

SAYISAL YARIGRUPLARIN TİP DİZİLERİ

GÜLHAN ALAN

**HAZİRAN 2022
DİYARBAKIR**

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SAYISAL YARIGRUPLARIN TİP DİZİLERİ

GÜLHAN ALAN

DİCLE ÜNİVERSİTESİ LİSANSÜSTÜ EĞİTİM-ÖĞRETİM VE SINAV
YÖNETMELİĞİNİN BİR PARÇASI OLARAK
MATEMATİK ANA BİLİM DALINDA
YÜKSEK LİSANS TEZİ
OLARAK HAZIRLANMIŞTIR

HAZİRAN 2022
DİYARBAKIR

SAYISAL YARIGRUPLARIN TİP DİZİLERİ

Gülhan ALAN tarafından Dicle Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliği'nin bir parçası olarak hazırlanan bu çalışma, aşağıda bilgileri yazılı jüri üyeleri tarafından değerlendirilerek **Matematik Ana Bilim Dalı**'nda **Yüksek Lisans Tezi** olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Neslihan Dalkılıç
Müdür, **Fen Bilimleri Enstitüsü**

Prof. Dr. Sedat İLHAN
Danışman, **Matematik Bölümü,**
Dicle Üniversitesi

Sınav Jürisi:

Dr. Öğretim Üyesi Arife ATAY (*)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Prof. Dr. Sedat İLHAN (**)
Matematik Bölümü, Dicle Üniversitesi

Dr. Öğretim Üyesi Ahmet ÇELİK
Bilgisayar Teknolojileri Bölümü,
Adıyaman Üniversitesi

ONAY

Savunma Tarihi: 22 / 06 / 2022



Babama...

Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tez çalışmasında yer alan tüm bilgilerin akademik kurallara ve etik ilkelere uygun olarak elde edildiğini ve sunulduğunu beyan ederim. Ayrıca, bahse konu bu kural ve ilkelerin gerektirdiği üzere, bu çalışmada özgün olmayan tüm bilimsel içerikleri kurallara uygun biçimde alıntılıyıp kaynak gösterdiğimi beyan ederim. Beyanımınla çelişen herhangi bir delil bulunduğu takdirde tüm sorumluluğu üstleneceğimi kabul ederim.

Ad, Soyad: Gülhan ALAN

İmza:

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması aşamasında desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım her zaman sabırla ve hoşgörüyüyle yaklaşan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Sedat İlhan' a yardımlarından dolayı teşekkür eder, saygılarımı sunarım. Yüksek lisans eğitimim süresince sabırla ve ilgiyle sorularımı cevaplayan ve eğitimime büyük ölçüde katkıda bulunan değerli hocalarım Prof. Dr. H. Özlem Güney ve Dr. Öğrt. Üyesi Arife Atay' a teşekkür ederim. Bu süreçte daima yanımda olan ve desteklerini her zaman hissettiğim kıymetli aileme teşekkürü bir borç bilirim.



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	v
İÇİNDEKİLER	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
1. GİRİŞ	1
2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR.....	2
3. MATERYAL VE METOT	4
3.1 Materyal.....	4
3.2 Metot.....	4
3.3 Temel Tanımlar	5
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	12
4.1 Sayısal Yarıgrupların Tip Dizileri	12
4.2 Tip Dizileriyle İlgili Genel Sonuçlar.....	17
5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER	31
5.1 Sayısal Yarıgruplarda Taban	31
KAYNAKLAR	38
ÖZGEÇMİŞ	40

SİMGELER VE KISALTMALAR LİSTESİ

Simge	Açıklama
T	Sayısal Yarıgrup
$\langle T, * \rangle$	Cebirsel Yapı
$\langle A \rangle$	Üreteçler Kümesi
$\#(A)$	A Kümesinin Eleman Sayısı
$\mathbb{N}$	Negatif Olmayan Tamsayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar Kümesi
$g(T)$	T Sayısal Yarı grubunun Frobenius Sayısı
$G(T)$	T Sayısal Yarı grubunun Cinsi (Genusu)
$H(T)$	T 'nin Boşluklar Kümesi
$N(T)$	Belirteç Kümesi
$n(T)$	Belirteç sayısı
$\mu(T)$	T 'nin Katlılığı
$e(T)$	T 'nin Gömme Boyutu
$FH(T)$	T Sayısal Yarı grubunun Temel Boşluklar Kümesi
$EH(T)$	T Sayısal Yarı grubunun Özel Boşluklar Kümesi
$S(T)$	T Sayısal Yarı grubunun Kutup Noktalarının Kümesi
$Ap(T, m)$	T Sayısal Yarı grubunun $m \neq 0$ Elemanının Apery Kümesi
$p(T)$	T Sayısal Yarı grubunun Tipi
K	Kondüktör (İletici)
Kısaltma	Açıklama
MGB	Maksimal Gömme Boyutlu Sayısal Yarıgrup

ÖZET

SAYISAL YARIGRUPLARIN TIP DİZİLERİ

Alan, Gülhan

Yüksek Lisans, Matematik Bölümü

Danışman: Prof. Dr. Sedat İlhan

Haziran 2022, 51 sayfa

Sayısal yarıgruplar, Cebir ve Sayılar Teorisinde oldukça önemli bir yere sahiptir. İlk olarak 19.yüzyılda ele alınan sayısal yarıgruplar, zamanla ilgi odağı haline gelmiştir. Yapılan araştırmalar ile yeni tanımlar ortaya çıkmış ve günümüze kadar bu alanda pek çok çalışma yapılmıştır. Son yıllarda Topoloji, Cebirsel Geometri ve Diferansiyel Geometri alanlarında sayısal yarıgruplarla ilgili geniş uygulamalara yer verildiğini görmekteyiz. Özellikle de Grup ve Halka teorisindeki uygulamalar dikkat çekicidir. Sayısal yarıgruplar ile ilgili çalışmalar sadece bunlardan ibaret değildir. Bu tezde, sayısal yarıgruplar ve onların tip dizileri hakkında önceden yapılmış olan çalışmaları derleyerek, elde edilen sonuçları karşılaştırmak ve bunun neticesinde ortaya çıkan yeni bulguları ifade etmek amaçlanmıştır. Bu doğrultuda, tez çalışmamızda sayısal yarıgruplar ve onların tip dizileri hakkında genel bilgiler ve çeşitli kaynaklardan derlediğimiz temel tanımlar, önemli teorem ve önermelere yer verilmiştir. Sayısal yarıgruplar teorisinde önemli bir yeri olan Frobenius sayısı, Pseudo Frobenius sayısı, Simetriklik, Pseudo simetriklik ve Arf sayısal yarıgrup kavramları örneklerle incelenmiştir. Ayrıca tip dizilerinin simetrik ve pseudo simetrik sayısal yarıgruplarla olan ilişkisi ve belirteç sayısı 2, 3 ve 4 olan sayısal yarıgrupların tip dizileri verilmiştir. Tez çalışmamızda, bir sayısal yarıgrupun tip dizisini bulmak için kullanılabilecek farklı yöntemlerle beraber, verilen bir pozitif tamsayı dizisine karşılık gelecek sayısal yarıgruplar için gerekli ve yeterli koşullar verilmiştir. Aynı zamanda sayısal yarıgrupların tip dizilerini, bu yöntemlerden farklı olarak bulabileceğimiz bazı algoritmalarından bahsedilmiştir. Sayısal yarıgruplarda standart taban kavramı ifade edilmiş ve bir T sayısal yarıgrupunun standart tabanı ile tip dizisi arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir. Son olarak bir sayısal yarıgrupun standart tabanını kullanarak bahsettiğimiz algoritmalar yardımıyla tip dizisini bulacağımız örneklere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sayısal yarıgruplar, Simetrik, Pseudo simetrik, Tip dizisi

ABSTRACT

TYPE SEQUENCES OF NUMERICAL SEMIGROUPS

Alan, Gülhan

Master of Science in Department of Mathematics

Supervisor: Prof. Dr. Sedat İlhan

June 2022, 51 pages

Numerical semigroups have a very important place in Algebra and Number Theory. Numerical semigroups, which were first discussed in the 19th century, have become the focus of attention over time. With the researches, new definitions have emerged and many studies have been carried out in this field until today. In recent years, we have seen that extensive applications of numerical semigroups have been included in the fields of Topology, Algebraic Geometry and Differential Geometry. Particularly the applications in Group and Ring theory are remarkable. Studies on numerical semigroups are not limited to these. In this thesis, it is aimed to compile the previous studies on numerical semigroups and their type sequences, to compare the results obtained and to express the new findings as a result of this. In this direction, general information about numerical semigroups and their type sequences, basic definitions, important theorems and propositions compiled from various sources are included in our thesis. The concepts of Frobenius number, Pseudo Frobenius number, Symmetry, Pseudo symmetrical and Arf numerical semigroup concepts, which have an important place in the theory of numerical semigroups, are examined with examples. In addition, the relation of type sequences with symmetric and pseudo-symmetric numerical semigroups and type sequences of numerical semigroups with determine numbers 2, 3 and 4 are given. In our thesis, besides the different methods that can be used to find the type sequence of a numerical semigroup, necessary and sufficient conditions for numerical semigroups corresponding to a given positive integer sequence are given. At the same time, some algorithms where we can find the type sequences of numerical semigroups, different from these methods, are mentioned.

Keywords: Numerical semigroups, Symmetric, Pseudo-symmetric semigroups, Type sequences

1. GİRİŞ

Bu çalışmada Cebir ve Sayılar teorisinde önemli bir yeri olan sayısal yarıgruplarla ilgili günümüze kadar yapılmış olan çalışmalar derlenerek, tez çalışmamızın konusu olan tip dizileri hakkında genel bilgilere yer verilmiştir. Çalışmamızın asıl amacı, tip dizilerini farklı bir bakış ile inceleyen Marco D' Anna' nın “Sayısal yarıgrupların tip dizileri” başlıklı makalesinde yer alan teknikleri yansıtmak ve bu tekniklerle tip dizilerinden elde edilen sayısal yarıgrupların nasıl oluşturulacağını göstermektir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tez çalışmamızın içeriği hakkında temel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, sayısal yarıgruplarda tip dizileri üzerine daha önce yapılmış çalışmalar bulunmaktadır.

Üçüncü bölümde, sayısal yarıgruplar teorisinde önemli bir yere sahip olan Frobenius sayısı, Simetrik sayısal yarıgruplar, Pseudo-Simetrik sayısal yarıgruplar ve Pseudo-Frobenius sayısı gibi temel kavramlar ve bunlarla ilgili bazı teoremler verilmektedir.

Dördüncü bölümde, sayısal yarıgrupların tip dizileriyle ilgili genel sonuçlarla birlikte, belirteç sayısı 2, 3 ve 4 olan sayısal yarıgrupların tip dizileri için gerekli ve yeterli koşullar yer almaktadır.

Beşinci bölümde ise sayısal yarıgruplarda taban kavramı ile tip dizisi arasındaki ilişkiler verilmektedir.

2. ÖNCEKİ ÇALIŞMALAR

$\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$ Doğal Sayılar kümesi ve $T \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $(\mathbb{N}, +)$ yarıgrubunun sıfırını içeren T alt yarıgrubuna, sayısal yarıgrup denir. Ayrıca her sayısal yarıgrubun sonlu üreteçli olduğu bilinmektedir. Yani

$$T = \langle x_1, x_2, \dots, x_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i x_i : n_i \in \mathbb{N} \right\} \quad (2.1)$$

olacak şekilde $k \geq 1$ için $x_1, x_2, \dots, x_k \in T$ vardır.

Ayrıca,

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) = 1 \Leftrightarrow \#(\mathbb{N} \setminus T) < \infty \quad (2.2)$$

olduğunu A.Brauer' in 1942 yılındaki çalışmasından biliyoruz. Sayısal yarıgruplarla ilgili karşılaşılan problemlerin ilki 1884 yılında ortaya çıkan Sylvester problemidir. Bu problem $n_1, n_2, s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ ve $(s_1, s_2) = 1$ olacak şekilde $n_1 s_1 + n_2 s_2$ lineer kombinasyonu şeklinde yazılamayan en büyük f tam sayısının nasıl bulunacağıyla ilgilidir. Bu durum diğer matematikçilerin de dikkatini çekmiş ve Frobenius tarafından genelleştirilerek sayısal yarıgrupların minimal üreteçleri yardımıyla yarıgrupta olmayan en büyük tamsayıyı bulma problemi Frobenius problemi olarak literatüre geçmiştir. 1942 yılında Brauer çalışmasında Frobenius probleminden bahsetmiş, 1958-1978 yılları arasında konuyla ilgili birçok farklı araştırma yapılmıştır. Yapılan bu araştırmalar neticesinde sayısal yarıgruplarla ilgili yeni kavramlar ortaya çıkmıştır.

