

EYLÜL 2021

Yüksek Lisans Tezi-Matematik

YILMAZ KOÇ

TÜRKİYE CUMHURİYETİ
GAZİANTEP ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL YARIGRUBUN YAPIŞTIRMASININ
RF-MATRİSİLERİ İLE İNCELENMESİ

MATEMATİK
YÜKSEK LİSANS TEZİ

YILMAZ KOÇ
EYLÜL 2021

**SAYISAL YARIGRUBUN YAPIŖTIRMASININ
RF-MATRİSİLERİ İLE İNCELENMESİ**

Gaziantep Üniversitesi

Matematik

Yüksek Lisans Tezi

Danışman

Doç. Dr. Belgin ÖZER

Yılmaz KOÇ

Eylül 2021



©2021[Yılmaz KOÇ]

İlgili tezin akademik ve etik kurallara uygun olarak yazıldığını ve kullanılan tüm literatür bilgilerinin referans gösterilmek suretiyle tezde yer aldığını beyan ederim.

Yılmaz KOÇ

ABSTRACT

THE EXAMINATION OF THE GLUING OF NUMERICAL SEMIGROUP WITH RF-MATRICES

KOÇ, Yılmaz

M.Sc. in Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Belgin ÖZER

September 2021

55 pages

The concept of gluings of numerical semigroups has given in doctorate thesis of Rosales [4]. Rosales proved that the numerical semigroup was complete intersection iff it was the gluing of two complete intersection numerical semigroups. In this study, the concept of RF-Matrix will be given that is concerned with pseudo-Frobenius number. Moreover, the gluings of numerical semigroups will be presented with RF-Matrices.

Key Words: Numerical Semigroups, Symmetric, Pseudo-Symmetric, Apéry Set,
RF-Matrix, Gluing.

ÖZET

SAYISAL YARIGRUBUN YAPIŞTIRMASININ RF-MATRİSİLERİ İLE İNCELENMESİ

KOÇ, Yılmaz

Yüksek Lisans Tezi, Matematik

Danışman: Doç. Dr. Belgin ÖZER

Eylül 2021

55 sayfa

Sayısal yarıgrupların yapıştırılması kavramı [4] te Rosales 'in doktora tezinde verildi. Rosales, bir sayısal yarıgrupun tam kesişim olması için gerek ve yeter koşulun iki tam kesişim sayısal yarıgrupların yapıştırılması olduğunu ispatladı. Bu çalışmada Sözde-Frobenius sayısı üzerine kurulan RF-Matris kavramı açıklanacaktır. Ayrıca sayısal yarıgrupların yapıştırmasının RF-Matrisleri verilecektir.

Anahtar Kelimeler: Sayısal Yarıgrup, Simetrik, Sözde-Simetrik, Apery Kümesi,
RF-Matris, Yapıştırma Kavramı.



"Canum aileme"

TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan, Gaziantep Üniversitesi öğretim üyelerinden danışman hocam, sayın Doç. Dr. Belgin ÖZER'e sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışma süresince her zaman yanımda olan ve desteklerini esirgemeyen kıymetli aileme ve değerli arkadaşlarıma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ABSTRACT	v
ÖZET.....	vi
TEŞEKKÜR	viii
İÇİNDEKİLER	ix
SEMBOLLER LİSTESİ.....	x
BÖLÜM I: GİRİŞ	1
BÖLÜM II: TEMEL TANIMLAR	2
2.1 Monoid ve Sayısal Yarıgrup.....	2
2.2 Frobenius Sayısı, Katlılık ve Cins.....	4
2.3 Apery Kümesi, Sözde-Frobenius ve Simetrik Sayısal Yarıgrup	6
BÖLÜM III: RF-MATRİS	13
BÖLÜM IV: SAYISAL YARIGRUPLARIN YAPIŞTIRILMASI	23
4.1 Yapıştırma Kavramı	23
4.2 Sayısal Yarıgrupların Yapıştırılması	32
4.3 Serbest Sayısal Yarıgruplar	36
BÖLÜM V: SAYISAL YARIGRUPLARIN YAPIŞTIRILMASININ RF-MATRİSLERİ İLE İNCELENMESİ.....	47
BÖLÜM VI: SONUÇ	53
KAYNAKLAR	54
ÖZGEÇMİŞ (CV)	55

SEMBOLLER LİSTESİ

$\mathbb{N}$	Negatif olmayan tamsayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
Υ	Sayısal yarıgrup
$\langle \mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_e \rangle$	$\{n_1, \dots, n_e\}$ ile üretilen bir sayısal yarıgrup
$\mathbf{obeb}(x, y)$	x ve y nin ortak bölenlerinin en büyüğü
$\mathbf{okek}(x, y)$	x ve y nin ortak katlarının en küçüğü
$\mathbf{m}(\Upsilon)$	Υ nin katlılığı
$\mathbf{e}(\Upsilon)$	Υ nin gömme boyutu
$\mathbf{g}(\Upsilon)$	Υ nin cinsi
$\mathbf{G}(\Upsilon)$	Υ nin boşlukları kümesi
$\mathbf{t}(\Upsilon)$	Υ nin tipi
$\mathbf{F}(\Upsilon)$	Υ nin Frobenius sayısı
$\mathbf{H}(\Upsilon)$	Υ nin kutup noktaları kümesi
$\mathbf{PF}(\Upsilon)$	Υ nin Söзде-Frobenius sayısı
$\mathbf{AP}(\Upsilon, n)$	n sayısına göre Apery kümesi
$\mathbf{Cong}(q)$	q yi içeren tüm kongrüansların kesişimi

BÖLÜM I

GİRİŞ

Sayısal yarıgrupların yapıştırılması kavramı [4] de Rosales 'in doktora tezinde verildi. Rosales, bir sayısal yarıgrupun tam kesişim olması için gerek ve yeter koşulun iki tam kesişim sayısal yarıgrupların yapıştırılması olduğunu ispatladı. Böylece tam kesişim sayısal yarıgrupların Delorme 'nin karakterizasyonu yeniden yazıldı [5]. Daha sonra yapıştırma kavramını afin yarıgruplara ($\mathbb{N}^n$ nin sonlu doğuraylı alt monoidleri) genelleştirildi [6]. Bu sonuçlar, [7] de tam kesişim sayısal yarıgrupları $\mathbb{N}^2, \mathbb{N}^3$ ve herhangi basit afin yarıgrupların alt monoidlerine genelleştirmek için kullanıldı.

2. Bölüm 'de, monoid ve alt monoid, üreteç kümesi, sayısal yarıgrupların yapısı, Frobenius sayısı, Apery kümesi, Sözde-Frobenius sayısı, simetrik, hemen hemen simetrik ve Sözde-Simetrik sayısal yarıgrup kavramları üzerine temel tanımlar incelenmiştir.

3. Bölüm 'de, Sözde-Frobenius sayısı üzerine kurulan RF-Matris kavramı açıklanmış olup hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar üzerine olası çeşitlilik durumu ele alınmış ve Sözde-Simetrik sayısal yarıgruplardaki durumu incelenmiştir.

4. Bölüm 'de, sayısal yarıgrupların yapıştırılması, bir sayısal yarıgrupun tam kesişim olabilme durumu, tam kesişim sayısal yarıgruplarda simetriklik kavramı, serbest sayısal yarıgruplar ve yapıştırma sonucu oluşan sayısal yarıgrupun frobenius sayısının bulunabilirliği incelenmiştir.

5. Bölüm 'de, sayısal yarıgrupların yapıştırmasının RF-Matris ile incelenmesi ve yapıştırmada etken sayısal yarıgrupların bu matristeki rolü incelenmiştir.

6. Bölüm'de, sonuç kısmı yer almaktadır.

BÖLÜM II

TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde temel tanım ve teoremler verilecektir.

2.1 Monoid ve Sayısal Yarıgrup

Tanım 2.1.1

$H \neq \emptyset$ bir küme ve H kümesi üzerinde bir Δ ikili işlemi tanımlı ($\Delta: H \times H \rightarrow H$) olsun.
Eğer $\forall \alpha, \theta, \beta \in H$ için,

$$(\alpha \Delta \theta) \Delta \beta = \alpha \Delta (\theta \Delta \beta)$$

eşitliği sağlanıyorsa (H, Δ) ikilisine bir yarıgrup denir.

Tanım 2.1.2

$H \neq \emptyset$ bir küme ve H kümesi üzerinde bir Δ ikili işlemi tanımlı ($\Delta: H \times H \rightarrow H$) olsun.
Eğer $\forall \alpha \in H$ için,

$$\alpha \Delta 1 = 1 \Delta \alpha = \alpha$$

koşulunu sağlayan $1 \in H$ varsa H 'ye monoid denir.

Tanım 2.1.3

Bir $\mathbb{N}$ monoidinin, boştan farklı bir Y kümesi ($0 \in Y$ koşuluna sahip)

$$\forall a, b \in Y \text{ için } a + b \in Y$$

sağlanıyorsa Y 'ye $\mathbb{N}$ 'nin alt monoidi denir.

Tanım 2.1.4

Y alt monoidini ele alalım. Eğer Y ,

- (i) $0 \in Y$
- (ii) $\forall \alpha, \theta \in Y$ için $\alpha + \theta \in Y$
- (iii) $\mathbb{N} \setminus Y$ sonlu

koşulları sağlıyorsa Y 'ye sayısal yarıgrup denir.

Tanım 2.1.5

Bir Y sayısal yarıgrup olsun.

$$Y = \{ h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + \dots + h_j\sigma_j \mid h_j \in Y, \sigma_j \in \mathbb{N} \}$$

şeklindeki $\{ h_1, h_2, \dots, h_j \} \subseteq Y$ kümesi Y sayısal yarıgrubu için bir üreteç kümesidir.

$h_1 < h_2 < \dots < h_j$ olmak koşuluyla

$$Y = \langle h_1, h_2, \dots, h_j \rangle$$

şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.6

$\emptyset \neq Y \subseteq \mathbb{N}$ ve $Y = \{ h_1, h_2, \dots, h_j \}$ kümesi için

$$\langle Y \rangle = \{ h_1\sigma_1 + h_2\sigma_2 + \dots + h_j\sigma_j \mid \sigma_j \in \mathbb{N} \}$$

olmak üzere

$$\langle Y \rangle \text{ sayısal yarıgruptur} \Leftrightarrow \text{obeb} \{ h_1, h_2, \dots, h_j \} = 1$$

İspat: [3].

Örnek 2.1.7

$$Y = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{ 3\sigma_1 + 7\sigma_2 + 11\sigma_3 \mid \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{N} \}$$

kümesini inceleyelim:

$$h_1 = 3, h_2 = 7, h_3 = 11 \text{ ve } (3, 5, 11) = 1 \text{ 'dir.}$$

(i) $0 = 3.0 + 7.0 + 11.0$ olduğundan $0 \in Y$ dir.

(ii) $\eta, \mu \in Y$ için

$$\eta = 3\eta_1 + 7\eta_2 + 11\eta_3 \quad , \eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \mathbb{N}$$

$$\mu = 3\mu_1 + 7\mu_2 + 11\mu_3 \quad , \mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathbb{N}$$

şeklinde yazılabildiğinden,

$$\begin{aligned} \eta + \mu &= (3\eta_1 + 7\eta_2 + 11\eta_3) + (3\mu_1 + 7\mu_2 + 11\mu_3) \\ &= 3(\eta_1 + \mu_1) + 7(\eta_2 + \mu_2) + 11(\eta_3 + \mu_3) \end{aligned}$$

için $\eta + \mu \in Y$ olduğu açıktır.

(iii) $\mathbb{N} \setminus Y = \{1, 2, 4, 5, 8\}$ kümesi incelendiğinde sonlu olduğu ve $Y = \langle 3, 7, 11 \rangle$ yapısının sayısal yarıgrup belirttiği anlaşılır.

2.2 Frobenius Sayısı, Katlılık ve Cins

Tanım 2.2.1

$H = \{h_1, \dots, h_j\}$ kümesi Y sayısal yarıgrupunun üreteç kümesi olsun. H kümesi içerisindeki herhangi bir eleman diğer elemanların bir lineer toplamı şeklinde ifade edilemiyorsa H 'ye Y 'nin minimal üreteç kümesi denir.

Tanım 2.2.2

Y sayısal yarıgrup ve $H = \{h_1, \dots, h_j\}$, Y 'nin bir minimal üreteç kümesi olsun. H 'nin 0 'dan farklı en küçük elemanına Y 'nin katlılığı denir ve $m(Y)$ ile gösterilir. Y sayısal yarıgrupunun minimal üreteç kümesinin eleman sayısına Y 'nin gömme boyutu denir ve $e(Y)$ ile gösterilir.

Tanım 2.2.3

$H = \{h_1, \dots, h_j\}$ kümesi Y sayısal yarıgrupunun minimal üreteç kümesi olsun. H 'nin elemanlarının lineer birleşimi tarafından üretilmeyen en büyük tamsayıya, başka bir deyişle $\mathbb{N} \setminus Y$ kümesinin en büyük elemanına Frobenius sayısı denir. $F(Y)$ ile biçiminde gösterilir. Ayrıca $\mathbb{N} \setminus Y$ kümesine, Y 'nin boşlukları ve bu kümenin eleman sayısına Y 'nin cinsi denir. Sırayla $G(Y)$ ve $g(Y)$ ile gösterilir.

