



**T.C.
TOKAT GAZİOSMANPAŞA ÜNİVERSİTESİ
LİSANSÜSTÜ EĞİTİM ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
YÜKSEK LİSANS PROGRAMI**

**SANAL EĞRİLER ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
BERRİN ÇAKMAKOĞLU**

Prof. Dr. Bahaddin BÜKCÜ

Tokat-2022

ETİK SÖZLEŞME

Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü tez yazım kılavuzuna göre, Bahaddin BÜKCÜ danışmanlığında hazırlamış olduğum Sanal Eğriler Üzerine adlı Yüksek Lisans tezinin bilimsel etik değerlere ve kurallara uygun, özgün bir çalışma olduğunu, aksinin tespit edilmesi halinde her türlü yasal yaptırımını kabul edeceğimi beyan ederim.

BERRİN ÇAKMAKOĞLU

22/04/2022

ÖZET

SANAL EĞRİLER ÜZERİNE

Çakmakoglu, Berrin

Yüksek Lisans, Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bahaddin Bükcü

Nisan 2022, vi + 57 sayfa

Bu yüksek lisans tezi dört ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm girişin ayrılmıştır. Eğrilerin ve sanal eğrilerin tarihçesinden bahsedilmiştir. Sanal eğrilerin tanımlanması için kompleks değişkenlere yer verilmesi gerektiğinden, minimal yüzeylerin kompleks eğrilerin içinde yer aldığından ve izotropik olduklarından söz edilmiştir. İkinci bölümde literatür özetlenmiş, temel kavramlara yer verilmiştir. Üçüncü bölümde sanal elemanlarla ilgili tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Sanal nokta, sonsuzda sanal nokta, gerçel uzayda sanal düzlem, sanal noktadan geçen tek doğru, Eşlenik iki doğruyu birleştiren gerçel doğru, eşlenik sanal doğrular, gerçel uzayda sanal düzlem açıklanmıştır. E. Cartan sayılık üçyüzlüsü incelenmiştir. Dördüncü bölümde ilk olarak sanal eğri tanımlanmış bu eğrinin yalnızca yalnız $ds^2 = 0$ halinde bir izotrop eğri olabileceği gösterilmiştir. $ds^2 = 0$ eşitliğinden yararlanılarak düzlemde minimal eğriler, sanal düzlemde minimal eğriler, küresel minimal eğriler, uzayda minimal eğriler açıklanmış. Uzayda minimal eğrilerin belirlenmesi alanında çalışma yapılmıştır. Minimal eğrilerde bazı diferansiyel invariantlar ve psödo-yaylar incelenmiş, minimal eğrilerin yer vektörünün çeşitli mertebeden türevleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELE: Sanal Elemanlar, Sanal Eğriler.

ABSTRACT

IMAGINARY CURVES

Çakmakoglu, Berrin

Master's Thesis, Department Of Mathematics

Advisor: Prof.Dr. Bahaddin Bükcü

April 2022, vi + 57 pages

This master thesis consists of four main parts. The first part consists of the introduction. In the introduction, the history of curves and virtual curves is mentioned. For a better understanding of the subject, it is mentioned that minimal surfaces belong to complex curves and that they are isotropic. The second part is reserved for the history of the literature and in this part, the basic concepts are explained. In the third chapter, definitions and theorems about imaginary elements are given. In the third chapter, the imaginary point, the imaginary point at infinity, the imaginary plane in real space, the single line passing through the imaginary point, the conjugate real line connecting two lines, the conjugate imaginary lines, and the imaginary plane in real space are explained. In addition, E. Cartan cyclic trihedron was examined. In the fourth chapter, the virtual curve is first defined and it is shown that this curve can be an isotropic curve only if $ds^2 = 0$. Using the equation $ds^2 = 0$, minimal curves in the plane, minimal curves in the virtual plane, spherical minimal curves, and minimal curves in space are explained. Much work has been done in the field of the determination of minimal curves in space. Some differential invariants and pseudo arcs in minimal curves are investigated, and relations between derivatives of a different order of the location vector of minimal curves are investigated..

KEYWORDS: Imaginary Component, Imaginary Curves.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
ÖNSÖZ	v
SİMGE ve KISALTMALAR	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR	2
2.1. Temel Tanım ve Kavramlar	2
3. SANAL ELEMANLAR	4
3.1. Sanal Nokta	4
3.2. Sonsuzda Sanal Noktalar	5
3.3. Sanal Noktadan Geçen Tek Doğru	6
3.4. Eşlenik İki Doğruyu Birleştiren Gerçel Doğru	6
3.5. Eşlenik Sanal Doğrular	7
3.6. Gerçel Uzakda Sanal Düzlem	7
3.7. Sanal Düzlem Üzerinde Bulunan Tek Gerçel Doğru	8
3.8. Eşlenik Sanal Düzlemler	8
3.9. Gerçel Uzakda Sanal Doğru	9
3.10. Gerçel Uzakda Eşlenik Sanal Doğrular	9
3.11. Gerçel Uzakda Sanal Noktadan Geçen Gerçel Doğru	9
3.12. Düzlemde İzotrop Doğrular	10
3.13. İzotrop Doğruların Sonsuzdaki Noktaları: Saylık Noktalar	15
3.14. İzotrop Koni	16
3.15. Gerçel Uzakda İzotrop Doğrular	18
3.16. Umbilik (göbek) izotrop doğru	19
3.17. GERÇEL UZAYDA İZOTROP DOĞRU	21
3.18. E.CARTAN SAYLIK ÜÇYÜZLÜSÜ	22
4. SANAL EĞRİLER	26
4.1. Sanal Eğri	26
4.2. Gerçel Düzlemde Minimal Eğriler	26
4.3. Düzlemde Minimal Eğriler	27
4.4. Sanal Düzlemde Minimal Eğriler	27
4.5. Küresel Minimal Eğriler	29
4.6. Uzakda Minimal Eğriler	32
4.7. Uzakda Minimal Eğrilerin Belirlenmesi	34

4.8. Minimal Eğrilerde Bazı Diferansiyel İnvariantlar ve Psödo-yay	36
4.9. Minimal Eğrilerde Yer Vektörünün Çeşitli Mertebelerden Türevleri Arasındaki İlişkiler	39
4.10. Minimal Eğrilerin İncelenmesinde Kullanılan E CARTAN Saylık Üçyüzlüsü	43
4.11. Türev Formülleri	43
4.12. Psödo-eğrilik Merkezi Ve Bunun Geometrik Yeri	46
4.13. Psödo-eğrilik Eksenini Ve Bunun Teğet Kaldığı Eğri	47
4.14. Minimal Eğrilerde Teğetlerin Dik Yörüngeleri	47
4.15. Bir E Minimal Eğrisini Kesen Ve (e_2, e_3) Düzleminde Bulunan Doğrulardan Bir Eğriye Teğet Kalabilenler	49
4.16. Psödo-eğrilik Sabit Olan Minimal Eğrilerin Psödo-eğrilik Merkezinin Geometrik Yeri	50
4.17. Bir Minimal Eğrinin Doğrulayan Doğruları Ve Bunların Teğet Kaldıkları Eğri	52
4.18. Oskülatör Düzlemleri Sabit Bir Noktadan Geçen Minimal Eğriler . . .	53
4.19. Saylık Üçyüzlünün İkinci Yüzü Sabit Bir Noktadan Geçen Minimal Eğriler	54
4.20. Sabit Bir O Noktasının Saylık Üçyüzlüye Göre Koordinatlarından Biri Sabit Olan Eğriler	57
KAYNAKLAR	60

ÖNSÖZ

Tez konumu veren, yöneten, çalışmalarında bana gerekli imkanları sağlayan, destek ve yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Bahaddin BÜKCÜ'ye en içten teşekkürlerimi sunarım.

BERRİN ÇAKMAKOĞLU

Nisan 2022

SİMGE ve KISALTMALAR

Simge

- $\mathbb{R}$: Reel sayıların cümlesi
 $\mathbb{N}$: Doğal sayıların cümlesi
 $\mathbb{C}$: Kompleks sayıların cümlesi



1. GİRİŞ

Etrafımıza baktığımızda doğrulardan daha çok eğrilerle karşılaşırız. Matematik ile ilgilenen kişiler yıllar boyu eğrilere farklı açıklamalar getirmeye çalışmışlardır. İlk olarak Yunanlıların incelediği eğrilere günümüzde klasik eğriler denmiştir. Klasik eğrilerden bahsedilince ilk akla gelen elbette konik kesitler oluyor. Daha önceden konu ile ilgili çalışmalar olduğu bilinse de, M.Ö 3. yüzyılda Apollonius, dik dairesel bir koni ile düzlemi kesiştirerek farklı eğriler tanımlamıştır. Bu konik kesitlerden elips, parabol ve hiperbol oluşmuştur. Eğrilerin diğer bir çeşidi de elipstir. Elipsin günlük hayatta karşımıza çıktığı yerlerden birisi gezegenler arası yörüngelerdir. Kepler Yasasından bildiğimiz gibi gezegenler eliptik yörüngelerde dolanırlar. Elipsin bir odağından çıkan ışının (hangi açıyla çıktığı fark etmez) elipse dokunup yansıdıktan sonra diğer odaktan geçer. Bu özelliğin kullanıldığı yerlerden birisi böbrek taşlarının kırılmasıdır. Tasarlanan bir alet yardımı ile, birinci odaktan çıkan ultrasonik dalgalar, hastanan böbrek taşlarına denk gelecek şekilde yerleştirilen ikinci odağa ulaşp taşları kırar.

E. Cartan sanal eğrilerden ilk bahseden kişidir ve sanal eğrileri tanımlamak için kompleks değişkenlerden yararlanmıştır. Ayrıca sanal eğriler Ferruh Şemin tarafından ayrıntılı bir şekilde çalışılmıştır. S. Yılmaz'ın "Contributions to differential geometry of isotropic curves in the complex space" adlı makalesinde C^4 kompleks uzayında izotropik eğriler ve izotropik slant helislerle ilgili çalışmalara yer verilmiştir. Biz bu çalışmada sanal elemanlar ve sanal eğriler kavramlarını anlatmaya çalıştık. (Tahtıkşan, 2014)

Minimal yüzeyler teorisi 19. yy'da geliştirilmiştir. Minimal yüzeyler C^3 de kompleks eğrilerin içinde yer alır ve izotropiklerdir.

Sanal elemanlar ve sanal eğriler minimal yüzeylerde tanımlanan kavramlardır. Biz bu çalışmada sanal elemanların ve sanal eğrilerin matematiksel yapılarını inceledik.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

2.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu kısımda daha sonraki bölümlere hazırlık olması için gerekli görülen temel tanım, kavram ve yardımcı teoremlere yer verilmiştir.

Tanım

E eğri yayının bir $N(t)$ noktasındaki teğetinden ve $N(t)$ ye yakın bir $N_1(t + \Delta t)$ noktasından geçen düzlemini N_1 in N ye yaklaşması halinde, varsa limit durumuna: E eğri yayının $N(t)$ noktasındaki oskülatör düzlemi denir. (Şemin, 1983).

Tanım

I, R nin bir açık aralık olmak üzere, $\alpha : I \rightarrow E^{n+1}$ C^∞ sınıfından bir α dönüşümüne E^{n+1} uzayı içinde bir eğri denir. (Hacısalıhoğlu, 1980).

Tanım

$\mathbf{k}_p$, ($p = 1, 2, 3$) birim vektörlü bir eksen sistemi Ox_p olsun. Bu üç eksenin aynı bir düzleme paralel bulunmadıklarını, yani $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \neq 0$ olduğunu kabul ediyoruz. Buna göre, x_p koordinatlarından en azından birisi kompleks olan bir $N(x_p)$ noktasına *sanal nokta* denir. (Şemin, 1983).

Tanım

Uzayda bir doğruyu tanımlamaya yarayan iki düzlemden hiç olmazsa birisi sanalsa bu doğruya da *sanal doğru* denilir. (Şemin, 1983).

Tanım

Gerçel yada sanal bir düzlemin umbilikal ile ortak noktalarına, bir düzlemin sayılık noktaları denir. (Şemin, 1983).

Tanım

Herhangi iki noktası arasındaki uzakların karesi sıfıra eşit olan bir eğriye izotrop ya da minimal eğri denir. (Şemin, 1983).

Tanım

Reel sayılar cismi ve V vektör uzayı olmak üzere, V de bir

$$\langle, \rangle : V \times V \rightarrow R$$

$$\forall v, w \in V$$

$$(v, w) \rightarrow \langle, \rangle ((v, w)) = \langle v, w \rangle \in R$$

iç çarpım fonksiyonu tanımlanabilirse, V vektör uzayına iç çarpım uzay denir. (Hacısalıhoğlu, 1980).



3. SANAL ELEMANLAR

Bu bölümde tez çalışmamızın öncü konusu olan sanal elemanlarla ilgili temel tanımlar ve bazı açıklamalar yapılmıştır.

