

BAŞKENT ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI VE UYGULAMALARI

E. ANIL AĞOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
2008

SAYISAL FİLTRE TASARIMI VE UYGULAMALARI

DIGITAL FILTER DESIGN AND APPLICATIONS

E. ANIL AĞOĞLU

Başkent Üniversitesi
Lisansüstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin
ELEKTRİK-ELEKTRONİK Mühendisliği Anabilim Dalı İçin Öngördüğü
YÜKSEK LİSANS TEZİ
olarak hazırlanmıştır
2008

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma, jürimiz tarafından **ELEKTRİK-ELEKTRONİK MÜHENDİSLİĞİ**
ANABİLİM DALI'nda YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan (Danışman)

:

Prof. Dr. Turhan Çiftçi

Üye

:

Yrd. Doç. Dr. Mustafa Doğan

Üye

:

Yrd. Doç. Dr. Hamit Erdem

ONAY

Bu tez 09/06/2008 tarihinde Enstitü Yönetim Kurulunca belirlenen yukarıdaki jüri
üyeleri tarafından kabul edilmiştir.

...../06 /2008

Prof.Dr. Emin AKATA

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRÜ

TEŐEKKÖR

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında yönlendirici ve belirleyici rolleriyle en büyük paya sahip olan Sayın Prof. Dr. Turhan ÇİFTÇİBAŞI'na, bana göstermiş olduğu özveri ve yardımları için, Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa DOĞAN'a karşılaőtığım sorunların aşılanmasında yardımcı olduğu ve bu çalışmayı titizlikle takip edip değerli tecrübelerini paylaşmayı esirgemediği için, Sayın Yrd. Doç. Dr. Hamit Erdem'e bu çalışmayı özenle değerlendirip yaptığı katkılar için, sevgili kızım Elif ve eőim Zeynep'e maddi manevi her türlü destekleri için en içten teőekkürlerimi sunarım.

ÖZ

SAYISAL FİLTRE TASARIMI VE UYGULAMALARI

E. Anıl AĞOĞLU

Başkent Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü

Elektrik-Elektronik Mühendisliği Anabilim Dalı

Sinyal süzme; veri iletişimi, biyomedikal uygulamalar, askeri ve sivil elektronik sistemler, endüstriyel uygulamalar gibi içerisinde değişik sinyal işleme yöntemlerinin bulunduğu sistemlerde yaygın bir biçimde kullanılır. Bu çalışmada sayısal sinyal işlemenin en temel dayanağı olan “Ayrık Zamanlı Fourier Dönüşümü” ve bu dönüşümün zayıf tarafı olan zamanda yerellik sorununu çözen “Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü” ve frekansa göre uyarlamalı zaman ölçeklemesi ile öne çıkan “Dalgacık Dönüşümü” ayrıntılı incelenecektir. Daha sonra bünyesinde istatistiksel süzme yaklaşımlarını da içeren ve birçok eniyileme algoritması barındıran Optimal Süzgeç tasarım yöntemleri incelenecektir.

Teorik altyapısı hazırlanan IIR sayısal süzgeç tasarım teknikleriyle MATLAB® ortamında benzetim çalışması yapılacak ve süzgeç tasarımları için etkileşimli bir program geliştirilecektir. İkinci aşamada ise önceden tanıtılan tekrarsız Optimal Wiener Süzgeç tasarım teknikleri kullanılarak, günlük hayatta kullanılabilecek fetal ECG sinyallerinin anne ECG sinyalinden ve diğer gürültü unsurlarından ayırt edilmesi tasarlanacak bir programla hedeflenmiştir. Ayrışım sonucu ortaya çıkacak olan gürültünün dalgacık dönüşümü ile temizlenmesi ve bu sonuçların diğer yöntemlerle sağlıklı karşılaştırılabilmesi için çeşitli başarımlar ölçütleri geliştirilip, yorumlanmıştır.

Anahtar Sözcükler: Sayısal Süzgeç Tasarımı, Dalgacık Dönüşümü, Optimal Süzgeçler, Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç, Fetal ECG Ayrımı

Danışman: Prof. Dr. Turhan ÇİFTÇİBAŞI, Başkent Üniversitesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü.

ABSTRACT

DIGITAL FILTER DESIGN AND APPLICATIONS

E. Anıl AĞOĞLU

Başkent University Institute of Science

Department of Electrical-Electronics Engineering

Signal filtering, is frequently used at data communication, biomedical systems, military and civilian electronic systems, industrial applications in which different variety of signal processing techniques are applied. In this study, “Discrete Fourier Transformation”, the most important foundation support of the digital signal processing, will be inquired. In order to overcome the time localization problem of Fourier Transform “Short Time Fourier Transform” and with the distinct property of adaptive time scaling with respect to frequency “Wavelet Transform” will be introduced respectively.

With the theoretical foundations of digital IIR filters, interactive digital filter design program will be developed at MATLAB® environment. At the second stage with the knowledge of optimal Wiener filter design techniques, as an example of real life problems, it is aimed to design a program which extracts fetal ECG from mother ECG signal and other noise sources. Noise at the extracted results will be cancelled by wavelet methods and for the accuracy of the compared results some performance criteria developed and interpreted.

Keywords: Digital and Analog Filter Design, Wavelet Transformation, Optimal Filter, Short Time Wiener Filter, Fetal ECG Extraction

Advisor: Prof. Dr. Turhan ÇİFTÇİBAŞI, Başkent University, Department of Electrical-Electronics Engineering

İÇİNDEKİLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
ÖZ.....	i
ABSTRACT.....	ii
İÇİNDEKİLER LİSTESİ.....	iii
ŞEKİLLER LİSTESİ	v
ÇİZELGELER LİSTESİ	viii
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI.....	4
2.1. Sayısal Süzgecin Özellikleri	4
2.2. Süzgeçlerin Sınıflandırılması.....	6
2.1.1. Butterworth süzgeç	6
2.2.2. Chebyshev süzgeç.....	9
2.2.3. Chebyshev tip 2 süzgeç.....	11
2.2.4. Eliptik süzgeç (Cauer süzgeç)	12
3. SAYISAL FİLTRELERİN TANIMLANMASI VE GERÇEKLEŞTİRİLMESİ..	14
3.1. Sayısal Süzgecin Aktarım İşlevi	15
3.1.1. Tekrarlı ve tekrarsız süzgecin özellikleri	16
3.2. Tekrarlı Süzgeç Tasarımı	17
3.2.1. Çift doğrusal dönüşüm.....	19
3.3. Sayısal Filtrelerin Gerçekleştirilmesi.....	21
3.3.1. Direkt (transversal) yapı.....	22
3.3.2. Kafes yapısı	23
3.3.3. Direkt form – 1 yapısı.....	24
3.3.4. Direk form – 2 yapısı.....	24
3.3.5. Seri (cascade) yapı.....	25
3.3.6. Paralel gerçekleştirme	26
4. OPTİMAL VE UYARLAMALI İSTATİSTİKSEL SÜZGEÇLER.....	27
4.1. Wiener Süzgeç	27
4.2. Doğrusal Tahmin	30
4.3. Gürültü Temizleme	32
4.4. Uyarlamalı Süzgeçler	33

5. DALGACIK (WAVELET) DÖNÜŞÜMÜ	36
5.1. Fourier Analizi ve Fourier Dönüşümü	36
5.2. Durağan ve Sürekli Sinyallerin Fourier Dönüşümleri	38
5.3. Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü.....	41
5.4. Ölçek ve Sürekli Dalgacık Dönüşümünün Hesaplanması	47
5.5. Dalgacık Teoremine Matematiksel Yaklaşım.....	51
5.5.1. İç çarpım ,diklik ,ortanormallik.....	52
5.6. Dalgacık Çeşitlerine Örnekler.....	54
5.7. Kesikli Dalgacık Dönüşümü - Alt bant kodlaması	55
5.8. Dalgacık Dönüşümünün Kullanım Alanları	58
5.9. Dalgacık Yöntemiyle Gürültü Giderme	58
6. UYGULAMALAR.....	61
6.1. Süzgeç Tasarım Programı.....	61
6.1.1. Örnek süzgeç tasarımı	65
6.2. Fetal ECG Ayrımı	68
6.2.1 Elektrokardiyogram – ECG	68
6.2.2. Veri kümesi	70
6.2.3. Kısa zamanlı Wiener Süzgecin fetal ECG ayrımında kullanılması	71
6.2.4. Bağımsız bileşenler analizi (ICA)	75
6.3. Süzgeç Tasarım Programı.....	77
6.4. Fetal ECG Ayrım Sonuçları	77
7. SONUÇLAR	99
KAYNAKLAR LİSTESİ.....	102
EKLER LİSTESİ	105
EK 1. MSE tablosu	105
EK 2. Referans MSE tablosu.....	109

ŞEKİLLER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1 Analog sinyalin sayısal işlenmesi	4
Şekil 2.2 $N=1$ için (a) Kutupların gösterimi (b) Kutupların kararlı bölgede gösterimi	8
Şekil 2.3 $N=2$ için (a) Kutupların gösterimi (b) Kutupların kararlı bölgede gösterimi	8
Şekil 2.4 Grup gecikmesi ve genlik değişimi	9
Şekil 2.5 Değişen derecelere göre kazanç frekans grafiği	9
Şekil 2.6 Chebyshev süzgeci kazanç frekans karakteristiği	10
Şekil 2.7 Grup gecikmesi ve genlik değişimi	11
Şekil 2.8 Chebyshev 2 süzgeci kazanç frekans karakteristiği	12
Şekil 2.9 Eliptik süzgeç kazanç frekans karakteristiği	13
Şekil 3.1 Tekrarlı süzgeç tasarımı	17
Şekil 3.2 Çift doğrusal dönüşüm	20
Şekil 3.3 Gerçekleştirme elemanlarının gösterimleri	21
Şekil 3.4 Direkt yapılı gerçekleştirme	22
Şekil 3.5 Kafes yapılı gerçekleştirme	23
Şekil 3.6 Direkt Form – 1 Yapısı	24
Şekil 3.7 Direkt Form – 2 Yapısı	25
Şekil 3.8 Seri Yapı	25
Şekil 3.9 Direkt form 2 yapısının seri kullanılması.....	26
Şekil 3.10 (a)Paralel gerçekleştirme (b) Direkt form 2 yapısının paralel kullanılması	26
Şekil 4.1 Wiener Süzgeç.....	28
Şekil 4.2 Doğrusal Tahmin	31
Şekil 4.3 Gürültü Temizleme	32
Şekil 4.4 Uyarlamalı yapı	35
Şekil 5.1 J.B.J. Fourier (1768-1830)	37
Şekil 5.2 Durağan bir sinyal örneği	38
Şekil 5.3 Durağan sinyalin Fourier dönüşümü	39
Şekil 5.4 Durağan olmayan bir sinyal örneği	39
Şekil 5.5 Durağan olmayan sinyalinin Fourier dönüşümü	40
Şekil 5.6 Kısa zamanlı Fourier dönüşümü	42

Şekil 5.7 Değişen a değerlerinin penceredeki etkisi.....	43
Şekil 5.8 $s=0.01$ değeri için STFT	44
Şekil 5.9 $s=0.1$ değeri için STFT	44
Şekil 5.10 $s=1$ değeri için STFT	45
Şekil 5.11 STFT ve Dalgacık dönüşümü çözünürlük ilişkisi (a) STFT (b) Dalgacık Dönüşümü	47
Şekil 5.12 Değişen ölçek “ s ” değerlerinin penceredeki etkisi	47
Şekil 5.13 $s=1$; $\tau = 2, 40, 90, 140$ için dalgacık dönüşümü	49
Şekil 5.14 $s=5$; $\tau = 2, 40, 90, 140$ için dalgacık dönüşümü	49
Şekil 5.15 Sürekli sinyalin dalgacık dönüşümü – ölçek bakışı	50
Şekil 5.16 Sürekli sinyalin dalgacık dönüşümü – zaman bakışı	51
Şekil 5.17 Dalgacık türlerine örnekler	54
Şekil 5.18 Detay ve yaklaşıklık katsayıları	55
Şekil 5.19 Ayırışmada kullanılan süzgeçler (a) alçak geçiren (b) yüksek geçiren.....	56
Şekil 5.20 512 örnekli bir sinyalin ayırışım basamakları.....	57
Şekil 5.21 Eşik değeri	59
Şekil 5.22 (a) yumuşak eşik değeri (b) sert eşik değeri.....	60
Şekil 6.1 Süzgeç tasarım programının açılış sayfası	61
Şekil 6.2 Analog ve sayısal tasarım sonuçları.....	62
Şekil 6.3 Tasarlanan Süzgecin test edilmesi.....	63
Şekil 6.4 Tasarlanan Süzgecin test edilmesi / $f_{test}=20$ Hz, Çıkış Genliği ≈ 0	64
Şekil 6.5 Tasarlanan Süzgecin test edilmesi / $f_{test}=14$ Hz, Çıkış Genliği ≈ 0.5	64
Şekil 6.6 Süzgeçlerin kesme özellikleri arasındaki ilişkiler	67
Şekil 6.7 ECG sinyalindeki dalgacıklar.....	69
Şekil 6.8 Elektrotların yerleşimi	70
Şekil 6.9 Kullanılan veri kümesi	71
Şekil 6.10 Wiener gürültü temizleme.....	72
Şekil 6.11 Kısa Zamanlı Wiener gürültü temizleme.....	72
Şekil 6.12 Akış şeması – Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç	74
Şekil 6.13 Akış şeması – ICA.....	76
Şekil 6.14 Süzgeç Tasarım programının hesaplanan değerlerle karşılaştırması.....	77
Şekil 6.15 Karın bölgesi ECG sinyali.....	78

Şekil 6.16 Göğüs bölgesi ECG sinyali.....	78
Şekil 6.17 MSE & Öz ilinti matris boyutu - 50 örnek adım.....	80
Şekil 6.18 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 50 örnek adım	80
Şekil 6.19 MSE & Öz ilinti matris boyutu - 100 örnek adım	81
Şekil 6.20 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 100 örnek adım	81
Şekil 6.21 MSE & Öz ilinti matris boyutu - 125 örnek adım.....	82
Şekil 6.22 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 125 örnek adım	82
Şekil 6.23 MSE & Öz ilinti matris boyutu -250 örnek adım.....	83
Şekil 6.24 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 250 örnek adım	83
Şekil 6.25 MSE & Öz ilinti matris boyutu - 500 örnek adım.....	84
Şekil 6.26 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 500 örnek adım	84
Şekil 6.27 Fetal ECG sinyali - 40x40 öz ilinti matrisi ve 100 adım örnekli	86
Şekil 6.28 Fetal ECG sinyali – Wiener, 400x400 öz ilinti matrisi	86
Şekil 6.29 Fetal ECG sinyali – ICA çözümü	87
Şekil 6.30 STWF FECG ayırım sonucu (100 adım 40x40 öz ilinti matrisi)	88
Şekil 6.31 WF FECG ayırım sonucu (250x250 öz ilinti matrisi).....	89
Şekil 6.32 ICA FECG ayırım sonucu.....	90
Şekil 6.33 Fetal ayırım yöntemlerinin 2.8 ve 3.35 saniyeler aralığında karşılaştırması (a)STWF (b)WF (c)ICA	91
Şekil 6.34 Dalgacık ayrışımı	93
Şekil 6.35 ICA çözümü için Dalgacık Dönüşümü ile gürültüleri temizlenen FECG sinyali.....	95
Şekil 6.36 WF (250x250 öz ilinti matrisi) çözümü için Dalgacık Dönüşümü ile gürültüleri temizlenen FECG sinyali	96
Şekil 6.37 STWF çözümü (40x40 öz ilinti matrisi) için Dalgacık Dönüşümü ile gürültüleri temizlenen FECG sinyali	97

ÇİZELGELER LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Çizelge 6.1 MSE tablosu.....	85
Çizelge 6.2 Dalgacık hata analizi	92
Çizelge 6.3 ICA referanslı MSE matrisi	98

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

σ	:Standart sapma
Ω	:Ön çarpılma frekansı
τ	:Grup gecikmesi
ω_0	:Kesme frekansı
ε	:Dalgacık katsayısı
ξ	:Seçicilik katsayısı
r_{dx}	:Çapraz ilinti
R_x	:Öz ilinti
w_n	:Wiener ağırlık fonksiyonu
a	:STFT penceresi
s	:WT ölçeği
ψ	:Ana dalgacık
μ	:Dalgacık katsayısı
ϕ	:Baz vektör
ADC	:Analog Sayısal Dönüştürücü
DAC	:Sayısal Analog Dönüştürücü
FIR	:Sonlu Darbe Tepkisi
IIR	:Sonsuz Darbe Tepkisi
WSS	:Geniş Anlamda Durağan
MSE	:Ortalama Karesel Hata
SNR	:Sinyal Gürültü Oranı
FT	:Fourier Dönüşümü
STFT	:Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü
WT	:Dalgacık Dönüşümü
WF	:Wiener Süzgeç
STWF	:Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç
ICA	:Bağımsız Bileşenler Analizi
ECG	:Elektrokardiyografi

1. GİRİŞ

Sinyal süzme; veri iletişimi, biyomedikal sistemler, askeri ve sivil elektronik sistemler, endüstriyel uygulamalar gibi içerisinde değişik sinyal işleme yöntemlerinin bulunduğu sistemlerde yaygın bir biçimde kullanılır. Genel anlamda, bir sinyalin seçilen süzgeç karakteristiğine göre istenen frekans bileşenlerine ayrılması (gürültü gibi) ve sinyalin genel yapısının (kazanç, genlik, faz ve grup gecikmesi vb.) geliştirilmesi olarak tanımlanır [1;2]. Süzgeçler ilk olarak geniş anlamda 19. ve 20. yüzyıllarda, pasif elemanlar olan direnç, bobin ve kapasitörler kullanılarak tasarlanmış ve o zamanki telefon ağlarında kullanılmışlardır. Daha sonra bipolar transistörler içeren ve aktif devre elemanı olan işlemsel yükselteçler geliştirilmiştir. Böylelikle gerçekleştirilen aktarım işlevine kazanç elemanını eklememize olanak tanınmıştır. 20. yüzyılın ikinci yarısında anahtarlı kapasitor süzgeci olarak adlandırılan, içerisinde sadece kapasitör ve CMOS işlemsel yükselteçler içeren süzgeçler geliştirilmiştir. Bu süzgecin özelliği direnç ve bobin içermemesi ve tüm devrenin VLSI teknolojisiyle üretilmesidir. Bu teknoloji ile analog sinyallerden belirli zaman aralıklarında örnekler alınıp işlenebilir hale getirilebilmiştir [3]. Böylelikle süzme ilk defa sayısal sinyal işleme ile birlikte gündeme gelmiştir. Sayısal sinyal işlemde iki temel buluştan söz edilir. İlki, Nyquist Shannon'un örnekleme teoremi, diğeri Cooley-Tukey'in hızlı Fourier dönüşümüdür. Shannon Teoremi özet olarak, bant genişliği sınırlı olan sürekli sinyalin içerdiği en büyük frekansın iki katında örneklenmesi koşulu ile sayısallaştırılmasından sonra, kayba uğramadan tekrar sürekli biçime dönüştürülebileceğini söyler. Hızlı Fourier dönüşümü ise, kesikli Fourier dönüşümünü bilgisayar ortamında hızlı hesaplanmasını sağlayan algoritma olarak tanımlanabilir [4].

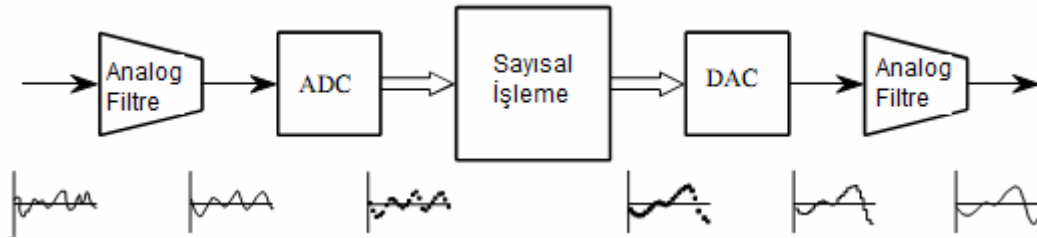
Fourier dönüşümünün gelişmiş bir çeşidi olarak kabul edebileceğimiz dalgacık dönüşümü ve istatistiksel veri analizi yöntemlerinin sayısal süzme işlemlerinde kullanılması, sayısal dünyadaki gelişmelerin belirgin örneklerindendir. Dalgacık dönüşümü Fourier dönüşümündeki zamanda yerellik sorununu çözerken [5], Wiener Süzgeç, istatistiksel veriler için gürültü giderme ve doğrusal tahmin yapma gibi özellikleri bilime kazandırmıştır.

Fetal ECG ayrımı günümüzde gelişen teknoloji ile erken teşhis ve tedaviye olanak tanımaktadır. Fetal seslerin annenin karın ve göğüs bölgesinden kayıpsız ayırt edilmesi çok zordur. Bunun sebebi fetal seslerin genliklerinin özellikle “R dalgası” genliğinin genel gürültü seviyesinin altında kalmasıdır. Bu gibi sorunların üstesinden gelebilmek için genellikle birden fazla yöntem ardı ardına kullanılır. Bu nedenle fetal ECG ayrımı genel olarak iki alt bölüme ayrılır. Bunun için ilk olarak sinyalin ayrıştırılması, daha sonra ise gürültüden temizlenmesi gerekir. Ayrım işleminde sinyaller arasındaki istatistiksel ilişkilerden faydalanmak en yaygın yöntemdir. Bağımsız Bileşenler Analizi (ICA) yöntemi bu iş için olasılık dağılımının ikinci ve dördüncü kümülanlarını kullanırken [6], Wiener Süzgeç sinyaller arasındaki çapraz ilinti ve öz ilinti ilişkilerinden faydalanıp, en küçük hata ayrımı yapar [7]. Durağan olmayan sinyallerde istatistiksel özellikler zamanla önemli ölçüde değişiklikler gösterir. İstatistiksel yöntemlerin başarılı olabilmesi için istatistiksel parametrelerin sinyal süresince çok az değişim geçirmesi veya sabit olması gerekmektedir. Wiener Süzme yönteminde bu amaçla sinyal parçalara bölünerek işlenir. Böylelikle sinyalin yapısı kısmen durağanlaştırılabilir. Bu yöntem Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç olarak bilinmektedir [8]. ICA yönteminde ise daha farklıdır. Bu yöntem gürültülü veri kümelerinin beyazlatılması ve istatistiksel olarak bağımsız hale getirilmesi ile sinyali işlemeye başlar [9;10;11]. Ayrım işleminde kullanılabilecek bir diğer yöntem de istatistiksel olarak bulunan veya rasgele atanan ağırlık değerlerinin yapay sinir ağları gibi uyarlamalı bir yapı içerisinde sonuçların bu değerleri güncellemesiyle bulunması üzerinedir [12;13;14]. Bu gelişmiş yöntemlerin haricinde bant geçiren süzgeçler ve basit çıkarma işlemleriyle de ayrım yapılabilir. Fakat ECG sinyalinin morfolojik özelliklerinden dolayı bu yöntemler iyi sonuç vermezler [8]. Gürültü temizleme işleminde basit frekans süzücü süzgeçler kullanılabilir. Ancak en yaygın ve güvenilir yöntem sinyalin tüm frekans bileşenlerine ayırt edebilmemize olanak tanıyan dalgacık dönüşümüdür [15]. Bu yöntem ile sinyalin, gürültü bileşenleri uygulanan eşik değerleri ile sınırlandırılabilir veya tamamen çıkartılabilir [16]. Ardından güncellenmiş olan bu sinyal bileşenleri birleştirilerek özgün sinyalin gürültüden temizlenmiş hali bulunur [17;18].

Uygulamalar bölümünde tanıtılan sayısal süzgeç tasarım programının teorik altyapısını oluşturmak amacıyla 2. ve 3. bölümlerde sayısal süzgeçlerin tasarım teknikleri ve gerçekleştirme yöntemleri detaylı incelenmiştir. Fetal ECG sinyallerinin anne ECG sinyallerinden ayırıt edilmesi amacıyla hazırlanan programın hangi temellere dayandığı 4. ve 5. bölümlerde tanıtılmıştır. 4. bölümde ayırma işlemini gerçekleştirmek amacıyla kullanılan FIR optimal bir süzgeç olan Wiener yapısı, detaylı olarak incelenmiştir. 5. bölümde Wiener sonuçlarında ortaya çıkan gürültünün temizlenmesi için dalgacık dönüşümü yöntemi tarihsel gelişimi ile tanıtılmıştır. 6. bölümde ise uygulama sonuçları ayrıntılı karşılaştırılmıştır.

2. SAYISAL SÜZGEÇ TASARIMI

Sinyal işleme uygulamalarında genel olarak işlem görecektir olan sinyal, önce analog alçak geçiren bir süzgeçten geçirilir. Böylece çıkışta bizim belirlediğimiz bant ile sınırlı bir analog sinyal elde ederiz. Örneklenen ve ADC'de sayısallaştırılan sinyal, öngörülen aktarım işlevi ile işlem gördükten sonra tekrar DAC ile analog hale getirilir. Son olarak DAC'deki örnekli sinyali yumuşatmak için son bir süzgeçten geçirilir. Böylelikle analog bir sinyal, sayısal bir sistemle işlenmiş olur.



Şekil 2.1 Analog sinyalin sayısal işlenmesi

2.1. Sayısal Süzgecin Özellikleri

Sayısal süzgeçlerin temel bileşenleri; toplayıcılar, çarpıcılar ve geciktirme elemanlarıdır. Bu elemanlar, aktarım işlevinin karakteristiğine göre algoritmada belirlenen toplama çarpma ve kaydırma işlevlerini yerine getirirler. Bu özellikler sayesinde sayısal süzgeçler, analog süzgeçlere göre aktarım işlevi tasarımında daha esnek ve kullanışlı hale gelirler. Bunun sebebi, aktarım işlevinin katsayıları ve giriş sinyalinin örneklenen değerleri sayısal süzgeçte donanımsal olarak depolanabilmesidir. Böylece, istediğimizde katsayıları değiştirerek yeni bir aktarım işlevi tasarlayabilir ve giriş sinyalinin örnekleme özelliklerini değiştirip, sistemin herhangi bir giriş sinyaline nasıl tepki vereceğine karar verebiliriz. Sayısal süzgeçler ile zamanla değişen süzgeçler de tasarlanabilir. Bunun için örnekleme frekansını ve katsayıları zamana bağlı bir fonksiyon olarak tanımlamak ve algoritmayı buna göre uyarlamak mümkündür. Sayısal süzgeç yüksek güvenilirlik ve doğruluk özelliğine sahiptir. Özellikle giriş sinyalinin ve aktarım işlevinin katsayılarının tanımlanmasında kullanılan bit sayısının artırılması buna olanak tanır.

Analog süzgeçlerde kullanılan elemanlar, sayısal süzgeçte olduğu gibi yüksek doğruluk değerlerine sahip değillerdir. Ayrıca fiziksel koşullardan etkilendikleri için sahip oldukları özellikler ısı, nem ve zamanla değişime uğrarlar. Sayısal süzgeçlerin toplama, çarpma ve kaydırma gibi özellikleri zamanla ve dış etkilerle değişmeyeceğinden çok daha güvenilirdir. Sayısal süzgeçlerdeki bilgi değişik depolama birimlerinde uzun süreli saklanabilirken, analog süzgeçte bilgi zamanla bozulur. Sayısal süzgeçler ile analog süzgeçlerle gerçekleştirilemeyecek transfer fonksiyonları gerçekleştirilebilir. Sayısal süzgeçler ile doğrusal fazlı sonlu darbe tepkili sistemler modellenenirken analog süzgeçte bu mümkün değildir. Sayısal süzgeçler ile Programlanabilen Süzgeç, Çoklu Oran Süzgeç, Çok Boyutlu Süzgeç ve Uyarlamalı Süzgeç tasarımı yapılabilmektedir. Programlanabilen Süzgeç, süzgecin frekans seçme özelliğine sahip olması anlamına gelir. Çoklu Oran Süzgeci, karmaşık sinyallerin farklı oranlardaki dalgalanmalarının analizine olanak tanıyan süzgeç çeşididir. Çok Boyutlu Süzgeç, imge işlemede kullanılır. Uyarlamalı Süzgeç ise alıcı ve verici arasındaki transfer ortamı değiştiğinde kullanılan, geri besleme ile süzgeç karakteristiğinin güncellenebilmesine olanak tanıyan süzgeç çeşididir. Transfer hattı değişik alıcılara yönlendirilmiş olabilir veya bu değişim alıcı ve vericiler arasında sürekli hale gelmiş olabilir. Bu duruma, cep telefonunun hareket halindeyken farklı baz istasyonlarından servis alması sırasında ortaya çıkan bozulmaların giderilmesini örnek gösterebiliriz.

Burada sayılanlar gibi içerisinde sayısal sinyal işlemenin ve süzmenin kullanıldığı daha birçok alan ve sayısallaşmanın analog sistemlere göre üstünlükleri sayılabilir. Günümüz teknolojisi ile artık telefonumuz içerisindeki tek bir DSP yongası ile gerçek zamanlı ses video sıkıştırma, eko ve gürültü yok etme, ses tanıma, ses kaydetme gibi işlevler yerine getirilebilir. Sayısal süzgecin bu avantajlarının yanı sıra bazı dezavantajları da vardır. Sayısal süzgeçler analog süzgeçlere göre daha maliyetlidir. Ayrıca sürekli bir enerji kaynağına ihtiyaç duyarlar. Pasif analog süzgeçlerde böyle bir gereklilik yoktur.

2.2. Süzgeçlerin Sınıflandırılması

Süzgeçler özelliklerine göre sınıflandırılırlar. Bir süzgecin en önemli özelliklerinden birisi, süzgecin geçiş ve durma bandındaki kazanç değerleridir. Kazanç basit olarak çıkış sinyalinin giriş sinyaline oranıdır. Kazanç 1'den büyük ise çıkış sinyali giriş sinyalinden büyüktür. Kazanç 1'den küçük ise çıkış sinyali giriş sinyalinden küçüktür. Durma bandındaki kazanç çok küçük olabildiğinden desibel (db) cinsinden ifade edilir.

Geçirme bandındaki kazanç: $0.707 = -3.0103\text{db}$

Durdurma bandındaki kazanç: $0.0001 = -80\text{db}$

2.1.1. Butterworth süzgeç

Geçiş bandında ve durdurma bandında dalgalanma yoktur. Fonksiyon tekdüze olarak azalır. Butterworth süzgeç diğer süzgeçlerden farklı olarak, derecesi arttığında durma bandındaki sert düşüş dışında frekans genlik eğrisinde şeklini korur. Butterworth süzgeç, Chebyshev ve Eliptik süzgeçlere göre daha geniş geçiş bölgesine (transition region) sahip olduğundan, durma bandı özelliklerinin doğru olarak uygulanabilmesi için yüksek derecelere ihtiyaç duyar. Chebyshev ve Eliptik süzgeçlere göre daha doğrusal bir frekans tepkisine sahiptir. Aktarım işlevi aşağıdaki işlem basamaklarıyla bulunur.

$$|B(jw)|^2 = B(jw)B^*(jw) = \frac{1}{1 + (jw/jw_c)^{2N}} \quad (2.1)$$

$$B^*(jw) = B(-jw);$$

$$B(jw)B(-jw) = \frac{1}{1 + (jw/jw_c)^{2N}} \quad (2.2)$$

$$B(s)B(-s) = \frac{1}{1 + (s/jw_c)^{2N}} \quad (2.3)$$
$$s = (-1)^{1/2N}(jwc); \quad (-1)^{1/2N} = e^{j\pi/2N}; \quad jw_c = w_c \cdot e^{j\pi/2}$$

$$|s_p| = wc$$

$$s_p = w_c \exp\left(j\left[\frac{\pi(2k+1)}{2N} + \pi/2\right]\right) \quad (2.4)$$

Aktarım işlevi bu kutuplar kullanılarak şöyle yazılabilir,

$$B(s) = \frac{B_o}{\prod_{p=1}^n (s - s_p) / w_c} \quad (2.5)$$

$B(s).B(-s)$ nin kutupları için şu gözlemler yapılabilir.

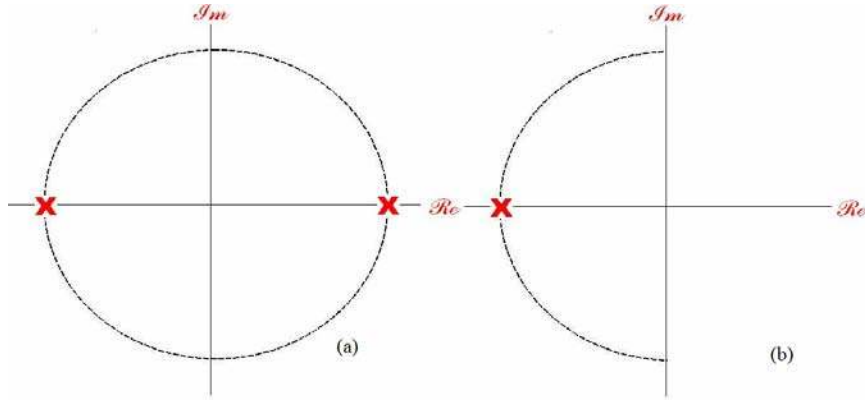
1. s düzleminde $2N$ adet eşit aralıklı kutup vardır.
2. Bir kutup asla sanal eksen üzerine denk gelmez, reel eksen üzerine ise sadece kutup sayısı tek ise gelir.
3. Kutuplar arasındaki mesafe π/N kadardır.

Kutuplar çiftler halinde bulunduğundan (eğer $s=s_p$ de bir kutup var ise onun karşı ekseninde $s=-s_p$ de de bir kutup vardır), $B(s)$ 'nin aktarım işlevini bulabilmek için bu çiftlerden nedensel ve kararlı olanı seçilir. Bunun için de seçilen kutupların sanal eksenin sol tarafında olması gerekmektedir.

$N=1$ için; Kutuplar arası mesafe: π

Aktarım işlevi :

$$B(s) = \frac{w_c}{s + w_c} \quad (2.7)$$

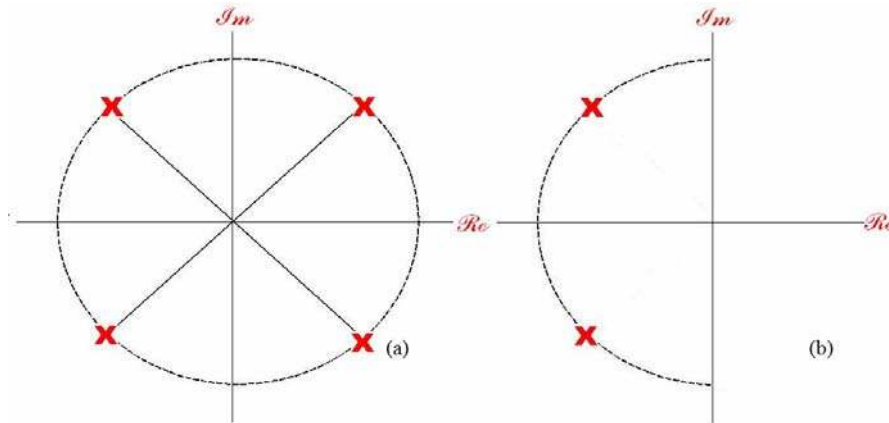


Şekil 2.2 N=1 için (a) Kutupların gösterimi (b) Kutupların kararlı bölgede gösterimi

N=2 için; Kutuplar arası mesafe: $\pi/2$

Aktarım işlevi:

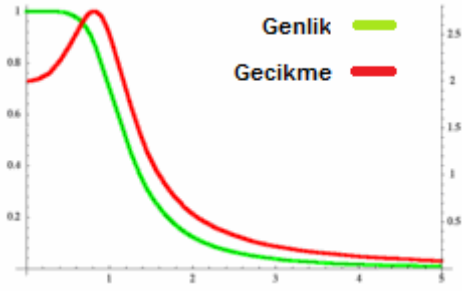
$$B(s) = \frac{w_c^2}{(s + w_c e^{j(\pi/4)})(s + w_c e^{-j(\pi/4)})} \quad (2.8)$$



Şekil 2.3 N=2 için (a) Kutupların gösterimi (b) Kutupların kararlı bölgede gösterimi

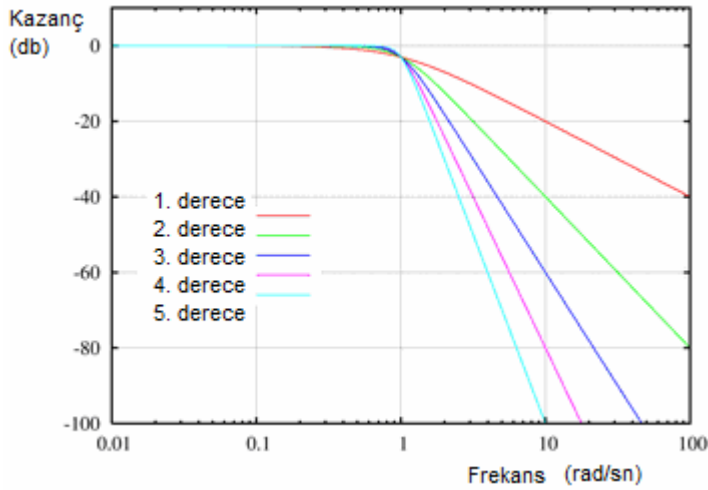
Grup gecikmesi fazın açısal frekansa göre türevidir ve farklı frekanslar için sinyalde meydana gelen faz kaymalarının neden olduğu bozulmaların ölçüsü niteliğindedir. Grafik 2.4'te, 3. derecen bir Butterworth fitrenin grup gecikme ve genlik karakteristiği, değişen frekansa göre gösterilmiştir

$$\tau_g = -\frac{d}{d\omega} \arg(H(j\omega)) \quad (2.9)$$



Şekil 2.4 Grup gecikmesi ve genlik değişimi

Butterworth fitlenin değişik süzgeç dereceleri için kazanç-frekans gösterimi şekil 2.5'te görülmektedir. Aktarım işlevin derecesi arttığında geçiş bandı kısalmaktadır.



Şekil 2.5 Değişen derecelere göre kazanç frekans grafiği

2.2.2. Chebyshev süzgeç

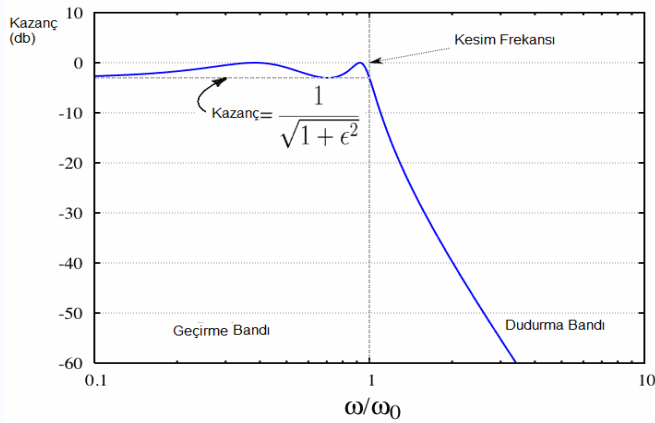
Geçirme bandı Butterworth süzgece göre daha dardır ve geçirme (veya durdurma) bandında dalgacıklar vardır. Chebyshev süzgeci mevcut dalgacıklar dışında bu özelliği sayesinde ideal süzgece daha yakındır. Eğer süzgeçte dalgacıklar geçirme bandında ise bu Chebyshev 1. tipi süzgeçtir. Eğer dalgacıklar durdurma bandında ise Chebyshev 2. tip süzgeç olarak isimlendirilir. Eğer dalgacıklar her iki bantta ise bu durumda ortaya çıkan süzgece Eliptik süzgeç

denir. Eliptik süzgeçlerin geçiş bandı iki çeşit süzgeçten de daha kısadır. Dolayısıyla ideale en yakın süzgeçtir. Ancak tasarımı zordur.

Chebyshev tip1 süzgecin tanımı:

$$G_n(\omega) = |H_n(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 T_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}} \quad (2.10)$$

Burada “ ϵ ” dalgacık parametresidir ve geçirme bandında eş dalgacıkların karakteristiğini belirler. $T_n()$ ise n. dereceden Chebyshev çokterimlisidir. Değişen frekansa göre 0 ve 1 arasında değişen bir tepki üretir. Bu değişkenlerle süzgecin kazancı en fazla $G=1$ ile en az $G = 1/\sqrt{1 + \epsilon^2}$ olmak üzere geçirme bandında değişir. Kesim frekansına gelindiğinde kazanç geçirme bandındaki en az değerindedir. Bu özellikler grafik 2.6’da görülmektedir.

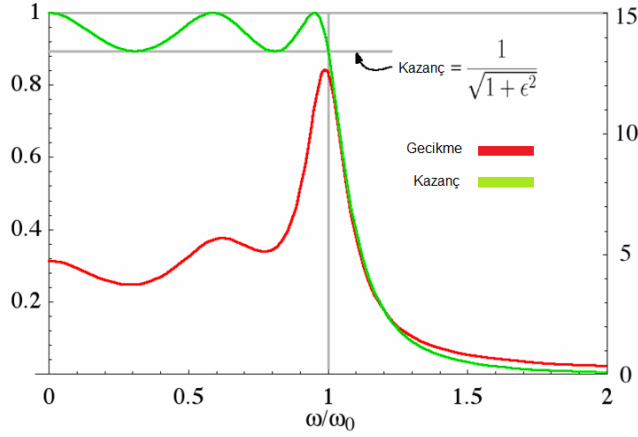


Şekil 2.6 Chebyshev süzgeci kazanç frekans karakteristiği

Chebyshev süzgecin derecesi, analog tasarımda kullanılan reaktif elemanların (L ve C) sayısına eşittir. Butterworth süzgeçten farklı olarak Chebyshev süzgecin kutupları s düzleminde elips şeklinde konumlanır. Süzgecin kararlılığı ve nedenselliği için sanal eksenin sol tarafındaki kutuplar (negatif kutuplar) seçilir. Aksi takdirde aktarım işlevi sonsuza gider veya aşırı salınımlar meydana gelir, bu da süzgecin gerçekleşmesini olanaksız kılar. Nedensel ve kararlı süzgecin aktarım işlevi aşağıdaki gibidir. Buradaki s_{pm}^- negatif kutupları temsil eder.

$$H(s) = \prod_{m=0}^{n-1} \frac{1}{(s - s_{pm}^-)} \quad (2.11)$$

3. dereceden Chebyshev (tip1) süzgecin grup gecikme ve kazanç eğrileri $\epsilon=0.5$ için aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Şekil 2.7 Grup gecikmesi ve genlik değişimi

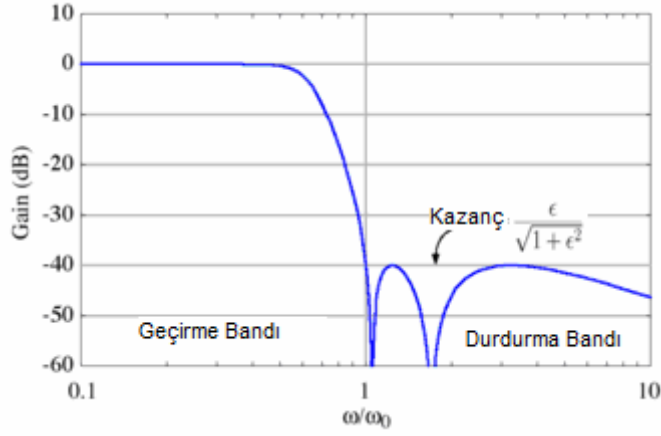
2.2.3. Chebyshev tip 2 süzgeç

Bu süzgecin kullanımı pek yaygın değildir. Çünkü geçiş bandı diğer tipine göre daha uzundur. Chebyshev tip 2 süzgecinde 1. tipin aksine geçirme bandındaki dalgalıklar durdurma bandındadır. Tekdüze (monotonic) azalma durdurma bandı yerine geçirme bandındadır.