Örnek 2.2.4

$$Y = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{3\sigma_1 + 7\sigma_2 + 11\sigma_3 \mid \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in \mathbb{N}\}$$

kümesi incelenirse:

$$\text{obeb}\{3,7,11\} = 1 \text{ 'dir.}$$

Dolayısıyla $\langle 3,7,11 \rangle$ kümesi Y 'nin minimal üreteç kümesi olduğu aşıkardır.

$$Y = \langle 3, 7, 11 \rangle = \{0,3,6,7,9,10,11,12,13,14,15 \rightarrow\} \text{ kümesinin}$$

- (i) Katlılık $m(Y) = 3$
- (ii) Gömme boyutu $e(Y) = 3$
- (iii) $G(Y) = \mathbb{N} \setminus Y = \{1, 2, 4, 5, 8\}$ için Y kümesinin cinsi $g(Y) = 5$
- (iv) $F(Y) = \max(\mathbb{N} \setminus Y) = 8$

Örnekte kullanılan " $\rightarrow$ " sembolü önüne gelen sayıdan sonraki ardışık her tamsayının ilgili kümeye ait olduğunu göstermektedir.

Örnek 2.2.5

$$Y = \langle 4,5 \rangle = \{0,4,5,8,9,10,12,13, \rightarrow\}$$

kümesi incelenirse:

- (i) Katlılık $m(Y) = 4$
- (ii) Gömme boyutu $e(Y) = 2$
- (iii) $G(Y) = \mathbb{N} \setminus Y = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ için Y kümesinin cinsi $g(Y) = 6$
- (iv) $F(Y) = \max(\mathbb{N} \setminus Y) = 11$

Örnek 2.2.6

$$Y = \langle 9,10,11,13 \rangle = \{0,9,10,11,13,18,19,20,21,22,23,24,26,27,28, \rightarrow\}$$

kümesi incelenirse:

- (i) Katlılık $m(Y) = 9$
- (ii) Gömme boyutu $e(Y) = 4$
- (iii) $G(Y) = \mathbb{N} \setminus Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 17, 25\}$ için Y kümesinin cinsi $g(Y) = 14$

$$(iv) \quad F(Y) = \max(\mathbb{N} \setminus Y) = 25$$

Teorem 2.2.7

$h_1, h_2 \in \mathbb{Z}$ ve $\text{obeb}\{h_1, h_2\} = 1$ koşulu altında $F(Y) = \langle h_1, h_2 \rangle$ olsun.

Bu durumda;

$$(i) \quad F(Y) = h_1 h_2 - h_1 - h_2$$

$$(ii) \quad g(Y) = \frac{F(Y)+1}{2} = \frac{(h_1-1)(h_2-1)}{2}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: [1].

Örnek 2.2.8

$Y = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunda

$h_1 = 4$ ve $h_2 = 5$ olduğundan

$$(i) \quad F(Y) = 4 \cdot 5 - 4 - 5 = 11$$

$$(ii) \quad g(Y) = \frac{11+1}{2} = 6$$

Daha önceki örneğimizde de benzer sonucu bulmuştuk. Dolayısıyla Teorem 2.2.7 gömme boyutu 2 olan sayısal yarıgrupların Frobenius sayılarını ve cinsini bulmada kolaylık sağlamaktadır.

2.3 Apéry Kümesi, Sözde-Frobenius Sayısı ve Simetrik Sayısal Yarıgrup

Tanım 2.3.1

Y bir sayısal yarıgrup ve $h \in Y \setminus \{0\}$ olsun.

$$Ap(Y, h) = \{s \in Y \mid s - h \notin Y\}$$

biçiminde tanımlanabilen kümeye h 'nin Apéry kümesi denir. $Ap(Y, h)$ şeklinde gösterilir [2].

Örnek 2.3.2

$Y = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun

- $h = 4 \in Y$ için

$Ap(Y, 4) = \{s \in Y \mid s - 4 \notin Y\}$ kümesini bulalım:

$$0 - 4 \notin Y \Rightarrow 0 \in Ap(Y, 4)$$

$$5 - 4 \notin Y \Rightarrow 5 \in Ap(Y, 4)$$

$$10 - 4 \notin Y \Rightarrow 10 \in Ap(Y, 4)$$

$$15 - 4 \notin Y \Rightarrow 15 \in Ap(Y, 4)$$

$s > 15$ koşulunu sağlayan tüm tam sayılar Y sayısal yarıgrubuna ait olduğundan

$$Ap(Y, 4) = \{0, 5, 10, 15\}$$

olur.

- $h = 5 \in Y$ için

$$Ap(Y, 5) = \{s \in Y \mid s - 5 \notin Y\}$$

kümesini bulalım:

$$0 - 5 \notin Y \Rightarrow 0 \in Ap(Y, 5)$$

$$4 - 5 \notin Y \Rightarrow 4 \in Ap(Y, 5)$$

$$8 - 5 \notin Y \Rightarrow 8 \in Ap(Y, 5)$$

$$12 - 5 \notin Y \Rightarrow 12 \in Ap(Y, 5)$$

$$16 - 5 \notin Y \Rightarrow 16 \in Ap(Y, 5)$$

$s > 17$ koşulunu sağlayan tüm tam sayılar Y sayısal yarıgrubuna ait olduğundan

$$Ap(Y, 5) = \{0, 4, 8, 12, 16\}$$

olur.

Teorem 2.3.3

$h \in Y \setminus \{0\}$ için $Ap(Y, h)$ kümesinin eleman sayısı h tanedir.

İspat: [3].

Tanım 2.3.4

Y bir sayısal yarıgrup ve $F(Y)$, Y 'nin Frobenius sayısı olmak üzere; $h \in \mathbb{Z} \setminus Y$ için $F(Y) - h \notin Y$ koşulunu sağlayan elemanların oluşturduğu kümeye Y 'nin kutup noktaları denir. $H(Y)$ ile gösterilir. Dolayısıyla

$$H(Y) = \{h \in \mathbb{Z} \mid h \notin Y, F(Y) - h \notin Y\}$$

şeklinde ifade edilir.

Tanım 2.3.5

Y bir sayısal yarıgrup, $h \in \mathbb{Z} \setminus Y$ ve $s \in Y - \{0\}$ olsun. Bu durumda h sayısının her s elemanı ile toplamı Y sayısal yarı grubunun içerisinde olan elemanların oluşturduğu kümeye Y 'nin Sözde-Frobenius kümesi denir. $PF(Y)$ ile gösterilir. O hâlde

$$PF(Y) = \{h \in \mathbb{Z} \mid h \notin Y, \forall s \in Y - \{0\}, h + s \in Y\}$$

şeklinde ifade edilir. $PF(Y)$ kümesinin eleman sayısına Y 'nin tipi denir ve $t(Y)$ ile gösterilir,

$$T(Y) = |PF(Y)|$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.3.6

$$Y = \langle 9, 11, 15, 17 \rangle = \{0, 9, 11, 15, 17, 18, 20, 22, 24, 26, 27, 28, \rightarrow\}$$

kümesi incelenirse:

- Y 'nin kutup noktalarını bulalım:

$$G(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12, 13, 14, 16, 19, 21, 23, 25\}$$

$$F(Y) = 25$$

$$H(Y) = \{h \in \mathbb{Z} \mid h \notin Y, F(Y) - h \notin Y\}$$

$$25 - 2 \notin Y \Rightarrow 2 \in H(Y)$$

$$25 - 4 \notin Y \Rightarrow 4 \in H(Y)$$

$$25 - 6 \notin Y \Rightarrow 6 \in H(Y)$$

$$25 - 12 \notin Y \Rightarrow 12 \in H(Y)$$

$$25 - 13 \notin Y \Rightarrow 13 \in H(Y)$$

$$25 - 19 \notin Y \Rightarrow 19 \in H(Y)$$

$$25 - 21 \notin Y \Rightarrow 21 \in H(Y)$$

$$25 - 23 \notin Y \Rightarrow 23 \in H(Y)$$

Negatif tamsayılardan seçilecek herhangi bir sayının Frobenius sayısı ile farkının sayısal yarıgrubun elemanı olacağı aşikardır. Dolayısıyla $H(Y)$ kümesine ait olamaz. O hâlde

$$H(Y) = \{2, 4, 6, 12, 13, 19, 21, 23\}$$

şeklinde bulunur.

- Y 'nin Sözde-Frobenius kümesini bulalım:

$$PF(Y) = \{h \in \mathbb{Z} \mid h \notin Y, \forall s \in Y - \{0\}, h + s \in Y\}$$

tanımı kullanılırsa

$$PF(Y) = \{13, 19, 21, 23, 25\}$$

kümesi elde edilir,

$$t(Y) = |PF(Y)| = 5$$

şeklinde bulunur.

Tanım 2.3.7

$h \in \mathbb{Z}$ ve Y sayısal yarıgrup olsun.

$$h \in Y \Leftrightarrow F(Y) - h \notin Y$$

ve

$$h \notin Y \Leftrightarrow F(Y) - h \in Y$$

koşulunu sağlayan Y sayısal yarıgrubuna simetrik sayısal yarıgrup denir.

Önerme 2.3.8

Y bir sayısal yarıgrup ve l, Y 'nin pozitif tamsayısı olsun. l 'nin Y 'deki Apery kümesi

$$Ap(Y, l) = \{\alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{l-1}\}$$

olsun.

O hâlde Y 'nin simetrik olması için gerek ve yeter koşul her $i \in \{0, 1, \dots, l-1\}$ için,

$$\alpha_i + \alpha_{l-1-i} = \alpha_{l-1}$$

olmasıdır.

İspat: [3].

Örnek 2.3.9

$$Y = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, \rightarrow\}$$

kümesini inceleyelim:

Y sayısal yarıgrubu için $G(Y) = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$ ve $F(Y) = 11$ olarak bulunur.

- $\forall h \in Y$ için $F(Y) - h \notin Y$ koşulunu inceleyelim:

$$h = 0 \in Y \Rightarrow 11 - 0 \notin Y$$

$$h = 4 \in Y \Rightarrow 11 - 4 \notin Y$$

$$h = 5 \in Y \Rightarrow 11 - 5 \notin Y$$

$$h = 8 \in Y \Rightarrow 11 - 8 \notin Y$$

$$h = 9 \in Y \Rightarrow 11 - 9 \notin Y$$

$$h = 10 \in Y \Rightarrow 11 - 10 \notin Y$$

$h > 10$ için daima negatif geleceğinden verilen koşul sağlanır.

- $\forall h \in G(Y)$ için $F(Y) - h \in Y$ koşulunu inceleyelim:

$$h = 1 \in G(Y) \Rightarrow 11 - 1 \in Y$$

$$h = 2 \in G(Y) \Rightarrow 11 - 2 \in Y$$

$$h = 3 \in G(Y) \Rightarrow 11 - 3 \in Y$$

$$h = 6 \in G(Y) \Rightarrow 11 - 6 \in Y$$

$$h = 7 \in G(Y) \Rightarrow 11 - 7 \in Y$$

$$h = 11 \in G(Y) \Rightarrow 11 - 11 \in Y$$

$G(Y)$ 'nin her elemanı için verilen koşul sağlandı.

Son olarak negatif tamsayıların her elemanı ile Frobenius sayısının farkının Y sayısal yarıgrubun elemanı olacağı aşikârdır.

Dolayısıyla Y kümesi simetrik sayısal yarıgruptur.

Tanım 2.3.10

Y bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer,

$$PF(Y) = H(Y) \cup \{F(Y)\}$$

eşitliği sağlanıyorsa Y 'ye hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup denir.

Tanım 2.3.11

Y bir hemen hemen simetrik sayısal yarıgrup ve $t(Y) = 2$ olsun. Bu durumda Y 'ye Sözd-Simetrik sayısal yarıgrup denir.

Önerme 2.3.12

Y bir sayısal yarıgrup ve l, Y 'nin sıfırdan farklı bir elemanı olsun. O hâlde,

1. $F(Y) = (\max Ap(Y, l)) - l$
2. $g(Y) = \frac{1}{n} (\sum_{w \in Ap(Y, l)} w) - \frac{n-1}{2}$.

İspat: [3].



BÖLÜM III

RF-MATRİS

Bu bölümde RF-Matris ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1

$Y = \langle n_1, n_2, \dots, n_e \rangle$ bir sayısal yarıgrup ve $f \in PF(Y)$ olsun. Eğer her $i = 1, 2, \dots, e$ ve $\alpha_{ij} \in \mathbb{N}$ için $\alpha_{ii} = -1$ ise her $i = 1, 2, \dots, e$ için

$$\sum_{j=1}^e \alpha_{ij} n_j = f$$

şeklinde tanımlanabilen $A = (\alpha_{ij}) \in M_e(\mathbb{Z})$ matrisine bir RF-Matris(satırca indirgenmiş matris) denir.

