

T.C
DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL YARIGRUPLARDA BOŞLUKLAR

Gülten ALAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DIYARBAKIR

Aralık 2015

TEŞEKKÜR

Lisansüstü eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım ve tezimin yazım aşamasında gerek zamanını gerekse desteğini esirgemeyip maddi manevi yanımda olan ayrıca çalışmalarım esnasında gösterdiği sabır ve hoşgöründen dolayı danışmanım

Doç. Dr. Sedat İLHAN'a

Çalışmalarım esnasında tüm samimiyet ve içtenliği ile bilgilerini esirgemeyen değerli hocam ***Prof. Dr. H. Özlem GÜNEY'e***

Hayatımın her alanında daima yanımda olan sonsuz güven ve sevgisiyle beni bugünlere getiren sevgili ***babama*** ve tüm aileme,

Sonsuz teşekkürler...

TEŞEKKÜR.....	I
İÇİNDEKİLER.....	II
ÖZET.....	III
ABSTRACT.....	IV
KISALTMA VE SİMGELER.....	V
1. GİRİŞ.....	1
2. KAYNAK ÖZETLERİ	3
3. MATERYALVE METOT	5
3.1 Materyal.....	5
3.2 Metot.....	5
3.2.1 Temel Bilgiler.....	5
3.2.2 Frobenius Sayısı ve Hesaplamalar.....	7
3.2.3 Simetrik ve Pseudo Simetrik Sayısal Yarıgruplar.....	9
4. ARAŞTIRMA BULGULARI.....	15
4.1 Sayısal Yarıgruplarda Boşluklar.....	15
5. TARTIŞMA VE SONUÇ.....	25
5.1 Temel Boşluklar	25
6. KAYNAKLAR.....	33

ÖZET

SAYISAL YARIGRUPLARDA BOŞLUKLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülten ALAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

2015

Bu çalışmada $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{N}$ için $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ ve $(s_1, s_2, \dots, s_n)=1$ olmak üzere ,

$$S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \cdot s_i : k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

şeklindeki bir sayısal yarıgrubun ,

$$H(S) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}$$

boşluklar kümesi ve

$$FH(S) = \{x \in H(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$$

temel boşlukların kümesi ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir.

Anahtar kelimeler: Sayısal yarıgrup, Frobenius sayısı, simetrik sayısal yarıgrup ve boşluklar

ABSTRACT

GAPS IN NUMERICAL SEMIGROUPS

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Gülten ALAN

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

UNIVERSITY OF DICLE

2015

In this study, we will give some results about the set of gaps of S $H(S) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}$, and the set of fundamental gaps of S ,

$$FH(S) = \{x \in H(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$$

where

$$S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i \cdot s_i : k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

is numerical semigroup, where $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_n$ and $(s_1, s_2, \dots, s_n) = 1$ for $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{N}$.

Key words: Numerical semigroup, Frobenius number, symmetric numerical semigroup and gaps.

KISALTMA VE SİMGELER

Mantık

$=$: Eşittir

$\neq$: Farklıdır

$\equiv$: Denktir

$\Rightarrow$: İse, Gerektirir, gerek (koşul)

$\Leftarrow$: ancak, için

$\Leftrightarrow$: ancak ve ancak,İçin gerek ve yeter şart

Niceleyiciler

$\forall$: Evrensel

$\exists$: Varlıksal

Kümeler

$\in$: Elemanıdır

$\notin$: Elemanı değildir

$\subseteq$: Altkümesidir

$\supseteq$: Kapsar

$\cup$: birleşim

$\cap$: kesişim

Σ : Toplam sembolü

$[]$: Kendisinden büyük veya eşit en küçük tamsayı

$[]$: Kendisinden küçük veya eşit en büyük tamsayı

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere ; Bazı özel Kümeler , Sınıflar ve fonksiyonlar

$\langle S, * \rangle$	: Cebirsel yapı
$\langle A \rangle$	: Üreteçler kümesi
$g(S)$	: Frobenius sayısı
$G(S)$	: Sayısal yarıgrupun cinsi
c	: Kondüktör(İletici)
$H(S)$	: Boşluklar Kümesi
$N(S)$	: Belirteç Sayısı
$\mu(S)$	: S nin katlılığı
$e(S)$	: İndirgenme boyutu
$FH(S)$	: Temel boşluklar Kümesi
$K(S)$	: S nin kutup noktalarının kümesi
$Pg(S)$	: Pseudo Simetrik elemanların kümesi
$\#(H(S))$	: boşluklar Kümesinin eleman sayısı
$\leq_s$	: S kümesinde sıralama bağıntısı

Parantez Benzeri İşaretlerin kullanımı

(a, b)	: a, b nin en büyük ortak böleni
$\{a, b\}$	: Elemanları a ve b olan küme

1. GİRİŞ

Sayısal yarıgruplar, Soyut Cebir ve Sayılar teorisinde oldukça önemli ve geniş bir yere sahiptir. Özellikle Kriptoloji (şifreleme) alanında, sayısal yarıgrupların boşlukları ve bunların uygulanması önemini dahada arttırmaktadır. Bununla birlikte Sayısal yarıgruplar, güncel konularda da kullanılmaktadır. Örneğin bozuk para problemi olarakta bilinen Frobenius problemi bunlardan biridir ve çözümü sayısal yarıgruplardaki Frobenius sayısı bulma problemi olarak karşımıza çıkar. Sayısal yarıgruplarda boşluklar ve temel boşluklar kümelerinin bulunmasında da yine Frobenius sayısından faydalanılmaktadır. Bu çalışmada Frobenius sayısı ve ilgili teoremler yardımıyla sayısal yarıgruplarda boşluklar ve temel boşluklar kümeleri hesaplanarak, boşluklar sayısının bulunmasında elde edilmiş formüller detaylı bir şekilde incelenmektedir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan giriş bölümü çalışmanın içeriği ve genel görünümü hakkında bilgi vermektedir.

İkinci bölümde tezin yazımında yararlanılan kaynaklar ele alınarak sayısal yarıgruplarda boşluklar ve temel boşlukların hesaplanması ve gerekli temel bilgilerin elde edilmesine ilişkin daha önce yapılmış çalışmalar hakkında kısa bilgiler yer almaktadır.

Üçüncü bölüm olan materyal ve metot bölümünde ise sayısal yarıgruplar teorisinde çok sık kullanılan Frobenius sayısı, Apery kümesi, Simetrik ve Pseudo simetrik sayısal yarıgruplar gibi tez için temel bilgiler oluşturacak kavramlar ve bunlarla ilgili bazı teorem ve uygulamalar verilmektedir.

Araştırma bulguları bölümünde de, materyal ve metot bölümünden elde edilen bilgiler ile katlılığı üç ve dört olan S sayısal yarıgrubunun boşlukları kümesi $H(S)$ hesaplanarak, türü $G(S)$ ve ileticisi (c) arasındaki bağıntılar incelenmektedir.

Beşinci bölüm olan sonuç bölümünde bir S sayısal yarıgrubun boşluklar kümesinden faydalanarak oluşturulan temel boşluklar kümesi,

$$FH(S) = \{x \in H(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$$

ile ilgili bazı sonuçlar ele alınmaktadır.

1. GİRİŞ

2.KAYNAK ÖZETLERİ

Bir sayısal yarırgrupla ilgili karşılaşılan ilk problem, 1884’ te Sylvester problemidir. (Bu problem ; g Frobenius sayısı ve $(s_1, s_2)=1$ olacak şekilde $s_1, s_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ olmak üzere, en büyük g tamsayısının $n_1s_1+n_2s_2$ şeklinde bir lineer kombinasyon olarak yazılıp yazılamayacağı problemi olarak bilinir). 1958-1978 yılları arasında bahsedilen lineer kombinasyonlar ve Frobenius sayısı hakkında bir çok yeni araştırma yapılmıştır. 1984 yılında Gilmer bir çalışmasında sayısal yarırgrupların sonlu olarak da türetilebileceğini açıklamıştır. Fröberg ve arkadaşları 1987’de yayımladıkları çalışmalarında Apery kümesini

$$S(s) = \{t \in S: t - s \notin S, s \in S \setminus \{0\}\}$$

olarak tanımlamıştır.