Chebyshev tip2 süzgecin tanımı:

$$G_n(\omega, \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2 T_n^2(\omega_0/\omega)}}} \quad (2.12)$$

Durdurma bandında Chebyshev çokterimlisi 0 ile 1 arasında salınım yapar. Dolayısıyla kazanç 0 ile $\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\epsilon^2}}}$ arasında değişir.



Şekil 2.8 Chebyshev 2 süzgeci kazanç frekans karakteristiği

2.2.4. Eliptik süzgeç (Cauer süzgeç)

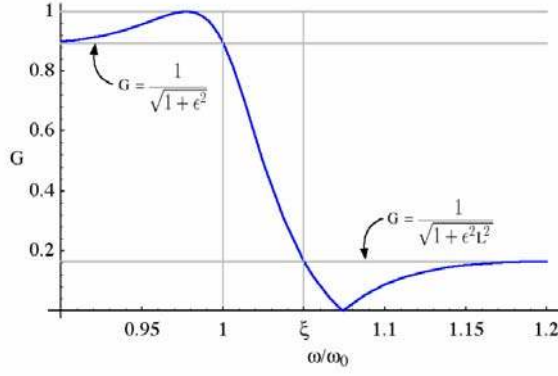
Eliptik süzgeç, geçirme ve durma bandında sayıları birbirinden bağımsız olarak değiştirilebilen, eş dalgacıklar barındıran bir elektronik süzgeç çeşididir. Aynı dereceden başka bir süzgece göre geçiş bölgesi daha kısadır. Eliptik süzgeç, tanıtılan diğer süzgeçlere bu dalgacıkların karakteristiklerinin değiştirilmesiyle dönüşebilir. Durma bandındaki dalgacıklar sıfıra yaklaştığında Chebyshev tip1, geçirme bandındaki dalgacıklar sıfıra yaklaştığında Chebyshev tip2, her iki banttaki dalgacıklar sıfıra yaklaştığında da Eliptik süzgeç Butterworth süzgece dönüşebilir. Eliptik süzgecin aktarım işlevi denklem 2.13'te verilmiştir.

$$G_n(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 R_n^2(\xi, \omega/\omega_0)}} \quad (2.13)$$

R_n : n. dereceden Eliptik rasyonel fonksiyonu

ω_0 :Kesme frekansı, ϵ :dalgacık katsayısı , ξ :seçicilik katsayısı

ϵ Geçiş bandındaki, ξ ve ϵ durdurma bandındaki dalgacık karakteristiğini belirlemede kullanılır. 4.dereceden eliptik süzgecin $\epsilon = 0.5$ ve $\xi = 1.05$ iken kazanç-frekans gösterimi şekil 2.9'da olduğu gibidir.



Şekil 2.9 Eliptik süzgeç kazanç frekans karakteristiği

Geçirme bandında, eliptik fonksiyon 0 ve 1 arasında değişirken; kazanç 1 ve $1/\sqrt{1+\epsilon^2}$ arasında değer alır.

Durdurma bandında eliptik fonksiyon ∞ ve ayırım katsayısı L_n arasında değişirken; kazanç 0 ile $1/\sqrt{1+\epsilon^2 L_n^2}$ arasında değer alır.

$$L_n = R_n(\xi, \xi)$$

$\xi \rightarrow \infty$ limitinde iken Eliptik fonksiyonu Chebyshev çokterimlisine dönüşür, dolayısıyla süzgeç ϵ dalgacık katsayısı ile Chebyshev tip1 süzgece dönüşür. Benzer şekilde limit $\xi \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$ ve $\omega_0 \rightarrow 0$ iken, $\epsilon R_n(\xi, 1/\omega_0) = 1$ olur. Dolayısıyla süzgeç Butterworth süzgece dönüşür. Yine aynı limitlerde $\xi\omega_0 = 1$ ve $\epsilon L_n = \alpha$ olduğunda süzgeç Chebyshev tip 2'ye dönüşür. [19]

3. SAYISAL FİLTRELERİN TANIMLANMASI VE GERÇEKLEŞTİRİLMESİ

Analog süzgeçler diferansiyel denklemlerle tanımlanırlar. Sayısal süzgeçler ise fark denklemleri ile tanımlanırlar. Sayısal süzgeçler süzgecin girişine karşı verdiği cevaba göre tekrarlı ve tekrarsız süzgeçler olarak iki sınıfa ayrılırlar.

Girişine $x(nT)$ verilen sayısal süzgecin yanıtı, $Y(nT) = \{f\ldots, x(nT-T), x(nT), x(nT+T), \ldots\}$ şeklinde yalnızca girişe ait bilgilerden oluşuyorsa, bu tip süzgeçlere tekrarsız süzgeçler denir. Doğrusal zamanla değişmeyen bir tekrarsız süzgecin yanıtı genel olarak

$$y(nT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i \cdot x(nT - iT) \quad (3.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burada a_i değeri sabit değerdir. Genel olarak sayısal sistemlerin nedensel olması istenir.

Böylece N. Dereceden doğrusal, tekrarsız ve zamanla değişmeyen süzgecin cevabı şeklinde olur.

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x(nT - iT) \quad (3.2)$$

Eğer süzgecin çıkışında elde edilen $y(nT)$ dizisi, giriş işaretine ek olarak çıkışın da geciktirilmiş bilgilerinden oluşuyorsa, bu tip süzgeçler tekrarlı süzgeçler olarak tanımlanır. Doğrusal, zamanla değişmeyen, nedensel ve N. Dereceden bir tekrarlı süzgecin çıkışı;

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N a_i \cdot x(nT - iT) - \sum_{i=1}^N b_i \cdot y(nT - iT) \quad (3.3)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer $i=1,2,3.. N$ için $b_i=0$ ise, süzgeç tekrarsız süzgece dönüşür.

3.1. Sayısal Süzgecin Aktarım İşlevi

Doğrusal, zamanla değişmeyen nedensel sistemlerde çıkış bilgisinin, giriş ve birim örnek cevap fonksiyonu cinsinden ifadesi,

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N x(iT)h(nT - iT) \quad (3.4)$$

evrişim toplamı ile verilir. Bu ifadeye z dönüşümü uygulanırsa

$$Y(z) = H(z).X(z) \quad (3.5)$$

halini alır. Burada açıkça görüldüğü gibi sayısal süzgeçlerde aktarım işlevi, çıkışın z dönüşümünün girişin z dönüşümüne oranıdır. Aslında bir sayısal süzgecin aktarım işlevi süzgecin birim örnek cevabının z dönüşümüdür.

z etki alanındaki transfer fonksiyonu olan H(z), süzgecin fark denklemlerinden yararlanarak da elde edilir.

$$y(nT) = \sum_{i=0}^N a_i x(nT - iT) - \sum_{i=1}^N b_i y(nT - iT) \quad (3.6)$$

denkleminin z dönüşümü:

$$Y(z) = \left\{ \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \right\} X(z) - \left\{ \sum_{i=1}^N b_i z^{-i} \right\} Y(z) \quad (3.7)$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N b_i z^{-i}} = \frac{a_N}{b_N} \frac{\sum_{i=1}^N (z - s_i)}{\sum_{i=1}^N (z - p_i)} \quad (3.8)$$

Tekrarsız süzgeçlerde $i=1,2,3 \dots N$ için $b_i=0$ olduğundan,

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{N-i}}{z^N} \quad (3.9)$$

Görüldüğü gibi bu tip süzgeçlerde kutupların hepsi z düzleminin merkezindedir. Doğrusal, zamanla değişmeyen sistemlerde $H(z)$ aktarım işlevi kararlı olmalıdır. Bunun için şu şartlar sağlanmalıdır.

1. Aktarım işlevinin kutupları, birim çember içersinde olmalıdır.
2. Birim çember üzerinde kutup varsa, tek katlı basit kutup olmalıdır.
3. Payda çokterimlisinin derecesi, pay çokterimlisinin derecesinden büyük veya ona eşit olmalıdır.

Süzgeç uygulamalarında salınımın önlenmesi için birim çember üzerindeki kutuplara basit de olsa müsaade edilmez.

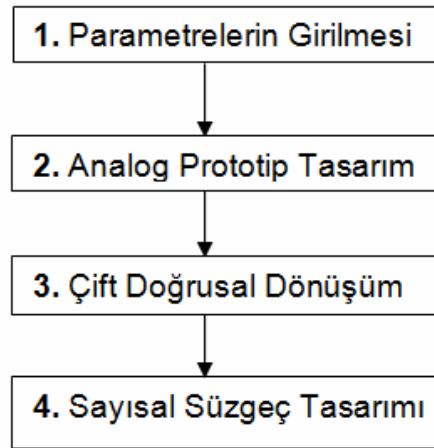
3.1.1. Tekrarlı ve tekrarsız süzgecin özellikleri

1. FIR süzgeçler tam olarak doğrusal fazlı ve önceden belirlenmiş genlik frekans karakteristiklerini sağlayacak şekilde tasarlanabilirler. IIR süzgeçlerin faz cevabı özellikle bant kenarlarında doğrusal değildir.
2. FIR ve IIR süzgeçler hem tekrarlı hem de tekrarsız olarak gerçekleştirilebilirler. Ancak genellikle IIR süzgeçler tekrarlı, FIR süzgeçler tekrarsız olarak gerçekleştirilir.
3. Tekrarsız olarak gerçekleştirilen bir FIR süzgeç daima kararlı iken IIR süzgeçler daima kararlı değildir.
4. IIR süzgeçlerin gerçekleştirilmesinde doğal olarak nicemleme ve yuvarlama hataları ortaya çıkar. Ancak FIR süzgeçlerin tekrarsız gerçekleştirilmesinde bu hatalar önemsizdir.
5. Analog süzgeçler, benzer şartları yerine getiren IIR sayısal süzgeç denklemlerine kolayca dönüştürülebilirler. FIR süzgeçlerin analog karşılığı olmadığı için bu durum FIR süzgeçler için mümkün değildir.

3.2. Tekrarlı Süzgeç Tasarımı

Tasarım işlemindeki benzerlikler nedeniyle bu tip süzgeçleri analog süzgeçlerin sayısal uygulaması olarak düşünebiliriz. Bu süzgecin çıkışı geçmişteki ($y(n-k)$ $k=1,..M$) süzgeç çıkışının, şimdiki ve geçmişteki süzgeç girişinin ($x(n-k)$ $k=0,1..N$) bir fonksiyonudur. Bundan dolayı tekrarlı süzgeçler adeta geri beslemeli bir sisteme benzemektedir. Tekrarlı süzgeçler aynı şartlardaki tekrarsız bir süzgece göre daha az katsayı gerektirirler. Keskin bir frekans ve yüksek bir doğruluk istendiğinde bu süzgeçler kullanılır. Aktarım işlevi çarpanlarına ayrıldığında payda bulunan kendisini sıfır yapan değerler $H(z)$ nin sıfırları, paydada bulunan ve $H(z)$ yi sonsuz yapan değerler ise, $H(z)$ nin kutupları olarak isimlendirilir.

Tasarım aşamasında izlenen yol şu şekildedir;



Şekil 3.1 Tekrarlı süzgeç tasarımı

1. Süzgeç özelliklerini tanımlayan parametreler girilir.
2. Verilen giriş koşulları yardımı ile analog süzgeç tasarım teknikleriyle, aktarım işlevi $H(s)$ elde edilir.
3. Çift doğrusal dönüşüm yöntemiyle ayrık zamanda süzgeç aktarım işlevi, $H(z)$ elde edilir.
4. Ayrık zamanda hassasiyeti arttırmak için çeşitli tasarım teknikleri uygulanır.

Dönüşüm sırasında dikkat edilmesi gereken iki nokta vardır. Birincisi, s düzlemindeki sanal eksenin, z düzleminde birim çember üzerine denk gelmesi ve bu işlem sırasında sinyalin frekans karakteristiğinin bozulmamasıdır. İkincisi ise, s düzleminde, sol yarı eksenin, z düzleminde birim çemberin içindeki bölgeye denk gelmesi ve bu işlem sırasında sistemin karalılığının bozulmamasıdır. Sayısal süzgecin özellikleri genlik karakteristiği, faz karakteristiği ve performans özelliklerinden (sinyal karakteristiği, sonlu kelime uzunluğu, frekans cevap karakteristiği vb..) oluşmaktadır. Ancak gerçek bir tasarımda karalılık, nedensellik ve basitlik koşullarından dolayı sadece genlik karakteristiği ele alınır. Böylece tasarım problemi $H(w)$ 'nin istenen karakteristiğini sağlayacak a_k ve b_k katsayılarının bulunmasına indirgenebilir. Sayısal tasarım için aktarım işlevinin s düzleminde z düzlemine geçmesi gerekmektedir. Bunun için birçok yöntem vardır:

1. Değişmeyen birim örnek yanıtı yöntemi
2. Düzenlenmiş değişmeyen birim örnek yanıtı yöntemi
3. Çift doğrusal Dönüşüm

Bu yöntemlerden en yaygın kullanılanı Çift Doğrusal Dönüşüm yöntemidir. Bu dönüşüm kararlılık özelliğiyle dönüştürdüğü sürekli sinyalin tüm frekans bileşenlerini eksiksiz olarak kesikli sinyale haritalar. Bunun anlamı analog sinyalde görünen kazanç ve faz kayması sayısal sinyalde değişmez. Eğer sinyal analog etki alanında kararlıysa (kutuplar s düzleminin sol tarafındaysa) sayısal etki alanında da kararlıdır (kutuplar z düzlemi birim çemberinin içine haritalanır). Eğer sinyal minimum fazda ise (sıfırlar s düzleminin sol tarafında ise) dönüşüm sonrası sayısal etki alanında da minimum fazdadır (sıfırlar z düzlemi birim çemberinin içine haritalanır). Sadece çarpılma etkisiyle frekansların yerleri değişebilir. Bu durum daha çok yüksek frekans bileşenlerinde gerçekleşir. Ancak ön çarpılma tekniği ile düzeltilebilir.

3.2.1. Çift doğrusal dönüşüm

Bu yöntemde $H_a(s)$ analog aktarım işlevi yerine

$$s = k \cdot (z-1/z+1); k= 1 \text{ veya } =2/T \quad (3.10)$$

konularak $H_d(z)$ sayısal süzgeç fonksiyonu elde edilir. Bu yöntemde dikkat edilmesi gereken bir husus vardır. S düzleminde $s=jw$ ekseninin $[-w/2, +w/2]$ arasında kalan kısmı, yapılan dönüşüm işlemi sonucunda z düzleminde birim çemberin tümüne denk gelmez. $-w/2$ ile $+w/2$ arasındaki B-D bölgesi, $B'-D'$ bölgesine sıkışmaktadır. Bu durum çarpılma etkisi olarak adlandırılmaktadır. Bu etki, verilen frekans giriş karakteristiğine

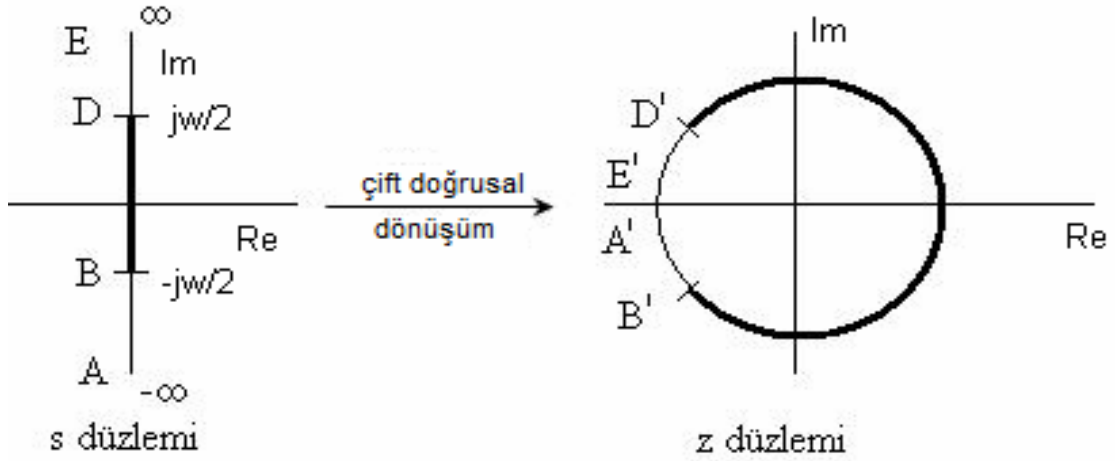
$$\Omega = (2/T) \tan(wT/2) \quad (3.11)$$

şeklindeki ön çarpılma formülünün uygulanması ile ortadan kaldırılabilir. O zaman şekil 3.2 de görüldüğü gibi B-D bölgesi, z düzleminde $z=-1$ noktasında yani E' veya A' noktasında birleşirler. Bu şekilde elde edilen $H(s)$ için de,

$$H_a(s) = H(s) \Big|_{s = s/\Omega} \quad (3.12)$$

uygulanır ve sayısal süzgeç fonksiyonu elde edilir;

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = (2/T) \cdot (z-1/z+1)} \quad (3.13)$$



Şekil 3.2 Çift doğrusal dönüşüm

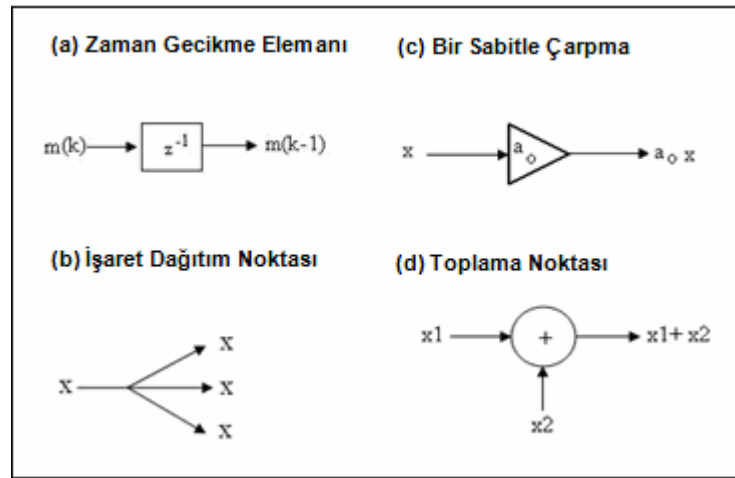
Çift doğrusal dönüşümün temel özellikleri aşağıda özetlenmiştir;

1. s düzleminde sağ yarı düzlem bölgesi, z düzleminde $z=1$ birim çemberi dışındaki noktalara karşı düşer
2. s düzleminde sanal eksen üzerindeki noktalar $z=1$ birim çemberi üzerine karşı düşer.
3. s düzleminde sol yarı düzlem bölgesi, z düzleminde $z=1$ birim çemberi içindeki noktalara karşı düşer.

2. özellik sayesinde $H_a(jw)$ 'nın maksimum ve minimum değerleri $H(e^{j\Omega})$ içinde korunacaktır. Sonuç olarak analog süzgecin geçirme ve durdurma bandına ait özellikler, sayısal süzgecin bu bantlarında görünecektir. 3. özellik kararlı analog süzgeçlerin, kararlı sayısal süzgeç aktarım işlevi vereceğini gösterir. Dönüşüm sonucunda elde edilen $H(z)$ nin pay derecesi payda derecesi ile aynı olacaktır. O halde $H(z)$ gerçekleştirilebilir nedensel bir fonksiyondur. Süzgeç tasarımında yapılması gereken ilk iş tekrarlı ve tekrarsız süzgeçler arasında bir seçim yapmaktır. Tekrarlı süzgeçte kutuplar birim çember içinde serbestken, tekrarsız süzgeçte bu kutuplar sabit ve katı bir şekilde bulunurlar. Ancak tekrarsız süzgeç tasarımında aynı özelliklerdeki tekrarlı bir süzgece göre süzgecin derecesi 5-10 kat büyük olmalıdır. Veri iletişimi gibi sabit grup gecikmesi istenen uygulamalarda tekrarlı süzgeçler kullanılır [20].

3.3. Sayısal Filtrelerin Gerçekleştirilmesi

Sayısal süzgecin gerçekleştirilmesi yazılım ve donanım olmak üzere ikiye ayrılır. Yazılım yönteminde süzgeç bilgisayar kullanılarak benzetimi yapılır. Donanımda ise birim geciktirme, eleman kaydırma (shift registers), toplama ve çarpıcıdır (NAND ve NOR kapıları içeren kombinasyonları veya ardışık devre elemanları kullanılır). Bu elemanlar ve bağlantıları süzgecin aktarım işlevini belirler. Bu elemanların matematiksel ifadeleri şekil 3.3 de gösterilmiştir.



Şekil 3.3 Gerçekleştirme elemanlarının gösterimleri

Gerçekleştirme için birçok yöntem vardır. Bunlardan en önemlileri:

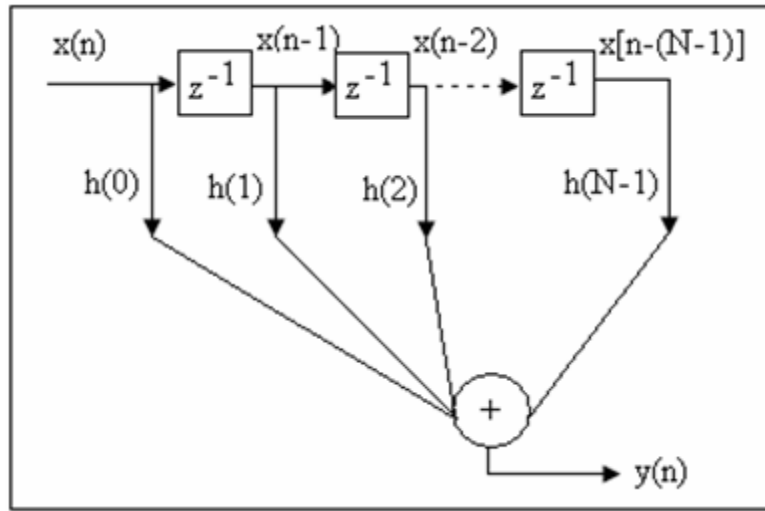
1. Direk Gerçekleştirme
2. Direk Doğal Gerçekleştirme
3. Seri (Kaskad) Gerçekleştirme
4. Paralel Gerçekleştirme
5. Basamak Gerçekleştirme
6. Kafes Gerçekleştirme

Bu yöntemler genellikle tekrarlı süzgeçler için kullanılırken tekrarsız süzgeçler için direk, doğrusal fazlı, hızlı evrişim, kafes gibi yapılar kullanılır. Bu yöntemlerin her birinde değişik sayıda eleman kullanılmakta ve bu elemanlar değişik şekillerde birbirine bağlanmaktadır.

3.3.1. Direkt (transversal) yapı

Bu gerçekleştirme şekilde görüldüğü gibi, girişi $x(n)$ olan süzgeç, tekrarsız FIR süzgecin karakteristik denklemini, $y(n)$ çıkışı ile verir.

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} h(n)x(k-n) \quad (3.14)$$



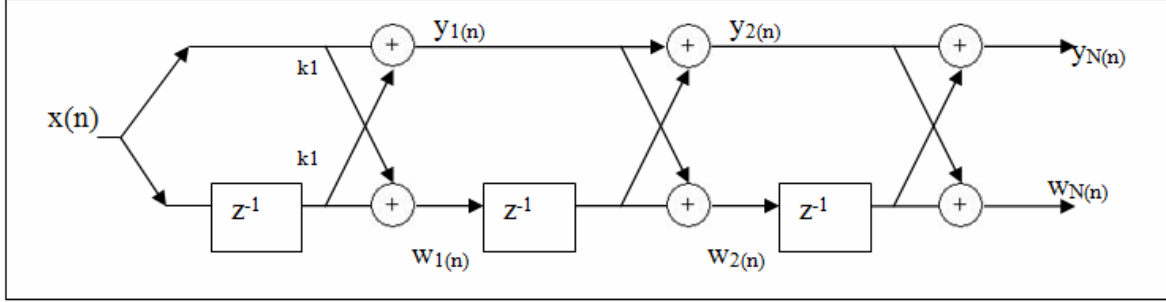
Şekil 3.4 Direkt yapıli gerçekleştirme

Böylece $x(n-1)$ bir örnek ile geciktirilmiş $x(n)$ dir. Sayısal gerçektelemede kutu içinde isimlendirilen z^{-1} kaydırmalı kaydedici (shift register) veya RAM deki bir hafıza yerini temsil eder. Çıkışın hesaplanmasında aşağıdaki elemanlara ihtiyaç vardır:

- $N-1$ giriş örneğini saklamak için $N-1$ hafıza yerine,
- N katsayıyı saklamak için N hafıza yerine
- N tane çarpıcıya
- $N-1$ toplayıcıya

3.3.2. Kafes yapısı

Kafes yapı genellikle uyarlamalı süzgeç ve ses işleme uygulamaları için kullanılır. Temel kafes yapısı tek giriş çift çıkış ile karakterize edilir.



Şekil 3.5 Kafes yapılı gerçekleştirme

N=1 için;

- $y_1(n) = x(n) + k_1 x(n-1)$
- $w_1(n) = k_1 x(n) + x(n-1)$

N uzunluklu bir tekrarsız Kafes yapının denklemleri,

$$y_n(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) \text{ ve } w_n(n) = \sum_{i=0}^N a_{N-i} x(n-i) \quad (a_0=1) \quad (3.15)$$

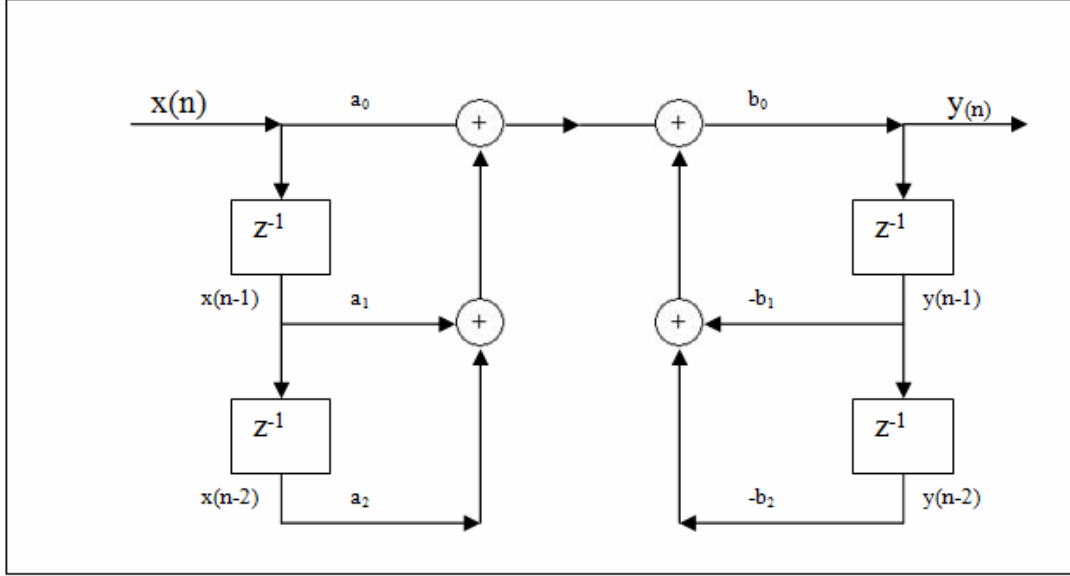
Z dönüşümü ile birim örnek cevapları,

$$Y_N(n) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \text{ ve } W_N(n) = \sum_{i=0}^N a_{N-i} z^{-i} \quad (3.16)$$

olur.

3.3.3. Direkt form – 1 yapısı

Tekrarlı IIR süzgeç için direkt form-1 yapısı ile gerçekleştirme aşağıdaki gibidir. N. dereceden bir süzgeç için z^{-1} ile temsil edilen 2N tane gecikme elemanı vardır (N=2 için 4 gecikme elemanı).



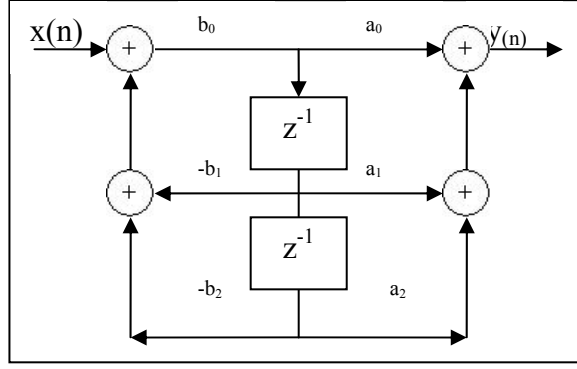
Şekil 3.6 Direkt Form – 1 Yapısı

$$y(n) = \sum_{k=0}^N a_k \cdot x(n-k) - \sum_{j=1}^M b_j \cdot y(n-j) \quad (3.17)$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^N a_k \cdot z^{-k}}{1 + \sum_{j=1}^M b_j \cdot z^{-j}} \quad (3.18)$$

3.3.4. Direkt form – 2 yapısı

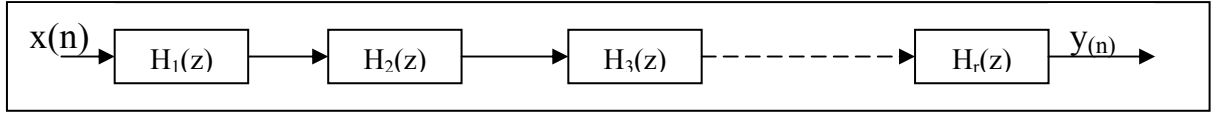
Bu yapıdaki gerçekleştirme form-1 yapısının eleman sayısının yarısı ile elde edilebilir.



Şekil 3.7 Direkt Form – 2 Yapısı

3.3.5. Seri (cascade) yapı

Aktarım işlevinin pay bölü payda olarak sadeleştirilip çarpımları cinsinden yazılabilir ve $H(z)=CH_1(z)H_2(z).....H_r(z)$ şeklini alır. Matematiksel açıdan pay ve payda faktörlerinin çıkışı sonucu etkilemez.

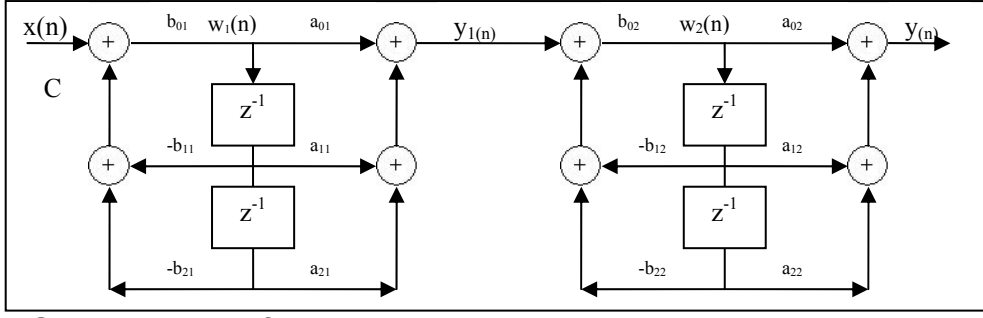


Şekil 3.8 Seri Yapı

Bu sayede karışık ve yüksek dereceden olan gerçekleştirme bu yapının dahil edilmesiyle kolaylaşır. Örnek olarak şekilde iki adet 2. dereceden direkt form-2 gerçekleştirilmesinin seri bağlanarak 4. dereceden aktarım işlevinin elde edilmesi görülmektedir.

$$H(z) = \frac{(a_{01} + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2})(a_{02} + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2})}{(1 + b_{11}z^{-1} + b_{21}z^{-2})(1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2})} \quad (3.19)$$

$$H(z) = \frac{(a_{01} + a_{11}z^{-1} + a_{21}z^{-2})}{(1 + b_{11}z^{-1} + b_{21}z^{-2})} \times \frac{(a_{02} + a_{12}z^{-1} + a_{22}z^{-2})}{(1 + b_{12}z^{-1} + b_{22}z^{-2})} \quad (3.20)$$



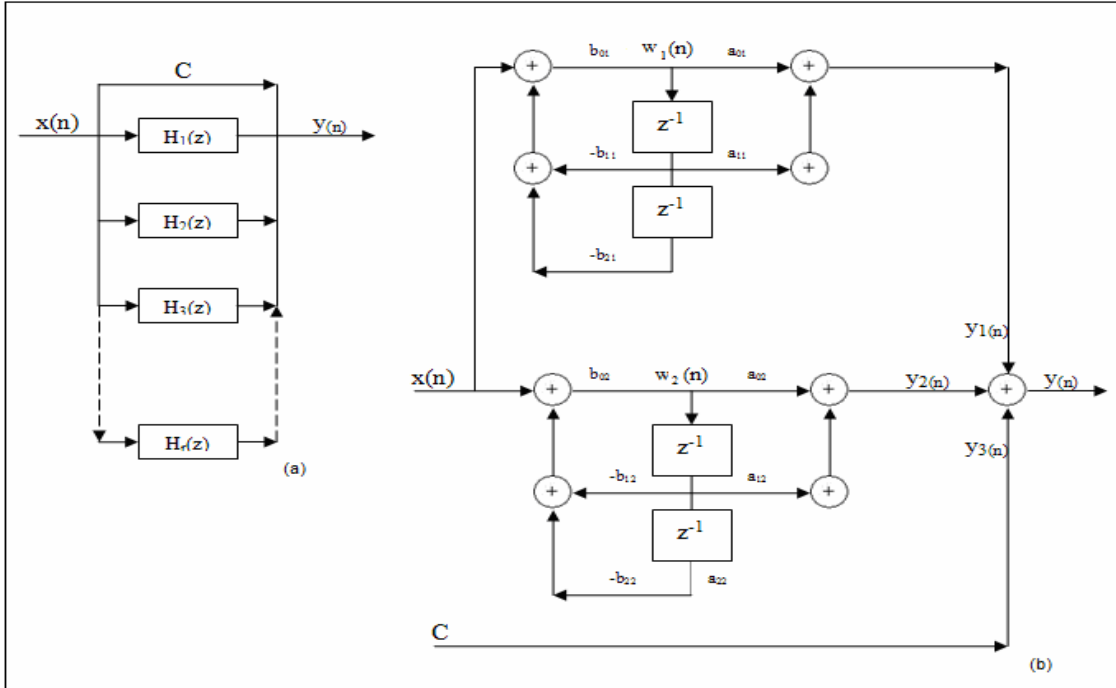
Şekil 3.9 Direkt form 2 yapısının seri kullanılması

3.3.6. Paralel gerçekleştirme

Tekrarlı süzgecin aktarım işlevi kısmi kesirlere ayrılığında ve fonksiyonun toplamaları cinsinden yazıldığında $H(z) = C + H_1(z) + H_2(z) + \dots + H_r(z)$ açılımı elde edilir. Bu alt fonksiyonlar 1. veya 2. dereceden olabilir.

N. derecen aktarım işlevi:

$$H(z) = C + \sum_{i=1}^{0.5N} \frac{(a_{0i} + a_{1i}z^{-1} + a_{2i}z^{-2})}{(1 + b_{1i}z^{-1} + b_{2i}z^{-2})} \quad (3.21)$$



Şekil 3.10 (a) Paralel gerçekleştirme (b) Direkt form 2 yapısının paralel kullanılması

4. OPTİMAL VE UYARLAMALI İSTATİSTİKSEL SÜZGEÇLER

Sinyal işleme uygulamalarında bir sinyali başka bir sinyalin verilerinden tahmin etmek önemli bir problemdir ve çok geniş bir uygulama alanına sahiptir. Optimal süzgeçler ile sayısal süzgeç kavramı artık frekans süzme amacını aşmıştır. Sayısal olarak sinyal biçimlendirme; kanal bozukluklarının telafisi, yankı giderme, gürültü giderme gibi özellikler kazanmıştır. Ölçülen ne çeşit bir sinyal olursa olsun (görüntü veya ses) belirli nedenlerden dolayı istenen bilgi ilk aşamada elde edilemeyebilir. Bunun sebebi ortamın gürültülü olmasından kaynaklanabileceği gibi, ölçüm sırasında kullanılan ekipmanın ancak sınırlı çözünürlük sağlayabilmesinden kaynaklanan bozulmalar da olabilir. Bu gibi durumlarda klasik olarak kullandığımız alçak geçiren, yüksek geçiren ve bant geçiren süzgeçlerin kullanımı yetersiz kalabilir. Bu yüzden bozulmuş sinyalden en iyi tahminle doğru sinyali çıkartabilecek süzgeçlere ihtiyaç duyarız. Bu tip süzgeçler Optimal İstatistiksel Süzgeç olarak adlandırılır.

4.1. Wiener Süzgeç

Genellikle gürültü temizleme ve doğrusal tahmin gibi sayısal sinyal işleme yöntemlerinde kullanılan optimal bir sayısal süzgeçtir. Amaç giriş sinyalinden istenen içeriği yine giriş sinyalinin şimdiki ve geçmiş istatistiksel verilerinden faydalanarak çıkartmaktır. Bu yöntemde kullanılan istatistiksel ilişkiler aşağıdaki şekilde özetlenebilir. Bu tanımların formülleri ve uygulamaları konu anlatımı içinde yer alacaktır.

İlinti (Korelasyon): İki bağımsız değişken arasındaki doğrusal ilişkinin yönünü ve kuvvetini belirtir. Bağımsızlık durumundan ne kadar uzaklaşıldığını gösterir.

Çapraz İlinti (Çapraz Korelasyon): İki rastsal değişken arasındaki istatistiksel benzerliğin ölçüsüdür. Çapraz ilinti evrişim (convolution)'e çok benzer. Evrişim sinyalin tersini aldıktan sonra kaydırıp çarparken, çapraz ilinti tersini almadan kaydırıp diğer fonksiyonla çarpar.

Öz İlinti (Oto Korelasyon): Çapraz ilintiden farkı başka bir değişken yerine sinyalin kendi kendisiyle olan ilişkisini verir.

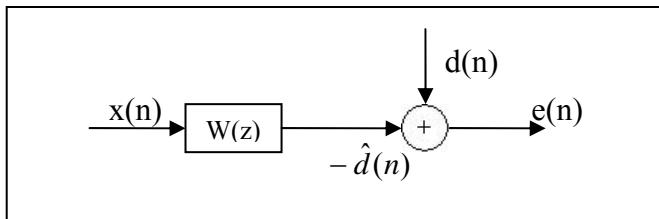
Ortalama (Beklenen) Değer: Bir rastsal değişkeninin alabileceği bütün değerlerin, olasılıklarıyla çarpılması ve bu işlemin bütün değerler üzerinden toplanmasıyla elde edilen değerdir.

Ortalama Karesel Hata: Tahmin edilen değerle istenen değer arasındaki farkın, yani hatanın ortalama (beklenen) değeridir.

Wiener Süzgeç'te istenen sinyale en yakın olan sinyali seçebilmek için MSE'nin en aza indirgenmesi gerekmektedir.

$$x(n) = d(n) + v(n) \quad (4.1)$$

Denklemden $d(n)$ ve $v(n)$ 'nin istatistiksel olarak birbiriyle ilişkili ve geniş anlamda durağan olması istenir. Bir sinyalin geniş anlamda durağan olması beklenen değerinin zamanla değişmemesi ve öz ilinti işlevinin sadece zaman farkına bağlı olması anlamına gelmektedir. Ayrıca varyansının da sonlu olması gerekir.



Şekil 4.1 Wiener Süzgeç

FIR süzgecin aktarım işlevi, $(w(n))$ süzgeç katsayıları

$$W(z) = \sum_{n=0}^{p-1} w(n)z^{-n} \quad (4.2)$$

Çıkış $\hat{d}(n)$, girişin $x(n)$ ve $w(n)$ nin evrişimine eşittir.

$$\hat{d}(n) = \sum_{l=0}^{p-1} w(l)x(n-l) \quad (4.3)$$

Daha önce de belirtildiği gibi amaç MSE 'yi minimize eden süzgeç katsayısını, $w(n)$ 'yi bulmaktır. Optimizasyon teorisinde gerçel x değişkenli, $f(x)$ gibi skalar bir fonksiyonun türevinin sıfıra eşitlenmesinin, fonksiyonun global en küçük değerinin elde edilmesini sağladığını biliyoruz. Bunun için MSE'yi $w(n)$ 'nin eşleniğine göre türevini alıp sıfıra eşitlememiz gerekir.

$$\xi = E\{|e(n)|^2\} \quad e(n) = d(n) - \hat{d}(n) \quad (4.4)$$

$$\xi = E\{|e(n) = d(n) - \hat{d}(n)|^2\} \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial w^*(k)} = \frac{\partial E\{e(n)e(n)^*\}}{\partial w^*(k)} = E\left\{e(n) \frac{\partial e^*(n)}{\partial w^*(k)}\right\} = 0 \quad (4.6)$$

$$e(n) = d(n) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)x(n-l) \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial e^*(n)}{\partial w^*(k)} = -x^*(n-k) \quad (4.8)$$

$$E\{e(n)x^*(n-k)\} = 0; \quad k = 0,1,2,\dots, p-1 \quad (4.9)$$

$$E\{d(n)x^*(n-k)\} - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)E\{x(n-l)x^*(n-k)\} = 0 \quad (4.10)$$

$x(n)$ ve $d(n)$ WSS olduğunu kabul edersek

$$E\{x(n-l)x^*(n-k)\} = r_x(k-l) \text{ ve } E\{d(n)x^*(n-k)\} = r_{dx}(k) \quad (4.11)$$

$$\sum_{l=0}^{p-1} w(l)r_x(k-l) = r_{dx}(k); \quad k = 0,1,2,\dots, p-1 \quad (4.12)$$

Bu denklem bize p bilinmeyenli p adet denklemi öz ilinti matrisinden çıkartabilmemize olanak sağlar.

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \cdots & \cdots & r_x^*(p-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & \cdots & r_x^*(p-2) \\ r_x(2) & r_x(1) & \cdots & \cdots & r_x^*(p-3) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \\ \vdots \\ w(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{dx}(0) \\ r_{dx}(1) \\ r_{dx}(2) \\ \vdots \\ r_{dx}(p-1) \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Bu matris eşitliğine Wiener-Hopf denklemleri olarak belirtilmektedir. Vektörel olarak ifadesi 4.14 de belirtilmiştir.

$$R_x w = r_{dx} \quad (4.14)$$

Buradaki R_x öz ilinti $p \times p$ Hermitian Toeplitz matrisidir. W süzgeç katsayıları vektörü, r_{dx} ise $d(n)$ ve $x(n)$ arasındaki çapraz ilinti vektörüdür.