1990 da Curtis tarafından bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısını bulmada kolaylık sağlayacak formüller geliştirilmiştir.

Son yıllarda, Cebir, Topoloji, Cebirsel Geometri ve Diferansiyel Geometri alanlarında sayısal yarıgruplarla ilgili geniş uygulamalara yer verilmiştir. Özellikle Grup ve Halka teorisindeki uygulamalar oldukça önemlidir. Local, Noetherian Local, Gorenstein ve Arf halkalarının özellikleri belli koşullar altında sayısal yarıgruplar açısından karakterize edilebilmektedir. 1985 yılında Ruiz ve 1990 yılında Campillo yaptıkları çalışmalarında Arf özellikli sayısal yarıgruplar ile bir gerçel eğrinin Pisagor özelliği arasındaki yakınlığı incelemişlerdir.

1948 yılında Cahit Arf, cebirsel eğrilerin katlı noktaları üzerine yaptığı çalışmasında Arf sayısal yarıgruplarından bahsetmiştir. Bu çalışmalardan etkilenen Lipman, 1971

yılında Arf halkalarını tekrar gündeme getirmiş ve halkaların değerleri yardımıyla elde edilen sayısal yarıgruplar için Arf özelliğini ortaya çıkaran bir çalışma yapmıştır.

Barucci ve arkadaşları, 1997 yılındaki çalışmalarında sayısal yarıgruplar ve bunların tipi hakkında önemli sonuçlar elde etmişlerdir. Bununla beraber Marco D' Anna 1998 yılındaki çalışmasında tip dizilerini karakterize ederek bunlara karşılık gelen sayısal yarıgruplarını elde etmiş ve tip dizileriyle birlikte bu sayısal yarıgrupların simetrik, pseudo-simetrik ve Arf olmaları için koşullar vermiştir.

Campillo ve arkadaşları 2000 yılında, Arf sayısal yarıgrupları ile ilgili cebirsel geometrik kodların parametreleri üzerine çalışmışlardır. Ayrıca, Bras-Amaros, 2003 yılında Arf sayısal yarıgrupların yeni bir karakterizasyonu üzerine bir kısım çalışmalar yapmıştır.

Rosales ve arkadaşlarının 2000-2006 yılları arasında yaptıkları farklı çalışmalar da sayısal yarıgruplar konusunda önemli bir kaynak oluşturmaktadır.

S. İlhan 2000 yılında sayısal yarıgruplar ve tip dizileri hakkında genel bilgileri içeren çalışmasında tip dizilerinden hareketle aynı zamanda simetrik ve Arf sayısal yarıgruplar için gerekli kriterler vermiştir. Yine S. İlhan ve M. Süer tarafından 2012 yılında yapılan çalışmada bir sayısal yarıgrupun tip dizisi ile onun maksimal ve hemen hemen maksimal uzunluklu olması arasındaki ilişkilerden bahsedilmiştir.

Aureliano ve arkadaşları 2016'da tipi iki olan sayısal yarıgruplar hakkında bazı sonuçlar elde etmişlerdir. Bununla birlikte, Sanchez ve arkadaşları 2019 yılında yüksek dereceli tipe sahip hemen hemen simetrik sayısal yarıgruplar hakkında bir çalışma yapmışlardır.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde çalışmanın temelini oluşturan ve tezin daha iyi anlaşılması için gerekli olan tanım ve teoremler yer almaktadır.

3.1 Materyal

Bu tez çalışması sayısal yarıgruplar ve onların tip dizileriyle ilgili genel bilgileri derlemek ve belirli bir kurala göre yazılan tip dizilerine karşılık gelebilecek sayısal yarıgrupların varlığını göstermek üzerine kurulmuştur. Çalışmanın temelinde sayısal yarıgruplar, tip dizileri, Frobenius sayısı, Belirteç sayısı, Arf sayısal yarıgrup, Simetrik ve Pseudo simetrik gibi kavramlar kullanılmış, devamında ise, sayısal yarıgrupların tip dizilerini bulmak için kullanılan yöntemlere yer verilmiştir. Bunun için çeşitli kaynaklardan ulaştığımız ve çalışmalarımıza yön veren ilgili makaleler, kitaplar ve akademik çalışmalar materyal olarak kullanılmıştır.

3.2 Metot

Bir T sayısal yarı grubunun tip dizisini bazı yöntemlerle bulabileceğimiz gibi, farklı çalışma ve makalelerden derlediğimiz sonuçlar ışığında Frobenius sayısı $g(T)$ ve belirteç sayısı $n(T)$ olmak üzere; $n(T) = 2, 3$ ve 4 için gerek ve yeter şartlar göz önünde bulundurularak belirli bir formda verilen $\{p_1, p_2\}$, $\{p_1, p_2, p_3\}$ ve $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ şeklindeki tip dizilerine karşılık gelen sayısal yarıgrupları da farklı tekniklerle yazabileceğimizi gösterdik. Ayrıca tip dizisi verilen bir sayısal yarı grubun Frobenius sayısını, tip dizisinin elemanları cinsinden hesaplayabileceğimiz bazı formüllerden bahsettik. Boşluklar kümesi, Pseudo-Frobenius sayısı, Arf sayısal yarıgrup, Simetrik ve Pseudo-simetrik sayısal yarıgrupların tanımlarını uygulamalarıyla beraber verip, tip dizileriyle olan ilişkilerini inceledik. Farklı çalışmalardan ulaştığımız bazı sonuçlar yardımıyla $n(T) = 3$ ve $n(T) = 4$ için özel tipte ki bazı sayısal yarıgrupların Arf özellikli olduğunu örneklerle gösterdik. Bir sayısal yarı grubun maksimal uzunluklu ve hemen-hemen maksimal uzunluklu olması için gerek ve yeter koşulları açıklayan teoremlere yer verdik. Son olarak tip dizilerini bulmak için bazı algoritmalara yer verdik.

3.3 Temel Tanımlar

Çalışmamızın bu bölümünde, tez için gerekli olan tanımlar, önemli teorem ve önermeler ispatsız olarak yer almaktadır.

Tanım 3.3.1: İçinde birleşme özelliğine sahip bir ikili işlem tanımlanmış olan tek işlemli cebirsel yapıya bir *yarıgrup* denir.

Tanım 3.3.2: $\langle T, \circ \rangle$ bir yarıgrup olsun. $M \subseteq T$ olmak üzere,

$$\forall x, y \in M \text{ için } x \circ y \in M \quad (3.1)$$

oluyorsa M ye T 'nin bir alt yarıgrubu denir. Bununla birlikte birimli bir yarıgruba monoid adı verilir (Howie, 1976).

Tanım 3.3.3: T bir yarıgrup ve $B \subset T$ olsun. B yi kapsayan T nin en küçük alt yarıgrubuna B nin ürettiği yarıgrup denir. Bu durumda, B kümesine de T nin üreteçler kümesi denir ve $T = \langle B \rangle$ ile ifade edilir. Özel olarak,

$b_1 < b_2 < \dots < b_n$ olacak şekilde $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ kümesi ele alınırsa

$T = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ olarak yazılır ve T sonlu üretilmiştir denir.

Eğer $T = \langle b_1, b_2, \dots, b_n \rangle$ olacak şekilde T nin $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ üreteç kümesinden, kapsama bağıntısına göre, daha küçük bir küme bulunamıyorsa o zaman,

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ kümesine

T nin minimal üreteç sistemi denir (Rosales vd., 1999).

Tanım 3.3.4: $\mathbb{N}$ negatif olmayan tamsayılar kümesi olmak üzere $T \subseteq \mathbb{N}$ verilsin. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa T ye sayısal yarıgrup denir.

$$(1) \forall x_1, x_2 \in T \text{ için } x_1 + x_2 \in T$$

$$(2) 0 \in T$$

$$(3) \mathbb{N} \setminus T \text{ kümesi sonludur (Rosales vd., 2009).}$$

$B \subseteq \mathbb{N}, B \neq \emptyset$ ise B nin T içinde ürettiği monoid $\langle B \rangle$ ile gösterilir ve

$$\langle B \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k n_i b_i : k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, b_i \in B, n_i \in \mathbb{N} \right\} \quad (3.2)$$

şeklinde ifade edilebilir.

Ayrıca, T ye ait olan her alt monoid başka üreteçler kümesi içinde kapsanan tek türlü belirli bir minimal üreteçler kümesine sahiptir (Rosales, 2009).

Bununla birlikte,

$$B \subseteq \mathbb{N}, B \neq \emptyset \text{ ise } \#(\mathbb{N} \setminus \langle B \rangle) < \infty \Leftrightarrow \text{obeb}(B) = 1 \text{ olur (Rosales, 2009).} \quad (3.3)$$

Örnek 3.3.5:

$$\begin{aligned} T = \langle 5, 8, 11 \rangle &= \{5b_1 + 8b_2 + 11b_3, \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N} \} \\ &= \{0, 5, 8, 10, 11, 13, 15, 16, 18, \rightarrow \dots\} \end{aligned} \quad (3.4)$$

şeklinde yazılır. Burada " $\rightarrow$ " ile 18 den sonraki bütün tamsayıların T kümesine ait olduğu anlaşılmaktadır.

Örnek 3.3.6:

$$\begin{aligned} T = \langle 5, 6, 13 \rangle &= \{5b_1 + 6b_2 + 13b_3 : \quad b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{N}\} \\ &= \{0, 5, 6, 10, 11, 12, 13, 15, \rightarrow \dots\} \end{aligned} \quad (3.5)$$

olup,

$$\mathbb{N} \setminus T = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 14\} \text{ sonludur} \Leftrightarrow (5, 6, 13) = 1 \text{ dir.}$$

Örnek 3.3.7:

$$\begin{aligned} T = \langle 3, 6 \rangle &= \{3b_1 + 6b_2 : \quad b_1, b_2 \in \mathbb{N}\} \\ &= \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, \dots\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

ve $(3, 6) \neq 1$ olduğundan, $\mathbb{N} \setminus T$ sonlu değildir.

Tanım 3.3.8: T sayısal yarıgrubu $T = \langle t_1, t_2, \dots, t_n \rangle$ şeklinde yazılsın. O zaman t_1 ve n sayılarına sırasıyla T nin **katlılığı** ve **gömme boyutu** denir ve sırasıyla $\mu(T)$ ve $e(T)$ ile gösterilir.

Buna göre, Örnek 3.3.6 da verilen $T = \langle 5, 6, 13 \rangle$ sayısal yarıgrubunun katlılığı $\mu(T) = 5$ ve gömme(indirgenme) boyutu $e(T) = 3$ tür.

Önerme 3.3.9: T bir sayısal yarıgrup olmak üzere;

$$(1) \quad \mu(T) = \min(T \setminus \{0\})$$

$$(2) \quad e(T) \leq \mu(T)$$

olarak ifade edilir (Rosales ve Garcia-Sanchez, 2009).

Tanım 3.3.10: T bir sayısal yarıgrup olmak üzere, T kümesine ait olmayan en büyük tamsayı T nin **Frobenius sayısı** olarak tanımlanır ve $g(T)$ ile gösterilir. Yani,

$$g(T) = \max\{x \in \mathbb{Z}: x \notin T\} \quad (3.7)$$

olarak ifade edilir (Fröberg ve ark.,1987). Ayrıca, T bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $g(T)$ olsun. $K = g(T) + 1$ eşitliğini sağlayan K sayısı T 'nin **kondüktörü (ileticisi)** olarak isimlendirilir.

Bir sayısal yarıgrubun Frobenius sayısını hesaplamak kolay değildir. Fakat, bazı özel sayısal yarıgruplar için Frobenius sayısı kolay bir şekilde bulunabilir.

Teorem 3.3.11: Eğer bir T sayısal yarıgrubu $T = \langle x_1, x_2 \rangle$ şeklinde verilmiş ise T nin Frobenius sayısı

$$g(T) = x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 \quad (3.8)$$

formülü ile hesaplanır (Rosales, 1996).