Bir sayısal yarır grubun Frobenius sayısının bulunmasını kolaylaştıracak bazı formüller 1990 da Curtis tarafından geliştirilmiştir.

Rosales ve arkadaşları 1996’da sayısal yarırgrupların Apery kümeleri ile pseudo simetriklik arasındaki ilişkiyi incelemişlerdir. 2000-2006 yılları arasında ise sayısal yarır gruplarda boşlukların hesaplanması ile ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır:

J.L.Ramirez Alfonsin’in çalışması da bunlardan biridir Ramirez ‘‘Gaps in semigroups’’başlıklı çalışmasında ardışık tamsayılar ile oluşturu lan sayısal yarır gruplarda boşluklarla ilgili açık formüller vererek,bunları Apery kümeleri ve Pick’s teoremini kullanarak kanıtlar oluşturmuş.(J.L Ramirez Alfonsin)

Rosales 2005’ de yaptığı çalışmalarda üç ve dört katlılık lı sayısal yarır grupları inceleyerek boşlukları bulmada kolaylık sağlayacak formüller elde etmiştir

J.C Rosales, P.A Garcia ve J.A Jimenez 2004’de beraber yaptıkları çalışmada sayısal yarır gruplarda temel boşluklar (Fundamentals gaps) kavramını ilk kez tanıtmışlardır. Bu çalışmada Frobenis sayısı verilen bir sayısal yarır grubun temel boşluklarının alt ve üst sınırları verilerek temel boşlukların özelliklerinden bazı uygulamalar geliştirilmiştir.(Rosales,J.C 2005)

Yine **Rosales** 2005 ‘ de iki elemanla oluşturu lan sayısal yarır grupların temel boşluklarını inceleyerek

2. KAYNAK ÖZETLERİ

$$FH(S) = \{x \in H(S) : kx \in S, k \geq 2\}$$

şeklindeki sayısal yarıgruplardaki temel boşlukların hesaplanabilmesi için bazı özel formüller vermiştir (Rosales,J.C 2005).

3. MATERİYAL VE METOT

3.1 Materyal

Bu tez çalışmasında temelde materyal olarak, ‘sayısal yarıgrup’ , ‘Frobenius sayısı’ ve ‘ sayısal yarıgruylarda boşluklar’ yapıları kullanılmış olup alt başlıklarda yer alan ve çalışmaya yön veren tanım ve teoremler kullanılarak boşluklar kümesiyle ilgili açıklamalar yapılmıştır.

Bu alışma boyunca $\langle S, * \rangle$ cebirsel yapısı tanımlanmış olup $H(S)$ ve $FH(S)$ kümeleri ile ilgili bazı sonuçlar derlenmiştir.

3.2 Metot

Bu kesimde tez konusu ile ilgili daha önce yazılmış olan çalışmalar esas alınarak sayısal yarıgruylarda çok sık kullanılan ve boşluklar kümesinin bulunmasına yardımcı olan Frobenius sayısı ,Cinsi, Apery kümeleri ve konu ile ilgili gerekli tüm kavramların tanımları, uygulamaları ile birlikte verilmiştir. Verilen bu kavramlar yardımıyla Araştırma bulguları bölümünde yer alan sayısal yarıgruyların boşlukları kümesi ile ilgili hesaplamaların ve kullanılan formüllerin daha iyi anlaşılması amaçlanmaktadır. Bunun için de ilgili teorem ve sonuçlar birlikte verilmiştir.

Böylece bu bölümden elde edilen bilgiler doğrultusunda sonuç bölümünde, temel boşluklar kümesinin hesaplanmasını ve eleman sayısının bulunmasını kolaylaştıran daha kapsamlı ve geliştirilmiş teoremlere yer verilmiştir.

3.2.1 Temel Bilgiler

Bu bölümde, sayısal yarıgruylar teorisinde çok kullanılan, çalışmamızın temelini oluşturan ve bu tezin daha iyi anlaşılması için gerekli temel bilgiler yer almaktadır.

3.2.1.1 Tanım

$S \neq \emptyset$, S kümesi üzerinde $*$ işlemi verilsin. Eğer

$$\forall a, b, c \in S \quad \text{için} \quad (a * b) * c = a * (b * c)$$

özelligi sağlanıyorsa $\langle S, * \rangle$ cebirsel yapısına *yarıgrup* adı verilir.

3.2.1.2 Tanım

$\langle S, * \rangle$ bir yarıgrup ve $T \subseteq S$ olsun

$$\forall a, b \in T \text{ için } a * b \in T$$

oluyor ise T ye S nin bir alt yarı grubu denir.

3.2.1.3 Tanım

S bir sayısal yarıgrup, $A \subset S$ ve T_i ler S nin alt yarı grupları olsun.

O zaman;

$$\bigcap_{A \subseteq T_i} T_i$$

kümesine A nin ürettiği S nin alt yarı grubu denir ve $\langle A \rangle$ ile gösterilir. Yani

$$\langle A \rangle = \bigcap_{A \subseteq T_i} T_i$$

yazılır. Eğer $S = \langle A \rangle$ oluyorsa A kümesine **S nin üreteçleri kümesi** adı verilir.

$$s_1 < s_2 < \dots < s_n \text{ olmak üzere } A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \subset S \text{ alınırsa}$$

$S = \langle A \rangle = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ yazılır. Bu durumda $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ olacak şekilde S nin $A = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ kümesinden daha küçük alt kümesi yoksa A kümesine S nin minimal üreteç sistemi denir.

3.2.1.4 Tanım

$\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi olmak üzere $S \subset \mathbb{N}$ verilsin. Eğer S , $\mathbb{N}$ deki toplama işlemine göre kapalı, birleşmeli ve $0 \in S$ oluyorsa S ye sayısal yarıgrup denir. S bir sayısal yarıgup olmak üzere; $s_1 < s_2 < \dots < s_n$ olacak şekilde $s_1, s_2, \dots, s_n \in S$ için

$$S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^n s_i k_i : k_i \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak yazılır.

Bu durumda

" $(s_1, \dots, s_n) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{N} \setminus S$ kümesi sonludur" önermesi doğrudur

(Barucci, V. ve ark 1997). Bununla birlikte,

$$s_1, s_2 \in S \text{ için } s_2 - s_1 \in S \Leftrightarrow s_1 \leq_s s_2$$

şeklinde verilen $\leq_s$ bağıntısı S sayısal yarıgrubunda bir sıralama bağıntısıdır.

3.2.1.1 Örnek

$$S = \langle 4, 5, 7 \rangle = \{4k_1 + 5k_2 + 7k_3 : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{N}\}$$

$$S = \{0, 4, 5, 7 \rightarrow \dots\}$$

şeklinde yazılır. Burada " $\rightarrow$ " ,7 den sonraki bütün tamsayıların S kümesinde olduğu anlamındadır.

3.2.1.2 Örnek

$$S = \langle 3, 8 \rangle = \{3k_1 + 8k_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{N}\} = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14 \rightarrow \dots\}$$

olup,

$$\mathbb{N} \setminus S = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 13\} \text{ sonludur} \Leftrightarrow (3, 8) = 1$$

şeklindedir.

3.2.1.3 Örnek

$$S = \langle 6, 8 \rangle = \{6k_1 + 8k_2 : k_1, k_2 \in \mathbb{N}\}$$

$$S = \{0, 6, 8, 12, 14, 16, 18, \dots\}$$

ve $(6, 8) \neq 1$ olduğundan $\mathbb{N} \setminus S$ sonlu değildir.