Ortalama karesel hata (MSE) aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$\xi_{\min} = E\{|e(n)|^2\} \rightarrow \xi_{\min} = E\left\{\left|e(n) \cdot (d(n)^* - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)x(n-l))\right|\right\} \quad (4.15)$$

$$\xi_{\min} = E\{|e(n) \cdot d(n)^*|\} \rightarrow \xi_{\min} = E\left\{\left|\left(d(n) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)x(n-l)\right) d(n)^*\right|\right\} \quad (4.16)$$

$$\xi_{\min} = E\left\{\left|\left(d(n) \cdot d(n)^* - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)x(n-l) \cdot d(n)^*\right)\right|\right\} \quad (4.17)$$

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)r_{dx}^*(l) \quad (4.18)$$

4.2. Doğrusal Tahmin

$x(n+1)$ 'in $x(n)$ 'nin şimdiki ve geçmiş değerlerinin kombinasyonları ile ifade edilmesidir.

$$\hat{x}(n+1) = \sum_{l=0}^{p-1} w(l)x(n-l) \quad k = 0,1,2,\dots, p-1 \quad (4.19)$$

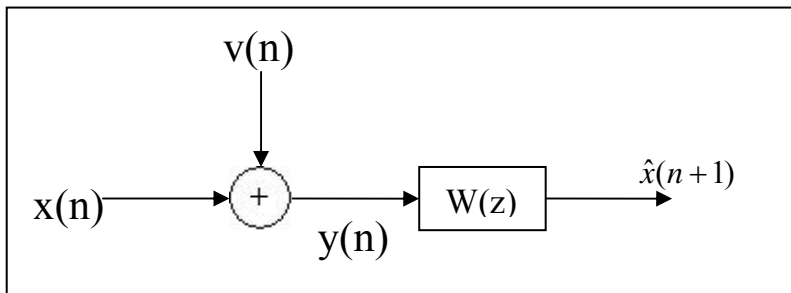
Bu problemi daha önce anlatılan Wiener süzme probleminde $d(n)$ yerine $x(n+1)$ koyduğumuzda ve benzer çözümle, Wiener – Hopf denklemi optimal doğrusal tahmini için aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} r_x(0) & r_x^*(1) & \cdots & \cdots & r_x^*(p-1) \\ r_x(1) & r_x(0) & \cdots & \cdots & r_x^*(p-2) \\ r_x(2) & r_x(1) & \cdots & \cdots & r_x^*(p-3) \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ r_x(p-1) & r_x(p-2) & \cdots & \cdots & r_x(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(0) \\ w(1) \\ w(2) \\ \vdots \\ w(p-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x(1) \\ r_x(2) \\ r_x(3) \\ \vdots \\ r_x(p-1) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

MSE yine benzer şekilde aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\xi_{\min} = r_d(0) - \sum_{l=0}^{p-1} w(l)r_x^*(l+1) \quad (4.21)$$

Daha gerçekçi bir sistem için gürültülü ortamda yapılan doğrusal tahmini inceleyelim.



Şekil 4.2 Doğrusal Tahmin

$$y(n) = x(n) + v(n)$$

$$\hat{x}(n+1) = \sum_{l=0}^{p-1} w(l)y(n-l) = \sum_{k=0}^{p-1} w(k)[x(n-k) + v(n-k)] \quad (4.22)$$

Wiener – Hopf vektörel denklemi:

$$R_y w = r_{dy} \quad (4.23)$$

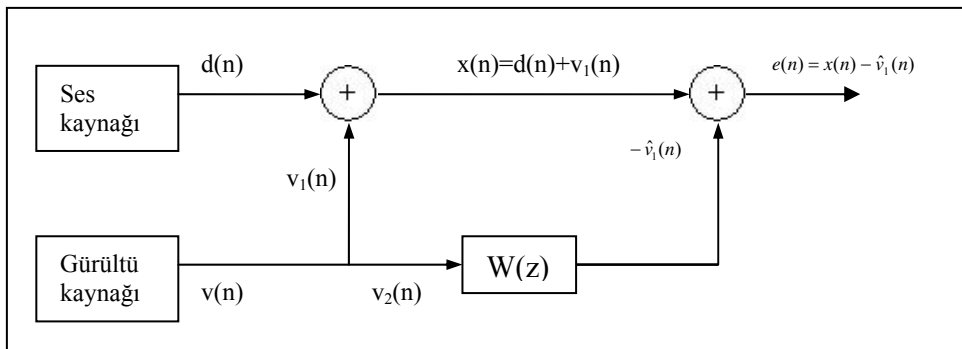
Eğer $v(n)$, $x(n)$ ile ilişkili değilse, $y(n)$ 'nin öz ilinti matrisi, ikisinin toplamı cinsinden yazılabilir.

$$R_y(k) = r_x(k) + r_v(k) \quad (4.24)$$

$d(n)$ ve $y(n)$ arasındaki çapraz ilinti ise $r_{dy} = r_x(k+1)$ e eşittir.

4.3. Gürültü Temizleme

Wiener Süzgecin en önemli kullanım alanı gürültü yok etmektir. Buradaki amaç gürültülü bir ortamdan istenen temiz sinyali elde etmektir. Fakat süzmede olduğu gibi gürültünün öz ilintisi verilmek yerine, bu bilgi sadece gürültüyü kaydeden ikincil bir algılayıcı tarafından alınır. Fakat birincil ve ikincil algılayıcıdan alınan gürültüler çeşitli sebeplerden dolayı (algılayıcı karakteristiği, yayılma paterni gibi) aynı olmadıklarından sadece çıkarma işlemi ile sinyali temizlemek mümkün değildir. Bu yüzden Wiener süzgeç ikincil algılayıcı tarafından ölçülen gürültü ile birincil algılayıcıdan ölçülecek sinyali tahmin eder.



Şekil 4.3 Gürültü Temizleme

Bu sistemin en çok kullanım alanı uçak-helikopter telsiz haberleşme sistemlerindedir. Pilotlar arası veya pilot kule arası haberleşme, pilot köşkü

içindeki motor ve rüzgâr sesinden konuşmaların anlaşılması zordur. Bu zorluğu gidermek için pilot köşküne yerleştirilen ikincil bir mikrofon ile konuşmalardaki gürültü tahmin edilip, ses sinyali temizlenmeye çalışılır. Gürültü tahmini için Wiener-Hopf denklemleri aşağıdaki gibidir.

$$R_{v2} w = r_{v1v2} \quad (4.25)$$

R_{v2} ikincil algılayıcı tarafından ölçülen gürültünün öz ilinti matrisidir.

R_{v1v2} ise istenen gürültü çıkışı $v_1(n)$ ile ölçülen gürültü çıkışının $v_2(n)$ çapraz ilinti vektörüdür. Eğer $d(n)$ ile $v_2(n)$ ilişkili değilse r_{xv2} olarak da yazılabilir.

$$R_{v2} w = r_{xv2} \quad (4.26)$$

4.4. Uyarlamalı Süzgeçler

Uyarlamalı süzgeçlerin en yaygın ve bilinenleri LMS ve RLS algoritma tabanlı sayısal süzgeçlerdir. Bu süzgeçler ayrıca içlerinde kullandıkları adaptasyon algoritmasındaki küçük değişikliklerle ve işleyecekleri sinyalin karakteristiğine göre alt kümelerle ayrılırlar. Uyarlamalı yapılar bu çalışmanın kapsamı dışında fakat yakın ilişki içinde olduğundan bu konuyla ilgili sadece özet bilgi verilip temellerine değinilecektir. Daha önce anlatılan Wiener yaklaşımında sisteme giren sinyallerin durağan olduğunu öngörmüştük. Durağan bir sistem stokastik yapıdadırlar. Sistem parametrelerinin olasılık dağılımı (ortalama değer veya varyans) sürecin başında ve sonunda aynıdır. Buna örnek olarak beyaz gürültüyü (white noise) verebiliriz.

Gerçek hayattaki çoğu süreç durağan değildir yani “Power spectrum density” sinyalin tüm bantlarında eşit güç seviyelerinde değildir. Buna örnek olarak renkli gürültüyü, (colored noise) verebiliriz. Hareketli süreçlerin uyarlamalı olmayan optimal süzgeçlerle çözümlenme imkanı olsa da birçok sebepten ötürü tercih edilmemektedir. Bu yöntemler hareketli süreçleri durağan olduğu varsayılan bölümlere ayırıp, ilgili parametrelerin hesaplanıp birleştirilmesi üzerine kurulmuştur. Ancak hızlı değişen sistemlerde çözünürlük, etkinlik ve adım değişiklikleri ile sorunlar, doğru bir modelin her koşulda oluşturulmasını

engellemektedir. $D(n)$ ve $x(n)$ durağan ise süzgeç çıkışı aşağıdaki gibi tanımlandığı daha önce belirtilmişti.

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^p w(k)x(n-k) \quad (4.27)$$

Ancak bu süreçler sürekli olursa denklemi aşağıdaki gibi olacaktır

$$\hat{d}(n) = \sum_{k=0}^p w_n(k)x(n-k) \quad (4.28)$$

n zamanındaki ağırlık vektörü katsayıları;

$$w_n = [w_n(0), w_n(1), \dots, w_n(p)]^T \quad (4.29)$$

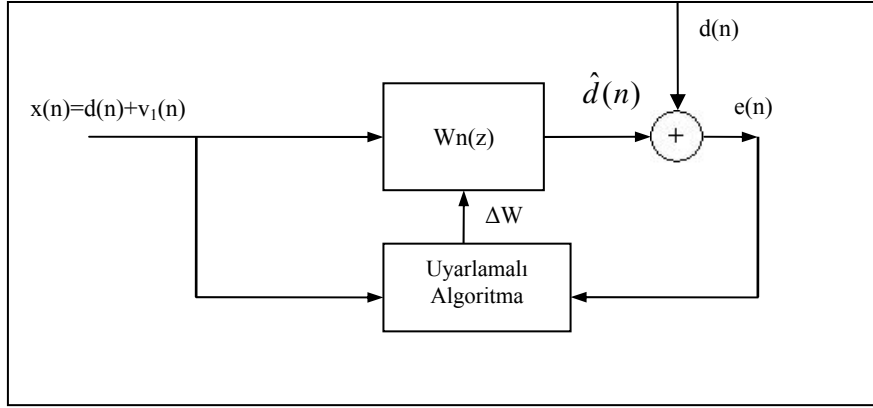
Giriş sinyali:

$$x(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-p)]^T \quad (4.30)$$

Durağan olmayan süreçlerin çözülmesi durağan süreçlerin çözülmesinden daha zordur. Bunun sebebi durağan olmayan süreçte her n değeri için $w_n(k)$, $k=0,1, \dots, p$ hesaplanması gerekmektedir. Bu işlem her seferinde sürecin parametrelerinin baştan hesaplanması yerine güncelleme tekniği ile kolaylaştırılmıştır. Bu teknik uyarlamalı yapının temel dayanağıdır.

$$w_{n+1} = w_n + \Delta w_n \quad (4.31)$$

Burada Δw_n n zamanında w_n 'e uygulanan düzeltme veya güncelleme etkisi olarak adlandırılır.



Şekil 4.4 Uyarlamalı yapı

5. DALGACIK (WAVELET) DÖNÜŞÜMÜ

Dalgacık konusu yeni sayılabilecek bir konudur. Aslında temelleri bir asır öncesinde JBJ Fourier'e dayansa da, son 15 sene içerisinde (1982-Morlet, Ares, Fourgeau ve Giard , 1983- Morlet, 1984-Grossmann ve Morlet) asıl gelişmesini göstermiştir. Dalgacık dönüşümünün bu kadar başarılı olmasının birkaç sebebi vardır. Birincisi dalgacık konusu 20-30 sene içerisindeki mühendislik (alt bant kodlaması), fizik (bağdaşık durumlar, tekrar normalleştirme grupları) ve saf matematik (Calderon-Zygmund işlemleri) konularının sentezinden meydana gelmektedir. Disiplinler arası bu ilişkinin sonucu olarak da farklı geçmiş birikimlere sahip mühendis ve bilim adamlarının uğraş konusu olmuştur. İkinci sebep ise dalgacık konusu kendisine çok geniş uygulama alanı bulabilmiştir. Sinyal işlemede (imge ve ses) ve nümerik analiz (integral dönüşümü için hızlı algoritmalar) konusunda heyecan verici gelişmelere öncü olmuştur (sırasıyla; 1987-Kronland-Martinent, Morlet ve Grossmann 1991- Beylkin, Coifman ve Rokhlin) [21].

Özetle Dalgacıklar çok geniş ve temelleri birçok disiplinin bir araya gelmesiyle oluşmuş bir konudur. Yapılan tez çalışmasında dalgacık konusu mühendislik bakış açısıyla tanıtılacak olup çok gerekli görülmediği takdirde matematiksel ispatlardan ve anlatımlardan uzak durulmaya çalışılacaktır.

5.1. Fourier Analizi ve Fourier Dönüşümü

Doğadaki tüm periyodik fonksiyonlar, birbirine dik iki farklı periyodik fonksiyonun artan frekanslardaki değerlerinin toplamı şeklinde gösterilebilir. Fourier bu toplamı sinüs ve kosinüs fonksiyonlarını kullanarak göstermiştir. Günümüzde Euler bağıntısı kullanılarak sinüs ve kosinüs fonksiyonları yerine karmaşık üslü sayılar kullanılmaktadır.



Şekil 5.1 J.B.J. Fourier (1768-1830)

Fonksiyonların karmaşık üslü sayıların toplamı olarak gösterilmesine Fourier serisi gösterimi denir. Fourier açılımı sayesinde sinyallerin frekans bileşenleri kolaylıkla belirlenebilir. Fourier söz konusu seri açılımını iki farklı yüzeyi farklı ısılarda olan katı bir cismin sıcaklık dağılımını hesaplamak için kullanmıştır. Bu yaklaşım yoğun bir işlem çabası gerektirdiğinden ve sonuçta yaklaşık sonuç verdiğinden kullanılmamaktadır. Günümüzde Fourier analizi bilgi ve sinyal işleme ve titreşim analizinde kullanılmaktadır. Fourier dönüşümü, sürekli ve ayrık olarak ikiye ayrılabilir. İki dönüşüm de bir nesneyi ortogonal iki uzay arasında eşler. Sürekli ve kesikli nesneler için dönüşüm:

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad (5.1)$$

$$c_k = \sum_{j=1}^N x_k w_N^{(j-1)(k-1)} \quad , k = 1, \dots, N \quad (5.2)$$

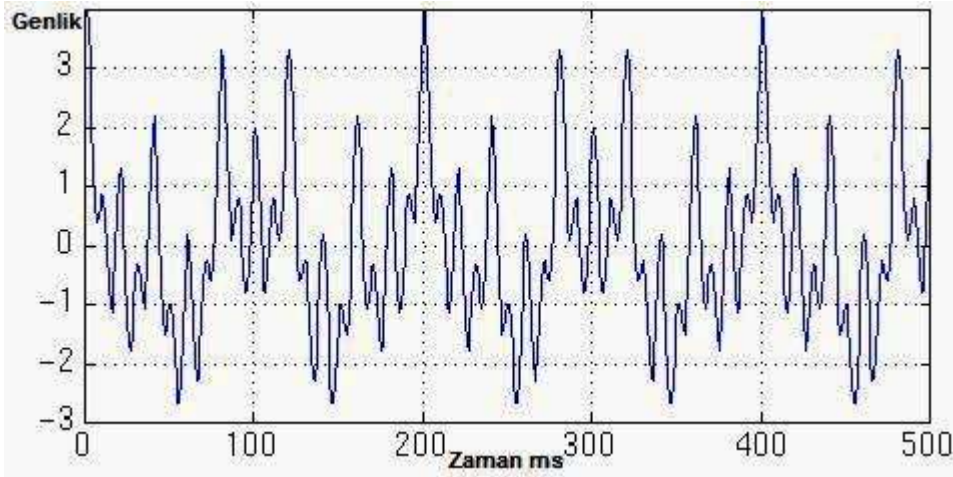
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{ikx} dk \quad (5.3)$$

$$X_j = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N c_k w_N^{-(j-1)(k-1)} \quad , j = 1, \dots, N \quad (5.4)$$

şeklinde verilir. Yukarıdaki dönüşümde görüldüğü üzere x uzayındaki bir nesne k uzayında tanımlanmıştır. Bu dönüşüm diferansiyel denklemlerin çözümünde çok büyük rahatlık sağlar. Zira bu dönüşüm sayesinde x uzayındaki diferansiyel denklemler k uzayında doğrusal denklemler olarak ifade edilirler. K uzayında bu denklemin çözümü bulunduktan sonra ters dönüşümle x uzayındaki karşılığı elde edilir. Bu işlem diferansiyel denklemin çözümüdür.

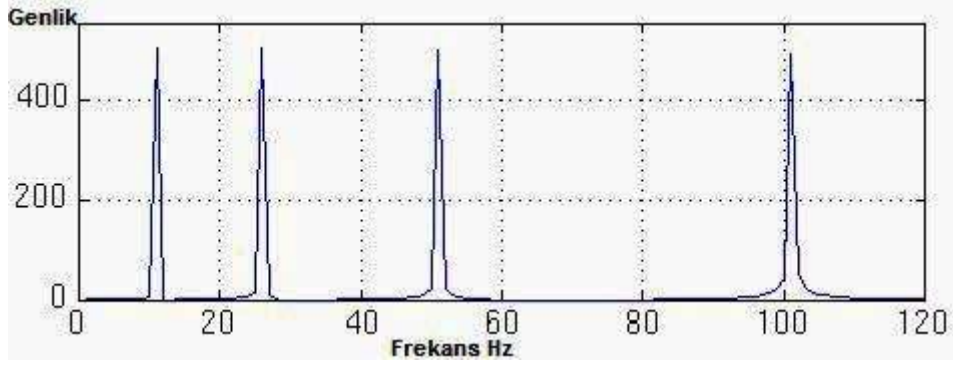
5.2. Durağan ve Sürekli Sinyallerin Fourier Dönüşümleri

Fourier dönüşümü sürekli sinyaller için tercih edilmez. Bunun sebebini anlamak için önce durağan ve sürekli sinyalleri karşılaştırmak gerekir.



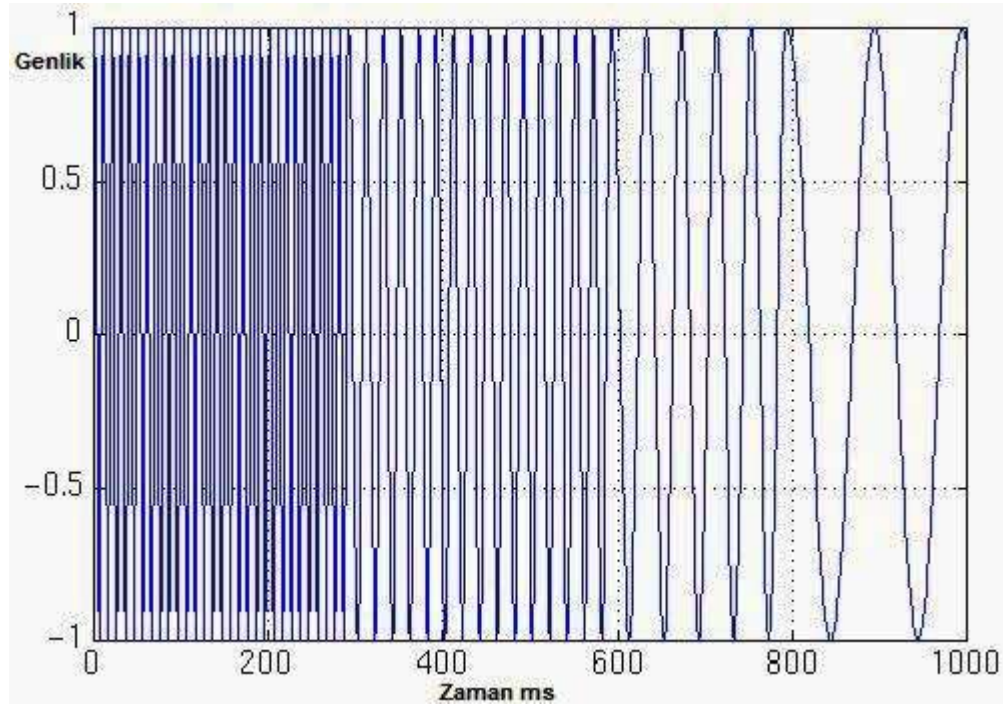
Şekil 5.2 Durağan bir sinyal örneği

Şekilde 10Hz, 25Hz, 50Hz ve 100 Hz sinyal bileşenlerinden oluşan durağan bir sinyal vardır. Bahsedilen frekanslar zaman ekseninin tamamına yayılmıştır. Yani herhangi bir zaman anında tüm frekanslar mevcuttur, sinyalin başlangıcındaki frekanslar zaman içinde değişmez. Bu çeşit sinyaller durağan sinyaller olarak isimlendirilir. Bu sinyalin Fourier dönüşümü şekil 5.3'te görüldüğü gibi frekans bileşenlerini başarılı bir şekilde gösterebilmektedir.



Şekil 5.3 Durağan sinyalin Fourier dönüşümü

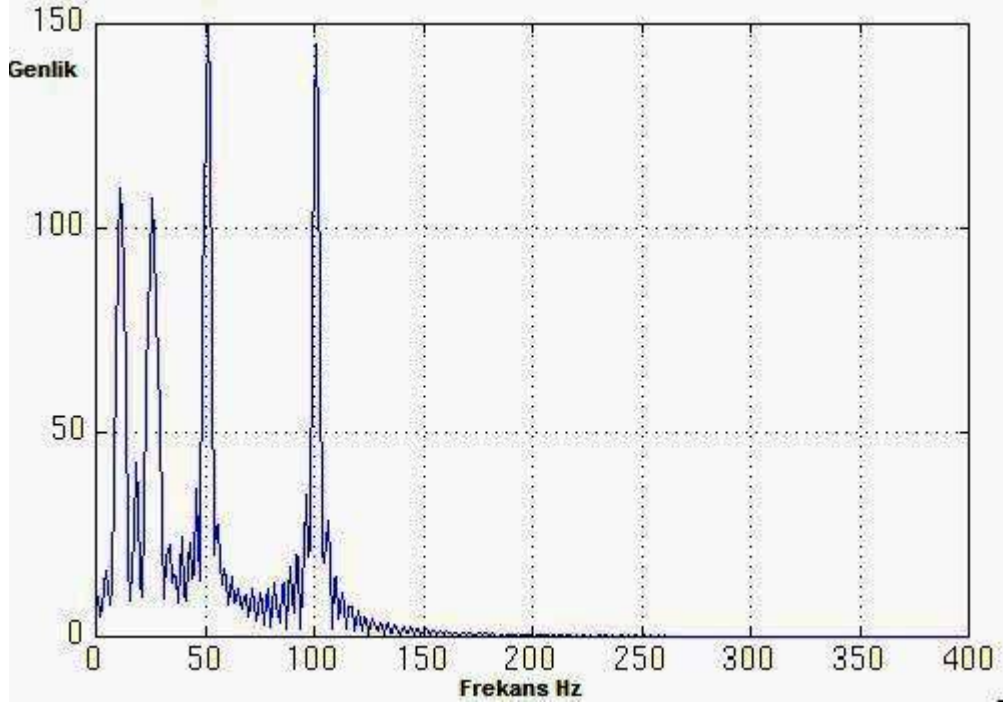
Şekil 5.4'teki sinyal 5.3'teki sinyal ile aynı frekans bileşenlerine sahip ancak durağan olmayan yani sürekli bir sinyaldir. Sürekli sinyallerin frekansları durağan sinyallerde olduğu gibi zamandan bağımsız değildir. Biyolojik sinyallerin çoğu bu şekildedir (ECG, EMG, EEG gibi). Örnek olarak aşağıdaki sinyal (şekil 5.4) 0-300ms arasında 100 Hz, 300-600ms arasında 50 Hz, 600-800ms arasında 25 Hz ve son olarak 800-1000ms arası 10 Hz sinüzoidallerden oluşmaktadır.



Şekil 5.4 Durağan olmayan bir sinyal örneği

Durağan olmayan bu sinyalin Fourier dönüşümü şekil 5.5'te gösterilmiştir. Frekanslar arasındaki dalgacıkları ve genlik farklılıkları düşülmezse, sonuç

durağan sinyalin Fourier dönüşümü ile aynıdır. Aradaki dalgacıkların sebebi frekanslardaki ani değişikliklerden kaynaklanmaktadır. 100 Hz ve 50 Hz frekansındaki sinyallerin genliklerinin büyük olmasının sebebi ise diğer frekanslara göre zaman ekseninde daha uzun süre yer almalarıdır.



Şekil 5.5 Durağan olmayan sinyalinin Fourier dönüşümü

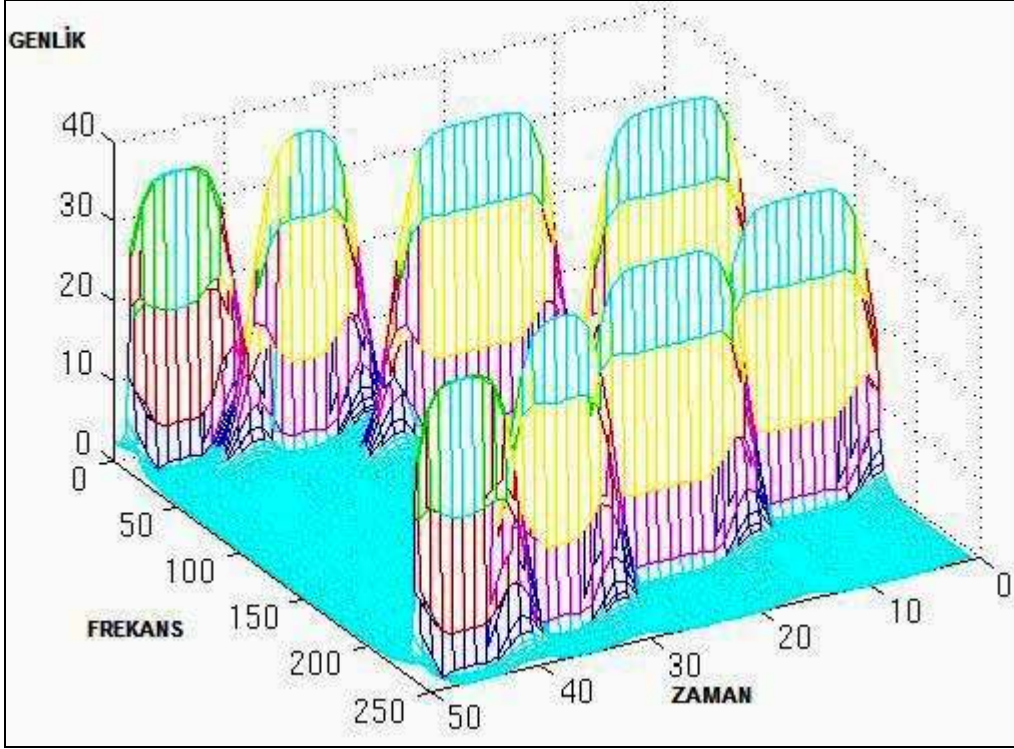
Durağan olmayan sinyallerin Fourier dönüşümüne uygun olmamasının sebebi, aslında dönüşümün kendisinden çok sürekli sinyalin yapısından kaynaklanıyor olmasıdır. Sürekli sinyalin Fourier dönüşümünde sinyalin tüm frekanslarını görebiliriz yani frekans çözünürlüğü kusursuzdur, ancak zaman yerelliği yoktur. Yani hangi frekansın hangi zamanda olduğuna dair elimizde hiçbir bilgi yoktur. Durağan sinyallerde böyle bir sorunun olmamasının sebebi frekansların zamanla değişmiyor olmasıdır, bir başka deyişle bu tip sinyallerde zaman yerelliği önemli değildir çünkü her frekans zaten her zaman mevcuttur [22].

5.3. Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü

Bu yöntem Fourier dönüşümünün sürekli sinyallerde de uygulanabilmesi için geliştirilmiştir. Fourier dönüşümünün sürekli sinyallerde zaman bilgisini kaybettiği için tercih edilmediği belirtilmişti. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için, dönüşümü yapılacak olan sinyal önce konumu $t = \tau$ da olan bir pencere fonksiyonu ile çarpılır. İşlemin geri kalanının Fourier dönüşümünden farkı yoktur. Yani karmaşık üstsel ifadenin karşılığı olan sin ve cos bileşenleri f frekansı için giriş sinyali ile tüm zamanlarda çarpılır. Bu çarpım işleminin sonucu büyük çıkarsa (sinyaller ilişkili ise) f frekansı o sinyal içersisinden yakalanmış olur. Bu frekans, sinyalin hâkim frekansı olarak isimlendirilir. Eğer sonuç küçük veya sıfır çıkarsa f frekansı sinyal içerisinde kısa bir aralık sürmüştür veya hiç yoktur. Sonuçta dönüşüm frekansın bir fonksiyonu olduğundan, sinyal üzerindeki tüm frekanslar ayrıştırılabilir hale gelirler. Kısa Zamanlı Fourier dönüşümünde tek fark bu işlemin zaman ekseninde kayarak ilerleyen pencerelerin içerisinde gerçekleşiyor olmasıdır. Bu işlemin zaman pencerelerinde gerçekleşiyor olması bize kısmen zaman bilgisi (zaman aralığı bilgisi) sağlasa da frekans çözünürlüğü kazanılan zaman çözünürlüğü ile ters orantılı olarak azalmaktadır. Bunun sebebi dönüşüm sırasında alınan integralin tüm sinyal için değil, sadece pencere içerisini kapsamasıdır. Yani sinyalin genelinden gelecek frekans bilgisinden yoksun bir şekilde bölgesel olarak işlem yapılmaktadır. Anlatılan bu işlemler denklem 5.5 ile özetlenebilir.

$$\text{STFT} \{x(t)\} \equiv X(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t - \tau)e^{-j\omega t} dt \quad (5.5)$$

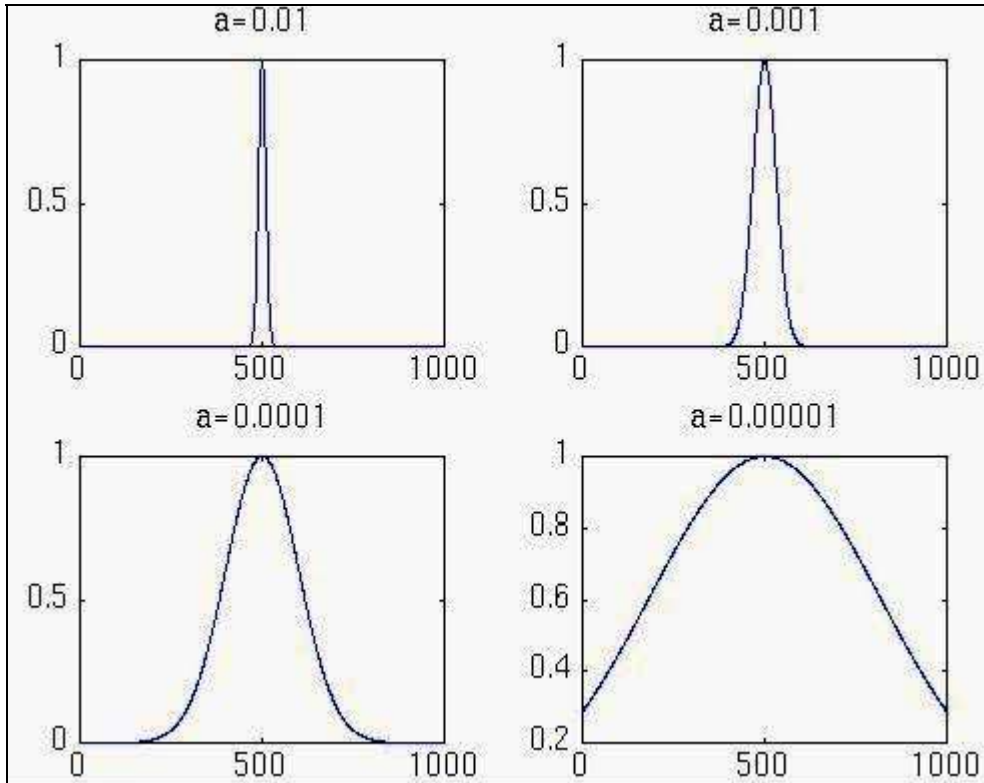
STFT dönüşümü sayesinde artık frekans - genlik bilgisine ek olarak zaman bilgisi de elde edilebilir olmuştur. Bu durum grafiksel olarak üç boyutla gösterilir. Daha önce FT için kullanılan örnek sinyal (şekil 5.4) bu kez STFT için kullanılır ise şekil 5.6'daki grafik elde edilir.



Şekil 5.6 Kısa zamanlı Fourier dönüşümü

Şekilde frekans ekseninin tam ortadan simetrik olduğu görülmektedir, bunun sebebi sinyalin Fourier dönüşümünün negatif sinyal bileşenlerinden ötürü her zaman simetrik çıkmasıdır. Kısa zaman Fourier dönüşümü aslında pencerelenmiş Fourier dönüşümünden başka bir şey olmadığından sonucun böyle çıkması şaşırtıcı değildir. Zaman eksenindeki farklılıkların sebebi uygulanan normalizasyondan kaynaklanmaktadır. Burada asıl incelenecek olan grafiğin bu özelliklerinden çok sinyalin zaman frekans ilişkisidir. Sinyalin dört ayrı frekansı dört farklı tepe şeklinde görülebiliyor, tıpkı Fourier Dönüşümü gibi. Fakat bunlara ek olarak artık zaman bilgisi de mevcuttur. Frekansların hangi aralıkta olduklarını görülebiliyor. Buradaki kısıtlama çözünürlüklerle ilgilidir. Sorun şu ki, zaman bilgisi sadece belli bir aralığa ait, yani tam olarak hangi anda hangi frekansa sinyalin sahip olduğu bilinmiyor. Bu belirsizliğe Heisenberg belirsizlik kuralı denir. Özetle bu kural şöyledir; “hareket eden bir nesnenin momentumu ve konumu aynı anda bilinemez”. Konuyla bu söylem ilişkilendirecek olunursa, frekans ve zaman çözünürlüğü aynı anda arttırılamaz (veya azaltılamaz), zaman çözünürlüğü arttığında frekans, frekans çözünürlüğü arttığında ise zaman çözünürlüğü azalır.

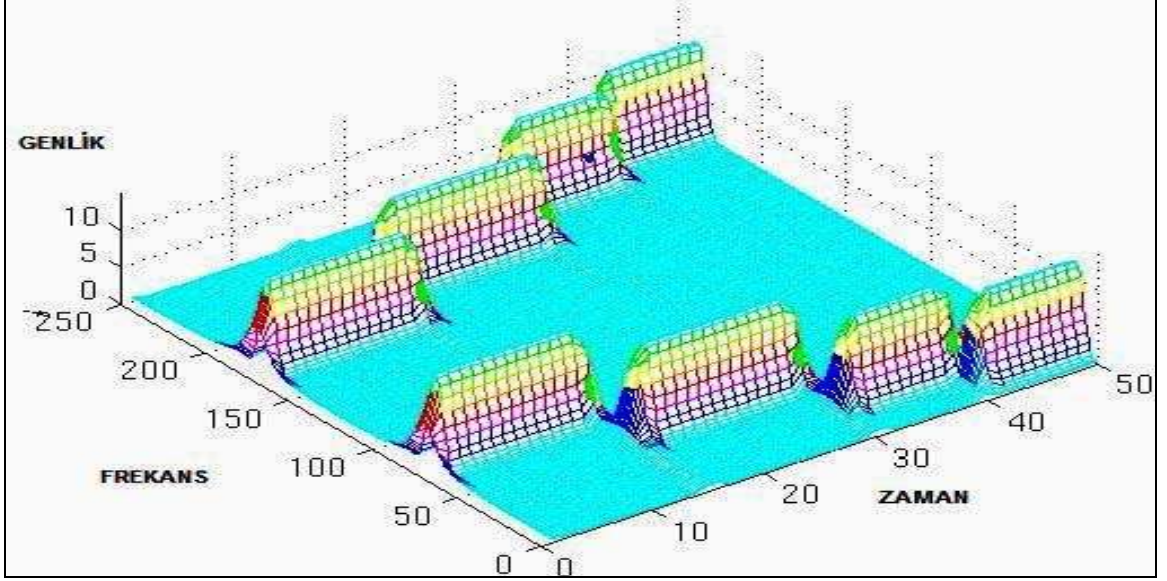
Çözünürlük, dönüşüm işlemi sırasında kullanılan pencerenin boyu ile ilgilidir. Pencere boyu arttığında frekans çözünürlüğü artar STFT, FT'a yaklaşır. İntegral kısa pencereye göre daha uzun zamana yayıldığından sinyalin tamamına ait frekans bilgisine daha yakın bir sonuç çıkar. Ancak zaman çözünürlüğü azalır çünkü zaman eksenini eskisine göre daha az parçaya bölünmüştür. Pencere boyu daraltıldığında ise frekans çözünürlüğü azalırken zaman çözünürlüğü artar. Bu durumu grafiklerle anlatmak daha kolaydır. Örnek olarak STFT için pencere olarak basit bir gauss fonksiyonu tanımlanabilir, " $w(t)=e^{-(a*(t^2)/2)}$ ". Pencereleler değişen a değeriyle aşağıdaki gibi genişler veya daralır.



Şekil 5.7 Değişen a değerlerinin penceredeki etkisi

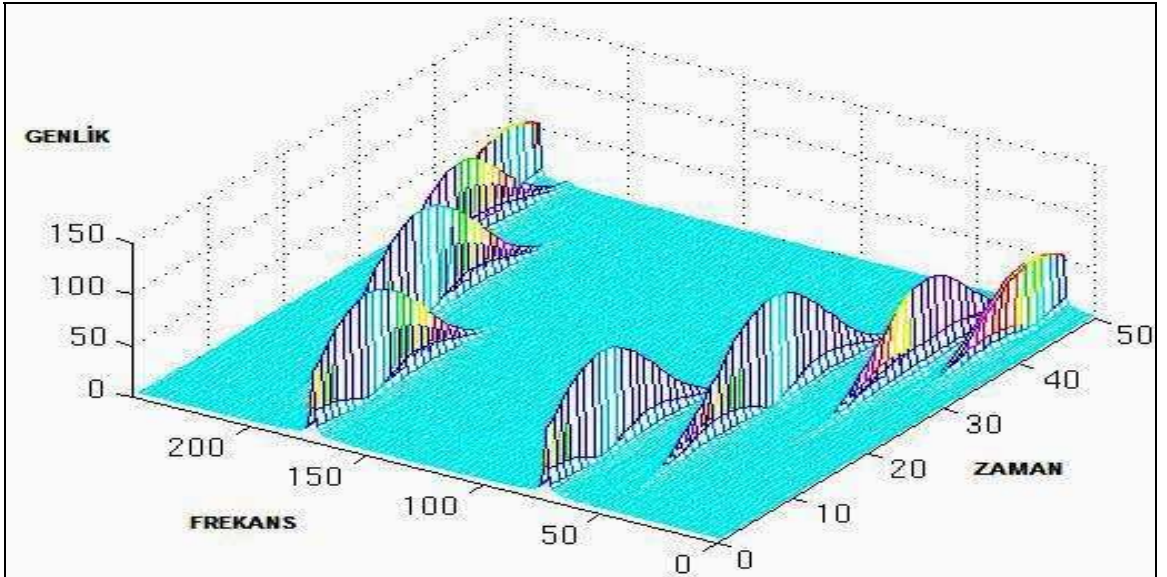
Şekil 5.8'de a değerinin 0.01 olduğu durum görülmektedir. Pencere küçük olduğundan zaman çözünürlüğünün iyi frekans çözünürlüğünün ise düşük olmasını bekleniyor. Gerçekten de dört frekansa ait tepeler birbirlerinden zaman ekseninde iyi ayrılmışlardır (dalgalarda her frekans için fark belirgindir). Ancak frekans kısmına baktığımızda tepeler tek bir frekans yerine belirli bir frekans

aralığını kapsamaktadır. Yani tam olarak o bölgede hangi frekans olduğu bilinmemektedir. Bu durum frekans çözünürlüğünün kötü olduğunu göstermektedir.



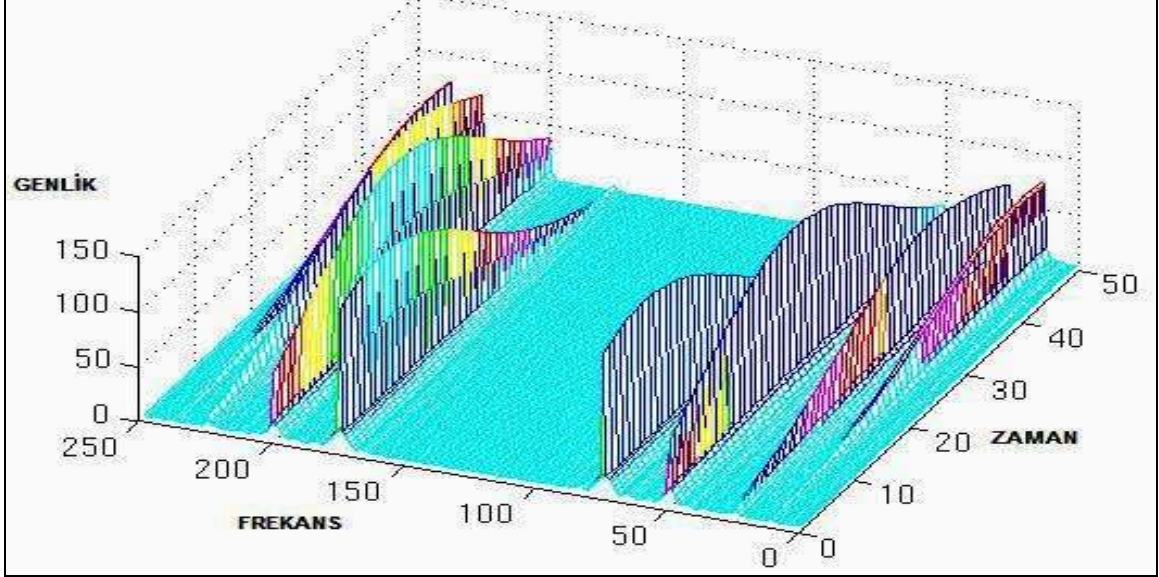
Şekil 5.8 $s=0.01$ değeri için STFT

Şekil 5.9 de artan pencere boyu ile zaman çözünürlüğünün, zaman eksenindeki aralıkların birbirlerinin bölgelerine girmeye başlamasıyla azaldığı görülüyor. Ancak artık tepeler daha az frekans bileşeni içermektedir.



Şekil 5.9 $s=0.1$ değeri için STFT

Şekil 5.10' da ise frekans çözünürlüğünün en yüksek seviyede olduğunu ancak artık zaman bilgisinin kaybedildiğini, yani zaman çözünürlüğünün seçilen pencere boyları için en düşük seviyesinde olduğu görülüyor.



Şekil 5.10 $s=1$ değeri için STFT

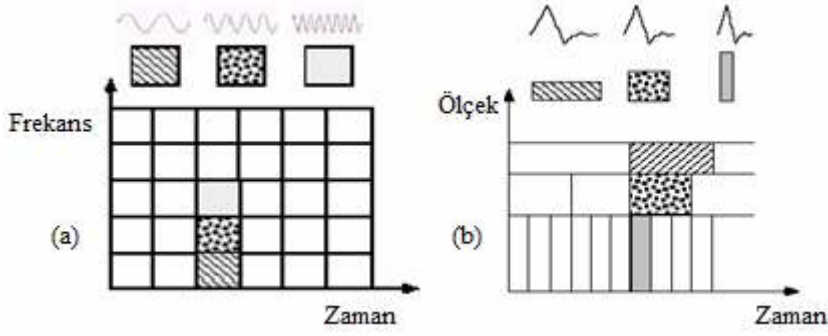
Yüksek frekanslar zaman ekseninde daha karardır. Bunun sebebi Nyquist frekansının daha yüksek olması, dolayısıyla örnekleme zamanının daha kısa sürelerle gerçekleşmesi ve örnek sayısının daha fazla olmasıdır. Daha fazla örnek sayısı bir sinyalin daha kararlı ve hatalara karşı daha korunaklı olmasına sebep olur. Örneklemenin bu kadar çok yapılabilmesi için zaman çözünürlüğünün iyi olması gerekmektedir. Düşük frekanslar ise yüksek frekanslar kadar çok örnekleme gerektirmediklerinden zaman çözünürlüğünden çok frekans çözünürlüğü ön plana çıkmaktadır. Bu yüzden yüksek frekanslarda dar pencereler, düşük frekanslarda ise geniş pencereler seçilmelidir. Ancak STFT değişken yapıli pencerelere sahip değildir. Hem yüksek hem de düşük frekanslar aynı pencere boyu ile işlenirler. Bu da yüksek frekanslarda düşük zaman çözünürlüğüne, alçak frekanslarda ise düşük frekans çözünürlüğüne sebep olur. Bu çözünürlük sorunun üstesinden gelmek için STFT yerine dalgacık dönüşümü geliştirilmiştir.