Teorem 3.3.12: x , 2 den büyük bir çift tamsayı olmak üzere $T = \langle x, x + 2, 2x + 1 \rangle$ sayısal yarıgrubu verilsin. O zaman T nin Frobenius sayısı

$$g(T) = \frac{x^2}{2} + x + 1 \text{ şeklindedir (İlhan, 2006)} \quad (3.9)$$

Teorem 3.3.13: $T = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$ sayısal yarıgrubunda, $2 < x_1 < x_2 < x_3$ olmak üzere,

$$a \in \mathbb{N} \text{ için; } 2 < a < \frac{x_1-1}{2} + 1 \text{ ve } x_1 - a < \frac{x_3}{x_2} < x_1 - a + 1 \quad (3.10)$$

verilsin. O zaman ,

$$x_2 \equiv 1(\text{mod } x_1) \text{ ve } x_3 \equiv x_1 - a + 1(\text{mod } x_1) \text{ olmak üzere,}$$

$$g(T) = (a - 2)x_2 + x_3 - x_1 \quad (3.11)$$

şeklinde olur (Curtis, 1990).

Tanım 3.3.14: T bir sayısal grup ve $g(T)$ de onun Frobenius sayısı olmak üzere

$$n(T) = \#(\{0, 1, 2, \dots, g(T)\} \cap T) \quad (3.12)$$

sayısına, T nin **belirteç sayısı** denir (Rosales ve Garcia-Sanchez 2009).

T bir sayısal yarıgrup ise, $t_i < t_{i+1}$ ve $n = n(T)$ olmak üzere,

$$T = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = g(T) + 1, \rightarrow \dots\} \quad (3.13)$$

şeklinde yazılır. Burada ok ($\rightarrow$) ile, $g(T) + 1$ ifadesinden büyük her tamsayının T sayısal yarıgrubuna ait olduğu anlaşılmaktadır. Bu çalışmanın sonuna kadar bu notasyonu kullanacağız.

Tanım 3.3.15: T bir sayısal yarıgrup ve onun Frobenius sayısı $g(T)$ olsun. Eğer,

$$\forall x \in \mathbb{Z} \setminus T \text{ için } g(T) - x \in T \quad (3.14)$$

oluyorsa T ye **simetrik sayısal yarıgrup** adı verilir.

Öte yandan iki eleman ile üretilen her $T = \langle x_1, x_2 \rangle$ sayısal yarıgrubunun simetrik olduğu bilinmektedir (Rosales vd., 2002).

Örnek 3.3.16:

$$T = \langle 3, 11 \rangle = \{0, 3, 6, 9, 11, 12, 14, 15, 17, 18, 20, \rightarrow \dots\} \quad (3.15)$$

sayısal yarıgrubunu ele alalım. Burada $g(T) = 19$ olup,

$$\forall x \in \mathbb{Z} \setminus T \text{ için } 19 - x \in T$$

olur. Yani, T simetrik sayısal yarı gruptur. Ancak,

$$T = \langle 5, 6, 13 \rangle = \{0, 5, 6, 11, 12, 13, 15, \rightarrow \dots\} \quad (3.16)$$

sayısal yarı grubu için, $g(T) = 14$ olup,

$$x = 4 \text{ için } 14 - 4 = 10 \notin T$$

çıkar. Böylece, T sayısal yarı grubunun simetrik olmadığı görülür.

Tanım 3.3.17: T bir sayısal yarı grup ve $g(T)$ onun Frobenius sayısı olsun. Eğer $g(T)$ çift, $x \in \mathbb{Z} \setminus T$ ve $g(T) - x \notin T$ olacak şekilde sadece bir $x = g(T)/2$ tamsayısı varsa T sayısal yarı grubuna **pseudo-simetrik** denir.

Örnek 3.3.18:

$$T = \langle 5, 8, 19 \rangle = \{0, 5, 8, 10, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 21, 23, \rightarrow \dots\} \quad (3.17)$$

sayısal yarı grubunun Frobenius sayısı $g(T) = 22$ olup çifttir. Aynı zamanda,

$$x = 11 \in \mathbb{Z} \setminus T \text{ için } 22 - 11 = 11 \notin T \text{ ve } x = \frac{22}{2} = 11 \text{ olduğundan}$$

T , pseudo-simetrik bir sayısal yarı gruptur.

Not 3.3.19: Her pozitif x tamsayısı için, katlılığı x e eşit olan simetrik ve pseudo-simetrik yarı gruplar vardır.

Tanım 3.3.20: T bir sayısal yarı grup ve onun Frobenius sayısı $g(T)$ olsun.

Eğer $x \in \mathbb{Z} \setminus T$ için $g(T) - x \notin T$ oluyor ise x elemanına T nin **kutup noktası** denir. T nin bütün kutup noktalarının kümesi;

$$S(T) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus T: g(T) - x \notin T\} \text{ ile gösterilir.} \quad (3.18)$$

Teorem 3.3.21: T bir sayısal yarı grup olsun. O zaman T nin simetrik olması için gerekli ve yeterli koşul, $S(T) = \emptyset$ olmasıdır (Madero vd., 2005).

Tanım 3.3.22: T bir sayısal yarıgrup olsun. $\mathbb{N} \setminus T$ kümesinin elemanlarına T nin boşlukları (gaps) denir. T nin bütün boşluklarının kümesi $H(T)$ ile gösterilir. Bu durumda,

$$H(T) = \{x \in \mathbb{N} : x \notin T\} \quad (3.19)$$

olarak ifade edilir. Ayrıca, T bir sayısal yarıgrup olmak üzere, $G(T) = \#(\mathbb{N} \setminus T)$ sayısına, yani $H(T)$ boşluklar kümesinin eleman sayısına **T nin cinsi (genus)** denir.

Tanım 3.3.23: T bir sayısal yarıgrup ve $H(T)$ onun boşluklarının kümesi olsun. Eğer,

$$u \in H(T) \text{ için } 2u, 3u \in T$$

oluyorsa u elemanına, **T nin temel boşluğu (Fundamental gap)** denir.

T nin bütün temel boşluklarının kümesi $FH(T)$ ile gösterilir. Buna göre,

$$FH(T) = \{u \in H(T) : 2u, 3u \in T\} \quad (3.20)$$

olarak yazılır.

Tanım 3.3.24: Bir T sayısal yarıgrubunda, $2x \in T$ ve her $y \in T \setminus \{0\}$ için $x + y \in T$ olacak şekilde bir $x \in \mathbb{Z} \setminus T$ varsa, x elemanına **T sayısal yarıgrubunun özel boşluğu** denir ve T sayısal yarıgrubunun bütün özel boşluklarının kümesi $EH(T)$ ile gösterilir. Yani,

$$EH(T) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus T : 2x \in T, x + y \in T, \forall y \in T \setminus \{0\}\} \quad (3.21)$$

şeklinde yazılır.

Tanım 3.3.25: T bir sayısal yarıgrup ve $m \in T \setminus \{0\}$ olmak üzere,

$$Ap(T, m) = \{t \in T : t - m \notin T\} \quad (3.22)$$

kümesine **T nin m ye göre Apery kümesi** denir. T nin m ye göre Apery kümesinin elemanları $(\text{mod } m)$ 'ye göre kalan sınıfları içinde T ye ait en küçük tamsayılardan oluşmaktadır. Böylece,

$$\text{her } i = 1, \dots, m - 1 \text{ için } w(i) = \min\{x \in T : x \equiv i(\text{mod } m)\} \text{ olmak üzere}$$

$$\#(Ap(T, m)) = m \text{ ve } g(T) = \max(Ap(T, m)) - m \quad (3.23)$$

olur (Rosales 2000).

Örnek 3.3.26: $T = \langle 4, 7 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım. Buna göre;

$$Ap(T, 4) = \{t \in T : t - 4 \notin T\} = \{0, 7, 14, 21\} \quad (3.24)$$

ve

$$g(T) = \max(Ap(T, 4)) - 4 = 21 - 4 = 17 \quad (3.25)$$

olarak bulunur.

Tanım 3.3.27: T bir sayısal yarıgrup ve $x \in \mathbb{Z} \setminus T$ olmak üzere, her $t \in T \setminus \{0\}$ için $x + t \in T$ oluyorsa, buradaki x tamsayısına T nin **Pseudo-Frobenius sayısı** denir ve T nin bütün pseudo-Frobenius sayılarının kümesi $PF(T)$ ile gösterilir.

$$PF(T) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus T : x + t \in T, \forall t \in T \setminus \{0\}\} \quad (3.26)$$

şeklinde ifade edilir.

Ayrıca, $\#(PF(T))$ sayısı **T nin tipi** olarak ta adlandırılır (Rosales ve Branco, 2002).

Örnek 3.3.28: $T = \langle 4, 7, 9 \rangle = \{0, 4, 7, 8, 9, 11, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubu için $g(T) = 10$ olup,

$$PF(T) = \{x \in \mathbb{Z} \setminus T : x + t \in T, \forall t \in T \setminus \{0\}\} = \{5, 10\} \quad (3.27)$$

olarak bulunur ve $\#(PF(T)) = \#\{5, 10\} = 2$ olduğundan T nin tipi 2 dir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm iki kesimden oluşmaktadır. Birinci kesimde, sayısal yarıgrupların tip dizileriyle ilgili genel bilgiler yer almaktadır. Ayrıca, Simetrik, Pseudo-simetrik, Arf, maksimal ve hemen hemen maksimal uzunluklu sayısal yarıgrupları tip dizileriyle beraber incelediğimiz örnekler bulunmaktadır. İkinci kesimde ise tip dizileriyle ilgili önemli teoremler, önermeler ve bunlardan elde edilen genel sonuçlar yer almaktadır.

4.1 Sayısal Yarıgrupların Tip Dizileri

Tanım 4.1.1: T bir sayısal yarıgrup ve $j \geq 0$ için T_j ve $T(j)$ kümeleri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır

$$T_j = \{x \in T : x \geq t_j, t_j \in T\} \quad (4.1)$$

$$T(j) = (T - T_j) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_j \subseteq T\} \quad (4.2)$$

Buradan her $T(j)$ kümesinin kendisinin de bir sayısal yarıgrup olduğu açıktır. Böylece

$$T_n \subset T_{n-1} \subset \dots \subset T_1 \subset T = T_0 = T(0) \subset T(1) \subset \dots \subset T(n-1) \subset T(n) = \mathbb{N} \quad (4.3)$$

zincirini elde ederiz (D'anna,1998).

Tanım 4.1.2: T bir sayısal yarıgrup olmak üzere,

$$p(T) = \#(T(1) \setminus T) \quad (4.4)$$

sayısına T sayısal yarı grubunun **tipi** denir. Benzer şekilde, $j \geq 1$ için

$$p_j(T) = \#(T(j) \setminus T(j-1)) \text{ dir.} \quad (4.5)$$

Burada $p_1(T) = p(T)$ olduğu açıktır fakat genel olarak

$$p_j(T) \neq p(T(j)) \text{ dir.} \quad (4.6)$$

Bu şekilde elde edilen $\{p_1, p_2, \dots, p_{n(T)}\}$ dizisine, T sayısal yarı grubunun **tip dizisi** denir. Burada

$$1 \leq j \leq n(T) \text{ için } 1 \leq p_j \leq p_1 \text{ dir.} \quad (4.7)$$

Örnek 4.1.3: $T = \langle 4,6,9 \rangle = \{0,4,6,8,9,10,12, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

T nin Frobenius sayısı,

$$g(T) = 11 \text{ ve } n(T) = 6 \text{ olup,}$$

$$T(0) = T_0 = \{x \in T: x \geq t_0 = 0\} = T \quad (4.8)$$

$$T_1 = \{x \in T: x \geq t_1\} = \{4,6,8,9,10,12, \rightarrow \dots\} \text{ ve} \quad (4.9)$$

$$T(1) = \{x \in \mathbb{N}: x + T_1 \subset T\} = \{0,4,6,8, \rightarrow \dots\} \quad (4.10)$$

olarak yazılır. Bu durumda T nin tipi,

$$p_1 = p = \#(T(1) \setminus T) = \#(\{11\}) = 1 \quad (4.11)$$

bulunur. Böylece, T nin tip dizisi de $\{1,1,1,1,1,1\}$ şeklinde olur. Çünkü $1 \leq j \leq 6$ için $1 \leq p_j \leq p_1$ dir. Üstelik T simetriktir. Gerçekten de $\forall x \in \mathbb{Z} \setminus T$ için $g(T) - x = 11 - x \in T$ dir.