3.2.1.5 Tanım

S sayısal yarıgrubu $S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ şeklinde verilsin. O zaman s_1 ve s_n sayılarına sırasıyla *S nin katlılığı* ve *indirgenme boyutu* denir ve sırasıyla $\mu(S)$ ve $e(S)$ ile gösterilir. Buna göre 3.2.1.1 Örnekte verilen $S = \langle 4, 5, 7 \rangle$ sayısal yarıgrubunun katlılığı $\mu(S) = 4$ ve indirgenme boyutu $e(S) = 3$ tür.

3.2.2 Frobenius sayısı ve hesaplamalar

3.2.2.1 Tanım

S bir sayısal yarıgrup olmak üzere S ye ait olmayan en büyük tamsayıya *S nin Frobenius sayısı* denir ve $g(S)$ ile gösterilir. Yani

3. MATERYAL VE METOT

$$g(S) = \max\{x \in \mathbb{Z} : x \notin S\}$$

şeklindedir. **3.2.1.2 Örnekteki** $S = \langle 3, 8 \rangle = \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı, $g(S)=13$ olur.

3.2.2.1 Teorem

$S = \langle s_1, s_2 \rangle$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı ;

$$g(S) = s_1 s_2 - s_1 - s_2$$

şeklinde hesaplanır (Fröberg, R ve ark 1987).

3.2.2.2 Teorem

$2 < s_1 < s_2 < s_3$ için $2 < k < \left(\frac{s_1-1}{2}\right) + 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) ve $s_1 - k < s_3 / s_2 < s_1 - k + 1$,

$s_2 \equiv 1 \pmod{s_1}$ ve $s_3 \equiv s_1 - k + 1 \pmod{s_1}$ olacak şekilde $S = \langle s_1, s_2, s_3 \rangle$

sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı,

$$g(S) = (k-2) s_2 + s_3 - s_1$$

ile hesaplanır (Curtis, F 1990).

Örnek 3.2.2.1

$S = \langle 9, 10, 51 \rangle$ sayısal yarıgrubunu ele alalım

$S = \{0, 9, 10, 18, 19, 20, 27, 28, 29, 30, 36, 37, 38, 39, 40, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 63 \rightarrow \dots\}$

sayısal yarıgrubu için $g(S)=62$ dir. S nin üreteçleri arasında $2 < 9 < 10 < 51$ ilişkisi olduğu için **3.2.2.2 Teoremdeki** gibi bir k sayısı seçilir.

$$2 < k < \frac{(9-1)}{2} + 1 \quad \text{ve} \quad 2 < k < 5 \quad \text{olur.}$$

k=4 için

$$9-4 < 51/10 < 9-4+1 \quad \text{yani} \quad 5 < 51/10 < 6 \quad \text{olup}$$

$$10 \equiv 1 \pmod{9} \quad \text{ve} \quad 51 \equiv 6 \pmod{9} \quad \text{yazılır. Böylece,}$$

$$g(S) = (k-2) s_2 + s_3 - s_1 = (4-2) \cdot 10 + 51 - 9 = 62 \quad \text{bulunur.}$$

3.2.2.3 Teorem

$a > 2$ ve a çift tamsayı olmak üzere ,

$$S = \langle a, a+2, 2a+1 \rangle$$

şeklindeki sayısal yarıgrubun Frobenius sayısı ,

$$g(S) = \frac{a^2}{2} + a - 1$$

formülü ile elde edilir (İlhan,S 2006).

3.2.2.2 Örnek

$$S = \langle 8, 10, 17 \rangle = \{0, 8, 10, 16, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, \dots\}$$

sayısal yarıgrubu için,

$$g(S) = \frac{64}{2} + 8 - 1 = 39$$

olarak bulunur.

3.2.2.2 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $g(S)$ olsun. O zaman

$$n(S) = \#(\{0, 1, 2, \dots, g(S)\} \cap S)$$

sayısına *S* nin belirteç sayısı adı verilir.

3.2.2.1 Not

$g(S)$ ve $n(S)$ sırasıyla, S sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı ve belirteç sayısı olmak üzere,

$$S = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, \dots, s_{n(S)} = g(S) + 1, \rightarrow \dots\}$$

şeklinde yazılabilir.

Burada $s_i < s_{i+1}$ olup “ $\rightarrow$ ” $g(S) + 1$ sayısından büyük olan her tamsayının S ye ait olduğunu gösterir.

3.2.3 Simetrik ve pseudo simetrik sayısal yarıgruplar

3.2.3.1 Tanım

S sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $g(S)$ olsun. Eğer

$$\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S \text{ için } g(S) - x \in S$$

oluyorsa S ye *simetrik sayısal yarıgrup* adı verilir. Öte yandan iki eleman ile üretilen her $S = \langle s_1, s_2 \rangle$ sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu bilinmektedir (Curtis,F 1990).

3.2.3.1 Örnek

$$S = \langle 6, 8, 13 \rangle = \{0, 6, 8, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, \rightarrow \dots\}$$

sayısal yarıgrubu için,

3. MATERYAL VE METOT

$$g(S) = \frac{36}{2} + 6 - 1 = 23$$

olup, $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $23 - x \in S$ olur. Yani, S simetrik sayısal yarıgruptur. Ancak

$$S = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow \dots\}$$

sayısal yarıgrubunda $g(S) = 14$ olup $x = 7$ için $14 - 7 = 7 \notin S$ çıkar. Yani S simetrik olmaz.

3.2.3.2 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun.

$g(S)$ çift tam sayı ve $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere, eğer

$$g(S) - x \notin S \text{ ve } x = g(S) / 2$$

oluyorsa S sayısal yarıgrubu *pseudo-simetrik* denir.

3.2.3.2 Örnek

$S = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı $g(S) = 14$ tür. Bununla birlikte $x = 7 \in \mathbb{Z} \setminus S$ alırsak ,

$$14 - 7 = 7 \notin S \text{ ve } x = 14/2 = 7$$

olduğundan S pseudo-simetrik bir sayısal yarıgruptur.

3.2.3.3 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $g(S)$ olsun. Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ için $g(S) - x \notin S$ ise x elemanına *S nin kutup noktası* denir. S nin bütün kutup noktalarının kümesi

$$K(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : g(S) - x \notin S\}$$

ile gösterilir.

3.2.3.1 Teorem

Bir S sayısal yarıgrubunun simetrik olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul

$K(S) = \emptyset$ olmasıdır (Madero, M 2005).

3.2.3.3 Örnek

$S = \langle 7, 8, 33 \rangle$ alırsak

$$S = \{0, 7, 8, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 35 \rightarrow \dots\}$$

sayısal yarıgrubunda $g(S) = 34$ ve

$$K(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : (34 - x) \notin S\} = \{25, 17, 9\} \neq \emptyset$$

olduğundan S sayısal yarıgrubu simetrik değildir. Ancak $S = \langle 6, 8, 13 \rangle$ alırsak

$$S = \{0, 6, 8, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24, \rightarrow \dots\}$$

sayısal yarıgrubunda $g(S) = 23$ ve S nin kutup noktalarının kümesi,

$$K(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : (23 - x) \notin S\} = \emptyset$$

olup S simetrik.

3.2.3.4 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S \setminus \{0\}$ olsun.

$$Ap(S, n) = \{s \in S : s - n \notin S\}$$

kümesine S nin n ye göre Apery kümesi denir. Yani S nin n ye göre Apery kümesinin elemanları $(\text{mod } n)$ e göre kalan sınıfların her birindeki en küçük pozitif tam sayılardan oluşmaktadır. Böylece,

$$\#(Ap(S, n)) = n \text{ olup } g(S) = \max(Ap(S, n)) - n$$

bağıntısı mevcuttur (Rosales, J.C 2000).