Dalgacık dönüşümünde kullanılan yöntemin ismi “Çoklu Çözünürlük Analizi” dir. Bu yöntem STFT deki pencerenin boyutlarını, sinyaldeki frekans bileşenine göre değiştirmesi üzerine kurulmuştur. Böylelikle birden fazla çözünürlükle çalışılabilir. Sistem yüksek frekanslarda iyi zaman çözünürlüğü, kötü frekans çözünürlüğü; düşük frekanslarda ise iyi frekans çözünürlüğü, kötü zaman çözünürlüğü sağlayacak şekilde pencereyi sırasıyla daraltıp kalınlaştırır.

STFT ve Dalgacık dönüşümü arasında iki temel fark vardır.

1. STFT pencerenin altında kalan negatif frekansları işleme almazken dalgacıkların yapısı salınımlı olduğundan negatif kısım da işleme girer.
2. Sürekli dalgacık dönüşümünde frekansla orantılı değişken boyutta pencereler kullanılırken, STFT de pencere genişliği sabittir.

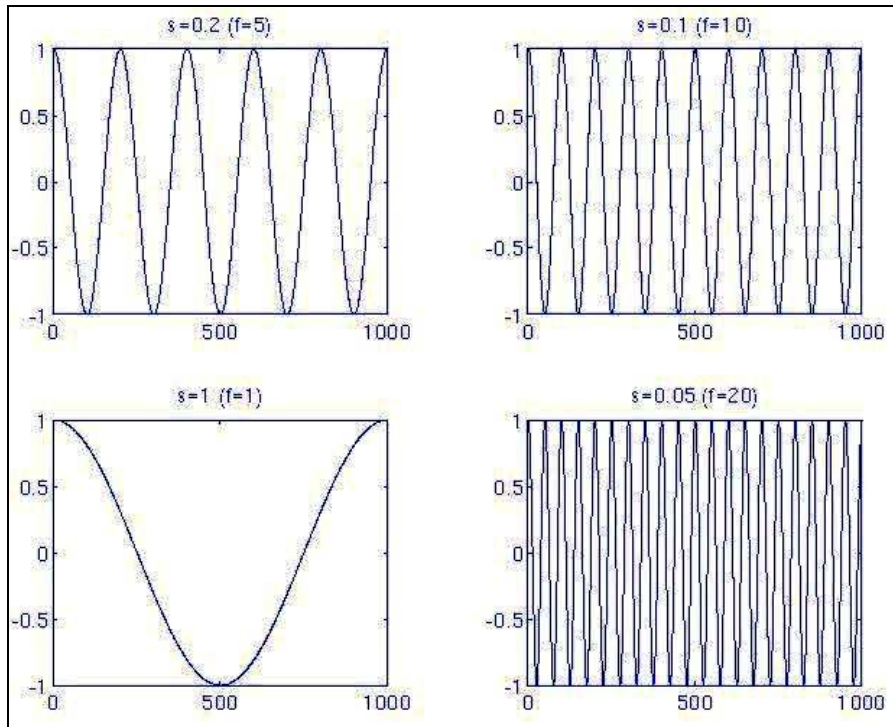
Kısa Zamanlı Fourier Dönüşümü ile Dalgacık dönüşümünün frekans ve zaman çözünürlüğü açısından karşılaştırması şekil 5.11’de verilmiştir. Kısa zamanlı Fourier Dönüşümü’nde frekansın sabit olduğu farklı frekanslardaki sinyaller için aynı çözünürlüğü kullandığı görülürken, Dalgacık Dönüşümünde değişen dalgacıkların (pencerelerin) farklı zaman ve frekans çözünürlükleri oluşturduğu görülmektedir. Bu konu örneklerle biraz daha detaylandırılacaktır. Bu iki grafikte dikkat edilmesi gereken bir diğer nokta da çözünürlük dörtgenlerin kapladıkları alanların değişmediğidir. Bunun sebebi Heisenberg Belirsizliği’nde anlatıldığı gibi kesin olarak zaman ve frekansın sonsuz çözünürlükte olamadığıdır. Bir başka deyişle birbirlerine ters orantılı olan iki değişkenden biri değişirken öteki sabit tutulamaz. Yani frekansla zaman çözünürlüğü aynı anda arttırılamaz veya azaltılamaz.



Şekil 5.11 STFT ve Dalgacık dönüşümü çözünürlük ilişkisi (a) STFT (b) Dalgacık Dönüşümü

5.4. Ölçek ve Sürekli Dalgacık Dönüşümünün Hesaplanması

Ölçek kavramı dalgacık dönüşümüyle birlikte kullanılmaya başlanılmıştır. STFT den farklı olarak frekans bileşeni ölçekle tanıılır. Kabaca frekansın tersidir. Aşağıda görüldüğü gibi ölçek “s” arttıkça frekans azalmış, sinyalde genişleme olmuştur. Ölçek küçüldükçe sinyal sıkışmış, yani frekans artmıştır



Şekil 5.12 Değişen ölçek “s” değerlerinin penceredeki etkisi

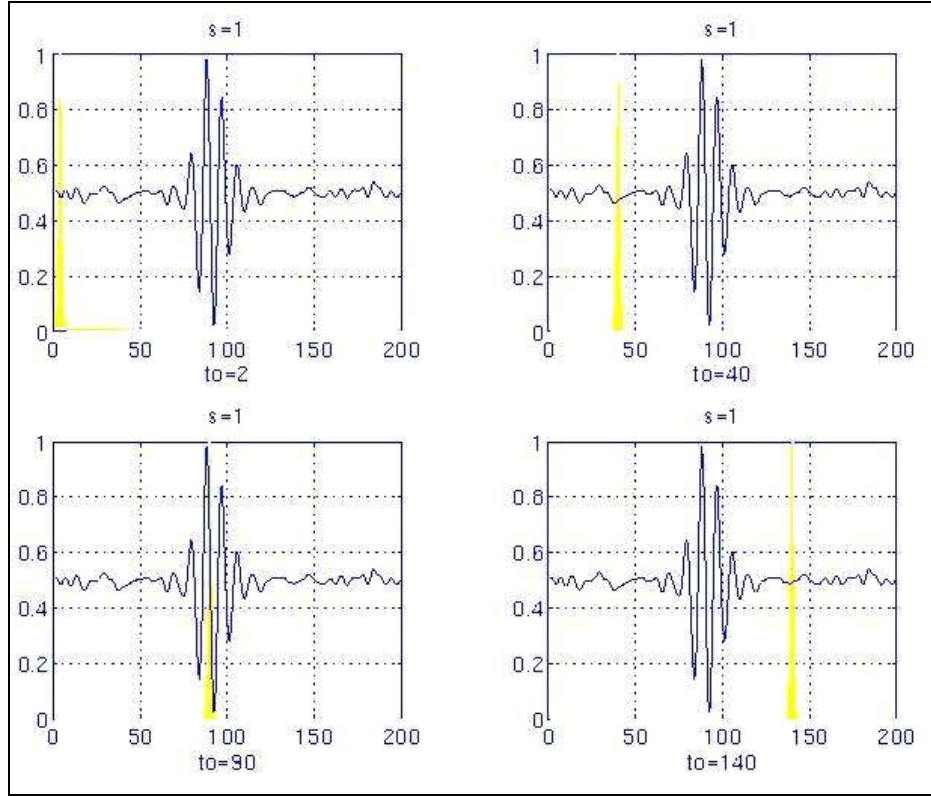
Ölçek dalgacığının zaman eksenindeki genişliğidir. Büyük ölçek düşük frekanstaki sinyalleri yakalamak için kullanılır. Çünkü büyük dalgacığının frekansı, düşük frekans bileşeni ile çarpıldığında sinyaller çakıştığından, yüksek frekanslı sinyalin çarpım sonucuna göre daha büyük sonuç verir. Bu durum yüksek frekans bileşenli sinyal ile küçük ölçekli dalgacığının genişliliğinin çarpılma sonucu için de geçerlidir. Sürekli dalgacık dönüşümünün formülü STFT'ye çok benzer. STFT'deki pencere fonksiyonunun yerini alan “ ψ ”, ana dalgacık olarak isimlendirilir. Çünkü diğer dalgacıklar değişen “ s ” yani ölçek değerine göre bundan türetilir. Ayrıca içerisinde dalgacığının konumunu belirten “ τ ” zaman parametresi de mevcuttur.

$$CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \int x(t) \psi^* \left(\frac{t - \tau}{s} \right) dt \quad (5.6)$$

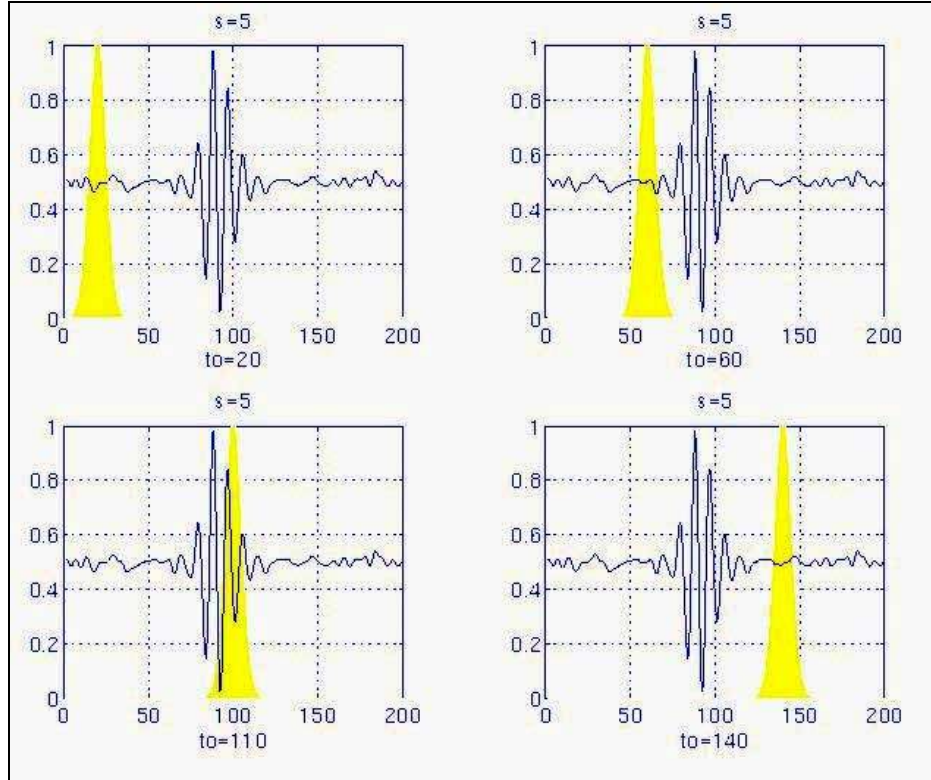
Dalgacık dönüşümü, isminde de belirtildiği gibi bir dönüşümdür. Yani analiz işleminden sonra tekrar oluşturulması – sentezlenebilir olması gerekmektedir. Sentezleme aşağıdaki formülle gerçekleşmektedir. Formülün başındaki katsayı kullanılan dalgacık tipine göre farklı değerler alır.

$$x(t) = \frac{1}{c_\psi^2} \int_s \int_\tau \Psi_x^\psi(\tau, s) \frac{1}{s^2} \psi \left(\frac{t - \tau}{s} \right) d\tau ds \quad (5.7)$$

Analiz işlemi ana dalgacığının, sinyalin $t=0$ zamanına yerleştirilmesiyle başlar. $s=1$ için dalgacık sinyalle çarpılır. Sonuçta kalan, pencerenin boyu dışında sıfır olmak üzere, sinyal ile dalgacığının o alandaki tüm zamanlar için olan çarpımıdır. Bu alandaki çarpımın sonucu, normalizasyon için başka bir katsayı ile çarpılır. Bu işlem sinyal kaydırılarak $t = \tau$ 'ya kadar devam eder. Daha sonra değişen çocuk dalgacıklarla (değişen ölçek parametresi ile) bu işlem tekrarlanarak farklı frekanslar bileşenlerindeki sinyaller de teker teker orijinal sinyalden ayıklanır. Şekil 5.13 ve 5.14'te dalgacık yöntemi ile frekans ayrıştırmasının özeti verilmiştir. Ölçeği 1'e eşit olan dalgacık sinyal üzerinden geçerken kendi frekansındaki yüksek frekans bileşenlerini ayırmaktadır. Ölçek değeri 5 olan dalgacık kendi frekansındaki düşük frekans bileşenlerini, sinyali her ölçek değeri için tarayarak çıkarmaktadır.

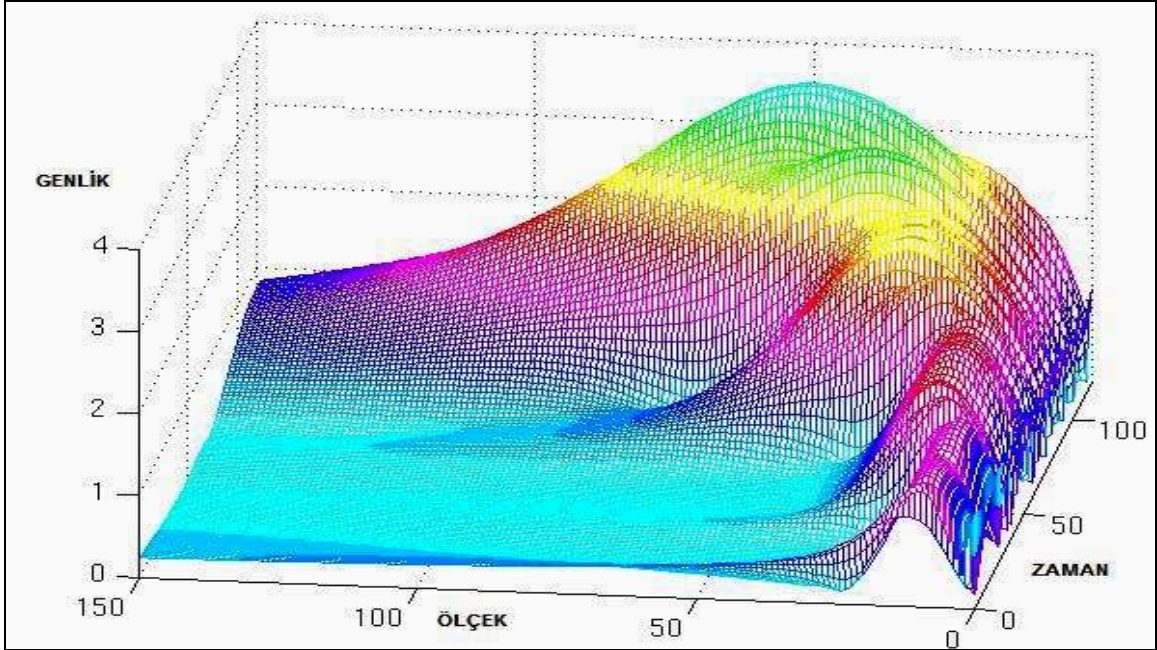


Şekil 5.13 $s=1$; $\tau = 2, 40, 90, 140$ için dalgacık dönüşümü



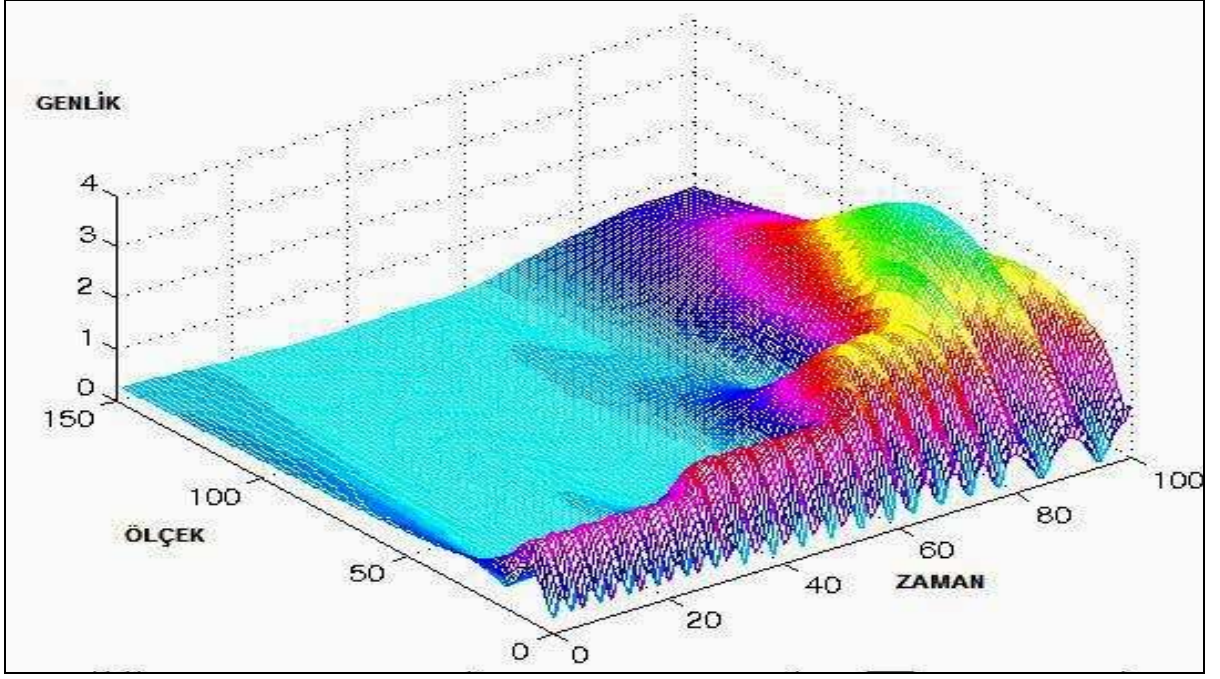
Şekil 5.14 $s=5$; $\tau = 20, 60, 110, 140$ için dalgacık dönüşümü

Aşağıdaki iki grafik şekil 5.4 deki sürekli sinyalin dalgacık dönüşümüdür. Şekil 5.15 grafiğin ölçek kısmına, 5.16 ise zaman kısmına dikkat çekmiştir.



Şekil 5.15 Sürekli sinyalin dalgacık dönüşümü – ölçek bakışı

Eksenler normalize edildiğinden dönüşüm grafiklerinin eksen sayıları ile birbirlerini tutmamaktadır. Zaman ilerledikçe azalan frekansa göre dalgacıkların sağdaki grafikte zaman ekseninin sonuna doğru genişlerken ters yönde azaldığını görebiliyoruz. Geniş dalgacıkların iyi frekans kötü zaman çözünürlüğü verdiği daha önce belirtilmişti. Bu grafikte ise geniş dalgacıkların kötü ölçek çözünürlüğü göstererek, aslında iyi frekans çözünürlüğü sergilediği açık bir şekilde görülmektedir. Dar dalgacıkların ise geniş dalgacıklara göre daha iyi ölçek çözünürlüğü, yani daha kötü frekans çözünürlüğü gösterdiği yine şekil 5.15'te görülmektedir.



Şekil 5.16 Sürekli sinyalin dalgacık dönüşümü – zaman bakışı

Şekil 5.16 ise, şekil 5.15'in zaman eksenini tarafından bakılan halidir. Geniş dalgacıkların kötü zaman küçük dalgacıkların iyi zaman çözünürlüğü gösterdiğini zaman eksenindeki kapladıkları alandan görebilmektedir.

5.5. Dalgacık Teoremine Matematiksel Yaklaşım

Fourier dönüşümünde Fourier baz vektörleri sinyali analiz etmek ve yeniden oluşturmak için kullanılmaktadır. Vektör uzayında her vektör baz vektörlerinin doğrusal kombinasyonları şeklinde yazılır. Bu işlem, vektörleri bazı sabit sayılarla çarpıp, sonra da çarpımların toplamı cinsinden yazılması ile gerçekleştirilir. Baz vektörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\mathbf{v} = \sum_k \nu^k \mathbf{b}_k$$

(5.8)

Bu formülde “ $\mathbf{b}_k$ ” baz vektörün yerine “ ϕ ” baz fonksiyonu ve “ $\mathbf{v}$ ” vektörü yerine de “ $f(t)$ ” fonksiyonunu koyarak genelleştirebiliriz.

$$f(t) = \sum_k \mu_k \phi_k(t) \quad (5.9)$$

Fourier dönüşümünde sinüs ve kosinüsler baz fonksiyonlardır ve diktirler. Fonksiyonların diklik özelliği bize yeni fonksiyonlar oluştururken kolaylık sağlamaktadır. Diklik özelliği bir sonraki konu başlığında tanıtılacaktır. İki fonksiyonun a-b aralığındaki iç çarpımı aşağıda verilmiştir.

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g^*(t) dt \quad (5.10)$$

Baz fonksiyonu (ψ) ile giriş test sinyalinin iç çarpımlarını benzer şekilde yazarsak Dalgacık Dönüşümü denklemini elde etmiş oluruz.

$$CWT_x^\psi(\tau, s) = \Psi_x^\psi(\tau, s) = \int x(t) \cdot \psi_{\tau,s}^*(t) dt \quad (5.11)$$

5.5.1. İç çarpım ,diklik ,ortanormallik

Eğer iki vektörün iç çarpımı sıfırsa bu iki vektör diktir.

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \sum_n v_n w_n^* = 0 \quad (5.12)$$

Aynı durum fonksiyonların iç çarpımı için de geçerlidir.

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_a^b f(t) \cdot g^*(t) dt = 0 \quad (5.13)$$

Büyükükleri bire eşit olan dik vektör kümesine de ortanormal küme denir.

$$\langle v_m, v_n \rangle = \delta_{mn} \quad (5.14)$$

İki fonksiyonun ortanormal olması ise aşağıdaki koşullarla gerçekleşir,

$$\int_a^b \phi_k(t) \phi_l^*(t) dt = \delta_{kl} \quad \delta_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{if } k = l \\ 0 & \text{if } k \neq l \end{cases} \quad (5.15)$$

k ve l değeri birbirlerine eşitse fonksiyonlar ortanormal, değilse diktir.

Ortanormallik özelliği sayesinde denklemdeki analiz katsayısı fonksiyonların iç çarpımı şeklinde yeniden yazılabilir.

$$\mu_k = \langle f, \phi_k \rangle = \int f(t) \cdot \phi_k^*(t) dt \quad (5.16)$$

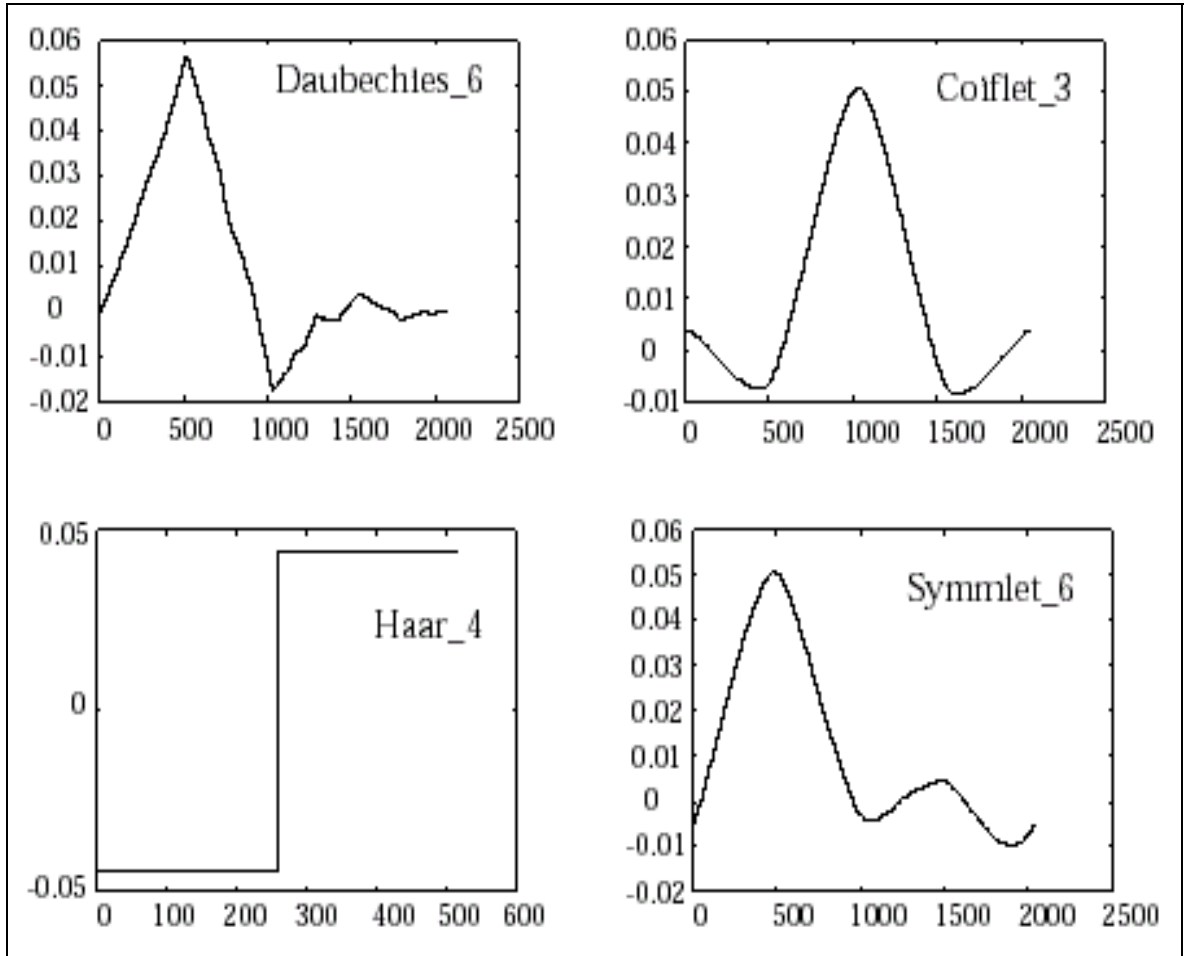
Böylece daha önce tasarladığımız f fonksiyonu “μ” katsayısının yeni tanımı ile “μ” olmadan yazılabilir.

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k \mu_k \phi_k(t) \\ &= \sum_k \langle f, \phi_k \rangle \phi_k(t) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Bu ve bu gibi işlemlerin benzerleri, dalgacık dönüşümünde katsayıların hesaplanmasında kullanılır. Dalgacık matematiği çok geniş ve ileri düzey matematiksel altyapı gerektiren uzun bir konudur. Zaten Dalgacık Dönüşümü ile ilgili yayınların çoğu matematikçiler tarafından yayımlanmıştır. Bu çalışmada dalgacık teoreminin mühendislik kısmı ve uygulamalarını incelemek, matematiksel ispatlar ve formülleri irdelemeye yeğ tutulmuştur.

5.6. Dalgacık Çeşitlerine Örnekler

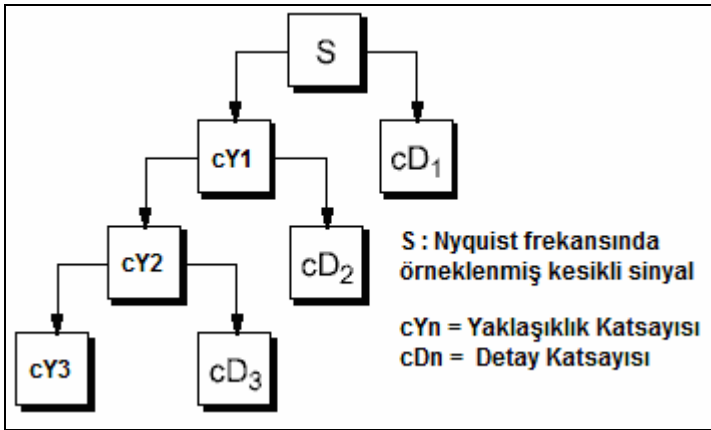
Teorik olarak sıfır ortalamalı ve sonlu enerjiye sahip herhangi bir fonksiyon dalgacık sayılabilir. Ancak dalgacığı seçmek için birçok ölçüt vardır. Dalgacığın zaman ve frekans ortamındaki sönümlemesi önemlidir. Zaman ve frekans ortamında iyi konumlanması için dalgacık, zaman ve frekans ortamında hızlı sönümlmelidir. Dalgacık dönüşümünün, kısa zamanlı Fourier dönüşümünden farkları tanıtılırken, dalgacık dönüşümünde kullanılan pencerenin Fourierdeki gibi sabit olmadığı, değişen ölçek değerine göre kendisini değiştirerek Fourierdeki sabit frekans ve zamanda yerellik probleminin üstesinden geldiği belirtilmişti. Aşağıda bahsedilen dalgacık yapılarının bir kısmı örnek olarak verilmiştir. Uygulamalar kısmında yapılan ayrıştırma işlemleri ve hata sonuçları ile bu dalgacık yapılarını karşılaştırma imkânı bulunacaktır.



Şekil 5.17 Dalgacık türlerine örnekler

5.7. Kesikli Dalgacık Dönüşümü - Alt bant kodlaması

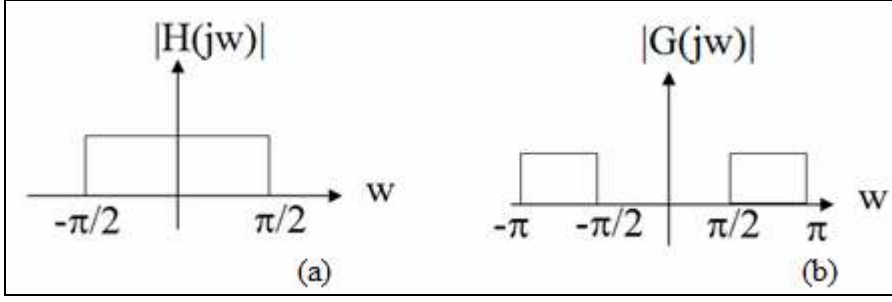
Sürekli Dalgacık Dönüşümünde, zaman ekseninde kayarak ilerleyen ve değişen ölçek parametresi ile bu işlemi tüm frekanslar için tekrarlayan dalgacıktan bahsedilmişti. Bu dalgacık bölgesindeki sinyallerin ilinti bilgisi bize frekansları ayırma olanağı tanıyor idi. Bu işlem sayısal dünyada farklı kesme frekansındaki süzgeçlerle gerçekleştirilir. Giriş sinyali bu süzgeçler ile alçak ve yüksek frekans bileşenlerine ayrıştırılır ve çözünürlüklerini düzenler.



Şekil 5.18 Detay ve yaklaşıklık katsayıları

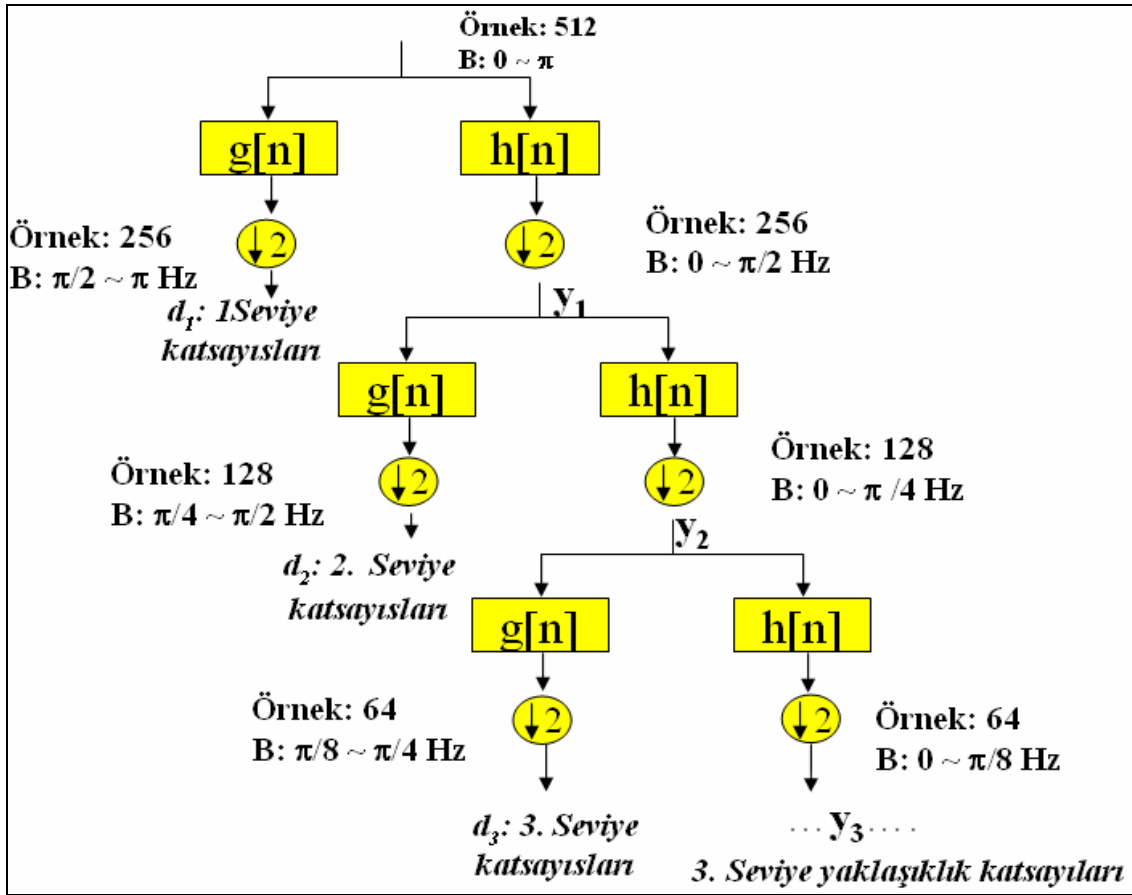
Yüksek frekans katsayılarına “yaklaşıklık”, düşük frekans katsayılarına da “ayrıntı” katsayıları denir. Daha önce sıkça bahsettiğimiz ölçek kavramı ise burada sinyalin yukarı veya aşağı örneklenmesi ile değiştirilir. Aşağı örnekleme bilindiği gibi orijinal sinyalden bazı örneklerin çıkartılmasıdır. Yukarı örnekleme ise sinyaldeki örnek sayısını arttırmaktır. Örnek sayısını artırmanın birçok yolu vardır. Sinyalde örnek yerine sıfır konulabileceği (zero padding) gibi değişik ara değerlendirme teknikleri (doğrusal, sabit, çokterimli) ile sinyale yakın değerler tahmin etmek mümkündür. Aşağıdaki formül FIR süzgecin tanımıdır. Şekiller ise kullanılan alçak ve yüksek geçiren süzgeçlerin frekans genlik grafikleridir.

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot h[n - k] \quad (5.18)$$



Şekil 5.19 Ayrışmada kullanılan süzgeçler (a) alçak geçiren (b) yüksek geçiren

Prosedür $x(n)$ i $h(n)$ darbe tepkisine sahip sayısal bir süzgeçten geçirmekle başlar. Bilindiği üzere bu işlem giriş sinyali ile darbe yanıtının evrişimidir. Giriş sinyali, yarı bant alçak geçiren süzgeçten geçirilir. Yarı bant alçak geçiren süzgeç, sinyalin en büyük frekansının yarısına eşit kesme frekansına sahip sayısal süzgeçtir. Yani bu işlem sonucunda en büyük frekansı 1000Hz olan sinyalin süzgeç çıkışında en büyük frekansı 500Hz e düşer. Kesikli sinyallerde frekans radyan cinsinden ifade edilir. Eğer kesikli bir sinyal Nyquist frekansında örneklenirse örnekleme frekansı π radyan olur. Nyquist örnekleme frekansı sinyalin tekrar oluşturulmasında bilgi kaybına uğramamak için orijinal sinyalin en büyük frekansından iki kat büyük seçilen sınır, örnekleme frekansıdır. Bu frekansın altında yapılacak örneklemler, sinyalin yeniden oluşumunda “aliasing” denilen bilgi kayıplarına sebep olacaktır.



Şekil 5.20 512 örnekli bir sinyalin ayrışım basamakları

Bu sinyal alçak geçiren süzgeçten geçirildiğinde en büyük frekans bileşeni sinyalde $\pi/2$ kadardır. Bu durumda örnekleme frekansının 2π de kalmasının bir anlamı yoktur. Yani fazladan ve gereksiz bilgiyi sistemden çıkartıp işlem kalabalığını azaltmak için yine bu sinyali 2 ile aşağı örnekleyerek yeni Nyquist frekansı π olarak belirlenir. Böylece 1. seviyede örnek sayısı 256'ya düşmüş orijinal sinyalin yüksek ve alçak frekans bileşenleri elde edilmiş olur. Bu işlem sinyalin zaman çözünürlüğünü azaltır. Çünkü örnek sayısı yarı yarıya düşer. Yani zaman ekseninde yarı yarıya bilgi kaybı meydana gelir. Frekans çözünürlüğü ise artar. Çünkü bir önceki duruma göre frekans çeşitliliği yarı yarıya azaldığından kalan frekanslar daha iyi gözlemlenebilir. Örnekte verildiği gibi daha önceden “0- π ” aralığına bulunan sinyalleri şimdi daha dar bir frekans aralığında “0- $\pi/2$ ” ve “ $\pi/2$ - π ” inceleme imkanına sahip olunur. Benzetme yapmak gerekirse, haritada bulmak istenilen adrese büyüteçle bakıldığı veya bu iş için daha büyük ölçekli bir harita kullanıldığı düşünülebilir. Ölçek, yani “dalgaçık boyu” artar. Bunun anlamı en üst seviyeli katmanda dalga genişliğinin en büyük olacağı, dolayısıyla en büyük

frekans bileşenlerinin burada ayrıştırılacağıdır. Ters, yüksek frekans bileşenlerinin ilk yapılan ayrıştırmada ortaya çıkmasıdır. Sinyaldeki frekans belirsizliğini azaltmak için (frekans çözünürlüğünü arttırmak için) bu işlem örnek sayısı Nyquist frekansının olarak tanıdığı sınıra kadar tekrarlanır. Sonra da yapılan tüm işlemler tersinden tekrarlanarak sinyal sentezlenir. İşlemlerin tersten yapılması, önce sinyalin yukarı örneklenmesi ardından yüksek geçiren ve alçak geçiren süzgeçlerin birbirlerinin tersi olması özelliğinin kullanılmasıyla sinyallerin süzülüp bir araya getirilmesini içerir.

5.8. Dalgacık Dönüşümünün Kullanım Alanları

Dalgacık dönüşümün sayısal sinyal işleme teknikleri içerisinde iki temel kullanım alanı vardır. Bunlardan ilki veri sıkıştırma ikincisi gürültü gidermedir. Bunların dışında da birçok kullanım alanı vardır. Örnek olarak devamsızlık tespiti, olasılık dağılım tahmininin nümerik çözümü, nitelik ayırt etme ve çeşitli veri analizi yöntemleri sayılabilir. Veri sıkıştırmanın elverişli olmasının sebebi dalgacık dönüşümünün yapısından kaynaklanmaktadır. Çünkü kesikli dalgacık dönüşümü ayrıştırma işlemi sırasında her seviyede örnek sayısını azaltılıp, fazlalık bilgiyi elediği için, orijinal sinyale göre tekrar sentezlenmiş hali oldukça az yer kaplar. Bu yöntem kullanılan değişik kodlama teknikleri ile gerçekleştirilir. Kodlama çeşitlerine örnek olarak aritmetik kodlama, RLE kodlama ve Huffman Algoritması sayılabilir. Veri sıkıştırma kapsam dışında olduğundan bu yöntemlerle ilgili bilgi verilmeyecektir.

5.9. Dalgacık Yöntemiyle Gürültü Giderme

Gürültü giderme özetle üç basamakta gerçekleştirilir.

1. Analiz : n. Seviye dalgacık ayrıştırması;

$$Y=W_y \quad (5.19)$$

2. Eşik değeri: Dönüşüm katsayılarına uygun eşik değerleri seçilip uygulanması



Şekil 5.21 Eşik değeri

3. Sentezleme: Eşik değeri uygulanmış katsayılarla sinyalin yeniden oluşturulmasıdır

$$\hat{x} = W^{-1} \hat{X} \quad (5.20)$$

Gürültü kabaca renkli ve renksiz (beyaz) olmak üzere ikiye ayrılır. Beyaz gürültü sinyal üzerinde tüm frekanslarda eşit güçte bulunan ve zamanla bu özellikleri değişmeyen bir sinyal çeşididir. Renkli gürültüler ise gerçek hayatta daha sık karşılaştığımız, sinyalin frekansları üzerinde farklı güçlerde bulunabilen sinyallerdir. Eşik değeri frekans bileşenlerine ayrılmış sinyaller için hesaplanırken gürültünün yapısı önemlidir. Eğer gürültü beyaz ise eşik değerinin her frekans için hesaplanmasına gerek yoktur, tüm katmanlarda kullanılabilir. Ancak eğer kaynağımız renkli gürültülerle kirlenmişse tüm katsayılar için eşik değeri hesaplanır. Eşik değeri aşağıdaki formülle hesaplanır;

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(n)} \quad (5.21)$$

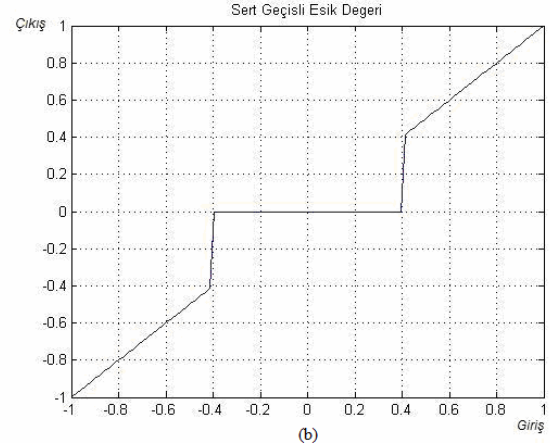
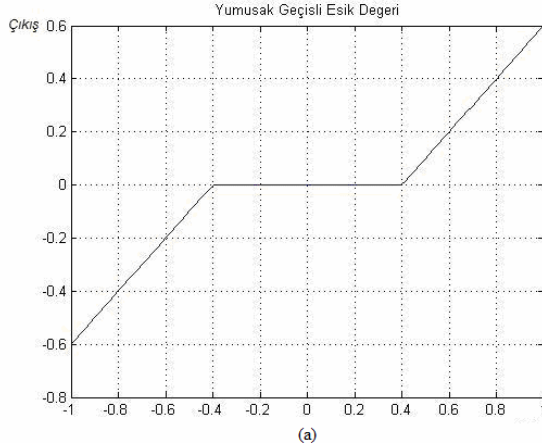
Burada “ σ ”, sinyaldeki standart sapmayı göstermektedir, “ n ” ise örnek sayısıdır. Bu eşik değerine VisuShrink eşik değeri denir. Evrensel eşik değeri de bir başka isimdir. Bunun dışında birkaç yöntem daha olsa da en çok kullanılanı budur. İki çeşit eşik değeri vardır.