Eğer Y hemen hemen simetrik ve

$$f \in PF(Y) \setminus \{F(Y)\}$$

ise hem f hem de $F(Y) - f$ için bir RF-Matris vardır ve genellikle bu matris tek değildir.

Örnek 3.2

$$Y = \langle 4, 5 \rangle = \{0, 4, 5, 8, 9, 10, 12, 13, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrupunu ele alalım:

- $e(Y) = \{4, 5\} = 2$
- $m(Y) = 4$
- $G(Y) = \{1, 2, 3, 6, 7, 11\}$
- $F(Y) = 11$
- $H(Y) = \emptyset$

- $PF(Y) = \{11\}$
- $type(Y) = 1$

üreteçler için $n_1 = 4, n_2 = 5$ olacak şekilde yazılabilir. $f \in PF(Y)$ olacağından,

$11 \in PF(Y)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} n_j = 11$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11} n_1 + \alpha_{12} n_2 = 11$$

$$\alpha_{21} n_1 + \alpha_{22} n_2 = 11$$

$$-4 + 5\alpha_{12} = 11$$

$$4\alpha_{21} - 5 = 11$$

$$(-1)4 + (3)5 = 11$$

$$(4)4 + (-1)5 = 11$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $f \in PF(Y)$ için RF-Matrisi yazılabilir.

Aşağıdaki örnekte hemen hemen simetrik sayısal yarıgrupların örneğini inceleyip RF-matrisinin tek olma zorunluluğunun olmadığını gösterelim.

Örnek 3.3

$Y = \langle 8, 11, 12, 15 \rangle = \{0, 8, 11, 12, 15, 16, 19, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 30 \rightarrow\}$ sayısal yarı grubunu ele alalım,

- $e(Y) = \{8, 11, 12, 15\} = 4$
- $G(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17, 18, 21, 25, 29\}$
- $F(Y) = 29$
- $H(Y) = \{4, 25\}$

- $PF(Y) = \{4,25,29\}$
- $type(Y) = 3$
- $m(Y) = 8$

$$PF(Y) = H(Y) \cup \{F(Y)\} = \{4,25\} \cup \{29\} = \{4,25,29\}$$

olduğundan Y hemen hemen simetrik sayısal yarigrupdur.

Üreteçler için $n_1 = 8, n_2 = 11, n_3 = 12, n_4 = 15$ olacak şekilde yazılabilir.
 $f \in PF(Y)$ olacağından

- $4 \in PF(Y)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij}n_j = 4$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}n_2 + \alpha_{13}n_3 + \alpha_{14}n_4 = 4$$

$$\alpha_{21}n_1 + \alpha_{22}n_2 + \alpha_{23}n_3 + \alpha_{24}n_4 = 4$$

$$\alpha_{31}n_1 + \alpha_{32}n_2 + \alpha_{33}n_3 + \alpha_{34}n_4 = 4$$

$$\alpha_{41}n_1 + \alpha_{42}n_2 + \alpha_{43}n_3 + \alpha_{44}n_4 = 4$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 4$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 4$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 4$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 4$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 4$$

$$(-1)8 + (0)11 + (1)12 + (0)15 = 4$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 4$$

$$(0)8\alpha_{21} + (-1)11 + (0)12 + (1)15 = 4$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 4$$

$$(2)8 + (0)11 + (-1)12 + (0)15 = 4$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 4$$

$$(1)8 + (1)11 + (0)12 + (-1)15 = 4$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $25 \in PF(Y)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij}n_j = 25$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}n_2 + \alpha_{13}n_3 + \alpha_{14}n_4 = 25$$

$$\alpha_{21}n_1 + \alpha_{22}n_2 + \alpha_{23}n_3 + \alpha_{24}n_4 = 25$$

$$\alpha_{31}n_1 + \alpha_{32}n_2 + \alpha_{33}n_3 + \alpha_{34}n_4 = 25$$

$$\alpha_{41}n_1 + \alpha_{42}n_2 + \alpha_{43}n_3 + \alpha_{44}n_4 = 25$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 25$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 25$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 25$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 25$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 25$$

$$(-1)8 + (3)11 + (0)12 + (0)15 = 25$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 25$$

$$(0)8\alpha_{21} + (-1)11 + (3)12 + (0)15 = 25$$

$$(3)8\alpha_{21} + (-1)11 + (1)12 + (0)15 = 25$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 25$$

$$(0)8 + (2)11 + (-1)12 + (1)15 = 25$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 25$$

$$(2)8 + (0)11 + (2)12 + (-1)15 = 25$$

$$(5)8 + (0)11 + (0)12 + (-1)15 = 25$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- $29 \in PF(Y)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^4 \alpha_{ij}n_j = 29$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11}n_1 + \alpha_{12}n_2 + \alpha_{13}n_3 + \alpha_{14}n_4 = 29$$

$$\alpha_{21}n_1 + \alpha_{22}n_2 + \alpha_{23}n_3 + \alpha_{24}n_4 = 29$$

$$\alpha_{31}n_1 + \alpha_{32}n_2 + \alpha_{33}n_3 + \alpha_{34}n_4 = 29$$

$$\alpha_{41}n_1 + \alpha_{42}n_2 + \alpha_{43}n_3 + \alpha_{44}n_4 = 29$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 29$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 29$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 29$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 29$$

$$-8 + 11\alpha_{12} + 12\alpha_{13} + 15\alpha_{14} = 29$$

$$(-1)8 + (2)11 + (0)12 + (1)15 = 29$$

$$8\alpha_{21} - 11 + 12\alpha_{23} + 15\alpha_{24} = 29$$

$$(2)8\alpha_{21} + (-1)11 + (2)12 + (0)15 = 29$$

$$(5)8\alpha_{21} + (-1)11 + (0)12 + (0)15 = 29$$

$$8\alpha_{31} + 11\alpha_{32} - 12 + 15\alpha_{34} = 29$$

$$(0)8 + (1)11 + (-1)12 + (2)15 = 29$$

$$8\alpha_{41} + 11\alpha_{42} + 12\alpha_{43} - 15 = 29$$

$$(0)8 + (4)11 + (0)12 + (-1)15 = 29$$

$$(1)8 + (0)11 + (3)12 + (-1)15 = 29$$

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

$$I = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Dolayısıyla $f \in PF(Y)$ için tek türlü RF-Matris yazımı olma zorunluluğu yoktur.

Yardımcı Teorem 3.4

$h, h' \in PF(Y)$ ve $h + h' \notin Y$ olsun. $RF(h) = K = (k_{ij})$ ve $RF(h') = L = (l_{ij})$ alalım. $\forall i \neq j$ için $k_{ij} = 0$ veya $l_{ij} = 0$ 'dır. Eğer $RF\left(\frac{F(Y)}{2}\right) = (k_{ij})$ ise $\forall i \neq j$ için $k_{ij} = 0$ veya $k_{ji} = 0$ 'dır.

İspat:

$h \in PF(Y)$ için h 'nin RF-Matrisi $K = (k_{ij})$ ise Tanım 3.1 gereği $i = 1, \dots, e$ ve $h = k_{i1}n_1 + k_{i2}n_2 + \dots + k_{ii}n_i + \dots + k_{ie}n_e$ 'dir.

Her i için $k_{ii} = -1$ olduğundan

$$h = k_{i1}n_1 + k_{i2}n_2 + \dots + (-1)n_i + \dots + k_{ie}n_e$$

$$h + n_i = k_{i1}n_1 + k_{i2}n_2 + \dots + k_{i(i-1)}n_{(i-1)} + k_{i(i+1)}n_{(i+1)} + \dots + k_{ie}n_e$$

$$h + n_i = \sum_{p \neq i} k_{ip}n_p$$

yazılır. Benzer yolla $h' \in PF(Y)$ ve h' 'nin RF-Matrisi olan $L = (l_{ij})$ de yine Tanım 3.1 gereği

$$h' + n_j = \sum_{r \neq j} l_{jr}n_r$$

elde edilir. $k_{ij} \geq 1$ ve $l_{ji} \geq 1$ ise,

$$h = k_{i1}n_1 + \dots + (-1)n_i + \dots + k_{ij}n_j + \dots + k_{ie}n_e$$

$$h' = l_{j1}n_1 + \dots + l_{ji}n_i + \dots + (-1)n_j + \dots + l_{je}n_e$$

eşitlikleri toplandığında

$$h + h' = (k_{i1} + l_{j1})n_1 + \dots + (l_{ji} - 1)n_i + \dots + (k_{ij} - 1)n_j + \dots + (k_{ie} + l_{je})n_e$$

$$h + h' = (l_{ji} - 1)n_i + (k_{ij} - 1)n_j + \sum_{s \neq i,j} (k_{is} + l_{js})n_s$$

elde edilir. Bu eşitlik Y 'nin bir elemanı olacağından $h + h' \notin Y$ ile çelişir.

Dolayısıyla $k_{ij} \geq 1$ ve $l_{ji} \geq 1$ kabulü yanlıştır.

O hâlde,

$$\forall i \neq j \text{ için } k_{ij} = 0 \text{ veya } l_{ij} = 0 \text{ 'dır.}$$

Eğer;

$\frac{F(Y)}{2} \in PF(Y)$ ve $RF\left(\frac{F(Y)}{2}\right) = (k_{ij})$ ise yukarıdaki gibi $h = \frac{F(Y)}{2}$ ve $h' = \frac{F(Y)}{2}$ için

$$RF(h) = RF\left(\frac{F(Y)}{2}\right) = (k_{ij})$$

ve

$$RF(h') = RF\left(\frac{F(Y)}{2}\right) = (l_{ij}) = (k_{ij})$$

yazılabileceğinden $\forall i \neq j$ için $k_{ij} = 0$ veya $l_{ji} = 0$ elde edilir.

Örnek 3.5

$Y = \langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ ve bir Sözd-Simetrik sayısal yarıgrup ve $h = \frac{F(Y)}{2}$ olsun.

$RF(h) = RF\left(\frac{F(Y)}{2}\right) = (k_{ij})$ dersek $\forall i \neq j$ için $k_{ij} = 0$ veya $k_{ji} = 0$ olur.

Böylece $k_{21} = k_{13} = k_{32} = 0$ kabul edilebilir.

$$RF(h) = \begin{bmatrix} -1 & k_{12} & 0 \\ 0 & -1 & k_{23} \\ k_{31} & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$h = \frac{F(Y)}{2} = (-1)n_1 + k_{12}n_2 + (0)n_3$$

$$h = \frac{F(Y)}{2} = (0)n_1 + (-1)n_2 + k_{23}n_3$$

$$h = \frac{F(Y)}{2} = k_{31}n_1 + (0)n_2 + (-1)n_3$$

eşitlikleri elde edilir.

Bu veriler yardımıyla $RF(F(Y)) = (l_{ij})$ matrisini bulalım.

$$F(Y) = (-1)n_1 + l_{12}n_2 + l_{13}n_3$$

ifadesindeki l_{12} ve l_{13} 'ü bulalım:

$$\frac{F(Y)}{2} = (-1)n_1 + k_{12}n_2 + (0)n_3$$

$$\frac{F(Y)}{2} = (0)n_1 + (-1)n_2 + k_{23}n_3$$

eşitlikleri toplanırsa

$$F(Y) = (-1)n_1 + (k_{12} - 1)n_2 + k_{13}n_3$$

elde edilir.

Dolayısıyla $l_{12} = (k_{12} - 1)$ ve $l_{13} = k_{13}$ olarak bulunur. Benzer şekilde

$$F(Y) = l_{21}n_1 + (-1)n_2 + l_{23}n_3$$

ifadesindeki l_{21} ve l_{23} 'ü bulalım:

$$\frac{F(Y)}{2} = (0)n_1 + (-1)n_2 + k_{23}n_3$$

$$\frac{F(Y)}{2} = k_{31}n_1 + (0)n_2 + (-1)n_3$$

eşitlikleri toplanırsa

$$F(Y) = (k_{31})n_1 + (-1)n_2 + (k_{23} - 1)n_3$$

elde edilir. Dolayısıyla $l_{21} = (k_{31})$ ve $l_{23} = k_{23} - 1$ olarak bulunur. Son olarak

$$F(Y) = l_{31}n_1 + l_{32}n_2 + (-1)n_3$$

ifadesindeki l_{31} ve l_{32} 'yi bulalım:

$$\frac{F(Y)}{2} = (-1)n_1 + k_{12}n_2 + (0)n_3$$

$$\frac{F(Y)}{2} = k_{31}n_1 + (0)n_2 + (-1)n_3$$

eşitlikleri toplanırsa

$$F(Y) = (k_{31} - 1)n_1 + (k_{12})n_2 + (-1)n_3$$

elde edilir. Dolayısıyla $l_{31} = (k_{31} - 1)$ ve $l_{32} = k_{12}$ olarak bulunur. Dolayısıyla $F(Y)$ 'nin RF-Matrisi

$$RF(F(Y)) = \begin{bmatrix} -1 & k_{12} - 1 & k_{23} \\ k_{31} & -1 & k_{23} - 1 \\ k_{31} - 1 & k_{12} & -1 \end{bmatrix}$$

şeklinde bulunur.