3.2.3.1 Not

$S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. Bu durumda ,

$$Ap(S, s_1) = \{s \in S : s - s_1 \notin S\}$$

kümesi, S nin $(\text{mod } s_1)$ e göre tam olarak bir elemanını kapsar. Özel olarak $Ap(S, s_1)$ kümesi, $i = 1, 2, \dots, s_1 - 1$ için $(\text{mod } s_1)$ ye göre i ye denk olan elemanlardan oluşur. Yani $Ap(S, s_1)$ kümesinin elemanlarını $w(i)$ ile gösterirsek

$$w(i) \equiv i \pmod{s_1}$$

yazarız (Rosales, J.C 2000).

3.2.3.5 Tanım

S sayısal yarıgrup ve d pozitif bir tamsayı olsun. O zaman

$$\frac{S}{d} = \{x \in N : dx \in S\}$$

kümesi de aynı zamanda bir sayısal yarıgruptur ve bu küme **S nin d ile bölüm kümesi**

olarak adlandırılır. Üstelik $S \subseteq \frac{S}{d}$ olup, $d = 1$ için $\frac{S}{d} = S$ yazılır.

3.2.3.4 Örnek

$S = \langle 2,5 \rangle = \{0,2,4,5,6 \rightarrow \dots\}$ olsun. O zaman $d=3$ için $\frac{S}{d}$ kümesi

$$\frac{S}{3} = \{x \in \mathbb{N} : 3x \in S\} = \{0,2,3,4,5,6,7,8, \rightarrow \dots\}$$

olarak bulunur.

3.2.3.6 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Eğer $c - 1 \notin S$ ve $c + \mathbb{N} \subseteq S$ olacak şekilde bir tek $c \in S$ varsa c elemanına ***S* sayısal yarı grubunun kondüktörü(ilefıcisi)** denir. Bir başka deyişle $c = g(S)+1$ eşitliğini sağlayan c sayısına kısaca ***S* nin kondüktörü** adı verilir.

3.2.3.5 Örnek

$S = \langle 6,8,13 \rangle = \{0,6,8,12,13,14,16,18,19,20,21,22,24 \rightarrow \dots\}$ ve $g(S)=23$ şeklindedir. Bununla birlikte $c - 1 \notin S$ ve $c + \mathbb{N} \subseteq S$ olacak şekilde bir tek $c \in S$ vardır ve bu değer $c = 24$ olarak bulunur. Çünkü, $c - 1 = 24 - 1 = 23 \notin S$ ve

$$c + \mathbb{N} = 24 + \mathbb{N} = \{c + x : x \in \mathbb{N}\} = \{24 + x : x \in \mathbb{N}\} \subseteq S$$

olur.

3.2.3.6 Örnek

$S = \langle 4,7,9 \rangle = \{0,4,7,8,9,11 \rightarrow \dots\}$ ve $g(S)=10$ şeklindedir. Bununla birlikte $c-1 \notin S$ ve $c+\mathbb{N} \subseteq S$ olacak şekilde bir tek $c \in S$ vardır ve bu değer $c=11$ olarak bulunur.

Çünkü ; $c-1=11-1=10 \notin S$ ve

$$c + \mathbb{N} = 11 + \mathbb{N} = \{c + x : x \in \mathbb{N}\} = \{11 + x : x \in \mathbb{N}\} \subseteq S$$

olur.

3.2.3.7 Tanım

Bir sayısal yarı grubu, onu kapsayan iki sayısal yarı grubun arakesiti olarak ifade edilemiyorsa bu durumda ***S* ye indirgenemez sayısal yarı grup** denir.

3.2.3.2 Not

S bir sayısal yarı grup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun.

O zaman “ S simetriktir $\Leftrightarrow S$ indirgenemez ve $g(S)$ tek sayıdır ” önermesi doğrudur (Rosales,J.C 2008).

3.2.3.7 Örnek

$S = \langle 7, 8, 25 \rangle$ sayısal yarıgrubu indirgenemez ve $g(S) = 34$ tür. Üstelik, S pseudo – simetriktir. Bununla birlikte, $S = \langle 6, 11, 15, 20, 25 \rangle = \langle 5, 6 \rangle \cap \langle 3, 11 \rangle$ olduğundan indirgenemez değildir. Öte yandan, S simetrik değildir.

Ancak, $S_1 = \langle 5, 6 \rangle$ ve $S_2 = \langle 3, 11 \rangle$ sayısal yarıgrupları simetrik ve $S_1, S_2 \supseteq S$ şeklindedir.

3.2.3.7 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ onun Frobenius sayısı olsun. Bu durumda

$$N(S) = \{s \in S : s < g(S)\}$$

kümesine S nin minimal temsilcisi denir. **3.2.3.6 Örnekte** verilen $S = \langle 4, 7, 9 \rangle$ sayısal yarıgrubu için $N(S) = \{0, 4, 7, 8, 9\}$ şeklindedir.

3.2.3.8 Tanım

S bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus S$ olmak üzere,

$$\forall s \in S \setminus \{0\} \text{ için } x + s \in S$$

oluyorsa x tam sayısına **S nin Pseudo-Frobenius sayısı** denir ve S nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $Pg(S)$ ile gösterilir. Yani

$$Pg(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : x + s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\}$$

olarak ifade edilir.

3.2.3.7 Örnek

$$S = \langle 6, 8, 13 \rangle = \{0, 6, 8, 12, 13, 14, 16, 18, 19, 20, 21, 22, 24 \rightarrow \dots\} \text{ ve } g(S) = 23 \text{ olur.}$$

O zaman, S nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi ;

$$Pg(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : x + s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\} = \{23\}$$

olarak bulunur.

3.2.3.1 Önerme

S bir sayısal yarıgrup, $g(S)$ onun Frobenius sayısı ve S nin pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $Pg(S)$ olsun. O zaman aşağıdakiler mevcuttur.

$$(1) \ g(S) = \max(Pg(S))$$

$$(2) \text{ Eğer } x, y \in Pg(S) \text{ ve } x - y \in S \text{ ise } x = y$$

şeklindedir (Rosales, J.C 2008).

3. MATERYAL VE METOT

3.2.3.2 Önerme

S bir sayısal yarıgrup olsun. Öte yandan, $g(S)$ ve $Pg(S)$ sırasıyla S nin Frobenius sayısı ve Pseudo Frobenius sayılarının kümesi verilsin. Buna göre S sayısal yarıgrupunun simetrik olabilmesi için gerek ve koşul

$$Pg(S) = \{g(S)\}$$

olmasıdır (Rosales,J.C 2008).

3.2.3.8 Örnek

$S = \langle 8, 10, 17 \rangle$ alalım

$$S = \{0, 8, 10, 16, 17, 18, 20, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 40, \rightarrow \dots\}$$

sayısal yarıgrubu simetriktir. Çünkü $g(S) = 39$ olup

$$Pg(S) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus S : x + s \in S, \forall s \in S \setminus \{0\}\} = \{39\}$$

şeklindedir.

4. ARAşTIRMA BULGULARI

4.1 Sayısal yarırublarda boşluklar

Bu bölümde, bir sayısal yarırubun boşlukları kümesi ile ilgili bazı sonuçlar verilmektedir. Bununla birlikte bir sayısal yarırubun boşlukları sayısı, yani cinsi ile simetriklik, pseudo simetriklik ve Frobenius sayısı arasındaki bazı bağıntılar yer almaktadır.

4.1.1 Tanım

$\mathbb{N}$ negatif olmayan tam sayılar kümesi ve S bir sayısal yarırub olsun. Bu durumda $\mathbb{N} \setminus S$ kümesinin elemanlarına ***S nin (gaps) boşlukları*** denir. S nin bütün boşluklarının kümesi $H(S)$ ile gösterilir.

Yani ; $H(S) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin S\}$ yazılır. Ayrıca $\#(H(S))$ sayısına da S nin cinsi (genus) adı verilir ve $G(S) = \#(H(S))$ ile gösterilir.