1. Sert geçişli eşik değeri:

$$y_{\text{Sert}}(t) = \begin{cases} x(t), & |x(t)| > \lambda \\ 0, & |x(t)| < \lambda \end{cases} \quad (5.22)$$

2. Yumuşak geçişli eşik değeri:

$$y_{\text{Yumuşak}}(t) = \begin{cases} \text{sgn}(x(t)) \cdot (|x(t)| - \lambda) & |x(t)| > \lambda \\ 0, & |x(t)| < \lambda \end{cases} \quad (5.23)$$



Şekil 5.22 (a) yumuşak eşik değeri (b) sert eşik değeri

Sinyale ($y=x$) yumuşak ve sert eşik değerleri 0.4 değeri için uygulandığında yukarıdaki sonuçlar görülür. İki fonksiyonda 0.4 üzerindeki sinyallere izin verirken altındakilere geçit vermemektedir. Sinyalin negatif tarafında ise eşik değerinin boyu kadar bir devamsızlık oluşur. Eşik değeri hep pozitif değerlerden seçilir. Yumuşak eşik değeri gürültü gidermede daha etkili bir çözümdür. Ancak veri kayıpları sinyalde genel değişiklikten ötürü sert eşik değerine göre daha fazladır. Şekilden de görüleceği gibi hiçbir çıkış değeri, eşik değerinin üstünde de olsa, girişle aynı değildir. Bu kayıplar sinyalin yüksek frekans bileşenlerinde meydana gelir. İmgelerde eğer köşe detayları önemli değilse uygulanabilir. Detayın ön planda olduğu imge, temizleme uygulamalarında tavsiye edilmez [23].

6. UYGULAMALAR

Yapılan Çalışmalar iki ana başlıkta özetlenebilir. Birincisi sayısal ve analog filtre tasarım programının tanıtılması ikincisi ise Wiener ve Dalgacık yöntemiyle fetal ECG'nin anne ECG'sinden ayırt edilmesi.

6.1. Süzgeç Tasarım Programı

Yazılım, Mathworks firmasının bir ürünü olan Matlab programı ile hazırlanmıştır. Yazılan programın daha kullanışlı hale gelebilmesi için ayrıca programa grafik ara yüz eklenmiştir. Program süzgeç çeşitlerinin seçilmesine olanak tanıyacak ana menü ile başlar [24].

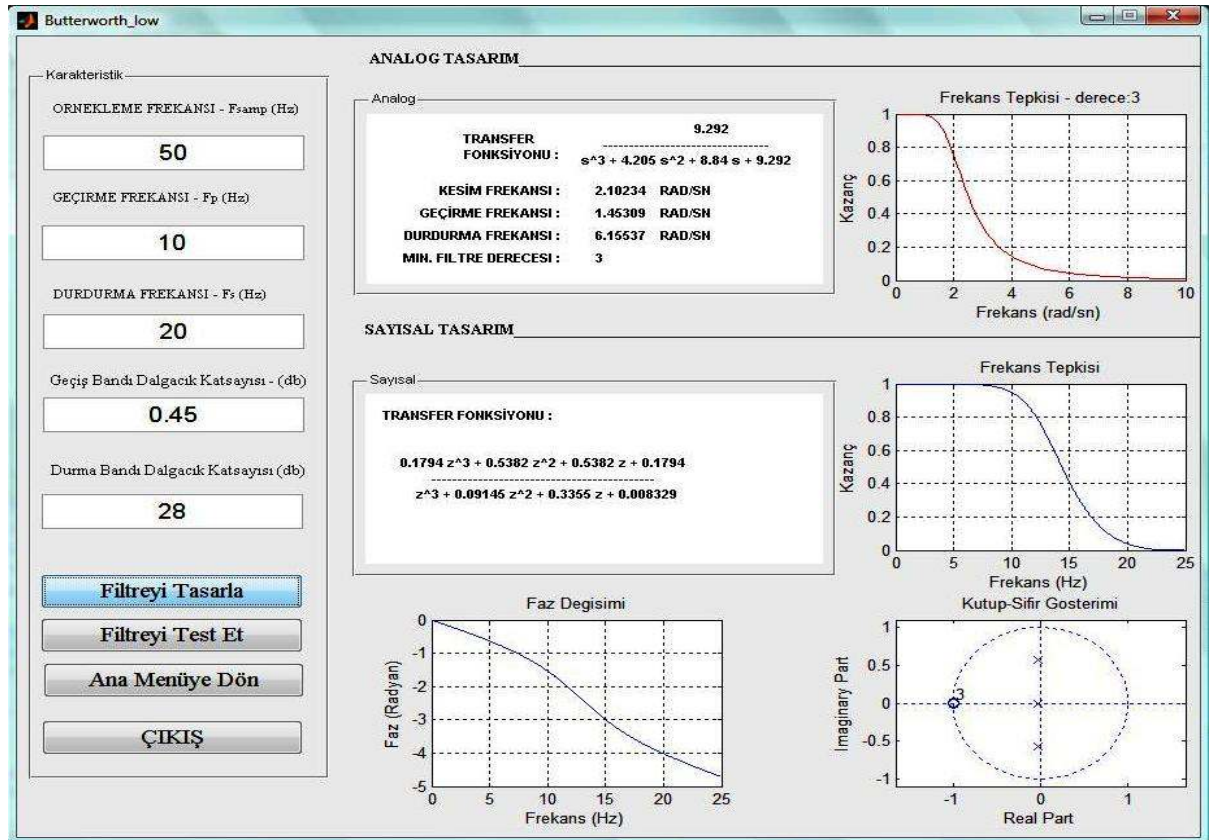


Şekil 6.1 Süzgeç tasarım programının açılış sayfası

Kullanıcı tasarlamak istediği süzgeç çeşidini buradan seçtikten sonra ana menü kapanır ve yerine seçilen tasarımı yerine getirecek başka bir menü çıkar. Burada

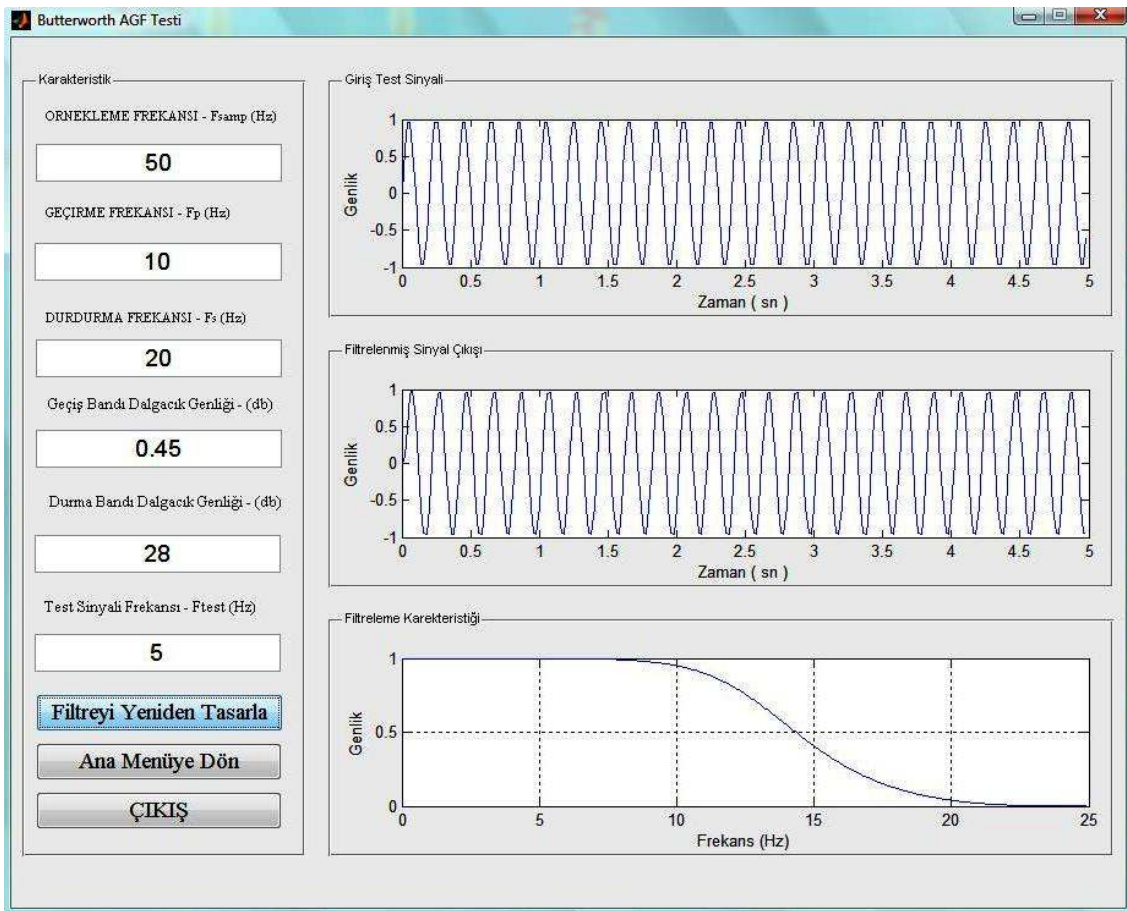
ilk değerler hazır olsa da kullanıcı isterse bu değerleri güncelleyebilir. Sırasıyla bu değerler alçak ve yüksek geçiren süzgeçler için aşağıdadır.

1. Örneklem Frekansı: Açısal frekansların hesaplanmasında kullanılmak için istenir. Ayrıca bu frekans test bölümünde tanıtılacak olan test sinyalinin de örneklem frekansı olacaktır. Bundan sonra seçilen tüm frekans değerlerinin örneklem frekansının yarısından büyük olmamasına dikkat edilmesi gerekmektedir. Aksi halde sinyalde Nyquist oranına uyulmadığından doğabilecek bozulmalar olağandır.
2. Geçirme Frekansı: Tasarlanacak olan süzgecin hangi frekanstan sonra geçirmeye başlayacağını belirler.
3. Durdurma Frekansı: Tasarlanacak olan süzgecin hangi frekanstan sonra giriş sinyalini süzeceğini belirtir.
4. Dalgacık Katsayıları: Süzgeç karakteristiğinde geçiş ve durdurma bölgelerindeki genlik değişikliklerinin “db” cinsinden büyüklüğünü belirtir.



Şekil 6.2 Analog ve sayısal tasarım sonuçları

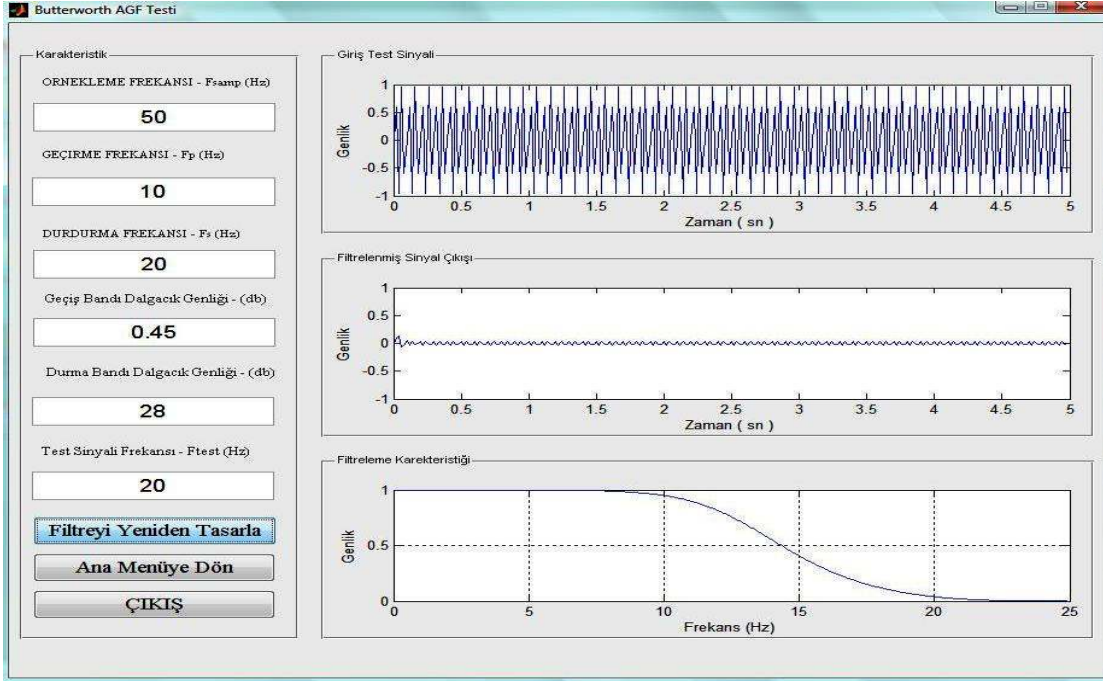
Programda kullanıcıdan istenen bu bilgilerin yanı sıra bant geçiren ve durduran süzgeçlerde fazladan bant sınırları belirlenir. Bilgiler anlatıldığı şekilde girildikten sonra “Filtreyi Tasarla” komutu verilir. Daha sonra aynı menünün sol tarafında analog tasarım ve sayısal tasarım alt başlıklarında sonuçlar görülür. Analog tasarım kısmında süzgecin normalize frekans tepkisinin yanı sıra en küçük süzgeç derecesine göre hesaplanan aktarım işlevi, analog frekanslar yer alır. Sayısal kısımda ise çift doğrusal dönüşüm metodu ile analog değerlerden hesaplanan sayısal süzgeç tasarımı ve frekans tepkisi, faz değişimi ve kutup-sıfır gösterim grafikleri yer alır.



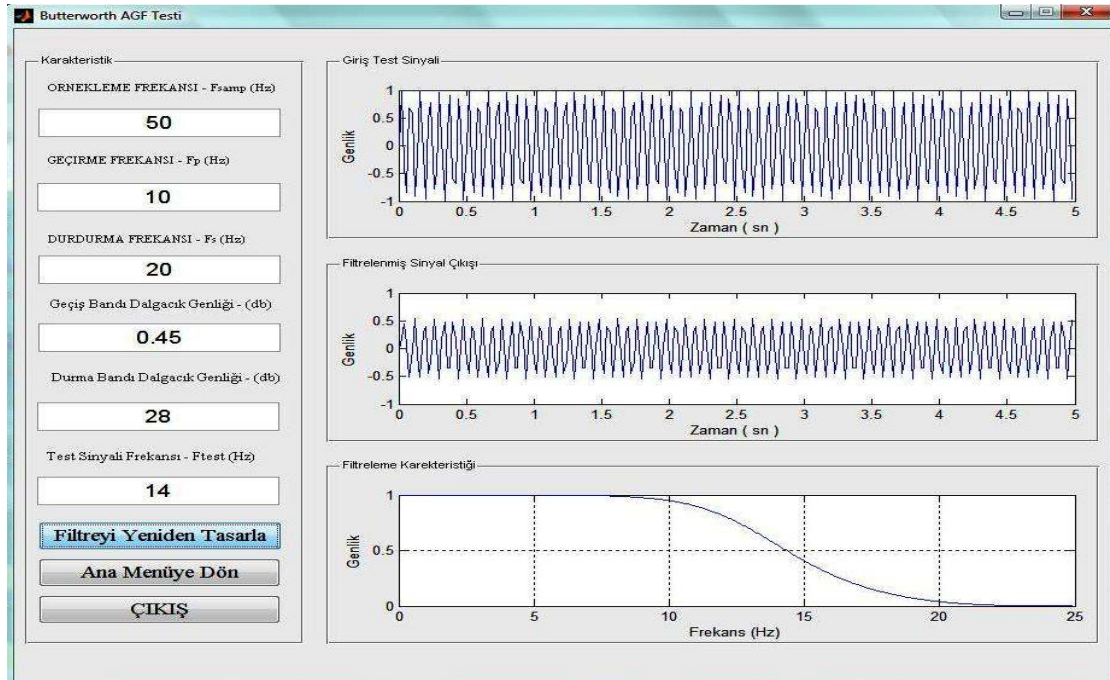
Şekil 6.3 Tasarlanan Süzgecin test edilmesi

Tasarlanan süzgecin nasıl çalıştığını görebilmek için “Filtreyi test et” komutuyla başka bir ara yüz ortaya çıkar. Bu ara yüzdeki menüde bir önceki menüde istenen değerlere ek olarak test sinyalinin (sinüs) frekansının girilmesi gerekmektedir. Bu işlem sırasında sinyalin Nyquist frekansına yine dikkat edilmesi gerekir. Seçilen frekansa göre oluşturulan sinüs sinyali ekranın en üstünde giriş

sinyali başlığı altında oluşacaktır. Bu sinyalin altında oluşan çıkış sinyali, en altta verilen süzme karakteristiğine göre giriş sinyalinin hangi frekanslarda nasıl frekans tepkisi vereceğini gösterecektir.



Şekil 6.4 Tasarlanan Süzgecin test edilmesi / $f_{\text{test}}=20$ Hz, Çıkış Genliği ≈ 0



Şekil 6.5 Tasarlanan Süzgecin test edilmesi / $f_{\text{test}}=14$ Hz, Çıkış Genliği ≈ 0.5

6.1.1. Örnek süzgeç tasarımı

Bir önceki konu anlatımında kullanılan değerlerin, sonuçların karşılaştırılması için bu bölümde teorik olarak hesaplanması yapılacaktır. Bu hesaplamalar, daha önce süzgeç tasarım bölümünde aktarılan karakteristik denklemlerden çıkmaktadır. Gösterilen grafikler alçak geçiren analog ve sayısal süzgecin tasarım sonuçlarıdır.

Geçirme Frekansı (f_p) : 10Hz

Durdurma Frekansı (f_s) : 20Hz

Örnekleme Frekansı (f_{samp}) : 50Hz

Geçiş Bandı Dalgacık Katsayısı(d_p): 0.45db

Durdurma Bandı Dalgacık Katsayısı(d_s): 28db

Açısal Frekanslar;

$$w_p = 2\pi \frac{10}{50} = 0,4\pi \quad (6.1)$$

$$w_s = 2\pi \frac{20}{50} = 0,8\pi \quad (6.2)$$

Örnekleme Frekansı 1 alınıp normalize analog frekansları ön çarpılma yaparak bulunmakta:

$$\Omega_p = 2 \tan\left(\frac{w_p}{2}\right) = 1,4531 \quad (6.3)$$

$$\Omega_s = 2 \tan\left(\frac{w_s}{2}\right) = 6,1554 \quad (6.4)$$

$$d_p = 0,45 = -20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}\right) \rightarrow \xi = 0,3303 \quad (6.5)$$

$$d_s = 28 = -20 \log\left(\frac{1}{A}\right), A = 25,1188 \quad (6.6)$$

$$N = \frac{\log(\sqrt{A^2 - 1} / \varepsilon)}{\log(\Omega_s / \Omega_p)} = 2,98 \cong 3 \quad (6.7)$$

Butterworth genel formülünde Ω yerine Ω_c yazılırsa;

$$H(jw) = \frac{1}{1 + (\Omega / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{1 + (\Omega_c / \Omega_c)^{2N}} = \frac{1}{2} \quad (6.8)$$

Bulunan değeri kesim frekansını bulmak için aynı formülde Ω yerine Ω_c yazılırsa;

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (\Omega / \Omega_p)^{2N}} \quad (6.9)$$

$$2 = 1 + \varepsilon^2 (\Omega_c / \Omega_p)^6, 1 = \varepsilon^2 (\Omega_c / \Omega_p)^6,$$

$$\Omega_c^6 = \Omega_p^6 / \varepsilon^2, \Omega_c = \Omega_p / \sqrt[3]{\varepsilon}, \Omega_c = 2,1 \quad (6.10)$$

3. dereceden butterworth analog süzgecin normalize aktarım işlevi aşağıda yazılmıştır.

$$H_{an}(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)} \quad (6.11)$$

Bu formülde s yerine s / Ω_c konularak denormalizasyon yapılmakta;

$$Hlp(s) = Han(s / \Omega_c) \quad (6.12)$$

$$(1 / \Omega_c = 0,476)$$

$$Han(s) = \frac{1}{(s + 1)(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (6.13)$$

$$Han(s.0,476) = \frac{1}{s^3 0,11 + 2s^2 0,23 + 2.s.0,476 + 1} = \frac{9,1}{s^3 + 4.2s^2 + 8,7s + 0,91} \quad (6.14)$$

$$Hlp(s) = \frac{9,1}{s^3 + 4.2s^2 + 8,7s + 0,91} \quad (6.15)$$

Sayısal Süzgeç aktarım işlevi, aşağıdaki ifade (Çift doğrusal Dönüşüm), analog aktarım işlevinde yerine konulduğunda ve uygun sadeleştirmeler yapıldığında bulunur.

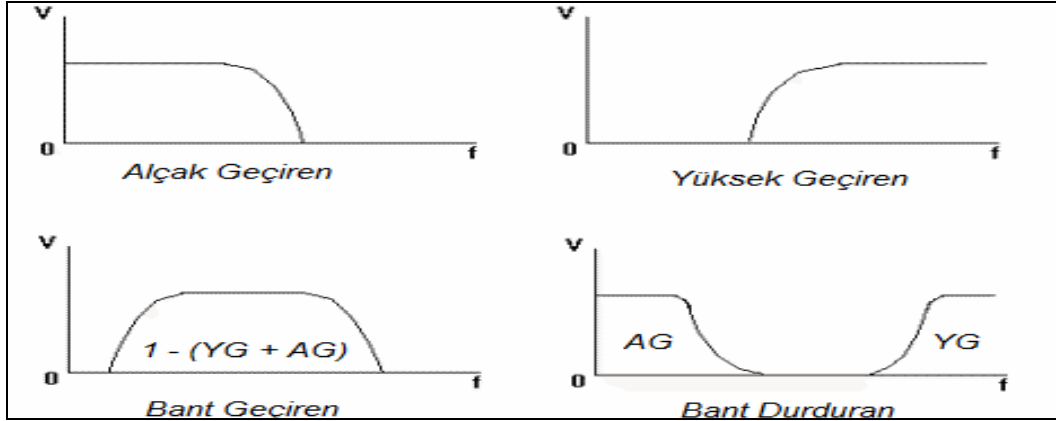
$$H(z) = H_{lp} \left(2 \cdot \frac{(1 - z^{-1})}{(1 + z^{-1})} \right) \quad (6.16)$$

...

$$H(z) = \frac{0,179 + 0,538z^{-1} + 0,53z^{-2} + 0,179z^{-3}}{1 + 0,0913z^{-1} + 0,3355z^{-2} + 0,0083z^{-3}}$$

$$H(z) = \frac{0,179z^3 + 0,538z^2 + 0,53z + 0,179}{z^3 + 0,0913z^2 + 0,3355z + 0,0083} \quad (6.17)$$

Bu hesaplamalar karşılaştırmalı olarak sonuçlar kısmında verilecektir. Süzgeç tasarımı işlemsel olarak oldukça ağırdır. Özellikle yüksek dereceli süzgeçler söz konusu olduğunda pratik olarak bu hesaplamaları yapmak mümkün değildir. Bilgisayarlar, sahip oldukları işlem gücü ve hızı sayesinde bu tür hesaplamalarda başvurulacak alternatifsiz kaynaklardır.



Şekil 6.6 Süzgeçlerin kesme özellikleri arasındaki ilişkiler

Örnek olarak sadece alçak geçiren süzgecin verilmesinin özel bir sebebi var. Tüm süzgeçler uygun dönüşüm formülleri ile birbirlerine dönüşebilirler:

$$\text{Yüksek Geçiren} = 1 - \text{Alçak Geçiren} \quad (6.18)$$

$$\text{Alçak Geçiren} = 1 - \text{Yüksek Geçiren} \quad (6.19)$$

$$\text{Bant Geçiren} = 1 - \text{Bant Durduran} \quad (6.20)$$

$$\text{Bant Durduran} = 1 - \text{Bant Geçiren} \quad (6.21)$$

$$\text{Bant Durduran} = \text{Alçak Geçiren} + \text{Yüksek Geçiren} \quad (6.22)$$

$$\text{Bant Geçiren} = 1 - (\text{Alçak Geçiren} + \text{Yüksek Geçiren}) \quad (6.23)$$

Dönüşüm formülleri transfer fonksiyonlarından darbe yanıtının çıkartılıp frekans etki alanındaki uygun kaydırma işlemleri ile elde edilir. Bu işlemin yanı sıra verilen örnekte teknik anlamda fark olmadığından, diğer frekans yanıtındaki süzgeçler için örnekler verilmemiştir. Chebyshev, Eliptik ve Butterworth süzgeçlerde ise fark, hesaplanan genel formüllerden ibarettir. Bunlarla ilgi bilgiler ise konu başlıklarında detaylı olarak incelenmiştir.

Uygulamalar bölümündeki ikinci çalışmamız anne karnındaki bebeğin ECG sinyallerinin, annenin ECG'sinden “Kısa Zamanlı Wiener süzgeç” kullanarak ayırt edilmesi ve “Dalgacık Dönüşümü” ile oluşan gürültünün temizlenmesi ile ilgili olacaktır.

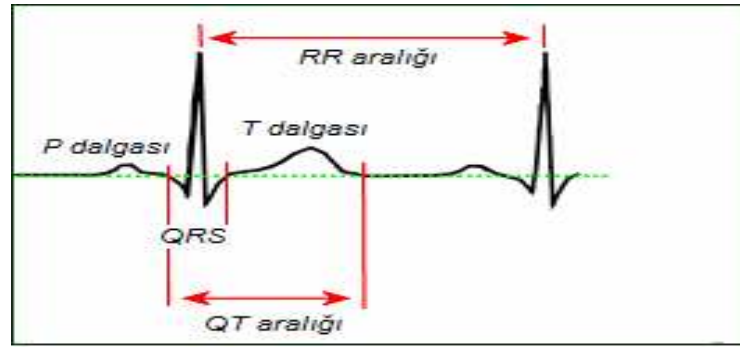
6.2. Fetal ECG Ayrımı

Fetal ECG ayrımı, anne karnındaki fetüsün ECG sinyallerinin erken tanı ve tedavi amacıyla annenin ECG sinyallerinden, akciğer ve diğer organlardan kaynaklı seslerden temizlenerek ayırt edilmesi işlemidir. Bu amaçla geliştirilmiş birçok yöntem vardır. En yaygın yöntem kör sinyal analizi olarak da bilinen bağımsız bileşenler analizidir (ICA). Yapılan çalışmanın amacı bu yönetime alternatif olabilecek daha basit bir yöntemi tasarlamaktır. Bu yöntem “Kısa Zamanlı Wiener Süzme” ve “Dalgacık Temizleme” olmak üzere iki basamaktan oluşmaktadır. Çalışmalarda ICA referans olarak alınmış olup sonuçlar karşılaştırılmıştır.

6.2.1 Elektrokardiyogram – ECG

İnsan vücudu üzerinde algılanılabilen ve kalbin elektriksel aktivitesinin sonucu olarak ortaya çıkan belli tipteki biyolojik işaretlere elektrokardiyogram,

elektrokardiyografik işaret, ECG işareti veya kısaca ECG denir. ECG işaretlerinin gösterilmesini veya kaydedilmesini sağlayan cihazlara elektrokardiyograf ve ECG ile ilgili sistemlere de genel olarak elektrokardiyografi denir. Kalbin çalışması sırasındaki bozukluklarının iyi bir göstergesi olan ve insan vücudu üzerinden operasyon yapmadan kolaylıkla elde edilebilen ECG işaretleri, işleme ve yorumlanma açısından büyük önem taşımaktadır. ECG sinyalinin iç direnci 10-100k, gerilimi 3.5mV ve frekansı 0.15-300Hz arasındadır. Ama genellikle 0.67-40Hz arasında anlamlıdır. Yetişkin bir insanın kalbi dakikada 89 defa atar, bebeklerin ise kalpleri dakikada 120 ile 160 arasında atar. Tepe gerilimi ise anneninkinden yaklaşık onda bir oranında daha zayıftır.



Şekil 6.7 ECG sinyalindeki dalgacıklar

Normal bir ECG'de P, QRS ve T diye adlandırılan 3 dalga ve bunlar arasında düz çizgiler vardır. Bu dalga ve çizgilerdeki değişiklikler normalden sapmaları gösterir. P dalgası kulakçıkların uyarılması ile kasılmasını, QRS dalgası karıncıklara geçen uyarının bunları kasmaasını, T dalgası karıncıkların polarize (sakin) hale gelmesini gösterir. RR aralığı kalptaki bu kasılmaların sıklığının ve düzeninin bilinmesi açısından önemlidir. QT aralığı ise ventriküler sistolün toplam süresini gösterir. QRS kompleksinin başlangıcından T dalgasının sonuna kadar saniye cinsinden ölçülür. Dalgalar arasındaki mesafeler, dalgaların süresi, yükseklikleri (voltajları), şekilleri ve düzenli olarak birbirlerini takip etmelerindeki değişiklikler kalpte olabilecek yapı değişikliğini veya hastalığı gösterebilir.

ECG ritim şeridinin yorumlanması beş şekilde gerçekleşir;

(a) **Hız** : 60 ile 100 vuru/dak. aralığı normal atım hızlarıdır bu değerin üstü taşikardi, altı ise barikardi olarak isimlendirilir.

(b) **Ritim**: R-R aralığının düzenli olup olmadığı incelenir.

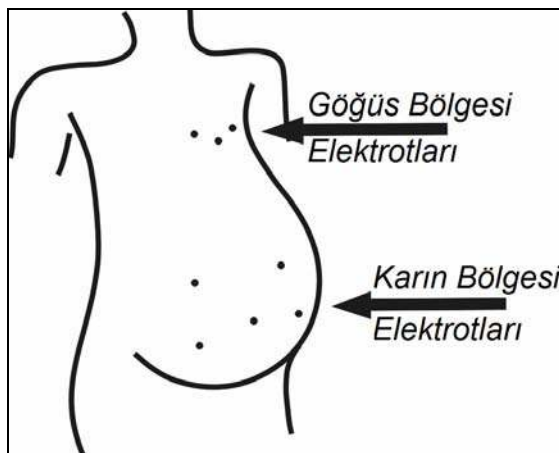
(c) **P Dalgası**: P dalgasının düzenli olup olmadığı, “-” veya “+” mı olduğu, her P dalgasından sonra QRS yapısı olup olmadığı kontrol edilir.

(d) **P-R Aralığı**: Yetişkin bir insanda bu aralık 0.12 ve 0.20 sn. ler arasında olması gerekmektedir.

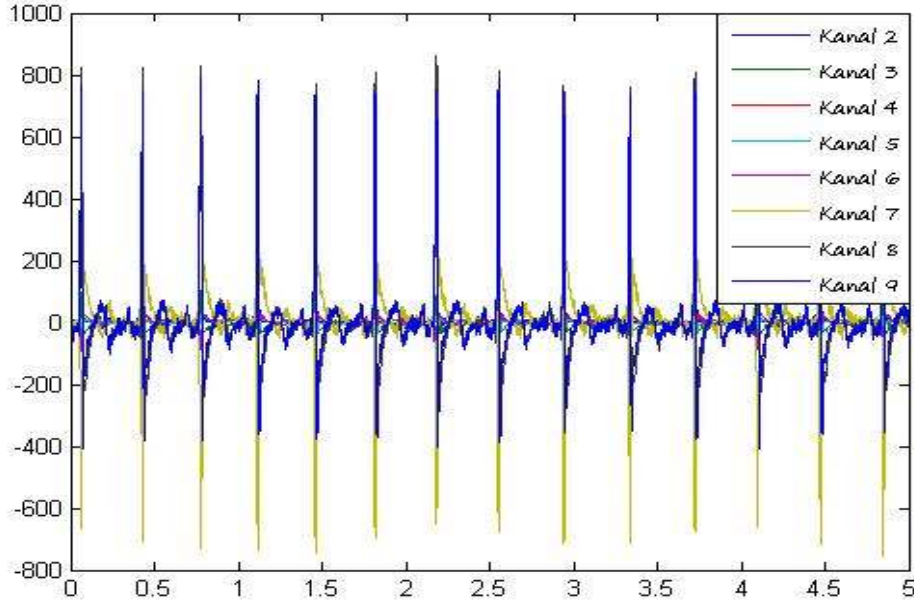
(e) **QRS Kompleksi**: Bu kompleks yapısının sinyalin genelindeki QRS yapılarına benzemesi ve süresinin 0.12 sn civarında olması gerekmektedir [25].

6.2.2. Veri kümesi

Veri kümesi dokuz kanaldan oluşmaktadır. Her kanal 500 Hz örnekleme frekansında 5sn boyunca kurşun elektrotlarla kayıt altına alınmıştır. Toplam 9 kanaldan oluşmaktadır. 1. kanal zaman adımlarını içermektedir. 2. ve 6. kanal aralığı annenin karın bölgesine, 7. ve 9. kanal aralığı ise göğüs bölgesine yerleştirilen elektrotlarla elektrokardiyografik veriler ölçülmüştür [26].



Şekil 6.8 Elektrotların yerleşimi



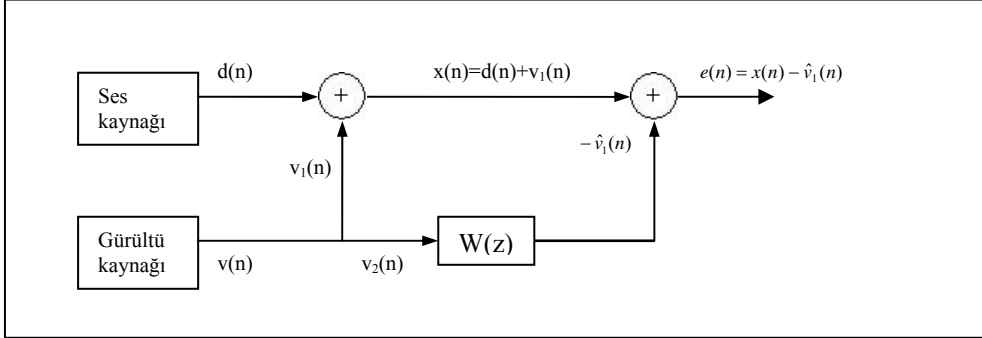
Şekil 6.9 Kullanılan veri kümesi

Çalışmamız neticesinde elde ettiğimiz sonuçlarının karşılaştırması için en yaygın fetal ayırım yöntemi olan bağımsız veriler analizi kullanıldı. Bu yöntem ile ilgi özet tanıtıcı bilgi ilerleyen konularda sunulacaktır. Veri kümesinin bu kadar çok kanaldan oluşmasının sebebi bağımsız veriler analizi için hazırlanmış olmasıdır. “Jade” algoritmasının kullanıldığı bu yöntem, analiz için en az 3 kanala ihtiyaç duyar. 8 kanal kullanarak sonucunu geliştirir. Kısa Zamanlı Wiener yaklaşımında sadece 2 kanal kullanılmıştır.

6.2.3. Kısa zamanlı Wiener Süzgecin fetal ECG ayırımında kullanılması

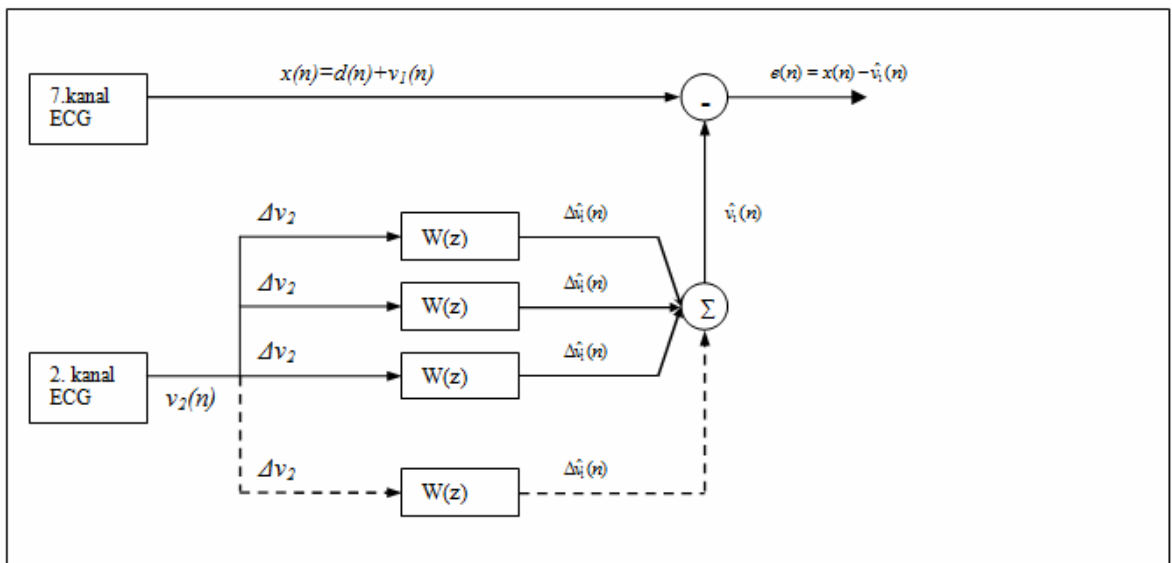
Wiener süzgeç ile ilgili teorik bilgi daha önce anlatılmıştı. Burada Wiener süzgeç ile gürültü temizleme konusunu hatırlatılacaktır. Gürültü kaynağından sisteme giren v_1 ve v_2 gürültüleri birbirinden farklıdır. Bu farklılığın sebebi sinyallerin yayılım düzlemindeki farklılıklar ve mesafeler olabileceği gibi sinyalleri sisteme sokan algılayıcıların farklı hassasiyetlere sahip olması da olabilir. Ancak bu sinyaller aynı kaynaktan çıktıklarından aralarında mutlaka bir ilişki vardır. Yani sinyaller birbirleriyle ilişkilidir. Wiener süzgeç bu ilişkiden faydalananarak 2. gürültü kaynağını 1. gürültü kaynağı için referans alıp, istatistiksel yöntemlerle 1. gürültü

kaynağını tahmin eder. Daha sonra tahmin ettiği 1. gürültü kaynağını, 1. gürültü kaynağı ile kirlenmiş sinyalden çıkartarak gürültüyü temizler.



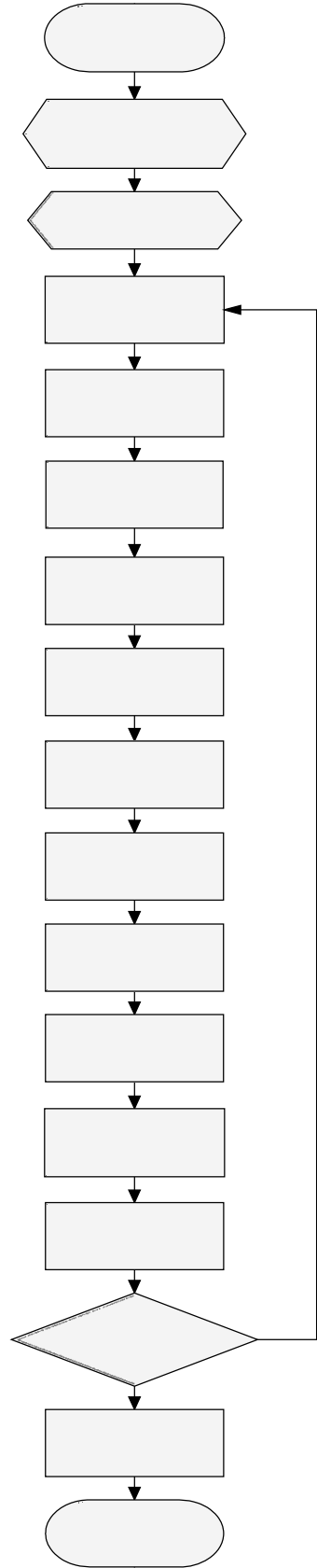
Şekil 6.10 Wiener gürültü temizleme

Yapılan çalışmada gürültü kaynağı olarak annenin göğüs bölgesinden alınan ECG sinyalleri alındı. Bebek ECG'sinin, annenin ECG'si ile kirlendiğini düşünerek, karın bölgesinden alınan ECG sinyalinden istatistiksel ilişkiler kullanarak (çapraz ilinti ve öz ilinti) hesaplanan tahmini Anne ECG'si çıkartıldı. Uygulamadaki tek farklılık, ECG yapısı gereği durağan bir sinyal olmadığından Wiener Süzgeç sinyalin tamamı yerine bölünmüş parçalarına uygulanacak olmasıdır. Daha sonra bu parçalar birleştirilip sinyal orijinal boyutuna dönüştürülecektir.



Şekil 6.11 Kısa Zamanlı Wiener gürültü temizleme

Akış şemasında (şekil 6.12) işlem basamakları teker teker gösterilmektedir. Sonuçların değişik matris boylarında hesaplanıp karşılaştırılması için hedef matris büyüklüğüne kadar algoritma döngüsel çalışır ve her seferinde hata sonuçları, global tanımlanmış matrislerde toplanır. Algoritma oldukça basittir. Hesaplanan çapraz ilinti ve öz ilinti değerleri ile “Wiener-Hopf” denklemi hesaplanır. Buradan çekilen ağırlık değerleri ile FIR süzgeç tasarlanır ve referans sinyal bu süzgeç ile süzülür. Sonuç giriş sinyalinden çıkartılıp istenen fetal ECG sinyaline ulaşılır. Bu işlem sinyalin daha önceden belirlenen adım boyuna göre tüm bileşenlerine uygulanır. Daha sonra sonuçlar birleştirilip hata analizi yapılır.



Şekil 6.12 Akış şeması – Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç

Basla

Hata Matrisi
Boyutlandır

Veri Kümesinin

Otokorolasyon
Matrisinin Boyutları
Güncelle

Kullanılacak
Kanalları Veri
Kümesinden

Adım Boyutları
Belirle & Sinyal
Parçalarına Ayır

Referans Gürültü
Otokorolasyon
Matrisini Hesapla

Referans ile Otokorolasyon
Sinyalinin Çarpımını
Korolasyonunu Hesapla

Wiener-Hopf
Denklemini çöz

Denklemden A
Matrisini Hesapla

6.2.4. Bağımsız bileşenler analizi (ICA)

Bağımsız bileşenler analizi veya genel ismiyle kör sinyal çözümleme yönteminin, Wiener süzme yöntemine göre işlemsel karmaşası oldukça yüksektir. ICA, sinyal ayırt etmede oldukça etkili bir yöntemdir. ICA için verilen en popüler örnek kokteyl partisi örneğidir. Burada kişi birçok konuşma ve gürültü içerisinden kendi seçtiği kişinin sesini duyup anlarken, diğer konuşmaları duysa da algılamaz. Yani kişi isteği dışındaki sesleri algılama sisteminde süzer, bu duruma algıda seçicilik de denir. İnsan bu ayrımı farkına varmadan basitçe yapabilse de sayısal sinyal işleme teknikleri içinde bu konuyla ilgili birçok çalışma yapılmıştır.

$$x_1(t) = a_{11}s_1 + a_{12}s_2 \quad (6.24)$$

$$x_2(t) = a_{21}s_1 + a_{22}s_2$$

Yukarıdaki denklemde (6.24) S_1 ve S_2 ayrılması gereken iki kayaktır. X_1 ve X_2 ise aynı ortamda bulunan mikrofonlardır. ICA'da işlenecek kaynak sayısı, en az algılayan mikrofon sayısı kadar olmalıdır. Mikrofonlar tarafından algılanan sinyalin ağırlık değerleri ise “a” katsayıları ile gösterilir. ICA'nın doğru bir şekilde sinyali analiz edebilmesi için kaynaklar birbirlerinden istatistiksel olarak bağımsız olmalıdır. Bu koşullar veri kümesinin ortalananması ve beyazlatılması ile sağlanır. Ortalama veri kümesinden beklenen değerin çıkartılması, beyazlatma ise boyutu daraltılmış giriş matrisinin kovaryans değerinin bulunması ardından bu matrisin öz değer vektörleri ile azalan öz değer sırasına göre dizilmesi ile gerçekleşir. Bu ön işlemlerden sonra giriş sinyali için seçilecek uygun algoritma ile ayrıştırma matrisi bulunur. Bu matris ile veri kümesi, kullanılan mikrofon sayısı kadar bileşenlerine ayrılır.

$$x=As, s=Wx \quad (6.25)$$

Döngüsel olarak işleyen algoritmaların en yaygın olanları, “HızlıICA”, “Infomax” ve “Jade” algoritmasıdır. Çalışmamızda Wiener sonuçlarının karşılaştırılması için kullandığımız algoritma Jade algoritmasıdır. Bu algoritma veri hakkındaki istatistiksel dönüşümü eniyiler. Algoritma 2. ve 4. kümülantlar arasında yaptığı

Çapraz işlemlerle sonuca gider. Olasılık teorisinden hatırlayacağımız gibi 2. kümülant varyans, 4. kümülant kurtotistir. Kurtotis yüksek olduğunda, olasılık dağılımı sivri ve dardır. Küçük olduğunda ise dağılım yuvarlak ve geniş tepelere sahiptir. 2. derece kümülant (varyans) verinin beyazlatılmış olduğunun ölçüsüdür. Beyazlatma matrisi ile çarpılan daraltılmış veri, beyazlamış matrisi oluşturur. Bu matristen kümülant matrisi bulunur. Daha sonra “givens” açılarına göre hazırlanan dönüş (rotasyon) matrisi, kümülant matrisini mümkün olduğu kadar köşegen haline getirir. Bu işlemlerle ayırıştırma matrisi döngüsel olarak bulunur.



