H'F'$ yarım çemberine çakışık bulunur. Bu halde bu yarım çember üzerinde C' noktasından itibaren, boylamasına $C''H''$ yayına eşit, $C'H'$ yayını kesmesi sureti ile bulunan H' noktası, doğurucu noktanın dikey düzleme paralel olarak döndürülmüş olan taban üzerindeki konumunu gösterir.

Şimdi dikey düzleme paralel olarak döndürülmüş olan tabanın söz konusu düzleme dikey bulunan son konumuna gelmek üzere geriye döndürülmesi düşünüldüğünde anlaşılacağı üzere $C'F'$ doğrusu üzerine $H'K'$ dikmesi indirilecek olur ise dikme ayağı olan K' noktası doğurucu noktanın dikey izdüşümünden ibaret olur.

Diğer taraftan bu K' noktasından izdüşüm ekseninde $K'L$ dikmesini indirerek L noktası bulunup $H'K'$ uzunluğuna eşit LK'' uzunluğu kesilecek olur ise doğurucu noktanın K'' yatay izdüşümü belirlenmiş olur.

Artık bundan sonra şeklin genel durumunu hakiki konumuna indirgemek kalır. Bu da hepsini dik koninin ekseni etrafında tekrar aksi tarafa döndürmekle elde edilir. Bu devirsel harekette doğurucu noktanın yatay düzleme nazaran yüksekliği değişmeyeceğinden düşey izdüşümü BB' izdüşüm eksenine paralel $K'R'$ doğrusu üzerinde bulunur. Yatay izdüşümünü belirlemeye gelince, bunun için de devirsel hareket sebebi ile $M''C''$ doğrusu $M''H''$ konumunu aldığı anda C'' dahi H'' üzerine geleceği ve bununla birlikte K'', C'', M'' noktalarının birbirlerine göre mesafeleri değişmeyeceği için M'' noktası merkez olmak üzere $M''K''$ uzunluğu ile bir daire yayı ve yine H'' noktası merkez olmak üzere $C''K''$ uzunluğuyla bir ikinci daire yayı

çizilecek olur ise bunlar birbirlerini bir D'' noktasında keserler. Bu D'' noktası doğurucu noktanın istenen yatay izdüşümünden ibaret olunur. Sonuç olarak bu D'' yatay izdüşümünden izdüşüm eksenine dik olarak bir doğru çizildiğinde ve bu istikâmet üzere uzatıldığında bunun $K'R'$ doğrusunu kestiği D' noktası da doğurucu noktanın dikey izdüşümü olur.

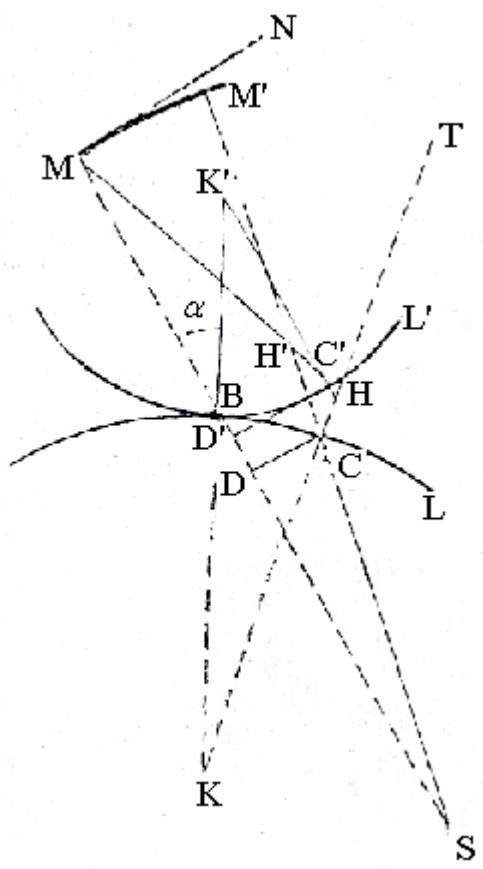
İşte bu şekilde küresel episikloid eğrisinin istenildiği kadar noktalarının izdüşümleri belirlenecek olur ise söz konusu eğrinin $C''D''T''$ ve $C'D'T'$ izdüşümleri eğrileri elde edilir. (Bkz. “Dişli Çark” tabiri).