4.1.1 Teorem

$S = \langle s_1, s_2 \rangle$ şeklinde tanımlanan bir sayısal yarırub için

$$G(S) = \frac{(s_1 - 1)(s_2 - 1)}{2}$$

ile hesaplanır (Rosales,J.C 2005).

4.1.1 Örnek

$$S = \langle 5, 8 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 24, 25, 26, 28 \rightarrow \dots\}$$

sayısal yarırubunda $g(S) = 27$ olup

$$G(S) = \#(H(S)) = 4.7 / 2 = 14$$

olarak hesaplanır. Gerçekten de $H(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 17, 19, 22, 27\}$

şeklindedir.

S sayısal yarırubunun Apery kümesi ile boşluklarının kümesi arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teoremle verebiliriz.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.2 Teorem

$S = \langle s_1, s_2 \rangle$ şeklindeki bir sayısal yarıgrubu için,

$$G(S) = \frac{[\#(Ap(S, s_1)) - 1][\#(Ap(S, s_2)) - 1]}{2} \quad \text{ve}$$

$$H(S) \cap Ap(S, s_1) = \emptyset, \quad H(S) \cap Ap(S, s_2) = \emptyset$$

bağıntısı mevcuttur (İlhan, S 2006).

4.1.2 Örnek

$$S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8 \rightarrow \dots\} \quad \text{olup} \quad g(S) = 3 \cdot 5 - 3 - 5 = 7$$

şeklindedir. Bununla birlikte,

$$Ap(S, 3) = \{s \in S : s - 3 \notin S\} = \{0, 5, 10\}$$

$$Ap(S, 5) = \{s \in S : s - 5 \notin S\} = \{0, 3, 6, 9, 12\}$$

$$\text{ve} \quad H(S) = \{1, 2, 4, 7\} \quad \text{olup,} \quad G(S) = \frac{(3-1)(5-1)}{2} = 4 \quad \text{eşitliği sağlanır.}$$

4.1.1 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup $n \in S \setminus \{0\}$ ve $Ap(S, n) = \{0, w(1), \dots, w(n-1)\}$ olsun.

O zaman

$$G(S) = \frac{1}{n} (w(1) + \dots + w(n-1)) - \frac{n-1}{2}$$

olur (Rosales, J.C 2005).

4.1.3 Örnek

$S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunun cinsinin 4 olduğunu göstermek zor değildir. Yani $H(S) = \{1, 2, 4, 7\}$ olur.

4.1.2 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman aşağıdaki önermeler doğrudur

$$(1) \quad S \text{ simetrik ise} \Leftrightarrow G(S) = \#(N(S))$$

$$(2) \quad S \text{ Pseudo-simetrik ise} \Leftrightarrow G(S) = \#(N(S)) + 1$$

şeklindedir (Rosales, J.C 2008).

4.1.4 rnek

$S = \langle 4,6,7 \rangle = \{0,4,6,7,8,10, \rightarrow \dots\}$ S sayısal yarıgrubunda açıktır ki

$$g(S) = 9, H(S) = \{1,2,3,5,9\} \text{ ve } N(S) = \{0,4,6,7,8\}$$

olup S simetriktir çünkü $G(S)=5=\#(N(S))$ olur (Rosales,J.C 2008).

4.1.3 Yardımcı nerme

Bir S sayısal yarıgrubunun cinsi $G(S)$ ve kondüktörü c olsun. Eğer $c = 2G(S)$ ise S simetriktir (Maria Bras-Amoros 2004).

4.1.4 Örnekteki S sayısal yarıgrubunun kondüktörü $c = 10 = 2.G(S)$ olup S simetriktir.

4.1.4 Yardımcı nerme

Bir S sayısal yarıgrubunun cinsi $G(S)$ ve kondüktörü c olsun, o zaman $c = 2G(S) - 1$ ise S pseudo-simetriktir.(Maria Bras-Amoros-2008)

3.2.3.2 Örnekteki $S=\langle 5,6,13 \rangle=\{0,5,6,10,11,12,13,15, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubun cinsi $G(S)=8$ ve kondüktörü $c=15$ olup $c = 2G(S) - 1$ eşitliği sağlanır. Yani S pseudo simetriktir.

4.1.1 Önerme

Kondktr c olan bir S sayısal yarıgrubunun simetrik olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $i \geq 0, i \in \mathbb{Z}$ olsun. Eğer i bir boşluksa o zaman $c - 1 - i$ bir boşluk değildir (Maria Bras-Amoros 2004).

4.1.2 Önerme

Kondktr c tek sayısı olan bir S sayısal yarıgrubunun Pseudo- simetrik bir sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul $(c - 1)/2$ den farklı herhangi bir i tamsayısı için i bir boşluksa o zaman $c - 1 - i$ sayısının bir boşluk olmamasıdır (Maria Bras-Amoros 2004).

4.1.1 Not

S bir sayısal yarıgrup ve cinsi $G(S)$ olsun. Bu durumda, cinsi $G(S)$ olan sayısal yarıgrupların sayısı $n_{G(S)}$ olmak üzere $n_0 = 1$ ve $n_1 = 1$ verilsin. Bununla birlikte, Matematikte bir çok problemin çözümünde kullanılabilen özel bir sayı dizisi

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

olan Katalan sayısını kullanarak $n_{G(S)}$ hakkında fikir sahibi olabiliriz. Katalan sayısının genel formülü

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \quad ; \quad n \geq 0 \text{ için}$$

olarak yazılır . $n_{G(S)}$ sayıları için

$$C_{G(S)} = \frac{1}{G(S)+1} \binom{2G(S)}{G(S)}$$

katalan sayısı hesaplanır.

Burada $n_{G(S)} \leq C_{G(S)}$ olduğu bilinmektedir.(Maria Bras-Amoros-2008)

Cinsi $G(S)$ olan sayısal yarıgrupların hesaplanmasında Katalan sayısı gibi yine özel bir sayı dizisi olan Fibonacci sayı dizisi kullanılarakta geniş bir aralık elde edilmiştir.n.inci Fibonacci sayısı $F(n)$ şu şekilde ifade edilir

$$F_n = F(n) = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ 1 & n = 1 \\ F(n-1) + F(n-2) & n > 1 \end{cases}$$

4.1.3 Teorem

Cinsi $G(S)$ olan S sayısal yarıgruplarının sayısı $n_{G(S)}$ olsun. O zaman $F_{G(S)}, G(S)$ nin fibonacci sayısı olmak üzere , aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur

(Maria Bras-Amoros-2008).

(1) $\forall G(S) \geq 2$ için $2 F_{G(S)} \leq n_{G(S)}$ şeklindedir.

(2) $\forall G(S) \geq 3$ için $2 F_{G(S)} \leq n_{G(S)} \leq 1 + 3 \cdot 2^{G(S)-3}$ olur.

4.1.3 Önerme

S , Katlılığı 3 olan bir sayısal yarıgrup ve $g(S)$ ile $G(S)$ sırasıyla S nin Frobenius sayısı ile cinsi olsun . O zaman;

$$Ap(S, 3) = \{ 0 < 3G(S) - g(S) < g(S) + 3 \} \text{ dir (Rosales,J.C 2005).}$$

4.1.5 Yardımcı Önerme

S , Katlılığı 3 olan bir sayısal yarıgrup $g(S)$ ve $G(S)$ de sırasıyla S 'nin Frobenius sayısı ve cinsi olsun. O zaman

$$(g(S)+1)/2 \leq G(S) < (2g(S)+3)/3$$

eşitsizliği mevcuttur (Rosales,J.C 2005).