şekil 6.13 Akış şeması – ICA

6.3. Süzgeç Tasarım Programı

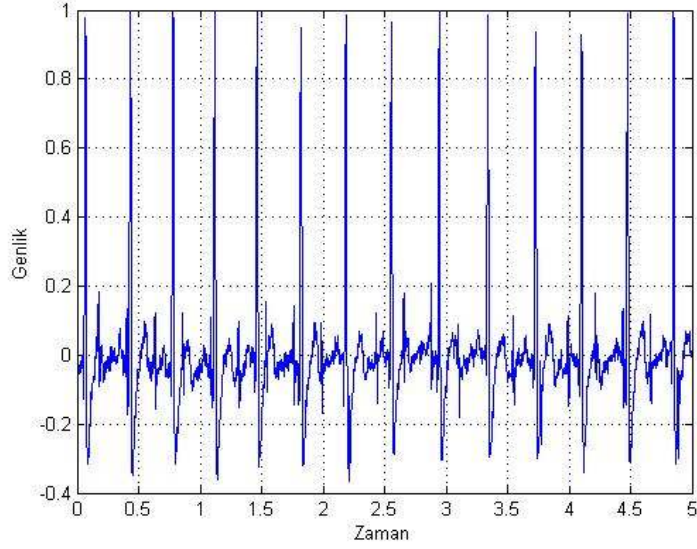
Yapılan çalışmalar kısmında anlatılan süzgeç tasarımı programının, verilen ilk değerler için örnekte hesaplanan değerlerin karşılaştırması aşağıda verilmiştir. Sonuçların büyük ölçüde örtüştüğü görülmektedir.

ANALOG TASARIM		Program Sonuçları	Hesap Sonuçları
Analog			
TRANSFER FONKSİYONU :	9.292 $s^3 + 4.205 s^2 + 8.84 s + 9.292$		$Hlp(s) = \frac{9,1}{s^3 + 4,2s^2 + 8,7s + 0,91}$ $Wc^6 = Wp^6 / \varepsilon^2$, $Wc = Wp / \sqrt[3]{\varepsilon}$, $Wc=2,1$ $Wp = 2 \tan(\frac{Wp}{2}) = 1,4531$ $Ws = 2 \tan(\frac{Ws}{2}) = 6,1554$ $N = \frac{\log(\sqrt{A^2 - 1} / \varepsilon)}{\log(Ws / Wp)} = 2,98 \approx 3$
KESİM FREKANSI :	2.10234 RAD/SN		
GEÇİRME FREKANSI :	1.45309 RAD/SN		
DURDURMA FREKANSI :	6.15537 RAD/SN		
MIN. FİLTRE DERECESİ :	3		
SAYISAL TASARIM			
Sayısal			
TRANSFER FONKSİYONU :	$0.1794 z^3 + 0.5382 z^2 + 0.5382 z + 0.1794$ $z^3 + 0.09145 z^2 + 0.3355 z + 0.008329$		$H(z) = \frac{0,179z^3 + 0,538z^2 + 0,53z + 0,179}{z^3 + 0,0913z^2 + 0,3355z + 0,0083}$

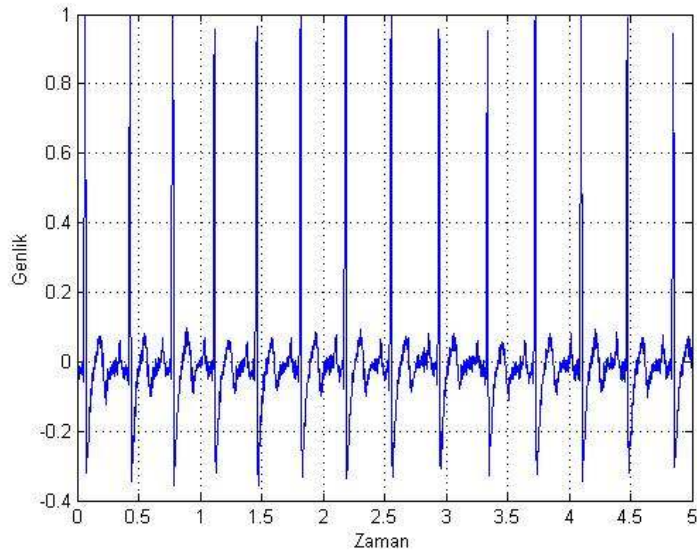
Şekil 6.14 Süzgeç Tasarım programının hesaplanan değerlerle karşılaştırması

6.4. Fetal ECG Ayırım Sonuçları

Hesaplamalarda Wiener Süzme için kullanılan normalize kanallar aşağıda görülmektedir. Şekil 6.15 deki ECG sinyali annenin karın bölgesinden alınmıştır. Bu yüzden hem annenin hem de bebeğin ECG sinyal bileşenlerini içermektedir. Şekil 6.16 annenin göğüs bölgesinden alınmış olup referans olarak kullanılacaktır.



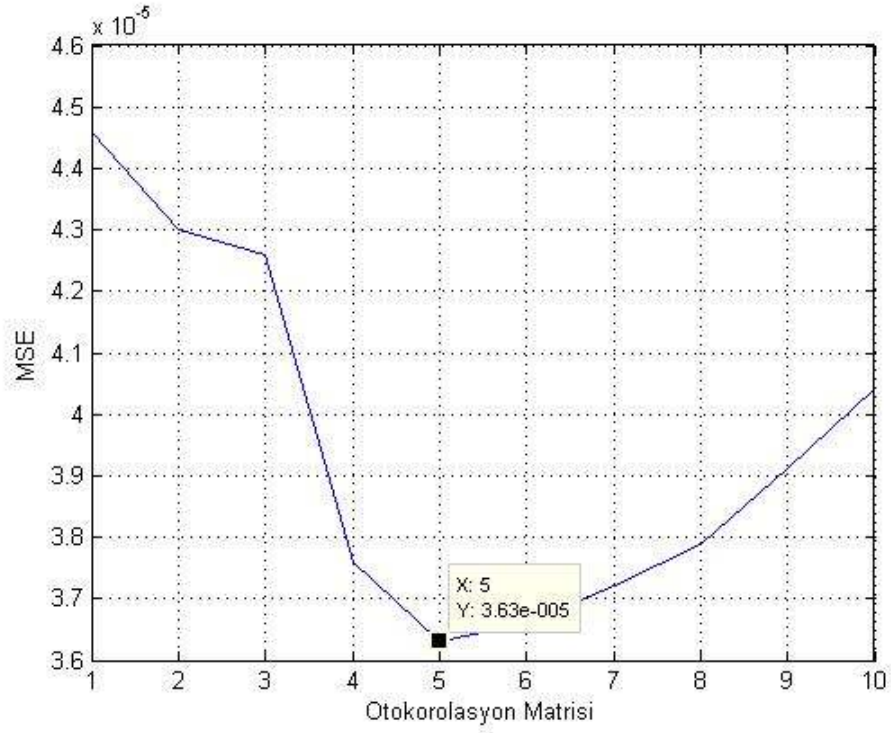
Şekil 6.15 Karın bölgesi ECG sinyali



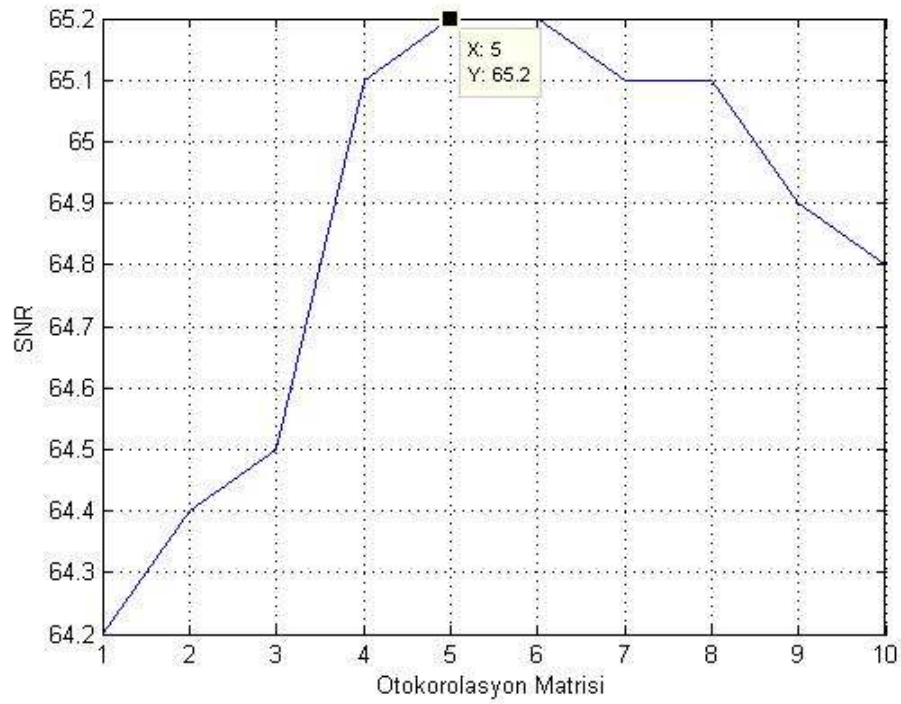
Şekil 6.16 Göğüs bölgesi ECG sinyali

Kısa Zamanlı Wiener Süzme işleminde kullanılacak olan adım sayısının ve öz ilinti matrisinin büyüklüğüne karar verilmesi kritik bir işlemdir. Bu parametrelerin değişmesiyle sistemin çıkışında elde edilecek sonuçta sadece MSE değerinin en küçük olması değil işlem karmaşası ve süresinin de göz önünde bulundurulması gerekmektedir. Öz ilinti matrisinin büyümesi daha fazla süzgeç katsayısı dolayısıyla daha fazla istatistiksel ilişkiye olanak tanır ancak bu matrisin büyümesi işlem süresini oldukça arttırmaktadır. Diğer taraftan seçilecek adım büyüklüğü yani

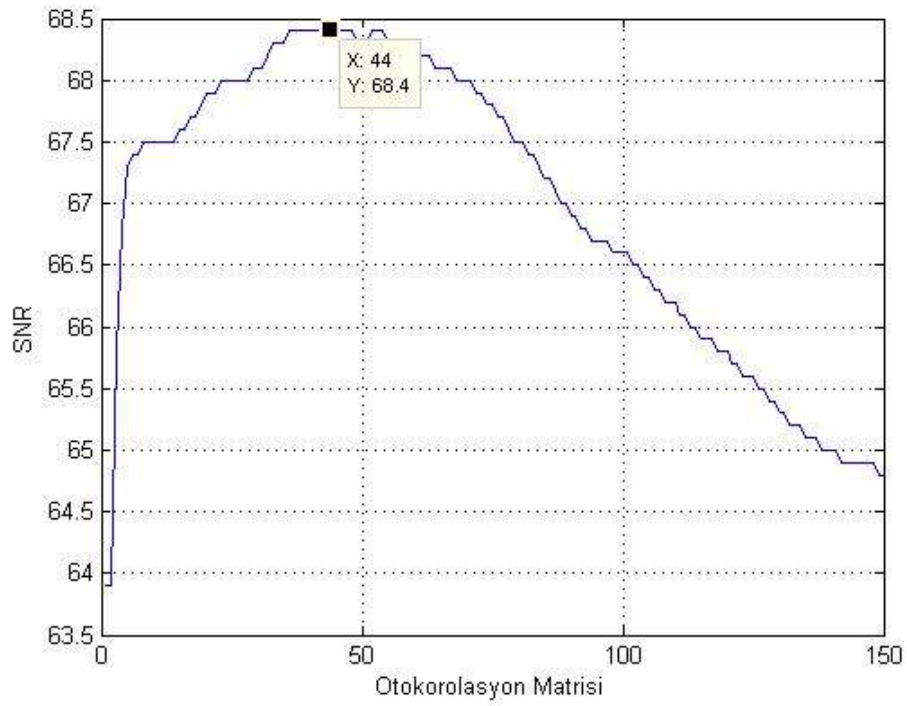
pencere boyu sinyali kısmen durağanlaştırırken işlem süresini kısaltacak ancak daha az istatistiksel ilişkiyi karşılayacağından sonuçlarda bazı veri kayıplarına neden olacaktır. Bu sebeplerden optimal matris büyüklüğünün ve adım sayısının, belirlenmiş sınır değerlerinde ampirik sonuçlarla oluşturulacak bir MSE matrisinden seçilmesi gerekmektedir. Bu matrisin özeti çizelge 6.1 de verilmiştir, tamamı ise Ek-1 de mevcuttur. İşlenen sinyaller 2500 örnekten oluşmaktadır, 500Hz örnekleme ile toplam 5 sn süren sinyal sırasıyla 50, 25, 20, 10 ve 5 eşit parçaya bölünüp öz ilinti matrisi 2x2 boyutundan ortalama 200x200 boyutuna kadar arttırılmıştır. 50 parçaya bölünen sinyal 50 örnek, 25 parçaya bölünen 100 örnek, 20 parçaya bölünen 125 örnek, 10 parçaya bölünen 250 örnek, 5 parçaya bölünen 500 örnek içermektedir. Bu örnek sayıları adım sayısı olarak da adlandırılmaktadır. MSE nin en az olduğu nokta sabit tutulan adım için seçilecek optimal matris büyüklüğünü belirlemektedir. Adım sayısı arttıkça MSE nin o adım için en küçük değerine ulaşması, küçük adımlara nispetle büyük öz ilinti matrisi büyüklüğü gerektirir. Küçük adımlar için hazırlanan MSE matrisinde öz ilinti matrisi çok büyümeden en küçük değerine ulaşır. Bu sebeple grafiklerde büyük matrisler karşılaştırmaya alınmamıştır. Bu grafikler aşağıda sırasıyla 50, 100, 125, 250 ve 500 örnek adımları için MSE ve SNR (sinyal gürültü oranı) değerleri verilmiştir.



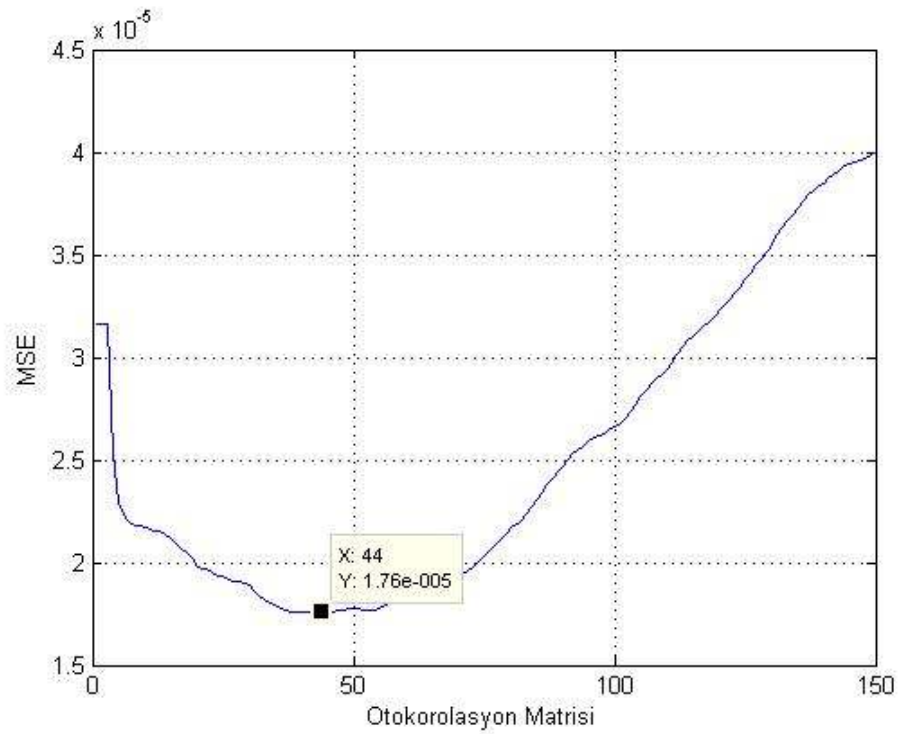
Şekil 6.17 MSE & Öz ilinti matris boyutu - 50 örnek adım



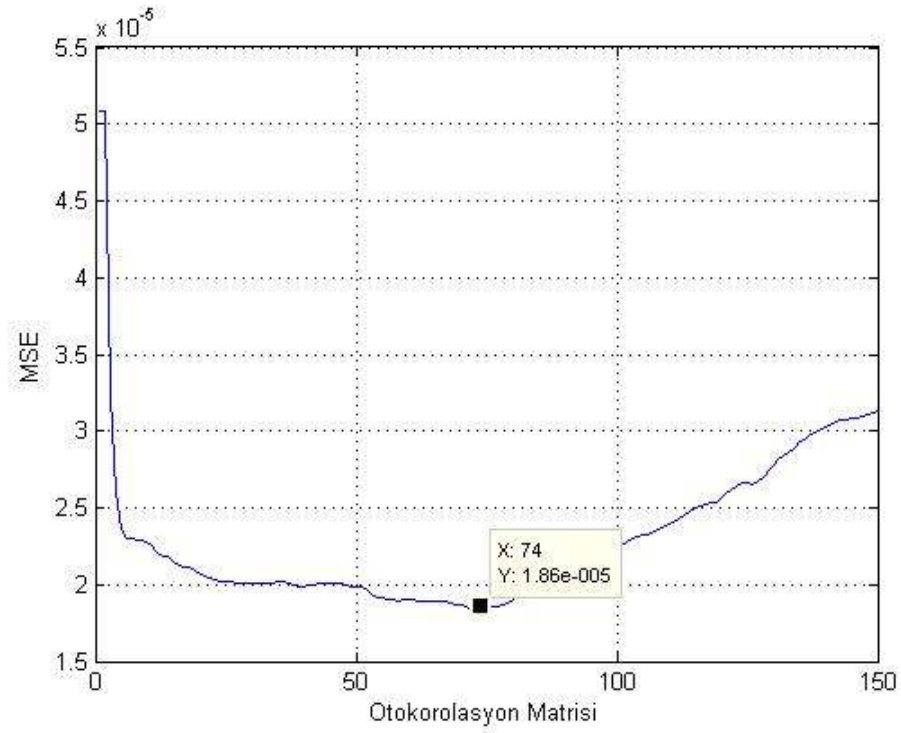
Şekil 6.18 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 50 örnek adım



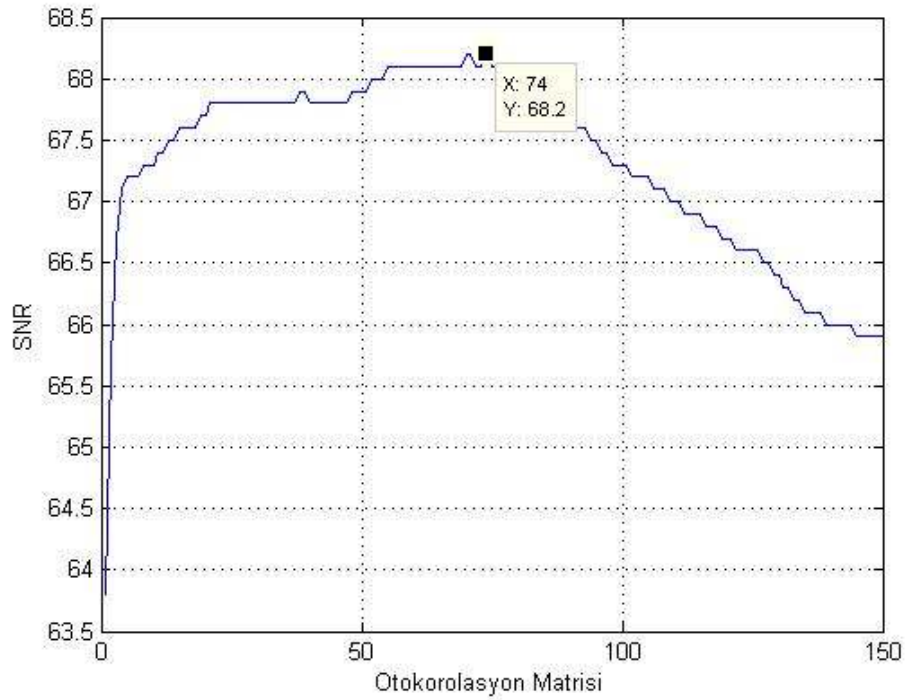
Şekil 6.19 MSE & Öz ilinti matris boyutu - 100 örnek adım



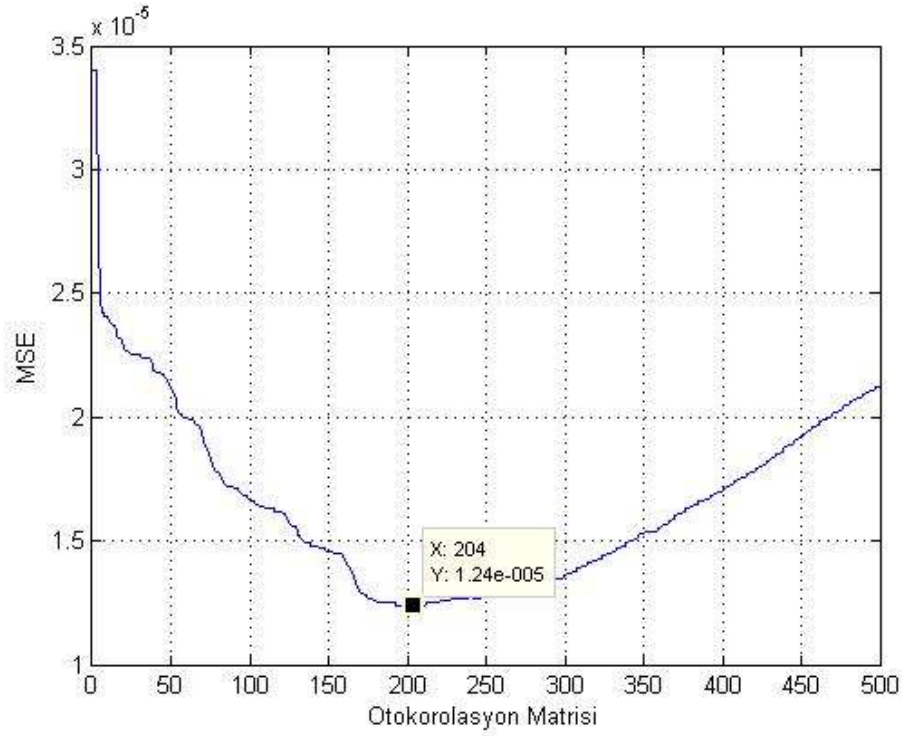
Şekil 6.20 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 100 örnek adım



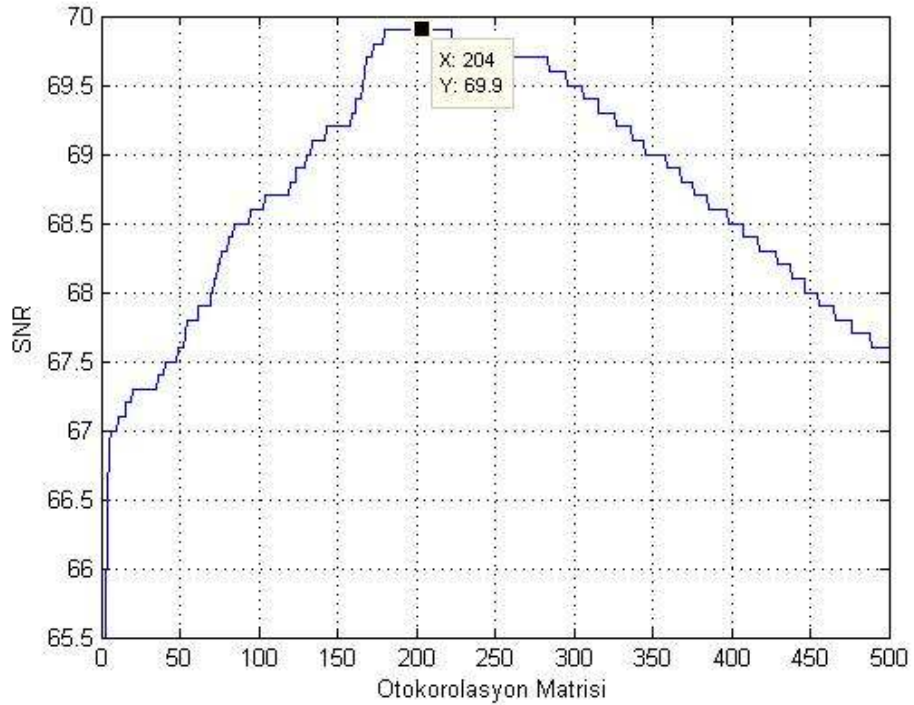
Şekil 6.21 MSE & Öz ilinti matris boyutu - 125 örnek adım



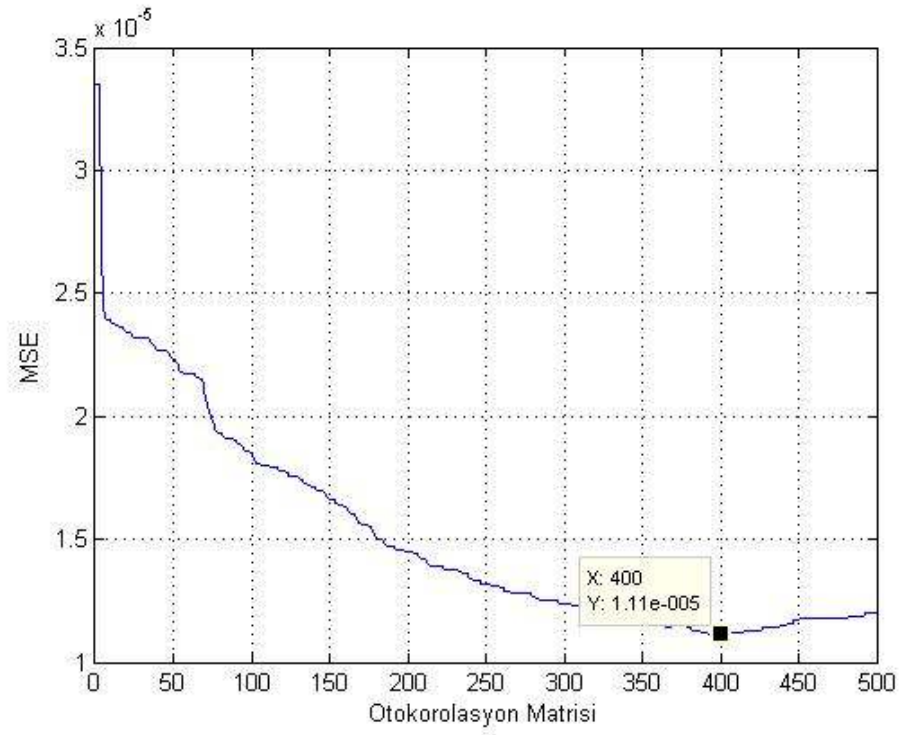
Şekil 6.22 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 125 örnek adım



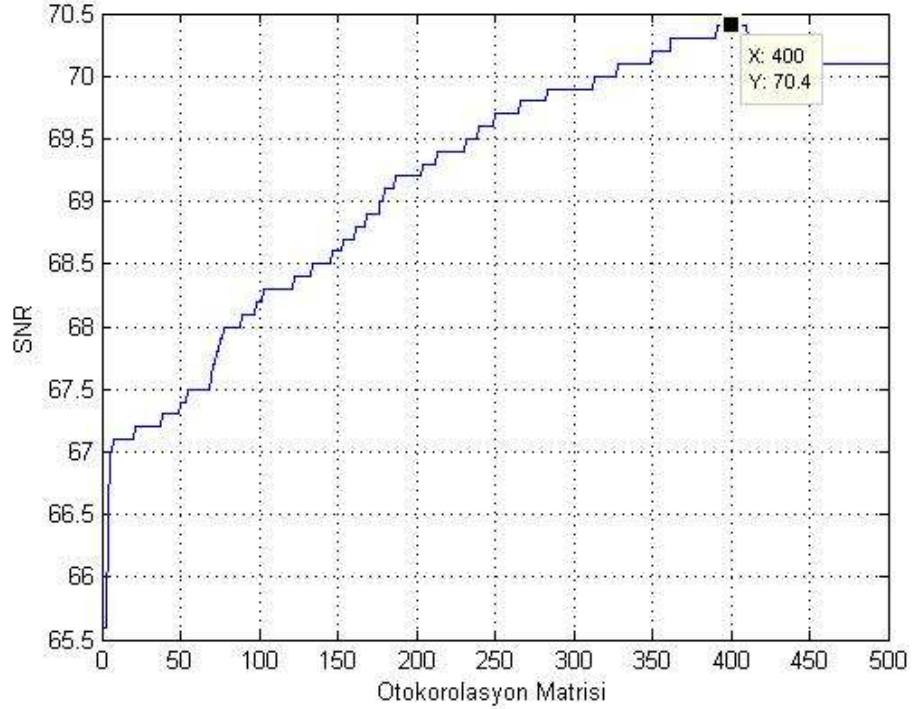
Şekil 6.23 MSE & Öz ilinti matris boyutu -250 örnek adım



Şekil 6.24 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 250 örnek adım



Şekil 6.25 MSE & Öz ilinti matris boyutu - 500 örnek adım

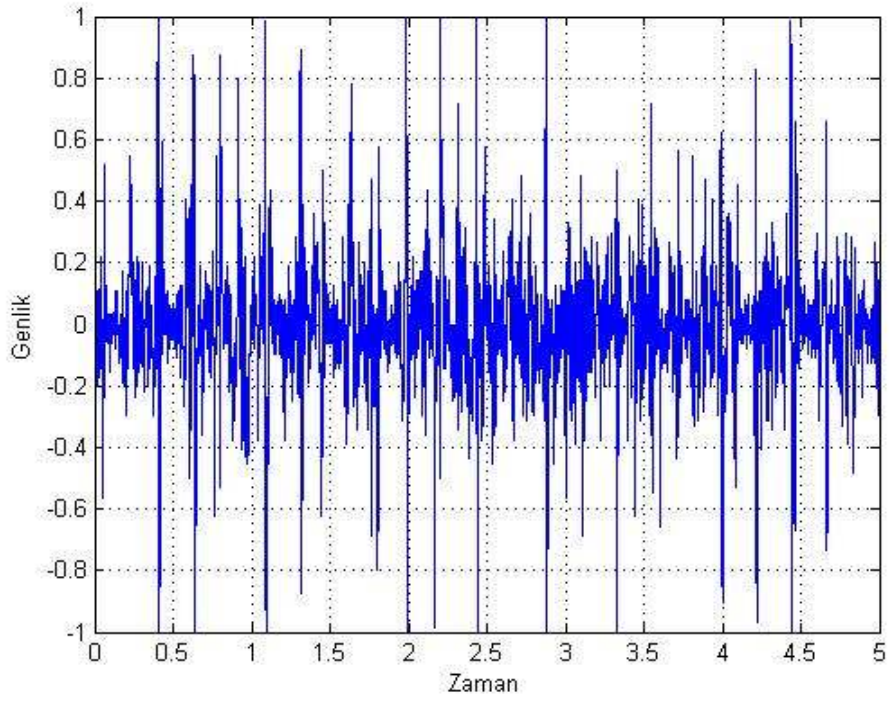


Şekil 6.26 SNR & Öz ilinti matris boyutu - 500 örnek adım

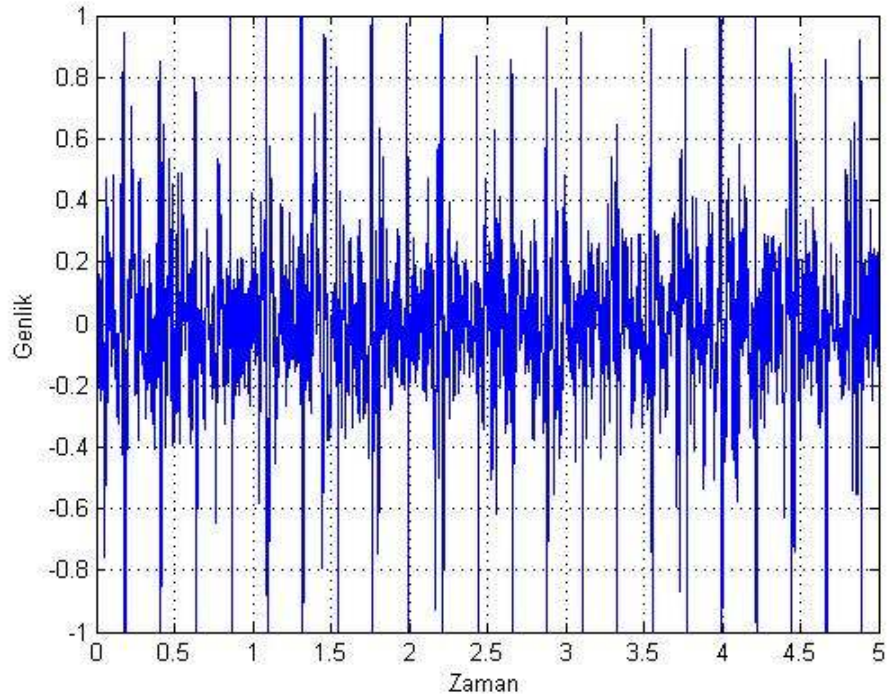
MSE		Adım					
		50	100	125	250	500	2500
Öz ilinti Matrisi	5x5	3,63E-05	2,29E-05	2,36E-05	2,48E-05	2,45E-05	2,47E-05
	40x40	1,52E-04	1,76E-05	1,99E-05	2,19E-05	2,27E-05	2,39E-05
	72x72	2,75E-04	1,96E-05	1,85E-05	1,88E-05	2,05E-05	2,21E-05
	200x200	5,09E-04	5,07E-05	3,75E-05	1,24E-05	1,45E-05	1,99E-05
	400x400	6,11E-04	7,50E-05	5,61E-05	1,71E-05	1,11E-05	1,71E-05

Çizelge 6.1 MSE tablosu

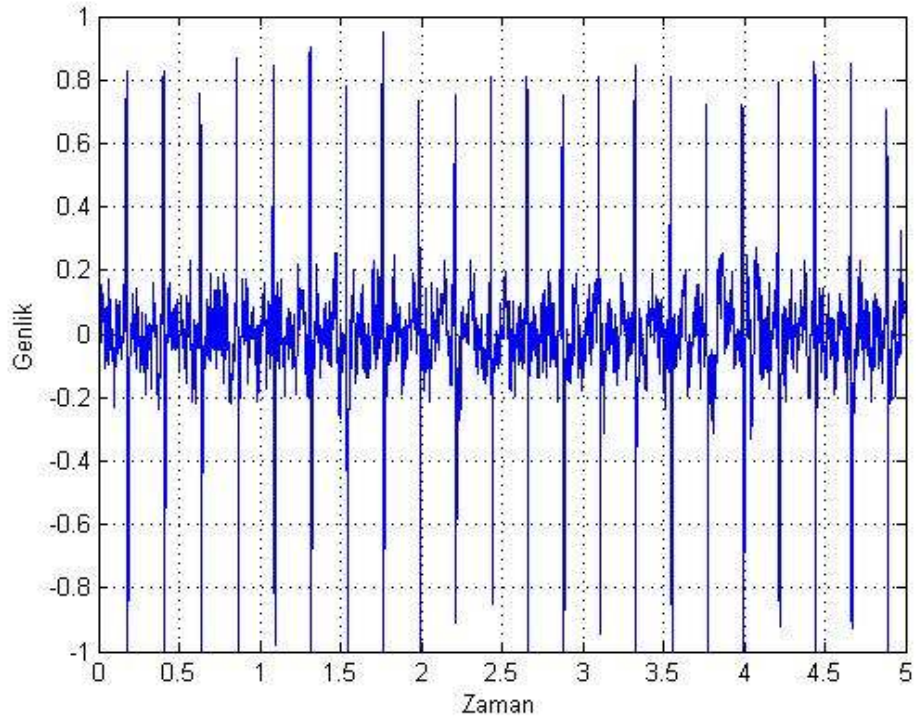
İşlenen sinyal doğası gereği durağan değildir. Ancak yine de kendi içinde periyodiktir, Wiener Süzgecin iyi sonuç verebilmesi için hesaplanan öz ilinti ve çapraz ilinti değerlerinin sinyalin genelinde değişmemesi veya çok az değişmesi gerekmektedir. Periyodik olarak gerçekleşen ECG vurumları bu özelliği kısmen desteklerken, sinyalin tüm frekans bileşenlerine farklı olasılık dağılımlarıyla yayılmış olan gürültü bu durumu güçleştirmektedir. Bir başka deyişle ECG sinyali renkli gürültü ile kirlenmiştir. Bu sebeple Wiener Süzgecin sonucu karşılaştırma yapılan ICA yönteminden çok daha gürültülüdür. Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç kullanılmasının amacı durağan olmayan sinyalin belirli aralıklarla işlenip sinyaldeki durağanlık özelliklerini arttırmaktır. Wiener süzgeç ve Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç birbirine yakın MSE değerleri için karşılaştırıldığında Kısa Zamanlı Wiener'in işlem süresinin 20 kat daha kısa sürdüğü görülmektedir. 400x400'lük öz ilinti matrisine ve 2500 örnek adımlı, normal Wiener Süzme sonucunda, hata sinyalinin tablodaki en küçük MSE değeri olan $1,71E-05$ 'e ulaştığı görülmektedir. En az hata bu sinyalde elde edilse bile bu büyüklükteki matris boyuna sahip bir çözümü optimal çözüm olarak değerlendirmek mümkün değildir. Çizelge 6.1 de görüldüğü gibi 100 adım ve 40x40lık çözüm hem matris büyüklüğü, hem adım uzunluğu hem de MSE değerinin küçüklüğü ($1,76E-05$) açısından seçilebilecek en optimal çözüm olarak görülmektedir. Şekil 6.27 ve 6.28 de bu sinyallerin zaman genlik grafikleri verilmiştir.



Şekil 6.27 Fetal ECG sinyali - 40x40 öz ilinti matrisi ve 100 adım örnekli



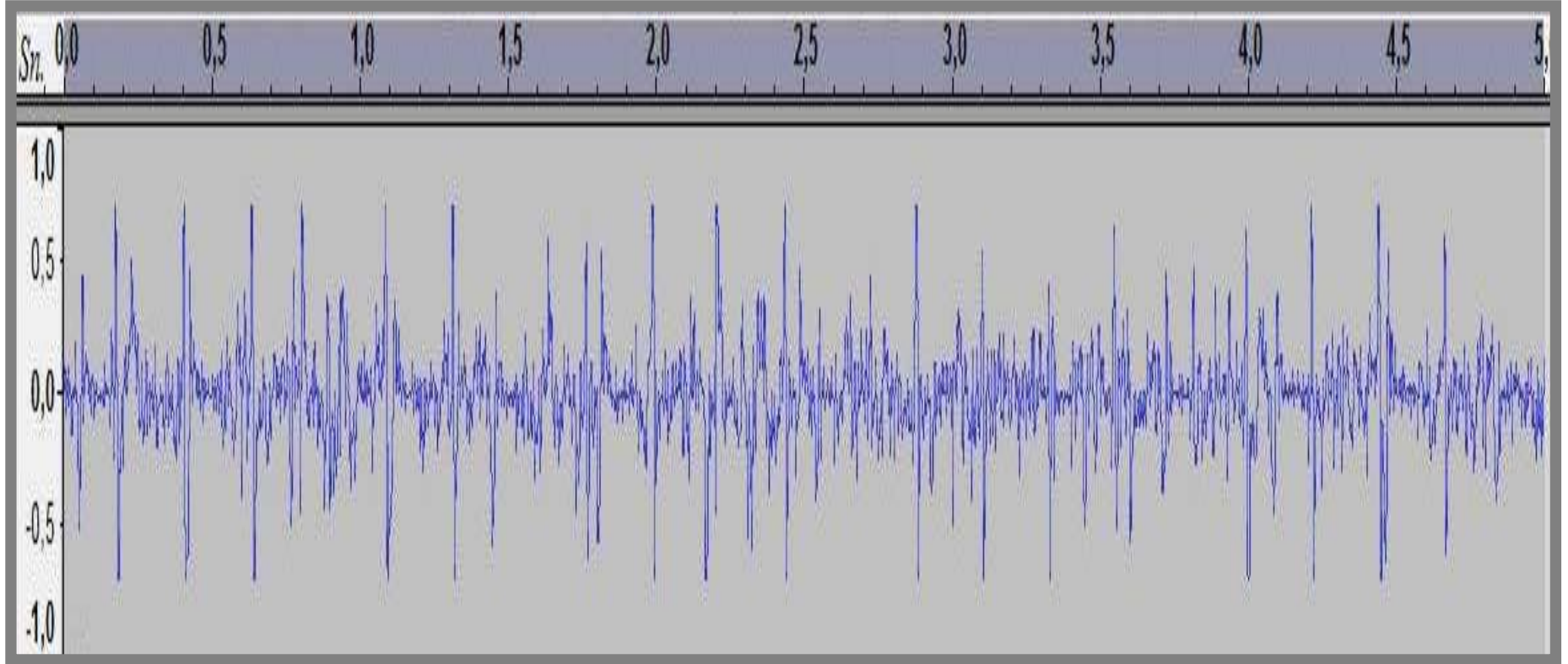
Şekil 6.28 Fetal ECG sinyali – Wiener, 400x400 öz ilinti matrisi



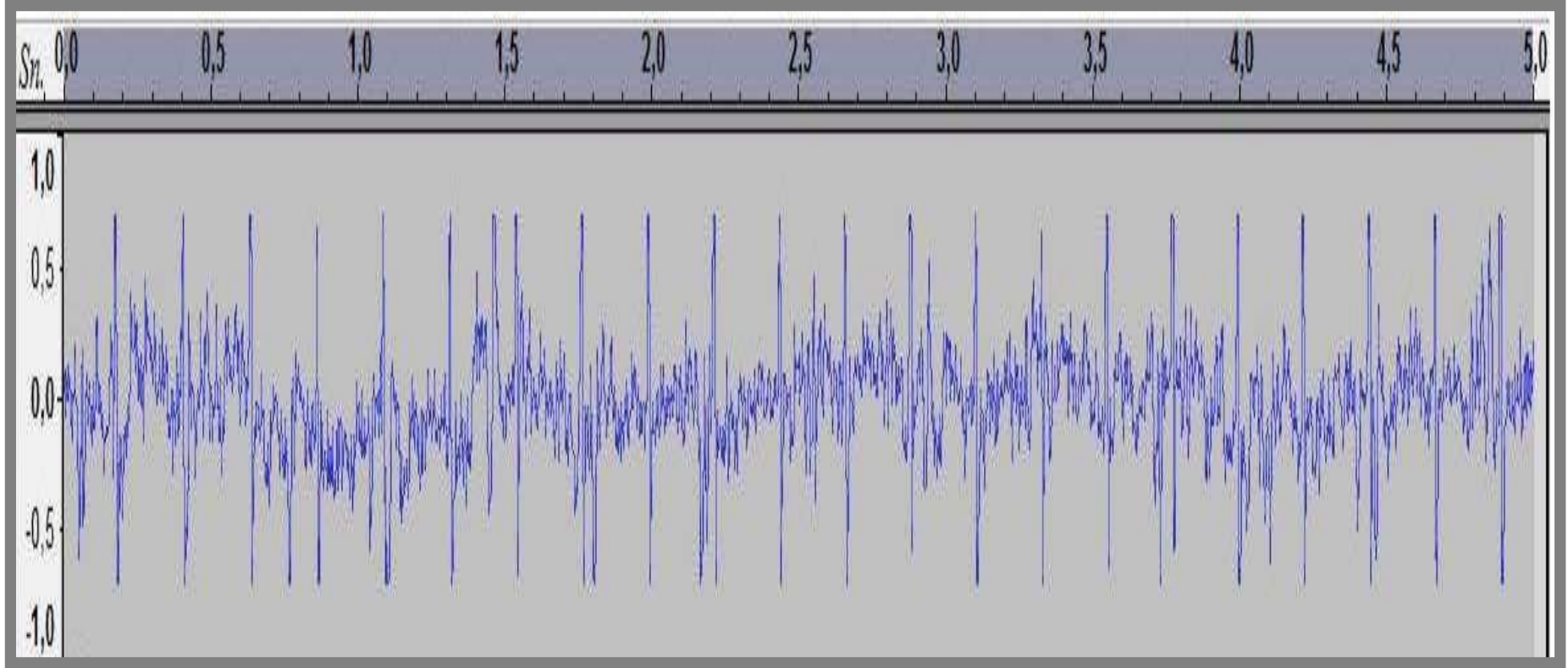
Şekil 6.29 Fetal ECG sinyali – ICA çözümü

ICA çözümünün daha iyi sonuç verdiği açıktır (şekil 6.29). Özellikle düşük gürültü seviyesi ICA'nın üstün tarafını göstermektedir. Yine de Wiener Süzme'nin, ICA'nın işlemsel karmaşası göz önüne alındığında “başarı / karmaşa” oranı oldukça yüksektir. Sinyallerin daha detaylı incelemesi için açık kaynak kodlu yarı profesyonel bir ses işleme programı olan Audacity¹ kullanılmıştır.