Episikloid eğrisinin keşfi, genellikle Danimarkalı astronomlardan meşhur gözlemci Roemer’e atf edilmektedir. Söz konusu eğriye ait matematikçilerden La Hire 1694 milâdi senesinde bir kitap yayınladığı gibi fizikçilerden Newton ile Jean Bernoulli, Haley, Maupertuis, Nicole, Clairault gibi meşhur matematikçiler tarafından da episikloid eğrilerinin geometrik özellikleri uzun uzadıya incelenmiştir.

Söz konusu eğrilere ait yeterli bilgi almak için Fransa Bilimler Akademisinin 1706,1727,1737 senelerinin dergilerine başvurmak gerekir.

5.10. Episikloidsel Eğri (Episikloidî Münhanî)

Genellikle bir eğri diğer sabit bir eğri üzerinde kaymaksızın yuvarlandığında bir noktasının ve daha genel olmak üzere hareketli eğriye bağlı bir noktanın çizdiği eğriye “Episikloidî Münhanî” (Episikloidsel Eğri) adı verilir.



Şekil 5.11 Episikloidsel eğri

Mesela (Şekil 5.11) BL eğrisi sabit eğri ve BL' eğrisi de hareketli eğri olsa hareketli eğrinin sabit eğri üzerinde kaymaksızın yuvarlandığı düşünüldüğünde hareketli eğriye bağlı bir M noktası MM' gibi bir eğri çizer. Bu ve buna benzer çizilen eğrilere genellikle “Episikloidsel Eğriler” denilir.

Episikloidsel eğriler arasında en önemlileri sabit eğrisi ile hareketli eğrisi birer daire çemberinden ibaret olan eğrilerdir. Bunlar özellikle “Episikloid” adıyla diğer episikloidsel eğrilerden ayrılmaktadır.

Episikloidsel eğrilerin temel özelliği her an hareketli eğrinin sabit eğri ile olan değme noktası, hareketli eğriye bağlı bütün düzlemsel şekillerin o andaki dönme merkezinden ibaret olmasıdır.

Bu halde hareketli eğriye bağlı bir noktanın çizeceği episikloidsel eğrinin bu noktadaki normali söz konusu nokta ile ona ait bulunan temas noktasından geçmesi gerekir.

Bu nedenle M noktasının normali MB olacağı gibi M noktasından MB normaline dik olarak çizilen MN doğrusu da episikloidsel eğrinin M noktasındaki teğet doğrusundan ibaret olur.

Episikloidsel eğrilerin eğrilik yarıçaplarına gelince, bunun için sabit eğri ile hareketli eğri üzerinde B değme noktasından itibaren birbirine eşit ve sonsuz küçük BC , BC' yaylarını dikkate alalım. Hareketli eğrinin C' noktası sabit eğrinin C noktasına geldiği anda M doğurucu noktasının alacağı konum M' varsayılacak olur ise MM' episikloidsel eğrisinin M' noktasına ait normali, yukarıdaki maddeye uygun olarak, $M'C$ istikâmetine çakışık olması gerekir. Bu nedenle MC' doğrusu M noktasının normali olan MB çizgisinin uzantısını bir S noktasında keser ki bu nokta sonsuz küçük itibar olunan MM' episikloidsel yayına ait eğrilik merkezinden ibarettir.

Şimdi şu S noktasının konumunu veya episikloidsel eğrinin M noktasının eğrilik yarıçapını belirlemek için hareketli eğrinin C' noktası sabit eğrinin C noktasına gelmek üzere hareketli eğriye bağlı bir düzlemsel şeklin B değme noktası etrafında yapacağı sonsuz küçük dönüşü dikkate alalım ve sabit eğri üzerinde BC sonsuz küçük yayına ait eğrilik merkezini K ve hareketli eğrinin BC' sonsuz küçük yayına ait eğrilik merkezini de K' ile gösterelim:

Hareketli eğrinin C' noktası sabit eğrinin C noktası üzerine geldiği anda M doğurucu noktası varsayalım ki M' noktasına geleceği gibi MC' doğrusu $M'C$ konumunu ve $K'C'$ doğrusu da KC doğrusu istikametini alır.