3.1. Sanal Nokta

$\mathbf{k}_p$, ($p = 1, 2, 3$) birim vektörlü bir eksen sistemi Ox_p olsun. Bu üç eksenin aynı bir düzleme paralel bulunmadıklarını, yani $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) \neq 0$ olduğunu kabul ediyoruz. Buna göre, x_p koordinatlarından en azından birisi kompleks olan bir $N(x_p)$ noktasına *sanal nokta* denir. (Tahtıkşan, 2014) İki N_1, N_2 sanal noktasının aynı olmaları için geçerli koşul, koordinatlarının aynı olmalarıdır. Seçilen iki sanal noktadan birisinin koordinatları diğer sanal noktanın koordinatlarının eşlenikleri ise, bu noktalara *birbirinin eşleniği* denilir. Örneğin $N_1(2, 3i, 1 - 4i)$ ve $N_2(2, -3i, 1 + 4i)$ noktalara eşlenik iki noktadır. İki eşlenik noktanın aynı olabilmesi için, eşitlikleri gereken koordinatlarının gerçel sayılardan oluşmaları, yani noktaların sanal olmamaları gerekir. (Tahtıkşan, 2014) Koordinatları x_p olan $N(x_p)$ sanal noktasını ve dördü birden sıfır olmamak şartıyla öyle dört X_q , ($q = 1, 2, 3, 4$) sayısını alalım ki

$$x_p = \frac{X_p}{X_4}, \quad (X_4 \neq 0) \quad (3.1.1)$$

olsun. X_1, X_2, X_3, X_4 noktasına $N(x_p) = (x_1, x_2, x_3)$ sanal noktasının homogen koordinatları denir. (Tahtıkşan, 2014) Homogen koordinatları ile tanımlanan bir noktanın sanal olabilmesi için, üç $\frac{X_p}{X_4}$ oranından en azından biri kompleks olmalıdır. Örneğin, homogen koordinatları $(i, 2i, -i, 5i)$ olan noktanın karteziyen koordinatları $(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, -\frac{1}{5})$ olduğundan, bu nokta sanal değildir. Gerçel noktaların ve sanal noktaların homogen koordinatlarını belirleme yolu çarpan farkıdır. Bu sebeple, örnek olarak verebileceğimiz noktanın başka bir homogen koordinat takımı da $(1, 2, -1, 5)$ olacağından, bu nokta gerçeldir. $\frac{X_p}{X_4}$ oranlarından en az biri sıfır olan noktaya sanal nokta denir. (Şemin, 1983)

3.2. Sonsuzda Sanal Noktalar

Aralarındaki oranlardan hiç olmazsa birisi kompleks olan $X_p, 0, (p = 1, 2, 3)$ sayıları, *sonsuzda bulunan bir sanal noktayı* tanımlar.

$$D = \sum_{p=1}^3 A_p X_p = 0 \quad (3.2.1)$$

homogen denklemindeki katsayılardan en azından birisi kompleks ise ve α_p ler gerçel sayıları olmak üzere, bu katsayılar arasında

$$A_p = \lambda \alpha_p, \quad (p = 1, 2, 3) \quad (3.2.2)$$

biçiminde eşitlikler yoksa, tanım olarak, (3.2.2) homogen denklemi gerçel düzlemde bir sanal doğruyu gösterir. (Tahtıkşan, 2014) Bu denklemdeki X_p koordinatları kompleks ve gerçel değerler alabilir. Bu sanal doğru üzerinde bir tek gerçel nokta vardır. (Şemin, 1983)

Teorem

Gerçel düzlemdeki sanal doğru üzerinde bir tek gerçel nokta vardır

İspat. Gerçel c sayılarının üçü birden sıfır olmamak üzere

$$A_p = a_p + ic, \quad (p = 1, 2, 3; a_p : gerçel) \quad (3.2.3)$$

dersek, (3.2.1) denklemi, gerçel X_p homogen koordinatları için

$$D \equiv D_1 + iD_2 = 0, \quad D_1 = \sum_{p=1}^3 a_p X_p, \quad D_2 = \sum_{p=1}^3 c X_p \quad (3.2.4)$$

biçiminde yazılabiliriz. D nin gerçel olması için gerekli ve yeterli koşul

$\frac{a_p}{c} = k$ (k : sıfır ya da ∞ olabilen gerçel bir sayı)'dır. (3.2.4) denklemi gösterir ki D sanal doğrusu üzerinde bir tek gerçel nokta vardır; o da $D_1 = 0, D_2 = 0$ gerçel doğrularının arakesit noktasıdır. Sonsuzda olabilmesi için bu noktanın sonlu uzaklıktan ya da $D_1 = 0$ ve $D_2 = 0$ noktalarına paralel olması gerekir. D sanal doğrusunun, bu gerçel noktadan farklı diğer tüm noktaları sanaldır. Böylece iki gerçel noktadan

bir sanal doğru geçmez, böyle iki noktayı birleştiren doğru gerçeldir, fakat bir gerçel noktadan sonsuz sanal doğru geçer.(Şemin, 1983)

3.3. Sanal Noktadan Geçen Tek Doğru

Tanım

Bir sanal noktadan, bu noktanın bulunduğu gerçel düzlem üzerinde, sonsuz sanal doğru geçtiği halde, bir tek gerçel doğru geçer.

İspat. Gerçekten, gerçel düzlemin sonlu uzaklıkta bulunan $N(a_1 + ic_1, a_2 + ic_2)$ sanal noktasından geçen gerçel doğru

$$D \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0 \quad (3.3.1)$$

olsun. Bu doğrunun N noktasından geçmesi halinde $A_1(a_1 + ic_1) + A_2(a_2 + ic_2) + A_3 = 0$ yani

$$A_1a_1 + A_2a_2 + A_3 = 0 \quad A_1c_1 + A_2c_2 = 0 \quad (3.3.2)$$

Eğer $A_1 = -c_2$, $A_2 = c_1$ olarak alırsak, $A_3 = a_1c_2 - a_2c_1$ ve (3.3.1) doğrusu da $-c_2x_1 + c_1x_2 + a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ veya $c_2(x_1 - a_1) - c_1(x_2 - a_2) = 0$ yani $\frac{x_1 - a_1}{c_1} = \frac{x_2 - a_2}{c_2}$ olur. Görülüyor ki $N = (a_1 + ic_1, a_2 + ic_2)$ sanal noktası, Ox_p koordinat düzleminde $\bar{N}(a_p)$ başlangıç noktalı ve c_p doğrultulu v vektörüyle gösterilse, N sanal noktasından geçen doğru, sözü edilen vektörün taşıyıcısıdır. (Şemin, 1983)

D gerçel doğrusu üzerinde N den başka, sonsuz sanal nokta vardır. Bunlardan birinin koordinatları $\bar{a}_1 + i\bar{c}_1$, $\bar{a}_2 + i\bar{c}_2$ ise, $\bar{c}_1 = kc_1$, $\bar{c}_2 = kc_2$, $k \in \mathbb{R}$ dir ve $(\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ noktası da D üzerindedir.(Şemin, 1983)

3.4. Eşlenik İki Doğruyu Birleştiren Gerçel Doğru

Verilen N noktasının eşleniği de aynı D doğrusu üzerindedir. Gerçekten, eşlenik noktayı Ox_p koordinat sisteminde gösteren vektörün başlangıç noktası, aynı $\bar{N}$ noktası, vektörün kendisi de bir öncekinin karşıtıdır.

Karşıt olarak: Eşlenik iki noktadan geçen gerçel doğru gerçeldir.

Eşlenik iki noktadan geçen doğrunun denklemi

$$\frac{x_1-(a_1+ic_1)}{a_1-ic_1-(a_1+ic_1)} = \frac{x_2-(a_2+ic_2)}{a_2-ic_2-(a_2+ic_2)} \text{ veya } \frac{x_1-(a_1+ic_1)}{-2ic_1} = \frac{x_2-(a_2+ic_2)}{-2ic_2} \text{ ya da } \frac{x_1-(a_1+ic_1)}{c_1} = \frac{x_2-(a_2+ic_2)}{c_2}$$

3.5. Eşlenik Sanal Doğrular

Gerçel düzlem üzerinde, $A_p, \bar{A}_p, (p = 1, 2, 3)$ sayıları birbirlerinin eşleniği ise

$$D \equiv A_1x_1 + A_2x_2 + A_3 = 0, \quad \bar{D} \equiv \bar{A}_1x_1 + \bar{A}_2x_2 + \bar{A}_3 = 0 \quad (3.5.1)$$

doğruları, tanım gereğince, *birbirlerinin eşleniğidir*. (3.5.1) denklemleri

$D \equiv D_1 + iD_2 = 0$ ve $\bar{D} \equiv D_1 - iD_2 = 0$ şeklinde de yazılabilir. Son gösterim açıkça belirtir ki: D sanal doğrusu üzerinde bulunan tek gerçel noktadan, bu doğrunun eşleniği olan $\bar{D}$ de geçer. Başka bir ifade edile, D ve $\bar{D}$ nin tek olan ortak noktası gerçeldir. Dolayısıyla, iki eşlenik doğrunun aynı bir doğru olabilmesi için bunların gerçel olmaları gerekir. (Şemin, 1983)

3.6. Gerçel Uzayda Sanal Düzlem

$A_p, (p = 1, 2, 3, 4)$ sayılarından en azından birisi kompleks ise ve a_p ler gerçel olmak üzere bu sayılar arasında

$$A_p = \lambda a_p, \quad (p = 1, 2, 3, 4) \quad (3.6.1)$$

eşitlikleri yoksa,

$$\Delta \equiv \sum_{p=1}^4 A_p X_p = 0 \quad (3.6.2)$$

homogen denklemi, tanım gereğince, *gerçel uzayda bir sanal düzlemi gösterir*. Bu denklemdeki X_p koordinatları gerçel ve sanal değerler alabilir. (Şemin, 1983)

3.7. Sanal Düzlem Üzerinde Bulunan Tek Gerçel Doğru

(3.6.2) denklemini sağlayan gerçel noktalar, sonlu ya da sonsuz uzaklıkta bulunan bir gerçel doğru üzerindedirler. Gerçekten, gerçel c , ($p = 1, 2, 3, 4$) sayıların dördü birden sıfır olmamak üzere

$$A_p = a_p + ic, \quad (p = 1, 2, 3, 4), \quad a_p \in \mathbb{R} \quad (3.7.1)$$

dersek, gerçel X_p homogen koordinatları için, (3.6.2) denklemi

$$\Delta \equiv \Delta_1 + i\Delta_2 = 0, \quad \Delta_1 \equiv \sum_{p=1}^4 a_p X_p, \quad \Delta_2 \equiv \sum_{p=1}^4 c_p X_p \quad (3.7.2)$$

biçiminde yazılabilir. Δ nın gerçel olabilmesi için gerekli ve yeterli şart $\frac{a_p}{c_p} = k$ (k : sıfır ya da ∞ olabilen gerçel bir sayı) dır. Bu da $A_p = c_p (k + i)$, ($p = 1, 2, 3, 4$) olmasını, yani (3.6.1) bağıntılarını gerektirir. (3.7.2) gösterir ki Δ sanal düzlemi üzerinde bulunan gerçel noktalar $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ gerçel düzlemlerinin arakesiti üzerindeki noktalardır. Bu düzlemlerin paralelliği, yani $\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3}$ bağıntılarının gerçekleşmesi halinde, bu doğru sonsuzdadır. (Şemin, 1983) Bu doğrudan başka, Δ sanal düzlemi üzerinde başka gerçel doğru yoktur. Olsaydı, herhangi bir noktasının koordinatları: $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$ denklemlerini de sağlayacağından, bu nokta da zorunlu olarak ilk gerçel doğru üzerinde bulunacaktır. O halde şu şekilde ifade edebiliriz: Bir gerçel doğrudan sonsuz sanal düzlem geçtiği halde, gerçel düzlemlerin tersine, kesilen iki gerçel doğrudan geçen sanal düzlem yoktur. Böyle bir düzlem gerçeldir. Dolayısıyla iki eşlenik düzlemin aynı düzlem olabilmesi için bunların gerçel olması gerekir.

3.8. Eşlenik Sanal Düzlemler

$A_p, \bar{A}_p$, ($p = 1, 2, 3, 4$) kompleks sayıları birbirlerinin eşleniği ise

$$\Delta \equiv A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 = 0 \quad (3.8.1)$$

$$\bar{\Delta} \equiv \bar{A}_1x_1 + \bar{A}_2x_2 + \bar{A}_3x_3 + \bar{A}_4 = 0$$

düzlemleri, tanım gereğince, *birbirinin eşleniğidir*. (3.8.1) denklemleri

$\Delta = \Delta_1 + i\Delta_2$, $\bar{\Delta} = \Delta_1 - i\Delta_2$ biçiminde de yazılabilir. Bu da gösterir ki: Δ üzerinde bulunan tek gerçel doğrudan, Δ nın eşleniği olan $\bar{\Delta}$ de geçer. Başka deyimle: Δ ve $\bar{\Delta}$ nin tek olan arakesit doğrusu gerçeldir. (Şemin, 1983)

3.9. Gerçel Uzayda Sanal Doğru

Uzayda bir doğruyu tanımlamaya yarayan iki düzlemden hiç olmazsa birisi sanalsa bu doğruya da *sanal doğru* denilir.

Öyleyse, gerçel uzayın bir sanal doğrusu, genel olarak $\Delta_1 + i\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 + i\Delta_4 = 0$ biçiminde iki denklemle tanımlanır. Δ_2 ve Δ_4 den hiç olmazsa birisi özdeş olarak sıfır değildir. *Böyle bir doğru üzerinde, genellikle, gerçel nokta yoktur*. Çünkü bu tür bir nokta $\Delta_p = 0$, ($p = 1, 2, 3, 4$) düzlemlerinin ortak noktasıdır; oysa bu düzlemlerin her zaman ortak bir noktası yoktur. Ama, sanal doğruyu tanımlayan düzlemlerden birisi gerçelse, örneğin Δ_4 özdeş olarak sıfırsa, $\Delta_1 + i\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ sanal doğrusunun bir tek gerçel noktası vardır. Bu sonuca göre diyebiliriz ki: *Bir sanal doğrudan, genellikle, bir gerçel düzlem geçmez*. (Şemin, 1983)

3.10. Gerçel Uzayda Eşlenik Sanal Doğrular

Bir sanal doğruya tanımlayan iki düzlemin eşlenikleri ile belirlenen doğru, birincinin eşleniğidir, yani $\Delta_1 + i\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 + i\Delta_4 = 0$ $\Delta_1 - i\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 - i\Delta_4 = 0$ doğruları eşleniktir. Bu tanıma göre: *Uzayın bir sanal doğrusu üzerinde bir gerçel nokta varsa, bu doğrunun eşleniği de aynı noktadan geçer*. (Şemin, 1983)

3.11. Gerçel Uzayda Sanal Noktadan Geçen Gerçel Doğru

$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$ gerçel düzlemi $a_p + ic_p$, ($p = 1, 2, 3$) sanal noktasından geçiyorsa $A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + A_4 + i(A_1c_1 + A_2c_2 + A_3c_3) = 0$ olur. Öyleyse, kolayca görüleceği gibi, verilen noktanın eşleniği de aynı düzlem üzerindedir. Buna göre

$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0$, $B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 + B_4 = 0$ gerçel düzlemleriyle tanımlanan gerçel doğru, $a_p + ic_p$, ($p = 1, 2, 3$) sanal noktasından geçerse bunun eşleniğinden de geçer. O halde, bir sanal noktadan geçen gerçel doğru, bu nokta ile bunun eşleniğinden geçen doğrudur. (Şemin, 1983)