Örnek 4.1.4: $T = \langle 5,6,13 \rangle = \{0,5,6,10,11,12,13,15, \rightarrow \dots\}$ pseudo-simetrik sayısal yarıgrubu için $g(T) = 14$ ve $n(T) = 7$ dir. Ayrıca,

$$T(0) = T_0 = \{x \in T: x \geq t_0\} = T \quad (4.12)$$

$$T_1 = \{x \in T: x \geq t_1 = 5\} = \{5,6,10,11,12,13,15, \rightarrow \dots\} \text{ ve,} \quad (4.13)$$

$$T(1) = \{x \in \mathbb{N}: x + T_1 \subset T\} = \{0,5,6,7,10, \rightarrow \dots\} \text{ olur.} \quad (4.14)$$

Buradan da,

$$p_1 = p = \#(T(1) \setminus T) = \#(\{7,14\}) = 2 \text{ bulunur.} \quad (4.15)$$

Öte yandan,

$$T_2 = \{x \in T: x \geq t_2 = 6\} = \{6,10,11,12,13,15, \rightarrow \dots\} \quad \text{ve,} \quad (4.16)$$

$$T(2) = \{x \in \mathbb{N}: x + T_2 \subset T\} = \{0,5,6,7,9, \rightarrow \dots\} \text{ olur.} \quad (4.17)$$

Buradan da,

$$p_2 = \#(T(2) \setminus T(1)) = \#(\{9\}) = 1 \quad (4.18)$$

bulunur. Böyle devam edilirse

$$p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = 1$$

elde edilir. Yani, T nin tip dizisi $\{2,1,1,1,1,1\}$ şeklinde bulunur.

Not 4.1.5: Simetrik ve pseudo-simetrik sayısal yarıgrupların tip dizileri sırasıyla,

$$\{1,1, \dots, 1\} \text{ ve } \{2,1,1, \dots, 1\}$$

şeklindedir (D'anna, 1998).

Not 4.1.6: T sayısal yarı grubunun tip dizisinin $\{2,1,1, \dots, 1\}$ olması onun pseudo-simetrik olmasını gerektirmez. Örneğin $T = \langle 4,5,11 \rangle = \{0,4,5,8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarı grubunu alırsak tip dizisi $\{2,1,1\}$ olur. Fakat T pseudo-simetrik değildir. Çünkü T nin Frobenius sayısı, $g(T) = 7$ dir. Yani $g(T)$ çift değildir.

Tanım 4.1.7: T bir sayısal yarı grup ve onun Frobenius sayısı $g(T)$ olsun. Bu durumda T nin belirteç sayısı $n(T)$ ve tipi $p(T) = p$ olmak üzere;

(1) Eğer:

$$n(T)(p(T) + 1) = g(T) + 1 \quad (4.19)$$

oluyorsa T ye **maksimal uzunluklu** dur denir.

(2) Eğer:

$$n(T)(p(T) + 1) = g(T) + 2 \quad (4.20)$$

eşitliği sağlamıyorsa T ye **hemen hemen maksimal uzunluklu** dur denir.

Örnek 4.1.8: $T = \langle 3,10,11 \rangle = \{0,3,6,9, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarı grubunu düşünelim.

Burada $g(T) = 8$, $n(T) = 3$ ve T nin tipi $p(T) = 2$ dir. Böylece,

$$n(T)(p(T) + 1) = 3. (2 + 1) = 3.3 = 9 = 8 + 1 = g(T) + 1 \quad (4.21)$$

olduğundan T maksimal uzunlukludur.

Örnek 4.1.9: $T = \langle 3,8,10 \rangle = \{0,3,6,8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarı grubu hemen hemen maksimal uzunlukludur. Çünkü,

$$g(T) = 7, \quad n(T) = 3 \text{ ve } T \text{ nin tipi } p(T) = 2 \text{ olup}$$

$$n(T)(p(T) + 1) = 3.3 = 9 = g(T) + 2 \text{ dir.}$$

Örnek 4.1.10: $T = \langle 6,7,9,17 \rangle = \{0,6,7,9,12, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

O zaman $g(T) = 11$, $n(T) = 4$ ve T nin tipi $p(T) = 3$ olup,

$n(T)(p(T) + 1) = 4 \cdot 4 = 16$ olduğundan T , ne maksimal uzunlukludur ne de hemen hemen maksimal uzunlukludur.

Tanım 4.1.11: T bir sayısal yarıgrup olsun. Eğer her $x, y, z \in T$ için,

$$x \geq y \geq z \text{ olmak üzere, } x + y - z \in T$$

oluyor ise, T sayısal yarıgrubuna **Arf** sayısal yarıgrup denir (Rosales 2003).

Buna bağlı olarak;

$$t_1, t_2, \dots, t_n \in T \text{ için } t_1 < t_2 < \dots < t_n \text{ olmak üzere,}$$

her bir $1 \leq j \leq n(T) = n$ ve $p_j = p_j(T)$ için

$$p_j = t_j - t_{j-1} - 1 \tag{4.22}$$

oluyorsa, T **Arf** özelliklidir.

Tanım 4.1.12: Bir T sayısal yarıgrubu için, $e(T) = \mu(T)$ eşitliği sağlanıyorsa T sayısal yarıgrubuna **maksimal gömme boyutlu yarıgrup** denir.

Not 4.1.13: **Arf** yarıgruplarının maksimal gömme boyutlu oldukları bilinmektedir.

Örnek 4.1.14: $T = \langle 4,6,7,9 \rangle = \{0,4,6, \rightarrow \dots\}$ bir Arf sayısal yarıgrubudur. Çünkü, her $x, y, z \in T$ için $x \geq y \geq z$ olması koşuluyla $x + y - z \in T$ olur. Ayrıca, $g(T) = 5$, $n(T) = 2$ ve $\mu(T) = e(T) = 4$ tür. Bu yüzden T sayısal yarıgrubu maksimal gömme boyutludur. Öte yandan, T sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{p_1, p_2\} = \{3, 1\}$ olduğundan T simetrik değildir.

Örnek 4.1.15: $T = \langle 3,5 \rangle = \{0,3,5,6,8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu ele alalım.

$n(T) = 4$ ve T simetrik olduğundan tip dizisi $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{1,1,1,1\}$ şeklindedir. Ancak, $\mu(T) = 3$ ve $e(T) = 2$ yani, $e(T) \neq \mu(T)$ olduğundan, T sayısal yarıgrubu maksimal gömme boyutlu değildir.

Teorem 4.1.16: T bir sayısal yarıgrup, $n(T) = 2$ ve T nin tip dizisi $\{p_1, p_2\}$ olsun. $p_1 = p_2$ ise T sayısal yarıgrubu maksimal uzunluktadır (İlhan ve Süer, 2012).

Teorem 4.1.17: T , $n(T) = 3$ olan bir sayısal yarıgrup ve $\{p_1, p_2, p_3\}$ onun tip dizisi olsun. Bu durumda,

- a) $2p_1 = p_2 + p_3$ ise T sayısal yarıgrubu maksimal uzunluktadır.
- b) $2p_1 = p_2 + p_3 + 1$ ise T sayısal yarıgrubu hemen hemen maksimal uzunluktadır (İlhan ve Süer, 2012).

Teorem 4.1.18: T bir sayısal yarıgrup olmak üzere; $n(T) = 4$ ve $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ T nin tip dizisi olsun. O zaman,

- a) $3p_1 = p_2 + p_3 + p_4$ ise T sayısal yarıgrubu maksimal uzunluktadır.
- b) $3p_1 = p_2 + p_3 + p_4 + 1$ ise T sayısal yarıgrubu hemen hemen maksimal uzunluktadır (İlhan ve Süer, 2012).

Teorem 4.1.19: T bir sayısal yarıgrup olmak üzere; $n(T) = 2$, $n(T) = 3$ ya da $n(T) = 4$ ve T nin tip dizisi $\{p_1, p_2, \dots, p_{n(T)}\}$ olsun. Eğer $p_1 = p_2 = \dots = p_{n(T)}$ ise T sayısal yarıgrubu hem Arf hem de maksimal uzunluktadır (İlhan ve Süer, 2012).

Teorem 4.1.20: T bir sayısal yarıgrup olmak üzere; $n(T) = 2$, $n(T) = 3$ ya da $n(T) = 4$ ve T nin tip dizisi $\{p_1, p_2, \dots, p_{n(T)}\}$ olsun. Eğer $p_1 = p_2 = \dots = p_{n(T)} + 1$ ise bu durumda T sayısal yarıgrubu hem Arf, hem de hemen hemen maksimal uzunluktadır (İlhan ve Süer, 2012).

Not 4.1.21: Simetrik ve simetrik olmayan sayısal yarıgruplar, maksimal uzunluktadır ancak ve ancak bazı $\mu \geq 3$ ve bazı $n \geq 1$ değerleri için

$$\begin{aligned}
T &= \langle \mu, n\mu + 1, n\mu + 2, \dots, n\mu + (m - 1) \rangle \\
&= \{0, \mu, 2\mu, \dots, n\mu, \rightarrow \dots\}
\end{aligned} \tag{4.23}$$

olur. Buna karşılık, T sayısal yarıgrubu hemen hemen maksimal uzunlukludur ancak ve ancak T aşağıdaki yarıgruplardan biridir.

$$\begin{aligned}
(a) \quad T &= \langle 4, 5, 11 \rangle \\
(b) \quad T &= \langle 4, 7, 13 \rangle \\
(c) \quad T &= \langle \mu, (n - 1)\mu + (\mu - 1), n\mu + 1, n\mu + 2, \dots, n\mu + (\mu - 2) \rangle \\
&= \{0, \mu, 2\mu, \dots, (n - 1)\mu, (n - 1)\mu + (\mu - 1), \rightarrow \dots\}
\end{aligned}$$

4.2 Tip Dizileri ile İlgili Genel Sonuçlar

Bu kesimde tip dizileriyle ilgili olarak D'anna (1998) tarafından ispatlanan bazı önemli teorem ve önermeler yer almaktadır. Aynı zamanda, belirteç sayısı $n(T) = 2, 3$ ve 4 olan T sayısal yarıgrupları için $\{p_1, p_2, \dots, p_{n(T)}\}$ sayı dizisinin tip dizisi olması için gerekli ve yeterli koşullar belirtilmiştir.

Önerme 4.2.1: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup aynı zamanda $T \neq \mathbb{N}$ ve $g = g(T)$ olsun. O zaman, her bir $j = 1, 2, \dots, n(T)$ için aşağıdakiler sağlanır.

$$(a) \quad g(T(j)) = g(T) - t_j \tag{4.24}$$

$$(b) \quad 1 \leq p_j(T) \leq p_1(T) \tag{4.25}$$

Önerme 4.2.2: T bir sayısal yarıgrup olmak üzere; $p_j(T)$ sayılarının tanımına göre

$$\sum_{j=1}^{n(T)} p_j(T) = g(T) + 1 - n(T) \tag{4.26}$$

olduğu aşıkardır.

Önerme 4.2.3: T bir sayısal yarıgrup olmak üzere,

$$2n(T) \leq g(T) + 1 \leq (p(T) + 1)n(T) \tag{4.27}$$

şeklindedir.

Önerme 4.2.4: T bir sayısal yarıgrup olsun. O zaman ,

$$1 \leq p(T) \leq \min\{\mu(T) - 1, g(T) + 2 - 2n(T)\} \quad (4.28)$$

eşitsizliği yazılır.

Önerme 4.2.5: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup, $g = g(T)$ ve $n = n(T)$ olsun. O halde,

$$p_n = g - t_{n-1} = t_n - t_{n-1} - 1 \quad (4.29)$$

olarak yazılır.

Uyarı 4.2.6: Bir $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubu için aşağıdaki eşitsizlikleri elde ederiz:

$$p(T) \leq t_{n(T)-1} + 3 - 2n(T) \quad (4.30)$$

Veya

$$g(T) - t_{n-1} > 1 \text{ için } p(T) \leq g(T) + 2 - 2n(T) \quad (4.31)$$

Önerme 4.2.7: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup,

$$g = g(T), n = n(T) \text{ ve } p_{n-1} = p_{n-1}(T) \text{ olsun.} \quad (4.32)$$

Bu durumda,

$$p_{n-1} = \begin{cases} t_{n-1} - t_{n-2} \Leftrightarrow t_{n-1} - t_{n-2} \leq g - t_{n-1} \\ t_{n-1} - t_{n-2} - 1 \Leftrightarrow t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1} \end{cases} \quad (4.33)$$

olarak yazılır.