Halbuki bir düzlemsel şeklin bulunduğu düzlem üzerinde yaptığı bir hareket de söz konusu şekle bağlı bütün doğrusal çizgilerin başlangıç konumları ile bitiş konumları arasında meydana gelen açı, şeklin dönme açısına eşit olduğundan doğal olarak MC'

ile $M'C$ ve $K'C'$ ile KC doğrularının teşkil ettikleri $CH'C'$, $K'HT$ açılarının birbirine eşit olması gerekir.

Şimdi,

$$Açı\ K'HT = Açı\ CKB + Açı\ C'K'B$$

$$Açı\ CH'C' = Açı\ CSB + Açı\ C'MB$$

olur. Fakat $BC = BC'$ sonsuz küçük yayları du , BK eğrilik yarıçapı r_1 , BK' eğrilik yarıçapı r_2 , BM dönme yarıçapı z ve sonuç olarak belirlenmesi istenen SM eğrilik yarıçapı r ile ifade edildiğinde yarıçapı bir olan daire çevresi cinsinden

$$Açı\ CKB = \frac{du}{r_1}$$

$$Açı\ C'K'B = \frac{du}{r_2}$$

olduğundan

$$Açı\ K'HT = \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) du$$

bulunur.

Diğer taraftan C , C' noktalarından SB doğrusu üzerine CD , $C'D'$ dikmelerini indirerek

$$\sin CSB = \frac{\overline{CD}}{\overline{SC}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{SM} - \overline{BM}} = \frac{\overline{CD}}{r - z}$$

veya CSB açısı sonsuz küçük var sayıldığında

$$Açı\ CSB = \frac{\overline{CD}}{r - z}$$

olacağı gibi aynı biçimde

$$Açı\ C'MB = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{MD'}} = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{MC'} - \overline{MB}} = \frac{\overline{C'D'}}{z}$$

bulunacağından ve halbuki BCD veya $K'BM$ açısı α ile ifade edildiğinde

$$\overline{CD} = \cos \alpha \, du$$

ve

$$\overline{C'D'} = \cos \alpha \, du$$

gibi kabul olunabileceğinden

$$Açı\ CSB = \frac{\cos \alpha \, du}{r - z}$$

ve

$$Açı\ C'MB = \frac{\cos \alpha \, du}{z}$$

ve bu nedenle

$$Açı\ CH'C' = \left(\frac{1}{r-z} + \frac{1}{z} \right) \cos \alpha \, du$$

bulunur.

Şimdi birbirlerine eşit bulunan $CH'C', K'HT$ açılarının bu değerlerinden

$$\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) du = \left(\frac{1}{r-z} + \frac{1}{z} \right) \cos \alpha \, du$$

veya

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = \left(\frac{1}{r-z} + \frac{1}{z} \right) \cos \alpha$$

eşitlikleri elde edilir.

Ancak söz konusu eşitlikte bulunan miktarların işaretlerini icabına göre düzeltmek gerekir. Nitekim hareketli eğrinin eğriliği sabit eğrinin eğriliği yönünde olduğunda $+r_2$ yerine $-r_2$ koymak gerekeceği gibi episikloidsel eğrinin eğriliği değiştiğine göre r eğrilik yarıçapının da işaretini değiştirmek ve M doğurucu noktası sabit eğrinin içinde bulunduğu z miktarının da işaretini de değiştirmek gerekir.

5.11. Episikloidsel Hareket (Hareket-i Episikloidiye)

Bir eğri diğer sabit bir eğri üzerinde yuvarlanarak hareket ettiği durumda, bu hareketli eğri üzerindeki (bağlı) bir noktasının hareketine “Hareket-i Episikloidiye” (Episikloidsel Hareket) denir. Ancak noktanın meydana getirdiği episikloidin düzlemsel veya kürevi episikloid oluşuna göre episikloidsel harekete “Düzlemsel Episikloidsel Hareket” ve “Küresel Episikloidsel Hareket” adı verilir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Toplam 400 sayfa olan bu eserin “Ab” maddesi ile başlayıp “Usûl” maddesi ile bitmesi yani bu 400 sayfanın tamamının sadece “elif” harfiyle başlayan (alfabenin ilk harfiyle başlayan) kavramlara ait olması da kavramların ne kadar geniş kapsamlı anlatıldığının göstergesidir diyebiliriz. Bu eserde sadece matematiksel bilimlerde kullanılan kavramlar açıklanmamış aynı zamanda bu alanda çalışan bilginler ve bunların kitapları da tanıtılmıştır. Kavramlar Türk adlarına göre sıralanmış hemen altlarında Fransızca karşılıkları da verilmiştir. Bu eser sadece matematik terimlerini ve matematikçileri içermez. Aynı zamanda astronomi, fizik, ... kavramları ile bu bilimlerle ilgilenen bilginleri de içermektedir[1,3].