4.1.5 Örnek

$S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubu verilsin. Burada $g(S)=7$ ve $H(S) = \{1, 2, 4, 7\}$ olup $G(S)=4$ tür. Bu durumda,

$$Ap(S, 3) = \{0, 5, 10\} = \{0 < 3 \cdot 4 - 7 < 7 + 3\} \text{ olur.}$$

Bununla beraber $(7+1)/2 \leq 4 < (2 \cdot 7 + 3)/3$ eşitsizliği de sağlanır.

4.1.4 Teorem

$F \in \mathbb{Z}^+$ için $F \geq 4$ ve $3 \nmid F$ olsun. Ayrıca $G \in \mathbb{Z}^+$ sayısı

$$(F+1)/2 \leq G < (2F+3)/3$$

eşitsizliğini sağlasın, O zaman $S = \langle 3, 3G - F, F + 3 \rangle$ sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısı F , cinsi de G olur (Rosales,J.C 2005).

4.1.6 Örnek

$F=5$ ve $G=4$ alırsak $(5+1)/2 \leq 4 < (2 \cdot 5 + 3)/3$ olup,

$S = \langle 3, 3 \cdot 4 - 5, 5 + 3 \rangle = \langle 3, 7, 8 \rangle = \{0, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubu elde ederizki $g(S)=5$ ve $H(S)=\{1, 2, 4, 5\}$ olup $G(S)=4$ olur.

4.1.1 Sonuç

Katlılığı 3 olan iki sayısal yarıgrubun birbirine eşit olması için gerek ve yeter koşul bunların Frobenius sayılarının ve cinslerinin aynı olmasıdır (Rosales,J.C 2005).

4.1.2 Sonuç

$F \in \mathbb{Z}^+$ için $F \geq 4$ ve $3 \nmid F$ olsun. O zaman, katlılığı 3 ve Frobenius sayısı F olan

$$\left\lfloor \frac{2F+3}{3} \right\rfloor - \left\lceil \frac{F+1}{2} \right\rceil + 1 \text{ tane sayısal yarıgrup vardır.}$$

(Rosales,J.C 2005).

Burada ; $x \in \mathbf{R}$ olmak üzere,

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

$\lfloor x \rfloor = x'$ ten küçük veya eşit olan en büyük tamsayı

ve

$\lceil x \rceil = x'$ ten büyük veya eşit olan en küçük tamsayı

şeklinde tanımlanmaktadır.

4.1.7 Örnek

Katlılığı 3 ve Frobrnius sayısı 7 olan bütün S sayısal yarıgruplarını oluşturalım.

Bunların sayısı $\lfloor \frac{17}{3} \rfloor - \lfloor \frac{8}{2} \rfloor + 1 = 5 - 4 + 1 = 2$ dir. Aynı zamanda belirtelim ki **Yardımcı önerme 4.1.5** den $G \in \{4, 5\}$ ve **Teorem 4.1.4** yardımıyla bu yarıgruplar

$$S_1 = \langle 3, 3 \cdot 4 - 7, 7 + 3 \rangle = \langle 3, 5 \rangle$$

ve

$$S_2 = \langle 3, 3 \cdot 5 - 7, 7 + 3 \rangle = \langle 3, 8, 10 \rangle$$

şeklindedir.

4.1.3 Sonuç

$G \in \mathbb{Z}$ ve $G \geq 3$ olsun. O zaman cinsi G ve katlılığı 3 olan $G - \lfloor \frac{2G-1}{3} \rfloor$ tane sayısal yarıgrup vardır (Rosales,J.C 2005).

4.1.8 Örnek

Katlılığı 3 ve cinsi 11 olan bir S sayısal yarıgruplarının sayısı

$$11 - \lfloor \frac{22-1}{3} \rfloor = 4 \text{ tanedir.}$$

Bu yarıgruplar frobeniusu 3 ün katı olmayan tamsayılara sahip ve aşağıdaki gibidirler.

$$S_1 = \langle 3, 17, 19 \rangle \text{ ise } g(S_1)=16$$

$$S_2 = \langle 3, 16, 20 \rangle \text{ ise } g(S_2)=17$$

$$S_3 = \langle 3, 14, 22 \rangle \text{ ise } g(S_3)=19$$

$$S_4 = \langle 3, 13, 23 \rangle \text{ ise } g(S_4)=20$$

bunların cinsi 11 ve katlılığı 3 tür.

4.1.2 Tanım

$S = \langle s_1, s_2, \dots, s_n \rangle$ sayısal yarıgrubunda s_2 elemanına **S nin oranı** denir ve $R(S)$ ile gösterilir.

4.1.4 Önerme

S sayısal yarıgrubunda $\mu(S) = 4$ olsun. S nin Frobenius sayısı $g(S)$, cinsi $G(S)$ ve oranı da $R(S)$ olmak üzere

$$Ap(S, 4) = \{0 < R < 4G(S) - g(S) - R + 2 < g(S) + 4\}$$

şeklindedir (Rosales, J.C 2005).

4.1.4 Sonuç

Katlılığı 4 olan iki sayısal yarıgrubun birbirine eşit olması için gerek ve yeter şart Frobenius sayıları cinsleri ve oranlarının aynı olmasıdır (Rosales, J.C 2005).

4.1.6 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $\mu(S) = 4$ olsun. S nin Frobenius sayısı $g(S)$ ve cinsi $G(S)$ olmak üzere

$$\lceil (g(S) + 1)/2 \rceil \leq G(S) \leq g(S) - \lfloor (g(S))/4 \rfloor$$

şeklindedir (Rosales, J.C 2005).

4.1.9 Örnek

$S = \langle 4, 10, 11 \rangle = \{0, 4, 8, 10, 11, 12, 14, 15, 16, 18 \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunda $g(S)=17$ olup $H(S) = \{1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 13, 17\}$ şeklindedir. O halde $G(S)=9$ olur. Böylece

$$\lceil (17 + 1)/2 \rceil \leq 9 \leq 17 - \lfloor 17/4 \rfloor$$

eşitsizliği sağlanır.

4. ARAŞTIRMA BULGULARI

4.1.7 Yardımcı Önerme

$F \geq 6$ ve F çift bir tamsayı olsun. Eğer F , 4'ün katı değilse

$S = \langle 4, \frac{F}{2} + 4, F + 4 \rangle$ sayısal yarıgrubunun katlılığı 4, Frobeniusu F ve cinsi $\frac{F+2}{2}$ olur (Rosales,J.C 2005).

4.1.8 Yardımcı Önerme

$F \geq 7$ ve F tek tamsayı olsun.

O zaman $S = \langle 4, 6, F-2 \rangle$ katlılığı 4, Frobeniusu F ve cinsi $\frac{F+1}{2}$ olan bir sayısal yarıgruptur (Rosales,J.C 2005).

4.1.10 Örnek

$F=11$ alalım. O zaman

$$S = \langle 4, 6, 11-2 \rangle = \langle 4, 6, 9 \rangle = \{0, 4, 6, 8, 9, 10, 12 \rightarrow \dots\} \text{ olur.}$$

Bu durumda, $g(S)=11=F$ olup $H(S) = \{1, 2, 3, 5, 7, 11\}$ bulunur. Böylece

$$G(S) = 6 = \frac{F+1}{2} \text{ olur.}$$

4.1.5 Önerme

F tamsayısı, $F \geq 6$ ve $4 \nmid F$ şeklinde olsun. O zaman;

$\lceil \frac{F+1}{2} \rceil \leq G \leq F - \lfloor \frac{F}{4} \rfloor$ olacak şekilde, her G tamsayısı için, katlılığı 4, Frobeniusu F ve cinsi G olan bir sayısal yarıgrup vardır (Rosales,J.C 2005).