$N(a_p + ic_p)$ ve $\bar{N}(a_p - ic_p)$ eşlenik noktalarından geçen gerçel doğru, $N\bar{N}$ doğru parçasının $N^*(a_p)$ orta noktasından da geçer. Aradığımız gerçel doğrunun doğrultusu da $a_p + ic_p - (a_p - ic_p) = 2ic_p$, ($p = 1, 2, 3$) ya da c_p , ($p = 1, 2, 3$) vektörlerine paralel olacağından, denklemleri $\frac{x_1 - a_1}{c_1} = \frac{x_2 - a_2}{c_2} = \frac{x_3 - a_3}{c_3}$

Geometrik Yorum: N sanal noktasını, başlangıcı $A(a_p)$ ve bileşenleri de c_p olan v^* vektörü ile gösterirsek, biraz önce sözü edilen gerçel doğru, A dan itibaren alınan v^* vektörünün taşıyıcısıdır. Bu yorum biçimine göre, D gerçel doğrusu üzerinde sonsuz sanal nokta vardır. Bunlardan birinin koordinatları $\beta_p + i\gamma_p$ ($p = 1, 2, 3$) ise $\gamma = kc$, ($k \in \mathbb{R}, k \neq 0$) dır ve $B(\beta_p)$, ($p = 1, 2, 3$) noktası da, D üzerinde bir gerçel noktadır, yani β_p ler

$$\frac{x_1 - a_1}{c_1} = \frac{x_2 - a_2}{c_2} = \frac{x_3 - a_3}{c_3}$$

denklemlerini sağlar. N noktasının eşleniği olan $\bar{N}(a_p - ic_p)$ noktası da aynı A başlangıçlı ve v^* in karşıtı $-v^*$ vektörü ile gösterilir. (Şemin, 1983)

3.12. Düzlemde İzotrop Doğrular

Gerçel düzlemde herhangi iki kartezyen eksen arasındaki açı θ olsun. Gerçel ya da sanal bir $A(a_1, a_2)$ noktasından geçen bir sanal doğrunun denklemi $x_2 - a_2 = m(x_1 - a_1)$ olduğuna göre, eğer m açıkkatsayısı

$$m^2 + 2m \cos \theta + 1 = 0 \quad (3.12.1)$$

denklemini gerçekliyorsa, denkleminin köklerinden biri ise,

$$m_1, m_2 = -\cos \theta \pm \sqrt{-\sin^2 \theta} = -e^{i\theta}, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (3.12.2)$$

ise, bu köklerle belirli olan doğrulardan herhangi birine, (a_1, a_2) noktasından geçen *izotrop doğru* denir. D doğrusunun O noktasından geçen paraleli üzerinde $M(1, m)$ noktasını alalım. OMM_1 üçgeninde $\overline{OM}^2 = 1 + m^2 + 2m \cos \theta = 0$ dır ve OM doğrusu O noktasından geçen bir izotrop doğrudur. Başlangıcın izotrop doğruları $(a_1, a_2) = (0, 0)$ alınırsa $x_2 = mx_1$ bulunur.

$$x_2 = -e^{i\theta} x_1, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (3.12.3)$$

dir. Dik eksen sisteminde, A ve O noktalarının izotrop doğruları, sıra ile

$$x_2 - a_2 = \epsilon i(x_1 - a_1) \quad (3.12.4)$$

$$x_2 = \epsilon i x_1, \quad \epsilon = \pm 1$$

denklemleriyle belirlidir. Eğik ve dik eksen sistemlerinde, başlangıcın izotrop doğrularından oluşan demetin denklemleri, sırasıyla

$$x_1^2 + 2x_1x_2 \cos \theta + x_2^2 = 0 \quad (3.12.5)$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0$$

dır. *Herhangi bir izotrop doğru üzerinde bir tek gerçel nokta vardır.* Aynı gerçel noktadan geçen izotrop doğrular birbirlerinin eşleniğidir. (Şemin, 1983)

Teorem

Bir izotrop doğru, herhangi bir doğru ile aynı açıkkatsayısını (eğimini) oluşturur.

İspat. Bu özelliğin eksenlerle bir ilişkisi bulunmadığından, ispatını dik eksenleri kullanarak yapalım. Dik eksen sisteminde, açıkkatsayısı m olan bir doğru ile bir izotrop doğru arasındaki açının trigonometrik tangenti

$$\tan m = \frac{m - \epsilon i}{1 + \epsilon m i} = \frac{(m - \epsilon i)(1 - \epsilon m i)}{1 - (\epsilon m i)^2} = \frac{m - \epsilon i m^2 - \epsilon i - m}{1 + m^2} = \frac{(m^2 + 1)(-\epsilon i)}{1 + m^2} = -\epsilon i \quad \epsilon = \pm 1$$

dir. Bu sonuç da gösterir ki: *dik eksenler başlangıç noktası etrafında döndürüldüğünde, izotrop doğruların denklemi değişmez. Aynı sonuç, herhangi bir eksen sistemi için de doğrudur.*

Teorem

Bir izotrop doğrunun kendi kendisiyle oluşturduğu açının açı katsayısı belirsizdir. (Şemin, 1983)

İspat. $\tan m = \frac{m - \epsilon i}{1 + \epsilon m i}$ Buradan m yerine $i\epsilon$ alınırsa, $\tan m = \frac{\epsilon i - \epsilon i}{1 + \epsilon(\epsilon i)i} = \frac{0}{0}$

Teorem

Bir izotrop doğru kendi kendisine diktir ve bunun karşıtı da doğrudur. (Şemin, 1983)

İspat. $X = (x_1, x_2)$ noktasından geçen izotrop doğrunun denklemi $x_2 = \epsilon i x_1$ dir. Bu doğruya D dersek $D = (x_1, \epsilon i x_1)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $\epsilon = \pm 1$ olur. Buradan $(x_1, \epsilon i x_1)(x_1, \epsilon i x_1) = x_1^2 + (\epsilon x_1)^2 = (x_1)^2 + \epsilon^2 i^2 x_1^2 = x_1^2 - x_1^2 = 0$ elde edilir.

Teorem

Bir izotrop doğrunun sonlu uzaklıkta bulunan herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın karesi sıfıra eşittir. (Şemin, 1983)

İspat. Doğrunun farklı iki noktası $A = (a_1, a_2)$ ve $B = (b_1, b_2)$ olsun. AB doğrunun eğimi

$$m = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \frac{x_2 - a_2}{x_1 - a_1} = \frac{b_2 - x_2}{b_1 - x_1} = \epsilon i$$

dir. Buradan

$$\|AB\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = (b_1 - a_1)^2 + [1 + (\epsilon i)^2] = 0$$

bulunur ve böylece doğrunun izotrop olduğu gösterilir. Karşıtının ispatı iki yöntemle yapılabilir. 1) Tanımı kullanarak; $\|AB\|^2 = 0$ olsun. Yani,

$$(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = 0$$

$$\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1} = \epsilon i, \quad \epsilon = \pm 1$$

olsun. Dolayısıyla A ve B noktasından geçen ve eğimi $m = \epsilon i$ olan doğrunun denklemi $x_2 - a_1 = \epsilon i(x_1 - a_2)$ Bu denklemin eğimi $m = \epsilon i$, $m^2 + 1 = 0$ denklemini sağlar bu nedenle A ve B noktalarından geçen doğru izotrop olur.

2. Yöntem; $\|AB\|^2 = 0$ olsun. AOB üçgeninden

$$\|AB\|^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + 2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cos\theta = 0$$

yazılabilir, buradan

$$\begin{aligned} \frac{(b_1 - a_1)^2}{(b_1 - a_1)^2} + \frac{(b_2 - a_2)^2}{(b_1 - a_1)^2} + \frac{2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cos\theta}{(b_1 - a_1)^2} &= \frac{0}{(b_1 - a_1)^2} \\ 1 + \left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\right)^2 + 2\left(\frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}\right)\cos\theta &= 0 \\ 1 + m^2 + 2m\cos\theta &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem

Sonlu uzaklıkta bulunan farklı iki nokta arasındaki uzaklığın karesi sıfıra eşitse, bu iki noktayı birleştiren doğru izotroptur.(Şemin, 1983)

İspat. Gerçekten, $A(a_p)$, $B(b_p)$ noktaları arasındaki uzaklığın karesi sıfıra eşitse, yani $(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 = 0$ ise, $\frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = \epsilon i$, $\epsilon = \pm 1$ Gerçel düzlemde, herhangi bir eksen sisteminde $A(a_p)$, $B(b_p)$ noktaları arasındaki uzaklığın karesi $\overline{AB^2} = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + 2(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\cos\theta$ dur. Eğer $\frac{(b_2 - a_2)}{(b_1 - a_1)} = m$, $\overline{AB^2} = 0$ olarak alırsak, m için $m^2 + 2m\cos\theta + 1 = 0$ buluruz. Üzerinde pozitif bir dönme yönü seçilmi bulunan gerçel düzlemde bir O noktasında kesişen iki yarım doğrunun oluşturdıkları açı v olsun.(Şemin, 1983)

Teorem

DAGUERRE *teoremi*. $\tan v$; D_1 ve D_2 yarım doğruları ile O nun izotrop doğrularından oluşan dörtlü doğru demetinin çifte oranının bir fonksiyonudur.(Şemin, 1983)

İspat. D_1 ve D_2 doğrularının , x_1Ox_2 düzlemiyle yaptığı açılar sırasıyla, m_1 ve m_2 olsun. izotrop doğruların açı katsayılar ϵi dir. Bu durumda bu doğrular arasındaki

açının tangenti, $\tan v = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ dir. $m_1, m_2, i, -i$; noktalarından oluşan dört noktanın çifte oranı

$$\begin{aligned}
\lambda &= (m_1, m_2, i, -i) \\
&= (m_1 - i)(m_2 + i) : (m_1 + i)(m_2 - i) \\
&= [(m_1 m_2 + 1) + i(m_1 - m_2)] : [(m_1 m_2 + 1) - i(m_1 - m_2)] \\
&= [(m_1 m_2 + 1) - i(m_2 - m_1)] : [(m_1 m_2 + 1) + i(m_2 - m_1)] \\
&= [(m_1 m_2 + 1) - i(\tan v)(m_1 m_2 + 1)] : [(m_1 m_2 + 1) + i(\tan v)(m_1 m_2 + 1)] \\
&= 1 - i \tan v : 1 + i \tan v \\
&= \frac{1 - i \tan v}{1 + i \tan v} \\
&= (\cos v - i \sin v) : (\cos v + i \sin v) \\
&= e^{-2iv}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\lambda = e^{-2iv}$ bulunur. Buradan λ, v nin bir fonksiyonudur. Aynı bir O noktasında kesişen D_p , ($p = 1, 2, 3, 4$) nıların λ çifte oranı, yani $\lambda = (D_1, D_2, D_3, D_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4)$ eğer -1 e eşitse, bir *hamonik demet* söz konusudur. Bu taktirde $2(m_1 m_2 + m_3 m_4) = (m_1 + m_2)(m_3 + m_4)$ tür. (Şemin, 1983)

Teorem

(Doğrultu bakımından) *iki gerçel doğrunun, izotrop doğruların eşlenik hamonikleri olmaları için gerekli ve yeterli koşul, bunların birbirlerine dik olmalarıdır.*(Şemin, 1983)

İspat. Gerçekten, verilen iki gerçel doğru izotroplarla bir harmonik demet oluşturuyorsa, $\lambda = -1$ olacaktır yani $e^{2iv} = -1$ ya da $v = \frac{\pi}{2} + k\pi$

(k: sıfır olabilen $\pm$ tam sayı)

dır. O halde söz konusu gerçel iki doğru birbirne diktir.

II.Yöntem;

$$\lambda = (D_1, D_2, D_3, D_4) = (m_1, m_2, m_3, m_4) = -1$$

ise O noktasından geçen dört doğruya harmonik eşleniktir denir. Bu ifadenin

$$2(m_1m_2 + m_3m_4) = (m_1 + m_2)(m_3 + m_4)$$

eşit olduğu tanımdan kolayca gösterilir. Burada

$$m_3 = i, m_4 = -i$$

alınırsa

$$2(m_1m_2 + 1) = (i - i)(m_3 + m_4)$$

bulunur, buradan

$$m_1m_2 = -1$$

elde edilir. Bu da iki gerçel doğrunun dik olduğunu gösterir.

($\Leftarrow$) Verilen gerçel iki doğru birbirine dik olsunlar. Bu durumda izotrop doğrular paralel olacağından $v = \pi$ dir. Buradan

$$e^{-2iv} = e^{-2i\pi} = -1 = \lambda$$

olur. Dolayısıyla doğrular harmonik eşleniktir. (Şemin, 1983)

3.13. İzotrop Doğruların Sonsuzdaki Noktaları: Saylık Noktalar

Düzlemde, izotrop doğruların denklemi $x_2 = \epsilon ix_1$ şeklindedir. $x_2 = \epsilon ix_1$ denkleminde $X_3 \neq 0$ olmak üzere,

$$\frac{X_2}{X_3} = x_2 \text{ ve } \frac{X_1}{X_3} = x_1$$

yazılırsa, izotrop doğrunun homogen koordinatlardaki ifadesi

$$\begin{aligned} \frac{X_2}{X_3} &= \epsilon i \frac{X_1}{X_3} = 0 \\ X_2 &= \epsilon i X_1, X_3 \neq 0; \quad \epsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

veya

$$X_1 + \epsilon i X_2 = 0, \quad X_3 \neq 0; \quad \epsilon = \pm 1$$

olur. Sonsuzdaki doğrusu $X_3 = 0$ seçilirse, X_3 doğrusuyla $X_1 + \epsilon i X_2 = 0$ doğrusunun arakesit noktaları

$$I = (1, i, 0) \text{ ve } J = (1, -i, 0)$$

olur. Bu I ve J noktalarına doğrunun, Jakobiyan noktaları denir.

Örnek 1 Gerçel düzlemde kartezyen denklemi, $x_1^2 + x_2^2 - 2a_1x_1 - 2a_2x_2 + a_3 = 0$ olan bir çemberin, homogen koordinatlardaki denklemi

$$X_1^2 + X_2^2 - 2a_1X_1X_3 - 2a_2X_2X_3 + a_3X_3^2 = 0$$

dır. Bunun sonsuzdaki noktalarının homogen koordinatları,

$$X_1^2 + X_2^2 = 0, \quad X_3 = 0$$

denklemleriyle belirlenir. Böylece, herhangi bir çember, düzlemin sonsuzdaki doğrusunu, sonsuzdaki noktada keser.