Salih Zeki Bey, görüldüğü gibi bu eserinde “İtegral Alma“, “Sonsuz Küçük“, “Episikloid“ kavramlarını oldukça detaylı ve anlaşılır biçimde anlatmış olup bazı yaptığı açıklamalarla diğer kavramların içerisinde de bu kavramlara yer verdiği görülmektedir. Ayrıca incelediğimiz bu kavramların ne kadar detaylı anlatıldığı günümüzde yazılmış olan yüksek matematik kitaplarına baktığımızda daha iyi anlaşılır. Bu çalışma, Salih Zeki Bey’in modern matematik kavramlarını detaylarıyla bildiğini dolayısıyla bilgisinin derinliğini açıkça ortaya koymaktadır [9-12].

Journal Asiatique’de yayımlanan “Notation Algébrique Chez Les Orientaux” adlı makalesinde cebirde sembollerin önemine değinen Salih Zeki Bey, Kâmûs-ı Riyâziyât adlı bu değerli eserinde kolay anlaşılan bir sembol sistemi kullanmıştır [13].

İncelenen bölümde kelime yazılışının kısaltılmasıyla oluşturulan matematiksel semboller eserin kolay anlaşılmasını sağlamaktadır. Örneğin, “İtmâm” (İntegral Alma) kelimesinin sembolü baştan elif harfi ve t harfinin noktalarıyla sonundan da m harfinin atılmasıyla oluşturulduğu gibi. ∞ , γ ve π sembolleri günümüzde kullanıldığı gibi alınmıştır.

Salih Zeki Bey'in, matematik ve astronomi bilimlerinde kullanılan bütün terimleri açıklamak ve bütün matematikçilerin ve astronomların hayat öykülerini ve eserlerini tanıtmak maksadıyla yayımlamaya giriştiği *Kâmûs-ı Riyâziyyât* adlı bu muhteşem yapıtı, Türk bilim tarihi açısından da çok değerlidir. Şayet diğer ciltleri de yayımlanmış olsaydı, hem çağdaş bilimlerin tanınmasına ve yayılmasına büyük katkılarda bulunacak, hem de –bugün, bilim eğitim ve öğretimin ayrılmaz bir parçası olduğu daha iyi anlaşılan- bilim tarihi bilincinin yerleşmesini ve güçlenmesini sağlayacaktı [1].

KAYNAKLAR

1. Gökdoğan, M. D., Demir, R., Kılıç, M., “Âsâr-ı Bâkiye (Bilginlerin Yaşamları ve Yapıtları) Cilt 3”, **Babil Yayıncılık**, Ankara, 4, 25-38 (2004).
2. Demir, R., Unat, Y., “Âsâr-ı Bâkiye (Ortaçağ İslam Dünyasında Trigonometri Cilt 1)”, **Babil Yayıncılık**, Ankara, V-XIV (2003).
3. Saraç, C., “Salih Zeki Bey (Hayatı ve Eserleri)”, **Kızılelma Yayıncılık**, İstanbul, 133-162 (2001).
4. İnönü, E., “Son Osmanlı Döneminin Üç Matematikçisi”, XVIII. Ulusal Matematik Sempozyumu, , İstanbul Kültür Üniversitesi, Ataköy-İstanbul, 1-20 (2005).
5. Demir, R., Kalaycıoğulları, İ., “Büyük Bir Matematik Tarihçisi ve Felsefecisi: Salih Zeki Bey”, **Kutadgubilig Felsefe-Bilim Araştırmaları Dergisi**, Sayı 6, 195-211 (2004).
6. Salih Zeki Bey, “Teskîs-i Zâviye Mes’alesi”, **Resimli Gazete**, İstanbul, (1307).
7. Salih Zeki Bey, “Kâmûs-ı Riyâziyyât (Matematiksel Bilimler Ansiklopedisi)”, **Karabet Matbaası**, 146 (1897).
8. La Hire, P., “Traité de Mécanique, ou l’on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts & les propriétés des corps pesants lesquelles ont un plus grand usage dans la physique”, **De L’imprimerie royale et se vend Chez J. Anisson**, Paris, (1695).
9. Akın, Ö., Köten, H., “Salih Zeki’de Sonsuz Küçük Kavramı”, **Mantık, Matematik ve Felsefe, III. Ulusal Sempozyumu**, İzmir-Foça, 45-54 (2005).
10. Akın, Ö., “Nümerik Analiz”, **Ankara Üniversitesi Basımevi**, 171 (1998).
11. Biran, L., “Matematik Dersleri”, **İstanbul Üniversitesi Yayınları**, 19 (1978).
12. Hacısalıhoğlu, H.H., “2 ve 3 Boyutlu Uzaylarda Analitik Geometri”, 233-235, 330-337 (2005).
13. Demir, R., “Salih Zeki Bey’in Journal Asiatique’de Yayımlanan “**Notation Algébrique Chez Les Orientaux**” **Ankara Üniversitesi Osmanlı Tarihi Araştırma ve Uygulama Merkezi Dergisi**, Sayı 15,(2004).