Önerme 4.2.8: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)-1}, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup, $g = g(T)$, $n = n(T)$ ve $p_{n-2} = p_{n-2}(T)$ olsun. O zaman,

$$p_{n-2} = \begin{cases} t_{n-2} - t_{n-3} + 1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1} \\ t_{n-1} - t_{n-3} \leq g - t_{n-2} \end{pmatrix} \\ t_{n-2} - t_{n-3} \Leftrightarrow \begin{cases} ya \begin{pmatrix} t_{n-1} - t_{n-2} \leq g - t_{n-1} \\ t_{n-1} - t_{n-3} \leq g - t_{n-2} \end{pmatrix} \\ ya da \begin{pmatrix} t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1} \\ t_{n-1} - t_{n-3} > g - t_{n-2} \\ t_{n-2} - t_{n-3} \leq g - t_{n-2} \\ t_{n-2} - t_{n-3} \neq t_{n-1} - t_{n-2} \end{pmatrix} \end{cases} \\ t_{n-2} - t_{n-3} - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} ya \begin{pmatrix} t_{n-1} - t_{n-2} \leq g - t_{n-1} \\ t_{n-1} - t_{n-3} > g - t_{n-2} \end{pmatrix} \\ ya da \begin{pmatrix} t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1} \\ t_{n-2} - t_{n-3} > g - t_{n-2} \end{pmatrix} \\ ya da \begin{pmatrix} t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1} \\ t_{n-2} - t_{n-3} = t_{n-1} - t_{n-2} \end{pmatrix} \end{cases} \\ t_{n-2} - t_{n-3} - 2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} t_{n-1} - t_{n-2} \leq g - t_{n-1} \\ t_{n-2} - t_{n-3} > g - t_{n-2} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (4.34)$$

şeklinde yazılır.

Önerme 4.2.9: T bir sayısal yarıgrup $p_j = p_j(T)$, $n = n_0 = n(T)$, $n_j = n(T(j))$ ve $g = g(T)$ olsun. O zaman, her bir $1 \leq j \leq n$ için $n_j \leq n - j$ eşitsizliği yazılır.

Uyarı 4.2.10: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)-1}, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup, $p_j = p_j(T)$, $n = n(T)$, $n_j = n(T(j))$ ve $g = g(T)$ olsun. Bu durumda

- (i) $n_n = n(\mathbb{N}) = 0$
- (ii) her bir $1 \leq j \leq n$ için $n_j \geq 1$ dir.
- (iii) $1 \leq j \leq n - 1$ için aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:
 - (a) $j - n = 1 - n + j - 1 \leq n_j - (n - j + 1) \leq n_j - n_{j-1} \leq n - j - n_{j-1} \leq n - j - 1.$
 - (b) $t_j - t_{j-1} - n + j \leq p_j \leq t_j - t_{j-1} + n - j - 1.$

Önerme 4.2.11: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)-1}, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup olmak üzere;

$p_j = p_j(T)$, $n = n_0 = n(T)$, $n_j = n(T(j))$ ve $g = g(T)$ verilsin. O zaman,

her bir $1 \leq j \leq n$ için $p_j = t_j - t_{j-1} + n_j - n_{j-1}$ olur.

Teorem 4.2.12: T bir sayısal yarıgrup, $n(T) = 2$ ve $g = g(T)$ olsun. $\{p_1, p_2\}$ pozitif tamsayı dizisinin $T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, \rightarrow \dots\}$ kümesinin bir tip dizisi olması için gerek ve yeter şart,

$$1 \leq p_2 \leq p_1 \quad \text{ve} \quad p_1 + p_2 = g - 1 \quad (4.35)$$

olmasıdır.

Örnek 4.2.13: $\{p_1, p_2\} = \{2, 2\}$ tip dizisi için, $1 \leq p_2 \leq p_1$ şartı sağlanmakta ayrıca bu tip dizisine karşılık gelen sayısal yarıgrup

$$T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, \rightarrow \dots\} = \{0, 3, 6, \rightarrow \dots\} = \langle 3, 7, 8 \rangle \text{ olup} \quad (4.36)$$

Frobenius sayısı $g(T) = 5$ bulunur. Bu durumda, $p_1 + p_2 = g - 1$ şartı da sağlanmış olur.

Teorem 4.2.14: T bir sayısal yarı grup, $n(T) = 3$ ve $g = g(T)$ olsun.

$1 \leq p_j \leq p_1$ ($j = 2, 3$) olacak şekilde pozitif tamsayıların bir $\{p_1, p_2, p_3\}$ dizisini alalım. Bu dizinin, T sayısal yarıgrupunun tip dizisi olması için gerek ve yeter şart $\{p_1, p_2, p_3\}$ dizisinin aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

$$(i) \quad p_2 \leq p_3 \quad \text{ve} \quad p_1 \geq p_2 + p_3 - 1$$

$$(ii) \quad p_2 \geq p_3 \quad \text{ve} \quad p_1 = p_2$$

$$(iii) \quad p_2 \geq p_3 \quad \text{ve} \quad p_1 \geq p_2 + p_3 + 1.$$

Burada (i) koşulu sağlanıyorsa o zaman,

$$T = \{0, p_1 + 2, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, \rightarrow \dots\} \quad (4.37)$$

şeklindedir. (ii) ve (iii) koşulları sağlanıyorsa,

$$T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, \rightarrow \dots\} \quad (4.38)$$

şeklinde yazılır.

Örnek 4.2.15: Teorem 4.2.14 te verilen (i) koşuluna göre, $1 \leq p_j \leq p_1$ ($j = 2, 3$) olmak üzere $\{p_1, p_2, p_3\} = \{4, 2, 3\}$ dizisini alalım. Bu durumda,

$$T = \{0, p_1 + 2, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, \rightarrow \dots\} = \{0, 6, 8, 12, \rightarrow \dots\} \quad (4.39)$$

sayısal yarıgrubunun tip dizisi gerçekten de $\{p_1 = 4, p_2 = 2, p_3 = 3\}$ olur:

$$T_1 = \{6, 8, 12, \rightarrow \dots\} \text{ ve } T(1) = \{0, 6, \rightarrow \dots\}$$

$$p_1 = \#(T(1) \setminus T) = \#(\{7, 9, 10, 11\}) = 4 \text{ olur.}$$

$$T_2 = \{8, 12, \rightarrow \dots\} \text{ ve } T(2) = \{0, 4, \rightarrow \dots\}$$

$$p_2 = \#(T(2) \setminus T(1)) = \#(\{4, 5\}) = 2 \text{ olur.}$$

ve

$$T_3 = \{12, \rightarrow \dots\} \text{ ve } T(3) = \{0, 1, 2, \rightarrow \dots\} = \mathbb{N}$$

$$p_3 = \#(T(3) \setminus T(2)) = \#(\{1, 2, 3\}) = 3 \text{ olur.}$$

Aynı zamanda Önerme 4.2.2 nin bir sonucu olarak

$$\sum_{j=1}^3 p_j = g(T) + 1 - n(T) = 11 + 1 - 3 = 9 \quad (4.40)$$

olduğu görülür.

Örnek 4.2.16: $n(T) = 3$ için, Teorem 4.2.14 te verilen (ii) ve (iii) koşulları için uygun sayısal yarıgrup,

$$T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, \rightarrow \dots\} \quad (4.41)$$

şeklinde yazılır.

(ii) $p_2 \geq p_3$ ve $p_1 = p_2$, koşuluna uygun olarak $\{p_1, p_2, p_3\} = \{3, 3, 2\}$ dizisini alalım.

Bu durumda, $T = \{0, 4, 8, 11, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu yazarız ve bir önceki örnekte kullandığımız yöntemle tip dizisini $\{p_1, p_2, p_3\} = \{3, 3, 2\}$ olarak buluruz.

Ayrıca, $p_j = t_j - t_{j-1} - 1$ şartı sağlandığından yani,

$$p_1 = t_1 - t_0 - 1 = 4 - 0 - 1 = 3$$

$$p_2 = t_2 - t_1 - 1 = 8 - 4 - 1 = 3$$

$$p_3 = t_3 - t_2 - 1 = 11 - 8 - 1 = 2$$

olduğundan, $T = \{0, 4, 8, 11, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunun **Arf** özellikli olduğunu söyleriz. Şimdi de,

(iii) $p_2 \geq p_3$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + 1$, koşuluna uygun olarak $\{p_1, p_2, p_3\} = \{5, 2, 2\}$ dizisini alalım.

Bu durumda, $T = \{0, 6, 9, 12, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubu yazılır ve aynı yöntemle tip dizisi bulunur. Diğer örneğimizde olduğu gibi $p_j = t_j - t_{j-1} - 1$ eşitliği sağlandığından, $T = \{0, 6, 9, 12, \rightarrow \dots\}$ aynı zamanda Arf sayısal yarıgrubudur.

Teorem 4.2.17: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)-1}, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup, $n(T) = 4$ ve $g = g(T)$ olmak üzere,

her $j = 2, 3, 4$ için, $1 \leq p_j \leq p_1$ olacak şekilde pozitif tamsayıların dört elemanlı bir $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dizisi verilsin. Bu dizinin T sayısal yarıgrubunun tip dizisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşullardan birini sağlamasıdır:

- (i) $p_3 \leq p_4$, $p_2 \leq p_4$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4 - 2$
- (ii) $p_3 \leq p_4$, $p_4 \leq p_2 \leq p_3 + p_4 - 1$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$
- (iii) $p_3 \leq p_4$, $p_4 \leq p_2 \leq p_3 + p_4 - 1$ ve $p_1 = p_2 + p_3 - 1$
- (iv) $p_3 \leq p_4$, $p_3 + p_4 - 1 \leq p_2$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4 + 2$
- (v) $p_3 \leq p_4$, $p_3 + p_4 - 1 \leq p_2$ ve $p_1 = p_2 + p_3 + 1$
- (vi) $p_3 \leq p_4$, $p_3 + p_4 - 1 \leq p_2$ ve $p_1 = p_2 + 1$
- (vii) $p_3 \geq p_4$, $1 \leq p_2 \leq p_4 + 1$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4 - 2$
- (viii) $p_3 \geq p_4$, $p_4 + 1 \leq p_2 \leq p_3 + p_4 + 1$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4$
($p_2 \neq p_3 + 1$)
- (ix) $p_3 \geq p_4$, $p_4 + 1 \leq p_2 \leq p_3 + p_4 + 1$ ve $p_1 = p_2 + p_3 - 1$
($p_2 \neq p_3 + 1$)
- (x) $p_3 \geq p_4$, $p_3 + p_4 + 1 \leq p_2$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4 + 2$
- (xi) $p_3 \geq p_4$, $p_3 + p_4 + 1 \leq p_2$ ve $p_1 = p_2 + p_3 + 1$
- (xii) $p_3 \geq p_4$, $p_3 + p_4 + 1 \leq p_2$ ve $p_1 = p_2$
- (xiii) $p_3 \geq p_4$, $p_2 = p_3$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4 + 2$

$$(xiv) \quad p_3 \geq p_4 \quad , \quad p_2 = p_3 \quad \quad \quad \text{ve} \quad \quad p_1 = p_2 + p_3 + 1$$

$$(xv) \quad p_3 \geq p_4 \quad , \quad \quad \quad \text{ve} \quad \quad p_1 = p_2 = p_3$$

Not 4.2.18: $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dizisi (i),(ii),..., (xv) şartlarından birini sağlarsa, $n(T) = 4$ ve tip dizisi tam olarak $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ olan bir T sayısal yarıgrubu oluşturabiliriz. Buna göre; $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dizisi

(1) (i) koşulunu sağlıyorsa,

$$T = \{0, p_1 + 3, p_1 + p_2 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \quad (4.42)$$

kümesi, verilen tip dizisiyle bir sayısal yarıgruptur.

(2) eğer (ii) ya da (iii) koşulunu sağlıyorsa,

$$T = \{0, p_1 + 2, p_1 + p_2 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \quad (4.43)$$

kümesi, verilen tip dizisiyle bir sayısal yarıgrup olur.

(3) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dizisi (iv),(v) ya da (vi) koşullarından birini sağlıyorsa,

$$T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \quad (4.44)$$

kümesi,

(4) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dizisinin (vii) koşulunu sağlaması durumunda,

$$T = \{0, p_1 + 3, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \quad (4.45)$$

kümesi, bu dizi için bir sayısal yarıgrup olur.

(5) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dizisi eğer (viii) ya da (ix) koşullarından birini sağlıyorsa,

$$T = \{0, p_1 + 2, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \quad (4.46)$$

kümesi, bu dizi için bir sayısal yarıgrup olur.