BÖLÜM IV

SAYISAL YARIGRUPLARIN YAPIŞTIRILMASI

Bu bölümde sayısal yarıgruplarda yapıştırma kavramı incelenecektir.

4.1 Yapıştırma Kavramı

Yapıştırma fikri şudur: Genellikle bir monoidin doğuray kümesi olarak alınan bir pozitif tamsayı kümesi H , H_1 ve H_2 nin yapıştırmasıdır. $[H_1, H_2]$, H 'nin bir parçalanışı ve H ile doğurulan (üretilen) monoid, şu şekilde takdimle tanımlanır:

Takdimdeki bazı ilişkiler, sadece H_1 deki doğurayları içerir; diğer ilişkiler sadece H_2 deki doğurayları içerir ve bu takdimde H_2 deki elemanlar ile H_1 deki elemanları ilişkilendiren sadece bir eleman vardır. Bu tanımları formalize etmek için (yani formal tanımları vermek için) bazı gösterimleri verelim:

$H = \{h_1, h_2, \dots, h_t\}$ pozitif tamsayıların bir alt kümesi olsun. $L = \{l_1, l_2, \dots, l_t\}$,

$\varphi: \text{serbest}(L) \rightarrow \mathbb{N}$ monoid homomorfizmi

$$\varphi(n_1 l_1 + n_2 l_2 + \dots + n_t l_t) = n_1 h_1 + n_2 h_2 + \dots + n_t h_t$$

Γ , φ 'nin çekirdek kongrüansını gösterebilir yani $m \Gamma n$ ancak ve ancak $\varphi(m) = \varphi(n)$.

$K \subseteq H$ için, $L_K = \{l_i \mid h_i \in K\}$. O hâlde $\text{serbest}(L_K) \subseteq \text{serbest}(L)$, φ_K ve Γ_K benzer şekilde tanımlanır. $\Gamma_K \subseteq \Gamma$ 'dır.

Bu gösterim ile yapıştırma kavramını açıklamak şimdi daha kolaydır.

$\{H_1, H_2\}$, H 'nin bir parçalanışı olsun. Eğer $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \cup \mathfrak{g}_2 \cup \{(m, n)\}$,

$$\mathfrak{g}_1 \subseteq \Gamma_{H_1} \quad \mathfrak{g}_2 \subseteq \Gamma_{H_2} \quad 0 \neq m \in \text{serbest}(L_{H_1}) \text{ ve } 0 \neq n \in \text{serbest}(L_{H_2})$$

olacak şekilde g ve Γ doğuraylar sistemi varsa, H 'ye H_1 ve H_2 nin bir yapıştırmasıdır, denir.

Tamsayılar kümesine göre bir elemanın Apery kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir. Y , $\mathbb{N}$ 'nin bir alt kümesi ve $n \in \langle Y \rangle \setminus \{0\}$ ise

$$Ap(Y, n) = \{n \in \langle Y \rangle \mid s - n \notin \langle Y \rangle\}.$$

Açıkça $m \in \langle Y \rangle$ ise $m = s + tn$ olacak şekilde tek bir $(s, t) \in Ap(Y, n) \times \mathbb{N}$ vardır.

Aşağıdaki teknik lemma, yapıştırma fikrini vermek için $\langle H_1 \rangle \cap \langle H_2 \rangle$ yi kontrol etmede yardımcı olacaktır.

Lemma 4.1.1

$$g_1 \subseteq \Gamma_{H_1} \quad g_2 \subseteq \Gamma_{H_2} \quad 0 \neq m \in \text{serbest}(L_{H_1}) \quad \text{ve} \quad 0 \neq n \in \text{serbest}(L_{H_2})$$

olacak şekilde

$$g = g_1 \cup g_2 \cup \{(m, n)\}$$

Γ 'nın doğuray sistemi olsun.

$$s_1 + s_2 = rg(m) + \alpha_1 + \alpha_2$$

olacak şekilde

$$s_1, \alpha_1 \in Ap(H_1, \varphi(m)) \quad \text{ve} \quad s_2, \alpha_2 \in Ap(H_2, \varphi(m)) \quad \text{ve} \quad t \in \mathbb{N}$$

olsun. O hâlde,

$$r = 0, \quad s_1 = \alpha_1 \quad \text{ve} \quad s_2 = \alpha_2 \quad \text{dir.}$$

İspat:

Genelliği bozmaksızın $H_1 = \{h_1, h_2, \dots, h_t\}$ ve $H_2 = \{h_{t+1}, h_{t+2}, \dots, h_r\}$ olsun.

$$0 \neq \varphi(m) = \varphi(n) \in \langle H_1 \rangle \cap \langle H_2 \rangle$$

olduğunu gözlemleyelim. Bunun için bazı $m_1, m_2, \dots, m_t \in \mathbb{N}$ için

$$\varphi(m) = m_1 h_1 + \dots + m_t h_t = m_{t+1} h_{t+1} + \dots + m_r h_r$$

olur.

$$s_1, \alpha_1 \in \langle H_1 \rangle \text{ ve } s_2, \alpha_2 \in \langle H_2 \rangle$$

olduğundan

$$s_1 = c_1 h_1 + c_2 h_2 + \cdots + c_t h_t$$

$$\alpha_1 = e_1 h_1 + e_2 h_2 + \cdots + e_t h_t$$

$$s_2 = c_{t+1} h_{t+1} + c_{t+2} h_{t+2} + \cdots + c_r h_r$$

$$\alpha_2 = e_{t+1} h_{t+1} + e_{t+2} h_{t+2} + \cdots + e_r h_r$$

olacak şekilde $c_1, \dots, c_r, e_1, \dots, e_r \in \mathbb{N}$ vardır. Hipotez ile

$$s_1 + s_2 = rg(m) + \alpha_1 + \alpha_2 \text{ dir.}$$

O hâlde.

$$[c_1 l_1 + \cdots + c_r l_r] \Gamma [(rm_1 + e_1) l_1 + \cdots + (rm_t + e_t) l_t + e_{t+1} l_{t+1} + \cdots + e_r l_r]$$

g, Γ 'nın doğuraylar sistemi olduğu için, B boştan farklı bir küme olsun.

$$g \subseteq serbest(B) \times serbest(B)$$

olsun.

$$g^0 = g \cup g^{-1} \cup \Delta(serbest(B))$$

tanımlayalım:

$$g^1 = \{(y + x, z + x) \mid (y, z) \in g^0, x \in serbest(B)\}$$

o hâlde,

$$\text{her } 0 \leq j \leq t - 1 \text{ için,}$$

$$y_0 = y, y_t = z \text{ ve } (y_j, y_{j+1}) \in g^1, t \in \mathbb{N}, y_0, \dots, y_t \in serbest(B)$$

olacak şekilde

$$Cong(g); (y, z) \in serbest(B) \times serbest(B)$$

ikililerinin kümesidir. Önermesi yardımıyla

$$y_0 = c_1 l_1 + \dots + c_r l_r$$

$$y_j = (rm_1 + e_1)l_1 + \dots + (rm_t + e_t)l_t + e_{t+1}l_{t+1} + \dots + e_r l_r$$

ve

$$(y_j, y_{j+1}) \in \mathfrak{g}^1, \forall j \in \{0, \dots, i-1\}.$$

olacak şekilde

$$y_0, \dots, y_i \in \text{serbest}(L)$$

vardır.

Eğer bazı $y_{j_1}, y_{j_2}, \dots, y_{j_r} \in \mathbb{N}$ için $y_j = y_{j_1} l_1 + \dots + y_{j_r} l_r$ ise,

$$s_1 = y_{j_1} \alpha_1 + \dots + y_{j_t} \alpha_t$$

ve

$$s_2 = y_{j_{t+1}} \alpha_{t+1} + \dots + y_r \alpha_r$$

olduğu j üzerinden tümevarımla ispatlanır.

$j = 0$ için sonuç açıktır.

j için sonucun doğru olduğunu kabul edip $j + 1$ için ispatlayalım:

$(y_j, y_{j+1}) \in \mathfrak{g}^1$ olduğundan $(y_j, y_{j+1}) = (x + z, y + z)$ olacak şekilde

$$(x, y) \in \mathfrak{g} \cup \mathfrak{g}^1 \cup \Delta(\text{serbest}(L))$$

vardır. 5 durum vardır:

1) $(x, y) \in \Delta(\text{serbest}(L))$ ise sonuç doğrudur çünkü $y_j = y_{j+1}$ dir.

2) $(x, y) = (m, e)$ ise

$$y_j = x + z = m + z$$

olduğundan,

$$s_1 = y_{j_1} \alpha_1 + \dots + y_{j_t} \alpha_t = \varphi(m) + z_1 \alpha_1 + \dots + z_r \alpha_r$$

olur. Bununla beraber $s_1 \notin Ap(H_1, \varphi(m))$ olur. Bu hipotez ile çelişir.

Dolayısıyla bu durum olamaz.

3) Aynı durum $(x, y) = (e, m)$ için de geçerlidir.

4) Eğer $(x, y) \in \mathfrak{g}_1 \cup \mathfrak{g}_1^{-1}$ ise

$$(x, y) = (v_1 l_1 + \dots + v_t l_t, w_1 l_1 + \dots + w_t l_t)$$

olacak şekilde $v_1, v_2, \dots, v_t, w_1, w_2, \dots, w_t \in \mathbb{N}$ vardır. Bunun için

$$y_j = (v_1 + z_1)l_1 + \dots + (v_t + z_t)l_t + z_{t+1}l_{t+1} + \dots + z_r l_r$$

ve

$$y_{j+1} = (w_1 + z_1)l_1 + \dots + (w_t + z_t)l_t + z_{t+1}l_{t+1} + \dots + z_r l_r$$

olur.

$(x, y) \in \Gamma$ olduğundan,

$$v_1 l_1 + v_2 l_2 + \dots + v_r l_r = w_1 l_1 + w_2 l_2 + \dots + w_r l_r$$

olur. Bunun için

$$y_{j+1_1} l_1 + \dots + y_{j+1_t} l_t = y_{j_1} l_1 + \dots + y_{j_t} l_t = s_1$$

ve

$$y_{j+1_{h+1}} l_{h+1} + \dots + y_{j+1_r} l_r = y_{j_{h+1}} l_{h+1} + \dots + y_{j_r} l_r = s_2$$

olur.

5) $(x, y) \in \mathfrak{g}_2 \cup \mathfrak{g}_2^{-1}$ daha önceki duruma benzerdir.

$$y_j = (rm_1 + e_1)l_1 + \dots + (rm_t + e_t)l_t + e_{t+1}l_{t+1} + \dots + e_r l_r$$

Olduğundan

$$s_1 = (rm_1 + e_1)h_1 + \dots + (rm_t + e_t)h_t$$

ve

$$s_2 = e_{t+1}h_{t+1} + \dots + e_r h_r$$

elde edilir.

$r = 0$ olduğu açıktır. Çünkü;

$$s_1 \in Ap(H_1, \varphi(m)) \text{ ve } \varphi(m) = m_1 h_1 + \dots + m_t h_t \text{ dir.}$$

bunun için $r = 0$, $s_1 = \alpha_1$ ve $s_2 = \alpha_2$ dir.

Yapıştırma kavramı birkaç yolla karakterize edilebilir. [9] da verilenlerin bazılarını burada toplarız. Bu, iki sayısal yarıgrubun yapıştırılmasını tanımlamamıza yardımcı olacaktır.

Teorem 4.1.2

H pozitif tamsayılar kümesinin bir alt kümesi olsun. $\{H_1, H_2\}$, H 'nin parçalanışı olsun.

Aşağıdakiler denktir.

- 1) H , H_1 ve H_2 'nin yapıştırmasıdır.
- 2) $c_1 = \text{obeb}(H_1)$ ve $c_2 = \text{obeb}(H_2)$ ise, o halde $\text{okek}\{c_1, c_2\} \in \langle H_1 \rangle \cap \langle H_2 \rangle$
- 3) $g: Ap(H_1, c) \times Ap(H_2, c) \rightarrow Ap(H, c)$

$$g(s_1, s_2) = s_1 + s_2$$

birebir ve örten dönüşümü olacak şekilde $c \in \langle H_1 \rangle \cap \langle H_2 \rangle$, $c \neq 0$ vardır.

- 4) Her g_1 ve g_2 sırasıyla Γ_{H_1} ve Γ_{H_2} nin doğuraylarının sistemleri için $g_1 \cup g_2 \cup \{m, e\}$, Γ 'nin doğuraylarının bir sistemi olacak şekilde

$$(m, e) \in \Gamma, 0 \neq m \in \text{serbest}(L_{H_1}) \text{ ve } 0 \neq e \in \text{serbest}(L_{H_2})$$

vardır.

İspat:

$1 \Rightarrow 2$:

$c = \varphi(m)$ olsun.

$$(m, e) \in \Gamma, 0 \neq m \in \text{serbest}(L_{H_1}) \text{ ve } 0 \neq e \in \text{serbest}(L_{H_2})$$

olduğu için $c \in \langle H_1 \rangle \cap \langle H_2 \rangle, c \neq 0$ elde edilir.