4.1.6 Önerme

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve $\min \{ n_1, n_2 \} \geq 3$ olmak üzere

(1) Eğer n_2 çift tam sayı ise o zaman

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \notin \langle n_1, n_2 \rangle \text{ ve } 2x \in \langle n_1, n_2 \rangle \} =$$

$$\{ \frac{n_2}{2} + an_1 + bn_2 \mid 0 \leq a \leq \frac{n_2}{2} - 1 \quad \text{ve} \quad 0 \leq b \leq \frac{n_1-1}{2} - 1 \quad \}$$

olur. Üstelik

$$g \left(\frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{2} \right) = \frac{n_1 n_2 - 2 n_1 - n_2}{2}$$

$$\text{ve} \quad G \left(\frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{2} \right) = \frac{(n_1 - 1)(n_2 - 2)}{4} \quad \text{şeklindedir.}$$

(2) Eğer n_1 ve n_2 tek tam sayı ise o zaman

$$\{ x \in \mathbb{N} \mid x \notin \langle n_1, n_2 \rangle \text{ ve } 2x \in \langle n_1, n_2 \rangle \} =$$

$$\{ \frac{n_1+n_2}{2} + an_1 + bn_2 \mid 0 \leq a \leq \frac{n_2-1}{2} - 1 \quad \text{ve} \quad 0 \leq b \leq \frac{n_1-1}{2} - 1 \quad \}$$

olur. Üstelik

$$g \left(\frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{2} \right) = \frac{n_1 n_2 - n_1 - n_2 - \min(n_1, n_2)}{2}$$

ve

$$G \left(\frac{\langle n_1, n_2 \rangle}{2} \right) = (n_1 - 1)(n_2 - 1) / 4$$

bulunur (Rosales, J.C 2005).

4.ARAŖTIRMA BULGULARI

5. TARTIşMA VE SONUÇ

5.1 Bir sayısal yarıgrupta temel boşluklar

Bu bölümde, bir sayısal yarıgrubun boşlukları kümesi kullanılarak elde edilen temel boşluklar kümesi ile ilgili bazı sonuçlar yer almaktadır. Bununla birlikte temel boşlukların sayısı, Frobenius sayısı ve Cinsi kullanılarak indirgenmezlik kavramları arasındaki bağıntılar verilmektedir.

5.1.1 Tanım

S bir sayısal yarıgrup ve $H(S)$ onun boşlukları kümesi olsun. O zaman $x \in H(S)$ için $2x, 3x \in S$ ise x elamanına ***S* nin temel boşluğu** denir ve S nin bütün temel boşluklarının kümesi $FH(S)$ ile gösterilir.

Yani ,

$$FH(S) = \{x \in H(S) : \{2x, 3x\} \subset S\}$$

olarak yazılır.

5.1.1 Örnek

$S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubu için $H(S) = \{1, 2, 4, 7\}$, $g(S)=7$ ve $FH(S) = \{4, 7\}$ olur.

5.1.1 Teorem

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$ olsun

(1) Eğer n_2 çift tam sayı ise o zaman

$$FH(\langle n_1, n_2 \rangle) = \left\{ \frac{n_2}{2} + an_1 + bn_2 \mid \left(-\frac{n_2}{6} \leq a \leq \frac{n_2}{2} - 1 \text{ ve } 0 \leq b \leq \frac{n_1-1}{2} - 1 \right) \right\}$$

ya da;

$$\left(0 \leq a \leq \frac{n_2}{2} - 1 \text{ ve } \frac{n_1-3}{6} \leq b \leq \frac{n_1-1}{2} - 1 \right) \}$$

olur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

(2) Eğer n_1 ve n_2 tek tam sayı ise o zaman

$$FH(\langle n_1, n_2 \rangle) = \left\{ \frac{n_1+n_2}{2} + an_1 + bn_2 \mid \left(\frac{n_2-3}{6} \leq a \leq \frac{n_2-1}{2} - 1 \text{ ve } 0 \leq b \leq \frac{n_1-1}{2} - 1 \right) \right\}$$

ya da

$$\left(0 \leq a \leq \frac{n_2-1}{2} - 1 \text{ ve } \frac{n_1-3}{6} \leq b \leq \frac{n_1-1}{2} - 1 \right) \}$$

şeklindedir (Rosales, J.C 2005).

5.1.1 Sonuç

$n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ve $\min\{n_1, n_2\} \geq 3$ olsun.

(1) Eğer n_2 çift tam sayı ise o zaman

$$\# FH(\langle n_1, n_2 \rangle) = \frac{n_2(n_1-1)}{4} - \left\lceil \frac{n_2}{6} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{n_1-3}{6} \right\rceil \text{ olur.}$$

(2) Eğer n_1 ve n_2 tek tam sayı ise

$$\# FH(\langle n_1, n_2 \rangle) = \frac{(n_1-1)(n_2-1)}{4} - \left\lceil \frac{n_2-3}{6} \right\rceil \cdot \left\lceil \frac{n_1-3}{6} \right\rceil$$

şeklindedir (Rosales, J.C 2005).

5.1.2 Örnek

$S = \langle 3, 10 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 18, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım. Bu durumda

$$H(S) = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 14, 17\} \quad \text{olup} \quad FH(S) = \{5, 8, 11, 14, 17\}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\#(FH(S)) = \frac{10 \times 2}{4} - 2 \cdot 0 = 5$$

olduğunu **Sonuç 5.1.1** den kolaylıkla hesaplayabiliriz (Rosales, J.C 2005).

5.1.1 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve bir p pozitif bir tamsayı olsun. O zaman $\frac{S}{p}$ sayısal yarıgrupun temel boşlukları kümesi

$$FH\left(\frac{S}{p}\right) = \left\{ \frac{h}{p} \mid h \in FH(S) \text{ ve } h, p \text{ nin katı} \right\}$$

şeklindedir (Rosales, J.C 2005).

5.1.3 Örnek

$S = \langle 5, 11 \rangle$ ve $p=3$ olmak üzere,

$S_1 = \frac{\langle 5, 11 \rangle}{3}$ sayısal yarıgrupunun temel boşluklarının kümesini bulalım.

$$S = \{0, 5, 10, 11, 15, 16, 20, 21, 22, 25, 26, 27, 30, 31, 32, 33, 35, 36, 37, 38, 40 \rightarrow \dots\}$$

$$H(S) = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 13, 14, 17, 18, 19, 23, 24, 28, 29, 34, 39\}$$

$$\text{ve } FH(S) = FH(\langle 5, 11 \rangle) = \{18, 19, 23, 24, 28, 29, 34, 39\}$$

elde ederiz. Böylece **Yardımcı Önerme 5.1.1** yardımıyla $FH(S_1) = \{6, 8, 13\}$ yazılır.

Gerçekten de $S_1 = \frac{S}{3} = \{x \in \mathbb{N} : 3x \in S\} = \{0, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14, \rightarrow \dots\}$ olur ve

$H(S_1) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 13\}$ bulunur. Böylece

$$FH(S_1) = \{a \in H(S_1) : 2a, 3a \in S\} = \{6, 8, 13\}$$

çıkar.

5.1.1 Not

(a) Eğer $\min \{n_1, n_2\} = 1$ ise o zaman

$$S = \langle n_1, n_2 \rangle = \mathbb{N} \text{ ve } FH(S) = \emptyset$$

olur.

(b) Eğer $\min \{n_1, n_2\} = n_2 = 2$ ise o zaman

$$S = \langle n_1, n_2 \rangle = \{0, 2, 4, \dots, 2 \cdot \left(\frac{n_1-1}{2}\right), n_1, \rightarrow\}$$

ve

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

$$FH(S) = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ tek sayı ve } \frac{n_1}{3} \leq x \leq n_1 - 2\}$$

şeklinde olur (Rosales,J.C 2005).

5.1.2 Yardımcı Önerme

a pozitif bir tamsayı olmak üzere , $S = \langle a + 1, a + 2, \rightarrow \rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman

$$g(S) = a \text{ ve } \#(FH(S)) = \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil$$

şeklindedir (Rosales,J.C ve ark. 2004).