3.14. İzotrop Koni

Dik koordinatlara nispet edilen bir gerçel uzayda, O başlangıcından uzaklığının karesi sıfır olan sanal noktaların geometrik yeri

$$\sum_{p=1}^3 x_p^2 = 0$$

dır. Bu denklem, biçim bakımından bir ikinci derece konisi gösterdiğinden O noktası gerçel uzayda dik koordinat sisteminin başlangıç noktası olduğuna göre, O dan uzaklıklarının kareleri toplamı sıfıra eşit olan noktaların geometrik yeri, izotrop koni denilen O gerçel tepeli

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

ikinci derece konisidir. Dönme hareketi dik doğruları dik doğrulara dönüştürür. Yani diklik

korunur. O halde, dik eksen sisteminin, dikliğinin korunarak, başlangıç etrafında döndürülmesi, iki nokta arasındaki uzaklığı değiştirmeyeceğinden, izotrop koninin denklemi de aynı kalır.

Yukarıdaki sonucu biraz açıklığa kavuşturmak yerinde olur. Şöyle ki: çemberden farklı bir koniğin sonsuzdaki noktaları, koniğin elips ya da hiperbol oluşuna göre sanal veya gerçeldir. Bu tür konikler, merkezleri etrafında döndürüldüklerinde, bunların sonsuzdaki noktaları da, düzlemin sonsuzdaki doğrusu üzerinde yerlerini değiştirirler. Buna karşılık, bir çember kendi merkezi etrafında döndürüldüğünde, kendi kendisiyle çakışık kalacağından, bunun sonsuzdaki noktaları da değişmez. Öyleyse, *tanım için hangi karteziyen koordinat sistemi alınırsa alınsın, düzlemin sayılık noktaları bu koordinat sistemine bağlı değildir.* Başka deyimle, *bir noktadan geçen izotrop doğruları, bu nokta etrafında yapılacak bir döndürme etkilemez, yani bu doğrular kendileriyle çakışır kalırlar.*(Şemin, 1983)

Bu sonuca analitik bir yol izleyerek de varabiliriz.

Bir O noktasından geçen izotrop doğrulardan birinin O dan farklı bir noktası N ve N noktasının belirli bir yönde bir θ açısı kadar döndürüldükten sonraki resmi de N' olsun.

N nin bir izotrop doğru üzerinde bulunması için gerekli ve yeterli koşul $\|ON\|^2 = 0$ dır. Döndürme işlemi, uzaklıkları koruyacağından $\|ON'\|^2 = 0$ dır, yani N' noktası da aynı izotrop doğrular üzerinde kalır sorusuna biraz daha kesinlik getirmek için, xOy dik koordinat sisteminde

$$x + \epsilon iy = 0; \epsilon = \pm 1$$

izotrop doğrularından birisi üzerinde $N = (x, y)$ noktasını alalım ve bunu O etrafında belirli bir yönde bir θ açısı kadar döndürelim $N' = (x', y')$ ise o takdirde,

$$x' = x \cos \theta + y \sin \theta \quad (3.14.1)$$

$$y' = y \cos \theta - x \sin \theta$$

dir. Öte yandan doğrular izotropik olduğundan

$$y = \epsilon i x$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} x' &= (\cos \theta + \epsilon i \sin \theta) x \\ y' &= (\cos \theta - \epsilon i \sin \theta) y \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} x' &= e^{\epsilon i \theta} x; \epsilon = \pm 1 \\ y' &= e^{\epsilon i \theta} y; \epsilon = \pm 1 \end{aligned}$$

biçiminde yazabiliriz. Görülüyor ki, (10) doğrusu üzerinde bulunan N noktası için $\|ON\|^2 = 0$ ise O noktası etrafında belirli bir yönde bir θ açısı kadar döndürüldükten sonra elde edilen yeni N' noktası için de $\|ON'\|^2 = 0$ dır ve $\theta \neq 0$ oldukça $N \neq N'$ dür. Madem ki $N = N'$ dür. O zaman $\|NN'\|^2 = 0$ olmalıdır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \|NN'\|^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 \\ &= (e^{\epsilon i \theta} - 1)^2 [x^2 + y^2] \\ &= (e^{\epsilon i \theta} - 1)^2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır.

3.15. Gerçel Uzayda İzotrop Doğrular

O dan geçen herhangi bir gerçel düzlemde izotrop koniyi kestiğimizde, kesit olarak izotrop koninin iki ana doğrusunu elde ederiz. Bu doğrular üzerindeki sanal noktaların O dan uzaklıklarının karesi sifıra eşit olduğundan, bu iki anadoğru sözü edilen gerçel

düzlemden geçen izotrop doğrularıdır. O halde, O gerçel tepeli izotrop koni, O dan geçen gerçel düzlemlerin O dan geçen izotrop doğruların geometrik yeridir.

Sonsuzdaki gerçel düzlemin umbilikleridir. Herhangi bir koni, tepe noktası $A = (p_1, p_2, p_3)$ olan gerçel yada sanal koninin izotrop koninin gerçel dik koordinat sistemindeki denklemi

$$\sum_{p=1}^3 (x_p - a_p)^2 = 0$$

dir. Görülüyor ki, gerçel yada sanal A tepeli bir izotrop koninin ana doğruları, gerçel uzayın A noktasından geçen izotrop doğrulardır.

3.16. Umbilik (göbek) izotrop doğrutu

Tanım

Gerçel yada sanal bir düzlemin umbilikal ile ortak noktalarına, bir düzlemin saylık noktaları denir.

Tanım

Gerçel uzayda saylık noktalar A tepeli izotrop bir koninin homogen koordinatlarda denklemi,

$$(X_1 - a_1 X_4)^2 + (X_2 - a_2 X_4)^2 + (X_3 - a_3 X_4)^2 = 0$$

dır. Bunun sonsuzdaki düzlemle arakesiti olan gerçel yada sanal tepeli tüm izotrop konilerde ortak olan

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0, X_4 = 0$$

ikinci derece eğrisidir. Bu eğrinin doğrultmanı sanal eğri olan koni ise, bir izotrop konidir.

Tanım

Sonsuzdaki noktası, umbilikler üzerinde bulunan her doğrultuya, gerçel uzayın bir izotrop doğrultusu denir.

Gerçel uzayda bir dik koordinat sistemine göre, bir a_p , ($p = 1, 2, 3$) doğrultusunun bir izotrop koni olması için gerekli ve yeterli şart

$$\sum_{p=1}^3 x_p^2 = 0$$

dır.

Herhangi bir kürenin, bir dik koordinat sistemine göre, homogen koordinatlar cinsinden denklemi,

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 - 2a_1X_1X_4 - 2a_2X_2X_4 - 2a_3X_3X_4 - a_4X_4^2 = 0$$

olduğundan, bunun sonsuzdaki noktalarının homogen koordinatları olduğundan,

$$X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0, X_4 = 0$$

denklemlerini sağlar. Bunlar, tepesi küre merkezi olan izotrop koni ile sonsuzdaki düzlemi tanımlayan denklemlerdir. Öyleyse, umbilikal de bir çemberdir. Buna göre, herhangi bir küre, uzayın sonsuzdaki düzlemini, bir çemberden ibaret olan umbilikal boyunca keser.

Küreden farklı bir kuadriğin, yani bir ikinci derece yüzeyin, sonsuzdaki düzlemle arakesiti

kuadratığın türüne göre sanal yada gerçel bir düzlem eğrisidir. Bu kuadratikler sabit tutulan merkezleri etrafında hareket ettirdiklerinde bunların sonsuzdaki eğrileri de uzayın sonsuzdaki düzlemi üzerinde yerlerini değiştirirler. Bu karşılık, bir küre kendi merkezi, etrafında hareket ettiğinde, kendi kendisiyle çakışık kalacağından bunun sonsuzdaki düzlemi üzerinde bulunan çemberi yani ombilikal sabit kalır. Öyleyse, tanım için hangi koordinat sistemi alınıralsa alınsın, uzayın sayılık noktalarından oluşan

ombilikal bu koordinat sistemine bağlı değildir. Baştanımlanan izotrop koni, bu nokta sabit kalmak üzere hareket ettirildiğinde, bu hareketten etkilenmez, yani izotrop koniğinin anadoğruları kendi kendisiyle çakışık kalırlar.

Bu sonuca başka bir yoldan da varılabilir. O tepeli izotrop koni üzerinde bulunan bir nokta N ve bunun yeni durumu da N' olsun. Hareket , izotrop koninin farklı

iki noktası arasındaki uzaklığın karesini değiştirmeyeceğinden $\|ON'\|^2 = 0$ dır, yani N' noktası da O tepeli koni üzerindedir. Ayrıca, bu hareket sonucunda, izotrop koninin anadoğruları da kendi kendileriyle çakışık kalırlar. Gerçekten, O tepesinden geçen gerçel bir D düzlemi izotrop koniyi iki ana doğrusu boyunca keser. Bunlar D düzleminin O dan geçen izotrop doğrularıdır. Tepesi sabit tutulan koni hareket ettirildiğinde, yeni durumun D ile arakesitleri gene aynı anadoğrudur, aksi taktirde, D üzerinde O dan geçen izotroplarının sayısı dört olur. Böyle olunca da sözü edilen hareket, izotrop koniyi etkilemez ve her anadoğru kendi kendisiyle çakışık kalır. Uzayda bir izotrop doğru kendi kendisine diktir.

3.17. GERÇEL UZAYDA İZOTROP DOĞRU

Ombilikalın teğet düzlemlerinden herhangi birisine izotrop düzlem denir.

Bu tanım gereğince izotrop konilerin teğet düzlemleri izotrop düzlemlerdir.

Teorem

Bir $\sum_{p=1}^3 a_p x_p = 0$ düzlemi izotroptur ancak ve ancak $\sum_{p=1}^3 a_p^2 = 0$ dır. İspat ($\Rightarrow$) :Dik koordinat sisteminde, O tepeli bir koninin teğet düzlemi

$$\sum_{p=1}^3 \bar{x}_p x_p = 0, \quad \sum_{p=1}^3 \bar{x}_p^2 = 0$$

dir. Verilen düzlemin paraleli olan ve O tepesinden geçen

$$\sum_{p=1}^3 a_p x_p = 0$$

düzleminin bu teğet düzlemi oluşturması için gerekli ve yeterli şart

$$\frac{a_p}{\bar{x}_p} = \lambda, \quad \lambda \neq 0, \quad (p = 1, 2, 3)$$

dır. O halde

$$\sum_{p=1}^3 a_p^2 = 0$$

olur.

Örnek: Ox_3 ekseninden geçen izotrop düzlemleri bulalım. Bunlar

$$x_2 - ix_1 = 0, \quad x_2 + ix_1 = 0$$

düzlemleridir.

Bir izotrop doğrunun bir noktasındaki dikmesi bu düzlem üzerindedir ve tepesi bu nokta olan izotrop koniğe, söz konusu izotrop düzlem, bir izotrop doğru olan bu dikme boyunca teğettir, başka bir deyişle, ele alınan dikme izotrop koninin bir ana doğrusudur.

3.18. E.CARTAN SAYLIK ÜÇYÜZLÜSÜ

Bir gerçel ortogonal üçyüzlüsünün birim vektörleri k_p , ($p = 1, 2, 3$) olsun. Kompleks e_p vektörlerinden oluşan CARTAN saylık üçyüzlüsü

$$\begin{cases} e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_1 - ik_3), \\ e_2 = k_2, \\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(k_1 + ik_3) \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. Tanımdan, aşağıdaki eşitlikler kolayca elde edilir.

$$\langle e_1, e_1 \rangle = \langle e_3, e_3 \rangle = \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_3 \rangle = 0$$

$$\langle e_2, e_2 \rangle = \langle e_1, e_3 \rangle = 1.$$

Yada kısaca,

$$\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 0, & j + k \neq 4 \\ 1, & j + k = 4 \end{cases}$$

dür. Görülüyor ki, e_1 ve e_3 iki izotrop vektör e_2 ise gerçel vektördür.

Tanımı kullanarak aşağıdaki vektörel çarpım ile ilgili eşitlikleri de kolayca elde edebiliriz.

$$e_1 \wedge e_2 = ie_1, e_2 \wedge e_3 = ie_3, e_3 \wedge e_1 = ie_2$$

$$\det(e_1, e_2, e_3) = \det(e_2, e_3, e_1) = \det(e_3, e_1, e_2) = i$$

$$e_1 \wedge (e_2 \wedge e_3) = e_2, \quad e_2 \wedge (e_3 \wedge e_1) = 0, \quad e_3 \wedge (e_1 \wedge e_2) = -e_2.$$



Ters Formüller

(63-1) denklemi

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ik_3 \end{bmatrix}$$
$$e = Ak$$
$$k = A^{-1}e$$

şeklinde yazılabilir. Buradan k kolon matrisi,

$$k = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} e$$
$$\begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ ik_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}$$
$$k_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(e_1 + e_3), k_2 = e_2, k_3 = \frac{i}{\sqrt{2}}(e_1 - e_3)$$

olarak bulunur. Böylece ters dönüşüm denklemleri de elde edilmiş olur.

Türev Formülleri

k_p ler, hareketli dik üçyüzlünün $\mathbf{k}_p = \mathbf{k}_p(t)$ biçimindeki birim vektörleri ise ,

$$e_1' = i \left[\sqrt{2}a_1^3 e_1 + (a_1^2 + a_2^3) e_2 \right] / \sqrt{2}$$
$$e_1' = \left[(-a_1^2 + ia_2^3) e_1 - (a_1^2 + ia_2^3) e_3 \right] / \sqrt{2}$$
$$e_3' = \left[(a_1^2 - ia_2^3) e_2 - i\sqrt{2}a_1^3 e_3 \right] / \sqrt{2}$$

elde edilir.

Bir E eğrisine bağlanan sayılık üçyüzlüsü

k_p birim vektörleri bir E eğrisinin **FRENET** üçyüzlüsünün eksenlerinin birim vektörleri ise, yani $k_p = a_p, (p = 1, 2, 3)$ ise $t = s$ için

$$a_1^2 = \kappa, a_1^3 = 0, a_2^3 = \tau$$

olacağından, formülleri

$$\begin{aligned} e_1' &= \frac{\kappa + i\tau}{\sqrt{2}} e_2 \\ e_2' &= \frac{-\kappa + i\tau}{\sqrt{2}} e_1 - \frac{\kappa + i\tau}{\sqrt{2}} e_3 \\ e_3' &= \frac{\kappa - i\tau}{\sqrt{2}} e_2 \end{aligned}$$

verir.