$c = \text{okek}\{c_1, c_2\}$ olduğunu ispatlayalım:

$c \in \langle H_1 \rangle \cap \langle H_2 \rangle$ olduğundan c, c_1 ve c_2 nin bir katıdır.

Dolayısıyla $c, \text{okek}\{c_1, c_2\}$ nin bir katıdır.

$$\text{okek}\{c_1, c_2\} = v_1 - w_1 = v_2 - w_2$$

olacak şekilde $i \in \{1, 2\}$ için $v_i, w_i \in \langle H_i \rangle$ var olduğunu kolaylıkla söylenir.

O hâlde

$$i \in \{1, 2\} \text{ için } v_i = r_i c + s_i \text{ ve } w_i = t_i c + \alpha_i$$

olacak şekilde

$$r_1, r_2, t_1, t_2 \in \mathbb{N}, s_1, \alpha_1 \in \text{Ap}(H_1, c) \text{ ve } s_2, \alpha_2 \in \text{Ap}(H_2, c)$$

vardır.

$v_1 - w_1 = v_2 - w_2$ kullanılarak,

$$(r_1 + t_2)c + s_1 + \alpha_2 = (r_2 + t_1)c + s_2 + \alpha_1$$

elde ederiz. Genelliği bozmaksızın $r_1 + t_2 \leq r_2 + t_1$ olsun.

O hâlde,

$$s_1 + \alpha_2 = (r_2 + t_1 - r_1 - t_2)c + s_2 + \alpha_1$$

olur.

Lemma 5.1.1 ile $s_1 = \alpha_1$ ve $s_2 = \alpha_2$ elde edilir. Dolayısıyla

$$\text{okek}\{c_1, c_2\} = v_1 - w_1 = r_1 c + s_1 - t_1 c - \alpha_1 = (r_1 - t_1)c$$

olur.

Bu $\text{okek}\{c_1, c_2\}$ nin c 'nin bir katı olduğunu ispatlar. Sonuç olarak $c = \text{okek}\{c_1, c_2\}$ elde edilir.

2 $\Rightarrow$ 3:

$c = \text{okek}\{c_1, c_2\}$ olsun.

Eğer $(s_1, s_2) \in Ap(H_1, c) \times Ap(H_2, c)$ ise $s_1 + s_2 \in Ap(H, c)$ olur.

$s_1 + s_2 \in \langle H \rangle$ olduğundan, $s_1 + s_2 = rc + s$ olacak şekilde $(s, r) \in Ap(H, c) \times \mathbb{N}$ vardır. $s \in \langle H \rangle$ olduğundan $s = e_1 h_1 + \dots + e_t h_t$ olacak şekilde negatif olmayan $e_1, \dots, e_t$ tamsayıları vardır. Buradan

$$\alpha_1 = e_1 h_1 + \dots + e_t h_t \in Ap(H_1, c)$$

ve

$$\alpha_2 = e_{t+1} h_{t+1} + \dots + e_r h_r \in Ap(H_2, c)$$

elde edilir. O hâlde

$$s_1 + s_2 = rc + \alpha_1 + \alpha_2 \text{ dir.}$$

Bundan dolayı $s_1 - \alpha_1 = rc + s_2 - \alpha_2$ olur.

$s_1 - \alpha_1$, c_1 in bir katı ve $rc + s_2 - \alpha_2$, c_2 nin bir katıdır. Sonuç olarak bazı d tamsayıları için

$$s_1 - \alpha_1 = rc + s_2 - \alpha_2 = dc$$

elde edilir. s_1 ve α_1 her ikisi $Ap(H_1, c)$ kümesine ait olduğundan r sıfır olmalıdır. Aksi takdirde $\alpha_2 \notin Ap(H_2, c)$ olur. Bu $s = s_1 + s_2 \in Ap(H, c)$ yi ispatlar.

Şimdi g 'nin 1 – 1(birebir) olduğunu gösterelim: $g(s_1, s_2) = g(\alpha_1, \alpha_2)$ olsun.

O hâlde $s_1 - \alpha_1 = s_2 - \alpha_2$ dir. Yukarıdaki bilgilerden $s_1 - \alpha_1 = s_2 - \alpha_2 = dc$ olacak şekilde bir d tamsayısı vardır. Ve yine d sıfır olmalıdır. Buradan $s_1 = \alpha_1$ ve $s_2 = \alpha_2$ elde edilir.

Son olarak $s = e_1 h_1 + \dots + e_r h_r \in Ap(H, c)$ alalım.

$s_1 = e_1 h_1 + \dots + e_t h_t$ ve $s_2 = e_{t+1} h_{t+1} + \dots + e_r h_r$ olsun. O hâlde

$$(s_1, s_2) \in Ap(H_1, c) \times Ap(H_2, c) \text{ ve } g(s_1, s_2) = s$$

elde edilir.

3 $\Rightarrow$ 4:

$c \in \langle H_1 \rangle \cap \langle H_2 \rangle$ olduğundan

$$c = m_1 h_1 + \cdots + m_t h_t$$

olacak şekilde $m_1, m_2, \dots, m_t \in \mathbb{N}$ vardır. $\mathfrak{g}_1$ ve $\mathfrak{g}_2$ sırasıyla Γ_{H_1} ve Γ_{H_2} nin doğuraylarının sistemleri ve $m = m_1 l_1 + \cdots + m_t l_t$ ve $n = m_{t+1} l_{t+1} + \cdots + m_r l_r$ olsun. O hâlde

$0 \neq m \in \text{serbest}(L_{H_1}), 0 \neq n \in \text{serbest}(L_{H_2})$ ve $\varphi(m) = \varphi(n) = c$ olur. Bundan dolayı, $(m, n) \in \Gamma$ 'dir.

$\mathfrak{g}_1 \cup \mathfrak{g}_2 \cup \{(m, n)\}$ nin Γ doğuraylarının bir sistemi olduğunu gösterelim.

$\mathfrak{g} \subseteq \Gamma$ olduğundan $\text{cong}(\mathfrak{g}) \subseteq \Gamma$ olur. $(e_1 l_1 + \cdots + e_r l_r, v_1 l_1 + \cdots + v_r l_r) \in \Gamma$ alalım. $e_1 h_1 + \cdots + e_t h_t \in \langle H_1 \rangle$ olduğundan, $e_1 h_1 + \cdots + e_t h_t = r_1 c + s_1$ olacak şekilde $(s_1, r_1) \in \text{Ap}(H_1, c) \times \mathbb{N}$ vardır.

Benzer şekilde

$$e_{t+1} h_{t+1} + \cdots + e_r h_r = r_2 c + s_2$$

$$v_1 h_1 + v_2 h_2 + \cdots + v_t h_t = p_1 c + \alpha_1$$

$$v_{t+1} h_{t+1} + \cdots + v_r h_r = p_2 c + \alpha_2$$

olacak şekilde

$$(\alpha_1, p_1) \in \text{Ap}(H_1, c) \times \mathbb{N} \text{ ve } (s_2, r_2), (\alpha_2, p_2) \in \text{Ap}(H_2, c)$$

vardır. $e_1 h_1 + \cdots + e_r h_r = v_1 h_1 + \cdots + v_r h_r$ den

$$(r_1 + r_2)c + s_1 + s_2 = (p_1 + p_2)c + \alpha_1 + \alpha_2$$

elde edilir. $r_1 + r_2 = p_1 + p_2$ olur. Çünkü $s_1 + s_2, \alpha_1 + \alpha_2 \in \text{Ap}(Y, c)$ dir. Bundan dolayı

$$s_1 + s_2 = \alpha_1 + \alpha_2$$

olur. g 'nin birebirliğini kullanarak $s_1 = \alpha_1$ ve $s_2 = \alpha_2$ elde edilir.

$$s_1 = \alpha_1 = j_1 h_1 + j_2 h_2 + \dots + j_t h_t \text{ ve } s_2 = \alpha_2 = j_{t+1} h_{t+1} + \dots + j_r h_r$$

olacak şekilde $j_1, j_2, \dots, j_r \in \mathbb{N}$ olsun. O hâlde

$$(e_1 l_1 + \dots + e_t l_t, (r_1 m_1 + j_1) l_1 + \dots + (r_t m_t + j_t) l_t) \in \Gamma_{H_1}$$

(çünkü $e_1 h_1 + \dots + e_t h_t = r_1 c + s_1$) ve bunun için

$$(e_1 l_1 + \dots + e_t l_t, (r_1 m_1 + j_1) l_1 + \dots + (r_t m_t + j_t) l_t) \in \text{cong}(\mathfrak{g}_1) \subseteq \text{cong}(\mathfrak{g})$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$(e_{t+1} l_{t+1} + \dots + e_h l_h, (r_2 m_{t+1} + j_{t+1}) l_{t+1} + \dots + (r_2 m_h + j_h) l_h) \in \text{cong}(\mathfrak{g}_2) \subseteq \text{cong}(\mathfrak{g}) \text{ olur.}$$

$\text{cong}(\mathfrak{g})$ nun bir kongrüans olduğunu göz önüne alırsak aynı yolla

$$(v_1 l_1 + \dots + v_t l_t, (p_1 m_1 + j_1) l_1 + \dots + (p_1 m_t + j_t) l_t + (p_2 m_{t+1} + j_{t+1}) l_{t+1} + \dots + (p_2 m_h + j_h) l_h) \in \text{cong}(\mathfrak{g})$$

olur.

$\xi = \text{cong}(m, e)$ olsun. $r_1 + r_2 = p_1 + p_2$ olduğundan

$$(r_1 m + r_2 e) \xi (r_1 + r_2) m \xi (p_1 + p_2) m \xi p_1 m + p_2 e$$

olur.

Bunun için, $(r_1 m + r_2 e, p_1 m + p_2 e) \in \text{cong}(\xi(m, e)) \subseteq \text{cong}(\mathfrak{g})$ dir.

4.2 Sayısal Yarıgrupların Yapıştırılması

Yapıştırma kavramını sayısal yarıgruplara çevirelim ve tam kesişim yarıgrupların daima iki tam kesişim sayısal yarıgrupun bir yapıştırması olduğunu ispatlayalım:

Υ_1 ve Υ_2 minimal olarak $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ ve $\{q_{k+1}, \dots, q_p\}$ ile doğurulan iki sayısal yarıgrup olsun.

$\text{ebob}(c, \lambda) = 1$ olacak şekilde $c \in \Upsilon_1 \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ ve $\lambda \in \Upsilon_2 \setminus \{q_{k+1}, \dots, q_p\}$ olsun.

$$Y = \langle \lambda q_1, \dots, \lambda q_k, cq_{k+1}, \dots, cq_p \rangle$$

Y_1 ve Y_2 nin yapıştırması olsun. Bu kavram ile negatif olmayan Tamsayıların yapıştırması kavramı arasındaki bağlantıyı görelim.

Lemma 4.2.1

- 1) $Y, \{\lambda q_1, \dots, \lambda q_k, cq_{k+1}, \dots, cq_p\}$ doğuraylarının minimal sistemli bir sayısal yarıgrubudur.
- 2) $\{\lambda q_1, \dots, \lambda q_k, cq_{k+1}, \dots, cq_p\}$, $\{\lambda q_1, \dots, \lambda q_k\}$ ve $\{cq_{k+1}, \dots, cq_p\}$ nin bir yapıştırmasıdır.

İspat:

- 1) $obeb\{\lambda q_1, \dots, \lambda q_k, cq_{k+1}, \dots, cq_p\} = obeb(c, \lambda) = 1$ olduğu açıktır. Bunun için Y sayısal yarıgruptur.

$$\lambda q_1 = \alpha_1 \lambda q_2 + \dots + \alpha_k \lambda q_k + \alpha_{k+1} cq_{k+1} + \dots + \alpha_p cq_p$$

olsun. O hâlde $\alpha_{k+1} cq_{k+1} + \dots + \alpha_p cq_p$, $c\lambda$ 'nın bir katıdır. Bundan dolayı bazı negatif olmayan r tamsayısı için

$$\lambda q_1 = \alpha_1 \lambda q_2 + \dots + \alpha_k \lambda q_k + c\lambda r$$

olur. Buradan $q_1 = \alpha_2 q_2 + \dots + \alpha_k q_k + cr$ elde edilir. Ancak bu durum imkansızdır. Çünkü $c \in Y_1$ ve q_1 , Y_1 in bir doğurayıdır.

Benzer şekilde $\{\lambda q_1, \dots, \lambda q_k, cq_{k+1}, \dots, cq_p\}$ kümesindeki elemanların kalanı Y 'nin minimal doğuraylarıdır. İspat biter.

Şimdi Teorem 4.1.2 yardımıyla bu iki kavram arasındaki bağlantıyı görelim. Tam kesişimlerin bir yapıştırmasının bir tam kesişim sayısal yarıgrubu verdiğini ispatlamak zor değildir.

Önerme 4.2.2

İki tam kesişimin bir yapıştırması tam kesişimdir.