EKLER

EK-1 Sonsuz Küçük

$$h = \overline{LL'}$$

$$k = \overline{C'L'} - \overline{CL} = \overline{BC'}$$

$$\frac{k}{h} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{LL'}} = \frac{\overline{BC'}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\overline{CC'}}{H} = \frac{\sqrt{\overline{CB}^2 + \overline{BC'}^2}}{\overline{BC}} = \sqrt{1 + \frac{\overline{BC'}^2}{\overline{BC}^2}} = \alpha > 0 \quad (\alpha : \text{Sonlu pozitif bir sayı})$$

$$\Rightarrow |\overline{CC'}| = h.\alpha$$

$$k = \overline{BC'}$$

$$h.f'(x) = \overline{BT}$$

$$\frac{\overline{BC'}}{h} = \frac{\sqrt{\overline{CC'}^2 - \overline{BC}^2}}{\overline{BC}} = \sqrt{\frac{\overline{CC'}^2 - \overline{BC}^2}{\overline{BC}^2}} = \sqrt{\frac{\overline{CC'}^2}{\overline{BC}^2} - 1}$$

$$= \sqrt{\frac{h^2\alpha^2}{h^2} - 1} = \sqrt{\alpha^2 - 1} = \beta > 0 \quad (\text{Sonlu pozitif bir sayı})$$

$$\Rightarrow \overline{BC'} = h.\beta$$

$$h.f'(x) \Rightarrow \frac{\overline{BT}}{h} = f'(x) > 0$$

EK-2 İçsel Üçgensel Episikloid Eğrisinin Denklemi

$$x = \frac{2r}{3} \cos \alpha + \frac{r}{3} \cos 2\alpha$$

$$y = \frac{2r}{3} \sin \alpha - \frac{r}{3} \sin 2\alpha$$

olmak üzere

$$x_1 = \frac{3}{r} x = 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$$

$$y_1 = \frac{3}{r} y = 2 \sin \alpha - \sin 2\alpha$$

dır. Burada

$$x_1 - 2 \cos \alpha = \cos 2\alpha$$

$$y_1 - 2 \sin \alpha = \sin 2\alpha$$

olur. Eşitliklerin her iki taraflarının kareleri alınıp toplanırsa

$$x_1^2 + y_1^2 - 4(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) + 4 = 1 \quad (1)$$

elde edilir. Böylece

$$x_1^2 + y_1^2 + 3 = 4(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) \quad (2)$$

olur. Burada

EK-2 (Devam) İçsel Üçgensel Episikloid Eğrisinin Denklemi

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = 2 \cos^2 \alpha + 2 \sin^2 \alpha + \cos \alpha \cos 2\alpha - \sin \alpha \sin 2\alpha$$

ve

$$x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha = 2 + \cos 3\alpha \quad (3)$$

elde edilir.