(6) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dizisi eğer (x),(xi),..., (xv) koşullarından birini sağlıyorsa,

$$T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \quad (4.47)$$

kümesi, $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ ile verilen tip dizisi için bir sayısal yarıgrup olur.

Örnek 4.2.19: $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{3, 1, 2, 2\}$ dizisini alalım.

$p_3 \leq p_4$, $p_2 \leq p_4$ ve $p_1 \geq p_2 + p_3 + p_4 - 2$ olduğundan, bu dizi Teorem 4.2.17 nin (i) koşulunu sağlar. Bu yüzden,

$$T = \{0, p_1 + 3, p_1 + p_2 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\}$$

$$= \{0,6,7,9,12, \rightarrow \dots\} = \langle 6,7,9,17 \rangle \text{ sayısal yarığırubunun tip dizisi olur.}$$

Gerçekten de,

$$T_1 = \{x \in T : x \geq 6\} = \{6,7,9,12, \rightarrow \dots\}$$

$$T(1) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_1 \subset T\} = \{0,6, \rightarrow \dots\}$$

$$p_1 = \#(T(1) \setminus T) = \#(\{8,10,11\}) = 3 \text{ bulunur.}$$

Benzer şekilde,

$$T_2 = \{x \in T : x \geq 7\} = \{7,9,12, \rightarrow \dots\}$$

$$T(2) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_2 \subset T\} = \{0,5, \rightarrow \dots\}$$

$$p_2 = \#(T(2) \setminus T(1)) = \#(\{5\}) = 1$$

ve

$$T_3 = \{x \in T : x \geq 9\} = \{9,12, \rightarrow \dots\}$$

$$T(3) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_3 \subset T\} = \{0,3, \rightarrow, \dots\}$$

$$p_3 = \#(T(3) \setminus T(2)) = \#(\{3,4\}) = 2$$

Son olarak,

$$T_4 = \{x \in T : x \geq 12\} = \{12, \rightarrow \dots\}$$

$$T(4) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_4 \subset T\} = \{0,1,2, \rightarrow \dots\} = \mathbb{N}$$

$$p_4 = \#(T(4) \setminus T(3)) = \#(\{1,2\}) = 2 \text{ bulunur.}$$

Böylece, T sayısal yarığırubunun tip dizisi $\{3,1,2,2\}$ şeklinde olur. Ayrıca bu sayısal yarığırubun Frobenius sayısı,

$$g(T) = \sum_{j=1}^4 p_j + 3 = 11 \tag{4.48}$$

çıkar.

Örnek 4.2.20: $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{2,2,1,2\}$ dizisini alalım.

$p_3 \leq p_4$, $p_4 \leq p_2 \leq p_3 + p_4 - 1$ ve $p_1 = p_2 + p_3 - 1$ olduğundan Teorem 4.2.17 nin (iii) koşulunu sağlar ve bu duruma uygun sayısal yarığırub

$$T = \{0, p_1 + 2, p_1 + p_2 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \dots\}$$

kümesidir. Yani,

$$T = \{0, 4, 7, 8, 11, \rightarrow \dots\} = \langle 4, 7, 13, 17 \rangle \text{ şeklinde olur.}$$

Şimdi de T nin tip dizisini bulalım:

$$T_1 = \{x \in T : x \geq 4\} = \{4, 7, 8, 11, \rightarrow \dots\}$$

$$T(1) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_1 \subset T\} = \{0, 4, 7, \rightarrow \dots\}$$

$$p_1 = \#(T(1) \setminus T) = \#(\{9, 10\}) = 2 \text{ bulunur.}$$

Aynı şekilde,

$$T_2 = \{x \in T : x \geq 7\} = \{7, 8, 11, \rightarrow \dots\}$$

$$T(2) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_2 \subset T\} = \{0, 4, \rightarrow \dots\}$$

$$p_2 = \#(T(2) \setminus T(1)) = \#(\{5, 6\}) = 2 \text{ bulunur.}$$

ve

$$T_3 = \{x \in T : x \geq 8\} = \{8, 11, \rightarrow \dots\}$$

$$T(3) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_3 \subset T\} = \{0, 3, \rightarrow \dots\}$$

$$p_3 = \#(T(3) \setminus T(2)) = \#(\{3\}) = 1 \text{ bulunur.}$$

ve

$$T_4 = \{x \in T : x \geq 11\} = \{11, \rightarrow \dots\}$$

$$T(4) = \{x \in \mathbb{N} : x + T_4 \subset T\} = \{0, 1, 2, \rightarrow \dots\} = \mathbb{N}$$

$$p_4 = \#(T(4) \setminus T(3)) = \#(\{1, 2\}) = 2 \text{ bulunur.}$$

Bu durumda T sayısal yarıgrubunun tip dizisi $\{2, 2, 1, 2\}$ şeklindedir. Aynı zamanda T nin Frobenius sayısının,

$$g(T) = \sum_{j=1}^4 p_j + 3 = 10 \tag{4.49}$$

olduğu görülür.

Not 4.2.21: Verilen tip dizisine karşılık bir tek sayısal yarıgrup geldiği gibi birden fazla sayısal yarıgrup ta gelebilir veya hiçbir sayısal yarıgrup gelmeyebilir.

Örnek 4.2.22: (a) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{3, 3, 3, 1\}$ dizisine karşılık gelen tek bir sayısal yarıgrup vardır.

Teorem 4.2.17'nin (xv) koşulunu sağladığından yani,

$$p_3 \geq p_4 \quad \text{ve} \quad p_1 = p_2 = p_3$$

olduğundan, bu duruma karşılık gelen sayısal yarıgrup,

$$\begin{aligned} T &= \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \\ &= \{0, 4, 8, 12, 14, \rightarrow \dots\} \text{ şeklinde yazılır.} \end{aligned}$$

(b) Ancak $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{3, 2, 3, 2\}$ sayı dizisi Teorem 4.2.17 de verilen koşullardan hiç birini sağlamadığından dolayı tip dizisi $\{3, 2, 3, 2\}$ olan bir sayısal yarıgrup yazılamaz.

(c) $\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{5, 1, 1, 1\}$ dizisini ele alalım.

Bu dizi Teorem 4.2.17 de verilen (i),(ii),(iv),(xiii) koşullarının dördünü de sağlar. Bu durumda, aynı tip dizisine karşılık gelen dört farklı sayısal yarıgrup vardır:

(i) koşuluna göre yazabileceğimiz sayısal yarıgrup,

$$\begin{aligned} T &= \{0, p_1 + 3, p_1 + p_2 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \\ &= \{0, 8, 9, 10, 12, \rightarrow \dots\} \text{ şeklinde olur.} \end{aligned}$$

(ii) koşuluna göre yazabileceğimiz sayısal yarıgrup,

$$\begin{aligned} T &= \{0, p_1 + 2, p_1 + p_2 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \\ &= \{0, 7, 9, 10, 12, \rightarrow \dots\} \text{ olur.} \end{aligned}$$

(iv) koşuluna göre yazabileceğimiz sayısal yarıgrup,

$$\begin{aligned} T &= \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\} \\ &= \{0, 6, 9, 10, 12, \rightarrow \dots\} \end{aligned}$$

(xiii) koşuluna göre yazabileceğimiz sayısal yarıgrup,

$$T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\}$$

$$= \{0,6,8,10,12, \rightarrow \dots\}$$

olarak bulunur.

Not 4.2.23: $n(T) = 3$ için, $\{p_1, p_2, p_3\}$ dizisi Teorem 4.2.14'ün (ii) ve (iii) koşullarını sağlıyorsa, bu tip dizisine karşılık gelen sayısal yarıgrup

$$T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, \rightarrow \dots\}$$

olur. $n(T) = 4$ için, $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ dizisi Teorem 4.2.17'nin (x), . . . , (xv) koşullarından birini sağlıyorsa, bu duruma uygun sayısal yarıgrup

$$T = \{0, p_1 + 1, p_1 + p_2 + 2, p_1 + p_2 + p_3 + 3, p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + 4, \rightarrow \dots\}$$

şeklindedir. Böylece, bu tip sayısal yarıgruplarda her bir $j = 1, 2, 3, 4$ için

$$p_j = t_j - t_{j-1} - 1 \quad (4.50)$$

şartı sağlanır. Yani, T sayısal yarıgrupları **Arf** özellikli olur.

Sonuç 4.2.24: T bir sayısal yarıgrup olsun,

$n = n(T)$, $g = g(T)$ ve her bir $j = 1, 2, 3$ için $p_j = p_j(T)$ olmak üzere

$$n = 3 \text{ ve } p_1 + p_2 + p_3 = g + 1 - 3 = 3p_1 - 2$$

veya

$$g = 3p_1 \quad (4.51)$$

olduğunu varsayalım. O zaman T , aşağıdaki sayısal yarıgruplardan biridir:

- 1) $T_1 = \{0, 4, 5, 7, \rightarrow \dots\} = \langle 4, 5, 7 \rangle$
- 2) $T_2 = \{0, 5, 6, 10, \rightarrow \dots\} = \langle 5, 6, 10, 14 \rangle$
- 3) $T_3 = \{0, 5, 7, 10, \rightarrow \dots\} = \langle 5, 7, 11, 13 \rangle$
- 4) $T_4 = \{0, p_1 + 1, 2p_1 + 2, 3p_1 + 1, \rightarrow \dots\}$

Sonuç 4.2.25: T bir sayısal yarıgrup olsun. $n = n(T)$, $g = g(T)$ ve,

$j = 1, 2, 3, 4$ için $p_j = p_j(T)$ olmak üzere;

$$n = 4 \text{ ve } p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = g + 1 - 4 = 4p_1 - 2$$

veya ($g = 4p_1 + 1$) eşitlikleri sağlanıyorsa, bu durumda T aşağıdaki yarıgruplardan biri olur:

- 1) $T_1 = \{0, 5, 6, 7, 10, \rightarrow \dots\} = \langle 5, 6, 7 \rangle$
- 2) $T_2 = \{0, 5, 6, 8, 10, \rightarrow \dots\} = \langle 5, 6, 8 \rangle$
- 3) $T_3 = \{0, 5, 9, 10, 14, \rightarrow \dots\} = \langle 5, 9, 16, 17 \rangle$
- 4) $T_4 = \{0, p_1 + 1, 2p_1 + 2, 3p_1 + 3, 4p_1 + 2, \rightarrow \dots\}$

Sonuç 4.2.26: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)-1}, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup olsun.

$p_j = p_j(T)$, $n = n(T)$ ve $n_j = n(T(j))$ ve $g = g(T)$ olsun.

Bu durumda, her bir $1 \leq j \leq n$ için ;

$$n_j + t_j = n + p_1 + p_2 + \dots + p_j \quad (4.52)$$

eşitliği sağlar.

Sonuç 4.2.27: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)-1}, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup,

$n = n(T) \geq 2$, $n_j = n(T(j))$ ve $p_j = p_j(S)$ olsun.

O zaman, her bir $1 \leq j \leq n - 1$ için;

$$\left(\sum_{i=1}^j p_i\right) + j \leq t_j \leq n + \left(\sum_{i=1}^j p_i\right) - 1 \quad (4.53)$$

eşitsizliği elde edilir.

Uyarı 4.2.28: $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)-1}, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ bir sayısal yarıgrup,

$\mu = \mu(T)$, $n = n(T) \geq 2$ ve $p_j = p_j(T)$ olmak üzere;

i) $j = 1$ olması durumunda bir önceki sonuçtan

$$p_1 + 1 \leq \mu \leq p_1 + n - 1 \quad (4.54)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu eşitsizliği p_1 i tanımlayarak ifade edecek olursak;

$$\max\{1, \mu - n + 1\} \leq p_1 \leq t_1 - 1 \quad (4.55)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca,

$$\mu - n + 1 \leq p_1 \quad (4.56)$$

eşitsizliği, özellikle $n > 1$ iken bir T sayısal yarıgrubunun simetrik olması için gerekli bir koşul olarak sunulur. Gerçekten de,

$$p_1 = 1 \text{ ise } \mu \leq n \quad (4.57)$$

olur. Bu da T sayısal yarıgrubunun simetrik olduğunu gösterir.

ii) n , çok büyük olması gerekmeyen bir sayı olmak üzere; $n > 1$ olduğunda tip dizisi $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olarak verilen bir T sayısal yarıgrubunun t_j elemanlarını sınırlayabiliriz.