İspat:

Y_1 ve Y_2 iki tam kesişim sayısal yarıgrup ve Y , Y_1 ve Y_2 nin bir yapıştırması olsun.

Lemma 4.2.1 ile $e(Y) = e(Y_1) + e(Y_2)$ olduğunu biliyoruz. g_1 ve g_2 sırasıyla Y_1 ve Y_2 nin minimal takdimleri olsun. O hâlde

$$j \in \{1,2\} \text{ için } \omega g_j = e(Y_j) - 1 \text{ 'dir.}$$

Lemma 4.2.1 ve Teorem 4.1.2 yi kullanarak Y 'nin $g = g_1 \cup g_2 \cup \{(m, e)\}$ formunda bir takdime sahip olduğunu elde ederiz. Bunun için,

$$\omega g = \omega g_1 + \omega g_2 + 1$$

$$= e(Y_1) - 1 + e(Y_2) - 1 + 1$$

$$= e(Y) - 1$$

Şimdi herhangi bir sayısal yarıgrup için kardinaliteye göre minimal takdim küme kavramı ve küme kapsamı örtüşmesi sonucunu kullanırsak özel olarak bütün minimal takdimlerde aynı kardinaliteye sahip oluruz. Dolayısıyla Y tam bir kesişim olduğunu buluruz. Karşıtı da doğrudur. Şimdi ispatlayalım.

Teorem 4.2.3

$\mathbb{N}$ 'den farklı bir sayısal yarıgrup tam kesişimdir ancak ve ancak iki tam kesişim sayısal yarıgrupun bir yapıştırmasıdır.

İspat:

Yeterlilik: Önerme 4.2.2 'dir.

Gerekliklik:

Y , $H = \{q_1, q_2, \dots, q_e\}$ doğuraylarının minimal sistemli bir tam kesişim sayısal yarıgrubu olsun. Y 'nin $\omega g = e - 1$ ile bir takdime sahip olduğunu bilinir. $\kappa_{e-1} \subseteq \Gamma_{H_1} \cup \Gamma_{H_2}$ olacak şekilde

$$L_e = [H], L_{e-1} = [H_1, H_2] \text{ ve } g = \kappa_e = \kappa_{e-1} \cup \{(e_{H_1}(\lambda(H_1)), e_{H_2}(\lambda(H_2)))\}$$

elde ederiz. O hâlde H , H_1 ve H_2 nin bir yapıştırmasıdır.

$H_1 = \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ ve $H_2 = \{q_{k+1}, \dots, q_e\}$ olsun. $c_1 = \text{obeb}(H_1)$ ve $c_2 = \text{obeb}(H_2)$ olsun.

$$\gamma_1 = \left\langle \frac{q_1}{c_1}, \frac{q_2}{c_1}, \dots, \frac{q_k}{c_1} \right\rangle \text{ ve } \gamma_2 = \left\langle \frac{q_{k+1}}{c_2}, \frac{q_{k+2}}{c_2}, \dots, \frac{q_e}{c_2} \right\rangle$$

tanımlayalım:

Açıkça $\left\{ \frac{q_1}{c_1}, \frac{q_2}{c_1}, \dots, \frac{q_k}{c_1} \right\}$ ve $\left\{ \frac{q_{k+1}}{c_2}, \frac{q_{k+2}}{c_2}, \dots, \frac{q_e}{c_2} \right\}$ sırasıyla γ_1 ve γ_2 nin doğuraylarının minimal sistemleridir.

H , H_1 ve H_2 nin yapıştırması olduğundan Teorem 4.1.2

$$c_1 c_2 = \text{ekok}(c_1, c_2) \in \langle q_1, q_2, \dots, q_k \rangle \cap \langle q_{k+1}, \dots, q_e \rangle$$

olur. Bunun için $c_2 \in \gamma_1$ ve $c_1 \in \gamma_2$ olur. Bazı $j \in \{1, \dots, k\}$ için $c_2 = \frac{q_j}{c_1}$ olsun. O hâlde,

$c_1 c_2 = e_j \in \langle q_{k+1}, \dots, q_e \rangle$ dir. Bu H 'nin S doğuraylarının minimal sistemi olması ile çelişir. Buradan $c_2 \notin \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ elde edilir.

Benzer yolla $c_1 \notin \{q_{k+1}, \dots, q_e\}$ elde edilir. Dolayısıyla γ , γ_1 ve γ_2 nin bir yapıştırmasıdır.

γ_1 ve γ_2 nin tam kesişim olduğunu ispatlayalım:

Açıkça $j \in \{1, 2\}$ için $g_j = \Gamma_{H_1} \cap g$, γ 'nin bir takdimidir. $\omega g_1 + \omega g_2 = e - 2$ olduğundan $\omega g_1 \geq k - 1$ ve $\omega g_2 \geq e - k - 1$ olur. Buradan,

$$\omega g_1 = k - 1 \text{ ve } \omega g_2 = e - k - 1 \text{ dir.}$$

Bu γ_1 ve γ_2 nin tam kesişim olduğunu kanıtlar.

Bu bölümü her tam kesişim sayısal yarıgrubun simetrik olduğunu ispatlayarak tamamlayalım. Bu simetrinin yapıştırma altında korunduğunu gösteren aşağıdaki bir sonucudur.

Önerme 4.2.4

Simetrik sayısal yarıgrupların yapıştırması simetriktir.

İspat:

Y_1 ve Y_2 sırasıyla $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ ve $\{q_{k+1}, \dots, q_e\}$ doğuraylarının minimal sistemli sayısal yarıgrupları ve $obeb(c, \lambda) = 1$ olacak şekilde $c \in Y_1 \setminus \{q_1, q_2, \dots, q_k\}$ ve $\lambda \in Y_2 \setminus \{q_{k+1}, \dots, q_e\}$ olsun. Lemma 4.2.1 'den $\{\lambda q_1, \dots, \lambda q_k, cq_{k+1}, \dots, cq_e\}$, $\{\lambda q_1, \dots, \lambda q_k\}$ ve $\{cq_{k+1}, \dots, cq_e\}$ nin yapıştırmasıdır. Teorem 4.1.2 ile

$$Ap(Y, c\lambda) = \{s_1 + s_2 \mid s_1 \in Ap(H_1, c\lambda), s_2 \in Ap(H_2, c\lambda)\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$Ap(Y, c\lambda) = \{cv_1 + \lambda v_2 \mid v_1 \in Ap(Y_1, c), v_2 \in Ap(Y_2, \lambda)\}$$

olur. Bu sonuç Önerme 2.3.9 'dan elde edilir.

Sonuç 4.2.5

Tam kesişim olan her sayısal yarıgrup simetriktir.

4.3 Serbest Sayısal Yarıgrup

Bu bölümde Bertin ve Carbonne tarafından verilen sayısal yarıgrupların ailesini verelim. Bu ailedeki yarıgruplar tam kesişimlidir. Tanım ve karakterizasyonları aşağıdaki sabitlere dayanır:

Y , $\{q_1, q_2, \dots, q_e\}$ ile minimal olarak doğurulan(üretilen) bir sayısal yarıgrup olsun.

Her $j \in \{2, \dots, e\}$ için

- 1) $c_j = ebob\{q_1, q_2, \dots, q_{j-1}\}$
- 2) $\bar{a}_j = \min\{r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid rq_j, c_j \text{ nin bir katıdır}\}$
- 3) $a_j^* = \min\{r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid rq_j \in \langle q_1, q_2, \dots, q_{j-1} \rangle\}$
- 4) $a_j = \min\{r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid rq_j \in \langle q_1, q_2, \dots, q_{j-1}, q_{j+1}, \dots, q_e \rangle\}$

tanımlayalım. Bu sabitlerin nasıl ilişkili olduğunu gösterelim.

Lemma 4.3.1

Hipotezi ile

$$1) \forall j \in \{2, \dots, e\} \text{ için } \bar{a}_j \leq a_j^*$$

$$2) \forall j \in \{2, \dots, e\} \text{ için } a_j \leq a_j^*$$

$$3) \forall j \in \{2, \dots, e\} (c_{e+1} = 1) \text{ için } \bar{a}_j = \frac{c_j}{c_{j+1}}$$

$$4) q_1 = \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_e$$

İspat:

1) ve 2) tanımdan elde edilir.

$$3) \text{ için } \bar{a}_j q_j = \text{okek}\{q_j, c_j\}$$

$$\text{okek}\{q_j, c_j\} = \frac{q_j c_j}{\text{obeb}\{q_j, c_j\}} = \frac{q_j c_j}{c_{j+1}} \text{ olduğundan } \bar{a}_j = \frac{c_j}{c_{j+1}} \text{ elde edilir.}$$

4) , 3) ü kullanarak ve $c_2 = q_1$ ve $c_{e+1} = 1$ gerçeğinden elde edilir.

$\bar{a}_j$ sabitleri herhangi bir tamsayıyı $q_1, q_2, \dots, q_e$ nin lineer kombinasyonu olarak tek türlü ifade etmek için kullanılabilir.

Lemma 4.3.2

Hipotez ile

her $j \in \{2, \dots, t\}$, $c_j \in \{0, 1, \dots, \bar{a}_j - 1\}$ ve $c_1 \in \mathbb{Z}$ için

y , tek bir şekilde $y = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_e q_e$ olarak yazılabilir.

İspat:

$\text{obeb}\{q_1, q_2, \dots, q_e\} = 1$ olduğundan $y = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \dots + \lambda_e q_e$ olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e$ sayıları vardır.

Bölme algoritmasını kullanarak $0 \leq c_e \leq \bar{a}_e$, $\lambda_e = t \bar{a}_e + c_e$ olacak şekilde t ve c_e tamsayıları vardır. Dolayısıyla

$$y = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \cdots + \lambda_e q_e + t \bar{a}_e q_e + c_e q_e$$

olur.

$q_1, q_2, \dots, q_{e-1}$ türünden ifadesinde $\bar{a}_e q_e$ yerine koyarsak $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_{e-1}$ tamsayılar olacak şekilde

$$y = \kappa_1 q_1 + \kappa_2 q_2 + \cdots + \kappa_{e-1} q_{e-1} + c_e q_e$$

elde edilir.

q_{e-1} in katsayısı ile q_2 katsayısına kadar bu işlemi tekrar edersek istenen elde edilmiş olur.

Şimdi bu ifadenin tek olduğunu ispatlayalım:

her $j \in \{2, \dots, t\}$ için $c_j \lambda_j \in \{0, \dots, \bar{a}_j - 1\}$ olacak şekilde $q_1, q_2, \dots, q_e, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_e$ tamsayıları ile

$$y = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \cdots + c_e q_e = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \cdots + \lambda_e q_e$$

olur.

$c_l \neq \lambda_l$ olacak şekilde $l, \{1, \dots, e\}$ kümesindeki en büyük tamsayı olsun. $c_1 q_1 = \lambda_1 q_1$, c_1 in λ_1 e eşit olması gerektiğinden l 'nin birden büyük olmalıdır. Genelliği bozmaksızın $c_l \geq \lambda_l$ olsun. $0 \leq c_l - \lambda_l < \bar{a}_l$ olduğundan ve $\bar{a}_l$ nin minimalliğinden, $c_l = \lambda_l$ elde edilir. Bu bir çelişkidir.

Önerme 4.3.3

Hipotez ile aşağıdakiler denktir.

$$1) q_1 = a_2^*, \dots, a_e^*$$

$$2) \forall j \in \{2, \dots, e\} \text{ için}$$

$$Ap(Y, q_1) = \{c_2 q_2 + \cdots + c_e q_e \mid c_j \in \{0, \dots, a_j^* - 1\}\}$$

$$3) F(Y) + q_1 = (a_2^* - 1)q_2 + \cdots + (a_e^* - 1)q_e$$

$$4) \forall j \in \{2, \dots, e\} \text{ için, } \bar{a}_j = a_j^*$$

$$5) \forall j \in \{2, \dots, e\} \text{ için, } a_j = \bar{a}_j$$

$$6) \forall j \in \{2, \dots, e\} \text{ için, } a_j = \bar{a}_j = a_j^*$$

İspat:

1 $\Rightarrow$ 2:

Bölme algoritmasını kullanarak $\bar{a}_j$ yerine a_j^* alırsak $c_j \in \{0, \dots, a_j^* - 1\}$ olacak şekilde $Ap(Y, q_1)$ in her v elemanı $v = c_2q_2 + \dots + c_eq_e$ formunda olur. Bunun için,

$$\forall j \in \{2, \dots, e\} \text{ için } Ap(Y, q_1) \subseteq \{c_2q_2 + \dots + c_eq_e \mid c_j \in \{0, \dots, a_j^* - 1\}\}$$

olur. Bu son kümenin eleman sayısı(kardinalitesi) $a_2^*, \dots, a_e^*$ a eşit ya da küçüktür. Hipotez $a_2^*, \dots, a_e^* = q_1$ ve $Ap(Y, q_1) = q_1$ ile istenen eşitlik elde edilir.