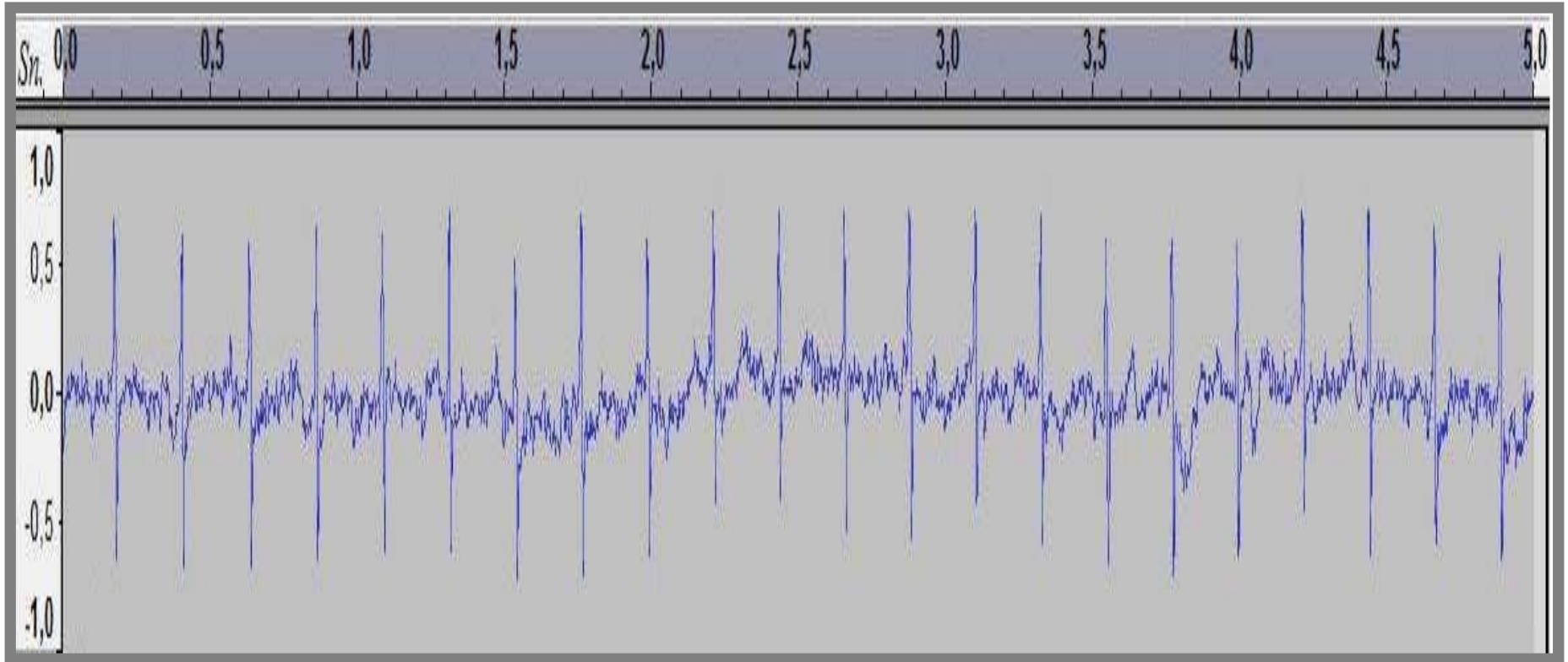
¹Audacity® Dominic Mazzoni firmasının bir ürünü olup, Windows, Mac OS X, GNU/Linux ve diğer işletim sistemleri için ücretsiz bir ses düzenleyicisi ve kaydedicisidir.



Şekil 6.30 STWF FECG ayırım sonucu (100 adım 40x40 özilinti matrisi)

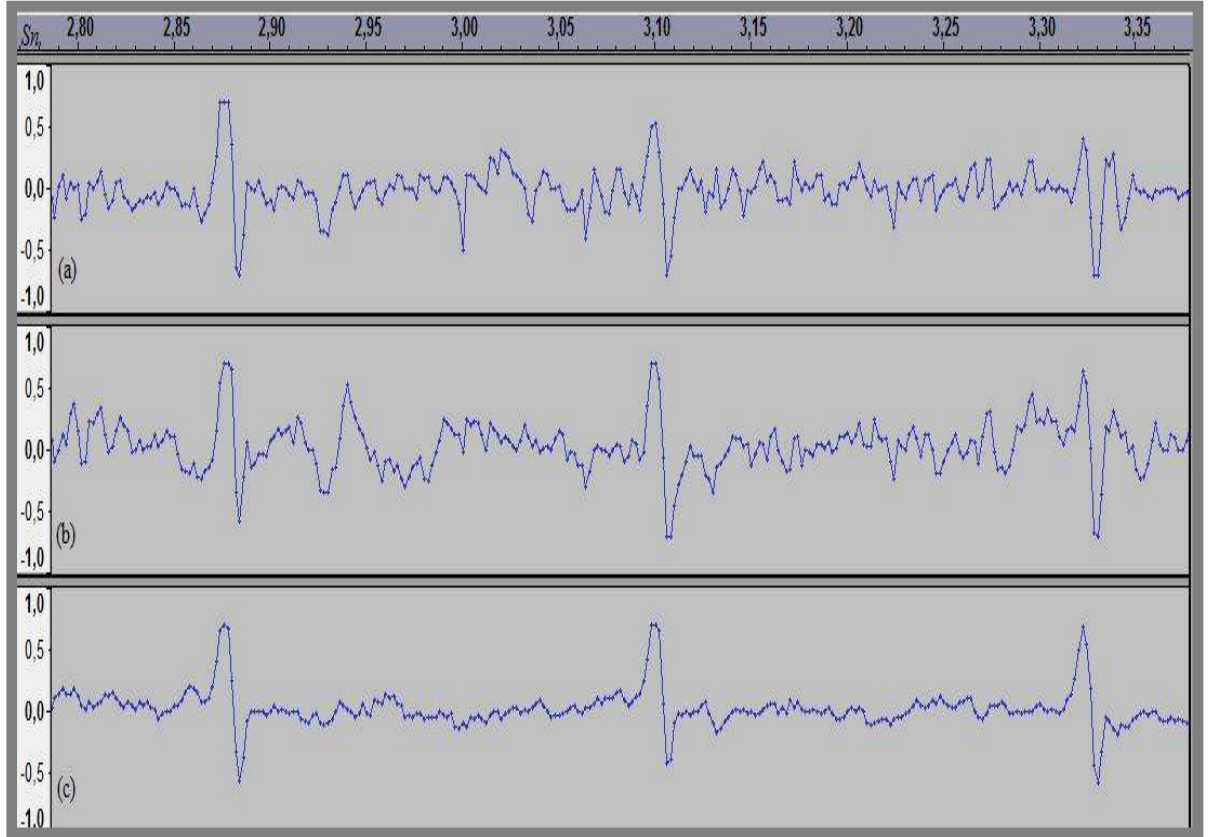


Şekil 6.31 WF FECG ayırım sonucu (250x250 öz ilinti matrisi)



Şekil 6.32 ICA FECG ayırım sonucu

Aşağıda, şekil 6.33 de sinyalin tamamı (5sn) için verilen çözümün, daha detaylı gösterimi olan 2.8 sn ve 3.35 sn aralığı görülmektedir. Bu aralıkta 40x40 matrislik Kısa Zaman Wiener çözümünün (a) ve 400x400 matrislik Wiener çözümünden (b) belirgin bir farka sahip olmadığı görülmektedir. Ancak ICA çözümü (c) düşük gürültü seviyesi ile dikkat çekmektedir. Sinyaller bu halleriyle (özellikle Wiener çözümleri) tıbbi teşhislerde kullanılmaya uygun değildir. Bunun sebebi herhangi bir saniyede oluşacak gürültünün sayıcı mekanizması içinde kalp atımı olarak algılanabilmesidir. Kalp atımı olarak algılanan gürültünün toplamda yanlış sonuçlara sebep olması muhtemeldir. Bu yanlışlıklar aslında olmayan kalp vurum düzensizlikleri veya hız ve ritim bozuklukları şeklinde kendini gösterebilir.



Şekil 6.33 Fetal ayırım yöntemlerinin 2.8 ve 3.35 saniyeler aralığında karşılaştırması (a)STWF (b)WF (c)ICA

Wiener'deki gürültü sorununu ortadan kaldırmak için dalgacık dönüşümü yöntemini kullanılmıştır. ECG sinyalinin gürültüden ayrıştırılmasında hangi dalgacık ailesinin en uygun olduğunu bulabilmek için "Daubechies", "Biorthogonal",

“Symmlet” ve “Coiflet” başlıkları altında hata karşılaştırmaları yapıldı. En az hata Daubechies 06 dalgacığında meydana geldiğinden bu dalgacık işlemlerde kullanılmıştır.

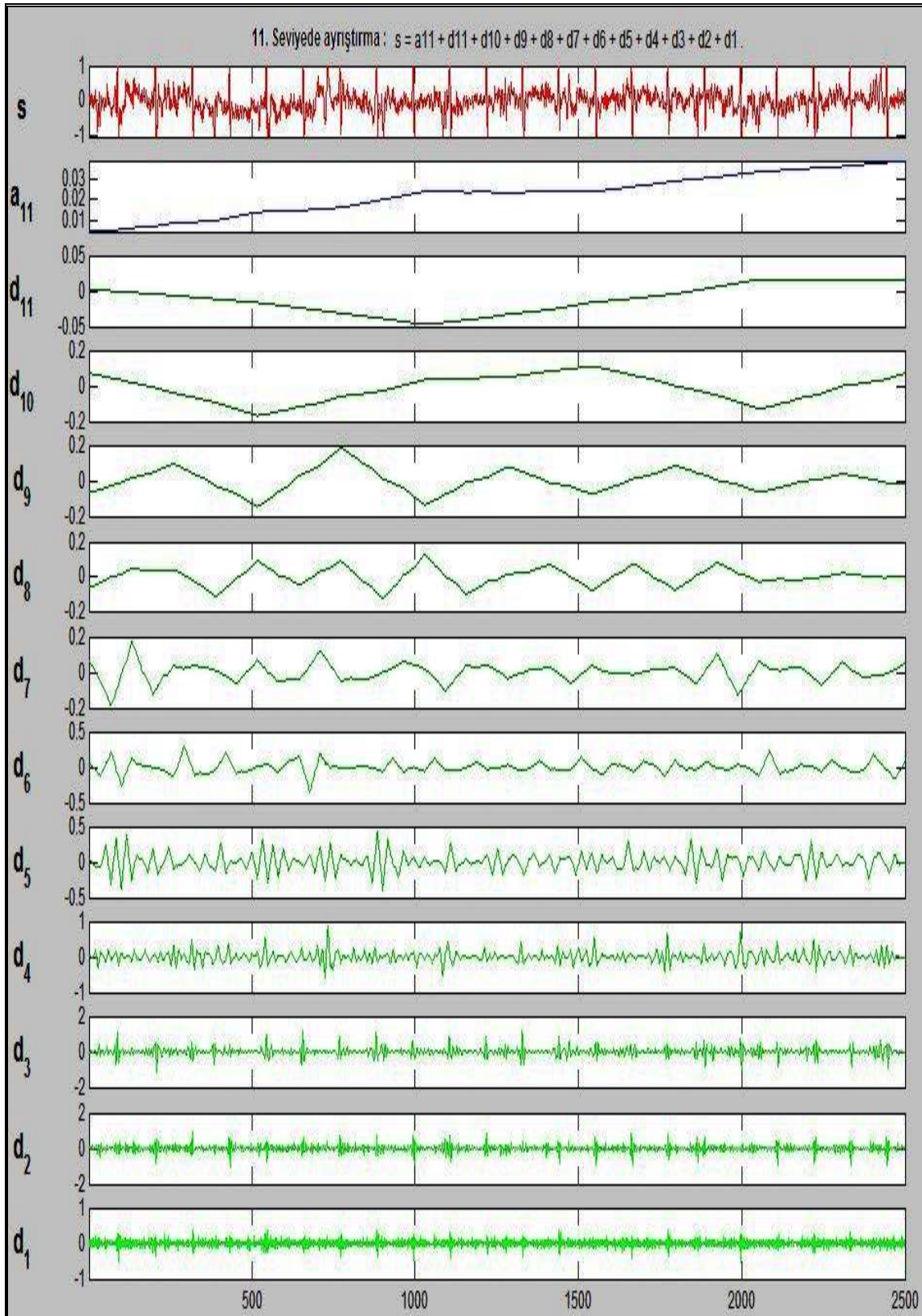
Daubechies		Biorthogonal		Symmlet		Coiflet	
db01	2,45E-02	bior1.1	2,45E-02	Sym2	2,01E-02	coif1	1,79E-02
db02	2,01E-02	bior1.3	2,63E-02	Sym3	1,90E-02	coif2	1,96E-02
db03	1,90E-02	bior1.5	2,71E-02	Sym4	2,00E-02	coif3	2,02E-02
db04	2,18E-02	bior2.2	1,81E-02	Sym5	2,00E-02	coif4	2,30E-02
db05	3,71E-02	bior2.6	1,95E-02	Sym6	2,02E-02	coif5	2,30E-02
db06	1,76E-02	bior2.8	1,96E-02	Sym7	2,17E-02		
db07	1,78E-02	bior3.3	2,52E-02	Sym8	2,00E-02		
db08	2,01E-02	bior4.4	1,97E-02	Sym9	2,26E-02		
db09	2,12E-02	bior5.5	2,03E-02				
db10	2,02E-02	bior6.8	2,05E-02				

Çizelge 6.2 Dalgacık hata analizi

Şekil 6.34 de Wiener sonucunun dalgacık yöntemiyle frekans bileşenlerine 11. seviyeye kadar ayrıştırılması görülüyor.

$$S = a_{11} + d_{11} + \dots + d_1 \quad (6.26)$$

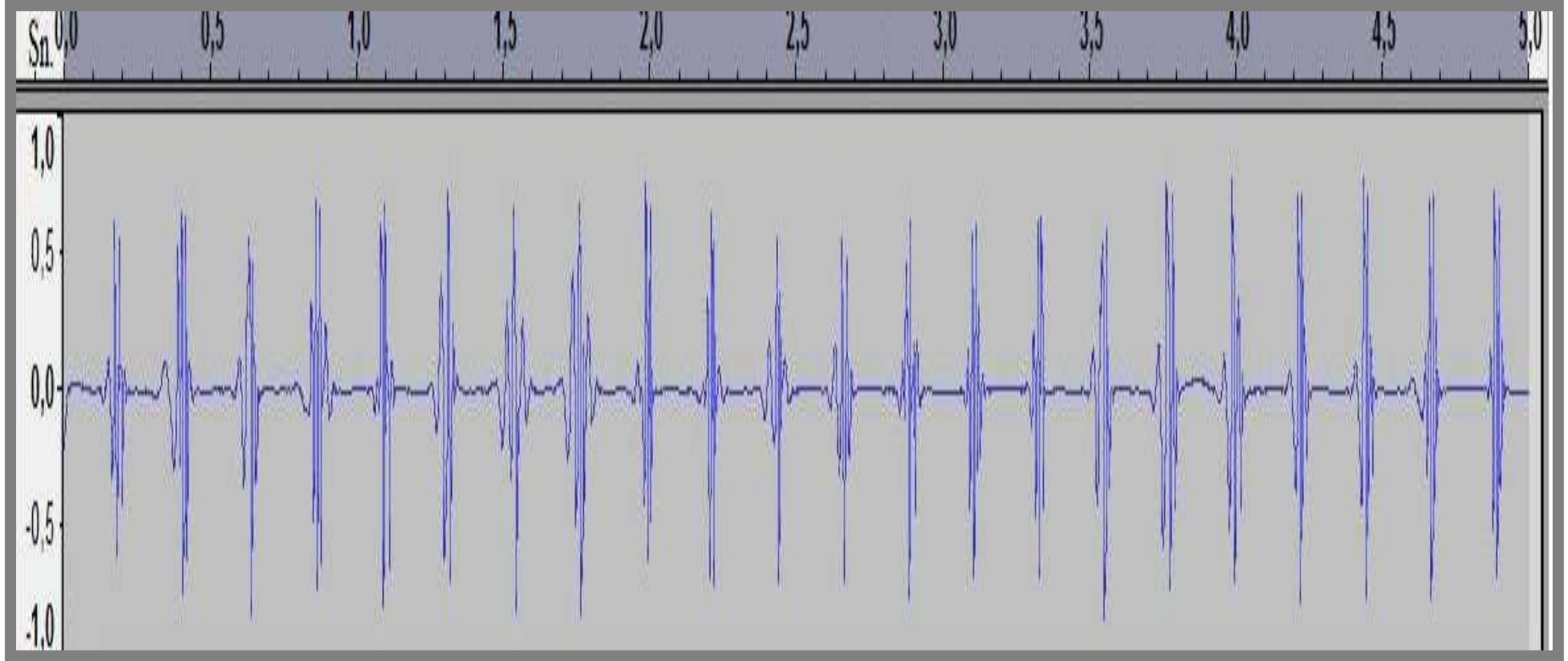
a'nın yaklaşıklık katsayısı, d'nin detay katsayısı olarak isimlendirildiği daha önce belirtilmişti. a_{11} katsayısı sinyal içindeki en düşük, d_1 ise en yüksek frekans bileşenini göstermektedir.



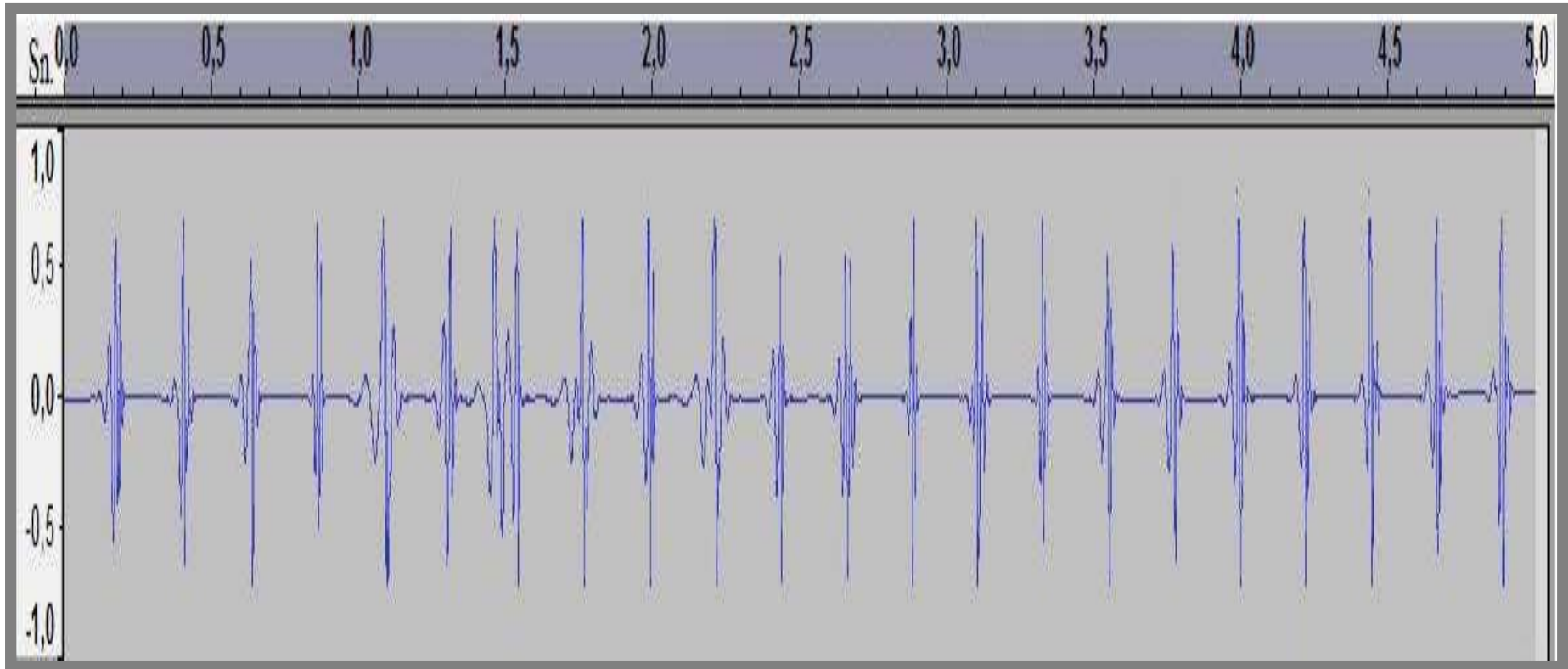
Şekil 6.34 Dalgacık ayrışımı

Bu katsayılara uygulanan eşik değerleri ile gürültü temizlemesi yapıldığında şekil 6.35-37 deki sonuçlar elde edilmiştir. Karşılaştırma amacıyla bu grafiğe ek olarak ICA sonucunun da dalgacık dönüşümü eklenmiştir. İki durumda da gürültünün etkili bir şekilde temizlendiği görülüyor. Gürültü temizleme uygulamaları içerisinde sinyalde olan bazı deformasyonlar dışında Dalgacık Dönüşümü yöntemi oldukça başarılıdır ve sinyalde oluşabilecek ritim bozuklukları ve vurum hızlarının tespit edilmesinde, dolayısıyla olası kalp hastalıklarının teşhisinde kullanılabilir.

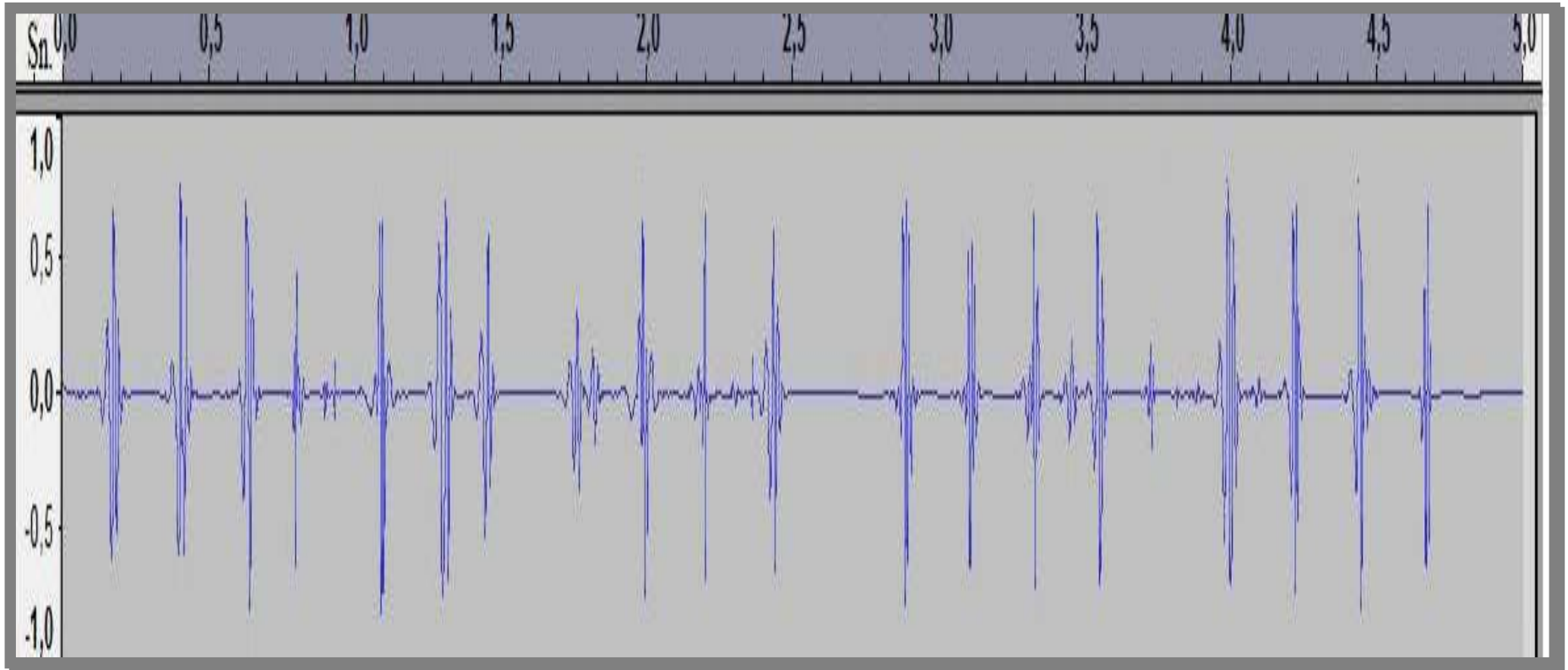
Şekil 6.35-37 de sırasıyla ICA, Wiener ve Kısa Zamanlı Wiener süzgecin sonuçları görülmektedir. En iyi sonuç ICA yönteminde görülmüştür. Wiener'in çözümü Kısa zamanlı olanına göre daha iyidir. Ancak işlem süresi yüzünden optimal çözüm olarak kabul edilemeyeceği daha önce belirtilmişti. En basit ve en hızlı çözüm Kısa zamanlı Wiener çözümüdür. Ancak bu yöntemin sonucu incelendiğinde 5 saniyelik sinyal içerisinde 22 kez gerçekleşen vurumlardan 2 tanesini tamamen kaybedildiği görülmektedir. Kısa Zamanlı Wiener çözümünün Dalgacık Dönüşümüne uygun olmamasının sebebi, detay katsayılarının Kısa Zamanlı Wiener'de, parçalar halinde işlenmesinden dolayı, içerik olarak daha zengin olmasıdır. Daha fazla detay zenginliğine sahip olan bir sinyalin dalgacık dönüşümü ile gürültüden arındırma sonucu, detay çeşitliliği daha az olan bir sinyale göre daha çok bozulacağı açıktır. Bu sebeple daha iyi sonuç alınması için Wiener sonucu hesaplanırken her bir adım için teker teker Dalgacık Dönüşümü yapılması gerekmektedir. Bu çözüm işlem karmaşasını ve süresini oldukça artıracığı için tercih edilmemiştir.



Şekil 6.35 ICA çözümü için Dalgacık Dönüşümü ile gürültüleri temizlenen FECG sinyali



Şekil 6.36 WF (250x250 öz ilinti matrisi) çözümü için Dalgacık Dönüşümü ile gürültüleri temizlenen FCG sinyali



Şekil 6.37 STWF çözümü (40x40 öz ilinti matrisi) için Dalgacık Dönüşümü ile gürültüleri temizlenen FCG sinyali

Çizelge 6.1 de verilen MSE matrisi Wiener konu anlatımında verilen MSE formülüne göre hesaplanmıştır; $\xi = E\{|e(n)|^2\}$. Buradaki $e(n)$ değeri tahmin edilen sinyal ile sistemin girişindeki sinyalin farkıdır. Karşılaştırma amacıyla referans olarak ICA değerine göre de MSE değeri hesaplayabiliriz. Wiener sonucu ICA değerine göre karşılaştırıldığında ortaya çıkan öz ilinti-MSE ve öz ilinti-SNR grafikleri Wiener'in kendi MSE formülüyle elde edilen değerlerden büyük bir farklılık göstermediği görülmüştür. Ancak yine de Wiener çözümünün ICA çözümüne ne kadar yaklaştığını görmek için aşağıdaki özet "Referans MSE matrisi" oluşturulmuştur. Bu matrisin tamamı için lütfen Ek 2 ye bakınız.

Ref. MSE		Adım					
		2500		100	125	250	500
Öz ilinti Matrisi	15x15	2,65E-01	>	2,39E-01	2,42E-01	2,64E-01	2,62E-01
	40x40	2,61E-01	>	1,99E-01	2,16E-01	2,47E-01	2,52E-01
	72x72	2,45E-01	>	2,01E-01	1,96E-01	2,19E-01	2,32E-01
	87x87	2,36E-01	>	2,33E-01	2,05E-01	2,05E-01	2,19E-01

Çizelge 6.3 ICA referanslı MSE matrisi

Çizelge 6.3 deki matris'ten görüldüğü gibi Kısa Zamanlı Wiener Süzgecin MSE değerleri, Normal Wiener Süzgece göre daha düşüktür. Bunun sebebi Kısa Zamanlı Wiener Süzgecin sinyali pencerelerle parça parça işlemesinden kaynaklanmaktadır. Bu durum sinyalin kısmen durağanlaştırılabileceği ve sürekli sinyallerin yüksek öz ilinti matris boyutlarına gerek kalmadan işlenebileceğini göstermektedir.

7. SONUÇLAR

Sayısal sinyal işleme teknolojisinde bilgisayarların sahip olduğu hesaplama gücü ve tekrarlanabilir doğruluk seviyeleri, Matlab ortamında tasarlanan Süzgeç Tasarım programında bir kez daha ortaya çıkmıştır. Özellikle yüksek dereceli süzgeçlerin tasarlanması ve süzgeç katsayılarının bulunması elle yapılacak hesaplamalarla oldukça uzun sürecek ve hata yapma olasılığı artacaktır. Bilgisayar ortamında yapılan süzgeç tasarımının bir adım sonrası yazılan kodların DSP yongalarına gömülüp endüstriyel veya eğitim amaçlı olarak kullanılmasıdır. Bu yongalar önce içlerindeki ADC ile sinyali sayısallaştırırlar, daha sonra flash hafızalarına gömülü olan kaynak kodunu sayısallaştırılmış sinyale uygulayıp bu sinyali sistemin çıkışında analog olarak (DAC ler ile) verirler. Bu şekilde analog bir sinyal sayısal olarak işlenebilmiş olur. Matlab ortamında geliştirilen sayısal süzgeç tasarım programı tekrarlı süzgeçler için hazırlanmıştır. Tekrarsız süzgeçlerle ilgili çalışma ise fetal ECG ayırımında kullanılan FIR Wiener süzgeçtir. Wiener süzgeç, süzgeç çıkışındaki hatanın en aza indirgenmesi ve optimal bir çözüme ulaşılabilmesi için ağırlık vektörlerini düzenler ve istenen çıkışa en yakın sonucu bu şekilde ulaşmayı amaçlar.

Kısa Zamanlı Wiener Süzme yaklaşımının normal Wiener süzme yaklaşımından daha başarılı olduğunu söylemek görece olarak mümkündür. Bir sistemin başarılı bir şekilde gerçekleştirilmesinde tek amaç, sadece sonuçta oluşacak olan hatanın en aza indirgenmesi değildir. Optimal çözümün bulunmasıdır. Bu çalışma, bahsedilen durumu oldukça iyi göstermektedir. Çünkü normal Wiener Süzmede kullanılan 400x400'lük bir matrisin işlenmesi Kısa Zamanlı Wiener süzmede kullanılan 40x40'lık matrise göre çok daha zahmetli ve gerçek zamanlı uygulamalar için mümkün değildir. Bu büyüklükteki bir öz ilinti matrisi MSE değeri daha küçük olmasına rağmen tercih edilmesi uygun olmaz. Bunun yerine nispetle yüksek ama makul bir MSE değerine sahip olan Kısa Zamanlı Wiener Süzgecin kullanılması daha optimal bir çözümdür. Azalan öz ilinti matrisine rağmen MSE değeri olarak büyük öz ilinti matrisine yakın sonuç veren Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç'in bu özelliği işlemler sırasında kullandığı pencerelerden

kaynaklanmaktadır. Bu şekilde sinyalin tamamında olan ve süreklilikten kaynaklanan değişiklikler azaltılıp sinyal kısmen durağanlaştırılabilmiştir. Daha sonra parçalar halinde işlenen sinyal birleştirilip orijinal boyutuna getirilebilmektedir. Bu sebeplerden Kısa Zamanlı Wiener Süzgeç ICA ya alternatif olarak normal Wiener Süzgeç'den daha kuvvetli bir adaydır.

Yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçlar, Fetal ECG ayırımında bağımsız bileşenler analizi yönteminin Wiener Süzme yönteminden daha başarılı olduğu göstermektedir. Ancak Wiener yaklaşımının işlem karmaşasının azlığı ve kaynakların daha verimli kullanılması açısından daha başarılı olduğu görülmüştür. ICA yöntemi ayırımını yapacağı sinyal sayısı kadar kaynağa ihtiyaç duyar. Fetal ECG ayırımının ICA tarafından yapılabilmesi için gürültü ve Maternal ECG olmak üzere iki ayırım işlemi daha yapması gerekmektedir. Bunun anlamı ICA veri kümesinden en az 3 kanalı kullanmalıdır. Elde edilen sonuç ise gürültüden tam olarak ayrıştırılamayıp daha sağlıklı sonuçlar için referans sayısı arttırılmalıdır. Artan referans sayısı ile işlem karmaşası artacağından sonuçların doğruluğu veya işlem hızının yavaşlaması arasında bir tercih yapılması gerekmektedir. Wiener Süzmede ise sadece iki kaynağa ihtiyaç duyulur. Kanallardan biri giriş kabul edilip çıkartılmak istenen sinyal referans olarak yapıya dahil edilir. Bu çalışmada ICA, Wiener sonuçlarının karşılaştırılması için referans olarak kullanılmıştır. Gürültü temizleme sinyal üzerindeki renkli gürültüler göz önüne alınmış ve her bileşen için yumuşak eşik değeri yöntemi kullanılarak süzme yapılmıştır. Sonuçlar gürültünün temizlenmesi açısından etkileyici biçimde başarılıdır. Ancak dalga formunda meydana gelen bozukluklar yöntemin olumsuz tarafını göstermektedir. Burada da gürültünün azaltılması veya dalga formunun bozulması arasında bir seçim yapılması gerekmektedir.

Bu çalışmada kullanılan Wiener Süzgeç yapısının referans olarak aldığımız ICA sonucuna daha yakın bir cevap vermesi ve daha küçük hata değerlerinin elde edilmesi için sisteme uyarlamalı bir kontrol mekanizması eklenebilir [27]. Ancak mevcut sisteme yapılan tüm eklemelerin işlem yoğunluğunu arttıracağını göz önünde bulundurmak gerekmektedir. İşlem yoğunluğunun artması, tasarlanan algoritmanın gerçek zamanda çalışması gerektiği düşünüldüğünde, işlem gücü çok

yüksek DSP kartlarının kullanılmasına dolayısıyla maliyetinde artmasına neden olacaktır. Kısa zamanlı Wiener çözümü hem algoritmasının basitliği hem de işlem süresinin kısalığı açısından değerlendirildiğinde gerçek zamanlı işlemlerde daha verimli ve ekonomik olacaktır. Diğer alternatiflerden bu yönüyle ayrılıp öne çıkacaktır.

KAYNAKLAR LİSTESİ

- [1] SHENOI B. A., Introduction to Digital Signal Processing and Filter Design, John Wiley & Sons Inc. 2006.
- [2] THEDE LES, Analog & Digital Filter Design Using C, 2001.
- [3] WINDER , Analog ve Dijital Filtre Tasarımı, Bilişim Yayıncılık, 2005.
- [4] OPPENHEIM V. ALAN, RONALD W. SCHOFFER Discrete-time Signal Processing, Prentice Hall Inc. 1997.
- [5] POLIKAR ROBI, The Wavelet Tutorial Lecture Notes, Dept. Of Electrical and Computer Engineering, Rowan University, 2001.
- [6] M. T. POURAZAD, Z. MOUSSAVI, F. FARAHMAND, R. K. WARD, Heart Sounds Separation From Lung Sounds Using Independent Component Analysis, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Engineering in Medicine and Biology 27th Annual Conference, 1991.
- [7] HAYES H. MONSON, Statistical Digital Signal Processing and Modelling, John Wiley & Sons Inc 1996
- [8] MS WOOLFSON, XB HUANG AND JA CROWE, Time-Varying Wiener Filtering Of The Fetal Ecg Using The Wavelet Transform, The Institution of Electrical Engineers, 1995.
- [9] V. ZARZOSA, J. MILLET-ROIJ, AK. NONDI, Fetal ECG Extraction from Maternal Skin Electrodes Using Blind Source Separation and Adaptive Noise Cancellation Techniques, Institute of Electrical and Electronics Engineers pp. 431-434, 2000.

- [10] CHEN W, NEMOTO T, KOBAYASHI T, HONDA Y, SAITO T, KASUYA E. Foetal ECG extraction from maternal body surface measurement using independent component analysis. Engineering in Medicine and Biology Society, 2001. Proceedings of the 23rd Annual International Conference of the IEEE Volume 2, Page(s):1990 - 1993 , vol.225-28 Oct. 2001
- [11] ANANTHANAG, K.V.K.; SAHAMBI, J.S. Investigation of blind source separation methods for extraction of fetal ECG. Electrical and Computer Engineering, 2003. IEEE CCECE 2003. Canadian Conference on Volume 3, 4-7 Page(s): 2021 - 2024 vol.3 May 2003
- [12] M. G. JAFARI, and J. A. CHAMBERS, Adaptive Noise Cancellation And Blind Source Separation 4th International Symposium on Independent Component Analysis and Blind Signal Separation, 2003.
- [13] GUPTA, A., SRIVASTAVA, M.C., KHANDELWAL, V., A novel approach to fetal ECG extraction and enhancement using blind source separation (BSS-ICA) and adaptive fetal ECG enhancer (AFE) Information, Communications & Signal Processing, 2007 6th International Conference on 10-13Page(s): 1-4 Dec. 2007
- [14] REAZ, M.B.I., LEE SZE WEI. An approach of neural network based fetal ECG extraction Enterprise Networking and Computing in Healthcare Industry, 2004. HEALTHCOM 2004. Proceedings. 6th International Workshop on 28-29 Page(s):57-60,June2004.
- [15] COŞKUN ÖZLEM ve ÇÖMLKEÇİ SELÇUK, Wavelet Teorisinin Medikal Alana Uygulanması Üzerine Bir Ön Çalışma, Akademik Bilişim Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya, 2007.
- [16] CHARLES K. CHUI Wavelets A Tutorial in Theory and Applications, Academic Press Inc. 1992.
- [17] STRENG G. Wavelet transforms versus Fourier transforms, BAMS, 288-305. 1993.