Not 4.2.29: $n = n(T)$ ve $n \geq 5$ olmak üzere, tip dizisi $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olarak verilen bir $T = \{t_0 = 0, t_1, t_2, \dots, t_{n(T)-1}, t_{n(T)} = g(T) + 1, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunun aşağıdaki şartları sağladığı açıkça bilinmektedir.

$$(1) g = g(T) = p_1 + p_2 + \dots + p_n + n - 1 \quad (\text{Önerme 4.2.2 den})$$

$$(2) t_{n-1} = g - p_n \quad (\text{Önerme 4.2.5 ten})$$

$$(3) (\text{Önerme 4.2.7 den})$$

ya

$$t_{n-2} = t_{n-1} - p_{n-1} (\Leftrightarrow t_{n-1} - t_{n-2} \leq g - t_{n-1}) \quad (4.58)$$

ya da

$$t_{n-2} = t_{n-1} - p_{n-1} - 1 (\Leftrightarrow t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1}) \quad (4.59)$$

$$(4) (\text{Önerme 4.2.8 den})$$

ya

$$t_{n-3} = t_{n-2} - p_{n-2} + 1$$

$$(\Leftrightarrow t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1} \text{ ve } t_{n-1} - t_{n-3} \leq g - t_{n-2}) \quad (4.60)$$

ya da

$$t_{n-3} = t_{n-2} - p_{n-2} \left(\begin{array}{l} \Leftrightarrow ya \\ t_{n-1} - t_{n-2} \leq g - t_{n-1} \text{ ve } t_{n-1} - t_{n-3} \leq g - t_{n-2} \\ ya \text{ da} \\ t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1}, t_{n-1} - t_{n-3} > g - t_{n-2}, \\ t_{n-2} - t_{n-3} \leq g - t_{n-2} \text{ ve } t_{n-2} - t_{n-3} \neq t_{n-1} - t_{n-2} \end{array} \right) \quad (4.61)$$

ya da

$$t_{n-3} = t_{n-2} - p_{n-2} - 1 \left(\begin{array}{l} \Leftrightarrow ya \\ t_{n-1} - t_{n-2} \leq g - t_{n-1}, t_{n-1} - t_{n-3} > g - t_{n-2} \\ \text{ve } t_{n-2} - t_{n-3} \leq g - t_{n-2} \\ ya \text{ da} \\ t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1}, \text{ ve } t_{n-2} - t_{n-3} > g - t_{n-2} \\ ya \text{ da} \\ t_{n-1} - t_{n-2} > g - t_{n-1} \text{ ve } t_{n-2} - t_{n-3} = t_{n-1} - t_{n-2} \end{array} \right) \quad (4.62)$$

ya da

$$t_{n-3} = t_{n-2} - p_{n-2} - 2 (\Leftrightarrow t_{n-1} - t_{n-2} \leq g - t_{n-2}) \text{ ve } t_{n-2} - t_{n-3} > g - t_{n-2}.$$

(5) Sonuç 4.2.27 den her bir $1 \leq j \leq n - 4$ için ;

$$(\sum_{i=1}^j p_i) + j \leq t_j \leq n + (\sum_{i=1}^j p_i) - 1 \quad (4.63)$$

şeklinde yazılır. Ayrıca T nin bir sayısal yarıgrup olması için, her bir $1 \leq j, i \leq n - 1$ için $t_j + t_i \in T$ olmak zorundadır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde sayısal yarıgruplarda taban kavramı ile tip dizisi arasındaki ilişkiler verilmektedir. Ayrıca, tip dizilerini bulmak için önceki yöntemlerden farklı olarak bazı algoritmalar ve bunlarla ilgili uygulamalar yer almaktadır.

5.1 Sayısal Yarıgruplarda Taban

T sayısal yarıgrubunun sıfırdan farklı bir elemanına göre standart taban kavramını kullanarak, tip dizileri hakkında daha net bilgi elde etmek mümkündür.

Tanım 5.1.1: T bir sayısal yarıgrup ve t de onun sıfırdan farklı sabit bir elemanı olsun.

$$u_0 = t \text{ ve } u_1 = \min\{p \in T: p \not\equiv 0(mod t)\} \quad (5.1)$$

olarak alalım. Bu durumda, $u_0, u_1, \dots, u_{j-1} \in \mathbb{N}$ ve $j \geq 2$ olmak üzere,

$u_j = \min\{p \in T: p \not\equiv u_i(mod t), i = 1, \dots, j-1\}$ oluyorsa, $\{u_0, u_1, \dots, u_{t-1}\}$ sayı dizisine T sayısal yarıgrubunun $(mod t)$ ye göre **standart tabanı** denir (D'anna, 1998).

Not 5.1.2 : T sayısal yarıgrubunun standart tabanı, aynı zamanda bu yarıgrubun üreteçlerinin bir kümesidir. Bu yüzden de, T nin üreteçlerinin minimum kümesini kapsar (D'anna, 1998).

Tanım 5.1.3: $n = n(T)$ ve $u_0 = \mu = \mu(T)$ olmak üzere bir T sayısal yarıgrubunu

$$T = \{0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = g + 1, \rightarrow \dots\} \quad (5.2)$$

olarak alalım. Her bir $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$BT = BT(0) = \{u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots, u_{\mu-1}^{(0)}\} \quad (5.3)$$

Kümesine T sayısal yarıgrubunun $(mod \mu)$ ye göre **standart tabanı** denir.

Aynı zamanda, $T(j)$ sayısal yarıgrubunun $(mod \mu)$ ye göre standart tabanı ise

$$BT(j) = \{u_0^j, u_1^j, \dots, u_{\mu-1}^j\} \quad (5.4)$$

şeklinde yazılır (D'anna, 1998).

Teorem 5.1.4: $BT(0)$ ve $BT(j)$ kümeleri sırasıyla T ve $T(j)$ sayısal yarıgruplarının standart tabanı olsun Bu durumda,

$$p_j(T) = \#(T(j) \setminus T(j-1)) \quad (5.5)$$

$$= \#\{u_i^{(j-1)} : u_i^{(j-1)} \in BT(j-1), u_i^{(j-1)} \notin BT(j), 0 \leq i \leq \mu-1\} \quad (5.6)$$

$$= \#\{u_i^{(j)} : u_i^{(j)} \in BT(j), u_i^{(j)} \notin BT(j-1), 0 \leq i \leq \mu-1\} \quad (5.7)$$

$$= \#\{u_i^{(j-1)} : u_i^{(j-1)} > \mu, u_i^{(j-1)} + t \notin BT(0), 0 \leq i \leq \mu-1, t_j \leq t \leq t_{n-1}\} \quad (5.8)$$

şeklinde yazılır.

Uyarı 5.1.5: Teorem 5.1.4 ten kolaylıkla aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$p_n(T) = \#\{u_i^{(j)} : u_i^{(j-1)} > \mu\} \quad (5.9)$$

Hatta bu durum $u_i^{(j-1)} + t \notin BT(0)$ koşulunu ortadan kaldırır. Çünkü, t elemanı t_n ve t_{n-1} arasında değişmelidir (D'anna,1998).

Aşağıdaki sonuçta T sayısal yarıgrupunun tip dizisi için bir algoritma tanımlanacaktır.

Sonuç 5.1.6: T bir sayısal yarıgrup, $\mu = \mu(T)$ ve $n = n(T)$ olsun. Teorem 5.1.4 ten $T(j)$ nin $(mod \mu)$ ye göre standart tabanını belirleyen bir algoritma elde ederiz.

Böylelikle, T sayısal yarıgrupunun $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ olacak şekilde bir tip dizisi hesaplanır. Bunun için T sayısal yarıgrubu

$$T = \{0 = t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n = g + 1, \rightarrow \dots\} \quad (5.10)$$

olsun. Ayrıca $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$BT(j) = \{u_0^j, u_1^j, \dots, u_{\mu-1}^j\} \quad (5.11)$$

kümesinin $T(j)$ nin $(mod \mu)$ ye göre standart tabanı olduğunu biliyoruz. Farz edelim ki; $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, elemanları artan sırayla düzenlenen $BT(j-1)$ kümesi verilsin. Öyleyse,

$$u_0^{(j-1)} < u_1^{(j-1)} < \dots < u_h^{(j-1)} = \mu < u_{h+1}^{(j-1)} < \dots < u_{\mu-1}^{(j-1)} \quad (5.12)$$

ve $0 \leq h \leq \mu-1$ olacak şekilde bir h tamsayısı vardır. Şimdi de $a_h = \mu$ alalım.

$i \neq h$ ve $i = 0, 1, \dots, \mu-1$ için

$$a_i = \begin{cases} u_i^{(j-1)} & ; \left\{ \begin{array}{l} ya \ i < h \\ ya \ da \ \exists t \in T, t_j \leq t \leq t_{n-1}, \end{array} \right. u_i^{(j-1)} + t \in BT(0) \\ u_i^{(j-1)} - \mu & ; \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (5.13)$$

olmak üzere Teorem 5.1.4 ten

$$BT(j) = \{a_0, a_1, \dots, a_{\mu-1}\} \quad (5.14)$$

olur ve buradan da,

$$p_j(T) = \#\{i: a_i = u_i^{(j-1)} - \mu\} \quad (5.15)$$

elde edilir (D'anna,1998).

Örnek 5.1.7: $T = \langle 3,5 \rangle = \{0,3,5,6,8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarigrubunu alalım.

$n(T) = 4$ ve $\mu(T) = t_1 = 3, t_2 = 5, t_3 = 6, t_4 = 8$ ve $g(T) = 7$ dir. Şimdi de T sayısal yarigrubunun standart tabanını oluşturalım.

$$u_0 = \mu = 3 \text{ ve } u_1 = \min\{p \in T: p \not\equiv 0(mod3)\} = 5$$

$$u_2 = \min\{p \in T: p \not\equiv u_i(mod3), i = 0,1\} = 10 \text{ olur ve}$$

$$BT(0) = \{3,5,10\} \text{ şeklinde yazılır.}$$

1.adım ($j = 1$) için

$$h = 0, a_0 = 3; 5 + 5 = 10 \in BT(0) \text{ dır. Bu yüzden, } a_1 = 5$$

$$\text{her bir } k = 1,2,3 \text{ için } 10 < 7 + t_k \notin BT(0) \text{ olduğundan, } a_2 = 10 - 3 = 7 \text{ dir.}$$

Böylece ,

$$BT(1) = \{3,5,7\} \text{ ve } p(T) = p_1(T) = 1$$

olarak bulunur.

2.adım ($j = 2$) için

$$h = 0, a_0 = 3; 5 + 5 = 10 \in BT(0) \text{ dır. Bu yüzden, } a_1 = 5$$

$$\text{her bir } k = 1,2,3 \text{ için } 10 < 7 + t_k \notin BT(0) \text{ olduğundan, } a_2 = 7 - 3 = 4 \text{ olur.}$$

Böylece ,

$$BT(2) = \{3,4,5\} \text{ ve } p_2(T) = 1 \text{ bulunur.}$$

3.adım ($j = 3$) için

$h = 0, a_0 = 3; 4 + 6 = 10 \in BT(0)$ dir. Bu yüzden $a_1 = 4; 5 + 6 = 11 \notin BT(0)$ olduğundan $a_2 = 5 - 3 = 2$ olur. Böylece ,

$BT(3) = \{2,3,4\}$ ve $p_3(T) = 1$ bulunur.

4.adım ($j = 4$) için

Bu son adım olduğundan, Uyarı 5.1.5 ten

$$p_4(T) = \#\{x: x \in BT(3), x > \mu\} = \#\{4\} = 1$$

elde edilir. Ayrıca,

$h = 1, a_1 = 3, a_0 = 2$ ve $a_2 = 4 - 3 = 1$ olur.