2 $\Rightarrow$ 3:

$F(Y) + q_1 = \max Ap(Y, q_1)$ olduğunu Önerme 2.3.12 'den elde edilir.

3 $\Rightarrow$ 4:

Lemma 4.3.2 'deki gibi $\forall l \in \{2, \dots, j-1\}$ için $0 \leq c_l \leq \bar{a}_l$ olacak şekilde $\bar{a}_l q_l$ ifadesini $\bar{a}_j = c_1q_1 + \dots + c_{j-1}q_{j-1}$ ile ifade edebiliriz. ($c_1, c_2, \dots, c_{j-1}$ tamsayılar)

$\bar{a}_j \leq a_j^*$ olduğundan $c_1 \in \mathbb{N}$ ise, $\bar{a}_j = a_j^*$ olur.

$c_1 < 0$ olmasın. O hâlde,

$$c_2q_2 + \dots + c_{j-1}q_{j-1} = \bar{a}_jq_j + (-c_1)q_1$$

olur.

Buradan $c_2q_2 + \dots + c_{j-1}q_{j-1} \notin Ap(Y, q_1)$ elde edilir.

Sonuç olarak

$$(a_2^* - 1)q_2 + \dots + (a_e^* - 1)q_e \notin Ap(Y, q_1)$$

olur.

Bu durum Önerme 2.3.12 'den 3 ile çelişir.

4 $\Rightarrow$ 5:

Tanım ile $a_e = a_e^*$ 'dir. Bunun için $a_e = \bar{a}_e$ olur.

$\bar{a}_{l+1} = a_{l+1}, \dots, \bar{a}_e = a_e$ olsun. $\bar{a}_l = a_l$ olduğunu ispatlayalım:

a_j^* nin tanımından ve bölme algoritmasını bir kez daha kullanarak

$\forall l+r \in \{l+1, \dots, e\}$ için $b_1, \dots, b_{l-1}, b_{l+1}, \dots, b_e \in \mathbb{N}$ ve $b_{l+r} < a_{l+r}^*$ olacak şekilde $a_l q_l$,

$$a_l q_l = b_1 q_1 + \dots + b_{l-1} q_{l-1} + b_{l+1} q_l + \dots + b_e q_e$$

olarak ifade edilebilir. $\bar{a}_e = a_e^*$ olduğundan $b_e = 0$ olmalıdır.

Aksi hâlde,

$$b_e q_e = -b_1 q_1 + \dots + (-b_{l-1}) q_{l-1} + a_l q_l + (-b_{l+1}) q_{l+1} + \dots + (-b_{e-1}) q_{e-1}$$

olur ki bu c_p 'nin bir katıdır ve $b_e < \bar{a}_e$ dir.

Aynı yolla,

$b_{l+1} = \dots = b_e = 0$ elde edilir. Bunun için $a_l = \bar{a}_l$ ve $a_l = a_l^*$ olur.

5 $\Rightarrow$ 6:

$\forall j \in \{2, \dots, e\}$ için $a_j = a_j^*$ olduğunu görelim. Açıkça $a_e = a_e^*$ dir. $a_{l+1} = a_{l+1}^*, \dots, a_e = a_e^*$ olduğunu kabul edelim. $a_l = a_l^*$ olduğunu ispatlayalım:

$\forall l+r \in \{l+1, \dots, e\}$ için $\bar{a}_{l+r} = a_{l+r} = a_{l+r}^*$ olur. Bunun için bir önceki (4 $\Rightarrow$ 5) teki adımları tekrar edebiliriz.

6 $\Rightarrow$ 1:

Bu Lemma 4.3.1 'in doğrudan sonucudur.

Eğer en son önermenin koşullarının herhangi birini sağlayan $\{q_1, \dots, q_e\}$ minimal doğuraylarının kümesinin bir düzenlemesi varsa $\mathcal{Y}$ sayısal yarıgrubuna serbesttir denir.

Yukarıda bahsedildiği gibi serbest sayısal yarıgruplar tam kesişimdir.

Teorem 4.3.4

Y , $\mathbb{N}$ 'den farklı bir sayısal yarıgrup olsun. Y 'nin serbest olması için gerek ve yeter koşul $e(Y) - 1$ ve $\mathbb{N}$ gömme boyutları bir serbest sayısal yarıgrupun yapıştırması olmasıdır.

İspat:

Gerekliklik: $\{q_1, \dots, q_e\}$, doğuraylarının minimal sistemi Önerme 4.3.3 'in koşullarını sağlasın. Y 'nin $W = \left\langle \frac{q_1}{c_p}, \frac{q_2}{c_p}, \dots, \frac{q_{e-1}}{c_e} \right\rangle$ nin yapıştırması olduğunu ve $\mathbb{N} = \langle 1 \rangle$ olduğunu ispatlayalım. ($c_e = obeb\{q_1, \dots, q_{e-1}\}$ olduğunu hatırlayalım).

$obeb\{q_e, c_e\} = 1$, $c_e = \bar{a}_e$ olduğundan hipotez ile $a_e \geq 2$ olur.

Bunun için,

$$c_e q_e \in \langle q_1, \dots, q_{e-1} \rangle \mid \{q_1, \dots, q_{e-1}\}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$q_e \in W \setminus \left\{ \frac{q_1}{c_e}, \frac{q_2}{c_e}, \dots, \frac{q_{e-1}}{c_e} \right\}$$

olur.

$\{q_1, \dots, q_e\} = \left\{ c_e \frac{q_1}{c_e}, \dots, c_e \frac{q_{e-1}}{c_e}, q_e \cdot 1 \right\}$ olduğundan Y 'nin W ve $\mathbb{N}$ 'nin bir yapıştırması olduğu elde edilir.

Şimdi W 'nin serbest olduğunu gösterelim:

$$\hat{a}_j^* = \min \left\{ r \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid r \frac{q_j}{c_e} \in \left\langle \frac{q_1}{c_e}, \frac{q_2}{c_e}, \dots, \frac{q_{j-1}}{c_e} \right\rangle \right\}$$

tanımlayalım. $j \in \{2, \dots, e-1\}$ için $\hat{a}_j^* = a_j^*$ olur. $c_e = a_e^*$ olduğundan $\hat{a}_e^* = c_e$ elde edilir. Y serbest olduğundan $\frac{q_1}{c_e} = \hat{a}_2^* \dots \hat{a}_{e-1}^*$ olduğunda $q_1 = a_2^* \dots a_e^*$ olduğunu bilir. Bu da W 'nin Önerme 4.3.3 ile serbest olduğunu verir.

Yeterlilik:

Y , minimal olarak $\{v_1, \dots, v_{e-1}\}$ ve $\mathbb{N} = \langle 1 \rangle$ ile doğurulan W 'nin bir yapıştırması olsun. O hâlde bazı $c \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ve bazı $q_e \in W \setminus \{v_1, \dots, v_{e-1}\}$ için,

$$\{q_1, \dots, q_e\} = \{cv_1, \dots, cv_{e-1}, q_e \cdot 1\}$$

formunda Y doğuraylarının bir minimal sistemi vardır. Ayrıca,

$$cq_e \in \langle cv_1, \dots, cv_{e-1} \rangle \cap \langle q_e \rangle$$

olur.

a_j^* ve $\hat{a}_j^*$ yi yukarıdaki gibi tanımlayalım.

$\langle q_1, \dots, q_{e-1} \rangle$ deki herhangi bir elemanın c 'nin bir katı olduğunu ve $obeb\{c, q_e\} = 1$ olduğunu gözlemleriz. Bu $a_e^* = c$ 'yi verir.

Ek olarak $\forall j \in \{2, \dots, e-1\}$ için $a_j^* = \hat{a}_j^*$ olur. W serbest olduğundan

$$v_1 = \hat{a}_2^* \dots \hat{a}_{e-1}^* \hat{a}_e^* \text{ dir.}$$

Bundan dolayı $cv_1 = \hat{a}_2^* \dots \hat{a}_{e-1}^* \hat{a}_e^*$ dir.

Bu Y 'nin serbest olduğunu gösterir. Çünkü Önerme 4.3.3 'in koşullarından birini sağlar.

Sonuç 4.3.5

Her serbest sayısal yarıgrup bir tam kesişimdir. Başka bir sonuç olarak serbest bir sayısal yarı grubun minimal takdiminin açık bir tanımı elde edilir.

Sonuç 4.3.6

$Y, \{q_1, \dots, q_e\}$ doğuraylarının minimal kümesinin düzenlenmesiyle bir sayısal yarıgrup olsun. Bazı $b_{j_1}, \dots, b_{j_{j-1}} \in \mathbb{N}$ için,

$$a_j^* q_j = b_{j_1} q_1 + \dots + b_{j_{j-1}} q_{j-1}$$

olsun. O hâlde,

$$\{(a_j^* l_j, b_{j_1} l_1 + \dots + b_{j_{j-1}} l_{j-1}) \mid j \in \{2, \dots, e\}\}$$

Y 'nin bir minimal takdimidir.

İspat:

En son teoremi ve Önerme 4.2.2 'yi kullanarak tümevarımla ve yapıştırma tanımı ile elde edilir.

Sonuç 4.3.7

Y bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdakiler denktir.

1) $Y, \{q_1, q_2, \dots, q_e\}$ minimal doğuraylarının düzenlenmesiyle serbesttir.

2) $Y, \{(b_j l_j, b_{j_1} l_1 + \dots + b_{j_{j-1}} l_{j-1}) \mid j \in \{2, \dots, e\}\}$ takdimine sahiptir.

Örnek 4.3.8

$Y_1 = \langle 3, 4 \rangle$ ve $Y_2 = \langle 5, 6 \rangle$ sayısal yarıgrupları için

$$p = 7 \in Y_1 - \{3, 4\} \text{ ve } q = 11 \in Y_2 - \{5, 6\}$$

olacak şekilde p ve q seçelim. Dolayısıyla

$$p = 7 = 1.3 + 1.4$$

ve

$$q = 11 = 1.5 + 1.6$$

şeklinde olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$Y = \langle 11.3, 11.4, 7.5, 7.6 \rangle = \langle 33, 44, 35, 42 \rangle$$

Y sayısal yarıgrubu Y_1 ve Y_2 nin yapıştırması ile elde edilir. Frobenius sayısı ise $F(Y) = 265$ 'tir.

Örnek 4.3.9

$Y_1 = \langle 9, 10, 11, 12 \rangle$ ve $Y_2 = \langle 3, 7, 11 \rangle$ sayısal yarıgrupları için

$$p = 45 \in Y_1 - \{9, 10, 11, 15\} \text{ ve } q = 21 \in Y_2 - \{3, 7, 11\}$$

olacak şekilde p ve q seçelim. Dolayısıyla

$$p = 45 = 1.9 + 1.10 + 1.11 + 1.15$$

ve

$$q = 21 = 1.3 + 1.7 + 1.11$$

şeklinde olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$Y = \langle 21.9, 21.10, 21.11, 21.12, 45.3, 45.7, 45.11 \rangle$$

$$Y = \langle 189, 210, 231, 252, 135, 315, 495 \rangle$$

Y sayısal yarıgrubu Y_1 ve Y_2 nin yapıştırması ile elde edilir. Frobenius sayısı ise $F(Y) = 1851$ 'dir.

Teorem 4.3.10

Y sayısal yarıgrup ve $H := H_1 \cup H_2$ kümesi Y 'nin minimal üreteç kümesi ve

$$k_1 = \text{ebob}(H_1) \quad k_2 = \text{ebob}(H_2)$$

olsun. Y_1 ve Y_2 sayısal yarıgruplarını

$$Y_1 = \langle \frac{H_1}{k_1} \rangle \text{ ve } Y_2 = \langle \frac{H_2}{k_2} \rangle$$

şeklinde tanımlayalım. O hâlde Y_1 ve Y_2 sayısal yarıgruplarının yapıştırılması ile oluşan Y sayısal yarıgrubu için

$$F(Y) = k_1 F(Y_1) + k_2 F(Y_2) + k_1 k_2$$

şeklinde bulunur.

İspat: [10].

Örnek 4.3.11

Örnek 4.3.8 'de $Y_1 = \langle 3,4 \rangle$ ve $Y_2 = \langle 5,6 \rangle$ sayısal yarıgrupları için Y_1 ve Y_2 nin yapıştırması ile edilen Y sayısal yarıgrubunu

$$Y = \langle 11.3, 11.4, 7.5, 7.6 \rangle = \langle 33,44,35,42 \rangle$$

şeklinde yazılıp Frobenius sayısını $F(Y) = 265$ bulundu. Teorem 4.3.10 yardımıyla Y sayısal yarıgrubunun frobenius sayısını hesaplanırsa:

$$Y_1 = \langle 3,4 \rangle = \{3,4,6,7,8, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu için $F(Y_1) = 5$

$$Y_2 = \langle 5,6 \rangle = \{5,6,10,11,12,15,16,17,18,20,21,22, \rightarrow\}$$

sayısal yarıgrubu için $F(Y_2) = 19$ 'dir.