- [18] MALLAT S. G. A theory for multiresolution signal decomposition, the wavelet representation, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 674-693, 1989.
- [19] J. PROAKIS and D MANOLAKIS, Digital Signal Processing (4th Edition) Macmillan publishing house, 1992.
- [20] HAYKIN SIMON, Adaptive Filter Theory, Prentice Hall Inc, 2002.
- [21] DAUBECHIES INGRIND, Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Applied Mathemaics, 1992.
- [22] COIFMAN R. MEYER Y and WICKERHAUSER V. Wavelet analysis and signal processing In Wavelets and Their Applications, Ruskai Jones and Bartlet Publishers,1991.
- [23] AMARA GRAPS, An Introduction to Wavelets, Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1995.
- [24] YÜKSEL İBRAHİM, Matlab ile Mühendislik Sistemlerinin Analizi ve Çözümü, VIBAŞ A.Ş. 2000.
- [25] ÇETE YILDIRAY, Elektrokardiyografi Ders Notları Akdeniz Üniversitesi Tıp Fakültesi, Acil Tıp Anabilim Dalı, 2006.
- [26] http://www.tsi.enst.fr/icacentral/base_single.html
- [27] E.A SOLEIT, M.E. GADALLAH, A.SALAH Nineteenth National Radio Science Conference, Alexandria, March, 19-21,2002

EKLER LİSTESİ

EK 1. MSE tablosu

MSE Öz İlinti Matrisi (satır x sütun)	Adım					
	50	100	125	250	500	2500
2 x 2	5,96E-05	4,96E-05	5,09E-05	5,36E-05	5,27E-05	5,28E-05
3 x 3	4,26E-05	3,16E-05	3,24E-05	3,40E-05	3,35E-05	3,37E-05
4 x 4	3,76E-05	2,53E-05	2,60E-05	2,72E-05	2,69E-05	2,71E-05
5 x 5	3,63E-05	2,29E-05	2,36E-05	2,48E-05	2,45E-05	2,47E-05
6 x 6	3,66E-05	2,23E-05	2,30E-05	2,42E-05	2,40E-05	2,43E-05
7 x 7	3,72E-05	2,20E-05	2,30E-05	2,42E-05	2,39E-05	2,42E-05
8 x 8	3,79E-05	2,18E-05	2,29E-05	2,41E-05	2,39E-05	2,42E-05
9 x 9	3,91E-05	2,18E-05	2,29E-05	2,41E-05	2,39E-05	2,42E-05
10 x 10	4,04E-05	2,17E-05	2,27E-05	2,41E-05	2,39E-05	2,42E-05
11 x 11	4,17E-05	2,16E-05	2,25E-05	2,39E-05	2,38E-05	2,42E-05
12 x 12	4,30E-05	2,15E-05	2,21E-05	2,38E-05	2,38E-05	2,42E-05
13 x 13	4,46E-05	2,15E-05	2,19E-05	2,37E-05	2,37E-05	2,42E-05
14 x 14	4,63E-05	2,14E-05	2,18E-05	2,37E-05	2,37E-05	2,42E-05
15 x 15	4,76E-05	2,12E-05	2,15E-05	2,35E-05	2,37E-05	2,42E-05
16 x 16	4,89E-05	2,09E-05	2,13E-05	2,33E-05	2,36E-05	2,42E-05
17 x 17	5,10E-05	2,07E-05	2,11E-05	2,32E-05	2,36E-05	2,42E-05
18 x 18	5,32E-05	2,05E-05	2,11E-05	2,32E-05	2,36E-05	2,42E-05
19 x 19	5,45E-05	2,02E-05	2,09E-05	2,31E-05	2,35E-05	2,42E-05
20 x 20	5,58E-05	1,98E-05	2,07E-05	2,28E-05	2,34E-05	2,42E-05
21 x 21	5,78E-05	1,97E-05	2,05E-05	2,27E-05	2,34E-05	2,42E-05
22 x 22	6,11E-05	1,97E-05	2,04E-05	2,27E-05	2,34E-05	2,42E-05
23 x 23	6,61E-05	1,95E-05	2,03E-05	2,26E-05	2,33E-05	2,42E-05
24 x 24	7,19E-05	1,93E-05	2,02E-05	2,25E-05	2,32E-05	2,42E-05
25 x 25	7,79E-05	1,93E-05	2,02E-05	2,25E-05	2,32E-05	2,42E-05
26 x 26	8,35E-05	1,92E-05	2,02E-05	2,25E-05	2,32E-05	2,42E-05
27 x 27	8,94E-05	1,91E-05	2,01E-05	2,25E-05	2,32E-05	2,42E-05
28 x 28	9,38E-05	1,91E-05	2,01E-05	2,25E-05	2,32E-05	2,42E-05
29 x 29	9,89E-05	1,90E-05	2,01E-05	2,25E-05	2,32E-05	2,42E-05
30 x 30	1,04E-04	1,89E-05	2,01E-05	2,25E-05	2,32E-05	2,42E-05
31 x 31	1,09E-04	1,86E-05	2,01E-05	2,25E-05	2,32E-05	2,42E-05
32 x 32	1,14E-04	1,84E-05	2,01E-05	2,24E-05	2,32E-05	2,42E-05
33 x 33	1,18E-04	1,82E-05	2,01E-05	2,24E-05	2,32E-05	2,42E-05
34 x 34	1,23E-04	1,80E-05	2,01E-05	2,24E-05	2,32E-05	2,42E-05
35 x 35	1,29E-04	1,79E-05	2,02E-05	2,24E-05	2,31E-05	2,41E-05
36 x 36	1,33E-04	1,78E-05	2,02E-05	2,24E-05	2,30E-05	2,41E-05
37 x 37	1,38E-04	1,77E-05	2,01E-05	2,23E-05	2,29E-05	2,41E-05
38 x 38	1,43E-04	1,76E-05	2,00E-05	2,21E-05	2,28E-05	2,40E-05
39 x 39	1,48E-04	1,76E-05	1,99E-05	2,19E-05	2,28E-05	2,39E-05
40 x 40	1,52E-04	1,76E-05	1,99E-05	2,19E-05	2,27E-05	2,39E-05
41 x 41	1,56E-04	1,76E-05	2,00E-05	2,18E-05	2,27E-05	2,39E-05
42 x 42	1,61E-04	1,76E-05	2,00E-05	2,18E-05	2,27E-05	2,39E-05
43 x 43	1,65E-04	1,76E-05	2,01E-05	2,18E-05	2,27E-05	2,39E-05
44 x 44	1,68E-04	1,76E-05	2,01E-05	2,17E-05	2,27E-05	2,39E-05

45 x 45	1,71E-04	1,76E-05	2,01E-05	2,17E-05	2,27E-05	2,39E-05
46 x 46	1,74E-04	1,76E-05	2,01E-05	2,16E-05	2,26E-05	2,38E-05
47 x 47	1,77E-04	1,77E-05	2,01E-05	2,16E-05	2,26E-05	2,38E-05
48 x 48	1,80E-04	1,77E-05	2,00E-05	2,15E-05	2,25E-05	2,37E-05
49 x 49	1,83E-04	1,78E-05	1,99E-05	2,13E-05	2,24E-05	2,37E-05
50 x 50	1,87E-04	1,78E-05	1,98E-05	2,12E-05	2,23E-05	2,36E-05
51 x 51	1,91E-04	1,78E-05	1,98E-05	2,11E-05	2,23E-05	2,35E-05
52 x 52	1,95E-04	1,77E-05	1,97E-05	2,09E-05	2,22E-05	2,35E-05
53 x 53	1,99E-04	1,77E-05	1,94E-05	2,07E-05	2,21E-05	2,34E-05
54 x 54	2,03E-04	1,77E-05	1,92E-05	2,04E-05	2,19E-05	2,33E-05
55 x 55	2,08E-04	1,78E-05	1,91E-05	2,02E-05	2,18E-05	2,33E-05
56 x 56	2,11E-04	1,79E-05	1,90E-05	2,01E-05	2,18E-05	2,32E-05
57 x 57	2,15E-04	1,80E-05	1,90E-05	2,01E-05	2,17E-05	2,32E-05
58 x 58	2,18E-04	1,81E-05	1,89E-05	2,00E-05	2,17E-05	2,32E-05
59 x 59	2,22E-04	1,82E-05	1,90E-05	2,00E-05	2,17E-05	2,32E-05
60 x 60	2,27E-04	1,83E-05	1,90E-05	2,00E-05	2,17E-05	2,32E-05
61 x 61	2,31E-04	1,84E-05	1,90E-05	1,99E-05	2,17E-05	2,32E-05
62 x 62	2,35E-04	1,85E-05	1,89E-05	1,99E-05	2,17E-05	2,32E-05
63 x 63	2,39E-04	1,86E-05	1,89E-05	1,99E-05	2,17E-05	2,32E-05
64 x 64	2,44E-04	1,86E-05	1,89E-05	1,99E-05	2,17E-05	2,32E-05
65 x 65	2,47E-04	1,88E-05	1,89E-05	1,98E-05	2,16E-05	2,32E-05
66 x 66	2,51E-04	1,89E-05	1,89E-05	1,97E-05	2,16E-05	2,32E-05
67 x 67	2,56E-04	1,90E-05	1,89E-05	1,97E-05	2,15E-05	2,31E-05
68 x 68	2,60E-04	1,92E-05	1,88E-05	1,96E-05	2,15E-05	2,31E-05
69 x 69	2,65E-04	1,93E-05	1,87E-05	1,95E-05	2,13E-05	2,30E-05
70 x 70	2,69E-04	1,93E-05	1,87E-05	1,93E-05	2,11E-05	2,28E-05
71 x 71	2,73E-04	1,94E-05	1,86E-05	1,91E-05	2,08E-05	2,25E-05
72 x 72	2,75E-04	1,96E-05	1,85E-05	1,88E-05	2,05E-05	2,21E-05
73 x 73	2,78E-04	1,98E-05	1,86E-05	1,87E-05	2,02E-05	2,19E-05
74 x 74	2,81E-04	2,00E-05	1,86E-05	1,85E-05	2,00E-05	2,18E-05
75 x 75	2,83E-04	2,03E-05	1,86E-05	1,83E-05	1,98E-05	2,16E-05
76 x 76	2,86E-04	2,06E-05	1,86E-05	1,81E-05	1,96E-05	2,15E-05
77 x 77	2,90E-04	2,08E-05	1,86E-05	1,80E-05	1,95E-05	2,14E-05
78 x 78	2,93E-04	2,11E-05	1,87E-05	1,79E-05	1,94E-05	2,13E-05
79 x 79	2,96E-04	2,14E-05	1,88E-05	1,78E-05	1,93E-05	2,13E-05
80 x 80	2,99E-04	2,17E-05	1,90E-05	1,78E-05	1,93E-05	2,12E-05
81 x 81	3,02E-04	2,18E-05	1,91E-05	1,77E-05	1,93E-05	2,12E-05
82 x 82	3,05E-04	2,20E-05	1,92E-05	1,75E-05	1,92E-05	2,12E-05
83 x 83	3,08E-04	2,23E-05	1,95E-05	1,74E-05	1,91E-05	2,12E-05
84 x 84	3,10E-04	2,27E-05	1,98E-05	1,73E-05	1,91E-05	2,12E-05
85 x 85	3,13E-04	2,30E-05	2,00E-05	1,73E-05	1,91E-05	2,12E-05
86 x 86	3,16E-04	2,34E-05	2,00E-05	1,72E-05	1,91E-05	2,12E-05
87 x 87	3,19E-04	2,38E-05	2,01E-05	1,72E-05	1,91E-05	2,12E-05
88 x 88	3,21E-04	2,41E-05	2,03E-05	1,72E-05	1,91E-05	2,12E-05
89 x 89	3,24E-04	2,44E-05	2,04E-05	1,72E-05	1,90E-05	2,11E-05
90 x 90	3,26E-04	2,47E-05	2,06E-05	1,71E-05	1,90E-05	2,11E-05
91 x 91	3,29E-04	2,50E-05	2,07E-05	1,71E-05	1,89E-05	2,11E-05
92 x 92	3,32E-04	2,53E-05	2,09E-05	1,71E-05	1,89E-05	2,11E-05
93 x 93	3,34E-04	2,55E-05	2,11E-05	1,71E-05	1,89E-05	2,11E-05
94 x 94	3,37E-04	2,57E-05	2,13E-05	1,70E-05	1,88E-05	2,11E-05
95 x 95	3,40E-04	2,59E-05	2,15E-05	1,69E-05	1,87E-05	2,11E-05
96 x 96	3,42E-04	2,61E-05	2,17E-05	1,68E-05	1,86E-05	2,11E-05

97	x 97	3,45E-04	2,62E-05	2,20E-05	1,68E-05	1,86E-05	2,10E-05
98	x 98	3,48E-04	2,63E-05	2,22E-05	1,68E-05	1,86E-05	2,10E-05
99	x 99	3,51E-04	2,65E-05	2,24E-05	1,67E-05	1,85E-05	2,10E-05
100	x 100	3,53E-04	2,66E-05	2,25E-05	1,67E-05	1,85E-05	2,10E-05
101	x 101	3,56E-04	2,67E-05	2,26E-05	1,67E-05	1,84E-05	2,10E-05
102	x 102	3,58E-04	2,70E-05	2,28E-05	1,66E-05	1,83E-05	2,10E-05
103	x 103	3,60E-04	2,73E-05	2,30E-05	1,66E-05	1,81E-05	2,10E-05
104	x 104	3,62E-04	2,77E-05	2,31E-05	1,65E-05	1,81E-05	2,10E-05
105	x 105	3,65E-04	2,81E-05	2,32E-05	1,65E-05	1,81E-05	2,10E-05
106	x 106	3,68E-04	2,84E-05	2,33E-05	1,64E-05	1,80E-05	2,10E-05
107	x 107	3,71E-04	2,87E-05	2,35E-05	1,64E-05	1,80E-05	2,10E-05
108	x 108	3,73E-04	2,90E-05	2,36E-05	1,64E-05	1,80E-05	2,09E-05
109	x 109	3,76E-04	2,92E-05	2,38E-05	1,64E-05	1,80E-05	2,09E-05
110	x 110	3,78E-04	2,94E-05	2,40E-05	1,63E-05	1,80E-05	2,09E-05
111	x 111	3,80E-04	2,97E-05	2,41E-05	1,63E-05	1,80E-05	2,09E-05
112	x 112	3,82E-04	3,01E-05	2,43E-05	1,63E-05	1,79E-05	2,09E-05
113	x 113	3,84E-04	3,05E-05	2,45E-05	1,63E-05	1,79E-05	2,09E-05
114	x 114	3,86E-04	3,08E-05	2,48E-05	1,63E-05	1,79E-05	2,09E-05
115	x 115	3,88E-04	3,10E-05	2,50E-05	1,63E-05	1,79E-05	2,09E-05
116	x 116	3,90E-04	3,13E-05	2,51E-05	1,62E-05	1,79E-05	2,09E-05
117	x 117	3,92E-04	3,15E-05	2,52E-05	1,62E-05	1,79E-05	2,09E-05
118	x 118	3,94E-04	3,17E-05	2,53E-05	1,62E-05	1,78E-05	2,09E-05
119	x 119	3,96E-04	3,20E-05	2,54E-05	1,62E-05	1,78E-05	2,09E-05
120	x 120	3,98E-04	3,23E-05	2,57E-05	1,62E-05	1,78E-05	2,09E-05
121	x 121	4,00E-04	3,25E-05	2,59E-05	1,61E-05	1,78E-05	2,09E-05
122	x 122	4,02E-04	3,28E-05	2,62E-05	1,61E-05	1,77E-05	2,09E-05
123	x 123	4,04E-04	3,31E-05	2,64E-05	1,59E-05	1,77E-05	2,09E-05
124	x 124	4,06E-04	3,34E-05	2,66E-05	1,58E-05	1,76E-05	2,09E-05
125	x 125	4,07E-04	3,38E-05	2,66E-05	1,58E-05	1,76E-05	2,09E-05
126	x 126	4,09E-04	3,41E-05	2,65E-05	1,57E-05	1,76E-05	2,09E-05
127	x 127	4,11E-04	3,45E-05	2,67E-05	1,56E-05	1,76E-05	2,09E-05
128	x 128	4,13E-04	3,48E-05	2,70E-05	1,56E-05	1,76E-05	2,09E-05
129	x 129	4,15E-04	3,51E-05	2,74E-05	1,56E-05	1,76E-05	2,08E-05
130	x 130	4,17E-04	3,55E-05	2,78E-05	1,54E-05	1,75E-05	2,08E-05
131	x 131	4,18E-04	3,59E-05	2,81E-05	1,52E-05	1,74E-05	2,08E-05
132	x 132	4,20E-04	3,63E-05	2,84E-05	1,52E-05	1,74E-05	2,08E-05
133	x 133	4,21E-04	3,66E-05	2,86E-05	1,51E-05	1,74E-05	2,08E-05
134	x 134	4,23E-04	3,69E-05	2,89E-05	1,50E-05	1,73E-05	2,08E-05
135	x 135	4,25E-04	3,72E-05	2,93E-05	1,49E-05	1,73E-05	2,08E-05
136	x 136	4,27E-04	3,76E-05	2,95E-05	1,49E-05	1,72E-05	2,08E-05
137	x 137	4,29E-04	3,79E-05	2,98E-05	1,49E-05	1,72E-05	2,08E-05
138	x 138	4,31E-04	3,81E-05	2,99E-05	1,49E-05	1,72E-05	2,08E-05
139	x 139	4,32E-04	3,84E-05	3,01E-05	1,48E-05	1,71E-05	2,08E-05
140	x 140	4,34E-04	3,85E-05	3,03E-05	1,48E-05	1,71E-05	2,08E-05
141	x 141	4,36E-04	3,87E-05	3,04E-05	1,48E-05	1,71E-05	2,08E-05
142	x 142	4,37E-04	3,89E-05	3,06E-05	1,48E-05	1,70E-05	2,07E-05
143	x 143	4,39E-04	3,91E-05	3,07E-05	1,48E-05	1,70E-05	2,07E-05
144	x 144	4,41E-04	3,93E-05	3,07E-05	1,47E-05	1,70E-05	2,07E-05
145	x 145	4,42E-04	3,94E-05	3,08E-05	1,47E-05	1,70E-05	2,07E-05
146	x 146	4,44E-04	3,95E-05	3,09E-05	1,47E-05	1,69E-05	2,07E-05
147	x 147	4,45E-04	3,96E-05	3,10E-05	1,47E-05	1,69E-05	2,07E-05
148	x 148	4,47E-04	3,97E-05	3,11E-05	1,47E-05	1,68E-05	2,07E-05

149 x 149	4,48E-04	3,99E-05	3,12E-05	1,46E-05	1,67E-05	2,07E-05
150 x 150	4,50E-04	4,00E-05	3,13E-05	1,46E-05	1,66E-05	2,07E-05
151 x 151	4,51E-04	4,02E-05	3,13E-05	1,46E-05	1,66E-05	2,07E-05
152 x 152	4,53E-04	4,03E-05	3,14E-05	1,46E-05	1,66E-05	2,07E-05
153 x 153	4,54E-04	4,05E-05	3,15E-05	1,46E-05	1,66E-05	2,06E-05
154 x 154	4,55E-04	4,07E-05	3,16E-05	1,45E-05	1,65E-05	2,06E-05
155 x 155	4,57E-04	4,09E-05	3,18E-05	1,45E-05	1,65E-05	2,06E-05
156 x 156	4,58E-04	4,11E-05	3,19E-05	1,45E-05	1,64E-05	2,06E-05
157 x 157	4,60E-04	4,14E-05	3,20E-05	1,45E-05	1,64E-05	2,06E-05
158 x 158	4,61E-04	4,17E-05	3,21E-05	1,45E-05	1,64E-05	2,06E-05
159 x 159	4,62E-04	4,19E-05	3,22E-05	1,44E-05	1,63E-05	2,06E-05
160 x 160	4,63E-04	4,22E-05	3,23E-05	1,42E-05	1,63E-05	2,06E-05
161 x 161	4,65E-04	4,25E-05	3,24E-05	1,41E-05	1,62E-05	2,06E-05
162 x 162	4,66E-04	4,28E-05	3,26E-05	1,41E-05	1,61E-05	2,06E-05
163 x 163	4,68E-04	4,32E-05	3,28E-05	1,40E-05	1,61E-05	2,05E-05
164 x 164	4,69E-04	4,35E-05	3,29E-05	1,39E-05	1,60E-05	2,05E-05
165 x 165	4,70E-04	4,38E-05	3,30E-05	1,38E-05	1,60E-05	2,05E-05
166 x 166	4,71E-04	4,41E-05	3,32E-05	1,36E-05	1,60E-05	2,05E-05
167 x 167	4,72E-04	4,44E-05	3,33E-05	1,33E-05	1,59E-05	2,04E-05
168 x 168	4,74E-04	4,47E-05	3,35E-05	1,31E-05	1,57E-05	2,03E-05
169 x 169	4,75E-04	4,50E-05	3,36E-05	1,30E-05	1,57E-05	2,02E-05
170 x 170	4,76E-04	4,53E-05	3,38E-05	1,30E-05	1,57E-05	2,02E-05
171 x 171	4,78E-04	4,56E-05	3,39E-05	1,29E-05	1,56E-05	2,02E-05
172 x 172	4,79E-04	4,58E-05	3,41E-05	1,29E-05	1,56E-05	2,02E-05
173 x 173	4,80E-04	4,61E-05	3,43E-05	1,28E-05	1,56E-05	2,02E-05
174 x 174	4,81E-04	4,63E-05	3,45E-05	1,28E-05	1,56E-05	2,02E-05
175 x 175	4,82E-04	4,65E-05	3,47E-05	1,27E-05	1,55E-05	2,02E-05
176 x 176	4,84E-04	4,68E-05	3,49E-05	1,27E-05	1,55E-05	2,02E-05
177 x 177	4,85E-04	4,71E-05	3,50E-05	1,27E-05	1,55E-05	2,01E-05
178 x 178	4,86E-04	4,73E-05	3,51E-05	1,27E-05	1,53E-05	2,01E-05
179 x 179	4,87E-04	4,75E-05	3,53E-05	1,26E-05	1,52E-05	2,01E-05
180 x 180	4,88E-04	4,76E-05	3,54E-05	1,26E-05	1,51E-05	2,01E-05
181 x 181	4,89E-04	4,78E-05	3,56E-05	1,25E-05	1,50E-05	2,01E-05
182 x 182	4,90E-04	4,79E-05	3,57E-05	1,25E-05	1,50E-05	2,01E-05
183 x 183	4,92E-04	4,81E-05	3,59E-05	1,25E-05	1,50E-05	2,01E-05
184 x 184	4,93E-04	4,83E-05	3,60E-05	1,25E-05	1,50E-05	2,01E-05
185 x 185	4,94E-04	4,85E-05	3,61E-05	1,25E-05	1,49E-05	2,01E-05
186 x 186	4,95E-04	4,87E-05	3,62E-05	1,25E-05	1,48E-05	2,01E-05
187 x 187	4,96E-04	4,88E-05	3,63E-05	1,25E-05	1,47E-05	2,00E-05
188 x 188	4,97E-04	4,89E-05	3,64E-05	1,25E-05	1,47E-05	2,00E-05
189 x 189	4,98E-04	4,91E-05	3,64E-05	1,25E-05	1,47E-05	2,00E-05
190 x 190	4,99E-04	4,92E-05	3,65E-05	1,25E-05	1,47E-05	2,00E-05
191 x 191	5,00E-04	4,94E-05	3,66E-05	1,25E-05	1,47E-05	2,00E-05
192 x 192	5,01E-04	4,95E-05	3,66E-05	1,25E-05	1,46E-05	2,00E-05
193 x 193	5,02E-04	4,96E-05	3,67E-05	1,24E-05	1,46E-05	2,00E-05
194 x 194	5,03E-04	4,98E-05	3,69E-05	1,24E-05	1,46E-05	2,00E-05
195 x 195	5,04E-04	4,99E-05	3,70E-05	1,24E-05	1,46E-05	2,00E-05
196 x 196	5,05E-04	5,01E-05	3,71E-05	1,24E-05	1,46E-05	2,00E-05
197 x 197	5,06E-04	5,02E-05	3,72E-05	1,24E-05	1,46E-05	2,00E-05
198 x 198	5,07E-04	5,04E-05	3,73E-05	1,24E-05	1,45E-05	2,00E-05
199 x 199	5,08E-04	5,05E-05	3,74E-05	1,24E-05	1,45E-05	1,99E-05
200 x 200	5,09E-04	5,07E-05	3,75E-05	1,24E-05	1,45E-05	1,99E-05

EK 2. Referans MSE tablosu

Ref. MSE Öz İlinti Matrisi (satır x sütun)	Adım					
	50	100	125	250	500	2500
2 x 2	6,01E-01	5,16E-01	5,29E-01	5,62E-01	5,51E-01	5,53E-01
3 x 3	4,34E-01	3,38E-01	3,45E-01	3,65E-01	3,59E-01	3,60E-01
4 x 4	3,85E-01	2,78E-01	2,82E-01	2,97E-01	2,92E-01	2,94E-01
5 x 5	3,72E-01	2,55E-01	2,60E-01	2,73E-01	2,68E-01	2,71E-01
6 x 6	3,77E-01	2,50E-01	2,55E-01	2,67E-01	2,63E-01	2,66E-01
7 x 7	3,85E-01	2,50E-01	2,55E-01	2,67E-01	2,63E-01	2,66E-01
8 x 8	3,93E-01	2,48E-01	2,55E-01	2,67E-01	2,63E-01	2,65E-01
9 x 9	4,03E-01	2,47E-01	2,54E-01	2,66E-01	2,62E-01	2,65E-01
10 x 10	4,15E-01	2,46E-01	2,53E-01	2,66E-01	2,62E-01	2,65E-01
11 x 11	4,27E-01	2,45E-01	2,52E-01	2,66E-01	2,62E-01	2,65E-01
12 x 12	4,38E-01	2,44E-01	2,49E-01	2,66E-01	2,62E-01	2,65E-01
13 x 13	4,52E-01	2,44E-01	2,46E-01	2,65E-01	2,62E-01	2,65E-01
14 x 14	4,66E-01	2,42E-01	2,45E-01	2,65E-01	2,62E-01	2,65E-01
15 x 15	4,78E-01	2,39E-01	2,42E-01	2,64E-01	2,62E-01	2,65E-01
16 x 16	4,88E-01	2,36E-01	2,40E-01	2,62E-01	2,61E-01	2,65E-01
17 x 17	5,08E-01	2,33E-01	2,38E-01	2,60E-01	2,61E-01	2,65E-01
18 x 18	5,29E-01	2,33E-01	2,38E-01	2,60E-01	2,60E-01	2,65E-01
19 x 19	5,41E-01	2,30E-01	2,35E-01	2,59E-01	2,60E-01	2,65E-01
20 x 20	5,51E-01	2,26E-01	2,32E-01	2,56E-01	2,59E-01	2,65E-01
21 x 21	5,70E-01	2,25E-01	2,29E-01	2,55E-01	2,59E-01	2,65E-01
22 x 22	5,98E-01	2,23E-01	2,26E-01	2,54E-01	2,58E-01	2,65E-01
23 x 23	6,42E-01	2,20E-01	2,25E-01	2,54E-01	2,58E-01	2,65E-01
24 x 24	6,97E-01	2,18E-01	2,24E-01	2,53E-01	2,57E-01	2,65E-01
25 x 25	7,55E-01	2,17E-01	2,23E-01	2,52E-01	2,57E-01	2,65E-01
26 x 26	8,09E-01	2,16E-01	2,22E-01	2,52E-01	2,57E-01	2,65E-01
27 x 27	8,66E-01	2,16E-01	2,22E-01	2,52E-01	2,57E-01	2,65E-01
28 x 28	9,07E-01	2,15E-01	2,21E-01	2,52E-01	2,57E-01	2,65E-01
29 x 29	9,55E-01	2,14E-01	2,21E-01	2,52E-01	2,57E-01	2,65E-01
30 x 30	1,01E+00	2,13E-01	2,20E-01	2,52E-01	2,57E-01	2,65E-01
31 x 31	1,05E+00	2,11E-01	2,19E-01	2,51E-01	2,57E-01	2,64E-01
32 x 32	1,10E+00	2,09E-01	2,19E-01	2,51E-01	2,57E-01	2,64E-01
33 x 33	1,14E+00	2,08E-01	2,19E-01	2,51E-01	2,56E-01	2,64E-01
34 x 34	1,19E+00	2,06E-01	2,18E-01	2,51E-01	2,56E-01	2,64E-01
35 x 35	1,24E+00	2,05E-01	2,18E-01	2,51E-01	2,56E-01	2,64E-01
36 x 36	1,29E+00	2,02E-01	2,18E-01	2,50E-01	2,55E-01	2,64E-01
37 x 37	1,33E+00	2,01E-01	2,17E-01	2,49E-01	2,54E-01	2,63E-01
38 x 38	1,38E+00	2,01E-01	2,17E-01	2,48E-01	2,53E-01	2,62E-01
39 x 39	1,42E+00	2,00E-01	2,16E-01	2,47E-01	2,52E-01	2,61E-01
40 x 40	1,46E+00	1,99E-01	2,16E-01	2,47E-01	2,52E-01	2,61E-01
41 x 41	1,50E+00	1,98E-01	2,16E-01	2,46E-01	2,52E-01	2,61E-01
42 x 42	1,55E+00	1,98E-01	2,16E-01	2,46E-01	2,51E-01	2,61E-01
43 x 43	1,59E+00	1,98E-01	2,15E-01	2,45E-01	2,51E-01	2,61E-01
44 x 44	1,62E+00	1,97E-01	2,15E-01	2,45E-01	2,51E-01	2,61E-01
45 x 45	1,64E+00	1,97E-01	2,14E-01	2,44E-01	2,51E-01	2,60E-01
46 x 46	1,68E+00	1,96E-01	2,13E-01	2,43E-01	2,50E-01	2,60E-01
47 x 47	1,70E+00	1,95E-01	2,12E-01	2,43E-01	2,50E-01	2,59E-01

48 x 48	1,73E+00	1,95E-01	2,11E-01	2,42E-01	2,49E-01	2,59E-01
49 x 49	1,76E+00	1,94E-01	2,11E-01	2,41E-01	2,48E-01	2,58E-01
50 x 50	1,80E+00	1,94E-01	2,11E-01	2,40E-01	2,48E-01	2,58E-01
51 x 51	1,84E+00	1,93E-01	2,11E-01	2,40E-01	2,47E-01	2,57E-01
52 x 52	1,88E+00	1,93E-01	2,10E-01	2,38E-01	2,47E-01	2,57E-01
53 x 53	1,92E+00	1,93E-01	2,08E-01	2,36E-01	2,46E-01	2,56E-01
54 x 54	1,96E+00	1,92E-01	2,07E-01	2,34E-01	2,45E-01	2,56E-01
55 x 55	2,00E+00	1,92E-01	2,06E-01	2,33E-01	2,45E-01	2,55E-01
56 x 56	2,04E+00	1,92E-01	2,05E-01	2,32E-01	2,45E-01	2,55E-01
57 x 57	2,07E+00	1,92E-01	2,05E-01	2,31E-01	2,44E-01	2,55E-01
58 x 58	2,11E+00	1,92E-01	2,04E-01	2,31E-01	2,44E-01	2,55E-01
59 x 59	2,15E+00	1,93E-01	2,04E-01	2,30E-01	2,44E-01	2,55E-01
60 x 60	2,19E+00	1,94E-01	2,04E-01	2,30E-01	2,44E-01	2,55E-01
61 x 61	2,23E+00	1,94E-01	2,04E-01	2,29E-01	2,44E-01	2,55E-01
62 x 62	2,27E+00	1,94E-01	2,03E-01	2,29E-01	2,44E-01	2,55E-01
63 x 63	2,31E+00	1,95E-01	2,02E-01	2,29E-01	2,43E-01	2,55E-01
64 x 64	2,35E+00	1,95E-01	2,02E-01	2,29E-01	2,43E-01	2,55E-01
65 x 65	2,39E+00	1,96E-01	2,02E-01	2,28E-01	2,43E-01	2,55E-01
66 x 66	2,43E+00	1,97E-01	2,02E-01	2,27E-01	2,43E-01	2,55E-01
67 x 67	2,47E+00	1,98E-01	2,01E-01	2,27E-01	2,42E-01	2,54E-01
68 x 68	2,52E+00	1,99E-01	2,00E-01	2,26E-01	2,41E-01	2,53E-01
69 x 69	2,56E+00	1,99E-01	1,99E-01	2,25E-01	2,39E-01	2,52E-01
70 x 70	2,60E+00	1,99E-01	1,98E-01	2,23E-01	2,37E-01	2,51E-01
71 x 71	2,64E+00	1,99E-01	1,97E-01	2,21E-01	2,35E-01	2,48E-01
72 x 72	2,66E+00	2,01E-01	1,96E-01	2,19E-01	2,32E-01	2,45E-01
73 x 73	2,69E+00	2,02E-01	1,96E-01	2,18E-01	2,30E-01	2,43E-01
74 x 74	2,71E+00	2,03E-01	1,95E-01	2,16E-01	2,28E-01	2,42E-01
75 x 75	2,74E+00	2,06E-01	1,95E-01	2,14E-01	2,26E-01	2,40E-01
76 x 76	2,77E+00	2,08E-01	1,95E-01	2,13E-01	2,24E-01	2,39E-01
77 x 77	2,80E+00	2,09E-01	1,94E-01	2,12E-01	2,23E-01	2,38E-01
78 x 78	2,83E+00	2,11E-01	1,94E-01	2,11E-01	2,22E-01	2,38E-01
79 x 79	2,86E+00	2,13E-01	1,95E-01	2,11E-01	2,22E-01	2,37E-01
80 x 80	2,90E+00	2,16E-01	1,97E-01	2,11E-01	2,21E-01	2,37E-01
81 x 81	2,92E+00	2,17E-01	1,97E-01	2,10E-01	2,21E-01	2,37E-01
82 x 82	2,95E+00	2,19E-01	1,98E-01	2,08E-01	2,20E-01	2,37E-01
83 x 83	2,98E+00	2,22E-01	2,01E-01	2,07E-01	2,20E-01	2,37E-01
84 x 84	3,01E+00	2,26E-01	2,04E-01	2,07E-01	2,20E-01	2,37E-01
85 x 85	3,03E+00	2,28E-01	2,04E-01	2,06E-01	2,19E-01	2,37E-01
86 x 86	3,06E+00	2,30E-01	2,04E-01	2,05E-01	2,19E-01	2,37E-01
87 x 87	3,09E+00	2,33E-01	2,05E-01	2,05E-01	2,19E-01	2,36E-01
88 x 88	3,11E+00	2,36E-01	2,06E-01	2,05E-01	2,19E-01	2,36E-01
89 x 89	3,14E+00	2,39E-01	2,07E-01	2,04E-01	2,18E-01	2,35E-01
90 x 90	3,16E+00	2,41E-01	2,09E-01	2,04E-01	2,18E-01	2,35E-01
91 x 91	3,19E+00	2,44E-01	2,10E-01	2,04E-01	2,17E-01	2,35E-01
92 x 92	3,21E+00	2,46E-01	2,12E-01	2,04E-01	2,17E-01	2,35E-01
93 x 93	3,24E+00	2,48E-01	2,13E-01	2,04E-01	2,17E-01	2,34E-01
94 x 94	3,27E+00	2,50E-01	2,15E-01	2,03E-01	2,16E-01	2,34E-01
95 x 95	3,29E+00	2,51E-01	2,17E-01	2,03E-01	2,16E-01	2,34E-01
96 x 96	3,32E+00	2,52E-01	2,18E-01	2,02E-01	2,15E-01	2,34E-01
97 x 97	3,34E+00	2,54E-01	2,20E-01	2,02E-01	2,14E-01	2,34E-01
98 x 98	3,37E+00	2,55E-01	2,22E-01	2,02E-01	2,14E-01	2,34E-01
99 x 99	3,40E+00	2,56E-01	2,24E-01	2,01E-01	2,14E-01	2,34E-01

100	x 100	3,43E+00	2,57E-01	2,25E-01	2,00E-01	2,13E-01	2,34E-01
101	x 101	3,45E+00	2,58E-01	2,25E-01	2,00E-01	2,12E-01	2,34E-01
102	x 102	3,47E+00	2,60E-01	2,27E-01	2,00E-01	2,11E-01	2,34E-01
103	x 103	3,49E+00	2,63E-01	2,28E-01	1,99E-01	2,10E-01	2,34E-01
104	x 104	3,52E+00	2,67E-01	2,29E-01	1,98E-01	2,10E-01	2,34E-01
105	x 105	3,54E+00	2,70E-01	2,29E-01	1,97E-01	2,09E-01	2,34E-01
106	x 106	3,57E+00	2,73E-01	2,30E-01	1,97E-01	2,09E-01	2,34E-01
107	x 107	3,60E+00	2,75E-01	2,31E-01	1,97E-01	2,09E-01	2,33E-01
108	x 108	3,62E+00	2,78E-01	2,32E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
109	x 109	3,64E+00	2,80E-01	2,34E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
110	x 110	3,66E+00	2,82E-01	2,35E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
111	x 111	3,69E+00	2,84E-01	2,36E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
112	x 112	3,71E+00	2,88E-01	2,37E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
113	x 113	3,73E+00	2,91E-01	2,40E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
114	x 114	3,75E+00	2,94E-01	2,42E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
115	x 115	3,77E+00	2,96E-01	2,43E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
116	x 116	3,79E+00	2,98E-01	2,44E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
117	x 117	3,80E+00	3,00E-01	2,45E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
118	x 118	3,82E+00	3,03E-01	2,46E-01	1,96E-01	2,08E-01	2,33E-01
119	x 119	3,84E+00	3,05E-01	2,47E-01	1,95E-01	2,07E-01	2,33E-01
120	x 120	3,86E+00	3,07E-01	2,49E-01	1,95E-01	2,07E-01	2,33E-01
121	x 121	3,88E+00	3,10E-01	2,51E-01	1,95E-01	2,07E-01	2,33E-01
122	x 122	3,90E+00	3,12E-01	2,54E-01	1,95E-01	2,07E-01	2,33E-01
123	x 123	3,92E+00	3,15E-01	2,56E-01	1,95E-01	2,07E-01	2,33E-01
124	x 124	3,94E+00	3,18E-01	2,57E-01	1,95E-01	2,07E-01	2,33E-01
125	x 125	3,95E+00	3,21E-01	2,57E-01	1,95E-01	2,07E-01	2,33E-01
126	x 126	3,97E+00	3,24E-01	2,56E-01	1,94E-01	2,07E-01	2,33E-01
127	x 127	3,99E+00	3,27E-01	2,58E-01	1,93E-01	2,06E-01	2,33E-01
128	x 128	4,01E+00	3,30E-01	2,61E-01	1,92E-01	2,06E-01	2,33E-01
129	x 129	4,03E+00	3,33E-01	2,64E-01	1,92E-01	2,06E-01	2,33E-01
130	x 130	4,05E+00	3,36E-01	2,68E-01	1,90E-01	2,06E-01	2,32E-01
131	x 131	4,06E+00	3,40E-01	2,71E-01	1,89E-01	2,05E-01	2,32E-01
132	x 132	4,08E+00	3,43E-01	2,73E-01	1,89E-01	2,05E-01	2,32E-01
133	x 133	4,09E+00	3,46E-01	2,75E-01	1,88E-01	2,05E-01	2,32E-01
134	x 134	4,11E+00	3,49E-01	2,78E-01	1,86E-01	2,04E-01	2,32E-01
135	x 135	4,13E+00	3,52E-01	2,81E-01	1,86E-01	2,03E-01	2,32E-01
136	x 136	4,15E+00	3,55E-01	2,84E-01	1,85E-01	2,03E-01	2,32E-01
137	x 137	4,17E+00	3,57E-01	2,86E-01	1,85E-01	2,03E-01	2,32E-01
138	x 138	4,18E+00	3,60E-01	2,87E-01	1,84E-01	2,02E-01	2,31E-01
139	x 139	4,20E+00	3,62E-01	2,89E-01	1,84E-01	2,02E-01	2,31E-01
140	x 140	4,22E+00	3,64E-01	2,90E-01	1,84E-01	2,01E-01	2,31E-01
141	x 141	4,23E+00	3,65E-01	2,92E-01	1,84E-01	2,01E-01	2,31E-01
142	x 142	4,25E+00	3,67E-01	2,93E-01	1,83E-01	2,01E-01	2,32E-01
143	x 143	4,27E+00	3,69E-01	2,94E-01	1,83E-01	2,01E-01	2,32E-01
144	x 144	4,28E+00	3,71E-01	2,95E-01	1,82E-01	2,01E-01	2,32E-01
145	x 145	4,30E+00	3,72E-01	2,96E-01	1,82E-01	2,01E-01	2,32E-01
146	x 146	4,31E+00	3,73E-01	2,97E-01	1,82E-01	2,00E-01	2,32E-01
147	x 147	4,33E+00	3,74E-01	2,97E-01	1,82E-01	2,00E-01	2,32E-01
148	x 148	4,34E+00	3,75E-01	2,98E-01	1,81E-01	1,99E-01	2,32E-01
149	x 149	4,36E+00	3,77E-01	2,99E-01	1,81E-01	1,98E-01	2,32E-01
150	x 150	4,37E+00	3,78E-01	3,00E-01	1,81E-01	1,98E-01	2,32E-01
151	x 151	4,39E+00	3,79E-01	3,00E-01	1,81E-01	1,98E-01	2,32E-01

152	x 152	4,40E+00	3,81E-01	3,01E-01	1,81E-01	1,97E-01	2,32E-01
153	x 153	4,41E+00	3,82E-01	3,02E-01	1,80E-01	1,97E-01	2,32E-01
154	x 154	4,43E+00	3,84E-01	3,03E-01	1,80E-01	1,97E-01	2,32E-01
155	x 155	4,44E+00	3,86E-01	3,04E-01	1,80E-01	1,97E-01	2,31E-01
156	x 156	4,45E+00	3,88E-01	3,06E-01	1,80E-01	1,96E-01	2,31E-01
157	x 157	4,47E+00	3,90E-01	3,07E-01	1,80E-01	1,96E-01	2,31E-01
158	x 158	4,48E+00	3,93E-01	3,07E-01	1,80E-01	1,96E-01	2,31E-01
159	x 159	4,49E+00	3,95E-01	3,08E-01	1,79E-01	1,95E-01	2,31E-01
160	x 160	4,51E+00	3,97E-01	3,09E-01	1,79E-01	1,95E-01	2,31E-01
161	x 161	4,52E+00	4,00E-01	3,10E-01	1,78E-01	1,94E-01	2,31E-01
162	x 162	4,53E+00	4,03E-01	3,12E-01	1,77E-01	1,94E-01	2,31E-01
163	x 163	4,55E+00	4,07E-01	3,14E-01	1,76E-01	1,94E-01	2,31E-01
164	x 164	4,56E+00	4,10E-01	3,15E-01	1,75E-01	1,93E-01	2,31E-01
165	x 165	4,57E+00	4,12E-01	3,16E-01	1,74E-01	1,93E-01	2,31E-01
166	x 166	4,58E+00	4,15E-01	3,17E-01	1,72E-01	1,93E-01	2,30E-01
167	x 167	4,59E+00	4,18E-01	3,18E-01	1,70E-01	1,92E-01	2,29E-01
168	x 168	4,61E+00	4,21E-01	3,20E-01	1,68E-01	1,91E-01	2,28E-01
169	x 169	4,62E+00	4,24E-01	3,21E-01	1,68E-01	1,90E-01	2,27E-01
170	x 170	4,63E+00	4,27E-01	3,23E-01	1,68E-01	1,90E-01	2,27E-01
171	x 171	4,64E+00	4,29E-01	3,24E-01	1,67E-01	1,90E-01	2,27E-01
172	x 172	4,66E+00	4,31E-01	3,26E-01	1,66E-01	1,89E-01	2,27E-01
173	x 173	4,67E+00	4,33E-01	3,28E-01	1,65E-01	1,89E-01	2,27E-01
174	x 174	4,68E+00	4,35E-01	3,29E-01	1,65E-01	1,89E-01	2,27E-01
175	x 175	4,69E+00	4,37E-01	3,31E-01	1,65E-01	1,89E-01	2,27E-01
176	x 176	4,70E+00	4,40E-01	3,33E-01	1,64E-01	1,88E-01	2,27E-01
177	x 177	4,72E+00	4,42E-01	3,34E-01	1,64E-01	1,88E-01	2,27E-01
178	x 178	4,73E+00	4,44E-01	3,35E-01	1,64E-01	1,86E-01	2,27E-01
179	x 179	4,74E+00	4,46E-01	3,36E-01	1,63E-01	1,84E-01	2,27E-01
180	x 180	4,75E+00	4,47E-01	3,38E-01	1,62E-01	1,83E-01	2,27E-01
181	x 181	4,76E+00	4,49E-01	3,39E-01	1,61E-01	1,82E-01	2,27E-01
182	x 182	4,77E+00	4,50E-01	3,41E-01	1,61E-01	1,82E-01	2,27E-01
183	x 183	4,78E+00	4,52E-01	3,42E-01	1,61E-01	1,82E-01	2,27E-01
184	x 184	4,79E+00	4,53E-01	3,43E-01	1,61E-01	1,81E-01	2,27E-01
185	x 185	4,80E+00	4,55E-01	3,44E-01	1,61E-01	1,80E-01	2,27E-01
186	x 186	4,82E+00	4,57E-01	3,45E-01	1,61E-01	1,80E-01	2,27E-01
187	x 187	4,82E+00	4,58E-01	3,46E-01	1,60E-01	1,79E-01	2,27E-01
188	x 188	4,83E+00	4,59E-01	3,47E-01	1,60E-01	1,79E-01	2,27E-01
189	x 189	4,84E+00	4,61E-01	3,47E-01	1,60E-01	1,78E-01	2,27E-01
190	x 190	4,85E+00	4,62E-01	3,48E-01	1,60E-01	1,78E-01	2,27E-01
191	x 191	4,86E+00	4,63E-01	3,48E-01	1,60E-01	1,78E-01	2,27E-01
192	x 192	4,87E+00	4,64E-01	3,49E-01	1,60E-01	1,78E-01	2,27E-01
193	x 193	4,88E+00	4,66E-01	3,50E-01	1,60E-01	1,78E-01	2,27E-01
194	x 194	4,89E+00	4,67E-01	3,51E-01	1,59E-01	1,78E-01	2,27E-01
195	x 195	4,90E+00	4,69E-01	3,52E-01	1,59E-01	1,78E-01	2,27E-01
196	x 196	4,91E+00	4,70E-01	3,53E-01	1,59E-01	1,77E-01	2,27E-01
197	x 197	4,92E+00	4,71E-01	3,53E-01	1,59E-01	1,77E-01	2,27E-01
198	x 198	4,93E+00	4,73E-01	3,54E-01	1,59E-01	1,77E-01	2,27E-01
199	x 199	4,94E+00	4,74E-01	3,55E-01	1,59E-01	1,77E-01	2,27E-01
200	x 200	4,95E+00	4,76E-01	3,56E-01	1,59E-01	1,77E-01	2,27E-01