(3)'ü (2)'de yerine yazarsak

$$x_1^2 + y_1^2 + 3 = 4(2 + \cos 3\alpha) \quad (4)$$

elde edilir. Ayrıca, $x_1 = 2 \cos \alpha + \cos 2\alpha$ eşitliğinden

$$2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1 = x_1$$

veya

$$2 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - (1 + x_1) = 0$$

olur.

$$t = \cos \alpha \text{ dersek } 2t^2 + 2t - (1 + x_1) = 0$$

ve

$$\Delta = 4 + 4.2(1 + x_1) = 4(2x_1 + 3)$$

EK-2 (Devam) İçsel Üçgensel Episikloid Eğrisinin Denklemi

$$\cos \alpha = \frac{-1 \text{ m} \sqrt{2x_1 + 3}}{2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + x_1) - \cos \alpha$$

$$= \frac{1}{2}(1 + x_1) - \frac{-1 \text{ m} \sqrt{2x_1 + 3}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}(2 + x_1 \text{ m} \sqrt{2x_1 + 3})$$

olur. Ayrıca, $\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)$ idi.

$4 \cos^2 \alpha - 3$ 'ü hesaplarsak,

$$4 \cos^2 \alpha - 3 = 4 + 2x_1 \text{ m} 2\sqrt{2x_1 + 3} - 3$$

$$= 1 + 2x_1 \text{ m} 2\sqrt{2x_1 + 3}$$

elde edilir. Böylece,

$$\cos 3\alpha = \cos \alpha (4 \cos^2 \alpha - 3)$$

$$= \frac{1}{2}(-1 \text{ m} \sqrt{2x_1 + 3})(1 + 2x_1 \text{ m} 2\sqrt{2x_1 + 3})$$

$$= \frac{1}{2}(-1 - 2x_1 \text{ m} 2\sqrt{2x_1 + 3} \text{ m} (1 + 2x_1) \sqrt{2x_1 + 3} - 2(2x_1 + 3))$$

EK-2 (Devam) İçsel Üçgensel Episikloid Eğrisinin Denklemi

$$= \frac{1}{2} \left(-7 - 6x_1 \, m \sqrt{2x_1 + 3} (2x_1 + 3) \right)$$

ve

$$2 + \cos 3\alpha = 2 + \frac{1}{2} \left(-7 - 6x_1 \, m (2x_1 + 3) \sqrt{2x_1 + 3} \right)$$

$$2 + \cos 3\alpha = \frac{1}{2} \left(-3 - 6x_1 \, m (2x_1 + 3) \sqrt{2x_1 + 3} \right) \quad (5)$$

olur. (5) eşitliğini (4)'te yerine yazarsak

$$x_1^2 + y_1^2 + 3 = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(-3 - 6x_1 \, m (2x_1 + 3) \sqrt{2x_1 + 3} \right)$$

elde ederiz. Bu eşitliği düzenlediğimizde

$$x_1^2 + y_1^2 + 12x_1 + 9 = m^2 (2x_1 + 3) \sqrt{2x_1 + 3}$$

ve her iki tarafın karesini alırsak

$$\left(x_1^2 + y_1^2 + 12x_1 + 9 \right)^2 = 4 \left(2x_1 + 3 \right)^3 \quad (6)$$

sonucuna ulaşırız.

(6) eşitliğinde $x_1 = \frac{3}{r} x$, $y_1 = \frac{3}{r} y$ değerlerini yerlerine yazarsak

EK-2 (Devam) İçsel Üçgensel Episikloid Eğrisinin Denklemi

$$\left(\frac{9}{r^2}(x^2 + y^2) + \frac{36}{r}x + 9\right)^2 = 4\left(\frac{6x}{r} + 3\right)^3$$

$$\frac{81}{r^4}(x^2 + y^2 + 4rx + r^2)^2 = 4 \cdot \frac{27}{r^3}(2x + r)^3$$

$$(x^2 + y^2 + 4rx + r^2)^2 = \frac{4}{3}r(2x + r)^3 \quad (7)$$

genel denklemine ulaşılır. Bu denklem kare ve küp alınarak aşağıdaki şekilde de düzenlenebilir.

$$(x^2 + y^2)^2 + 8r\left(y^2 - \frac{1}{3}x^2\right)x + 2r^2(y^2 + 9x^2) - \frac{1}{3}r^4 - 16rx^2 = 0$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı : KÖTEN, Hacer
Uyruğu : T.C.
Doğum tarihi ve yeri : 11.07.1957 İstanbul
Medeni hali : Evli
Telefon : 0 (312) 468 83 45
Faks : -
e-mail : hacer.koten@hotmail.com.

Eğitim

Derece	Eğitim Birimi	Mezuniyet tarihi
Lisans	İstanbul Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2001
Lise	Cibali Kız Lisesi	1978

Yabancı Dil

İngilizce

Hobiler

Gümüş tasarım