Ayrıca $p = 7 \in Y_1 - \{3,4\}$ ve $q = 11 \in Y_2 - \{5,6\}$ seçildiğinden

$$F(Y) = qF(Y_1) + pF(Y_2) + qp$$

$$F(Y) = 11.5 + 7.19 + 11.7 = 265$$

bulunur.

Örnek 4.3.12

Örnek 4.3.8 'de $Y_1 = \langle 9,10,11,12 \rangle$ ve $Y_2 = \langle 3, 7, 11 \rangle$ sayısal yarıgrupları için Y_1 ve Y_2 nin yapıştırması ile edilen Y sayısal yarıgrubunu

$$Y = \langle 189,210,231,252,135,315,495 \rangle$$

şeklinde yazılıp Frobenius sayısını $F(Y) = 1851$ bulundu. Benzer şekilde Teorem 4.3.10 yardımıyla Y sayısal yarıgrubunun Frobenius sayısını hesaplanırsa:

$$Y_1 = \langle 9,10,11,12 \rangle$$

sayısal yarıgrubu için $F(Y_1) = 26$

$$Y_2 = \langle 3, 7, 11 \rangle$$

sayısal yarıgrubu için $F(Y_1) = 8$ 'dir.

$p = 45 \in Y_1 - \{9,10,11,15\}$ ve $q = 21 \in Y_2 - \{3, 7, 11\}$ seçildiğinden

$$F(Y) = qF(Y_1) + pF(Y_2) + qp$$

$$F(Y) = 21.26 + 45.8 + 21.45 = 1851$$

bulunur.



BÖLÜM V

SAYISAL YARIGRUPLARIN YAPIŞTIRMASININ RF-MATRİSİLERİ İLE İNCELENMESİ

Bu bölümde iki sayısal yarıgrupun yapıştırılması sonucu oluşan yeni sayısal yarıgrupun RF-Matrisi yapıştırmada etken olan sayısal yarıgrupların RF-Matrisleri aracılığıyla bulunabilirliği incelenecektir.

Teorem 5.1

$Y_1 = \langle p_1, \dots, p_{Y_1} \rangle$ ve $Y_2 = \langle p'_1, \dots, p'_{Y_2} \rangle$ iki sayısal yarıgrup ve $k_1 \in Y_2, k_2 \in Y_1$ olacak şekilde

$$Y = k_1 Y_1 + k_2 Y_2$$

alalım. Ayrıca

$$h_1 \notin Y_1 \text{ (sırasıyla } h_2 \notin Y_2) \text{ ve } h_1 + k_2 \in Y_1 \text{ (sırasıyla } h_2 + k_1 \in Y_2)$$

olsun. O hâlde,

$h = k_1 h_1 + k_2 h_2 + k_1 k_2 \notin Y$ olur. Ayrıca, eğer

$$h_1 + k_2 = \sum_i \alpha_i p_i \text{ ve } h_2 + k_1 = \sum_i \alpha'_i p'_i$$

şeklinde yazarsak

$$RF(h) = \begin{bmatrix} RF(h_1) & K_1 \\ K_2 & RF(h_2) \end{bmatrix}$$

olur.

Burada her bir i, j için K_1 (sırasıyla K_2) bir $Y_2 \times Y_1$ -matrisdir. (sırasıyla $Y_1 \times Y_2$ -matris)
Aynı zamanda ij -inci elemanı(sırasıyla α'_i) olan bir matristir.

Ek olarak

$$\det RF(h) = \frac{-f(\det RF(h_1)) \cdot (\det RF(h_2))}{h_1 h_2}$$

dir. Bunun için,

$$RF(h_1) = (-1)^{Y_1+1} h_1 \text{ ve } RF(h_2) = (-1)^{Y_2+1} h_2 \text{ ise}$$

$$RF(h) = (-1)^{Y_1+Y_2+1} \cdot f$$

dir. [11]

İspat:

$h \in Y$ olsun. O hâlde,

$$h = k_1 l_1 + k_2 l_2$$

sağlayan $l_1 \in Y_1$ ve $l_2 \in Y_2$ vardır. k_1 ve k_2 aralarında asal olduğundan,

$$h_1 + k_2 = l_1 + t k_2 \text{ ve } h_2 = l_2 - t k_2$$

olacak şekilde $t \in \mathbb{Z}$ vardır.

$h_1 \notin Y_1$ (sırasıyla $h_2 \notin Y_2$) olduğundan $t \leq 0$ (sırasıyla $t > 0$) elde ederiz.

Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $h \notin Y$ olur.

$$\alpha_{1j} = p_j RF(h_1) \text{ (sırasıyla } b_{1j} = p'_j RF(h_2))$$

olacak şekilde $K_1 = (\alpha_{ij})$ (sırasıyla $K_2 = (b_{ij})$) $Y_1 \times Y_1$ -matris ($Y_2 \times Y_2$ - matris)
olsun.

$i > 1$ ise $\alpha_{1j} = p_j (RF_{1j}(h_1) - RF_{1j}(h_1))$ (sırasıyla, $b_{ij} = p'_j (RF_{1j}(h_2) - RF_{1j}(h_2))$) dir. O hâlde,

$$\det K_1 = \prod_{j=1}^{r_1} p_j \det RF(h_1) \left(\text{sirasıyla } \det K_2 = \prod_{j=1}^{r_2} p'_j \det RF(h_2) \right)$$

olur.

$K'_1 = (\alpha_{ij})_{i,j>1}$ (sirasıyla $K'_2 = (\alpha_{ij})_{i,j>1}$) bir $(Y_1 - 1) \times (Y_1 - 1)$ -matris (sirasıyla $(Y_2 - 1) \times (Y_2 - 1)$ -matris) olsun. O hâlde

$$\det K_1 = h_1 \det K'_1 (\text{sirasıyla } \det K_2 = h_2 \det K'_2)$$

olur.

A köşegen elemanları $p_1, \dots, p_{r_1}, p'_1, \dots, p'_{r_2}$ olacak şekilde bir köşegen matris olsun. O hâlde

$$\begin{aligned} \det(RF(h)) &= \begin{vmatrix} h_1 & * & h_2 + k_1 & * \\ 0 & K'_1 & 0 & 0 \\ h_1 + k_2 & * & h_2 & * \\ 0 & 0 & 0 & K'_2 \end{vmatrix} \\ &= (h_1 h_2 - (h_1 + k_2)(h_2 + k_1)) \det K'_1 \cdot \det K'_2 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bunun için,

$$\det RF(h) = \frac{-h(\det RF(h_1)) \cdot (\det RF(h_2))}{h_1 h_2}$$

olur.

Örnek 5.2

$Y_1 = \langle 6, 7 \rangle$ ve $Y_2 = \langle 8, 9 \rangle$ alalım. Bu iki sayısal yarıgrubun yapıştırılmasını inceleyelim.

$Y_1 = \langle 6, 7 \rangle$ için,

- $e(Y) = \{6, 7\} = 2$
- $G(Y) = \{1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 22, 23, 29\}$
- $F(Y) = 29$

- $H(Y) = \emptyset$
- $PF(Y) = \{29\}$

$Y_2 = \langle 8,9 \rangle$ için,

- $e(Y) = \{8,9\} = 2$
- $G(Y) = \{1,2,3,4,5,6,7,10,11,12,13,14,15,19,20,21,22,23,28,29,30,31,37,38,39,46,47,55\}$
- $F(Y) = 55$
- $H(Y) = \emptyset$
- $PF(Y) = \{55\}$

Y_1 ve Y_2 nin yapıştırılmasını bulalım:

$$p = 13 \in Y_1 - \{6,7\} \text{ ve } q = 17 \in Y_2 - \{8,9\}$$

olacak şekilde p ve q seçelim. Dolayısıyla

$$p = 13 = 1.6 + 1.7$$

ve

$$q = 17 = 1.8 + 1.9$$

şeklinde olduğu açıktır. Dolayısıyla

$$Y = \langle 17.6, 17.7, 13.8, 13.9 \rangle = \langle 102, 117, 104, 117 \rangle$$

olur.

Frobenius sayısı ise Teorem 4.3.10 'dan $F(Y) = 1429$ elde edilir.

Bölüm 3 'teki bilgilerden yararlanarak Y_1 ve Y_2 sayısal yarıgruplarının RF-Matrislerini bulalım:

$Y_1 = \langle 6,7 \rangle$ için üreteçler $n_1 = 6, n_2 = 7$ olacak şekilde yazılabilir. $f \in PF(Y_1)$ olacağından,

- $29 \in PF(Y_1)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} n_j = 29$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11} n_1 + \alpha_{12} n_2 = 29$$

$$\alpha_{21} n_1 + \alpha_{22} n_2 = 29$$

$$-6 + 7\alpha_{12} = 29$$

$$6\alpha_{21} - 7 = 29$$

$$(-1)6 + (5)7 = 29$$

$$(6)6 + (-1)7 = 29$$

$$RF(29) = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $f \in PF(29)$ için RF-Matrisi yazılabilir.

$Y_2 = \langle 8, 9 \rangle$ için üreteçler $n_1 = 8, n_2 = 9$ olacak şekilde yazılabilir. $f \in PF(Y_2)$ olacağından,

- $55 \in PF(Y_2)$ için, $\alpha_{ii} = -1$ ve $\sum_{j=1}^2 \alpha_{ij} n_j = 55$ eşitliğini yazalım:

$$\alpha_{11} n_1 + \alpha_{12} n_2 = 55$$

$$\alpha_{21} n_1 + \alpha_{22} n_2 = 55$$

$$-8 + 9\alpha_{12} = 55$$

$$8\alpha_{21} - 9 = 55$$

$$(-1)8 + (7)9 = 55$$

$$(8)8 + (-1)9 = 55$$

$$RF(55) = \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

olacak şekilde $f \in PF(55)$ için RF-Matrisi yazılabilir.

Y Sayısal yarıgrubunun RF-Matrisi Teorem 5.1 'den

$$RF(1429) = \begin{bmatrix} RF(29) & M_1 \\ M_2 & RF(55) \end{bmatrix}$$

olacak şekilde yazılırsa

$$RF(185) = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

bulunur.

BÖLÜM VI

SONUÇ

Bu tezde öncelikle değişmeli cebir problemlerinde de sıklıkla kullanılan sayısal yarıgrupların yapısı incelenerek temel kavramlarıyla ilgili çalışmalar yapıp Sözde-Frobenius sayısı üzerine kurulan RF-Matrislerin simetrik, Sözde-Simetrik ve hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplardaki durumu incelenmiştir. Ardından sayısal yarıgrupların yapıştırma kolarizasyonu detaylandırılarak her serbest sayısal yarı grubun bir tam kesişim olduğu ve tam kesişim olan her sayısal yarı grubun simetrik olduğu sonucuna varılmıştır. Son olarak iki sayısal yarı grubun yapıştırılmasının RF-Matrisini bulmada izlenilebilecek yöntem üzerine çalışılmıştır.

KAYNAKLAR

- [1] Sylvester, J. J. (1884). Mathematical questions with their solutions. *Educational times*, **41(21)**, 171-178.
- [2] Rosales, J. C., Branco, M. B. (2011, December). The Frobenius problem for numerical semigroups with multiplicity four. In *Semigroup Forum* **83(3)**, 468-478. Springer-Verlag.
- [3] Rosales, J. C., García-Sánchez, P. A. (2009). *Numerical semigroups* (**20**). Springer Science & Business Media.
- [4] Herzog, J. (1970). Generators and relations of abelian semigroups and semigroup rings. *Manuscripta mathematica*, **3(2)**, 175-193.
- [5] Delorme, C. (1976). Sous-monoïdes d'intersection complète de N . In *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* **9(1)**, 145-154.
- [6] Rosales, J. C. (1997, September). On Presentations of Subsemigroups of n . In *Semigroup Forum* **55(2)**, 152-159. Springer-Verlag.
- [7] Rosales, J. C., García-Sánchez, P. A. (1995). On complete intersection affine semigroups. *Communications in Algebra*, **23(14)**, 5395-5412.
- [8] Rosales, J. C. 2001. Semigrupos numericos, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Spain.
- [9] Assi, A., García-Sánchez, P. A., Ojeda, I. (2013). Frobenius vectors, Hilbert series and gluings. *arXiv preprint arXiv:1311.1988*.
- [10] Eto, Kazufumi, 2017. on Row-Factorization matrices, *Journal of Algebra, Number Theory: Advances and applications*, **17(2)**.

ÖZ GEÇMİŞ

Ad-Soyad : Yılmaz KOÇ

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans** : 2015, Hacettepe Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Yüksek Lisans** : 2021, Gaziantep Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Cebir ve Sayılar Teorisi

MESLEKİ DENEYİM:

Yıl	Yer	Görev
2015-2016	Varlık Lisesi	Matematik Öğretmeni
2017-2018	Çizgi Eğitim Kurumu	Matematik Öğretmeni
2018-	Millî Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

TEZDEN ÜRETİLEN YAYINLAR, SUNUMLAR VE PATENTLER:

- Ö. Belgin, K. Yılmaz, 2021. The Representation of Duplication and Gluing of Almost Symmetric Numerical Semigroup With RF-Matrices, *communications in mathematics and applications*.