Dış diferensiyeller cinsinden formülleri

Genel halde, herhangi bir t parametresi cinsinden, dış diferensiyeller yardımıyla

$$\begin{cases} e_1' dt = \omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 \\ e_2' dt = \omega_2^1 e_1 + \omega_2^2 e_2 + \omega_2^3 e_3 \\ e_3' dt = \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3 \end{cases}$$

dır. Burada

$$\omega_1^1 = ia_1^3 dt, \quad \omega_1^2 = \frac{a_1^2 + ia_1^3}{\sqrt{2}} dt, \quad \omega_2^1 = \frac{-a_1^2 + ia_2^3}{\sqrt{2}} dt$$

dır.

4. SANAL EĞRİLER

Bu bölümde tez çalışmamızın asıl konusu olan sanal eğrilerle ilgili temel tanımlar ve bazı önemli sonuçlardan bahsedilecektir.

4.1. Sanal Eğri

Bir t gerçel değişkeninin bir (t_1, t_2) aralığında gerçel, tek değerli ve C_n , $n > 1$ sınıfından bir $x(t)$ vektörel fonksiyonunun, başlangıçtan itibaren alınması halinde, ucunun: sınıfı C_n olan bir eğri yayı çizer, ayrıca bir Ox_p Kartezyen koordinat sistemine göre, $x(t)$ vektörel fonksiyonunun, eksenlerin k_p birim vektör cinsinden

$$x(t) = \sum_{p=1}^3 x_p(t)k_p$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi $x_p(t)$ bileşenlerinin, t -kompleks düzleminin bir D bölgesinde tanımlanmış $t = t_1 + it_2$ kompleks analitik fonksiyonları olduklarını düşünelim. Ayrıca D bölgesini her üç fonksiyon için aynı olarak alalım. t kompleks değişken, gerçel t_1, t_2 değişkenlerinin fonksiyonları olduğundan, $x(t)$ vektörel fonksiyonu iki parametrelili, yani ∞^2 sayıda noktadan oluşan bir varyete oluşturur. İşte bu iki parametrelili varyeteye kompleks eğri ya da sanal eğri diyeceğiz.

4.2. Gerçel Düzlemde Minimal Eğriler

Herhangi iki noktası arasındaki uzaklığın karesi sıfıra eşit olan bir eğriye izotrop veya minimal eğri denir. (Şemin, 1983)

Bir eğri yalnız ve sadece yalnız

$$(ds^2) = 0$$

halinde bir izotrop eğri olabilir. Gerçel çözümleri olmayan bu denklemin ancak eşlenik sanal çözümleri olabilir.

4.3. Düzlemde Minimal Eğriler

Dik kordinat eksenlerini öyle bir biçimde yazalım ki gerçel düzlem

$$x_3 = 0 \quad (4.3.1)$$

düzlemi, yani x_1Ox_2 düzlemi olsun. Bu düzlem üzerindeki minimal eğriler

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 = 0$$

$$dx_1^2 + dx_2^2 = 0$$

$$dx_2^2 = -dx_1^2$$

$$\sqrt{dx_2^2} = \sqrt{-dx_1^2}, \quad \sqrt{-1} = i$$

$$dx_2 = i dx_1 \quad 1 = \epsilon$$

$$dx_2 = \epsilon i dx_1$$

$$\int dx_2 = \epsilon i \int dx_1$$

integrasyonu ile bulunan diferansiyel denklemlerini sağlayan

$$x_3 = 0, \quad dx_2 = \epsilon i dx_1, \epsilon = \pm 1$$

ya da integrasyon ile bulunan

$$x_3 = 0, \quad x_2 = \epsilon i x_1 + c, \quad (4.3.2)$$

(c: gerçel veya sanal bir sabit) doğruları, yukarıda bahsettiğimiz gerçel düzlemin izotrop doğrularıdır. (Şemin, 1983)

4.4. Sanal Düzlemde Minimal Eğriler

Dik kordinat sistemini sanal düzlem üzerinde bulunan tek gerçel doğru Ox_3 eksenini olacak biçimde seçebiliriz. Buna göre, sanal düzlemin denklemi

$$x_2 = mx_1, \quad m = m_1 + im_2, \quad m_2 \neq 0 \quad (4.4.1)$$

Tanımlanan düzlemde minimal eğrilerin bulunma şartı, (4.3.1) yardımıyla bulunan

$$x_2 = mx_1 \quad dx_2 = m dx_1 \quad dx_2^2 = m^2 dx_1^2$$

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx_1^2 + m^2 dx_1^2 + dx_3^2 = 0$$

$$(1 + m^2)dx_1^2 + dx_3^2 = 0$$

ya da

$$m = m_1 + im_2$$

$$m^2 = (m_1 + im_2)^2$$

$$m^2 = m_1^2 + 2im_1m_2 - m_2^2$$

$$m^2 = m_1^2 - m_2^2 + 2im_1m_2$$

$$ds^2 = (1 + m_1^2 - m_2^2 + 2im_1m_2)dx_1^2 + dx_3^2 = 0$$

$$ds^2 = (1 + m_1^2 - m_2^2)dx_1^2 + dx_3^2 + 2im_1m_2dx_1^2 = 0$$

bağıntısı

$$m_1 = 0, \quad (1 - m_2^2)dx_1^2 + dx_3^2 = 0$$

veya $m_2 = 1$, $dx_3 = 0$ yani $x_3 = \text{sabit}$ verir.

Buradan (4.4.1) düzleminin O tepeli izotrop koniye teğet olan $x_2 = \epsilon i x_1$ izotrop düzlemlerinden biri olduğu bulunur. (Şemin, 1983)

Gerçek düzlemde minimal eğriler ve sanal düzlemde minimal eğriler hakkında şunları söyleyebiliriz:

Düzlem minimal eğriler, izotrop doğrulardan oluşur. Bir gerçek düzlemin her noktasından iki izotrop doğru geçer. Bir sanal düzlem üzerinde minimal eğrilerin bulunabilmesi için gerekli ve yeterli koşul, bu düzlemin bir izotrop düzlem olmasıdır. Böyle bir düzlemin herhangi bir noktasından bir tek izotrop doğru geçer. Bu doğrular, izotrop

düzlem üzerinde, bunun O tepeli izotrop koniye değdiği izotrop anadoğruya paralel bir doğru takımı meydana getirirler.

4.5. Küresel Minimal Eğriler

Bulunacak sonucun özeliğini bozmayacağı için, herhangi bir küre yerine, bir birim küresini

alabiliriz. Buna göre,

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

birim küresi üzerinde, izotrop koninin anadoğrularına paralel olan izotrop doğrulardan başka minimal eğri bulunmadığını göstermemiz gerekir. Söz konusu izotrop doğruların parametli denklemleri ise

$$\langle (x_1, x_2, x_3) | \langle (x_1, x_2, x_3) = 1$$

$$x_1x_1 + x_2x_2 + x_3x_3 = 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$$

$$x_1^2 + x_3^2 = 1 - x_2^2$$

$$(x_1 - ix_3)(x_1 + ix_3) = (1 - x_2)(1 + x_2)$$

$$\frac{x_1 - ix_3}{1 + x_2} = \frac{1 - x_2}{x_1 + ix_3} = a \quad a = u \quad b = v$$

$$\frac{x_1 - ix_3}{1 + x_2} = a, \quad x_1 - ix_3 = a(1 + x_2)$$

$$\frac{1 - x_2}{x_1 + ix_3} = a, \quad \frac{x_1 + ix_3}{1 - x_2} = \frac{1}{a}, \quad x_1 + ix_3 = \frac{1}{a}(1 - x_2)$$

$$x_1 - ix_3 = a(1 + x_2) \quad x_1 + ix_3 = \bar{a}(1 + x_2) \quad (4.5.1)$$

$$x_1 + ix_3 = \frac{1}{a}(1 - x_2), \quad x_1 - ix_3 = \frac{1}{\bar{a}}(1 - x_2)$$

(4.5.1) denklemlerini kullanarak, birim küresinin parametrelili denklemlerini $\bar{a} = -\frac{1}{b}$ olarak, şu biçimde yazabiliriz.

$$x_1 = \frac{ab-1}{b-a}, \quad x_2 = \frac{b+a}{b-a}, \quad x_3 = i \frac{ab+1}{b-a} \quad (4.5.2)$$

buranın kısmi türevini alırsak

$$dx_1 = \frac{b(b-a) - (ab-1)(-1)}{(b-a)^2} + \frac{a(b-a) - (ab-1)(1)}{(b-a)^2}$$

$$dx_1 = \frac{b^2 - ba + ab - 1}{(b-a)^2} da + \frac{ab - a^2 - ab + 1}{(b-a)^2} db$$

$$dx_1 = \frac{b^2 - 1}{(b-a)^2} da + \frac{1 - a^2}{(b-a)^2} db$$

$$dx_2 = \frac{1(b-a) - (b+a)(-1)}{(b-a)^2} da + \frac{1(b-a) - (b+a)1}{(b-a)^2} db$$

$$dx_2 = \frac{b-a+b+a}{(b-a)^2} da + \frac{b-a-b-a}{(b-a)^2} db$$

$$dx_2 = \frac{2b}{(b-a)^2} da - \frac{2a}{(b-a)^2} db = \frac{2(bda - adb)}{(b-a)^2}$$

$$dx_3 = \frac{b(b-a) - (ab+1)(-1)}{(b-a)^2} da + \frac{a(b-a) - (ab+1)(1)}{(b-a)^2} db$$

$$dx_3 = \frac{b^2 - ba + ab + 1}{(b-a)^2} da + \frac{ab - a^2 - ab - 1}{(b-a)^2} db$$

$$dx_3 = i \left[\frac{b^2 + 1}{(b-a)^2} da - \frac{(a^2 + 1)}{(b-a)^2} db \right]$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (dx_1)^2 = \left(\frac{b^2-1}{(b-a)^2} da + \frac{1-a^2}{(b-a)^2} db \right)^2 = \frac{b^4-2b+1}{(b-a)^4} da^2 + \frac{2b^2-2a^2b^2-2+2a^2}{(b-a)^4} dadb + \frac{1-2a^2+a^4}{(b-a)^2} db^2 \\ (dx_2)^2 = \left(\frac{2b}{(b-a)^2} da - \frac{2a}{(b-a)^2} db \right)^2 = \frac{4b^2}{(b-a)^4} da^2 - \frac{8ab}{(b-a)^4} dadb + \frac{4a^2}{(b-a)^4} db^2 \\ (dx_3)^2 = i^2 \left[\frac{b^2+1}{(b-a)^2} da - \frac{a^2+1}{(b-a)^2} db \right]^2 = -1 \left(\frac{b^4+2b^2+1}{(b-a)^4} da^2 - \frac{2b^2a^2+2b^2+2a^2+2}{(b-a)^4} dadb + \frac{a^4+2a^2+1}{(b-a)^4} db^2 \right). \end{array} \right. \quad (4.5.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \frac{b^4-2b^2+1}{(b-a)^4} da^2 + \frac{2b^2-2a^2b^2-2+2a^2}{(b-a)^4} dadb + \frac{1-2a^2+a^4}{(b-a)^4} db^2 + \frac{4b^2}{(b-a)^4} da^2 \\ - \frac{8ab}{(b-a)^4} dadb + \frac{4a^2}{(b-a)^4} db^2 - \frac{b^4+2b^2+1}{(b-a)^4} da^2 + \frac{2b^2a^2+2b^2+2a^2+2}{(b-a)^4} dadb - \frac{a^4+2a^2+1}{(b-a)^4} db^2. \end{array} \right. \quad (4.5.4)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{b^4 - 2b^2 + 1 + 4b^2 - b^4 - 2b^2 - 1}{(b-a)^4} \right) da^2 + \left(\frac{2b^2 - 2a^2b^2 - 2 + 2a^2 - 8ab + 2b^2a^2 + 2b^2 + 2a^2 + 2}{(b-a)^4} \right) dadb \\ &\quad + \left(\frac{1 - 2a^2 + a^4 + 4a^2 - a^4 - 2a^2 - 1}{(b-a)^4} \right) db^2 \\ &= 0da^2 + \frac{4b^2 + 4a^2 - 8ab}{(b-a)^4} dadb + 0db^2 \\ &\quad + \frac{4(b^2 + a^2 - 2ab)}{(b-a)^4} dadb = 0 \end{aligned}$$

bulunacağından, birim küresinin minimal eğrileri sadece

$$da = 0 \quad db = 0$$

yani

$$a = \text{sabit} \quad b = \text{sabit}$$

çizgileri, başka deyimle, birim küresinin izotrop doğrularıdır. (Şemin, 1983)

4.6. Uzayda Minimal Eğriler

t bir kompleks değişkeni göstermek üzere, uzayda bir E minimal eğrisinin vektörel denklemi

$$x = x(t)$$

olsun. Önce şu özeliği ispat edelim:

Bir E minimal eğrisinin $N(t)$ düzgün noktalarındaki tüm teğetler izotrop doğrulardır.

Gerçekten, minimal eğrilerin tanımından

$$\begin{aligned} & ds^2 = dx^2 = 0, \\ & \text{veya düzgün noktada} \\ & \frac{dx}{dt} = x'(t) \neq 0 \\ & \text{yardımıyla} \\ & [x'(t)]^2 = 0 \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

dır. Öyleyse, uzayda bir minimal eğri şöyle tanımlanabilir: *Uzayda tüm düzgün noktalarındaki teğetleri izotrop doğrulardan oluşan eğrilere: minimal eğriler denilir.* (4.6.1) den t ye göre türev almakla

$$x'(t).x''(t) = 0 \tag{4.6.2}$$

bulunur.

E minimal eğrisinin $N(t)$ düzgün noktasındaki oskülatör düzlem; hem $x'(t)$, hem de $x''(t)$ vektörlerine paralel olduğundan ve (4.6.2) nedeniyle $x''(t)$ vektörü genellikle $x''(t) \neq 0$ koşulunu sağladığından $x'(t)$ ye diktir, dolayısıyla da $N(t)$ deki asal normale paraleldir.