Böylece , $BT(4) = \{1,2,3\}$ bulunur. O halde T sayısal yarıgrubunun tip dizisi

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{1,1,1,1\}$$

olacak şekilde yazılır. Şimdi de aşağıdaki sonuçta T sayısal yarıgrubunun tip dizisi için diğer bir algoritmayı tanımlayalım:

Sonuç 5.1.8: T bir sayısal yarıgrup , $n = n(T)$ ve T sayısal yarıgrubunun $(\text{mod } \mu = \mu(T) = u_0^{(0)})$ ye göre standart tabanı;

$$BT = BT(0) = \{u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots, u_{\mu-1}^{(0)}\} \quad (5.16)$$

olsun. Önceki değerlendirmede $u_j^{(0)}$ sayılarının artan düzende yerleştirildiğini varsaymıştık. Şimdi ise, $BT(0)$ kümesinin elemanlarını $(\text{mod } \mu)$ ye göre kalanlarıyla ilişkili olarak farklı bir şekilde sıralıyoruz. Yani,

$$0 \leq i \leq \mu - 1 \text{ için } f_i = \alpha_i \mu + i \text{ olmak üzere;}$$

$$\{f_0, f_1, \dots, f_{\mu-1}\} = \{u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots, u_{\mu-1}^{(0)}\} \quad (5.17)$$

olarak tanımlayalım. Açıkça görülür ki , $f_0 = \mu$ ve $\alpha_0 = 1$ dir. Üstelik, her bir $i \geq 1$ için,

$$1 \leq \alpha_i \leq n \text{ eşitsizliği vardır.}$$

Gerçekten de,

$$g(T) + \mu = \max\{f_0, f_1, \dots, f_{\mu-1}\} \text{ ve } n\mu \geq g(T) + 1 \quad (5.18)$$

olduğundan, $a_h \leq n$ olur. Kısacası Teorem 5.1.4 şunu ifade eder:

$BT(1)$ in elemanları $0 \leq i \leq \mu - 1$ için, ya $\alpha_i \mu + i$ ya da $(\alpha_i - 1)\mu + i$ dir. Ayrıca, $BT(j)$ kümesinin, $BT(j - 1)$ kümesinden elde edildiğini, yani $BT(j - 1)$ nin p_j elemanlarından μ çıkarılarak elde edildiğini ve $BT(n) = \{\mu, 1, 2, \dots, \mu - 1\}$ olduğunu biliyoruz. Önceki varsayımlardan

$$\sum_{i=1}^{\mu-1} \alpha_i - p_1 - \dots - p_n = 0 \quad (5.19)$$

yani ,

$$\sum_{i=1}^{\mu-1} \alpha_i = \sum_{j=1}^n p_j \quad (5.20)$$

elde edilir (D'anna, 1998).

Sonuç 5.1.9: T bir sayısal yarıgrup, $\mu = \mu(T)$ ve $n = n(T)$ olsun. Bu durumda,

$$(1) \quad T \text{ simetriktir} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\mu-1} \alpha_j = n$$

$$(2) \quad T \text{ pseudo - simetriktir} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{j=1}^{\mu-1} \alpha_j = n + 1$$

koşulları sağlanır (D'anna,1998).

Önerme 5.1.10: T bir sayısal yarıgrup $\mu = \mu(T)$, $n = n(T) \geq 2$ ve $p_j(T) = p_j$ olmak üzere, her bir $j = 1, 2, \dots, n$ için $1 \leq p_j \leq p_1$ olacak şekilde T nin $\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ tamsayı dizisi verilsin. Bu durumda,

$$\alpha_1 \mu + 1 = f_1, \alpha_2 \mu + 2 = f_2, \dots, \alpha_{\mu-1} \mu + \mu - 1 = f_{\mu-1} \quad (5.21)$$

şeklinde yazılan ve aşağıdaki koşulları sağlayan $\mu - 1 \geq 1$ tamsayıları vardır.

Buna göre,

(a)

$$\sum_{i=1}^{\mu-1} \alpha_i = \sum_{j=1}^n p_j \quad (5.22)$$

şeklindedir.

(b) $f_h = \alpha_h \mu + h = g(T) + \mu$ olacak şekilde $\exists h, 1 \leq h \leq \mu - 1$ dir.

(c) $\forall i, 1 \leq i \leq \mu - 1$ için $\alpha_i \leq \alpha_h$ dir. Ayrıca, $i > h$ ise $\alpha_i < \alpha_h$ olur.

(d) $0 \leq i \leq \mu - 1$ ve $x \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $x = y\mu + i$ olduğunu varsayalım.

O zaman,

$$x \in T \Rightarrow \alpha_i \leq y$$

$$x \notin T \Rightarrow \alpha_i > y$$

eşitsizlikleri vardır.

(e) $(m - 1)\mu < g(T) + 1 < m\mu$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ sayısını alalım. Eğer,

$$g(T) + 1 = (m - 1)\mu + r \quad (5.23)$$

şeklinde ise o zaman,

$$\mu - 1 - n + m \leq \#\{\alpha_i: ya \alpha_i = (m - 1) ve i \geq r ya da \alpha_i = m\} \leq t_1$$

eşitsizliği sağlanır.

$$(f) p_1(T) = \mu - 1 - \#\{f_i \in BT(0): f_i > \mu, f_i + f_v \in BT(0), \exists f_v \in BT(0)\}$$

şeklinde yazılır (D'anna,1998).

Örnek 5.1.11: $T = \langle 3,5 \rangle = \{0,3,5,6,8, \rightarrow \dots\}$ sayısal yarıgrubunu alalım. Örnek 5.1.7 den bu sayısal yarıgrubun standart tabanını

$$BT = BT(0) = \{3,5,10\}$$

olarak belirlemiştik. Şimdi de, $0 \leq i \leq 2$ için f_i sayılarını bulalım.

Sonuç 5.1.8 den, $0 \leq i \leq \mu - 1$ için $f_i = \alpha_i \mu + i$ olmak üzere,

$$\{f_0, f_1, \dots, f_{\mu-1}\} = \{u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, \dots, u_{\mu-1}^{(0)}\} \quad (5.24)$$

olduğunu biliyoruz. Öyleyse, $0 \leq i \leq 2$ için

$$BT(0) = \{f_0, f_1, f_2\} = \{u_0^{(0)}, u_1^{(0)}, u_2^{(0)}\} = \{3, 5, 10\} \quad (5.25)$$

şeklinde yazılır. O zaman,

$$f_0 = 3\alpha_0 + 0 = u_0^{(0)} = 3 \Rightarrow \alpha_0 = 1$$

$$f_1 = 3\alpha_1 + 1 = u_1^{(0)} = 10 \Rightarrow \alpha_1 = 3$$

$$f_2 = 3\alpha_2 + 2 = u_2^{(0)} = 5 \Rightarrow \alpha_2 = 1$$

olarak buluruz.

Ayrıca, Önerme 5.1.10 un (f) koşulundaki

$$p_1(T) = \mu - 1 - \#\{f_i \in BT(0): f_i > \mu, f_i + f_v \in BT(0), \exists f_v \in BT(0)\}$$

eşitliğinden

$$p_1(t) = 3 - 1 - \#(\{f_2\}) = 3 - 1 - 1 = 1$$

elde ederiz. Önerme 4.2.1 in (b) koşuluna göre

$$1 \leq p_j \leq p_1$$

olacağından

$$p_2 = p_3 = p_4 = 1$$

elde edilir. Bu durumda, T sayısal yarıgrubunun tip dizisi

$$\{p_1, p_2, p_3, p_4\} = \{1, 1, 1, 1\}$$

olarak bulunur.

KAYNAKLAR

- Abhyankar, S. S. (1967). Local rings of high embedding dimension. *American Journal of Mathematics*, 89, 1073-1077.
- Barucci, V., vd., (1997). Maximality properties in numerical semigroups and applications to one-dimensional analytically irreducible local domains. *Memoirs of The American Mathematical Society*, 598, 13-25.
- Bertin, J. ve Carbonne, P. (1977). Semi-groupes d'entiers et applications aux branches. *Journal of Algebra*, 49, 81-95.
- Brauer, A. (1942). On a problem of partitions. *American Journal of Mathematics*, 64, 299-312.
- Brown, W. C. ve Curtis, F. (1991). Numerical semigroups of maximal and almost maximal length. *Semigroup Forum*, 42, 219-235.
- Curtis, F. (1990). On formulas for the Frobenius number of a numerical semigroup. *Mathematica Scandinavica*, 67, 190-192.
- D'Anna, M. (1998). Type Sequences of Numerical Semigroups. *Semigroup Forum*, 56, 1-31.
- Dobbs, D. E. ve Matthews, L. G. (2001). On comparing two chains of numerical semigroups and detecting Arf semigroups. *Semigroup Forum*, 63, 237-246.
- Fröberg, R., vd., (1987). On numerical semigroups. *Semigroup Forum*, 35, 63-83.
- Garcia-Sanchez, P. A., vd., (2017). Parametrizing Arf numerical semigroups. *Journal of Algebra and Its Applications*, 16 (11), 31 pages.
- Garcia-Sanchez, P. A. ve Ojeda, I. (2019). Almost symmetric numerical semigroups with high type. *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 2499-2510.
- Howie, J. M. (1976). *An introduction to semigroup theory*. Academic Press, New York.
- Howie, J. M. ve Ruskuc, N. (1997). *Semigroups and Applications*. World Scientific Publishing, London.
- İlhan, S. ve Karakaş, H. İ. (2017). Arf numerical semigroups. *Turkish Journal of Mathematics*, 41, 1448-1457.
- İlhan, S. ve Süer, M. (2012). Conditions of numerical semigroups having maximal or almost maximal length. *International Journal of the Physical Sciences*, 17, 2549-2553.
- Kunz, E. (1970). The value semigroup of a one dimensional Gorenstein ring. *Proc. American Mathematical Society*, 25, 748-751.
- Madero, M. ve Herzinger, K. (2005). The Apéry sets of numerical semigroups. *Algebra Communications*, 33, 3831-3838.

- Rosales, J. C. ve Garcia-Sanchez, P. A. (2009). *Numerical Semigroups*. Springer, New York.
- Rosales, J. C. ve Garcia-Sanchez, P. A. (2005). Pseudo-symmetric numerical semigroups with three generators. *Journal of Algebra*, 291, 46-54.
- Rosales, J. C. (1996). On symmetric numerical semigroups. *Journal of Algebra*, 182, 422-434.
- Sylvester, J. J. (1884). *Mathematical questions with their solutions*. Educational Times.



ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyad, Ad

Alan, Gülhan

Eğitim Bilgileri

Derece	Kurum	Mezuniyet Yılı
Lisans	Yüzüncü Yıl Üniversitesi	2005
Lise	Turgut Özal Anadolu Lisesi	1998

İş Deneyimi

Dönem (Yıl)	Şirket, Kurum	Görev
2015-Devam ediyor	Milli Eğitim Bakanlığı	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Özel İlgiler

DİCLE ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
TEZ BENZERLİK BİLDİRİMİ FORMU

Öğrencinin Adı, Soyadı	Gülhan ALAN		
Öğrenci No	20804014		
Ana Bilim Dalı	Matematik		
Program Türü	Proje ☐	Yüksek Lisans ☒	Doktora ☐
Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	Prof. Dr. Sedat İLHAN		
(Varsa) II. Tez Danışmanı (Ünvanı, Adı, Soyadı)	-----		
Tez Başlığı	Sayısal Yarıgrupların Tip Dizileri		
RAPOR BİLGİLERİ			
Raporlama Aşaması	Tez Savunma Sınavı Sonrası		
Sayfa Sayısı	51		
Raporlama Tarihi	01.07.2022		
Benzerlik Oranı (%)	21		

Yukarıda bilgileri verilen tez çalışmamın toplam 51 sayfalık kısmına ilişkin, 01/07/2022 tarihinde şahsım/tez danışmanım tarafından turnitin isimli intihal tespit programından aşağıda belirtilen filtrelemeler uygulanarak alınmış olan intihal raporuna göre, tezimin benzerlik oranı %21 olarak tespit edilmiştir.

Uygulanan filtrelemeler:

- ☐Başlangıç Bölümleri (Kabul ve Onay sayfası, Teşekkür sayfası, Özet/Abstract) hariç
☐Kaynaklar hariç
☐Alıntılar hariç/dâhil
☒Diğer (Hiçbir filtreleme yapılmamıştır.)

Tezimin benzerlik oranı, Dicle Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü İntihal Raporu Uygulama Esaslarında belirtilen üst sınır benzerlik oranını aşmamaktadır. Benzerlik oranım üst sınır benzerlik oranının altında olsa dahi aksinin tespit edilmesi durumunda her türlü yasal sorumluluğu kabul ettiğimi ve hukuki sonuçlarına razı olduğumu bildirir, gereğini arz ederim.

Öğrencinin Adı, Soyadı: Gülhan ALAN

Tarih: 01.07.2022

İmza:

Danışman Adı, Soyadı: Prof. Dr. Sedat İLHAN İmza:

Tarih: 01.07.2022

Ana Bilim Dalı Başkanı Adı, Soyadı: Prof. Dr. İmza:

Bilal ŞEKER

Tarih:01.07.2022