5.1.4 Örnek

$S = \langle 4, 5, \rightarrow \dots \rangle = \{0, 4, 5, 6, 7, \rightarrow \dots\}$ olup $H(S) = \{1, 2, 3\}$ ve $g(S) = 3 = a$,

$$\#(FH(S)) = \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$$

çıkar. Gerçekten de $FH(S) = \{2, 3\}$ şeklindedir.

5.1.3 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $\mu(S) = m$ olsun. O halde $S \setminus \{m\}$ bir sayısal yarıgrup ve $FH(S \setminus \{m\}) \subseteq FH(S) \cup \{m\}$ olur. Ayrıca $m \in FH(S \setminus \{m\})$ olur (Rosales,J.C ve ark. 2004).

5.1.5 Örnek

$S = \langle 3, 5 \rangle = \{0, 3, 5, 6, 8 \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunda

$$m = \mu(S) = 3,$$

$$H(S) = \{1, 2, 4, 7\} \text{ ve } FH(S) = \{4, 7\}$$

olup $S \setminus \{3\} = \{0, 5, 6, 8, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgruptur ve $FH(S \setminus \{3\}) = \{3, 4, 7\}$ bulunur.

Diğer taraftan $H(S \setminus \{3\}) = \{1, 2, 3, 4, 7\}$ ve $FH(S) = \{4, 7\}$ olup

$$FH(S \setminus \{3\}) \subseteq FH(S) \cup \{3\}$$

yazarız.

5.1.4 Yardımcı Önerme

S bir sayısal yarıgrup $m = \mu(S)$ olsun. O zaman

$$FH(S) \subseteq FH(S \setminus \{m\}) \cup \{m/2\}$$

olur. Üstelik,

$$m/2 \in FH(S) \Leftrightarrow 3m/2 \in S$$

şeklindedir (Rosales, J.C ve ark. 2004).

5.1.2 Sonuç

S bir sayısal yarıgrup ve $m = \mu(S)$ onun katlılığı olsun. O zaman

$$\#(FH(S)) = \begin{cases} \#(FH(S \setminus \{m\})) & ; \frac{3m}{2} \in S \text{ ise} \\ \#(FH(S \setminus \{m\})) - 1 & ; \frac{3m}{2} \notin S \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

5.1.2 Not

Verilen S sayısal yarıgrubu için S_i kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır .

- (1) $S_0 = S$,
- (2) $S_{n+1} = S_n \setminus \{m(S_n)\}$ dir.

Burada $S_k = \langle g(S) + 1, \rightarrow \rangle$ olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ doğal sayısı vardır. Böylece

$$\langle g(S) + 1, \rightarrow \rangle = S_k \subseteq \dots \subseteq S_1 \subseteq S_0 = S$$

yazabiliriz.

Sonuç olarak

$$\#(FH(S)) = \#(FH(S_0)) \leq \dots \leq \#(FH(S_i)) = \left\lfloor \frac{g(S)}{2} \right\rfloor$$

ifadesini elde ederiz (Rosales, J.C ve ark. 2004).

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

5.1.2 Teorem

S bir sayısal yarıgrup olsun. O halde $\#(FH(S)) \leq \lceil \frac{g(S)}{2} \rceil$ olur. Ayrıca aşağıdaki koşullar birbirine denktirler. (Rosales, J.C 2004)

$$1) \#(FH(S)) = \lceil \frac{g(S)}{2} \rceil$$

2) $x < g(S)$ olacak şekilde her $x \in S$ için $3x/2 \in S$ olur.

3) Eğer a , S nin bir minimal üretici ve $a < g(S)$ ise o zaman $3a/2 \in S$ çıkar.

5.1.1 Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $s \in S$ olsun. O zaman $S \setminus \{s\}$ nin bir sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul, s elemanının S nin bir minimal üretici olmasıdır. Üstelik $S \setminus \{s\}$ bir sayısal yarıgrup ise o zaman

$$FH(S \setminus \{s\}) = (FH(S) \cup \{s\}) \setminus \{x \in FH(S) : x \mid s\}$$

şeklindedir (Rosales, J.C ve ark. 2004).

5.1.2 Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $y \in H(S)$ olsun. O zaman $S \cup \{y\}$ nin bir sayısal yarıgrup olması için gerek ve yeter koşul $y \in \text{Maximal} \leq_S (FH(S))$ olmasıdır. Üstelik $S \cup \{y\}$ bir sayısal yarıgrup ve y nin asal bölenleri $p_1, \dots, p_n$ ise

$$FH(S \cup \{y\}) = (FH(S) \setminus \{y\}) \cup \left\{ \frac{y}{p_i} : \frac{y}{p_i} \notin D((FH(S)) \setminus \{y\}) \right\}$$

şeklindedir (Rosales, J.C ve ark. 2004).

(Burada $D(x_1, x_2, \dots, x_n) = \{x \in \mathbb{N} : x \mid x_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ olarak tanımlanmaktadır.)

5.1.3 Önerme

S bir sayısal yarıgrup ve $S \neq \mathbb{N}$ olsun o zaman aşığıdaki koşullar birbirine denktirler.

- (1) S indirgenemezdir.
- (2) $\text{Maximal } \leq_S (FH(S)) = \{g(S)\}$ dir (Rosales,J.C ve ark. 2004).

6. KAYNAKLAR

Barucci, V. ; Dobbs, D. E. ; Fontana, M.,Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to One-Dimensional Analytical Irreducible local Domains, Memoirs of the Amer. Math.Soc., **1997**, Vol.598.

Branco, M.B ; Franco, Nuno Universidade de Evora, Study of Algorithms for Decomposition of a Numerical Semigroup, **2007**, Vol 1. Issue 2

Curtis, F., On Formulas for the Frobenius Number of A Numerical Semigroup, Math. Scand.,**1990**,67,190-192.

Fernando Torres, Remarks on Numerical Semigroups,**1995**,ar Xiv; alg-eom/9512012 v1

Fröberg, R. ; Gottlieb , C. ; Haggkvist, R. , On numerical Semigroups, Semigroup Forum, **1987**, Vol.35 , 63-83.

İlhan, S., On A Class of Telescopic Numerical Semigroups,International Journal of Contemporary Mathematical Sciences, **2006**, Vol.1, No.2 , 81-83 .

J.L Ramirez Alfonsin ,Gaps in Semigroups Discrete Math 2007

Madero, M ; Herzinger, K. ,The Apéry Sets of Numerical Semigroups, Algebra Communcations, **2005**, 33;3831-3838.

Marco D'Anna,Type Sequences of Numerical Semigroups,Semigroup Forum,**1998**, Vol.56 1-31.

Maria Bras-Amoros , Acute Semigroups, the Order Bound on the Minimum Distance and the Fleg-Rao Improvement, IEEE Transaction on informations Theory, **2004**,Vol.50 , No.6.

Maria Bras-Amoros , Bounds on the Number of Numerical Semigroups of a Given Genus, **2008**.

Rosales J.C , Numerical Semigroups with Apéry Sets of Unique Expression, Journal of Algebra, **2000**,226,479-48

Rosales, J.C , Garcia-Sanchez P.A , Garcia-Garcia J.I and Jimenez Madrid J.A, Fundamental Gaps in Numerical Semigroups, Journal of Pure and Applied Algebra, **2004**,Vol.301-303.

Rosales, J.C., Fundamental Gaps of Numerical Semigroups Generated by Two Elements, Linear Algebra and its Applications, **2005** , 405-200-208.

6. KAYNAKLAR

Rosales, J.C., Numerical Semigroup with Multiplicity Three and Four, Semigroup Forum, **2005**, Vol.71, 323-331.

Rosales, J.C., Contractions of a Numerical Semigroup, Journal of Mathematical Inequalities, **2007**, Vol.1 , No.4, 491-501.

Rosales, J.C., One Half of a Pseudo-symmetric Numerical semigroup, London Mathematical Society, **2008**, doi:10.1112/blms/bd010