Öte yandan $N(t)$ düzgün noktasındaki binormali belirleyen $x'(t) \wedge x''(t)$ nin skaler karesi

$$[x'(t) \wedge x''(t)]^2 = [x'(t)]^2[x''(t)]^2 - [x'(t) \cdot x''(t)]^2$$

biçiminde yazılabileceğinden, (4.6.1) ve (4.6.2) formülleri dolayısıyla

$$[x'(t) \wedge x''(t)]^2 = 0 \quad (4.6.3)$$

dır. Görülüyor ki binormal bir izotrop doğrudur ve kendi kendisine diktir, öyleyse oskülatör düzlem üzerindedir. Başka deyimle, kendi normalinden geçen oskülatör düzlem bir izotrop düzlemdir. (Şemin, 1983)

Teorem

Bir eğrinin oskülatör düzlemleri izotrop düzlemlerden oluşuyorsa, bu eğri ya bir izotrop eğridir ya da bir izotrop düzlemin bir eğrisidir. (Şemin, 1983)

İspat. Bir eğrinin oskülatör düzlemleri izotrop düzlemlerse, bunların $x' \wedge x''$ normalleri söz konusu düzlemlere paraleldir. Yani eğrinin her noktasında

$$(x' \wedge x'')^2 = 0 \quad (4.6.4)$$

dır.

Bunun türevi

$$(x' \wedge x'') \cdot (x' \wedge x''') = 0 \quad (4.6.5)$$

verir. Öte yandan

$$(x' \wedge x'') \wedge (x' \wedge x''') = (x', x'', x''')x' \quad (4.6.6)$$

ve bunun iki yanının vektörel olarak $x' \wedge x''$ ile çarpımı sonucunda, (4.6.5) ve (4.6.4) nedeniyle sol taraf sıfır - vektöre eşit olur. Öyleyse

$$0 = (x', x'', x''')(x' \wedge (x' \wedge x'')) = (x', x'', x''')[(x' \cdot x'')x' - (x'^2)x'']$$

dür. x' ve x'' vektörleri, söz konusu izotrop düzlemlerin doğrultusunu verdiklerinden birbirine paralel değildir. O halde :

- 1) Ya eğri boyunca $(x', x'', x''') = 0$ dır ve dolayısıyla bir düzlem eğri söz konusudur.
- 2) Ya da her noktada $x'.x'' = 0$ ve $x'^2 = 0$ dır, yani uzayda bir minimal eğri elde edilir. Böylece teorem E. STUDY teoremini ispat etmii oluruz.(Şemin, 1983)

4.7. Uzayda Minimal Eğrilerin Belirlenmesi

Minimal eğrileri, dik koordinat sisteminde

$$ds^2 = dx^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0 \quad (4.7.1)$$

biçiminde tanımladık. şimdi (4.7.1) diferansiyel denkleminin çözümünü ele alacağız.

Özel Çözüm

Bu diferansiyel denklemin bir özel çözümünü $x = x_0 + tv$, ($v^2 = 0$) izotrop doğruları oluşturur. Gerçekten $dx^2 = ds^2 = (vdt)^2 = 0$ dır.

Eğer $x_0 = ON_0$ dersek, N_0 dan geçen yukarıki izotrop doğru, v nin değişmesi halinde, N_0 tepeli $(x - x_0)^2 = 0$ izotrop konisini doğurur. Bunun bir anadoğrusu boyunca aynı olan teğet düzlemi, bundan önce de gördüğümüz gibi, bir izotrop düzlemdir. Bu sonucu, yukarıki denklem yardımıyla da elde edebiliriz. Gerçekten, izotrop koninin teğet düzleminin, yani

$$v.(x - x_0) = 0$$

ın başlangıçtan geçen paraleli olan

$$v.x = 0$$

düzlemi, v ye paraleldir, nitekim bu denklemde x yerine v konulduğunda

$$v^2 = 0$$

olur.(Şemin, 1983)

Genel Çözüm

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = 0$$

diferansiyel denklemini

$$dx_2^2 + dx_3^2 = -dx_1^2$$

$$(dx_2 - idx_3)(dx_2 + idx_3) = -dx_1^2$$

$$\frac{(dx_2 - idx_3)(dx_2 + idx_3)}{dx_1(dx_2 - idx_3)} = \frac{-dx_1^2}{dx_1(dx_2 - idx_3)}$$

$$\frac{dx_2 + idx_3}{dx_1} = -\frac{dx_1}{dx_2 - idx_3} = t \quad (4.7.2)$$

(t : kompleks değişken) biçiminde yazar ve

$$x_2' = \frac{dx_2}{dx_1}, \quad x_3' = \frac{dx_3}{dx_1}$$

dersek ,

$$x_2' + ix_3' = t \quad \frac{dx_2}{dx_1} + \frac{idx_3}{dx_1} = \frac{dx_2 + idx_3}{dx_1}$$

$$x_2' - ix_3' = \frac{1}{t} \quad \frac{dx_2}{dx_1} - \frac{idx_3}{dx_1} = \frac{dx_2 - idx_3}{dx_1} = -\frac{1}{t}$$

olur ve buradan

$$2x_2' = t - \frac{1}{t} = \frac{t^2 - 1}{t} \quad 2ix_3' = \frac{t^2 + 1}{t}$$

olur ve buradan

$$x_2' = \frac{1}{2} \frac{t^2 - 1}{t}, \quad x_3' = \frac{1}{2i} \frac{t^2 + 1}{t} \quad (4.7.3)$$

veya

$$\frac{dx_1}{2t} = \frac{dx_2}{t^2 - 1} = \frac{id x_3}{(t^2 + 1)} = f(t) dt \quad (4.7.4)$$

bulunur. Öyleyse

$$x_1 = 2 \int t f(t) dt, \quad x_2 = \int (t^2 - 1) f(t) dt, \quad x_3 = -i \int (t^2 + 1) f(t) dt \quad (4.7.5)$$

dir.

x_1 için: $f(t) = \phi'''(t)$, $t = u$, $\phi'''(t)dt = dv$ dersek

$$x_1 = 2(uv - \int v du) = 2(t\phi'' - \phi')$$

olur.

Aynı biçimde x_2 ve x_3 de hesaplanacak olursa, sonuçta

$$\begin{aligned} x_1 &= 2[t\phi''(t) - \phi'(t)], \\ x_2 &= (t^2 - 1)\phi''(t) - 2[t\phi'(t) - \phi(t)] \\ \frac{1}{i}x_3 &= (t^2 + 1)\phi''(t) - 2[t\phi'(t) - \phi(t)] \end{aligned} \quad (4.7.6)$$

bulunur.

Burada $\phi(t)$, kompleks t değişkeninin keyfi bir analitik fonksiyonudur. (Şemin, 1983)

4.8. Minimal Eğrilerde Bazı Diferansiyel İnvaryantlar ve Psödo-yay

Minimal E eğrisinin sağladığı (4.6.1), (4.6.2) ve (4.6.3) bağıntıları yeniden ele alalım:

$$[x'(t)]^2 = 0$$

$$x'(t).x''(t) = 0$$

$$[x' \wedge x'']^2 = 0$$

Üstte verilen ikinci denklemde, E nin izotrop oskulator düzlemlerini belirleyen $x'(t)$ ve $x''(t)$ vektörlerinin birbirlerine dik olduklarını gösterir. Üçüncü bağıntı dolayısıyla

da, E nin izotrop oskülatör düzlemine hem dik hem de paralel olan $x' \wedge x''$ binormal vektörü ise bir izotrop vektördür, bu sebeple de, sözü edilen izotrop oskülatör düzlemin $x'(t)$ ile olan bir tek izotrop doğrusuna paraleldir, yani

$$x'(t) \wedge x''(t) = \lambda x'(t), \quad \lambda \neq 0 \quad (4.8.1)$$

Bunun her iki yanını vektörel olarak $x''(t)$ le çarpar ve (4.6.2) ile (4.8.1) i kullanırsak buradan $\wedge^2$ bulunur.

$$[x''(t)]^2 x'(t) = -\lambda x'(t) \wedge x''(t) = -\lambda^2 x'(t)$$

veya

$$\sqrt{\lambda^2} = \sqrt{-[x''(t)]^2}$$

$$\lambda^2 = -[x''(t)]^2$$

$$x' = \frac{x(t)' \wedge x''}{\lambda}$$

$$x'(t) = \frac{[x'(t) \wedge x''(t)]}{\sqrt{-[x''(t)]^2}} \quad (4.8.2)$$

olur. bu da, t yi yazmadan

$$x(t)' = \frac{dx}{dt}, \quad x(t)' . dt = dx$$

$$dx = \frac{x' \wedge x''}{\sqrt{-x''^2}} dt \quad (4.8.3)$$

biçimine dönüştürülebilir. (Şemin, 1983)

Özellik

(4.8.3) bağıntısı, seçilen t kompleks değişkenine bağlı değildir, başka değişle, bir diferansiyel invarianttır (değişmezdir).

Gerçekten, t -kompleks düzlemin bir D bölgesinde tanımlanmış olan t kompleks değişkeni, başka bir t^* kompleks değişkeninin

$$t = f(t^*), \quad \frac{df}{dt^*} = f' \neq 0 \quad (4.8.4)$$

biçiminde bir analitik fonksiyonu olsun. Buna göre, E minimal eğrisinin x yer vektörünün ilk iki mertebeden t ve t^* cinsinden türevleri arasında

$$x' = x' f' \quad (4.8.5)$$

$$\frac{dx}{dt^*} = \frac{dx}{dt} f'$$

$$x'' = x'' f'^2 + x' f'' \quad (4.8.6)$$

bağıntıları bulunacağından, (4.6.1) ve (4.6.2) formülleri nedeniyle, yeni t^* kompleks değişkenine göre de

$$x'^2 = 0, \quad (4.8.7)$$

$$x' \cdot x'' = 0, \quad (4.8.8)$$

$$(x' \wedge x'')^2 = 0, \quad (4.8.9)$$

$$(x'')^2 = (x'')^2 f'^4 \quad (4.8.10)$$

bulunur. (Şemin, 1983)

Görülüyor ki: ilk t kompleks değişkeni yerine, yeni bir t^* kompleks değişkeninin alınması (4.6.1), (4.6.2) ve (4.6.3) bağıntılarını değiştirmemektedir. Ayrıca, (4.8.5), (4.8.6) ve (4.8.10) dan

$$\frac{x' \wedge x''}{\sqrt{-x'^2}} = \frac{x' \wedge x''}{\sqrt{-x''^2}} f' = x' f' = x' \quad (4.8.11)$$

veya

$$dx = \frac{x' \wedge x''}{\sqrt{-x''^2}} dt = \frac{x' \wedge x''}{\sqrt{-x'^2}} dt^* \quad (4.8.12)$$

sonucu elde edilir. (Şemin, 1983)

Öte yandan, (4.8.10) u

$$(-x'^2)^{\frac{1}{4}} dt^* = (-x''^2)^{\frac{1}{4}} dt \quad (4.8.13)$$

biçiminde yazarsak, bunun bir diferansiyel invaryantı olduğu görülür.

t^* kompleks değişkenini

$$x'^2 = -1 \quad (4.8.14)$$

olacak biçimde norme edersek (birimleştirirsek) (4.8.13) ve (4.8.14) den

$$dt^* = (-x''^2)^{\frac{1}{4}} dt \quad (4.8.15)$$

veya $t^* = s$ (s doğal parametre) ile göstererek

$$s = t^* = \int_{t_0}^t (-x''^2)^{\frac{1}{4}} dt \quad (4.8.16)$$

bulunur.

Böylece tanımlanan $t^* = s$, E minimal eğrisinin psödo-yayı veya doğal parametresidir. (Şemin, 1983)

Bundan böyle, minimal eğrileri incelerken, kompleks değişken olarak psödo-yayı kullanacağız.

4.9. Minimal Eğrilerde Yer Vektörünün Çeşitli Mertebelerden Türevleri Arasındaki İlişkiler

(4.8.11) bağıntısının (4.8.14) yardımıyla

$$x' = x' \wedge x'' \quad (4.9.1)$$

biçimine girer.

(4.8.8) ve (4.8.14) formüllerinden

$$x' \cdot x''' = 1 \quad (4.9.2)$$

elde edilmiştir.

(4.8.14) formülünden

$$x'' \cdot x''' = 0 \quad (4.9.3)$$

elde edilmiştir.

(4.9.2) ve (4.9.3) formüllerinden

$$x' \cdot x'''' = 0 \quad (4.9.4)$$

elde edilmiştir.

(4.9.1) ve (4.9.2) formüllerinden

$$\det(x', x'', x''') = 1 \quad (4.9.5)$$

elde edilmiştir.

(4.9.5) formülünden

$$\det(x', x'', x''') = 0 \quad (4.9.6)$$

elde edilmiştir.

(4.9.3) formülünden

$$x'' \cdot x'''' + x''' x''' = 0 \quad (4.9.7)$$

elde edilmiştir.

$$x'' \cdot x'''' = -x''' x''$$

$$x''' \cdot x'''' - \frac{1}{2}(x''' x''')' = 0 \quad (4.9.8)$$

elde edilmiştir.

(4.9.1) formülünden

$$x'' = x' \wedge x''' \quad (4.9.9)$$

elde edilmiştir.

bu sonucunun vektörel olarak x''' ile çarpımından

$$x'' \wedge x''' = x''' - x''' x''' x' \quad (4.9.10)$$

$$x'' \wedge x''' = x''' - x' \wedge x'''' \quad (4.9.11)$$

(4.9.11) formülünden

$$x''' x''' x' = x' \wedge x'''' \quad (4.9.12)$$

elde edilmiştir.

x' , x'' vektörleri, E minimal eğrisinin izotrop oskülatör düzlemini belirttiklerine göre, (4.9.6) bağıntısı gösterir ki x''' vektörü de bu düzleme paraleldir. O halde bu vektör

$$x'''' = \alpha x' + \beta x'' \quad (4.9.13)$$

$$\langle x'', x'''' \rangle = \alpha \langle x', x' \rangle + \beta \langle x'', x'' \rangle$$

$$\langle x'', x'''' \rangle = -\beta$$

$$-x''x'' = -\beta$$

$$\beta = x'''x'''$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitliğin her iki yanını skaler olarak önce x'' ile çarptığımızda (4.8.7), (4.8.14), (4.9.7) formülleri nedeniyle

$$\beta = x'''x''' \quad (4.9.14)$$

olur. Aynı bağıntının her iki yanını bir kez de x''' ile skaler olarak çarptığımızda (4.9.2), (4.9.3), (4.9.4) formülleri dolayısıyla

$$x'''x'''' = (\alpha x')x''' + (\beta x'')x'''$$

$$\frac{1}{2}(x'''x''')' = \alpha$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\beta' \quad (4.9.15)$$

bulunur. Öyleyse (4.9.13) eşitliği

$$x'''' = \frac{1}{2}\beta'x' + \beta x'', \quad \beta = x'''x''' \quad (4.9.16)$$

biçimindedir.

(4.9.16) in her iki yanının skaler karesi de; (4.8.7), (4.8.14), (4.8.8) formüllerinden ötürü

$$(x''')^2 = \left(\frac{1}{2}\beta x' + \beta x''\right)^2$$

$$\frac{1}{4}\beta^2 x'^2 + \beta^2 x'x'' + \beta^2 x''^2$$

$$x''''^2 = -\beta^2 = -(x''^2)^2 \quad (4.9.17)$$

verir.

4.10. Minimal Eğrilerin İncelenmesinde Kullanılan E CARTAN Saylik Üçyüzlüsü

E minimal (veya izotrop) eğrisinin her $N(s)$ noktasına

$$\begin{cases} e_1 = x' \\ e_2 = ix'' \\ e_3 = -\frac{\beta}{2}x' + x''', \quad \beta = x'''^2 \end{cases} \quad (4.10.1)$$

bağıntılarıyla tanımlanan e_q , ($q = 1, \dots, 3$) vektörlerinin oluşturdukları T_c üçyüzlüsünü başlayalım. Kolaylıkla görülür ki e_q vektörleri, bundan önce de sözünü ettiğimiz

$$e_j \cdot e_k = \begin{cases} 1, & j + k = 4 \\ 0, & j + k \neq 4 \end{cases} \quad (4.10.2)$$

$$e_j \wedge e_k = ie_{j+k-2},$$

$$(e_1, e_2, e_3) = i$$

bağıntılarını sağlarlar. Bunlar, E en az 3. sınıftan ise, geçerlidir. (Şemin, 1983)

4.11. Türev Formülleri

(4.9.16) formüllerinden, s psödo-yayına göre hesaplanan, aşağıdaki türev formülleri elde edilir :

$$\begin{cases} e_1' = -ie_2 \\ e_2' = i(ke_1 + e_3) \\ e_3' = ike_2, \quad k = \frac{1}{2}\beta. \end{cases} \quad (4.11.1)$$

Bu formüllerin geçerli olabilmeleri için, E minimal eğrisi en az 4. sınıftan olmalıdır. k , E minimal (izotrop) eğrisinin $N(s)$ noktasındaki psödo-eğriliğidir.

Psödo-DARBOUX vektörü

$$e_q' = d_c \wedge e_q, \quad (q = 1, 2, 3)$$

eşitliklerini sağlayan d_c vektörü, E minimal (izotrop) eğrisinin $N(s)$ noktasındaki psödo-DARBOUX vektörüdür.

Eğer

$$d_c = \sum_{q=1}^3 \alpha_q e_q$$

denilirse, kolay bir hesap

$$d_c = \sum_{q=1}^3 \alpha_q e_q = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$$

$$e_1' = d_c \wedge e_1$$

$$e_2' = d_c \wedge e_2$$

$$e_3' = d_c \wedge e_3$$

$$(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3) \wedge e_1$$

$$e_1' = \alpha_1(e_1 \wedge e_1) + \alpha_2(e_2 \wedge e_1) + \alpha_3(e_3 \wedge e_1)$$

$$e_1' = \alpha_1(0) + \alpha_2(ie_1) + \alpha_3(ie_2)$$

$$e_1' = \alpha_2 ie_1 + \alpha_3 ie_2$$

$$e_1 \cdot = i(\alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2)$$

$$-ie_2 = i(\alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2)$$

$$-e_2 = \alpha_2 e_1 + \alpha_3 e_2$$

$$\alpha_1 = k, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = -1$$

vereceğinden,

$$d_c = ke_1 - e_3 \quad (4.11.2)$$

olur.

(4.11.2) nm (4.11.1) ile karşılaştırılması sonucunda

$$d_c \cdot e_2 \cdot = 0 \quad (4.11.3)$$

olduğu görülür, yani bunlar doğrulayan düzlemin birbirine dik iki vektörüdür.

(4.11.1) türev formülleri gösterir ki

$$d_c \cdot = k \cdot e_1 \quad (4.11.4)$$

Psödo-LANCRET eğriliği

Tanım gereğince bu, (4.11.2) nedeniyledir.

$$|d_c| = \sqrt{(ke_1 - e_3)^2} = i\sqrt{2k} \quad (4.11.5)$$

ya eşittir. (Şemin, 1983)

İspat.

$$\sqrt{k^2 e_1^2 - 2ke_1 e_3 + e_3^2}$$

$$= \sqrt{-2k}$$

$$= \sqrt{i^2 2k}$$

$$|d_c| = i\sqrt{2k}$$

4.12. Psödo-eğrilik Merkezi Ve Bunun Geometrik Yeri

E minimal (izotrop) eğrisinin $N(s)$ noktasındaki T_c üçyüzlüsünün ikinci ekseninde

$$\mathbf{NM} = \frac{i}{k}e_2 \quad (4.12.1)$$

vektörel eşitliği ile tanımlanan M noktası, E minimal eğrisinin $N(s)$ noktasındaki psödo-eğrilik merkezidir. Varlığı için E eğrisi $\mathbf{N}$ de en az, 4. sınıftandır.

Bu noktanın yer vektörüne y dersek,

$$y(s) = x(s) + \frac{i}{k}e_2 \quad (4.12.2)$$

dir.

(4.11.1) türev formüllerine göre

$$y' = -\frac{1}{k} \left(i \frac{k}{k} e_2 + e_3 \right) \quad (4.12.3)$$

bulunur. (Şemin, 1983)

Teorem

En az 5. sınıftan bir E minimal (izotrop) eğrisinin psödo-eğrilik merkezlerinin geometrik yerinin M eğrilik merkezindeki teğeti (e_2, e_3) düzlemi üzeridedir. Bu teğet e_2 ile çakışamaz. $k' = 0$ olan noktalarda, teğet e_3 e paraleldir. Özel olarak, psödo-eğriliği

sabit olan minimal eğrilerde bu böyledir ve (M) geometrik yeri minimaldir.(Şemin, 1983)

4.13. Psödo-eğrilik Eksenini Ve Bunun Teğeti Kaldığı Eğri

E minimal (izotrop) eğrisinin $N(s)$ noktasındaki M psödo-eğrilik merkezinden T_c üçyüzlüsünün e_3 eksenine çizilen paralele, E minimal eğrisinin N noktasındaki psödo-eğrilik eksenini diyeceğiz.

Bu eksen e_3 izotrop eksenine paralel olduğundan, (e_2, e_3) izotrop düzleminin bir izotrop doğrusudur. O halde, bunların teğeti kaldıkları eğri de izotrop olacaktır.

Psödo-eğrilik ekseninin, bir $\bar{M}$ noktasında teğeti kaldıkları $(\bar{M})$ eğrisinin yer vektörü $z(s)$ ise

$$z(s) = x(s) + \frac{i}{k}e_2 + \lambda e_3 \quad (4.13.1)$$

(4.11.1) türev formüllerine göre

$$z' = i \left[\left(\frac{i}{k} \right)' - \lambda k \right] e_2 + \left(\lambda' - \frac{1}{k} \right) e_3$$

olduğundan, $z'(s)$ vektörünün e_3 e paralel olması için gerekli ve yeterli koşul,

$$\lambda = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{k} \right)' = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} \right)' \quad (4.13.2)$$

dır. Bu takdirde

$$z' = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} \right)'' - \frac{1}{k} \right] e_3 \quad (4.13.3)$$

olur.(Şemin, 1983)

4.14. Minimal Eğrilerde Teğetlerin Dik Yörüngeleri

E minimal (izotrop) eğrisinin $N(s)$ noktasındaki teğeti üzerinde

$$x_t = x(s) + \lambda(s)e_1 \quad (4.14.1)$$

vektörel denklemleriyle tanımlanan $N_t(S)$ noktasının (N_t) geometrik yerinin teğeti, (4.11.1) nedeniyle

$$x_t' = (1 + \lambda')e_1 - i\lambda e_2 \quad (4.14.2)$$

vektörü ile belirlidir.

s psödo-yayının $\lambda = \lambda(s)$ fonksiyonu nasıl seçilirse seçilsin

$$x_t' \cdot e_1 = 0$$

olacağından (N_t) geometrik yeri E minimal eğrisinin teğetlerinin dik olarak keser. Bu sonsuz eğri arasında, her N_t noktasındaki teğeti e_2 ye paralel olanlara, yani

$$1 + \lambda' = 0 \quad (4.14.3)$$

veya

$$\lambda = -s + s_0, \quad (s_0 : sabit) \quad (4.14.4)$$

koşulunu sağlayanlara: E minimal eğrisinin teğetlerinin dik yörüngeleri diyeceğiz. Dik yörüngeler için, (4.14.1) ve (4.14.2) bağıntıları

$$x_t = x(s) + (s_0 - s)e_1 \quad (4.14.5)$$

$$x_t' = i(s - s_0)e_2 \quad (4.14.6)$$

biçimlerine girerler. (Şemin, 1983)

Teorem

En az 4. sınıftan bir E minimal(izotrop) eğrisinin teğetlerinin dik yörüngelerinin $\rho_t \equiv 0$ ı sağlaması için gerekli ve yeterli koşul, E nin psödo-eğriliğinin eğri boyunca sıfıra eşit olmasıdır. (Şemin, 1983)

Teorem

En az 5. sınıftan bir E minimal (izotrop) eğrisinin teğetlerinin dik yörüngelerinin düzlem eğrilerden oluşması için gerekli ve yeterli koşul, E nin psödo-eğrilığının sabit olmasıdır.(Şemin, 1983)

4.15. Bir E Minimal Eğrisini Kesen Ve (e_2, e_3) Düzleminde Bulunan Doğrulardan Bir Eğriye Teğet Kalabilenler

E minimal eğrisinin her $N(s)$ noktasına, bu noktadan geçen ve (e_2, e_3) düzleminde kalan bir D^* doğrusunu başlayalım ve bunun bir N^* noktasında bir (N^*) eğrisine teğet kaldığını düşünelim. (N^*) eğrisinin yer vektörü $x^*(s)$ ise

$$x^*(s) = x(s) + \lambda(s)[m(s)e_2 + e_3] \quad (4.15.1)$$

yazabiliriz.

x^* vektörünün $me_2 + e_3$ vektörüne paralel olması gerekeceğinden, (4.11.1) türev formülleri

$$1 + i \lambda k m = 0 \quad veya \quad \lambda m = \frac{i}{k} \quad (4.15.2)$$

$$m - i(m^2 + k) = 0 \quad (4.15.3)$$

denklemlerini verir.(Şemin, 1983)

Teorem

En az 4. sınıftan bir E minimal eğrisinin (e_2, e_3) düzlemi üzerinde bulunan ve E yi kesen sonsuz doğru ayrı ayrı sonsuz (N^*) eğrisine teğet kalırlar. Aynı bir N noktası ile belirli olan N^* değme noktaları, N noktasındaki psödo-eğrilik eksenini üzerinde bulunurlar. Bunların belirlenmeleri, bir RICATTI denkleminin çözümüne bağlıdır.(Şemin, 1983)

4.16. Psödo-eğriliği Sabit Olan Minimal Eğrilerin Psödo-eğrilik Merkezinin Geometrik Yeri

E minimal eğri sabit psödo-eğrilikli ise, bunun M psödo-eğrilik merkezinin y yer vektörünün s psödo-yayına göre türevi, (4.12.3) dolayısıyla

$$y' = -\frac{1}{k}e_3 \quad (4.16.1)$$

tür.

(4.16.1) nin psödo-yayına türevi de, (4.11.1) nedeniyle

$$y'' = ie_2 \quad (4.16.2)$$

olur.

Bir izotrop eğri olan (M) nin s^* yayını o biçimde norme edelim ki

$$y''^2 = \left(\frac{d^2y}{ds^{*2}} \right)^2 \frac{ds^{*4}}{ds^{*4}} = -1 \quad (4.16.3)$$

bağıntısında

$$\left(\frac{d^2y}{ds^{*2}} \right)^2 = -1 \quad (4.16.4)$$

olsun. Böyle olunca (4.16.3) den

$$ds^{*2} = \epsilon ds^2, \quad \epsilon = \pm 1 \quad (4.16.5)$$

eşitliğine varılır. Eğer

$$ds^* = -ds \quad (4.16.6)$$

olarak alırsak ve (M) nin M noktasındaki T_c^* sayılık üçyüzlüsünün eksenlerini belirleyen vektörler e_q , $(q = 1, 2, 3)$ ise, (4.16.1) den

$$y' = -\frac{dy}{ds^*} = -e_1^* \quad (4.16.7)$$

ve dolayısıyla

$$e_1^* = \frac{1}{k}e_3 \quad (4.16.8)$$

bulunur.

Bunun her iki yanının s psödo-yayına göre türevi, (4.11.1) yardımıyla

$$ie_2^* = -ie_2 \quad (4.16.9)$$

$$e_2^* = -e_2 \quad (4.16.10)$$

verir.

Bunun sonucunun da s psödo-yayına göre türevinden, (4.11.1)yardımıyla

$$-i(k^*e_1^* + e_3^*) = -i(ke_1 + e_3) \quad (4.16.11)$$

bulunur.

Her iki yanın da skaler karesi

$$k^* = k \quad (4.16.12)$$

vereceğinden,(4.16.8), (4.16.11) ve (4.16.12) formülleri

$$e_3^* = ke_1 \quad (4.16.13)$$

sonucunu götürür. O halde, toplu olarak

$$\begin{aligned} e_1^* &= \frac{1}{k}e_3 \\ e_2^* &= -e_2 \\ e_3^* &= ke_1 \end{aligned} \quad (4.16.14)$$

dir. (Şemin, 1983)

Teorem

Psödo-eğriliği sabit ve en az 4. sınıftan bir minimal eğrinin psödo-eğrilik merkezlerinin geometrik yeri de bir minimal eğridir ve aynı sabit eğriliklidir. Bu iki eğriden herhangi birisi, ötekinin psödo-eğrilik merkezlerinin geometrik yeridir. Bu iki eğrinin sayılık üçyüzlülerini tanımlayan vektörler, (4.16.14) bağıntılarıyla birbirine bağlıdır. Homolog noktaları birleştiren doğrular, iki sayılık üçyüzlüsünün ortak ikinci eksenleridir. (Şemin, 1983)

4.17. Bir Minimal Eğrinin Doğrulayan Doğruları Ve Bunların Teğet Kaldıkları Eğri

Bir E minimal eğrisinin bir $N(s)$ noktasından, d_c psödo-DARBOUX vektörüne çizilen paralel D_c doğrusu, E nin $N(s)$ noktasındaki doğrulayan doğrusudur. $N(s)$ noktası E eğrisi üzerinde dolandığında, D_c doğrusu da bir eğriye teğet kalır. Gerçekten, D_c doğrusu üzerinde öyle bir $N_1(s)$ noktası arayalım ki bu noktanın (N_1) geometrik yeri D_c ye N_1 de teğet kalsın. N_1 in yer vektörü x_1 ise, bu vektör

$$x_1(s) = x(s) + \lambda(s)d_c(s) \quad (4.17.1)$$

biçimindedir.

(N_1) eğrisinin N_1 deki teğeti, (4.11.1) ve (4.11.4) formülleri yardımıyla hesaplanan

$$x_1 = (1 + \lambda k')e_1 + \lambda d_c$$

ye paraleldir ve bunun da d_c ye paralel olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$$1 + \lambda k' = 0$$

yani

$$\lambda = -\frac{1}{k'} \quad (4.17.2)$$

dır, o halde

$$x_1 = x - \frac{1}{k} d_c = x - \frac{1}{k} (ke_1 - e_3) \quad (4.17.3)$$

$$x_{1'} = -\left(\frac{1}{k}\right)' d_c = -\left(\frac{1}{k}\right)' (ke_1 - e_3) \quad (4.17.4)$$

tür. Buna göre

$$\mathbf{N}N_1 = \frac{1}{k} (e_3 - ke_1) \quad (4.17.5)$$

olur.

Görülüyor ki: $\mathbf{N}N_1$ vektörünün e_1 ve e_3 e göre bileşenleri

$$m_1 = -\frac{1}{(\log k)'}, \quad m_3 = \frac{1}{k} \quad (4.17.6)$$

dır.

4.18. Oskülatör Düzlemleri Sabit Bir Noktadan Geçen Minimal Eğriler

a) *Sabit nokta sonlu uzaklıktadır.*

Sabit noktaya O diyelim. Bulmak istediğimiz minimal eğrinin bu noktadan geçen oskülatör

düzlemleri, izotrop düzlemlerdir. O halde bu oskülatör düzlemler, doğrultmanı ombilikal ve tepesi de O olan izotrop koninin teğet düzlemleridir. Buna göre, aradığımız minimal eğri, O nokta eğrisidir.

O noktasını başlangıç noktası olarak aldığımızda, aradığımız minimal eğri boyunca

$$x \cdot x' = 0 \quad (4.18.1)$$

dir, çünkü izotrop olan oskülatör düzlemin, x' vektörü, aynı zamanda dikme vektörüdür.

(4.18.1) nin iki kez türevini alırsak, (4.8.7) ve (4.8.8) formülleri dolayısıyla

$$x \cdot x'' = 0, \quad x \cdot x''' = 0 \quad (4.18.2)$$

olur Öyleyse

$$x = \alpha_1 x' + \alpha_2 x'' + \alpha_3 x''' \quad (4.18.3)$$

dersek ; (4.8.7), (4.8.8), (4.8.14), (4.9.2), (4.9.3) ve (4.18.2)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

dolayısıyla

$$x = 0$$

verir. (Şemin, 1983)

Teorem

En az 3. sınıftan bir minimal eğrinin oskülatör düzlemlerinin sonlu uzaklıkta bulunan sabit bir noktadan geçmeleri için gerekli ve yeterli koşul, bu minimal eğrinin bir nokta-eğri olmasıdır. Sabit nokta sonsuzda ise, ombilikalın üzerinde değilse, bu noktadan geçen iki izotrop düzlemin izotrop doğruları, minimal eğriyi oluştururlar. (Şemin, 1983)

4.19. Saylık Üçyüzlünün İkinci Yüzü Sabit Bir Noktadan Geçen Minimal Eğriler

a) *Sabit nokta sonlu uzaklıktadır.*

Genellikle, saylık üçyüzlünün ikinci yüzü, psödo-eğrilik ekseninin teğet kaldığı eğrinin oskülatör düzlemi olduğuna göre, bu özel halde, tepesi O sabit noktası olan izotrop koniye teğettir. ve §(3.9) de sözü edilen $(\bar{M})$ eğrisi, O nokta-eğrisidir. O halde, (4.13.3) formülünde, E eğrisi boyunca

$$z' = 0$$

olması, E nin k psödo-eğriliğinin

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} \right)'' - \frac{1}{k} = 0$$

diferansiyel denklemini sağlaması gerekir.

Bu denklemi $\left(\frac{1}{k^2}\right)'$ ile çarpıp integre ettikten sonra aşağıdaki biçimde de yazabiliriz:

$$\frac{2}{3} - \frac{k \cdot 2}{k^3} + \alpha k^3 = 0, \quad (\alpha : \text{sabit}) \quad (4.19.1)$$

§(3.9) da da gördüğümüz gibi, O sabit noktası E minimal eğrisinin psödo-eğrilik eksenlerinin ortak noktasıdır ve bu eksenler O tepeli izotrop koninin ana doğrularıdır ve

$$NO = \left(\frac{i}{k}\right) e_2 + \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{k^2}\right)' e_3 \quad (4.19.2)$$

tür.(Şemin, 1983)

b) Sabit nokta sonsuzdadır.

Sonsuzda bulunan sabit noktanın doğrultusunu veren sabit vektör a ise, (e_2, e_3) düzlemine paralel olan bu vektöre, bu düzlemin e_3 izotrop dikme vektörü diktir, yani E boyunca

$$a \cdot e_3 = 0$$

dir. Bunun (4.11.1) e göre türevi

$$k a \cdot e_2 = 0$$

verir. iki hal söz konusu olabilir:

1) Ya E boyunca $k = 0$ dir. 2) Ya da yukarıki skaler çarpım E boyunca sıfıra eşittir. Bu taktirde, (e_2, e_3) düzlemine paralel olan a vektörü, e_3 e paraleldir. Böyle olunca da, e_3 ün doğrultusu sabit olacağından, türevi ve dolayısıyla k psödo-eğriliği gene özdeş olarak sıfıra eşit bulunacaktır. Öyleyse, her iki halde de E bir izotrop kübiktir ve bunun (e_2, e_3) düzleri E boyunca kendi kendilerine paralel kalır.(Şemin, 1983)

Teorem

En az 4. sınıftan bir minimal eğrinin saylik üçyüzlüsünün ikinci yüzünün sonlu uzaklıkta bulunan sabit bir noktadan geçmesi için gerekli ve yeterli koşul, psödo-eğriliğin

bağıntısını sağlamasıdır. Sabit noktanın sonsuzda bulunması halinde, gerekli ve yeterli koşul, E nin bir izotropik kübik olmasıdır. (Şemin, 1983)

a) *Sabit nokta sonlu uzaklıktadır.*

(4.17.4) formülüne göre, (N_1) eğrisinin sonlu uzaklıkta bulunan bir nokta-eğri olması için gerekli ve yeterli koşul, E minimal eğrisi boyunca

$$\left(\frac{1}{k}\right)' = 0$$

yani

$$k = \alpha s + \beta, \quad (\alpha, \beta : \text{sabit}) \quad (4.19.3)$$

olmasıdır. (Şemin, 1983)

Böyle bir E minimal eğrisinin doğrulayan doğruları, $(N_1 \equiv O)$ tepeli ve E doğrultmanlı bir koni doğururlar. (4.17.6) formülleri de

$$m_1 = -\left(s + \frac{\beta}{\alpha}\right), \quad m_3 = \frac{1}{\alpha} \quad (4.19.4)$$

verir. (Şemin, 1983)

Teorem

En az 5. sınıftan bir E minimal eğrisi, aşağıdaki dört koşuldan herhangi birisini sağlarsa, geriye kalanlar da sağlanmış olur:

1. Tüm doğrulayan düzlemler, sonlu uzaklıkta bulunan sabit bir O noktasından geçer.
2. Sonlu uzaklıkta bulunan sabit bir O noktasının, E nin siklik üçyüzlüsüne göre üçüncü koordinatı sabittir.
3. Sonlu uzaklıkta bulunan sabit bir O noktasının, E nin siklik üçyüzlüsünün birinci eksenine- yani E nin teğeti| üzerindeki izdüşümü, E nin teğetlerinin dik yörüngelerinden birini çizer.
4. E nin psödo-eğriliği, psödo-yayının lineer bir fonksiyonudur (Şemin, 1983)

4.20. Sabit Bir O Noktasının Saylık Üçyüzlüye Göre Koordinatlarından Biri Sabit Olan Eğriler

Sabit O noktasının saylık üçyüzlüye göre koordinatları $-\alpha_q$, ($q = 1, 2, 3$) olsun.

I. $\alpha_1 =$ sabit olan minimal eğriler

Sabit O noktasına göre minimal E eğrisinin yer vektörü $x(s)$ ise

$$x(s) = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3, \quad \alpha_1 = \text{sabit} \quad (4.20.1)$$

dir. (4.11.1) türev formülleri

$$i k \alpha_2 - 1 = 0, \quad -i \alpha_1 + \alpha_2' - i k \alpha_3 = 0, \quad i \alpha_2 + \alpha_3' = 0 \quad (4.20.2)$$

verir. ilkinden

$$-\alpha_2 = \frac{i}{k} \quad (4.20.3)$$

çıkar ve bu değer yardımıyla ikincisinden sonuç olarak

$$-\alpha_3 = \frac{1}{k} \alpha_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} \right)' \quad (4.20.4)$$

çıkarılır. Bu son eşitlik, (4.20.2) ile karşılaştırılınca

$$\left(\frac{1}{k} \right)' \alpha_1 + \left(\frac{1}{2k^2} \right)'' - \left(\frac{1}{k} \right)' = 0 \quad (4.20.5)$$

bağıntısı elde edilir.

O halde, O sabit noktasının $N(s)$ noktasındaki saylık üçyüzlüye göre koordinatları

$$-\alpha_1, \quad \frac{i}{k}, \quad \left(\frac{1}{k} \right)' \alpha_1 + \left(\frac{1}{2k^2} \right)' \quad (4.20.6)$$

dır ve E nin psödo-eğriliği, (4.20.5) diferansiyel denklemini sağlar. (Şemin, 1983)

II. $\alpha_2 =$ sabit olan minimal eğriler.

Bu kez, (4.20.1) denkleminde sağ yandaki ikinci vektörün katsayı sabit olduğuna göre, (4.11.1) türev formülleri

$$\alpha_1 + i \alpha_2 k - 1 = 0, \quad i(\alpha_1 + \alpha_3 k) = 0, \quad i \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \quad (4.20.7)$$

verir. Bunların üçüncüsünden

$$\alpha_3 = -i \alpha_2 s + s_0, \quad (s_0 : \text{sabit}) \quad (4.20.8)$$

çıkar ve bu değer yardımıyla ikincisi

$$\alpha_1 = k(i \alpha_2 s - s_0) \quad (4.20.9)$$

verir. Bu son eşitlik de (4.20.7) ile karşılaştırıldığında

$$(i \alpha_2 s^2 - s_0)k + 2 i \alpha_2 k - 1 = 0 \quad (4.20.10)$$

lineer diferansiyel denklemi elde edilir. Bunun integre edilmesiyle de

$$k = \frac{(i \alpha_2 s^2 - 2 s_0 s + 2 s_1)}{2 (i \alpha_2 s - s_0)^2}, \quad (s : \text{sabit}) \quad (4.20.11)$$

bulunur.(Şemin, 1983)

O halde, O sabit noktasının E minimal eğrisinin $N(s)$ noktasındaki saylık üçyüzlüye göre

koordinatları

$$-k(i \alpha_2 s - s_0), \quad -\alpha_2, \quad i \alpha_2 s - s_0 \quad (4.20.12)$$

dır ve E minimal eğrisinin psödo-eğriliği (4.20.11) bağıntısıyla belirlidir.

III. $\alpha_3 = \text{sabit}$ olan minimal eğriler

bu halde, (4.20.2) bağıntısından

$$\alpha_2 = 0$$

sonucu çıkarılacağından, O sabit noktasının doğrulayan düzlem üzerinde bulunduğu hal söz konusudur.(Şemin, 1983)

Teorem

Bir O noktasının uzayda sabit olması ve bunun, en az 6. sınıftan bir E minimal eğrisinin saylık üçyüzlüsüne göre birinci koordinatının bir sabitten ibaret bulunması için gerekli ve yeterli koşul, E minimal eğrisinin k psödo-eğriliğinin (4.20.5) diferansiyel denklemini sağlamasıdır.(Şemin, 1983)

Teorem

Bir O noktasının uzayda sabit olması ve bunun, en az 6. sınıftan bir E minimal eğrisinin siklik üçyüzlüsüne göre ikinci koordinatının bir sabitten ibaret bulunması için gerekli ve yeterli koşul, E minimal eğrisinin k psödo-eğriliğinin (4.20.11) bağıntısını sağlamasıdır.(Şemin, 1983)

KAYNAKLAR

- Semin, F., 1983, Diferansiyel Geometri I, Istanbul Üniversitesi Fen Fakültesi.
- Hacısalıhoğlu, H. H. 1980. Diferansiyel Geometri, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları, No. 2..
- Sabuncuoğlu, A., 2001. Diferansiyel Geometri, Nobel Yayınevi, Ankara.
- Yılmaz, S., 2010, Contributions to Differential Geometry of Isotropic Curves in the Complex Space, Journal of Mathematical Analysis and Applications.
- Tahtıkşan, F., 2014, Kompleks Uzayda izotropik Eğriler
- Struik, J. D., 1961, Lectures on Classical Differential Geometry
- Dierkes. U., Hildebrandt. S., Sauvigny F., Minimal Surfaces
- Qian. J., Kim. H. Y., 2015, Some Isotropic Curves and Representation in Complex Space C^3